

Natalia Luberda

Zagadnienie interpolacji

1. Dane techniczne:

Do obliczeń użyłam języka Python 3.9, korzystając głównie z bibliotek numpy, Math i pyplot. System operacyjny, na którym pracowałam to Windows 10. Procesor komputer to Intel® Core™ i5-10210U CPU @ 1.60GHz 2.11GHz, a ilość pamięci RAM to 8GB.

2. Interpolacja:

Interpolacja to metoda numeryczna, która polega na wyznaczeniu funkcji (lub wielomianu) przechodzącej przez zestaw punktów danych.

Interpolacja jest użyteczna w przypadkach, gdy chcemy uzyskać wartości funkcji w punktach, dla których nie mamy bezpośrednich pomiarów lub dla których pomiar jest trudny lub kosztowny. Pozwala nam również na szacowanie wartości funkcji wewnątrz zakresu, dla którego mamy dane.

Wielomian interpolacyjny to wielomian stopnia $n-1$, który przechodzi przez n punktów danych. Najpopularniejsze metody interpolacji to interpolacja Lagrange'a i interpolacja Newtona. Oba te podejścia opierają się na użyciu wielomianów stopnia $n-1$, które przechodzą przez n punktów danych.

Wielomian interpolacyjny może być wykorzystany do przybliżania wartości funkcji w dowolnym punkcie w zakresie, w którym został wykonany pomiar. Jednakże zwykle nie jest ona dokładna poza tym zakresem, ponieważ funkcja interpolująca może wykazywać duże wahania między punktami, dla których zostały wykonane pomiary.

3. Wzór i wykres funkcji użytej do analizy:

Otrzymana funkcja do analizy oraz jej zakres to:

Wzór I: Wzór funkcji użytej do analizy

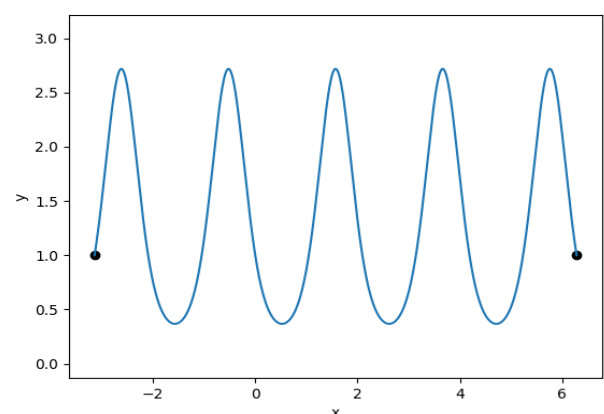
$$f(x) = e^{-\sin(3 \cdot x)}$$

, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$

Wzór II: Wzór na dobranie n węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa w zadanym przedziale:

$$x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Wykres I: Wykres funkcji interpolowanej



4. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

Interpolacja z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a zakłada dowolne rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych. Wartość wielomianu interpolacyjnego można uzyskać stosując wzór interpolacyjny Lagrange'a:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^n \frac{x - x_j}{(x_i - x_j)}$$

Wzór III: Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Wielomian (Wzór III) spełnia wszystkie warunki związane z interpolacją i jest jedynym wielomianem stopnia co najwyżej n .

5. Wyznaczanie wielomianu interpolującego zgodnie ze wzorem Lagrange'a:

Wybór liczby węzłów, w których określa się wartość funkcji w procesie interpolacji, jest jednym z kluczowych czynników wpływających na dokładność interpolacji.

W celu dobrania optymalnej liczby punktów, można przeprowadzić eksperymenty dla różnych ilości. Wykorzystuje dziewięć różnych liczb węzłów - 7,8,9,10,11,12,15,20, oznaczonych jako n w funkcjach.

Kod definiuje funkcję `lagrange_interpolation`, która implementuje interpolację Lagrange'a. Funkcja przyjmuje trzy argumenty: wektory x i y , które zawierają węzły interpolacji i odpowiadające im wartości funkcji, oraz wektor x_interp , który zawiera punkty, w których obliczane są wartości interpolowanej funkcji.

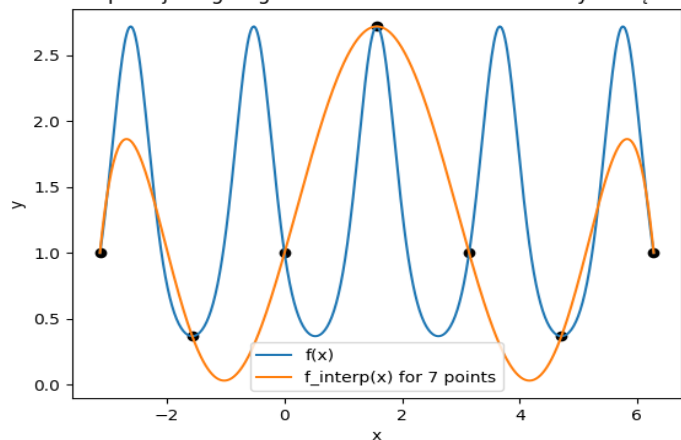
Następnie definiowana jest funkcja `equally_spaced(n)`, która generuje równomiernie rozłożone węzły interpolacji w przedziale $[-\pi, 2\pi]$. Funkcja ta wywołuje funkcję `lagrange_interpolation`, aby obliczyć wartości interpolowanej funkcji w 500 punktach równomiernie rozłożonych w tym samym przedziale. Następnie funkcja rysuje wykres funkcji interpolowanej.

Po tych operacjach generujemy funkcję `chebyshev_inter()`, która generuje węzły zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa i następnie wykonuje kroki jak podana funkcja wcześniej, obliczając wartość interpolowanej funkcji.

Węzły rozmieszczone równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału).

