(22) дадено е множеството $A = \{1, \{1,2\}, 3, 4, 5\}$ и релацията

$R = \{(1,1), (1, \{1,2\}), (\{1,2\}, 1), (\{1,2\}, \{1,2\}), (3,3)(3,4)(3,5)(4,3)(4,4)(4,5)$
$(5,3)(5,4)(5,5)\}$

Релации на екв. са:

$[1]_R = \begin{matrix} (1,1) \\ (1, \{1,2\}) \\ (\{1,2\}, 1) \\ (\{1,2\}, \{1,2\}) \end{matrix} \Bigg\} (1, \{1,2\})$

$= (1, \{1,2\})$

! Когато ни се търси I_R индекса на R тоест = броя на ∀ множества на които р.е R разбива мн-ото A.

$[3]_R = \{3, 4, 5\} = [4]_R = [5]_R$

I_R е $= 2$ защото имаме $[1]_R$ и $[3]_R$

(23) дадено е $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и R е р.е определена чрез $nRm \Leftrightarrow n$ и m имат еднакъв брой делители. Намерете I_R и $[6]_R$

- един делител 1
- 2 -//- : 2, 3, 5, 7
- 3 -//- 4, 9
- 4 -//- 6, 8, 10

$I_R = 4$

$[6]_R = \{6, 8, 10\}$

(24) Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ проверете дали е ин/сю/биек. ако

а) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ако } 2 \mid x \\ x-1 & \text{ако } 2 \nmid x \end{cases}$ b) $f(x) = x \% 3$

- Нека $x_1 \neq x_2$, ако x_1 и x_2 са четни то понеже $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ ще имаме $f(x_1) \neq f(x_2)$
- x_1 четно x_2 нечетно тогава $x_1 + 1$ е нечетно, $x_2 + 1$ е четно $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow f$ е инекция.

$\forall y \exists x \, (f(x) = y)$

• y е четно. Тогава $(y+1)$ е нечетно и $(y-1) \in \mathbb{N}$ е четно.
y е нечетно $\Rightarrow y \geq 1$ и тока
$\Rightarrow f(y-1) = (y-1)+1 = y$ $\Rightarrow$ сюрекция.

b) не е инекция защото $f(0) = f(3) = 0$ но $0 \neq 3$.

(25) Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2 \dots u_n\}$ намерете броят на елементите на мн. T където T е равно на:

$\{(A,B) \mid A,B \subseteq U \wedge A,B \in P(U)\}$ степенно множество

$\rightarrow$ тъй като броя на елементите на степ. мн. на дадено изходно множество е равен на $2^{\text{броя на ел на изходн. мн.}}$

то $|P(U)| = 2^n$

редът има значение и с повторение.

$|T| = |P(U)| \times |P(U)| = (2^n)^2 = 4^n$

(26) $\{(A,B) \mid A,B \subseteq U \; \& \; |A| = 1\}$

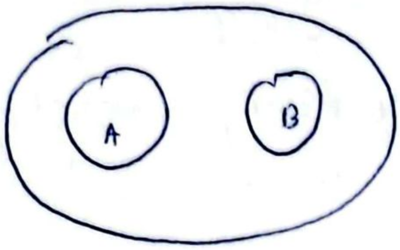
броя на начините по които може да изберем A = броя на начините по които може да изберем един ел. от U

$= C_n^1 = \binom{n}{1} = n$

Начините по които може да изберем B са 2^n (за вс. елемент на 2 варианта или е в B или н.

$|T| = C_n^1 \times 2^n = n2^n$.

(27) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge A \cap B = \emptyset\}$



Начините за избиране мн. A са.

$C_k^n = \binom{n}{k}$ $k \leq n$

$\Rightarrow |A| = k$

n−k от мн. U тоест

за B избиране от останалите

$|p(U \setminus A)| = 2^{n-k}$ начина.

Общо $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$

Използвахме бинома на Нютон $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ $x = 1$, $y = 2$

(28)

? $\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$

$A \subseteq B \subseteq U \iff \forall k \leq n \, [u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$

$\iff (\forall k \leq n) \neg [u_k \in A \wedge u_k \in B]$

$\iff (\forall k \leq n) \neg [u_k = X\bar{Y}]$

$\iff X\bar{Y}$ не участва в думите $\beta(A,B)$

тоест $\beta(A,B)$ е дума над азбука от три типа букви

$\Sigma \setminus \{X\bar{Y}\} \Rightarrow |T| = 3^n$.

