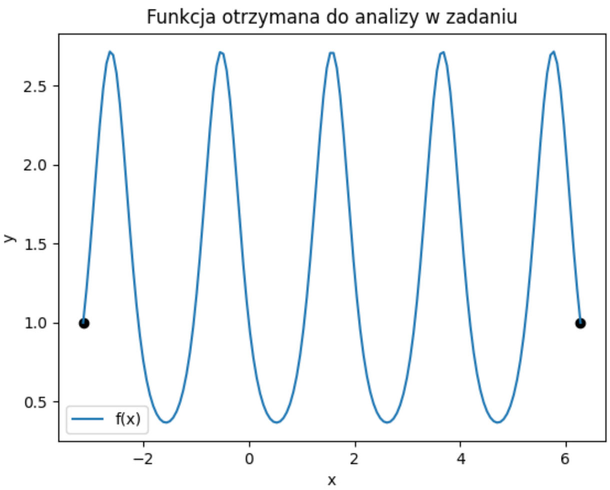
Natalia Luberda

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

1. Dane techniczne:

Do obliczeń użyłam języka Python 3.9, korzystając głównie z bibliotek numpy, Math i pyplot. System operacyjny, na którym pracowałam to Windows 10. Procesor komputera to Intel® Core™ i5-10210U CPU @ 1.60GHz 2.11GHz, a ilość pamięci RAM to 8GB.

2. Wzór oraz wykres funkcji użytej do analizy:



Wykres I: Funkcja $f(x)$ na przedziale $<-\pi, 2*\pi>$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-sin(3*x)}\ , gdzie\ x\ \in < -\pi, 2*\pi >}$$

Wzór I: Przydzielona funkcja $f(x)$

3. Aproksymacja:

Aproksymacja to przybliżanie funkcji $y = F(x)$ za pomocą „prostszej" należącej do określonej klasy funkcji $y = f(x)$, gdzie $F(x)$ to funkcja aproksymowana i może być znana, podana jako tablica wartości eksperymentalnych (z błędami, ale wtedy interpolacja nie ma sensu), a $f(x)$ to funkcja aproksymująca = przybliżenie F(x). W zależności od sposobu mierzenia błędu aproksymacji rozróżnia się dwa rodzaje:

- aproksymację jednostajną

- aproksymację średniokwadratową

4. Aproksymacja średniokwadratowa wielomianowa:

Aproksymacja średniokwadratowa to technika matematyczna, która polega na znalezieniu funkcji, która najlepiej przybliża zadane dane numeryczne. Metoda ta polega na minimalizacji sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji aproksymującej a wartościami rzeczywistymi.

Konkretniej, jeśli mamy dane numeryczne (węzły) w postaci par (x, y), gdzie x to argumenty, a y to wartości odpowiadające im funkcji, to aproksymacja średniokwadratowa polega na znalezieniu funkcji $f(x)$, która minimalizuje wartość sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami funkcji $F(x)$ dla każdego x, a wartościami f(x).

Metoda ta jest szczególnie przydatna w przypadkach, gdy dane numeryczne nie odpowiadają żadnej znanej funkcji, ale chcemy znaleźć funkcję, która jak najlepiej je przybliża. Może być również stosowana w celu redukcji szumu lub usuwania odstających punktów danych.

Funkcję aproksymującą wybiera się najczęściej w postaci wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + \ a_m\varphi_m(x)$$

Wzór II: Postać uogólniona funkcji aproksymującej

,w którym funkcje $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ są wybranymi funkcjami bazowymi m+1 wymiarowej przestrzeni liniowej. W takim przypadku zadanie aproksymacji sprowadza się do określenia współczynników $a_0, a_1, \dots, a_m$.

W charakterze funkcji bazowych wybiera się najczęściej jednomiany $1, x^1, x^2, \dots, x^m$. (baza jednomianów), gdyż zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa, dla każdej funkcji $y = \ f(x)$ określonej i ciągłej na domkniętym i ograniczonym odcinku istnieje taki wielomian $W_m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$,który przybliża jednostajnie funkcję $F(x)$ na zadanym odcinku.

Błąd aproksymacji jest obliczany z wzoru:

$$||\boldsymbol{f} - \boldsymbol{F}|| = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_i})[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_i})]^{\boldsymbol{2}}$$

Wzór III: Błąd aproksymacji

,gdzie $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_i})$ jest to waga danego $\boldsymbol{x_i}$.

Zadaniem aproksymacji średniokwadratowej dyskretnej jest wyznaczenie takich współczynników $a_0, a_1, \dots, a_m$ wielomianu f(x) przy których błąd aproksymacji jest najmniejszy. Im większa waga względem pozostałych węzłów, tym funkcja aproksymująca będzie bardziej minimalizować odległość w danym węźle od wartości aproksymowanej funkcji.

5. **Rozwiązanie zadania:**

Aby rozwiązać zadanie odległość $||\boldsymbol{f}-\boldsymbol{F}||$ ropatruje się jako funckję m+1 zmiennych niezależnych $a_0, a_1, \dots, a_m$:

$$D_m(a_0, a_1, \dots, a_m) = ||\boldsymbol{f}-\boldsymbol{F}|| = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_i})\left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_i}) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j\right]^2$$

Wzór IV: Równanie na błąd aproksymacji z wykorzystaniem

wzoru II na f(x)

Korzystając z warunku koniecznego istnienia minimum funkcji wielu zmiennych:

$$\frac{\partial D_m(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_l} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} -\boldsymbol{2w}(\boldsymbol{x_i})\left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_i}) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j\,(\boldsymbol{x_i})\right]^2 \varphi_l(x_i) = 0$$

