Natalia Luberda

4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = \sin x$$

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 0$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Równanie}: \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = \sin x$$

- $u(0) = 0$ – w. Dirichletwa w punkcie $x=0$
- $\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 0$ – w. Cauchy'ego na brzegu $x=2$

$x \in \langle 0, 2 \rangle \qquad u(0)=0 \qquad u'(2) - u(2) = 0$

$$\Downarrow$$

$$u'(2) = u(2)$$

Warunek Dirichleta jest równy 0, więc nie wyprowadzam shiftu

$v(x)$ – funkcja testująca z przestrzeni V, gdzie V to przestrzeń, gdzie

$$\forall_{v \in V} \; v(0) = 0$$

1. Mnożymy równanie przez $v(x)$ i całkujemy

$$-\int_0^2 u''v\,dx - \int_0^2 u\cdot v\,dx = \int_0^2 \sin x \cdot v\,dx$$

Całkuje przez części:

$$\int_0^2 u''\,v\,dx = \left| \begin{matrix} i = v & i' = v' \\ j' = u'' & j = u' \end{matrix} \right| = \left[v u' \right]_0^2 - \int_0^2 u'v'\,dx =$$

$$= v(2)\underset{u(2)}{\underset{\parallel}{u'(2)}} - \underbrace{\overset{\overset{0\,(\text{brzeg})}{\parallel}}{v(0)}\,u(0)}_{0} - \int_0^2 u'v'\,dx =$$

$$= v(2)\,u(2) - \int_0^2 u'v'\,dx$$

czyli równanie ma postać:

$$\underbrace{\int_0^2 (v'u' - uv)\,dx - u(2)\cdot v(2)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^2 \sin x \cdot v\,dx}_{L(v)}$$

$$B(u,v) = \int_0^2 (u'v' - uv)\,dx - u(2)\cdot v(2)$$

$$L(v) = \int_0^2 \sin x \cdot v\,dx$$

$$B(u,v) = L(v)$$

- Obieram $n+1$ punktów na przedziale $\langle 0, 2 \rangle$ w takich samych odległościach między sobą, równą $h = \frac{2}{n}$, gdzie 2 to długość przedziału.

- tworzę funkcje bazowe:

$$e_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - h\cdot(k-1)}{h} & x \in \langle h\cdot(k-1), h\cdot k \rangle \\ \dfrac{h\cdot(k+1) - x}{h} & x \in (h\cdot k, h\cdot(k+1)\rangle \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

• tworzę pochodne funkcji bazowych:

$$
e_k'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in \langle h(k-1), h\cdot k \rangle \\ -\frac{1}{h} & x \in (h\cdot k, h\cdot(k+1)\rangle \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}
$$

• tworzę macierz:

$$
\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & \cdots & B(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n,e_1) & \cdots & B(e_n,e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_n) \end{bmatrix}
$$

gdzie: $B(e_i,e_j) = \int_p^k (e_i' e_j' - e_i \cdot e_j)\,dx - e_i(2)\cdot e_j(2)$

$$
L(e_j) = \int_p^k \sin(x)\cdot e_j\,dx
$$

Można łatwo zauważyć, że gdy

$|i-j| > 1$ to $B(e_i, e_j) = 0$

oraz, że $p = \max(0, h \cdot \max(i, j) - 1)$

ponieważ w pozostałych przypadkach

e_i albo e_j jest równe 0, i pochodna niej też 0

co sprowadza się do 0 i nie musimy uwzględniać

innych przedziałów.

oraz, że $k = \min(2, h \cdot \min(i, j) + 1)$

z tego samego powodu

oraz dodajemy punkt 0 dla którego

$u(0) = 0$

macierz rozwiązujemy odpowiednią funkcją,

a całki obliczamy korzystając z

kwadratury Gaussa-Legendre.

Całkę funkcji $L(e_j)$ rozdzieliłamy na dwie części od $h(j-1)$ do hj i od hj do $h(j+1)$ ponieważ funkcja e_j przyjmuje w tych obszarach inne wartości, a w pozostałych jest równa 0, więc je pomijam (dodatkowo

punkty całkowania muszą należeć do przedziału od 0 do 2)

U - poszukiwana funkcja
w przedziale [0, 2]