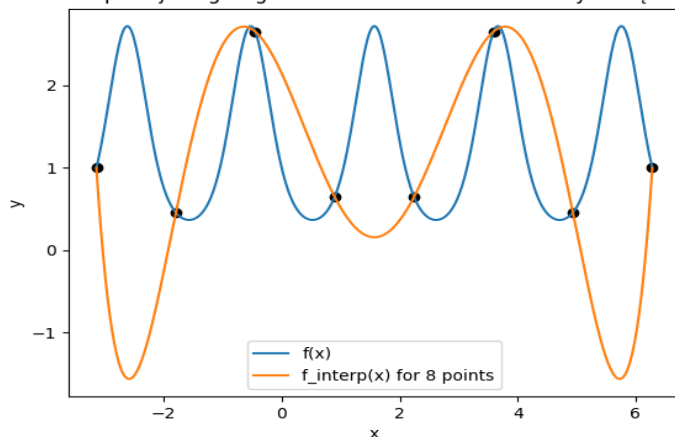
Wykres II: Dla 7 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



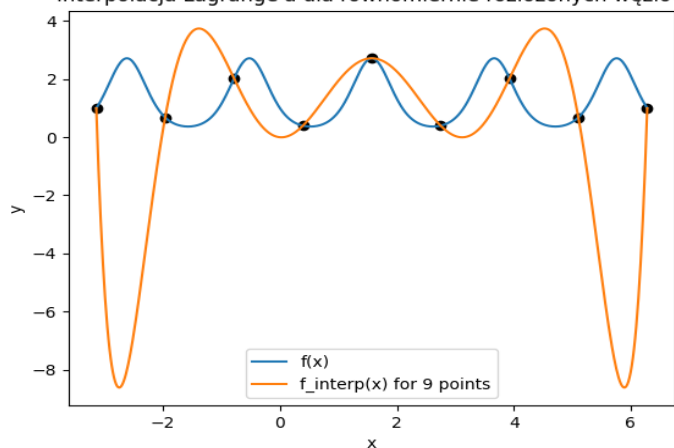
Wykres III: Dla 8 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



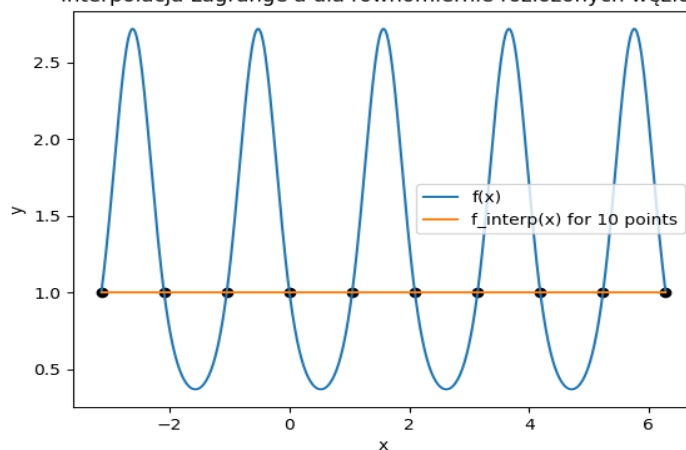
Wykres IV: Dla 9 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



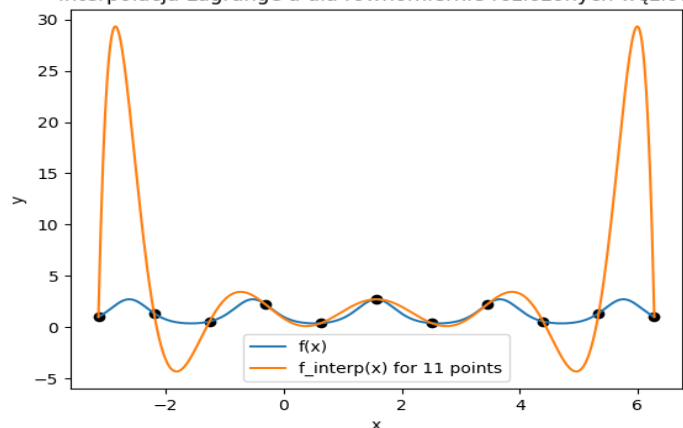
Wykres V: Dla 10 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



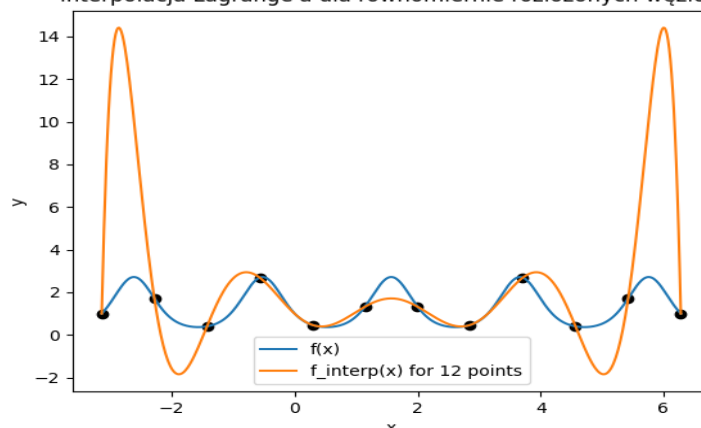
Wykres VI: Dla 11 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



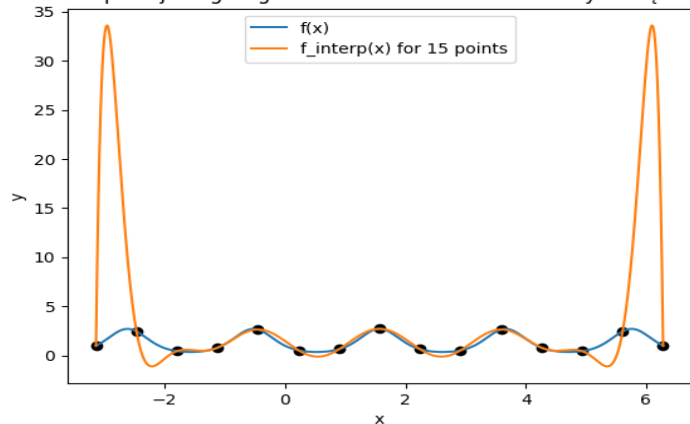
Wykres VII: Dla 12 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