(29) Намерете броя на решенията на:
$x_1+x_2+x_3=10$

колко сл. x_1, x_2, x_3

без значение на редът с повторение.
$\binom{10+3-1}{10}=\binom{10+3-1}{3-1}$

$\left\|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1\geq 3 \end{array}\right.$

ако $a_1\, a_2\, a_3$ е решение
то $a_1\geq 3$
$\Rightarrow a_1-3\geq 0$
$a_1-3+a_2+a_3=10-3=7$

$x_1+x_2+x_3=7$

ако $x_1+x_2+x_3=7$
то a_1+3, a_2, a_3 е решение

$$\frac{a_1+a_2+a_3=7}{a_1+3+a_2+a_3=7+3=10}$$
$a_1+3\geq 3$

$\Rightarrow$ $A=\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{N}^3 \mid a_1+a_2+a_3=10 \ \& \ a_1\geq 3\}$

$B=\{(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{N}^3 \mid b_1+b_2+b_3=7\}$

след
$|A|=|B|=\binom{7+3-1}{3-1}$

(30)

$[*]=\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1\geq 3 \\ x_3\geq 2 \end{cases}$

нека $f(a_1,a_2,a_3)=(a_1-3, a_2, a_3-2)$
нека $A=\{(a_1\, a_2\, a_3)\in\mathbb{N}^3 \mid a_1+a_2+a_3=10 \ \& \ a_1\geq 3 \ \& \ a_3\geq 2\}$

B е множество $=\{(b_1 b_2 b_3)\in\mathbb{N}^3 \mid b_1+b_2+b_3=10-3-2$

$f: A\to B$ е биекция.

f е инекция $(a_1 a_2 a_3)\neq(a_1' a_2' a_3')$

продължение на 30

1 сл. $a_1 \neq a_1' \Rightarrow a_1 - 3 \neq a_1' - 3 \Rightarrow a_1 - 3, a_2, a_3 - 2$

$\neq a_1' - 3, a_2, a_3' - 2$

2 сл. $a_2 \neq a_3'$ тогава —‖—

3 сл. $a_3 \neq a_3'$ —‖—

f е сюрекция върху B

(1) $Ran(f) \subseteq B$

Ако $(a_1 a_2 a_3) \in A$

$a_1 + a_2 + a_3 = 10 \quad a_1 \geq 3 \quad a_3 \geq 2$

$(a_1 - 3) + a_2 + (a_3 - 2) = 5$

$(a_1 - 3, a_2, a_3 - 2) \in B$

(2) $B \subseteq Ran(f)$

$(b_1\ b_2\ b_3) \in B$

$f(b_1 + 3, b_2, b_3 + 2) = (b_1, b_2, b_3) \quad 2\ (b_1 + 3, b_2, b_3 + 2) \in A$

$$|A| = |B| = \binom{5+3-1}{2}$$

(31) $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 130 \\ x_1 < 5 \\ x_2 < 15 \\ x_3 < 20 \\ x_4 \geq 30 \end{array}\right.$ *

? броят на решенията на [*]

броят на решенията е същия като на

$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 130 - 30 = 100 \\ x_1 < 5 \\ x_2 < 15 \\ x_3 < 20 \end{array}\right.$

$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \mapsto (x_1\ x_2\ x_3\ x_4 - 30)$ биекция. и продължаваш?

(32) $\left\|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 < 10 \end{array}\right.$

Нека $A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15 \}$

$B = \{ (x_1, x_2, x_3) \in A \mid x_2 < 10 \}$ и

$A_2 = \{ (x_1\ x_2\ x_3) \in A \mid x_2 \geq 10 \}$

можеме $A_2, B \subseteq A$ $A_2 \cap B = \emptyset$ и $A_2 \cup B = A$ то

то $|A| = |B| + |A_2|$

$|B| = |A| - |A_2|$

$|B| = \binom{15+3-1}{3-1} - \binom{(15-10)+3-1}{3-1}$.

(33) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15 \\ x_1<3 \\ x_2<10 \end{cases}$

Нека $A=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{N}^3 \mid x_1+x_2+x_3=15\}$

$B=\{(x_1,x_2,x_3)\in A \mid x_1<3 \text{ \& } x_2<10\}$

$A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in A \mid x_1\geq 3\}$

и

$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\in A \mid x_2\leq 10\}$

търсим $|B|$

- $B, A_2, A_3 \subseteq A$
- $B\cap A_2 = B\cap A_3=\emptyset$ от тук $B\cap(A_2\cap A_3)=\emptyset$
- $(x_1,x_2,x_3)\in B \iff (x_1,x_2,x_3)\in A$

$\&\ (x_1,x_2,x_3)\notin A_2\ \&\ \notin A_3$

$\iff (x_1,x_2,x_3)\in A\quad \notin A_2\quad \notin A_3$

$\iff (x_1,x_2,x_3)\in A\setminus(A_2\cup A_3) \Rightarrow B=A\setminus(A_2\cup A_3)$

понеже $B,\ A_1\cup A_2\subseteq A$ то $|B|=|A|-|A_2\cup A_3|$

$|A|=\binom{15+3-1}{3-1}$

от принципа за вкл. и изкл.? за обед

$|A_2\cup A_3|=|A_2|+|A_3|-|A_2\cap A_3|$

$|A_2|=\binom{(15-3)+3-1}{3-1}$ $\quad |A_3|=\binom{(15-10)+3-1}{3-1}$

биекция

$|A_2\cap A_3|=|\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{N}^3 \mid x_1+x_2+x_3=15-3-10\}|$

биекция е $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-3,\ x_2-10,x_3)$

$|A_1\cap A_2|=\binom{(15-3-10)+3-1}{3-1}$

$$|B| = \binom{15+3-1}{3-1} - \binom{(15-3)+3-1}{3-1} - \binom{(15-10)+3-1}{3-1} + \binom{(15-3-10)+3-1}{3-1}$$

(34) $* \left\| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2 \leq x_1 < 5 \end{array} \right.$

$(x_1\ x_2\ x_3) \mapsto (x_1 - 2,\ x_2,\ x_3)$

$2 \leq x_1 < 5$

$0 \leq x_1 - 2 < 5 - 2 = 3$

* има същия броя решения като системата

$\left\| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 10 - 2 = 8 \\ x_1 < 3 \end{array} \right.$

Нека $A = \{(x_1\ x_2\ x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 8\}$

$B = \{(x_1\ x_2\ x_3) \in A \mid x_1 < 3\}$

$A_1 = \{(x_1\ x_2\ x_3) \in A \mid x_1 \geq 3\}$

$A_1 \cap B = \emptyset \qquad A_1 \cup B = A$

$|B| = |A| - |A_1|$

$|A| = \binom{8+3-1}{3-1} \qquad |A_1| = \binom{(8-3)+3-1}{3-1}$

$B = |A| - |A_1|$

Продължаване на 31

$$* \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 130 \\ x_1 < 5 \\ x_2 < 15 \\ x_3 < 20 \\ x_4 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$
$$x_1 < 5$$
$$x_2 < 15$$
$$x_3 < 20$$

$A = x_1 x_2 x_3 x_4 \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$

$B = (\quad -11- \quad \mid x_1 < 5 \;\&\; x_2 < 15 \;\&\; x_3 < 20$

$A_1 = (\quad -11- \in A \mid x_1 \geq 5)$

$A_2 = (\quad -11- \in A \mid x_2 \geq 15)$

$A_3 = (\quad -11- \in A \mid x_3 \geq 20)$

$B \cap A_1 = \emptyset \quad B \cap A_2 = \emptyset \quad B \cap A_3 = \emptyset$

$B \cap (A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \emptyset$

$(x_1 x_2 x_3) \in B \in A \quad \notin A_1 A_2 A_3$

$B = A \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3$

заместван.

$|B| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| - |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
$- A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3$

$|A| = \binom{100+4-1}{4-1} \quad |A_1| = \binom{(100-5)+4-1}{4-1} \quad |A_2| = \binom{(100-15)+4-1}{4-1} \quad |A_3| = \binom{100-20+4}{4-1}$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \binom{(100-5-15-20)+4-1}{4-1}$

добави.

$x_1 < 5$
$x_2 < 5$
$x_3 < 7$
$x_4 \geq 10$

35

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 - 5 = 35$

$5 \leq x_1 < 10 \Rightarrow x_1 < 5 \Rightarrow$

$x_2 < 5$

$x_3 < 7$

$x_4 \geq 10$

$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \\ x_1 < 5 \\ x_2 < 5 \\ x_3 < 7 \end{array} \right.$

$A = x_1 x_2 x_3 x_4 \in \mathbb{N}^4 \mid = 25$

$B = \quad \mid x_1 < 5 \quad x_2 < 5 \quad x_3 < 7$

$A_1 \qquad x_1 \geq 5$

$A_2 \qquad x_2 \geq 5$

$A_3 \qquad x_3 \geq 7$

$|B| = |A| \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \Rightarrow |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

~~$|B| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$~~

$= \binom{25+4-1}{4-1} - \binom{25-5+4-1}{4-1} - \binom{25-5+4-1}{4-1} - \binom{25-7+4-1}{4-1} - \binom{(25-5-5-7)+4}{4-1}$

$+ \binom{(25-5-5)+4-1}{4-1} + \binom{25-5-7+4-1}{4-1} + \binom{25-5-7+4-1}{4-1}$

$A_1 \cap A_2 \qquad A_1 \cap A_3 \qquad A_2 \cap A_3$

CamScanner