Wzór V: Pochodna $D_m(a_0, a_1, \dots, a_m)$ względem a_l , gdzie

l = 0,1,…,m

Po uporządkowaniu składników względem a_l otrzymuje się:

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{m}} \left(\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_i})\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)\right)a_k = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_i})\varphi_k(x_i)F(x_i)\ \ dla\ j = 0,1, \dots, m$$

Wzór VI

Oznaczając przez:

$$\varphi_j(x) = x^j, \qquad \textbf{Wzór VII}$$

Możemy wyznaczyć:

$$b_k = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)x_i^k \qquad \textbf{Wzór VIII}$$

$$g_{k,j} = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^{j+k} \qquad \textbf{Wzór IX}$$

Do wzoru VIII podstawiając wzór IX otrzymujemy ostateczną postać równania:

$$b_k = \sum_{j=0}^{m} g_{k,j} a_j$$

Wzór X

Korzystając z wyznaczonego wyżej wzoru X możemy zapisać układ równań w postaci macierzowej, pozwalający na obliczenie wartości współczynników a_j.

$$\begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m,0} & g_{m,1} & g_{m,2} & \cdots & g_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Po uwzględnieniu wzoru IX, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} w(x_i) & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^m & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\, x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i)\, x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} w(x_i) F(x_i)\, x_i^m \end{bmatrix}$$

Układ równań I

Z powyższego układu równań obliczamy wartości współczynników a_j, które podstawiamy do wzoru na funkcję aproksymującą.

6. Analiza dokładności przybliżenia funkcji przez funkcję aproksymującą:

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką funkcja aproksymująca przybliża zadaną funkcję $F(x)$ skorzystamy z wymienionych niżej wskaźników, pozwalających na określenie dokładności. Pomiar dokładności przeprowadzimy dla 1000 równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$. Aby problem był dobrze uwarunkowany, stopień m nie może przekraczać liczby węzłów n.

- Największa różnica miedzy wartością przyjmowaną przez aproksymowaną funkcję $F(x)$ a wartością funkcji aproksymującej $f(x)$.

$$\max_k\{|F(x_k) - f(x_k)|\}$$ **Wzór XI**

gdzie $k \in \{1,2, \ldots 1000\}$ – ponieważ przeprowadzamy pomiar dokładności dla 1000 punktów na przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$

- Pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji $F(x)$ a wartościami aproksymującej funkcji $f(x)$.

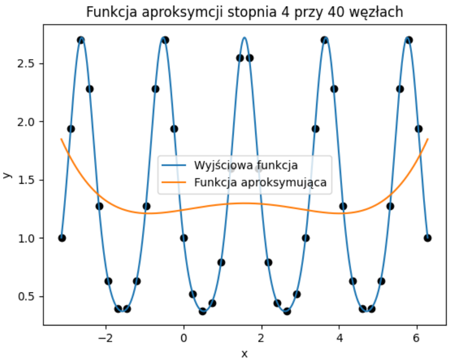
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - f(x_i))^2}$$ **Wzór XII**

a) **Porównanie wielomianów dla ustalonego stopnia wielomianu – m:**

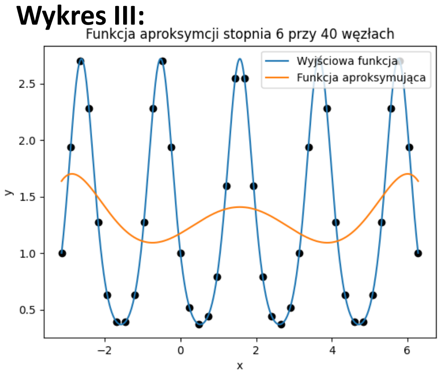
Dla 40, 60, 80 węzłów będziemy analizować dokładności aproksymacji przy m (stopniu wielomianu) równym 4,6,8,10,12. W naszych obliczeniach przyjęliśmy również, że wagi są stałe i równe 1.

- Dla 40 węzłów:

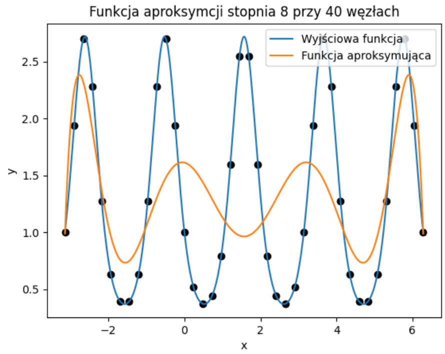
Wykres II:



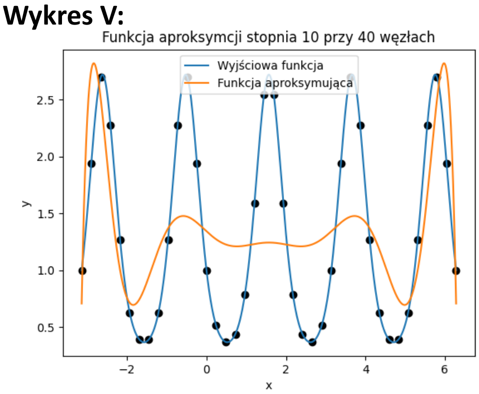
Wykres III:



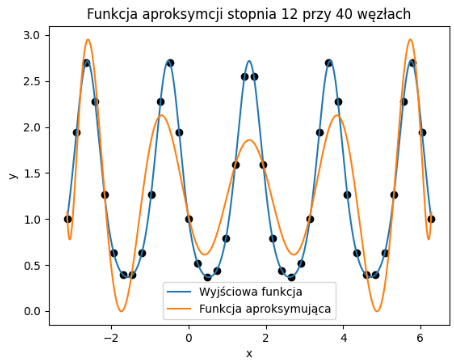
Wykres IV:



