Natalia Luberda

Interpolacja funkcji sklejanej

1. Dane techniczne:

Do obliczeń użyłam języka Python 3.9, korzystając głównie z bibliotek numpy, Math i pyplot. System operacyjny, na którym pracowałam to Windows 10. Procesor komputer to Intel® Core™ i5-10210U CPU @ 1.60GHz 2.11GHz, a ilość pamięci RAM to 8GB.

2. Funkcja sklejana:

Funkcję $s(x) = s(x, \Delta n)$ określoną na $[a, b]$ nazywamy funkcją sklejaną stopnia m (m≥1), jeżeli:

- $s(x)$ jest wielomianem stopnia ≤ m na każdym $[x_i, x_{i+1}]$
- $s(x) \in C^{m-1}$ na $[a, b]$

Gdzie Δn jest podziałem przedziału na $[a, b]$ na (n-1) podprzedziałów przez węzły:

a = $x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \dots < x_n = b$

3. Interpolacja funkcją sklejaną III stopnia:

Funkcja sklejana III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Wzór I: Funkcja sklejana III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$

Spełnia ona następujące warunki:

- $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ ***(warunek I)***
- $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$ ***(warunek II)***
- $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$ ***(warunek III)***
- $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$ ***(warunek IV)***

$s_i(x)$ jest funkcją sześcienną, a więc $s''_i(x)$ jest funkcją liniową na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ wyprowadzam h_i = x_{i+1}- x_i , wtedy z:

$$y(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}$$

Wzór II: Funkcja sklejana liniowa y dla x **należącego do przedziału $[x_i, x_{i+1}]$**

możemy wyprowadzić wzór:

$$s_i''(x) = s_i''(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h_i} + s_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h_i}$$

Wzór III: Druga pochodna funkcji sklejanej III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ wyprowadzona ze wzoru II

Całkując dwukrotnie funkcję z wzoru III, uwzględniając warunek I oraz, to że $s_i(x_i) = y_i$ i $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ otrzymuje końcowy wzór:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{s_i''(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i''(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x)$$

Wzór IV: Funkcja sklejana III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ wyprowadzona ze wzoru III oraz warunku I oraz $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ i $s_i(x_i) = y_i$

W powyższym wzorze nie mamy $s''_i(x)$, ale skorzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej:

Warunek ciągłości: $s_{i-1}'(x_i) = s_i'(x_i)$ **(Warunek V)**

Różniczkujemy więc funkcje ze wzoru numer IV:

$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{3}s_i''(x_i) - \frac{h_i}{6}s_i''(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Wzór V: Pochodna funkcji sklejanej III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ wyprowadzona ze wzoru IV oraz warunku V.

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole:

$$\sigma_i = \frac{1}{6}s''(x_i) \qquad \Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$$

Wtedy:

$$s_i'(x_i) = -2\sigma_i h_i - \sigma_{i+1}h_i + \Delta_i$$
$$s_i'(x_i) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

Wzór VI: Pochodna funkcji sklejanej III stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ z wyprowadzonymi symbolami.

Natomiast z drugiej strony:

$$s_{i-1}'(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Wzór VII: Pochodna funkcji sklejanej III stopnia s_{i-1} na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ z pomocnymi symbolami.

Porównując dwa równania i otrzymujemy n-2 równań liniowych dla punktów pośrednich:

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

Wzór VIII: Równania liniowe punktów pośrednich

Z powodu iż mamy n niewiadomych σ_i konieczne jest określenie dwóch dodatkowych warunków na krańcach przedziału. Następnie po uwzględnieniu warunków brzegowych możemy wyznaczyć pełny układ równań liniowych, obliczyć z nich wartość σ_i na zadanych przedziałach oraz wyznaczyć za pomocą jego współczynniki $b_i, c_i, d_i\ dla\ wielomianu\ interpolującego\ s_i$ określone na każdym przedziale:

$$b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$ ***(wzór IX)***

$$c_i = 3\sigma_i$$ ***(wzór X)***

$$d_i = \frac{\sigma_{i+1}-\sigma_i}{h_i}$$ ***(wzór XI)***

Po wyznaczeniu wielomianu dla każdego przedziału, używamy go do oszacowania wartości dla zadanych punktów x, dla których chcemy obliczyć wartości. Aby to zrobić, najpierw musimy określić, w którym przedziale znajduje się każdy z tych punktów. Następnie dla każdego punktu wyznaczamy odpowiadającą mu funkcję sklejaną i używamy jej do obliczenia wartości w danym punkcie x. Im więcej punktów x użyjemy, tym dokładniejsze będą nasze oszacowania, a funkcja sklejana będzie bardziej zbliżona do interpolowanej funkcji.

4. Interpolacja funkcją sklejaną II stopnia:

Do interpolacji funkcją sklejaną drugiego stopnia został użyty wzór:

$$\boldsymbol{S_{i(x)} = a_i + b_i * (x - x_i) + c_i * (x - x_i)^2 = a_i} \quad \textbf{dla i} \in \boldsymbol{[1, \dots, n-1]},$$

Wzór XII: Funkcja sklejana drugiego stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$

gdzie każda funkcja $S_i(x)$ jest interpolującym wielomianem drugiego rzędu w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

Spełnia ona następujące warunki na podstawie, których będziemy wyprowadzać równania:

1. $S_i(x_i) = y_i$, dla i $\in [1, \dots, n-1]$ ***(warunek VI)***
2. $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})\ dla\ i\ \in [1, \dots, n-2]$ ***(warunek VII)***
3. $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})\ dla\ i\ \in [1, \dots, n-2]$ ***(warunek VIII)***

Następnie korzystając z odpowiednich warunków otrzymujemy:

- Z war. VI) $S_i(x_{i+1}) = \mathrm{a_i} + \mathrm{b_i} * (\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) + \mathrm{c_i} * (\mathrm{x} - \mathrm{x_i})^2 = a_i \rightarrow y_i = a_i$
- Z war. VIII) $b_{i+1} + 2 * c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = \mathrm{b_i} + 2 * \mathrm{c_i} * (\mathrm{x_{i+1}} - \mathrm{x_i}) \rightarrow$
$$\rightarrow c_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{(x_{i+1} - x_i) * 2}$$
- Z war. VI) oraz VII) : $y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 \rightarrow$
$$\rightarrow b_i + b_{i+1} = \frac{2(y_{i+1} - y_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- Przesuwamy indeksy i $\rightarrow i-1$:

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i \text{ , gdzie } \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Teraz jedynymi niewiadomymi są współczynniki b_i , ponieważ pozostałe współczynniki a_i również są nam znane, a c_i możemy obliczyć na podstawie ich wartości. Możemy wyznaczyć z tego n-1 równań postaci $b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i$ dla $i \in [1, \dots, n-1]$ o n niewiadomych, a brakujące równanie wstawiamy korzystając z odpowiednich warunków brzegowych. Równania zapisujemy w postaci macierzowej :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(f_2 - f_1)}{h_1} \\ \frac{2(f_3 - f_2)}{h_2} \\ \frac{2(f_4 - f_3)}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{2(f_{n-1} - f_{n-2})}{h_{n-2}} \\ \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Obliczamy z układu równań liniowych współczynniki b_i ,podstawiamy do odpowiedniego równania (numer IX) wszystkie wyliczone współczynniki. Następnie dla podanych x przybliżamy ich wartość odpowiednim wzorem funkcji sklejanej stopnia s_i na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, w którym ten x się znajduje i w ten sposób możemy przybliżać wartości funkcji w dowolnych punktach x.

5. Warunki brzegowe:

- Splajn naturalny:

Naturalny splajn jest uzyskiwany przez dodanie do definicji funkcji sklejanej dwóch kolejnych warunków. Mianowicie drugie pochodne na końcach przedziału, na którym jest określony splajn muszą wynosić 0, czyli $S''(x_0)$ = 0 oraz $S''(x_n)$ = 0 . Należy zauważyć, że tylko w tym przypadku jednoznacznie wyznaczymy funkcję sklejaną dla zadanych węzłów.

- Splajn z korekcją krzywizny

Ten typ splajnu jest podobny dla splajnu naturalnego, ponieważ również definiujemy dwa warunki na drugie pochodne w węzłach końcowych. Różnicą jest jednak wartość wspomnianych drugich pochodnych, gdyż mogą być one dowolną stałą. Ta wartość odpowiada pożądanym ustawieniom krzywizny w obu punktach końcowych. W praktyce trudno jest dobrze dopasować wartości $S''(x_0)$ i $S''(x_n)$, dlatego częściej stosowany jest splajn naturalny.

- Splajn zaciskany

W przypadku dwóch poprzednich typów funkcji sklejanej określaliśmy wartości drugiej pochodnej w węzłach końcowych, natomiast w tym przypadku skupimy się na wartościach pierwszej pochodnej w tych samych punktach. Dzięki warunkowi, że $S'(x_0)$ i $S'(x_n)$, przyjmują ustalone wartości, nachylenie na początku i na końcu splajnu jest pod kontrolą użytkownika.

- Splajn paraboliczny

W tym rodzaju splajnu funkcje określone na pierwszym i ostatnim przedziale, czyli $S_0(x_0)$ i $S_{n-1}(x_n)$ są zdefiniowane jako funkcje kwadratowe ($d_0 = d_{n-1}$ = 0). Oznacza to, że druga pochodna będzie identyczna na dwóch końcowych przedziałach.

- Splajn bezwęzłowy

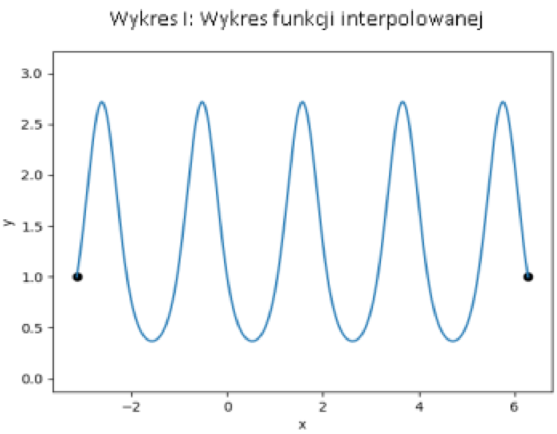
Do skonstruowania unikatowej funkcji sklejanej dodajemy warunki $d_0 = d_1$ oraz $d_{n-2} = d_{n-1}$ współczynniki przy zmiennej x^3 dla odpowiednio dwóch pierwszych oraz dwóch ostatnich funkcji $S_i(x)$ są takie same. Oznacza to, że $S_0(x)$ i $S_1(x)$ przyjmują takie same wartości w zerowej, pierwsze oraz drugiej pochodnej. Warunek $d_0 = d_1$ wymusza, aby S_0 i S_1 były identycznymi funkcjami, stąd punkt x_1 ($wezłą\ x_1, y_1$) nie jest potrzebny. Analogiczny tok rozumowania obowiązuje dla S_{n-2} i S_{n-1} oraz punktu x_{n-1}.

- Cubic splajn

Mamy funkcje $C_1(x)$ i C_n , które są funkcjami sześciennymi i przechodzą przez pierwsze 4 punkty. Wynika z tego, że $S'''_1 = C'''_1$ i $S'''_n = C'''_n$. Użycie tych warunków brzegowych zostanie bardziej sprecyzowane w podpunkcie 6a.

6. Rozwiązanie zadania:

Wzór oraz wykres funkcji użytej do analizy:



Wykres I: Funkcja $f(x)$ na przedziale $<-\pi, 2*\pi>$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-sin(3*x)}\ , gdzie\ x\ \in <-\pi, 2*\pi>}$$

Wzór XIII: Przydzielona funkcja $f(x)$

6.1. Funkcja sklejana III stopnia:

Funkcja Spline3 oblicza funkcję interpolowaną metodą spline'ów trzeciego stopnia dla zadanych węzłów interpolacji x i wartości funkcji y w tych węzłach.

Najpierw tworzona jest macierz H, która zawiera wartości h(x,i) dla każdej pary i oraz j, gdzie h(x,i) to odległość między węzłami interpolacji x[i] oraz x[i+1]. Wartości m_matrix to pierwsze różnice dzielone dla funkcji y w każdym węźle interpolacji.

W przypadku "cubic_spline" dla pierwszego i ostatniego węzła interpolacji ustawiane są specjalne warunki brzegowe, a następnie macierz H i m_matrix rozwiązywane są z użyciem metody solve z biblioteki numpy.

W przypadku "natural_spline" pierwszy i ostatni węzeł interpolacji są pomijane, a macierz H i m_matrix są zmniejszane o pierwszy i ostatni wiersz i kolumnę. Wynikowe rozwiązanie jest wypełniane zerami na krańcach.

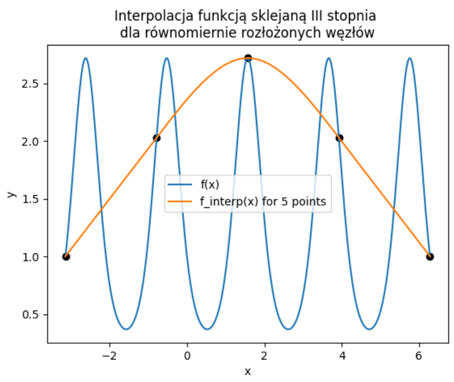
Następnie dla każdego punktu x_p z zadanego przedziału interpolacji x_interpol znajdowany jest indeks i takie, że x[i] <= x_p < x[i+1]. Na tej podstawie wyznaczane są współczynniki a, b, c oraz d dla funkcji interpolującej między węzłami interpolacji i oraz i+1.

Ostatecznie dla każdego punktu x_p z x_interpol obliczana jest wartość funkcji interpolującej w punkcie x_p za pomocą wyznaczonych wcześniej współczynników. Wynikowe wartości są zwracane w postaci listy.

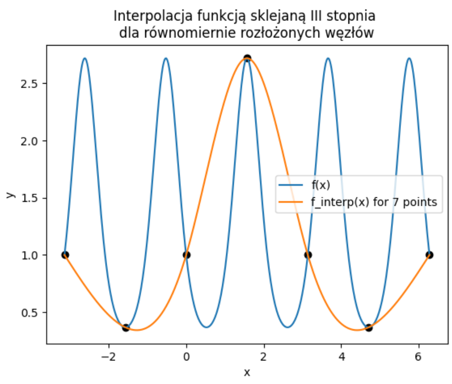
Wyznaczam kolejno 5,7,9,10,15,20,30,50 węzłów oraz dla 500 punktów wyznaczam za ich pomocą funkcję sklejaną 3 stopnia i porównuje jej wykres z wykresem funkcji interpolowanej.

a) **Splajn naturalny:**

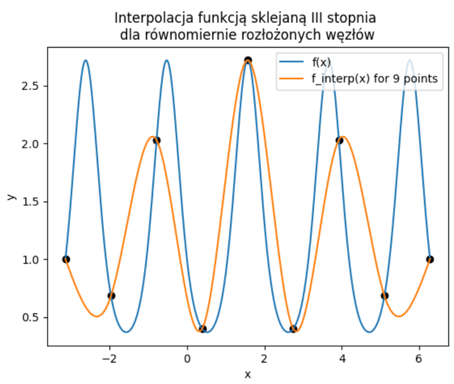
Wykres II: dla 5 węzłów:



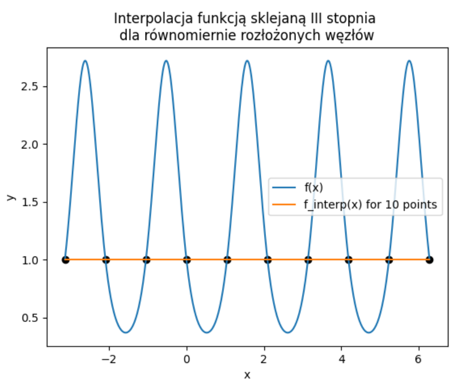
Wykres III: dla 7 węzłów:



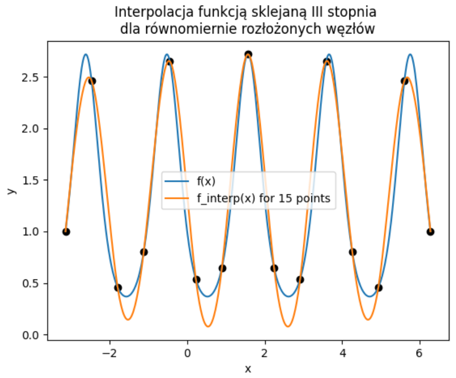
Wykres IV: dla 9 węzłów:



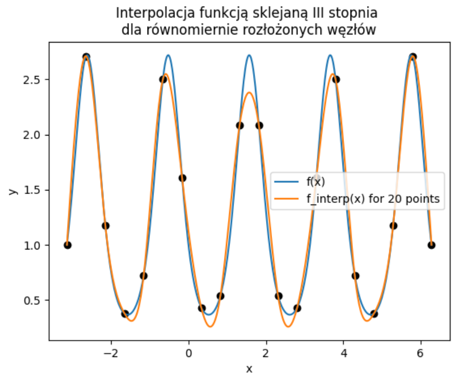
Wykres V: dla 10 węzłów:



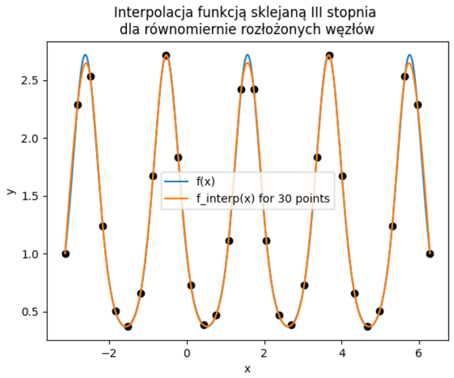
Wykres VI: dla 15 węzłów:



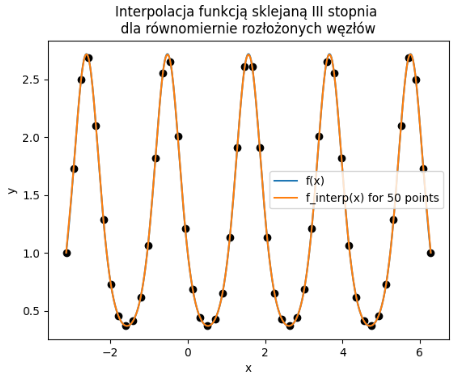
Wykres VII: dla 20 węzłów:



Wykres VIII: dla 30 węzłów:

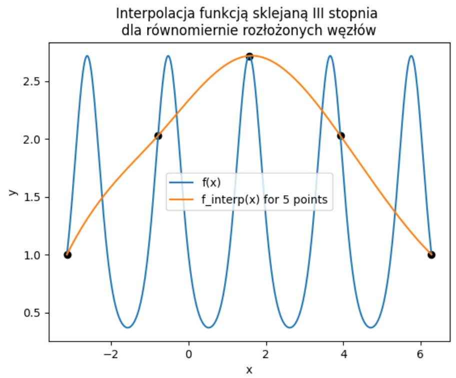


Wykres IX: dla 50 węzłów:

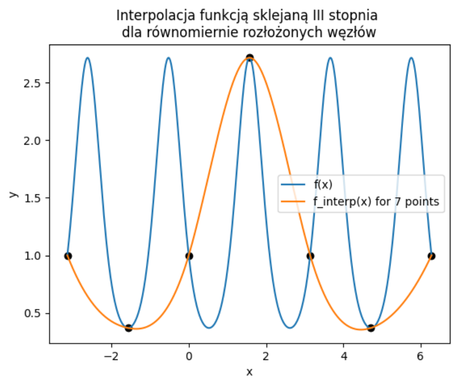


b) Splajn cubic:

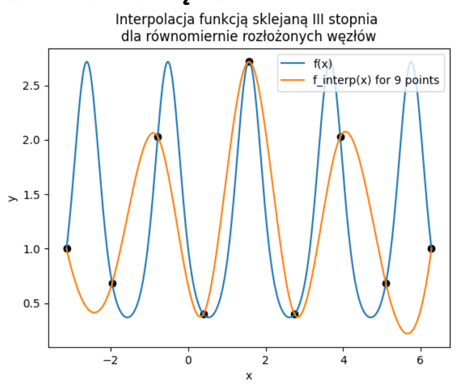
Wykres X: dla 5 węzłów:



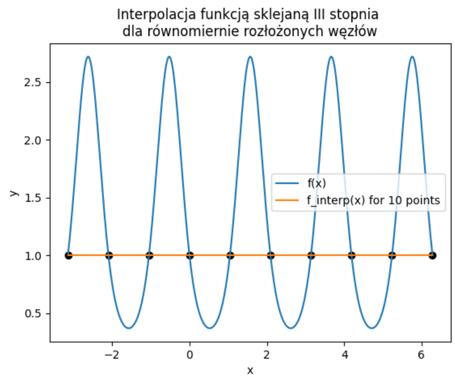
Wykres XI: dla 7 węzłów:



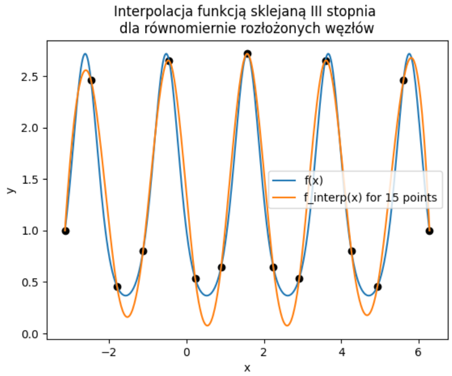
Wykres XII: dla 9 węzłów



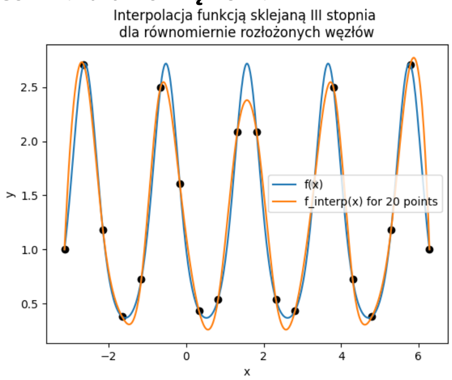
Wykres XIII: dla 10 węzłów:



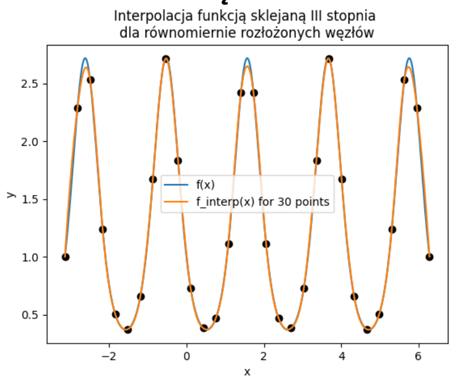
Wykres XIV: dla 15 węzłów:



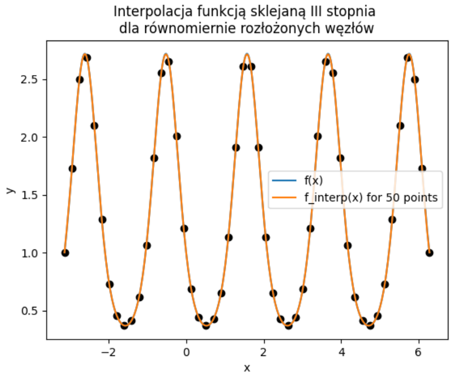
Wykres XV: dla 20 węzłów:



Wykres XVI: dla 30 węzłów:



Wykres XVII: dla 50 węzłów:



Jak tworzyłam warunki brzegowe?

- **Cubic Splajn:**

Przyjmujemy, że:

$$\left.\begin{array}{l} C_1(x) - \text{f. sześcienna przez pierwsze 4 punkty} \\ C_n(x) - \text{f. sześcienna przez ostatnie 4 punkty} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{s'''(x_1) = C_1''' \quad s'''(x_n) = C_n'''}$$

Stałe C'''_1 i C'''_n określamy za pomocą:

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \ ; \ \text{przybliża 1-szą pochodną}$$

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{x_{i+2} - x_i} \ ; \ 2\Delta_i^{(2)} \approx f''$$

$$\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i} \ ; \ 6\Delta_i^{(3)} \approx f'''$$

i są to odpowiednio ilorazy różnicowe:

$$\Delta_0^{(0)} = f[x_0] \equiv f(x_0)$$

$$\Delta_0^{(1)} = f[x_0,\ x_1] \equiv \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\Delta_0^{(3)} = f[x_0,\ x_1,\ x_2] \equiv \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta_0^{(n)} = f[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k] \equiv \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

Uzyskujemy związek między ilorazami, a pochodnymi:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}, \quad \eta \in [x_0, \dots, x_n] \quad (\eta\text{- pewien punkt})$$

Przybliżenie pochodnej $f_i^{(n)}$ otrzymujemy mnożąc $n! \cdot \Delta_i^{(n)}$, więc:

$$S'''(x_1) = C_1''' = 3! \cdot \Delta_1^{(3)} = 6 \cdot \Delta_1^{(3)}$$
$$S'''(x_n) = C_n''' = 3! \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 \cdot \Delta_{n-3}^{(3)}$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy brakujące warunki:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{\mathrm{n-3}}^{(3)} \end{cases}$$

Finalnie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{\mathrm{n-3}}^{(3)} \end{bmatrix}$$

- **Natural spline:**

W naturalnym sklejaniu sześciennym zakładamy, że druga pochodna sklejki w punktach brzegowych wynosi 0:

$$S''(x_n) = 0 = S''(x_0)$$

W tym programie w celu utworzenia naturalnego spline'a, obliczane są wartości pierwszej różnicy dzielonej w węzłach interpolacji i na ich podstawie konstruowana jest macierz h_matrix o wymiarze (n-2)x(n-2) i wektor m_matrix o wymiarze (n-2)x1. Następnie rozwiązujemy układ równań h_matrix * s = m_matrix w celu obliczenia wektora współczynników s, który reprezentuje drugie pochodne węzłów interpolacji.

W celu obliczenia naturalnego spline'a, zerujemy pochodne na końcach przedziału interpolacji. Aby to osiągnąć, modyfikujemy macierz h_matrix i wektor m_matrix poprzez usunięcie pierwszego i ostatniego wiersza i kolumny. Następnie w wektorze wynikowym solver, na pozycjach 0 i n-1, ustawiamy wartości zerowe, co odpowiada zerowym wartościom pochodnych na krańcach przedziału interpolacji.

6.2. Funkcja sklejana II stopnia:

Funkcja interpolacja_kwadratowa oblicza funkcje sklejane stopnia drugiego dla podanych węzłów, a następnie zwraca je jako listę. W funkcji tej znajdują się dwie podfunkcje: gamma i oblicz_wspolczynniki. Funkcja gamma oblicza wartości gamma dla każdego węzła, a funkcja oblicz_wspolczynniki oblicza współczynniki a, b oraz c na podstawie gamma i wybranego typu warunków brzegowych.

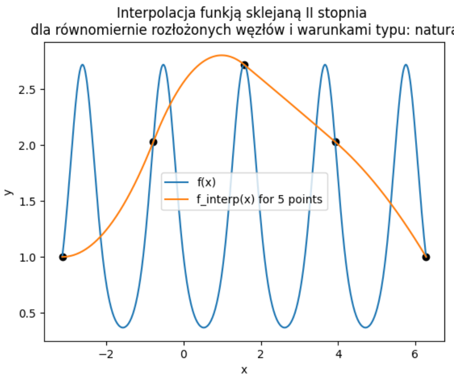
Funkcja funkcja_interpolacji_kwadratowej oblicza wartości funkcji interpolacji w punktach podanych w parametrze x_wyjsciowe dla podanych węzłów. W funkcji tej znajduje się jedna podfunkcja szukaj_indeksu_przedzialu, która zwraca indeks przedziału, w którym znajduje się szukana wartość.

Funkcje wykorzystują bibliotekę numpy i math do wykonywania operacji matematycznych, a także bibliotekę matplotlib.pyplot do rysowania wykresów.

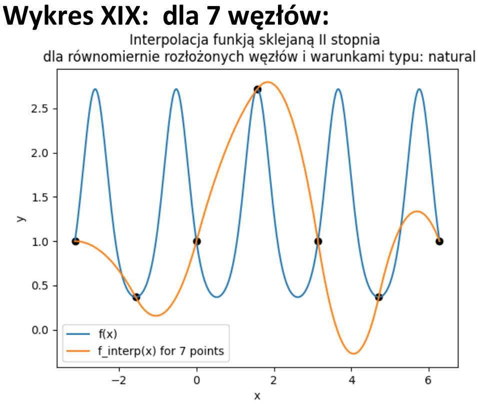
Wyznaczam kolejno 5,7,9,10,15,20,30,50 węzłów oraz dla 500 punktów wyznaczam za ich pomocą funkcję sklejaną 2 stopnia i porównuje jej wykres z wykresem funkcji interpolowanej.

a) Splajn naturalny:

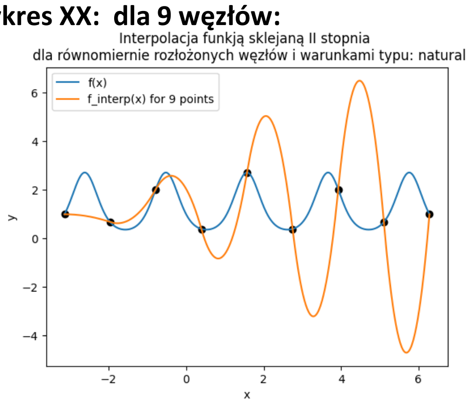
Wykres XVIII: dla 5 węzłów:



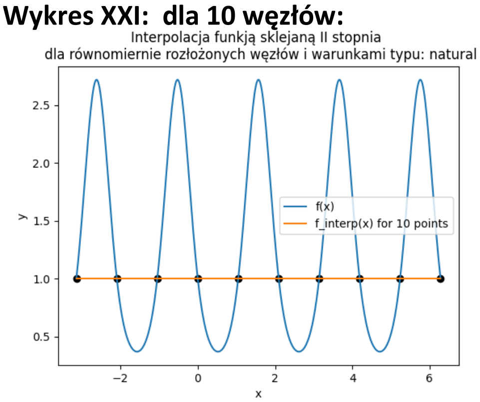
Wykres XIX: dla 7 węzłów:



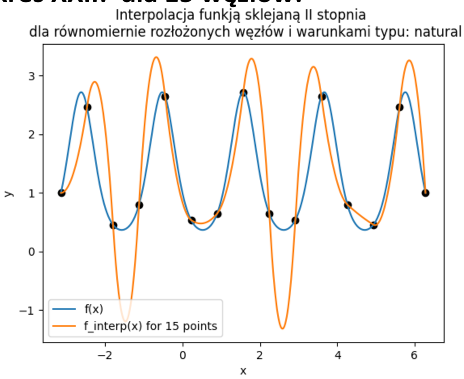
Wykres XX: dla 9 węzłów:



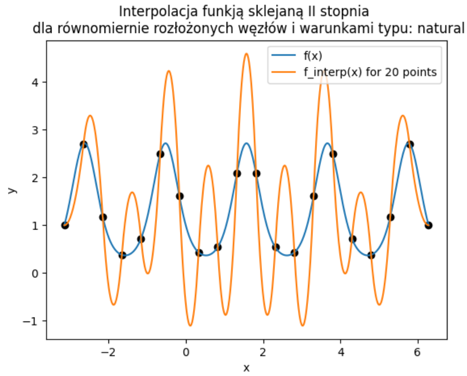
Wykres XXI: dla 10 węzłów:



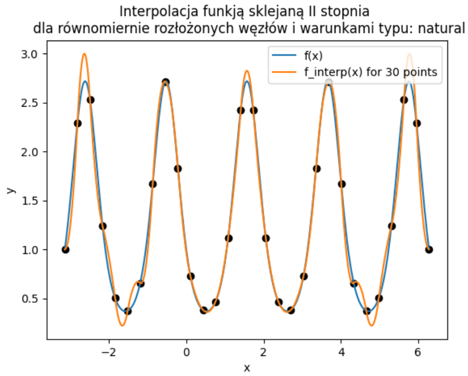
Wykres XXII: dla 15 węzłów:



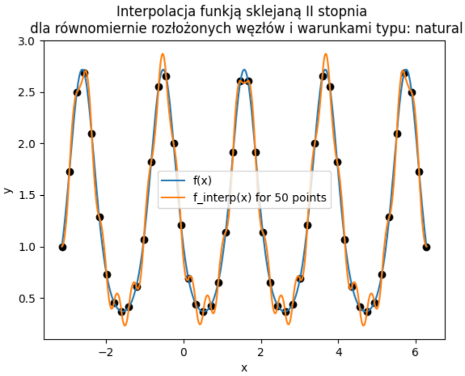
Wykres XXIII: dla 20 węzłów:



Wykres XXIV: dla 30 węzłów:

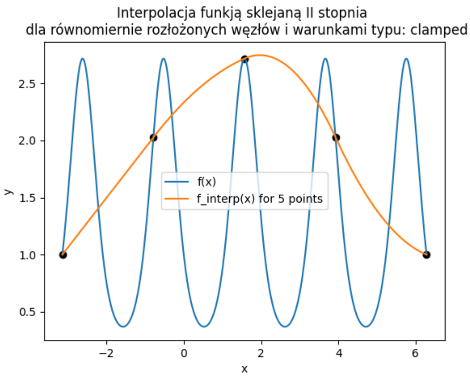


Wykres XXV: dla 50 węzłów:

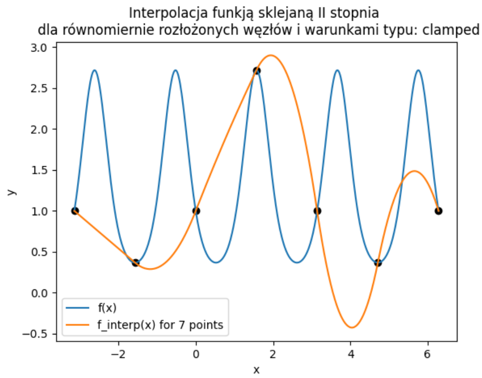


b) Splajn zaciskany:

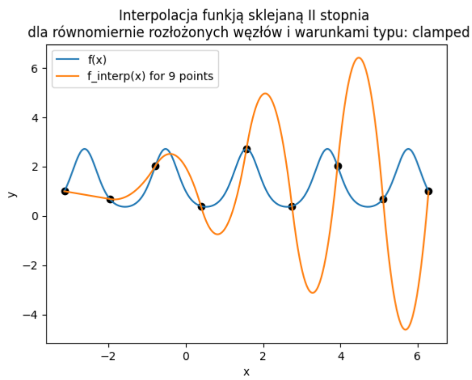
Wykres XXVI: dla 5 węzłów:



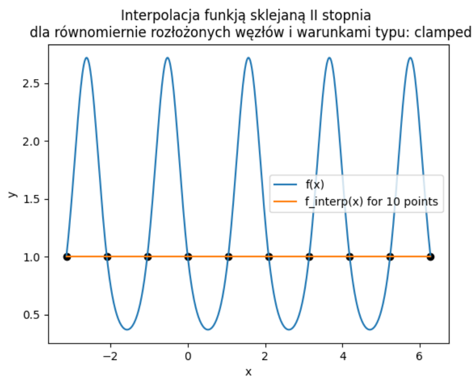
Wykres XXVII: dla 7 węzłów:



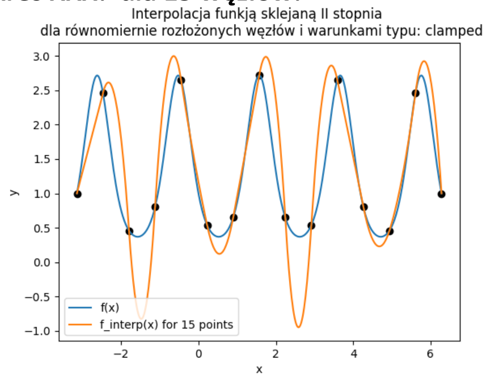
Wykres XXVIII: dla 9 węzłów:



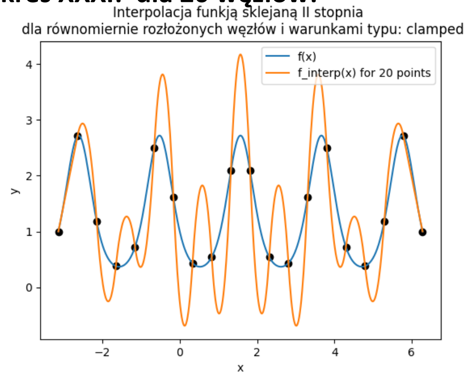
Wykres XXIX: dla 10 węzłów:



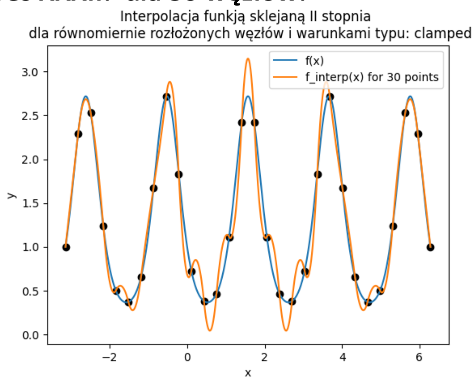
Wykres XXX: dla 15 węzłów:



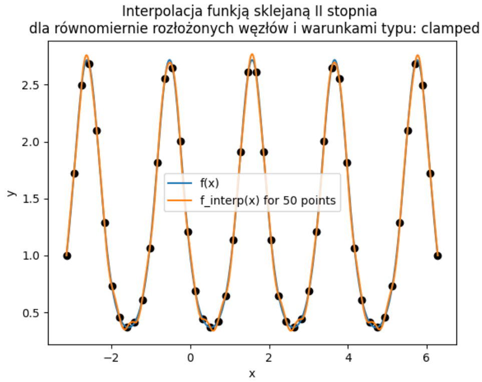
Wykres XXXI: dla 20 węzłów:



Wykres XXXII: dla 30 węzłów:



Wykres XXXIII: dla 50 węzłów:



Jak tworzę warunki brzegowe?

- **Natural Spline:**

$$S_1'(x_1) = 0 \quad \text{lub} \quad S_{n-1}'(x_n) = 0$$

Ponieważ brakuje nam jednego równania, wystarczy, że uwzględnimy jeden z powyższych warunków, dalsze przekształcenia wykonuję dla $S_1'(x_1) = 0$.

Korzystając z **war1) i war3) funkcji sklejanej stopnia II** otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

Dodaje więc zero na początku tablicy z wartościami b w funkcji interpolacja_kwadratowa, a następnie kontynuuje rozwiązywanie dalszej części zadania.

- **Clamped Spline:**

Przyjmuje się, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona, przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$S_1'(x_1) = f_1' \quad \text{lub} \quad S_{n-1}'(x_n) = f_{n-1}'$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana), najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$S_1'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Korzystając ze wzoru **X**, możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego (dodanie go na początku tablicy b), otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i.

7. Podsumowanie i wnioski:

Tabelka I: Funkcja sklejana II stopnia - natural

Liczba węzłów	*	**
5	2,387763668	0,069476149
7	2,779498771	0,053983254
9	7,37768132	0,074378082
10	1,717945156	0,064245275
15	1,686526017	0,066806855
20	1,895585398	0,066548427
30	0,29015215	0,063955137
50	0,155727774	0,066051941

Tabelka II: Funkcja sklejana II stopnia - clamped

Liczba węzłów	*	**
5	2,308893963	0,063298513
7	2,925962293	0,054933582
9	7,298303761	0,076885122
10	1,717945156	0,064245275
15	1,321030661	0,069197201
20	1,468471045	0,068854189
30	0,428344393	0,065602843
50	0,050414775	0,066031576

Tabelka III: Funkcja sklejana III stopnia - natural

Liczba węzłów	*	**
5	2,350383907	0,055469902
7	2,374902743	0,051966421
9	2,349999467	0,040965504
10	1,717945156	0,040081975
15	2,641482793	0,009600599
20	2,458885766	0,005721737
30	2,348952473	0,001367114
50	2,350101019	0,000139597

Tabelka IV: Funkcja sklejana III stopnia - cubic

Liczba węzłów	*	**
5	2,351174789	0,055454141
7	2,364844542	0,052457446
9	2,499205756	0,044418777
10	1,717945156	0,040081975
15	2,642098088	0,009075523
20	2,458920837	0,007596567
30	2,348920139	0,001587979
50	2,350101614	0,000107818

***- Największa różnica wartości interpolowanej funkcji i interpolacyjnej funkcji sklejanej**
**** - Suma kwadratów różnic interpolowanej funkcji i interpolacyjnej funkcji sklejanej**

W zadaniu interpolacyjnym wyznaczono funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia dla funkcji f(x) zadanej w treści zadania. Obliczenia zostały wykonane dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych, a dokładność interpolacji została określona dla różnej liczby przedziałów i różnych warunków brzegowych.

Warunki brzegowe, które zostały przyjęte to naturalne oraz ograniczone. Dla warunków brzegowych naturalnych, druga pochodna funkcji sklejanej wynosi zero na krańcach przedziału interpolacji. Dla warunków brzegowych ograniczonych, pierwsza pochodna funkcji sklejanej jest równa wartości pochodnej funkcji interpolowanej na krańcach przedziału interpolacji.

Interpolacja funkcjami sklejanymi drugiego stopnia daje gładkie przejścia między przedziałami interpolacji, ale interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia daje jeszcze lepsze rezultaty. W praktyce, interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia jest bardziej złożona obliczeniowo, ale daje dokładniejsze wyniki.

Graficznie zilustrowano przykładowe przypadki interpolacji funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Wyniki interpolacji były dokładniejsze dla funkcji sklejanych trzeciego stopnia, zwłaszcza w przypadku większej liczby przedziałów interpolacji.

Wnioski:

- Analiza, którą przeprowadziliśmy, pozwoliła na wykrycie znaczącej różnicy w dokładności przybliżenia interpolowanej funkcji przez interpolacyjną funkcję sklejaną 2. stopnia oraz interpolacyjną funkcję sklejaną 3. stopnia. Zwiększenie liczby węzłów pozwala na jeszcze bardziej wyraźne zobaczenie tej różnicy.
- Wybranie odpowiednich warunków brzegowych ma duży wpływ na kształt krzywej interpolacyjnej oraz na wartości błędów przybliżenia. Dla małej liczby węzłów, różnice między różnymi warunkami brzegowymi nie są aż tak istotne, jednak dla większej liczby węzłów, wpływ warunków brzegowych jest już znaczący.
- Dla dużych wartości liczby węzłów, zwiększenie liczby węzłów prowadzi do uzyskania lepszego przybliżenia. W tym przypadku, możemy zauważyć coraz większą różnicę w dokładności przybliżenia między różnymi warunkami brzegowymi. Warunek brzegowy Clamped Boundary, choć daje najgorsze przybliżenie, może być bardziej preferowany dla małej liczby węzłów, gdyż rozbieżności między różnymi warunkami brzegowymi są wtedy mniejsze.
- Waarunek natural daje nam gorsze przybliżenie zgodnie z tabelką niż warunek cubic dla funkcji sklejanej 3 stopnia. Funkcja z warunkiem cubic przybliża najlepiej funkcje, wśród pozostałych.
- Dodatkowo zauważamy z wykresu, że funkcja drugiego stopnia wykonuje wiele oscylacji gdy funkcja przybliżana jest bardziej skomplikowana
- Można odczytać iż większe różnice wartości funkcji interpolujących od rzeczywistych przyjmują zdecydowanie dla mniejszej liczby węzłów funkcje sklejane 2 stopnia. Wraz ze wzrostem liczby węzłów, zaczynają one maleć, co nie dzieje się w funkcji sklejanej stopnia III.

8. Bibliografia:

- **Wykłady**
- **https://nm.mathforcollege.com/**
- **https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/interp2.html**
- **https://engcourses-uofa.ca/books/numericalanalysis/piecewise-interpolation/quadratic-spline-interpolation/**
- **https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation**
- **https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021904578900904**