

# Drgania rezonansowe w obwodzie RLC

**Drgania** określane są jako procesy, w których pewne wielkości na przemian maleją i rosną w czasie. Można podzielić je na swobodne, tłumione i wymuszone. Dla drgań wymuszonych zaobserwować można zjawisko **rezonansu**. Polega ono na wzmacnieniu amplitudy drgań, co jest spowodowane działaniem na drgający układ zewnętrznej zmiennej w czasie siły wymuszającej, charakteryzującej się częstotliwością rezonansową (bądź jej bliską). Symulacja działać będzie dla szeregowego oraz równoległego obwodu RLC, tj. takiego, w którym opornik, cewka indukcyjna oraz kondensator połączone są szeregowo, bądź równolegle. Każdy z tych elementów charakteryzuje się własną impedancją:

- impedancja opornika  $Z_R = R$ ; R - opór wyrażany w omach  $[\Omega]$
- impedancja cewki indukcyjnej  $Z_L = i\omega L$ ; L - indukcyjność cewki wyrażana w henrach [H]
- impedancja kondensatora  $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ ; C - pojemność kondensatora wyrażona w faradach [F]

W ogólności każda impedancja ma dwie składowe: rzeczywistą, czyli rezystancję R oraz urojoną, czyli reaktancję X.

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Dla obu przypadków  $\varepsilon(t) = A \sin(\omega t)$

## 1 Obwód szeregowy

W tym przypadku elementy połączone są szeregowo, zatem impedancja zastępcza jest sumą impedancji poszczególnych elementów.

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

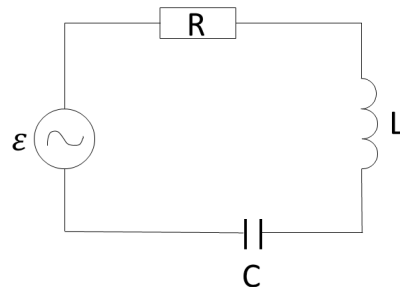
Reaktancja dla tego układu wynosi  $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ . Rezonans zachodzi, gdy reaktancja jest równa 0. Rezonans zajdzie gdy  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ . Zatem częstość rezonansowa wynosi  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , a więc częstotliwość rezonansowa, z uwagi na fakt, iż  $\omega = 2\pi f$  wyniesie  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Zapisując dla tego obwodu prawo Kirchhoffa otrzymuje się

$$\omega A \cos(\omega t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{di(t)}{R} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C}$$

Wiadomo, iż impedancja w ogólności jest wielkością zespoloną, a natężenie prądu rzeczywistą. Moduł impedancji wyraża się wzorem

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$



Rozwiązanie równania różniczkowego względem  $i(t)$  daje rozwiązanie:

$$i(\omega) = \frac{A}{|Z|} \sin(\omega t - \varphi_s)$$

$$\varphi_s = -\arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$\varphi_s$  jest to przesunięcie fazowe między prądem  $i(t)$  oraz  $\varepsilon(t)$ , stanowiącym siłę wymuszającą obwodu. Amplituda prądu płynącego w obwodzie wyraża się wzorem

$$I_{\max}(\omega) = \frac{A^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

## 2 Obwód równoległy

W obwodzie równoległym odwrotność impedancji jest sumą odwrotności impedancji poszczególnych elementów obwodu. Wielkość tę nazywa się admitancją  $Y$ .

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C - i\frac{1}{\omega L}$$

Moduł admitancji równy jest  $|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ . Zależność amplitudy prądu płynącego w obwodzie od częstotliwości wynosi

$$I_{\max}(\omega) = A \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$I_{\max}(f) = A \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)^2}$$

Przy czym dla tego obwodu rezonans znajdzie wówczas, gdy prąd płynący w obwodzie osiągnie wartość minimalną. Zatem częstotliwość rezonansową wyznacza się ze wzoru  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Przesunięcie fazowe między prądem a napięciem wynosi

$$\varphi_d = -\arctg \left( R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right)$$