Wykres V:



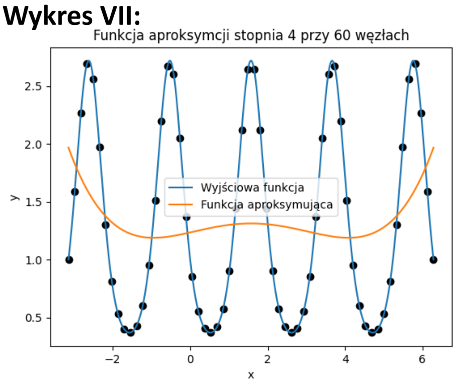
Wykres VI:



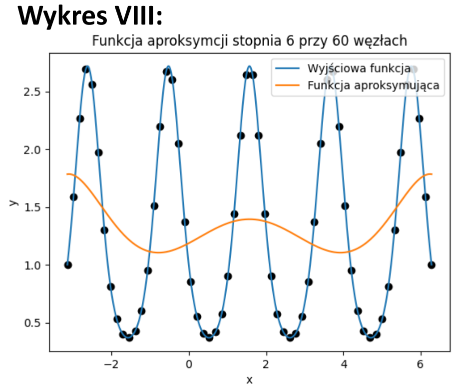
Wykresy wielomianu aproksymującego dla 40 węzłów i kolejno stopni 4,6,8,10,12 oraz funkcji wyjściowej.

- Dla 60 węzłów:

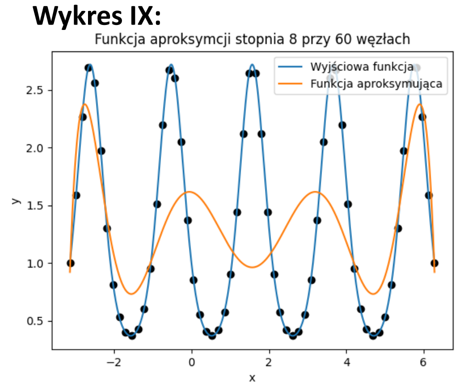
Wykres VII:



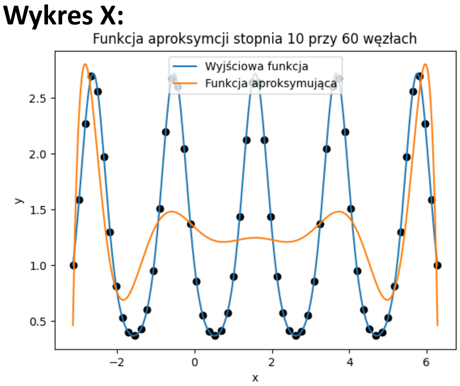
Wykres VIII:



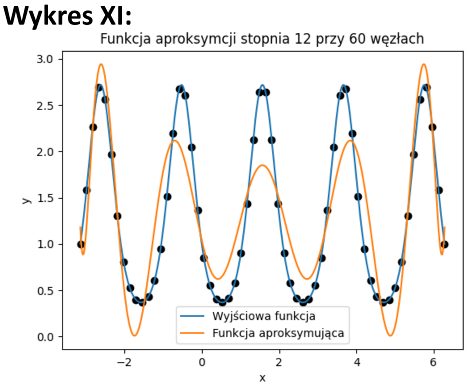
Wykres IX:



Wykres X:



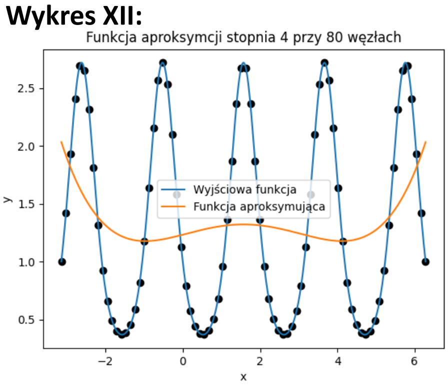
Wykres XI:



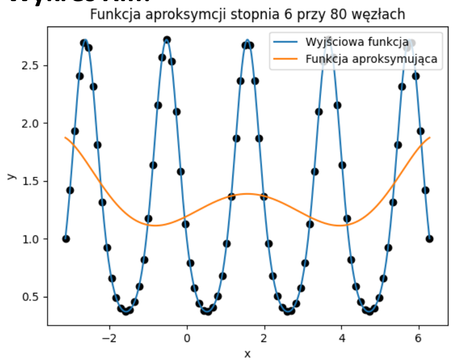
Wykresy wielomianu aproksymującego dla 60 węzłów i kolejno stopni 4,6,8,10,12 oraz funkcji wyjściowej.

- Dla 80 węzłów:

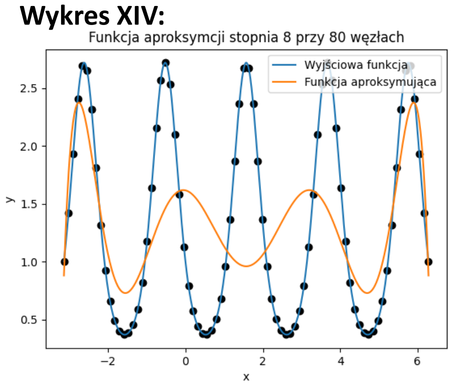
Wykres XII:



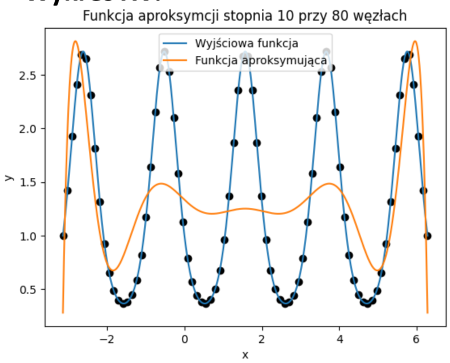
Wykres XIII:



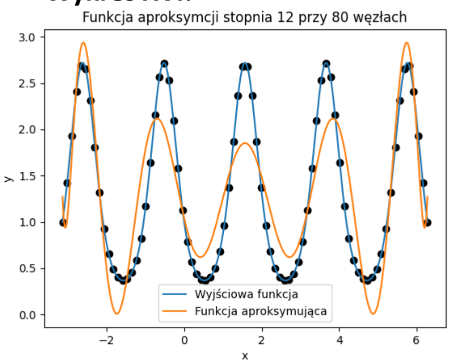
Wykres XIV:



Wykres XV:



Wykres XVI:



Wykresy wielomianu aproksymującego dla 80 węzłów i kolejno stopni 4,6,8,10,12 oraz funkcji wyjściowej.

- **Wnioski i podsumowanie oraz prezentacja błędów:**

Stopień wielomianu	Wzór XI	Wzór XII
4	1,50358	25,24489
6	1,61888	25,26445
8	1,75595	22,29787
10	1,47472	20,77649
12	0,85863	12,19703

Tabela I: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy różnych stopniach i 40 węzłach, przy zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

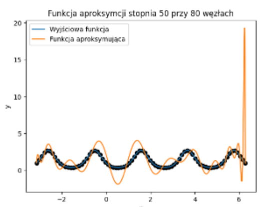
Stopień wielomianu	Wzór XI	Wzór XII
4	1,51875	25,13964
6	1,60362	25,16237
8	1,75726	22,28313
10	1,47208	20,55688
12	0,86724	12,09929

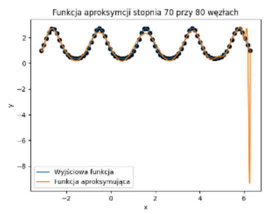
Tabela II: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy różnych stopniach i 60 węzłach, przy zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

Stopień wielomianu	Wzór XI	Wzór XII
4	1,52681	25,09910
6	1,59482	25,11591
8	1,75922	22,27650
10	1,46516	20,42470
12	0,86649	12,04300

Tabela III: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego przy różnych stopniach i 80 węzłach, przy zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

Z wykresów można zauważyć, że im wyższy stopień wielomianu tym funkcja aproksymująca, bardziej przypomina funkcję wyjściową, jednak wraz ze wzrostem stopnia, wzrasta również wartość maksymalnego odchylenia naszej funkcji aproksymującej od właściwej. Przy wzroście do 8 stopni na nowo błąd aproksymacji zaczyna maleć. W tabelce I, II, II można zauważyć iż wartości przy 12 i 10 stopniu są najmniejsze. Można również zaobserwować na wykresach, że im wyższy stopień wielomianu tym dokładniej funkcja zaczyna przypominać kształtem funkcje właściwą (wykresy VI,XI, XVI). Z wykresów i tabelek można wywnioskować, że największą dokładność ma wielomian stopnia 12 przy 80 węzłach.





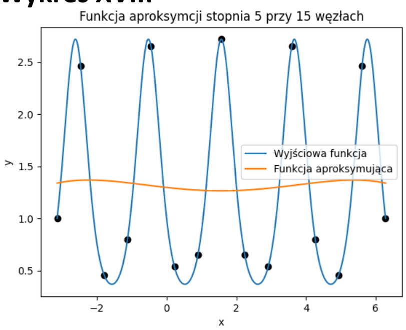
Z ramach dodatkowego sprawdzenia, co się stanie przy stopniu równym 50,70 przy 80 węzłach, można zauważyć występowanie efektu Rungego, czyli zjawiska pogorszenia jakości aproksymacji na krańcach przedziału interpolacji. Jest to szczególnie widoczne w okolicach krańców przedziału (2π), gdzie wartości funkcji oscylują i są trudne do dokładnego aproksymowania wielomianem o wysokim stopniu.

b) Porównanie wielomianów dla ustalonej liczby węzłów – n:

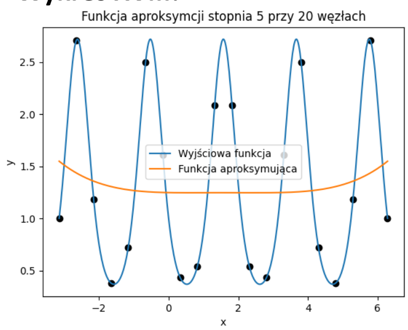
Natępnie ustalamy liczbę węzłów, którę kolejno będą wynosić 15, 20, 40, 60, 90 przy 5,9,12 stopniach będziemy analizować dokładności aproksymacji. W naszych obliczeniach przyjęliśmy również, że wagi są stałe i równe 1.