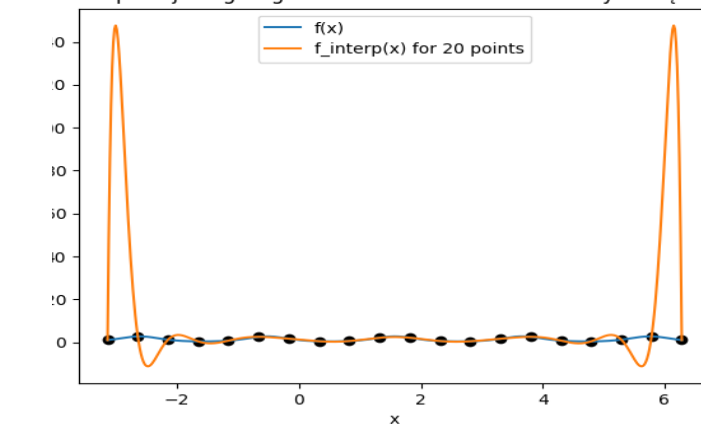
Wykres VIII: Dla 15 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



Wykres IX: Dla 20 węzłów

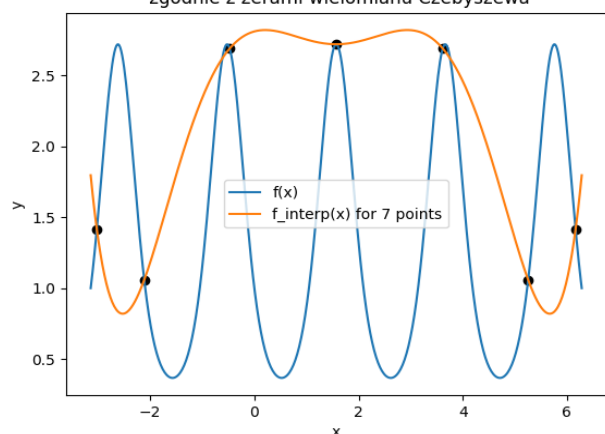
Interpolacja Lagrange'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

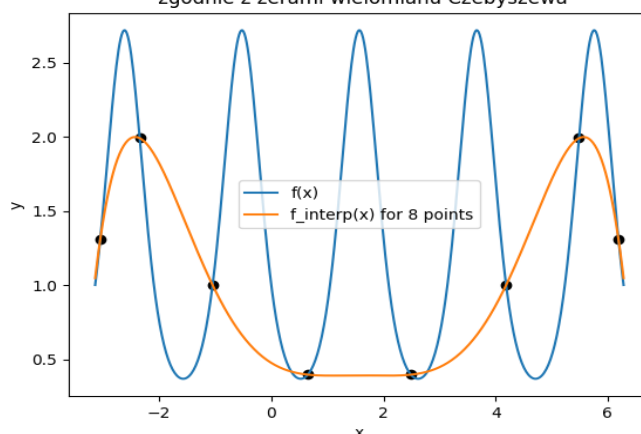
Wykres X: Dla 7 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



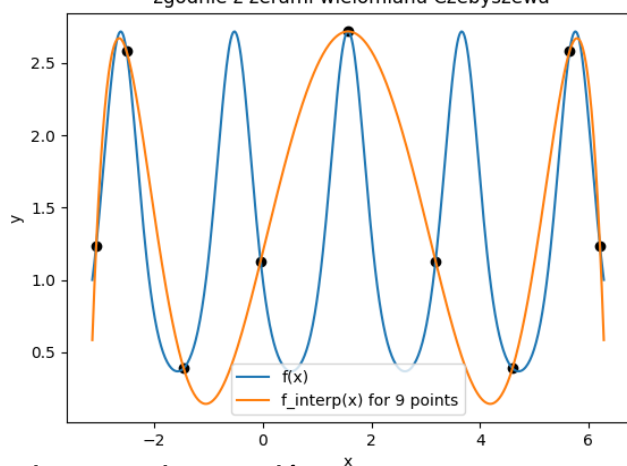
Wykres XI: Dla 8 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



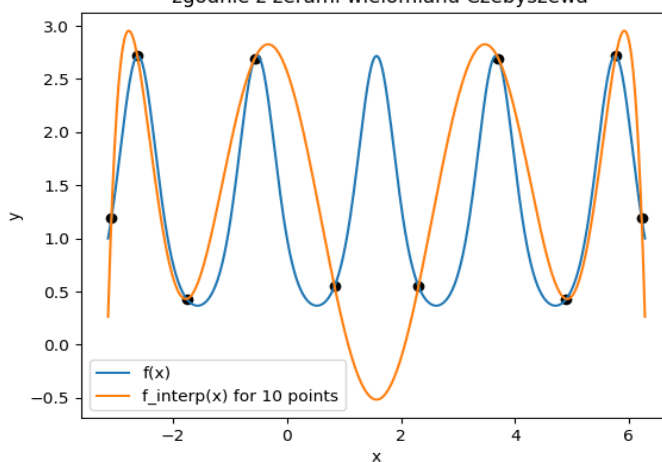
Wykres XI: Dla 9 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



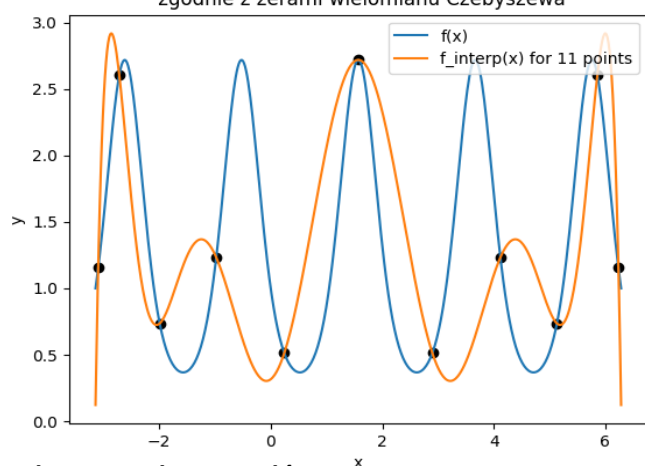
Wykres XII: Dla 10 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



