Natalia Luberda

Aproksymacja średniokwadratowa - przy pomocy wielomianów trygonometrycznych

1. Dane techniczne:

Do obliczeń użyłam języka Python 3.9, korzystając głównie z bibliotek numpy, Math i pyplot. System operacyjny, na którym pracowałam to Windows 10. Procesor komputera to Intel® Core™ i5-10210U CPU @ 1.60GHz 2.11GHz, a ilość pamięci RAM to 8GB.

2. Wzór oraz wykres funkcji użytej do analizy:

Wykres I: Funkcja $f(x)$ na przedziale $<-\pi, 2*\pi>$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-sin(3*x)}\,, gdzie\ x\ \in <-\pi, 2*\pi>}$$

Wzór I: Przydzielona funkcja $f(x)$

3. Aproksymacja:

Aproksymacja to przybliżanie funkcji $y = F(x)$ za pomocą „prostszej" należącej do określonej klasy funkcji $y = f(x)$, gdzie $F(x)$ to funkcja aproksymowana i może być znana, podana jako tablica wartości eksperymentalnych (z błędami, ale wtedy interpolacja nie ma sensu), a $f(x)$ to funkcja aproksymująca (przybliżenie F(x)). W zależności od sposobu mierzenia błędu aproksymacji rozróżnia się dwa rodzaje:

- aproksymację jednostajną

- aproksymację średniokwadratową

4. Aproksymacja średniokwadratowa przy pomocy wielomianów trygonometrycznych:

Aproksymacja średniokwadratowa to technika matematyczna, która polega na znalezieniu funkcji, która najlepiej przybliża zadane dane numeryczne. Metoda ta polega na minimalizacji sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji aproksymującej a wartościami rzeczywistymi.

Konkretniej, jeśli mamy dane numeryczne (węzły) w postaci par (x, y), gdzie x to argumenty, a y to wartości odpowiadające im funkcji, to aproksymacja średniokwadratowa polega na znalezieniu funkcji $f(x)$, która minimalizuje wartość sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji $F(x)$ dla każdego x, a wartościami f(x).

Metoda ta jest szczególnie przydatna w przypadkach, gdy dane numeryczne nie odpowiadają żadnej znanej funkcji, ale chcemy znaleźć funkcję, która jak najlepiej je przybliża. Może być również stosowana w celu redukcji szumu lub usuwania odstających punktów danych.

Funkcję aproksymującą wybiera się najczęściej w postaci wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$$

Wzór II: Postać uogólniona funkcji aproksymującej

,w którym funkcje $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ są wybranymi funkcjami bazowymi m+1 wymiarowej przestrzeni liniowej. W takim przypadku zadanie aproksymacji sprowadza się do określenia współczynników $a_0, a_1, \dots, a_m$.

W tym przypadku w charakterze funkcji bazowych przyjmujemy:

$$(\varphi_k(x)) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(mx), \cos(mx)$$

Baza trygonometryczna

Zakładamy, że aproksymowana funkcja $F(x)$ jest funkcją ciągłą, okresową o okresie podstawowym równym 2π oraz, że znane są jej wartości w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, będących punktami odcinka $[-\pi, \pi]$, określonymi wzorem:

$$x_i = \frac{2\pi}{n-1} i - \pi, \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n\text{-}1$$

Wzór III: Wartości w węzłach x_i

Elementy bazy są do siebie ortogonalne (tzn. $\varphi_i(x) \cdot \varphi_{i+1}(x) = 0$) , otrzymamy więc układ dobrze uwarunkowany, dlatego że niezerowe elementy znajdą się jedynie na głównej przekątnej macierzy współczynników (nie musimy więc obliczać układu równań, bo od razu dostaniemy szukane wartości), to policzenie go nie będzie skomplikowane.

5. Rozwiązanie zadania:

Można zauważyć, że funkcja w punkcie 4 spełnia cztery warunki Dirichleta, to oznacza to, że można ją rozwijać w szereg trygonometryczny Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$. Następnie, po przekształceniu i dostosowaniu postaci szeregu do problemu dyskretnego, otrzymujemy wzory, które pozwalają nam wyznaczyć wielomian aproksymacyjny stopnia m. Innymi słowy, możemy przybliżyć naszą funkcję za pomocą wielomianu o stopniu m, korzystając z odpowiednich wzorów na szereg Fouriera.

$$G_m(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{i=1}^{m} (a_i \cdot \cos(ix) + b_i \cdot \sin(ix))$$

