(68) Да се докаже че
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

($\subseteq$) Нека $A, B, C$ са произволни множество.
Нека $x \in (A \cup B) \cap C$ е произ. елемент.

$\Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C$.

Възможни са следните 2 случаи.

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \cap C$ но $A \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2. $x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow$ тъй като $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$

$\subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

($\supseteq$) Нека $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ е произволен елемент

$\Rightarrow y \in (A \cap C)$ или $y \in (B \cap C)$

1 сл $y \in A \cap C \Rightarrow y \in A$ и $y \in C$

$$\underset{\substack{\cap \\ A \cup B}}{y \in A} \text{ и } \underset{\substack{\cap \\ (A \cup B) \cap C}}{y \in C}$$

2 сл $y \in B \cap C \Rightarrow y \in B$ и $y \in C$

$y \subseteq (A \cup B) \cap C$ $\quad \subseteq (A \cup B) \cap C$

Задачи за решаване

69. докажете че $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Нека $A, B, C$ са произволни множества.

$\subseteq$ Нека $x$ е произволно число което

$x \in A \times (B \setminus C)$.

Това означава че $x \in$ в декартното произ.

на нивото $A$ с $B \setminus C$

Нека $x = (a, b)$. Тогава $a \in A$ и $b \in B \setminus C$

щом $b \in B \setminus C$. то $b \in B$ и $b \notin C$

от тук имаме че $a \in A$ и $b \in B$

$\Rightarrow x = (a, b) \in A \times B$

Имаме и че $a \in A$ и $b \notin C$ тогава

$x = (a, b) \notin A \times C$ (защото ако $b \in C$ тогава ро)

така имаме

$x \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ $\subseteq$ $\square$

$\supseteq$ Нека $y$ е произволно.

Нека $y \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

$y \in A \times B$ & $y \notin A \times C$

$y = (a', b') \Rightarrow a' \in A$ $b' \in B$

Тъй като $y \in A$ (демек $a' \in A$) и $y \notin C$

то $y \notin A \times C$

$a' \in A$ $b' \in B$ $b' \notin C$

$\Rightarrow y \in A \times (B \setminus C)$ $\supseteq$ От обем аксиомата за е доказано.

(70) докажете че $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$\subseteq$ Нека $x \in A \setminus (B \cup C)$

$x \in A \;\&\; x \notin B$ ~~или~~ $\&$ $x \notin C$

$x \in A \;\&\; x \notin C \quad \& \quad x \notin B \setminus C$

$x \in A \setminus C \qquad x \notin B \setminus C$

$x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$\supseteq$ Нека $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$x \in A \setminus C \;\&\; x \notin B \setminus C$

$x \in A \;\&\; x \notin C \quad \& \; x \notin B \;\&\; x \notin C$

$x \in A \quad \& \; x \notin B \quad x \notin C$

$x \in A \quad \& \quad x \notin B \cup C$

$\supseteq$ $\square$

(7)

Нека $R$ е релацията над $P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ определена чрез

$(A, a) R (B, b) \leftrightharpoons A, B \subseteq \mathbb{N} \;\&\; a, b \in \mathbb{N} \;\&$
$\& [ A \subset B) \vee (A = B \;\&\; a \leq b)]$

докажете че $R$ е ч.н. в $P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$

Забележка $A \subset B$ означава че $A \subseteq B$ и $A \neq B$
$R$ е над $P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ т.ч. $R \subseteq (P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}) \times (P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N})$

Рефлексивност над $P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A, a \in P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}}{A \subseteq \mathbb{N} \;\&\; a \in \mathbb{N}}}{A \subset A \;\&\; (a \leq a \;\; A = A)}}{(A, a) \; R \; (A, a)}$$

Антисиметричност Нека $u$ и $v$ са т.ч. $uRv$ и $vRu$.
Тогава понеже $R$ е над $P(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ то $\exists A, B \subseteq \mathbb{N}$,
$a, b \in \mathbb{N}$ т.ч. $u = (A, a)$ $v = (B, b)$ като
$(A, a) R (B, b)$ и $(B, b) R (A, a)$. В сила е следн
поредица от импликации.

$$\cfrac{(A, a) R (B, b) \quad \& \; (B, b) R (A, a)}{A, B \subseteq \mathbb{N} \;\&\; a, b \in \mathbb{N} \;\&\; (A \subset B \vee (A = B \;\&\; a \leq b)) \;\&\; (B \subset A}$$
$(B = A \;\&\; b \leq a))$

$A, B \subseteq \mathbb{N}$ & $a, b \in \mathbb{N}$ & $[(I) \vee (II) \vee (III) \vee (IV)]$

Където:

$(I) \leftrightharpoons (A \subset B)$ & $(B \subset A)$

$II \leftrightharpoons (A \subset B$ & $B = A$ & $b \leq a)$

$III \leftrightharpoons (A = B$ & $a \leq b$ & $B \subset A)$

$IV \leftrightharpoons (A = B$ & $a \leq b$ & $B = A$ & $b \leq a)$

Тогава:

I

$A \subset B$ & $B \subset A$

$A \subseteq B$ & $B \subseteq A$ & $A \neq B$

$A = B$ & $A \neq B$ лъжа

$A = B$ & $a = b$

II

$A \subset B$ & $B = A$ & $b \leq a$

$A \neq B$ & $B = A$

$A = B$ & $a = b$

III

$A = B$ & $a \leq b$ & $B \subset A$

$A = B$ & $B \neq A$

$A = B$ & $a = b$

IV

$A = B$ & $a \leq b$ & $B = A$ & $b \leq a$

$A = B$ & $(a \leq b$ & $b \leq a)$

$A = B$ & $a = b$ антисим

След.
$$\frac{I \vee II \vee III \vee IV}{A = B \quad a = b}$$

$(A, a) = (B, b)$ антисим. $u = v$

Транзитивност нека $u, v, w$ са т.ч. $uRv$ & $vRw$

$u = (A, a)$ $v = (B, b)$ $w = (C, c)$

$$I \text{ сл.} \leftrightharpoons \frac{\dfrac{A \subset B \quad \& \; B \subset C}{A \subset C}}{A \subset C \vee A = C \;\&\; a \leq c}$$

$ARa = CRc$

$$2 \text{ сл} \quad \frac{\dfrac{\dfrac{A \subset B \;\&\; B = C \;\&\; b \leq c}{A \subset B \;\&\; B = C}}{A \subset C}}{\dfrac{A \subset C \vee A = C \;\&\; a \leq c}{(A, a) R (C, c)}}$$

продължение на 41

III сл.

$$\begin{array}{c} A = B \,\&\, a \le b \,\&\, B \subset C \\ \hline A = B \,\&\, B \subset C \\ \hline A \subset C \\ \hline A \subset C \vee A = C \,\&\, a \le c \\ \hline (A, a)\ R\ (C, c) \end{array}$$

IV. сл.

$$\begin{array}{c} (A = B \,\&\, a \le b) \,\&\, (B = C \,\&\, b \le c) \\ \hline A = B = C \,\&\, a \le b \,\&\, b \le c \\ \hline A = C \,\&\, a \le c \\ \hline A \subset C \vee A = C \,\&\, a \le c \\ \hline (A, a)\ R\ (C, c) \end{array}$$

72) Намерете броя на решенията в ест. число.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_2 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x_2 - 3 \geq 0$$

ако $a_1\, a_2\, a_3$ са решение

то
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$A = a_1\, a_2\, a_3 \in \mathbb{N}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 12$$

$$B = b_1\, b_2\, b_3 \in \mathbb{N}^3 \mid b_1 + b_2 + b_3 = 15$$

$$|A| = |B| = \binom{12 + 3 - 1}{3 - 1}$$

73) Намерете броя на решенията

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 15 \\ x_4 \geq 25 \end{cases}$$

$$|A| = |B| = \binom{(100 - 10 - 15 - 25) + 4 \ldots}{\ldots\ 4 - 1}$$

(74)

ИЗПИТ 5.02.2016

докажете че $\underbrace{(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)}_{1^\circ \text{ посока}} \Leftrightarrow \underbrace{C \subseteq A}_{2^\circ \text{ посока}}$

Нека A, B, C са произволни множество.

$\subseteq$ Нека $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Нека $x$ (произволен елемент) $\in (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Тогава $(x \in A \wedge x \in B)$ или $x \in C$

$x \in A \wedge x \in B \vee x \in C$

$x \in A \; \& \; (x \in B \vee C)$

$\Rightarrow x \in A \cap B \cup C$

Това е изпълнено винаги.

ще докажем че $C \subseteq A$.

Нека $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \Rightarrow C \subseteq A$

$\supseteq$ Нека $C \subseteq A$ ще докажем обратната посока

Нека $x \subseteq (A \cap B) \cup C$

$x \in A \cap B \vee x \in C$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap (B \cup$

1 сл. $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

2 сл $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

2 Нека $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow \underline{x \in A} \wedge \underline{x \in B \cup C}$

Тъй като $A \cap B$ то $x \in A \cap B$ и $x \in B \vee x \in C$

понеже $C \subseteq A$ тогава $x \in (A \cap B) \cup C$.