- **Dla m = 5:**

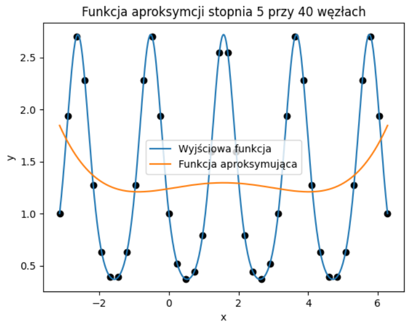
Wykres XVII:



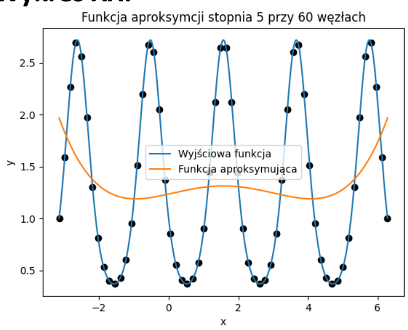
Wykres XVIII:



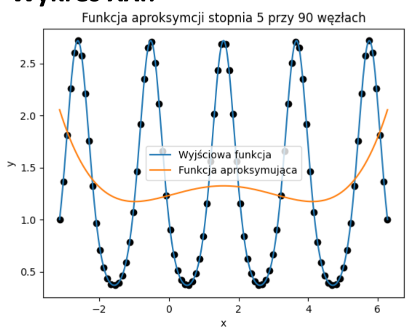
Wykres XIX:



Wykres XX:



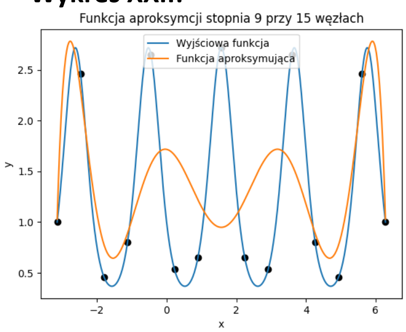
Wykres XXI:



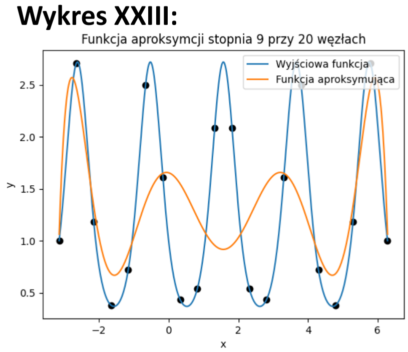
Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 5 i kolejno liczby węzłów 15,20,40,60,90 oraz funkcji wyjściowej.

- **Dla m = 9:**

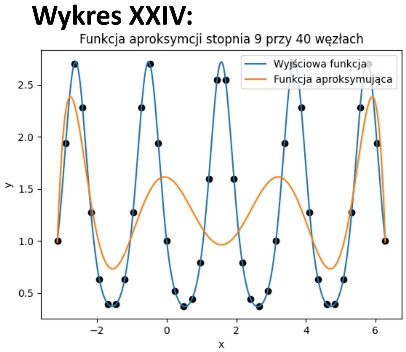
Wykres XXII:



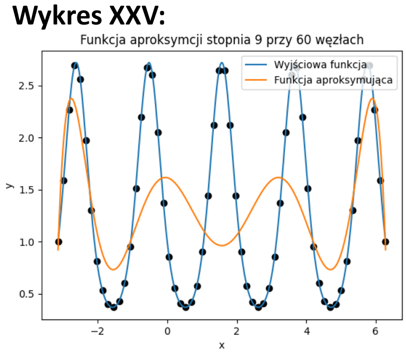
Wykres XXIII:



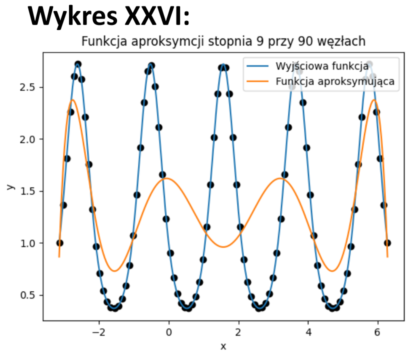
Wykres XXIV:



Wykres XXV:



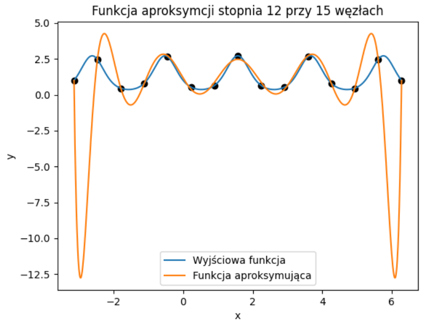
Wykres XXVI:



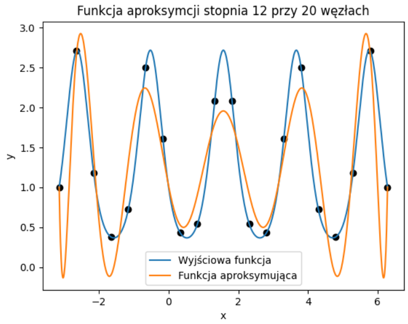
Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 9 i kolejno liczby węzłów 15,20,40,60,90 oraz funkcji wyjściowej.

- **Dla m = 12:**

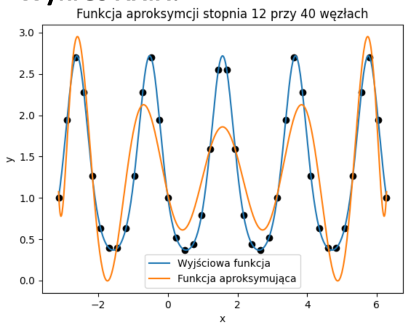
Wykres XXVII:



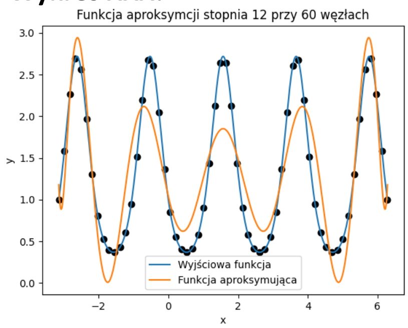
Wykres XXVIII:



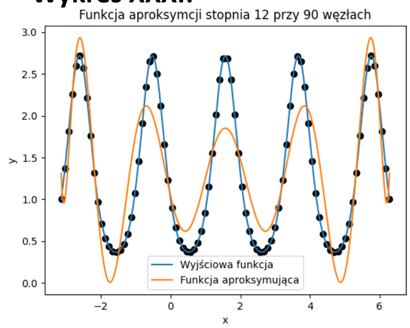
Wykres XXIX:



Wykres XXX:



Wykres XXXI:



Wykresy wielomianu aproksymującego stopnia 12 i kolejno liczby węzłów 15,20,40,60,90 oraz funkcji wyjściowej.