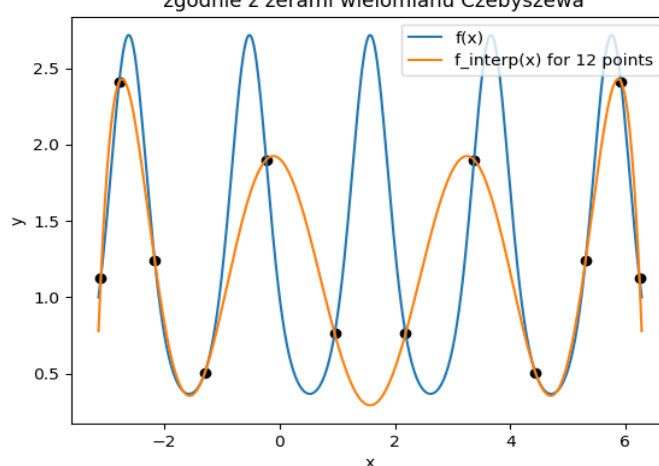
Wykres XIII: Dla 11 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



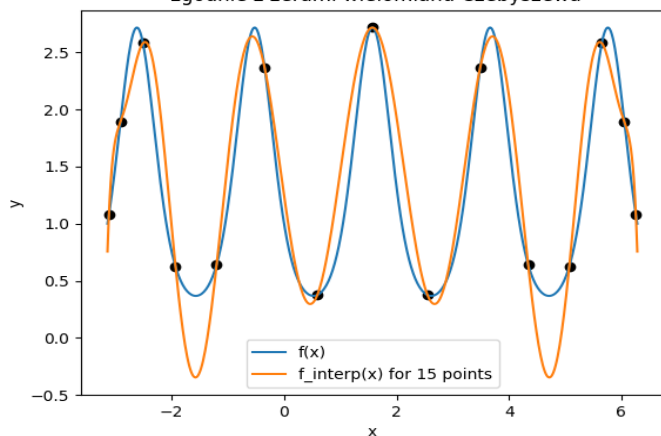
Wykres XIV: Dla 12 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



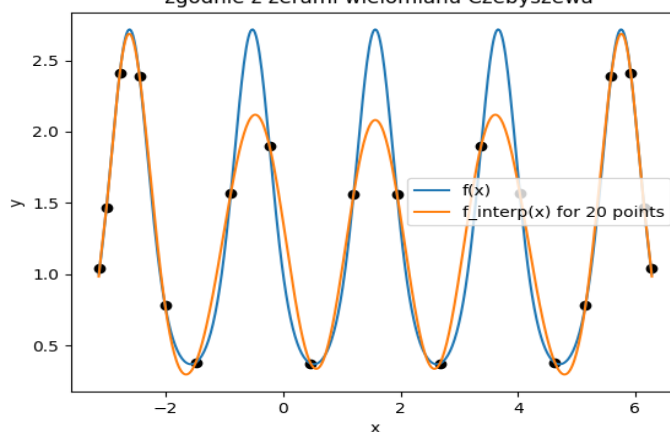
Wykres XV: Dla 15 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



Wykres XVI: Dla 20 węzłów

Interpolacja Lagrange'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



$$\text{Wzór IV: } \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_{\text{interpt},i}) - y_{\text{interpt},i})^2}, \text{ gdzie } N \text{ du\kern 0.05em du\kern 0.05em to liczba punkt\kern 0.05em o\kern 0.05em w\kern 0.05em,}$$

kt\kern 0.05em o\kern 0.05em rych warto\kern 0.05em \u015b\kern 0.05em ci obliczamy z wyznaczonego wielomianu interpolacyjnego

Liczba węzłów	max(f(x_interpt)-y_interpt)	wzór IV
7	2,437997533	0,063990864
8	4,273682641	0,069482669
9	11,17873479	0,068148417
10	1,717945156	0,064245275
11	27,21763927	0,061733568
12	12,35612795	0,065114843
15	31,89295695	0,064578656
20	146,2197509	0,069808739

**Tabela I: Wartości obliczone dla węzłów
rozłożonych równomiernie**

*wyniki zaokrąglone do 9 cyfr po przecinku

7. Wnioski:

Rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych ma wpływ na dokładność interpolacji wielomianowej zgodnej z wzorem Lagrange'a. Poniżej przedstawiam wnioski dla dwóch różnych rozmieszczeń węzłów interpolacyjnych:

Równomierne rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych:

- Równomierne rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych jest proste w implementacji.
- Interpolacja z równomiernie rozmieszczonymi węzłami może prowadzić do tzw. efektu Rungego, czyli pojawienia się oscylacji wokół wartości funkcji interpolowanej, szczególnie w pobliżu końców przedziału.
- Aby uniknąć efektu Rungego, konieczne może być zwiększenie liczby węzłów interpolacyjnych, co prowadzi do większego stopnia wielomianu interpolacyjnego i potencjalnie większego błędu numerycznego (błąd jest większy, ale występuje mniejszą ilość razy).

Rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa:

- Rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa prowadzi do zmniejszenia efektu Rungego i potencjalnie mniejszego błędu interpolacji w porównaniu z równomiernym rozmieszczeniem węzłów.
- Jednakże, rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa jest bardziej skomplikowane do zrozumienia i implementacji w porównaniu z równomiernym rozmieszczeniem.
- Ponadto, obliczenie węzłów interpolacyjnych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa wymaga znajomości przedziału interpolacji, co może być utrudnione w niektórych przypadkach.

Wzrost wartości n zazwyczaj prowadzi do większej precyzji wyników. Dlatego wyniki dla $n = 20$ będą zazwyczaj bardziej wiarygodne i dokładne niż wyniki np. dla $n = 5$. Jednak z tabel wynika, że maksymalne odchylenie wykresu od wartości funkcji zwiększa się wraz ze wzrostem liczby węzłów w rozłożeniu równomiernym, a maleje dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa (jednak tu wzrasta niedokładność wyników).

Liczba węzłów	max(f(x_interpt)-y_interpt)	wzór IV
7	2,435580138	0,060298033
8	2,326634622	0,067800354
9	2,273411507	0,062662314
10	3,232737706	0,067428292
11	2,110889893	0,073113862
12	2,42433046	0,072195042
15	0,714926858	0,068753783
20	0,635349952	0,075756561

**Tabela II: Wartości obliczone dla węzłów
wyznaczonych zgodnie z zerami wielomianu**

Czebyszewa

*wyniki zaokrąglone do 9 cyfr po przecinku

8. Wzór interpolacyjny Newtona:

Interpolacja z wykorzystaniem wzoru Newtona zakłada dowolne rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych. Wartość wielomianu interpolacyjnego można uzyskać stosując wzór interpolacyjny Newtona:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

Wzór V: Wielomian interpolacyjny Newtona

Gdzie:

$$p_0(x) = 1,$$

$$b_0 = f(x_0),$$

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}.$$

9. Opis działania funkcji i kodu – wzór Newtona:

Funkcja implementuje metodę interpolacji wielomianowej Newtona, która pozwala na przybliżenie funkcji interpolowanej w punktach x_interp na podstawie znanych wartości funkcji y w punktach x . Metoda ta polega na znalezieniu wielomianu o stopniu mniejszym lub równym $n-1$ (gdzie n to liczba węzłów interpolacji) optymalnie dopasowanego do danych punktów.

Funkcja `newton_poly` oblicza ilorazy różnicowe odpowiednich rzędów, które są wykorzystywane do konstrukcji wielomianu interpolacyjnego. Ilorazy różnicowe obliczane są w pętlach, gdzie w każdym kroku obliczane są różnice między kolejnymi wartościami tablicy dla punktów o odpowiednich indeksach, a następnie dzielone przez różnicę odpowiadających im wartości x . Następnie wynik jest zapisywany w tablicy `div_diff`.

W drugiej pętli, dla każdego punktu w x_interp (jak w poprzedniej funkcji jest ich 500) obliczany jest wartość wielomianu interpolacyjnego poprzez obliczenie sumy składników wynikających z iloczynu odpowiedniego ilorazu różnicowego i różnic między punktem interpolacji a punktami x o mniejszych indeksach. Wynik jest zapisywany w tablicy `p`.

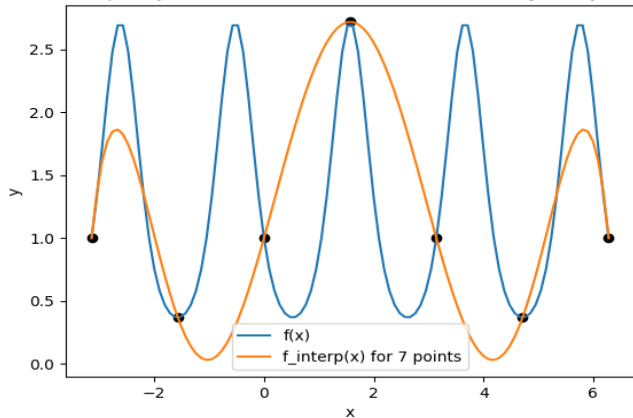
W efekcie, funkcja zwraca tablicę `p`, zawierającą wartości wielomianu interpolacyjnego dla każdego punktu z x_interp .

10. Wyznaczanie wielomianu interpolującego zgodnie ze wzorem Newtona:

Węzły rozmieszczone równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału).

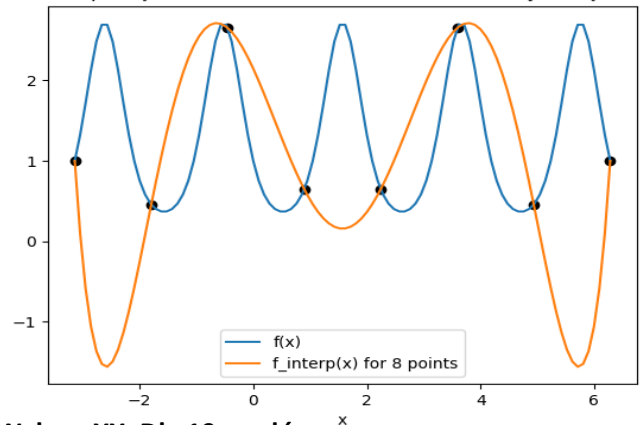
Wykres XVII: Dla 7 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



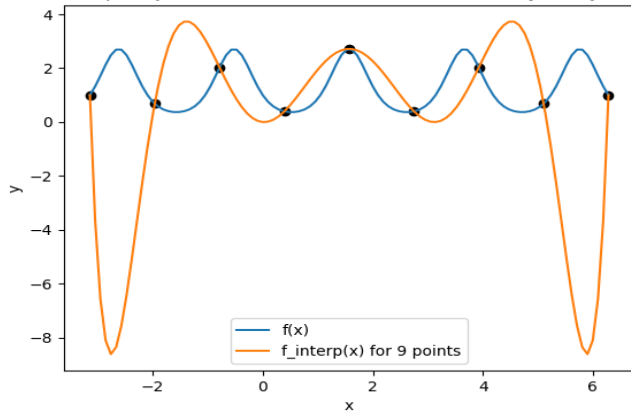
Wykres XVIII: Dla 8 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



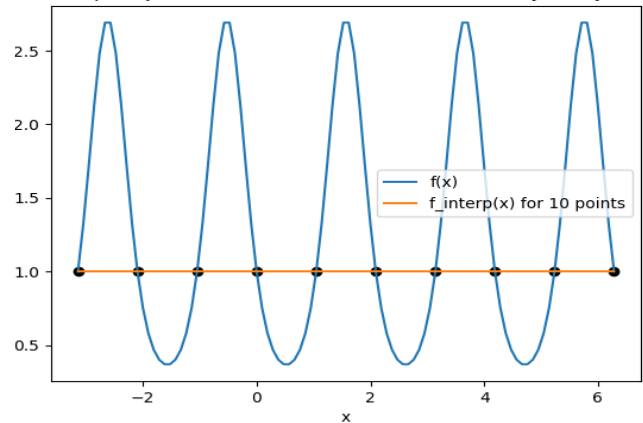
Wykres XIX: Dla 9 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



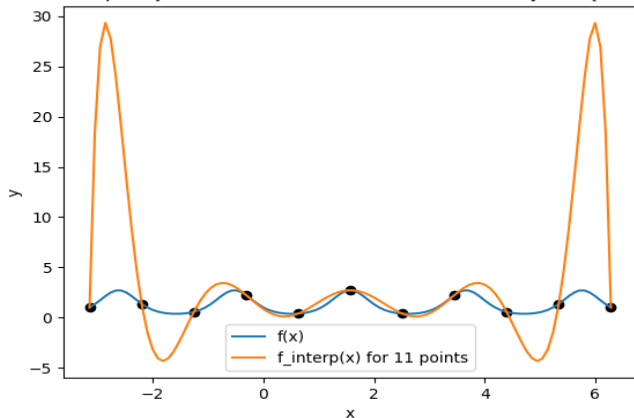
Wykres XX: Dla 10 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



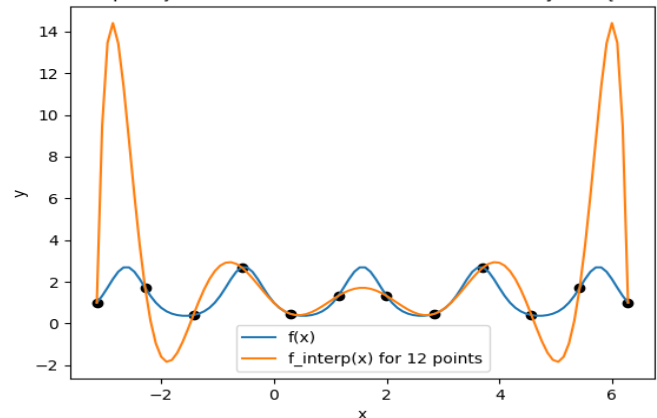
Wykres XXI: Dla 11 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



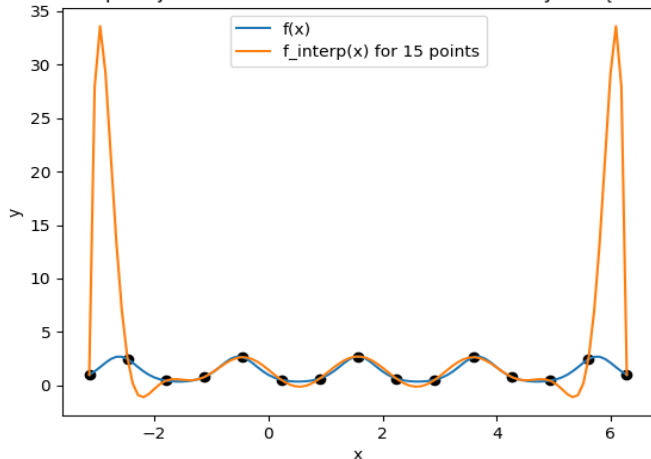
Wykres XXII: Dla 12 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



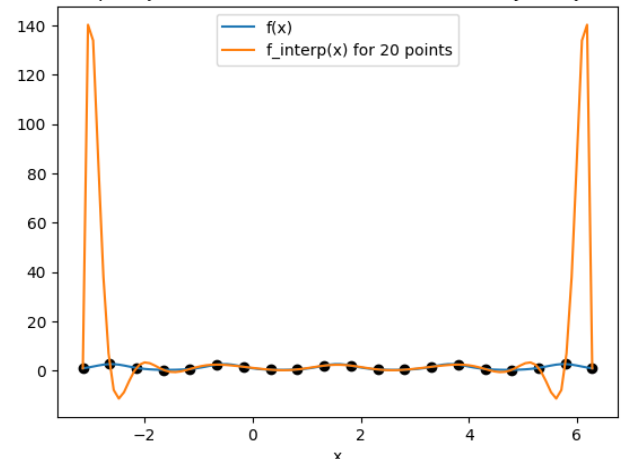
Wykres XXIII: Dla 15 węzłów

Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



Wykres XXIV: Dla 20 węzłów

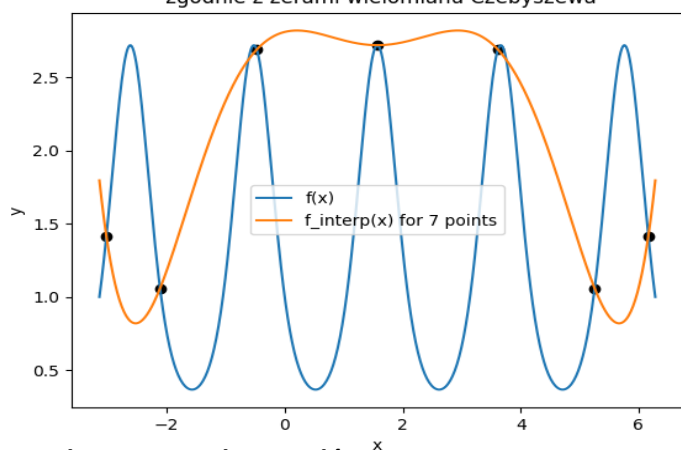
Interpolacja Newton'a dla równomiernie rozłożonych węzłów



Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

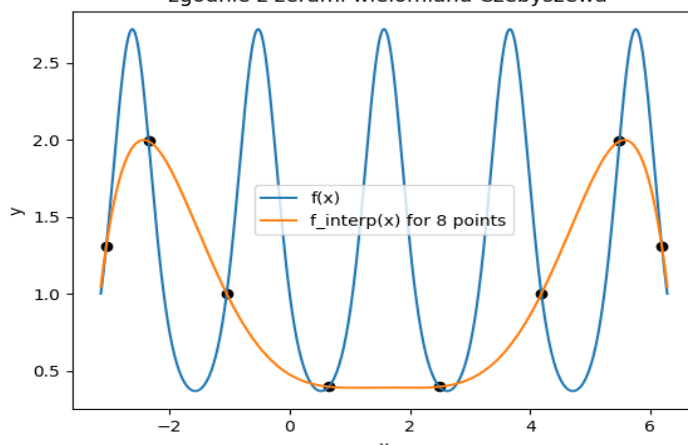
Wykres XXV: Dla 7 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



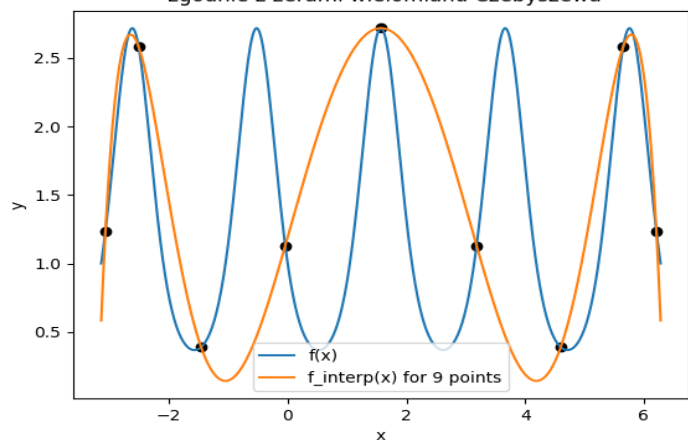
Wykres XXVI: Dla 8 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



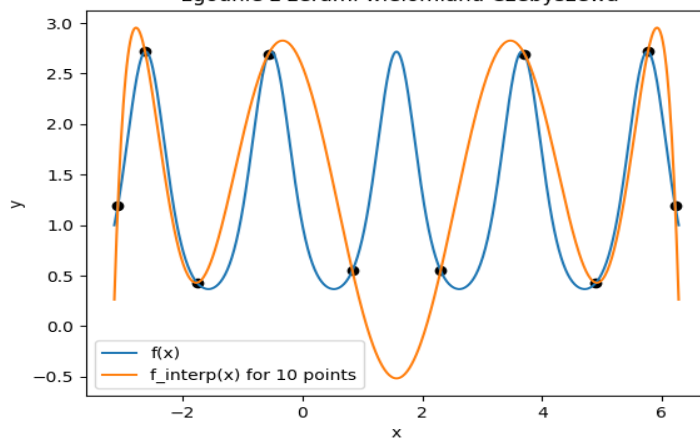
Wykres XXVII: Dla 9 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



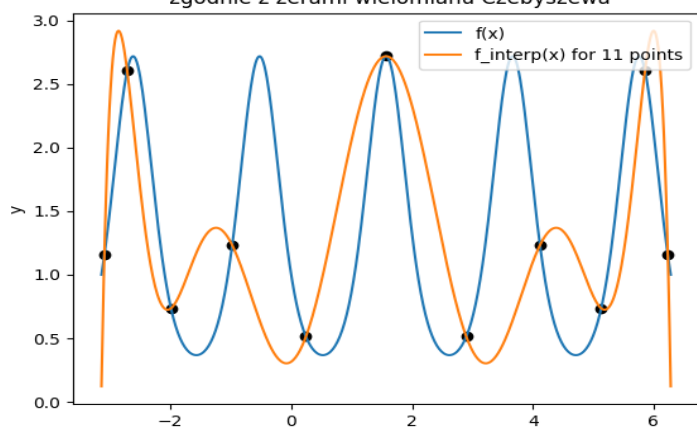
Wykres XXVIII: Dla 10 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



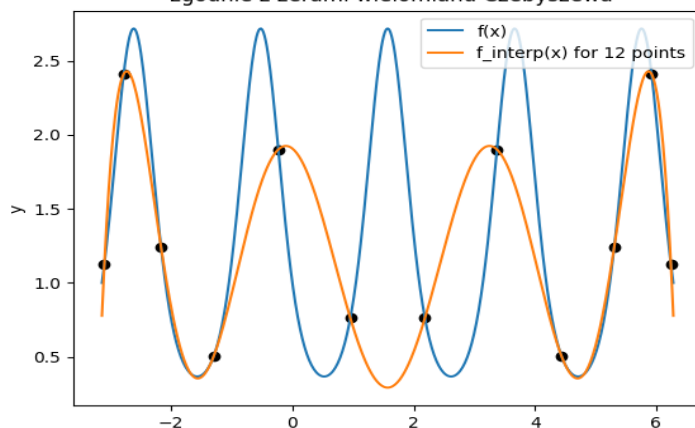
Wykres XXIX: Dla 11 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



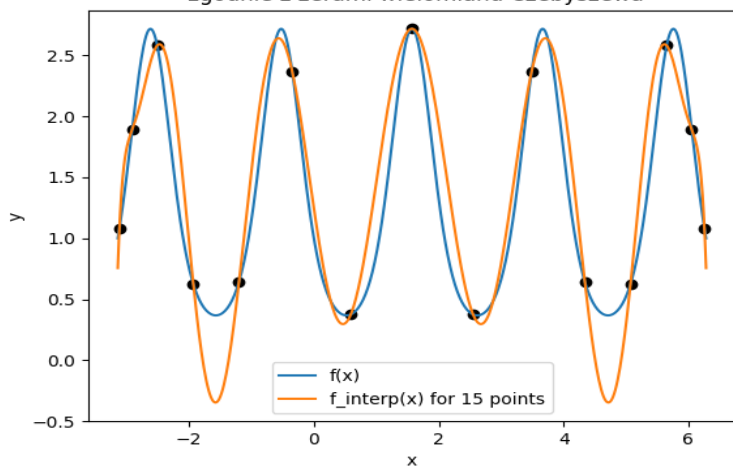
Wykres XXX: Dla 12 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



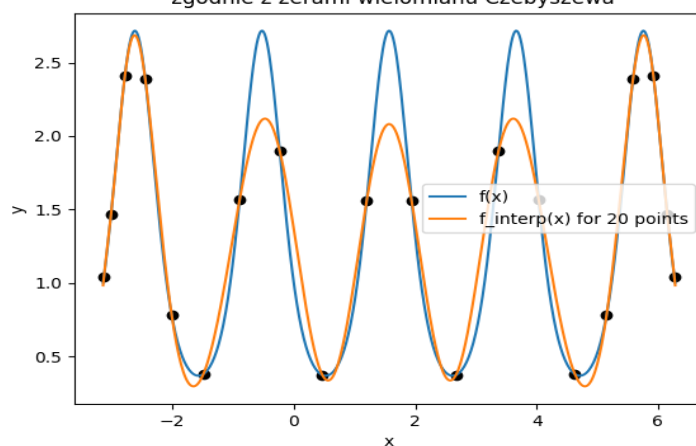
Wykres XXXI: Dla 15 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



Wykres XXXII: Dla 20 węzłów

Interpolacja Newton'a dla węzłów rozłożonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa



Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{inter}})-y_{\text{inter}})$	wzór IV
7	2,437997533	0,063990864
8	4,273682641	0,069482669
9	11,17873479	0,068148417
10	1,717945156	0,064245275
11	27,21763927	0,061733568
12	12,35612795	0,065114843
15	31,89295695	0,064578656
20	146,2197509	0,069808739

Tabela III: Wartości obliczone dla węzłów rozłożonych równomiernie

*zaokrąglone do 9 miejsc po przecinku

Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{inter}})-y_{\text{inter}})$	wzór IV
7	2,435580138	0,060298033
8	2,326634622	0,067800354
9	2,273411507	0,062662314
10	3,232737706	0,067428292
11	2,110889893	0,073113862
12	2,42433046	0,072195042
15	0,714926858	0,068753783
20	0,635349952	0,075756561

Tabela IV: Wartości obliczone dla węzłów wyznaczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

*zaokrąglone do 9 miejsc po przecinku

11. Wnioski - wzór interpolacyjny Newtona:.

W przypadku równomiernego rozmieszczenia węzłów, wynikające z niego wielomiany interpolacyjne charakteryzują się równomiernym rozłożeniem węzłów interpolacyjnych na przedziale, co zwiększa stabilność numeryczną metody. Jednakże, w przypadku interpolacji funkcji o dużych zmiennościach w określonych obszarach przedziału, równomierne rozmieszczenie węzłów może prowadzić do efektu Rungego - drgań wielomianu interpolacyjnego w pobliżu krańców przedziału, co pogarsza jakość interpolacji.

Z kolei, umieszczenie węzłów interpolacyjnych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa pozwala na uniknięcie efektu Rungego, co zwiększa jakość interpolacji w porównaniu z równomiernym rozmieszczeniem węzłów. Jednakże, Czebyszewowskie węzły interpolacyjne są nieregularnie rozmieszczone na przedziale, co może wprowadzić trudności numeryczne przy obliczaniu wielomianu interpolacyjnego.

Dochodzimy do podobnych wniosków co w poprzedniej metodzie, można zauważyć, że im więcej węzłów tym większa dokładność. Z tabeli można odczytać, że dla większej ilości węzłów rozłożonych równomiernie maksymalne odchylenie od prawdziwej wartości funkcji jest zdecydowanie większe niż dla mniejszej ilości, z wykresu widać jednak, że pomimo tego funkcja jest bardziej przybliżona wyglądem do prawdziwej oraz, że występują na niej jedynie pojedyncze odchylenia.

12. Wnioski ogólne:

W przypadku równomiernego rozmieszczenia węzłów w całym przedziale, interpolacja Lagrange'a oraz Newtona dają podobne wyniki.

Ogólnie rzecz biorąc, interpolacja Lagrange'a i Newtona są dwoma podstawowymi metodami interpolacji, które dają bardzo dobre wyniki w większości przypadków, szczególnie gdy węzły są równomiernie rozmieszczone. Jednakże, gdy węzły są nierównomiernie rozmieszczone lub gdy interpolowany wielomian ma wysoki stopień, lepiej zastosować interpolację zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

Rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa pozwala na zminimalizowanie efektu Rungego, czyli oscylacji funkcji interpolacyjnej na końcach przedziału interpolacji. Jednakże, w przypadku takiego rozmieszczenia węzłów funkcja

interpolująca może wykazywać mniejszą podobieństwo do interpolowanej funkcji w porównaniu do rozmieszczenia równomiernego. Niemniej jednak, maksymalne odchylenie funkcji interpolacyjnej od wartości rzeczywistej funkcji jest zdecydowanie mniejsze przy węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa niż w przypadku rozmieszczenia równomiernego. Dlatego, rozmieszczenie węzłów zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa jest często preferowane, zwłaszcza w przypadku interpolacji funkcji, które są nieregularne lub mają punkty o dużej zmienności w określonych obszarach.

Przy 50 węzłach rozłożonych równomiernie można jednak zauważyć, że wielomian Newtona w niewielkim stopniu jest bardziej dopasowany do funkcji niż wielomian Lagrange'a. Są to różnice dopiero zauważalne na 4 miejscu po przecinku, z czego wynika iż są one bardzo niewielkie.

Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{interp}}) - y_{\text{interp}})$	wzór IV
40	1565449,113	0,065440459
50	131482078,9	0,066351032

Tabela V: Wartości obliczone dla węzłów rozłożonych równomiernie w wielomianie Newton'a

Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{interp}}) - y_{\text{interp}})$	wzór iV
40	1565449,113	0,066111829
50	131474994,9	0,066617938

Tabela VI: Wartości obliczone dla węzłów rozłożonych równomiernie w wielomianie Lagrange'a

Przy węzłach rozłożonych zgodnie z wielomianem Czebyszewa również widać różnice dopiero przy większej ilości węzłów:

Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{interp}}) - y_{\text{interp}})$	wzór IV
40	0,078391402	0,066442
50	0,015209621	0,066012

Tabela VII: Wartości obliczone dla węzłów Czebyszewa w wielomianie Lagrange'a

Liczba węzłów	$\max(f(x_{\text{interp}}) - y_{\text{interp}})$	wzór IV
40	0,54533404	0,0663397
50	1379,092099	0,0670685

Tabela VIII: Wartości obliczone dla węzłów Czebyszewa w wielomianie Newton'a

Widzimy, że funkcja Lagrange'a jest również bardziej dopasowana. Wynika z tego, że dla dłuższej liczby węzłów funkcja Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest najbardziej dokładna i za jej pomocą można w tej sytuacji można z wysoką dokładnością przybliżyć funkcję interpolowaną.

13. Bibliografia:

- Wykład
- https://home.agh.edu.pl/~byrska/src/MN_2020/3_Interpolacja.pdf
- <https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter17.05-Newtons-Polynomial-Interpolation.html>
- https://e.kul.pl/files/10382/public/aan_w3_1819_1.pdf
- <http://www.imio.polsl.pl/Dopobrania/Interpolacja.pdf>