Wzór IV: Wzór na wielomian aproksymacyjny

gdzie:

$$a_i = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \cos(ix_k)$$

Wzór V: Wzór na współczynnik a_i

$$b_i = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \sin\,(ix_k)$$

Wzór VI: Wzór na współczynnik b_i

Należy również pamiętać, że najwyższy stopień jak może przyjąć funkcja wynosi:

$$m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

Wzór VII: Wzór na najwyższy stopnień m przy n węzłach

W innym przypadku problem ten jest źle uwarunkowany. Dodatkowo musimy każdy z punktów oraz węzłów przeskalować tak, aby znalazł się on w przedziale $[-\pi, \pi]$, za pomocą wzoru:

$$x_i' = \frac{x_i - a}{b - a} \cdot (b' - a') + a'$$

Wzór VIII: Przeskalowanie x_i , który jest w przedziale $[a, b]$, na x'_i znajdujący się w przedziale $[a', b']$.

6. Analiza dokładności przybliżenia funkcji przez funkcję aproksymującą:

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką funkcja aproksymująca przybliża zadaną funkcję $F(x)$ skorzystamy z wymienionych niżej wskaźników, pozwalających na określenie dokładności. Pomiar dokładności przeprowadzimy dla 1000 równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$.

- Największa różnica miedzy wartością przyjmowaną przez aproksymowaną funkcję $F(x)$ a wartością funkcji aproksymującej $f(x)$.

$$\max_k\{|F(x_k) - f(x_k)|\} \qquad \textbf{Wzór IX}$$

$$\text{,gdzie } k \in \{1,2, \dots 1000\}$$

- Pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji $F(x)$ a wartościami aproksymującej funkcji $f(x)$.

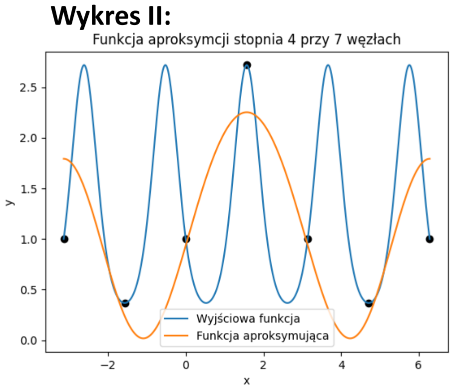
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(F(x_i) - f(x_i))^2} \qquad \textbf{Wzór X}$$

a) Porównanie wielomianów dla ustalonego stopnia wielomianu – m:

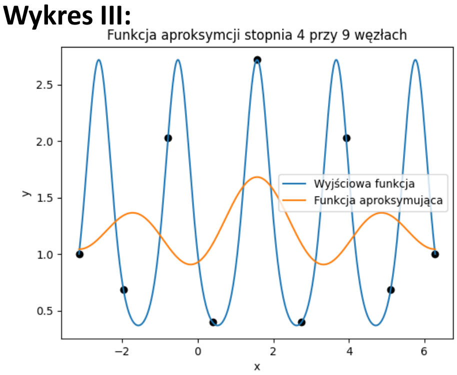
Będziemy analizować dokładności aproksymacji przy m (stopniu wielomianu) równym 4,7,12 i różnej liczbie węzłów.

- Dla 4 stopnia:

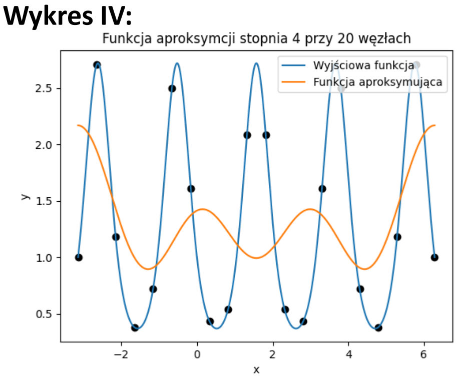
Wykres II:



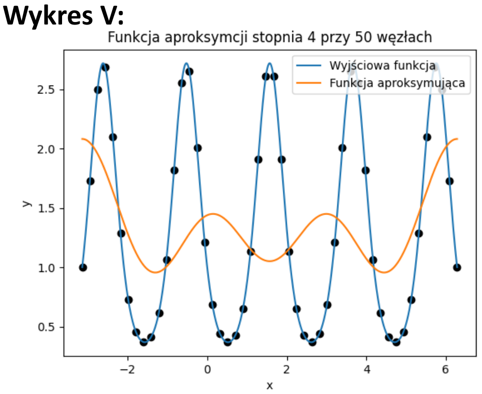
Wykres III:



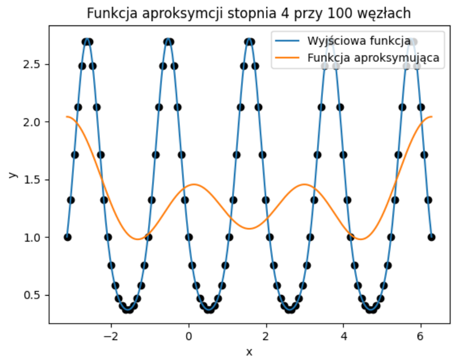
Wykres IV:



Wykres V:



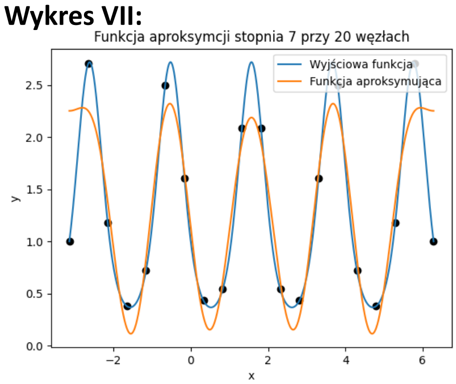
Wykres VI:



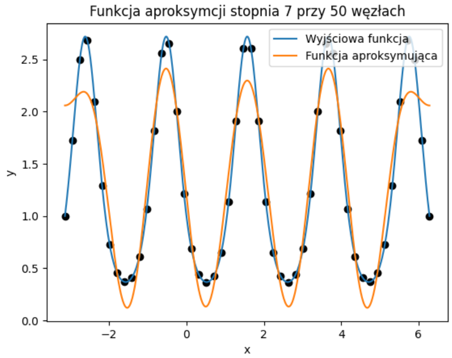
Wykresy wielomianu aproksymującego dla stopnia 4 i kolejno liczby węzłów 7,9,20,50,100 oraz funkcji wyjściowej.

- Dla 7 stopnia:

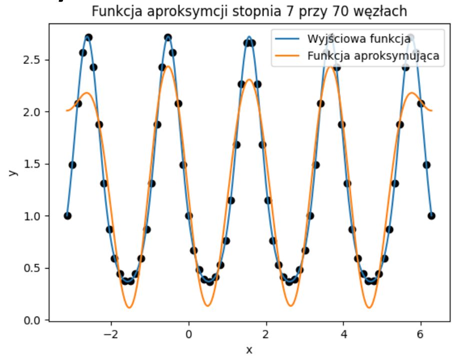
Wykres VII:



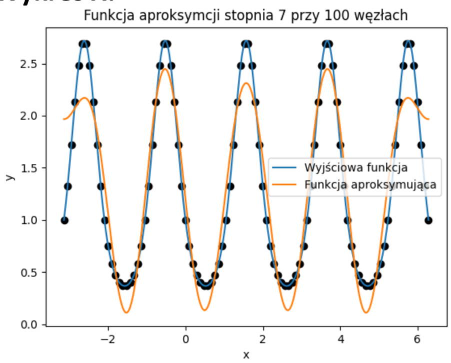
Wykres VIII:



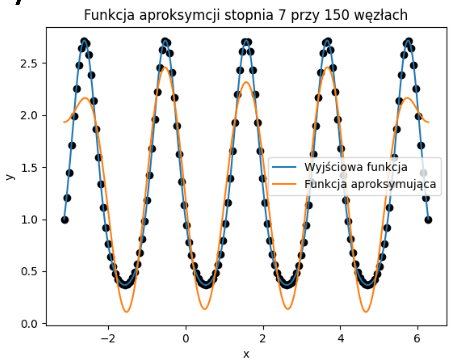
Wykres IX:



Wykres X:



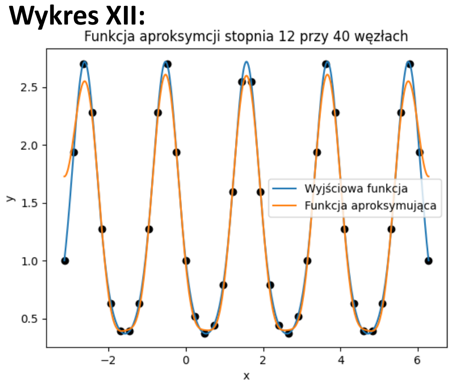
Wykres XI:



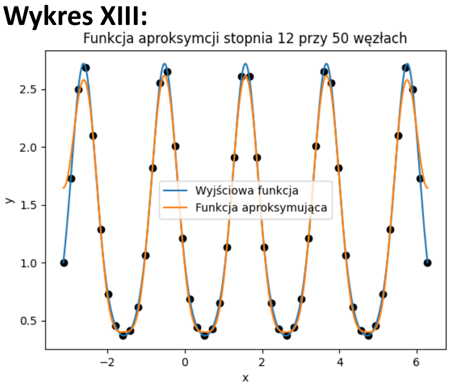
Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 7 i kolejno liczby węzłów 20,50,70,100,150 oraz funkcji wyjściowej.