- **Wnioski i podsumowanie oraz prezentacja błędów:**

Ilość węzłów	Wzór XI	Wzór XII
15	1,45365	26,12625
20	1,47190	25,67001
40	1,50358	25,24489
60	1,51875	25,13964
90	1,52957	25,08777

Tabela IV: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 5 i różnej liczby węzłów oraz zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

Ilość węzłów	Wzór XI	Wzór XII
15	1,76951	22,82211
20	1,80180	22,44103
40	1,75595	22,29787
60	1,75726	22,28313
90	1,76001	22,27455

Tabela V: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 9 i różnej liczby węzłów oraz zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

Ilość węzłów	Wzór XI	Wzór XII
15	14,50119	118,08322
20	1,59612	15,71797
40	0,85863	12,19703
60	0,86724	12,09929
90	0,86552	12,02164

Tabela VI: Wartości błędów aproksymacji dla wielomianu aproksymującego stopnia 12 i różnej liczby węzłów oraz zaokrągleniu do 5 miejsc po przecinku.

Z wykresów można zauważyć, że im więcej węzłów tym funkcja aproksymująca, również bardziej przypomina funkcję wyjściową, początkowo jednak wartości błędów wzrastają wraz ze wzrostem liczby węzłów, jednak gdy przekracza ona próg 20, jej błędy aproksymacji znacząco maleją. Jedynie nie dzieje się tak funkcji stopnia 5.

Można również zaobserwować na wykresie XXVII , że przy dużym stopniu i małej liczbie węzłów, wzrasta efekt Rungego na obu krańcach funkcji.

Z wykresów i tabelek można wywnioskować, że największą dokładność ma wielomian stopnia 12 przy 90 węzłach, czyli to samo co wyszło nam w przykładach wyżej.

7. Ogólne podsumowanie i wnioski:

W celu potwierdzenia i uściślenia moich wcześniejszych wniosków obliczyłam błędy aproksymacji funkcji f dla różnych wartości liczby węzłów n (przybierają one wartości od 15 do 100 , co 5) i stopnia wielomianu m o wartościach od 3 do 20. Stworzyłam tabelę wyników, gdzie w lewej kolumnie znajdują się wartości n, a w pierwszym wierszu wartości m. Następnie, dla każdej pary n i m, obliczane są obliczane są błędy aproksymacji oraz pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji F(x) a wartościami aproksymującej funkcji f(x).

n/m	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11	m=12	m=13	m=14	m=15	m=16	m=17	m=18	m=19	m=20
10	1,71801	1,71801	1,71801	1,71801	1,71801	1,71801	1,71801	1,718115										
15	1,427462	1,45365	1,45365	1,640626	1,640626	1,769508	1,769508	3,369009	3,36901	14,50119	14,50146	29,12084						
20	1,505858	1,471901	1,471901	1,659585	1,659585	1,801804	1,801804	1,743423	1,743423	1,596123	1,596153	5,503767	5,567611	15,11664	15,40563	23,90407	97,62673	116,0709
25	1,515754	1,479407	1,479407	1,641277	1,641277	1,767726	1,767726	1,428774	1,428774	0,932193	0,932193	1,741351	1,742916	1,290891	10,90556	8,65001	0,367251	17,63839
30	1,524559	1,489579	1,489579	1,631687	1,631687	1,759707	1,759707	1,45976	1,45976	0,837906	0,837906	0,817508	0,818854	1,143305	1,260247	1,135221	4,660246	4,024491
35	1,53072	1,497445	1,497445	1,624635	1,624635	1,756814	1,756814	1,470738	1,470738	0,850925	0,850924	0,550272	0,550859	0,749666	0,819599	1,103919	0,799706	1,532769
40	1,535256	1,503578	1,503578	1,618875	1,618875	1,755952	1,755952	1,474722	1,474722	0,858626	0,858627	0,525418	0,525363	0,529247	0,556615	0,597427	0,752658	0,441249
45	1,538734	1,508497	1,508497	1,614098	1,614098	1,755923	1,755923	1,475598	1,475598	0,862998	0,862999	0,530988	0,531046	0,416425	0,448111	2,652848	0,484969	0,449294
50	1,541484	1,51253	1,51253	1,610063	1,610063	1,756255	1,756255	1,475004	1,475004	0,865421	0,865421	0,534228	0,534207	0,358409	0,36112	0,328664	0,582039	0,349156
55	1,543712	1,515896	1,515896	1,606609	1,606609	1,756735	1,756735	1,473703	1,473703	0,866684	0,866685	0,536104	0,536094	0,322771	0,330744	0,325732	0,40583	0,330159
60	1,545553	1,518748	1,518748	1,603618	1,603618	1,757262	1,757262	1,472077	1,472077	0,867244	0,867244	0,537223	0,537205	0,324868	0,326215	0,33265	0,326168	0,347663
65	1,5471	1,521194	1,521194	1,601003	1,601003	1,757791	1,757791	1,470327	1,470327	0,867365	0,867365	0,537967	0,537962	0,325269	0,324615	0,354469	0,32764	0,338045
70	1,548417	1,523315	1,523315	1,598697	1,598697	1,758298	1,758298	1,468558	1,468558	0,86722	0,86722	0,53825	0,538239	0,328917	0,327083	0,335881	0,33109	0,342866
75	1,549553	1,525172	1,525172	1,596649	1,596649	1,758775	1,758775	1,466826	1,466826	0,866908	0,866907	0,538425	0,538391	0,329704	0,327901	0,382577	2,887266	0,352913
80	1,550541	1,526812	1,526812	1,594819	1,594819	1,759218	1,759218	1,465162	1,465162	0,866495	0,866495	0,538444	0,538421	0,328249	0,330523	0,5346	0,33086	0,328692
85	1,55141	1,528269	1,528269	1,593172	1,593172	1,759628	1,759628	1,463578	1,463578	0,866021	0,866021	0,538377	0,538364	0,32971	0,330622	0,377159	0,350043	0,332323
90	1,552179	1,529574	1,529574	1,591684	1,591684	1,760005	1,760005	1,46208	1,46208	0,86552	0,86552	0,538223	0,538205	0,330094	0,330399	0,358277	0,336876	0,344197
95	1,552864	1,530748	1,530748	1,590333	1,590333	1,760353	1,760353	1,460669	1,460669	0,865002	0,865002	0,538031	0,538069	0,32958	0,329091	0,346728	0,355801	0,341195
100	1,553479	1,531811	1,531811	1,5891	1,5891	1,760673	1,760673	1,459341	1,459341	0,864485	0,864485	0,537863	0,537893	0,328816	0,328504	0,340679	0,35257	0,356193

Tabela VII: Największa różnica miedzy wartością przyjmowaną przez aproksymowaną funkcję F(x) a wartością funkcji aproksymującej f(x) o różnych stopniach i liczbie węzłów oraz zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

n/m	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11	m=12	m=13	m=14	m=15	m=16	m=17	m=18	m=19	m=20
10	28,35643	28,35643	28,35643	28,35643	28,35643	28,35643	28,35643	28,35724										
15	26,04339	26,12625	26,12625	25,82822	25,82822	22,82211	22,82211	32,35001	32,35001	118,0832	118,0812	222,7951						
20	25,79196	25,67001	25,67001	25,56739	25,56739	22,44103	22,44103	22,75209	22,75209	15,71797	15,71788	38,65437	38,66165	101,1032	90,68294	117,1116	469,0512	542,4024
25	25,73271	25,48706	25,48706	25,44574	25,44574	22,33368	22,33368	21,22873	21,22873	12,92947	12,92946	13,11268	13,11531	8,924657	58,86267	44,95647	5,42132	84,86509
30	25,6954	25,37377	25,37377	25,36733	25,36733	22,31372	22,31372	20,96464	20,96464	12,42981	12,42981	8,825024	8,825347	8,08615	7,865004	7,438517	25,89139	16,61122
35	25,67363	25,29773	25,29773	25,30894	25,30894	22,30435	22,30435	20,85503	20,85503	12,26296	12,26296	8,173231	8,172861	6,422644	6,460529	7,323223	6,453569	8,883797
40	25,65987	25,24489	25,24489	25,26445	25,26445	22,29787	22,29787	20,77649	20,77649	12,19703	12,19703	8,021648	8,021835	5,768581	5,758165	5,911867	6,341562	5,574586
45	25,65063	25,20672	25,20672	25,22983	25,22983	22,2929	22,2929	20,71035	20,71035	12,16183	12,16183	7,969999	7,969908	5,552147	5,579042	15,15272	5,67423	5,503937
50	25,64415	25,17829	25,17829	25,20241	25,20241	22,28893	22,28893	20,65255	20,65255	12,13722	12,13722	7,946248	7,946263	5,474221	5,476205	5,421167	6,873813	5,273309
55	25,63944	25,15658	25,15658	25,18035	25,18035	22,28574	22,28574	20,60168	20,60168	12,11704	12,11704	7,931955	7,931959	5,436764	5,438182	5,352532	5,431961	5,295258
60	25,6359	25,13964	25,13964	25,16237	25,16237	22,28313	22,28313	20,55688	20,55688	12,09929	12,09929	7,921361	7,921361	5,411952	5,410014	5,309167	5,341548	5,278017
65	25,63319	25,12619	25,12619	25,14753	25,14753	22,28099	22,28099	20,51742	20,51742	12,08324	12,08323	7,912508	7,912507	5,402105	5,403475	5,305266	5,321938	5,269803
70	25,63107	25,11533	25,11533	25,13516	25,13516	22,27922	22,27922	20,48263	20,48263	12,0686	12,0686	7,904599	7,904594	5,391796	5,395158	5,286312	5,307876	5,290221
75	25,62938	25,10645	25,10645	25,12475	25,12475	22,27775	22,27775	20,4519	20,4519	12,05522	12,05522	7,897379	7,897362	5,386314	5,387196	5,413943	22,02551	5,38103
80	25,62801	25,0991	25,0991	25,11591	25,11591	22,2765	22,2765	20,4247	20,4247	12,043	12,043	7,890678	7,890667	5,38234	5,383163	6,256731	5,312111	5,283598
85	25,62688	25,09296	25,09296	25,10835	25,10835	22,27545	22,27545	20,40057	20,40057	12,03183	12,03183	7,884461	7,884447	5,378339	5,378472	5,386034	5,321346	5,254322
90	25,62595	25,08777	25,08777	25,10184	25,10184	22,27455	22,27455	20,3791	20,3791	12,02164	12,02164	7,878627	7,878618	5,374987	5,375988	5,304797	5,282025	5,296892
95	25,62517	25,08335	25,08335	25,0962	25,0962	22,27378	22,27378	20,35994	20,35994	12,01233	12,01233	7,873201	7,873225	5,371789	5,371957	5,278668	5,3078	5,243755
100	25,62451	25,07956	25,07956	25,09128	25,09128	22,27312	22,27312	20,3428	20,3428	12,00383	12,00383	7,868181	7,868195	5,368601	5,368678	5,289625	5,304683	5,283738

Tabela VIII: Pierwiastek z sumy kwadratów różnic między wartościami funkcji F(x) a wartościami aproksymującej funkcji f(x) o różnych stopniach i liczbie węzłów oraz zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku.