- Dla 12 stopnia:

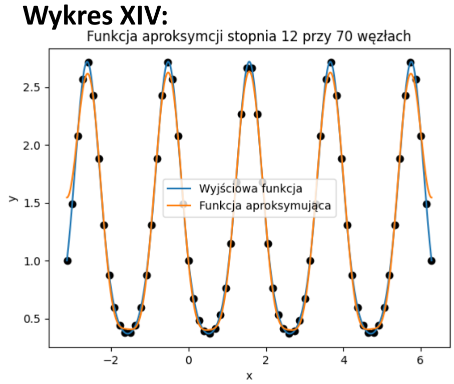
Wykres XII:



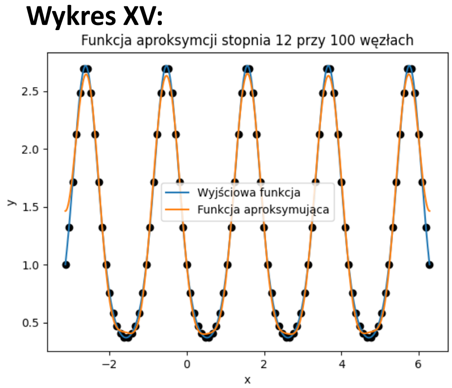
Wykres XIII:



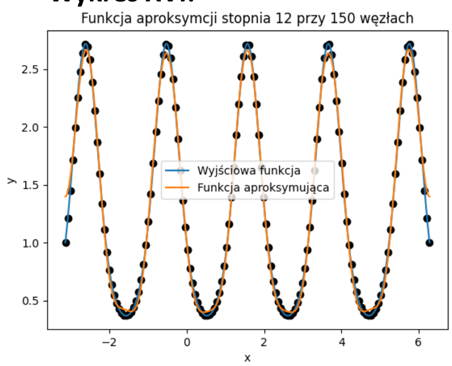
Wykres XIV:



Wykres XV:



Wykres XVI:



Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 12 i kolejno liczby węzłów 40,50,70,100,150 funkcji wyjściowej.

- **Wnioski i podsumowanie oraz prezentacja błędów:**

Liczba węzłów	Wzór X	Wzór XI
7	2,425664	33,755437
9	1,756232	28,287590
20	1,726101	24,906077
50	1,667512	24,779250
100	1,648074	24,754257

Tabela I: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 4 dla różnej liczby węzłów, przy zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

Liczba węzłów	Wzór X	Wzór XI
20	1,251337	9,330048
50	1,058728	8,518785
70	1,007608	8,407836
100	0,966421	8,342034
150	0,932753	8,303508

Tabela II: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 7 dla różnej liczby węzłów, przy zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

Liczba węzłów	Wzór X	Wzór XI
40	0,726354	3,726420
50	0,645415	3,197729
70	0,544210	2,580857
100	0,462835	2,140227
150	0,396534	1,841426

Tabela III: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 12 dla różnej liczby węzłów, przy zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

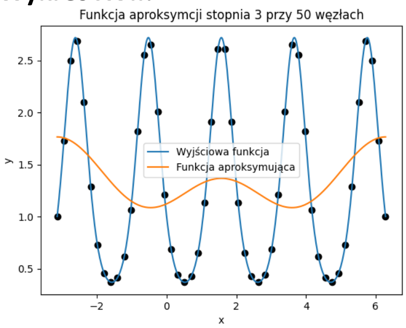
Z wykresów i tabelek można zauważyć, że im więcej węzłów tym funkcja aproksymująca, również bardziej przypomina funkcję pierwotną, w tym przypadku wartości błędów wraz ze wzrostem liczby węzłów cały czas maleją Można również zaobserwować na wykresach, że im wyższy stopień wielomianu tym dokładniej funkcja zaczyna przypominać kształtem funkcje właściwą (wykresy VI,XI, XVI). Z wykresów i tabelek można wywnioskować, że największą dokładność ma wielomian stopnia 12 przy 150 węzłach.

b) Porównanie wielomianów dla ustalonej liczby węzłów – n:

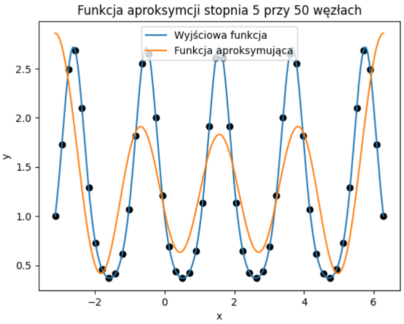
Natępnie ustalamy liczbę węzłów, którę kolejno będą wynosić 50,100,150 i przy różnych stopniach będziemy analizować dokładności aproksymacji.

- **Dla n = 50:**

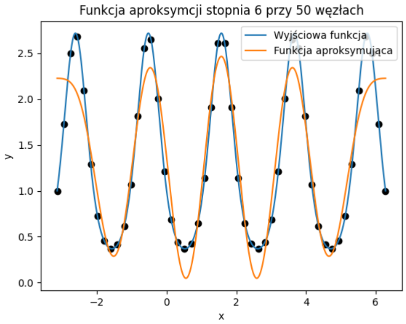
Wykres XVII:



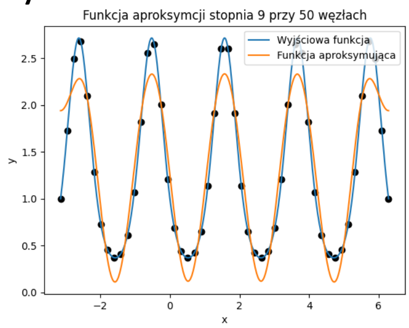
Wykres XVIII:



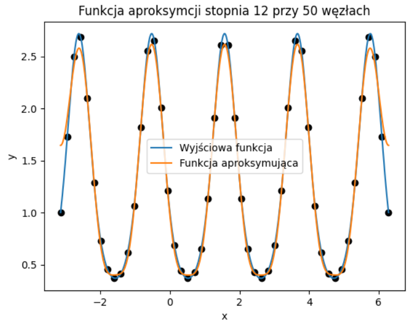
Wykres XIX:



Wykres XX:



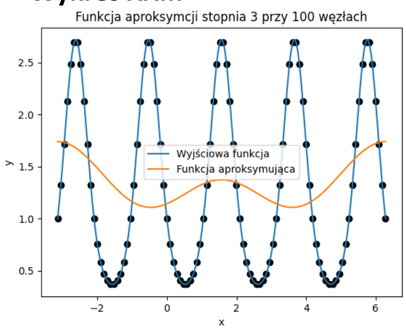
Wykres XXI:



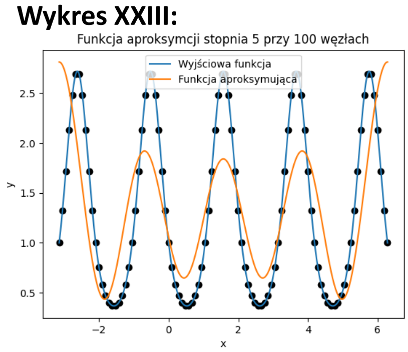
Wykresy wielomianu aproksymującego o 50 węzłach i kolejno stopniach 3,5,6,9,12 oraz zadanej funkcji.

- **Dla n = 100:**

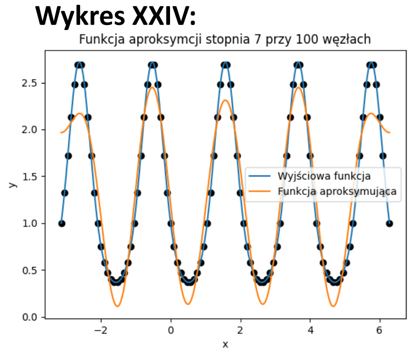
Wykres XXII:



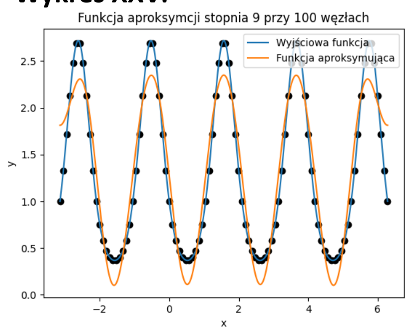
Wykres XXIII:



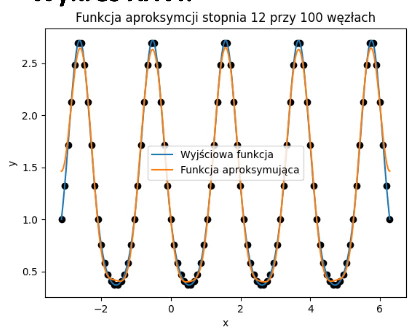
Wykres XXIV:



Wykres XXV:



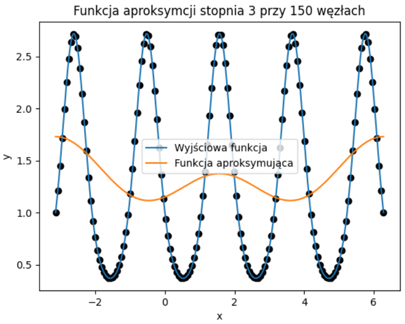
Wykres XXVI:



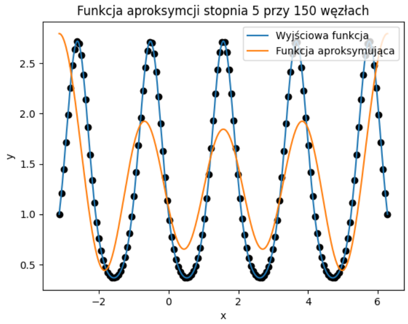
Wykresy wielomianu aproksymującego o 100 węzłach i kolejno stopniach 3,5,7,9,12 oraz zadanej funkcji.

- **Dla n = 150:**

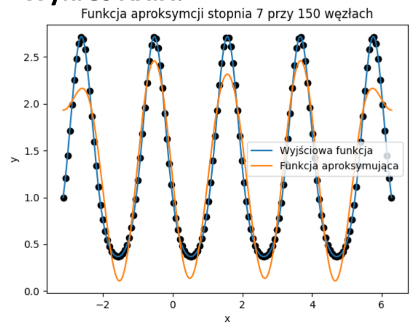
Wykres XXVII:



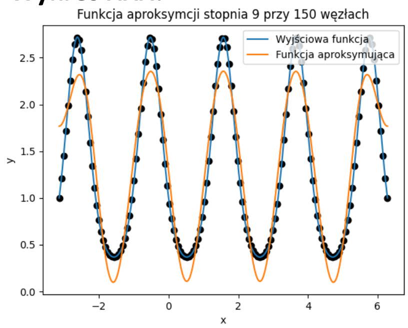
Wykres XXVIII:



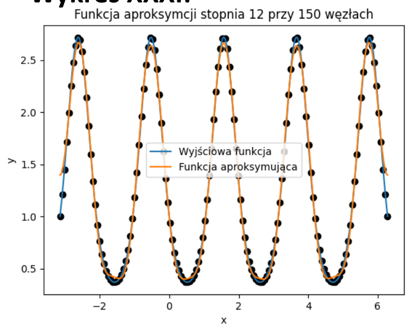
Wykres XXIX:



Wykres XXX:



Wykres XXXI:



Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 12 i kolejno liczby węzłów 15,20,40,60,90 oraz funkcji wyjściowej.

- **Wnioski i podsumowanie oraz prezentacja błędów:**

Stopień wielomianu	Wzór X	Wzór XI
3	1,632032	25,567950
5	1,861070	18,119018
6	1,226710	9,684861
9	0,941829	8,008174
12	0,645415	3,197729

Tabela IV: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy 50 węzłach i różnych stopniach wielomianu oraz zaokrągleni 6 miejsc po przecinku.

Stopień wielomianu	Wzór X	Wzór XI
3	1,610227	25,551112
5	1,811715	18,077919
7	0,966421	8,342034
9	0,813730	7,750946
12	0,462835	2,140227

Tabela V: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy 100 węzłach i różnych stopniach wielomianu oraz zaokrągleni 6 miejsc po przecinku.

Stopień wielomianu	Wzór X	Wzór XI
3	1,602689	25,547527
5	1,793285	18,068493
7	0,932753	8,303508
9	0,767164	7,694798
12	0,396534	1,841426

Tabela VI: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy 150 węzłach i różnych stopniach wielomianu oraz zaokrągleni 6 miejsc po przecinku.

Możemy dojść do wniosku, że im wyższy stopień tym funkcja aproksymująca, również bardziej przypomina funkcję wyjściową.

Początkowo z wykresów można było zauważyć, że im wyższy stopień wielomianu tym funkcja, aproksymująca, bardziej przypomina zadaną funkcję, jednak w tym przypadku już przy 7/12 stopniach funkcja ta osiągała bardzo dobre przybliżenie, o wiele lepsze niż funkcja aproksymacji wielomianami algebraicznymi.

Dodatkowo na wykresach nie zauważamy efektu Rungego przy wzroście stopnia wielomianu.

Sprawdziłam jak zachowa się funkcja przy 50,90 stopniu i 300 węzłach. Dokładność wzrasta cały czas ze wzrostem stopnia wielomianu (jednak różnica pomiędzy wzrostami dokładności jest bardzo mała, a tak naprawdę już od 12 stopni możemy w dość precyzyjny sposób przybliżyć funkcję pierwotną).

7. Ogólne podsumowanie i wnioski:

W celu potwierdzenia i uściślenia moich wcześniejszych wniosków obliczyłam błędy aproksymacji funkcji f dla różnych wartości liczby węzłów n (przybierają one wartości od 20 do 100 , co 5) i stopnia wielomianu m o wartościach od 3 do 16. Stworzyłam tabelę wyników, gdzie w lewej kolumnie znajdują się wartości n, a w pierwszym wierszu wartości m. Następnie, dla każdej pary n i m, obliczane są obliczane są błędy aproksymacji oraz pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji F(x) a wartościami aproksymującej funkcji f(x).

n/m	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11	m=12	m=13	m=14	m=15	m=16
20	1,691634	1,726101	1,967283	1,411518	1,251337	1,19309								
25	1,672216	1,702714	1,932258	1,338965	1,207401	1,159225	1,147795	0,896773	0,933342					
30	1,659087	1,691817	1,91233	1,306194	1,159623	1,102999	1,082727	0,818998	0,828615	0,849624	0,867037			
35	1,649721	1,683333	1,896024	1,280344	1,126841	1,063161	1,036451	0,765315	0,769057	0,778899	0,791176	0,788781	0,843932	0,882777
40	1,642465	1,676841	1,882306	1,259057	1,099752	1,030732	0,998875	0,721825	0,72084	0,726354	0,733766	0,726911	0,778061	0,813045
45	1,636708	1,671691	1,870797	1,241446	1,077397	1,003932	0,967791	0,685819	0,680771	0,682324	0,685926	0,67529	0,722967	0,754618
50	1,632032	1,667512	1,86107	1,22671	1,058728	0,981559	0,941829	0,655742	0,647248	0,645415	0,645685	0,631749	0,676326	0,704918
55	1,628159	1,664054	1,852771	1,214229	1,042943	0,962653	0,919887	0,630327	0,618897	0,614167	0,611573	0,594781	0,636648	0,662543
60	1,624901	1,661146	1,845624	1,203542	1,029444	0,946491	0,901131	0,608609	0,594659	0,587436	0,58237	0,563103	0,602609	0,626145
65	1,622121	1,658667	1,839413	1,194297	1,01778	0,932533	0,884934	0,589858	0,573728	0,564342	0,557128	0,535708	0,573151	0,594618
70	1,619723	1,656529	1,833971	1,186227	1,007608	0,920364	0,870816	0,573519	0,555485	0,54421	0,535117	0,51181	0,547441	0,567089
75	1,617632	1,654666	1,829167	1,179124	0,998662	0,909667	0,858406	0,559162	0,539453	0,526515	0,515766	0,490795	0,524826	0,542865
80	1,615793	1,653028	1,824896	1,172828	0,990738	0,900193	0,847418	0,546451	0,52526	0,510848	0,49863	0,472183	0,504791	0,5214
85	1,614164	1,651578	1,821077	1,167209	0,98367	0,891746	0,837621	0,535122	0,512609	0,496882	0,483355	0,455589	0,486926	0,502255
90	1,61271	1,650284	1,817642	1,162164	0,977328	0,884169	0,828835	0,524964	0,501265	0,484359	0,469655	0,440706	0,470902	0,485081
95	1,611405	1,649122	1,814536	1,157611	0,971608	0,877336	0,820911	0,515805	0,491037	0,473067	0,457302	0,427286	0,45645	0,469591
100	1,610227	1,648074	1,811715	1,153482	0,966421	0,871141	0,81373	0,507505	0,481768	0,462835	0,446108	0,415124	0,443353	0,455551

Tabela VII: Największa różnica miedzy wartością przyjmowaną przez aproksymowaną funkcję F(x) a wartością funkcji aproksymującej f(x) o różnych stopniach i liczbie węzłów oraz zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

n/m	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11	m=12	m=13	m=14	m=15	m=16
20	25,65952	24,90608	18,31403	10,39113	9,330048	9,048882								
25	25,61967	24,85274	18,23259	10,04127	9,042928	8,789876	8,741795	4,998886	5,232205					
30	25,60045	24,82592	18,19202	9,912436	8,839746	8,5488	8,466341	4,399657	4,45573	4,573198	4,660875			
35	25,58789	24,8081	18,16459	9,82631	8,719533	8,400582	8,29514	4,006009	4,028637	4,082966	4,148266	4,133561	4,264163	4,389875
40	25,57909	24,79545	18,1448	9,764559	8,632156	8,293608	8,171192	3,700975	3,694833	3,72642	3,76721	3,722826	3,842896	3,959219
45	25,57271	24,78621	18,13015	9,719145	8,567622	8,214112	8,078644	3,458703	3,426422	3,435581	3,456091	3,383767	3,494115	3,601893
50	25,56795	24,77925	18,11902	9,684861	8,518785	8,153776	8,008174	3,264231	3,208797	3,197729	3,199313	3,100253	3,201268	3,300389
55	25,5643	24,77389	18,11037	9,658378	8,481003	8,107008	7,953438	3,106183	3,030334	3,001175	2,985574	2,861268	2,953782	3,044913
60	25,56144	24,76967	18,10351	9,637508	8,451205	8,070073	7,910147	2,976214	2,882359	2,837035	2,805865	2,657816	2,742706	2,826638
65	25,55916	24,76629	18,09798	9,620773	8,4273	8,040418	7,875354	2,868176	2,758409	2,698621	2,653333	2,482947	2,56102	2,638506
70	25,55731	24,76354	18,09345	9,607148	8,407836	8,016258	7,846988	2,777484	2,653619	2,580857	2,522741	2,331312	2,403278	2,474993
75	25,55579	24,76128	18,0897	9,595906	8,391778	7,996319	7,823564	2,700672	2,564281	2,479853	2,410052	2,198766	2,265238	2,331771
80	25,55452	24,75939	18,08655	9,58652	8,378374	7,979671	7,804002	2,635087	2,487534	2,39259	2,31212	2,082064	2,143571	2,205432
85	25,55346	24,75779	18,08388	9,578601	8,367069	7,96563	7,787498	2,578673	2,421147	2,316698	2,226465	1,978641	2,035638	2,093267
90	25,55256	24,75643	18,0816	9,571856	8,357445	7,953675	7,773446	2,529818	2,363355	2,250298	2,151112	1,886447	1,939327	1,993106
95	25,55178	24,75527	18,07963	9,566062	8,349182	7,943413	7,761381	2,487247	2,312754	2,191881	2,084469	1,803824	1,85293	1,903188
100	25,55111	24,75426	18,07792	9,561047	8,342034	7,934537	7,750946	2,449939	2,268211	2,140227	2,025245	1,729421	1,775051	1,82208

Tabela VIII: Pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji F(x) a wartościami aproksymującej funkcji f(x) o różnych stopniach i liczbie węzłów oraz zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

Co można zauważyć?

- **Zwiększanie stopnia wielomianu zwiększa jego zdolność do dopasowania się do danych punktów, co prowadzi do zwiększenia dokładności przybliżenia. Nie występuje efekt Runge'go. Efekt Runge'go to zjawisko, w którym zwiększenie stopnia wielomianu w przedziale interpolacji prowadzi do pogorszenia dokładności przybliżenia na końcach przedziału.**
- **Zwiększenie liczby węzłów, czyli punktów, w których mierzona jest funkcja, zwiększa dokładność aproksymacji.**
- **W tabelce numer VII można zauważyć, że już od wielomianu 10 stopnia można za pomocą niewielkiej ilości węzłów przybliżyć bardzo dokładnie zadaną funkcję.**
- **W tabelce numer VII I VIII widzimy, że dokładności funkcji cały czas rośnie przy wzroście stopni i liczby węzłów, a nie zachowuje się losowo.**
- **Widzimy również z tabelek VII I VIII, że w większym stopniu na dokładność wpływa wzrost liczby węzłów.**

Podsumowując:

Podsumowując, zwiększenie stopnia wielomianu i liczby węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności aproksymacji funkcji. Dlatego więc dla ciągłej funkcji okresowej możemy uzyskać znacznie lepsze przybliżenie, wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami trygonometrycznymi niż w przypadku wykorzystania wielomianów algebraicznych do aproksymacji. Nie następuję tu żaden efekt Rungego oraz wyniki są coraz bardziej dokładniejsze, niż w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi, gdy ten wzrost występuje jedynie do pewnego momentu, a potem wartości błędu zachowują się losowo.

8. Bibliografia:

- Wykłady
- http://www.math.uni.wroc.pl/~ikrol/metody_num.pdf
- https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_3.pdf
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja
- https://qcg.home.amu.edu.pl/pliki/Aproksymacja.pdf