Co można zauważyć?

- **Zwiększanie stopnia wielomianu zwiększa jego zdolność do dopasowania się do danych punktów, co prowadzi do zwiększenia dokładności przybliżenia. Jednakże istnieje pewna wartość stopnia wielomianu, powyżej której dalsze zwiększanie stopnia powoduje szybki wzrost błędów aproksymacji, a niekiedy występuje efekt Runge'go. Efekt Runge'go to zjawisko, w którym zwiększenie stopnia wielomianu w przedziale interpolacji prowadzi do pogorszenia dokładności przybliżenia na końcach przedziału.**

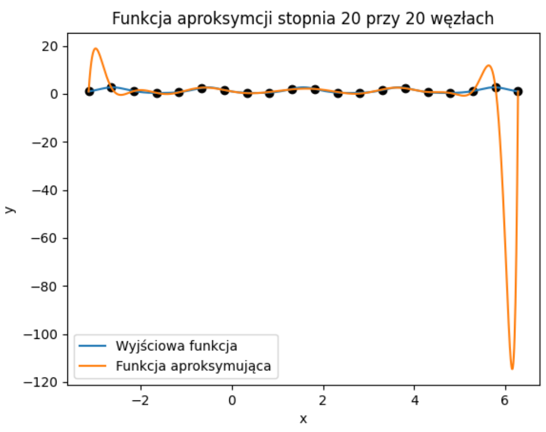
- **Zwiększenie liczby węzłów, czyli punktów, w których mierzona jest funkcja, zwiększa dokładność aproksymacji, nawet dla ustalonego stopnia wielomianu (jednak przy większych stopniach >60 , tracimy tę własności z powodu wyżej wspomnianego efektu Runge'go). Innymi słowy, im więcej punktów mamy, tym lepiej aproksymujemy funkcję.**
- **Dla 20 stopni widzimy, że tabelce VII występują największe wartości, wśród pozostałych, co dowodzi iż nie zawsze większy stopień przybliża nam lepiej funkcję, a wręcz przeciwnie. W tabelce VII wartości maleją do stopnia 15/16, a następnie na nowo wzrastają.**
- **W tabelce numer VIII też możemy zauważyć tę włąsność co wspomniana powyżej, iż do pewnego stopnia wartości**

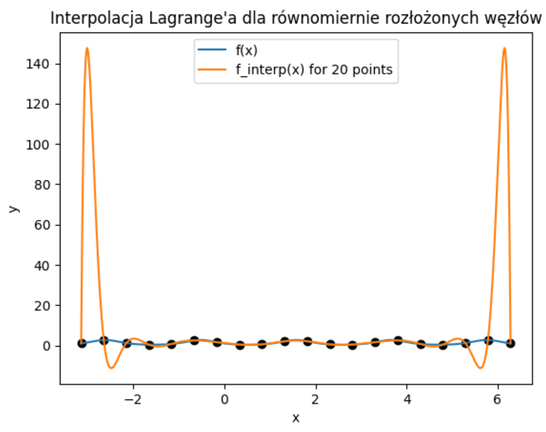
Podsumowując:

Podsumowując, zwiększenie stopnia wielomianu i liczby węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności aproksymacji funkcji. Jednakże, powyżej pewnej wartości stopnia wielomianu i liczby węzłów, błędy aproksymacji zaczynają rosnąć, a może pojawić się efekt Runge'go. Możemy również zauważyć, że im więcej węzłów, tym lepiej jest funkcja przybliżona. Jednakże, dla bardzo dużych liczb węzłów, np. powyżej 30/40, różnice pomiędzy błedami aproksymacji są niewielkie, a są one zdecydowanie bardziej złożone obliczeniowo.

8. Funkcja o tym samym stopniu i liczbie węzłów:

Jeśli stopień wielomianu aproksymacyjnego jest równy liczbie węzłów interpolacji, to mówimy o interpolacji wielomianowej dokładnego stopnia





Zarówno interpolacja Lagrange'a, jak i aproksymacja wielomianowa o tym samym stopniu i liczbie węzłów mają za zadanie przybliżać funkcję w określonych punktach. Różnica polega jednak na tym, że interpolacja Lagrange'a ma na celu znalezienie dokładnej funkcji przechodzącej przez wszystkie węzły, co może prowadzić do efektu Runge'go przy zbyt wysokim stopniu wielomianu. Z kolei aproksymacja wielomianowa dąży do minimalizacji sumy kwadratów odległości między aproksymowaną funkcją a wielomianem, co daje ogólnie lepsze wyniki w przypadku wysokich stopni wielomianów. Jednakże, zwiększenie liczby węzłów, nawet w przypadku aproksymacji wielomianowej, może prowadzić do pogorszenia wyników z powodu efektu Runge'go, co można zauważyć na wykresach powyżej.

9. Bibliografia:

- **Wykłady**
- http://www.math.uni.wroc.pl/~ikrol/metody_num.pdf
- https://eti.pg.edu.pl/documents/176593/26763380/Wykl_AlgorOblicz_3.pdf
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja