Задачи

① Нека $x \in A$ $y \in B$ док че $(x,y) \in P(P(A \cup B))$

доказателство.

$$\frac{x \in A \;\&\; y \in B}{\{x\} \subseteq A \;\&\; \{y\} \subseteq B}$$

$$\frac{\{x\} \subseteq A \;\&\; \{x\} \cup \{y\} \subseteq A \cup B}{\{x\} \subseteq A \cup B \;\&\; \{x,y\} \subseteq A \cup B}$$

$$\frac{\{x\} \in P(A \cup B) \;\&\; \{x,y\} \in P(A \cup B)}{\{\{x\}, \{x,y\}\} \subseteq P(A \cup B)}$$

$$\frac{(x,y) \subseteq P(A \cup B)}{(x,y) \in P(P(A \cup B))}$$

② Намерете $A \times \phi$

$\Rightarrow$ ще покажем че $A \times \phi = \phi$. да допуснем противното че $A \times \phi \neq \phi$

тогава $A \times \phi = u$ където $u = (a,b) \mid a \in A$ и $b \in \phi$

но ϕ няма елементи защото е непразно $\Rightarrow$ противоречие.

③ намерете $P(P(\phi) \times A)$ където $A = (\{\phi, 2, 3\} \setminus \{2,3,4\}) \cap (\{2,3,4\} \setminus \{\phi, 2, 3\})$

$\Rightarrow$ имаме че $A = \{\phi\} \cap \{4\} = \emptyset$ такка че $P(\phi) \times A = P(\phi) \times \phi = \phi$

$\Rightarrow P(P(\phi) \times A) = P(\phi) = \{\phi\}$

④ намерете $P(\{\phi\} \times \{\{\phi\}\}) \times P(\phi)$

$\Rightarrow$ имаме че $P(\phi) = \{\phi\}$

$\{\phi\} \times \{\{\phi\}\} = \{(\phi, \{\phi\})\} \Rightarrow a = (\phi, \{\phi\})$

така $^{\text{имаме}}$ $P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\} \Rightarrow \{\phi, \{a\}\} \times \{\phi\} = \{(\phi, \phi), (\{a\}, \phi)\}$

$= \{(\phi, \phi), \{(\phi, \{\phi\})\}, \phi\}$.

⑤ Намерете $P(\{4, \emptyset\}) \times (\{1,2,2,1,3,3\} \setminus \{2,3\})$

$\Rightarrow$ имаме $P(\{4, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{4\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset, 4\}\}$

$P(\{4,\emptyset\}) \times (1,3) = \{(\emptyset,1), (\emptyset,3), (\{4\},1), (\{4\},3), (\{\emptyset\},1),$
$(\{\emptyset\},3), (\{\emptyset,4\},1), (\{\emptyset,4\},3)\}$

⑥ докажете

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

доказателство

1) Нека A, B, C са произволни.

Нека $u \in A \times (B \cap C)$

$u = (a,b)$ където $a \in A$ $b \in B \cap C$

понеже $B \cap C \subseteq B$ то $b \in B$ и така $u = (a,b) \in A \times B$

същото и за C.

2) Нека $u \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow$ $u \in A \times B$ и $u \in A \times C$

тогава $\exists$ $a \in A$ $b \in B$ за което $u = (a,b)$

и $\exists a' \in A$ и $c \in C$, за което $u = (a', c)$

тогава $(a,b) = u = (a',c)$ откъдето $a = a' \in A$ и $b = c \in B \cap C$

така $u = (a,b) \in A \times (B \cap C)$

от аксиомата на обема е доказано.

⑦ да се намери $P(\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}) \times P(\emptyset)$

$\underset{a}{\{\emptyset\}} \times \{\underbrace{\{\emptyset\}}_{b}\} = \{a\} \times \{b\} = \{(a,b)\} = \{\underbrace{(\emptyset, \{\emptyset\})}_{c}\}$

$P(\{c\}) = \{\emptyset, \{c\}\} = \{\emptyset, (\emptyset, \{\emptyset\})\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(\{c\}) \times P(\emptyset) = \{\emptyset, \{c\}\} \times \{\emptyset\}$ като зароче ч

⑧ докажете че за $\forall$ три множества A, B, C е изпълнено че

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(\subseteq)$ Нека $x \in (A \cup B) \cap C$ е произволен елемент.

следователно $x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow x \in A$ или $x \in B$

имаме 2 случаи:

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \cap C$ (защото $x \in C$) но $A \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2. $x \notin A$ но $x \in B$ (тъй като $x \in A \cup B$) | $B \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(\supseteq)$ Нека $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ е произволен елемент.

$\Rightarrow y \in A \cap C$ или $y \in B \cap C$ и в двете множества са

елемения с C тоест на което и да принадлежи ще $\Rightarrow y \in C$,

но $C \subseteq (A \cup B) \cap C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$

тъй като x и y бяха произволи елементи то $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

и $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow$ от аксиомата за обем е доказано. $= \square$

(9) докажете че $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

= Нека A и B са произволни множества

($\subseteq$) Нека $x \in A \setminus B$. Тогава $x \in A$ и $x \notin B$.

Тогава $x \notin A \cap B$ и $x \in A$.

от тук следва че $x \in A \setminus (A \cap B)$

Тъй като избираме x да е произволен елемент

то $A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$

($\supseteq$) Нека $y \in A \setminus (A \cap B)$. $\Rightarrow y \in A$ и $y \notin A \cap B$

$\Rightarrow y \notin B$ (тъй като, ако $y \in B$, то $y \in A \cap B$ но това не е вярно). Тъй като избрахме y да е произволен елемент

то $A \setminus B \supseteq A \setminus (A \cap B)$

от ($\subseteq$) и ($\supseteq$) е доказано.

(10) докажете че за $\forall$ три множества A, B, C е изпълнено че

$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq C$

Нека A, B, C са произволни множества.

Нека A, B, C са произволни множества. За целта нека

($\subseteq$) Нека $A \subseteq B \cup C$. Ще докажем че $A \setminus B \subseteq C$. Нека $x \in A$ и $x \notin B$

$x \in A \setminus B$ е произволен елемент. Тогава $x \in A$ и $x \notin B$

но $A \subseteq B \cup C \Rightarrow x \subseteq B \cup C$. Но $x \notin B \Rightarrow x \in C$. Но тъй като

x беше произволен избран елемент то с това доказахме

че ако $x \in A \setminus B$ то $x \in C$ $\Rightarrow A \setminus B \subseteq C$

($\supseteq$) Нека $A \setminus B \subseteq C$ ще докажем че $A \subseteq B \cup C$. Нека $x \in A$ е произволен елемент. Ако $x \in B \cup C$ е тривиално, но ако $x \notin B$ то тъй като $x \in A$ ще имаме че $x \in A \setminus B$ от другата страна сме в случая в който $A \setminus B \subseteq C$ и следователно $x \in C \subseteq B \cup C$

от ($\supseteq$) и ($\subseteq$) е доказано □

(11) докажете че за $\forall n$ на брой множества $A_1, \dots A_n$ е изпълнено че $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

доказателство.

($\subseteq$) Нека $X \in P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. тогава $X \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \forall i, x \in A_i$

където $x \in X$ тоест $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_k$ за $\forall k$; но за $\forall k \in \mathbb{N}: \bigcap_{i=1} A_i \subseteq A_k$

откъдето $X \in A_k$ за $\forall k \in \mathbb{N}. \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: x \in P(A_k)$

($\supseteq$) Нека $Y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow y \in P(A_1) \wedge Y \in P(A_2) \wedge \dots$ за $\forall i \in \mathbb{N}$

и $Y \in P(A_i)$. тоест $y \in A_i$ ще докажем че $Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Нека $y \in Y$ но за $\forall i \in \mathbb{N}$: $y \subseteq A_i \Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow y \in P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

(12) докажете че е изпълнено $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

($\subseteq$) Нека $x \in A \times (B \setminus C)$. тогава $\exists\, a \in A$ и $b \in B \setminus C$ такива че $x = (a, b)$. от тук заключаваме че $b \in B$ и $b \notin C \Rightarrow x \in A \times B$.

да допуснем че $x \in A \times C$, тогава $\exists\, a' \in A$ $c \in C$ т.че $x = (a', c)$ откъдето следва че $b \in C$

$\Rightarrow a = a'$ и $b = c$ но $c \in C$ което е противоречие. $\Rightarrow x \notin A \times C$. Така $x \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

($\supseteq$) Нека $x \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. следователно $x \in A \times B$ и $x \notin A \times C$

от $x \in A \times B \Rightarrow \exists a \in A$ и $b \in B$ такива че $x = (a, b)$

да допуснем че $b \in C$, тогава тъй като $a \in A$ имаме $x = (a, b)$ $\in A \times C$ което е противоречие с допускането и следователно

$b \notin C \Rightarrow x = (a, b) \in A \times (B \setminus C)$

(7)

13) Докажете че $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \Rightarrow A \subseteq C$

$(\Rightarrow)$ Нека множествата A, B, C са такива че $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
Ще докажем че $A \subseteq C$. Нека $x \in A$ е произволен елемент, тогава $x \in A \cup (B \cap C)$
за целта нека $x \in A$ произволно $x \in A$ доказахме
$= (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in C$ тоест за произволно
че $x \in C \Rightarrow A \subseteq C$

$(\Leftarrow)$ Нека $A \subseteq C$. Ще докажем че $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

$(\subseteq)$ Нека $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогава $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$
Ако $x \in A$ то $x \in A \cup (B \cap C)$
Ако $x \notin A$ то $x \in B$.
$\Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$ тук никъде не използвахме че $A \subseteq C$

$(\supseteq)$ Нека $x \in A \cup (B \cap C)$
• Ако $x \in A$ то $x \in A \cup B$ тъй като $A \subseteq A \cup B$, но $A \subseteq C$ по условие откъдето следва че $x \in (A \cup B) \cap C$
• Ако $x \notin A$ то $x \in B \cap C$ откъдето следва че $x \in B$ и $x \in C$
последното води до $x \in A \cup B$ и $x \in (A \cup B) \cap C$

14) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$(\subseteq)$ Нека $x \in A \setminus (B \cup C)$.
$\Rightarrow x \in A$ и $x \notin B \cup C$
$x \notin B$ и $x \notin C$
От $x \in A$ и $x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C$ 1)
От $x \notin B$ и $x \notin C \Rightarrow x \notin B \setminus C$ 2)
От 1) 2) $\Rightarrow x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$(\supseteq)$ Нека $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
$\Rightarrow x \in A \setminus C$ и $x \notin B \setminus C$
3) 4)
От 3) $x \in A$ и $x \notin C$
От 4) $x \notin B$
Имаме че $x \in A$ $x \notin C$ и $x \notin B$
$\Rightarrow x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

(15) докажете че $A \subseteq B \iff P(A) \subseteq P(B)$

Нека A и B са произволни

$\Rightarrow$) Нека $A \subseteq B$. Ще докажем че $P(A) \subseteq P(B)$

Нека $X \in P(A)$. Тогава $X \subseteq A$. Но $A \subseteq B \Rightarrow X \subset B$

$\Rightarrow X \in P(B)$ следователно $P(A) \subseteq P(B)$.

$\Leftarrow$) Нека $P(A) \subseteq P(B)$. Понеже $A \subseteq A$, тогава $A \in P(A) \subseteq P(B)$

$\square$

(16) докажете $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (C \cup (B \setminus C))$

($\subseteq$) Нека $X \in (A \setminus B) \setminus C$ е произволно. Следователно $x \in A \setminus B$ и $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ $x \notin B$ и $x \notin C$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{x \in A \setminus (C \cup (B \setminus C))}{x \in A \quad и\ x \notin C \cup (B \setminus C)}}{x \in A \quad и \quad x \notin C \quad и\ x \notin B \setminus C}}{}$$

$x \in A$ $\quad x \notin C$ $\quad$ и понеже $x \notin B$ а $B \setminus C \subseteq B$ $\quad x \notin B \setminus C$

$\Rightarrow$ така $x \in A$ и $x \notin C \cup B \setminus C$ откъдето $x \in A \setminus (C \cup (B \setminus C))$

($\supseteq$) Нека $\underline{X \in A \setminus (C \cup (B \setminus C))}$ е произволно.

$$\frac{x \in A \quad и\ x \notin C \cup (B \setminus C)}{x \in A \quad x \notin C \quad x \notin B \setminus C}$$

от $x \notin B \setminus C$ имаме че $x \notin B$ или $x \in C$ но $x \notin C$

$$\frac{\dfrac{и \Rightarrow x \notin B}{x \in A \setminus B \quad и\ x \notin C}}{x \in (A \setminus B) \setminus C}$$

13 (17) Нека R е релация над множ. $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$

R се дефинира по следния начин: $xRy \iff (\exists p \in \mathbb{Q})[x = py \vee xy = p]$

Ще наричаме такова рационално число p свидетел за това че x е в релация с y. Докажете че R е релация на еквивалентност над A.

Рефлексивност

Нека $x \in A$. Тогава $1 \in \mathbb{Q}$ и $x = 1 \times x \Rightarrow (\exists 1 \in \mathbb{Q})[x = 1 \times x \vee x \times x = 1]$

xRx

Симетричност

Нека xRy и $p \in \mathbb{Q}$ е свидетел за това. Тоест $x = py \vee xy = p$.

Ще намерим свидетел за yRx.

Ако $x = py$ то $y = \frac{1}{p} \times x$ (ако $p = 0$ то $x = 0 \notin A$)

но $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ и така $q = \frac{1}{p}$ е свидетел за yRx твй като

$y = qx \Rightarrow [y = qx \vee yx = q]$ е истина.

Транзитивност

Нека xRy yRz и $p, q \in \mathbb{Q}$ са свидетели. Трябва да бъде изпълнено следното за да е транзитивна

$\forall x \forall y \forall z\ (xRy \wedge yRz \wedge zRx)$ тоест $[x = py \vee xy = p]$ и $[y = qz \vee yz = q]$

търсим такова $s \in \mathbb{Q}$ за което е изпълнено $[x = sz \wedge xz = s]$

4 случая

1) $x = py \wedge y = qz$ от първата посоке на условието $\Rightarrow x = py = p(qz) = (pq)z \Rightarrow s = pq \in \mathbb{Q}$

2) $x = py \wedge yz = q$ от 1-ва посоке $\Rightarrow xyz = pyq \Rightarrow xz = pq = s$

3) $xy = p \wedge y = qz \Rightarrow xyzq = yp \Rightarrow xz = \frac{p}{q}$ $q \neq 0$ $s = \frac{p}{q}$

4) $xy = p \wedge yz = q \Rightarrow y = \frac{q}{z}, xy = p \iff x \times \frac{q}{z} = p \Rightarrow x = \frac{p}{q} xz,\ q \neq 0$

пояснение от условието за сходните и горните случаи □.

aRb $ab = R$ aRb aRb

$ab = R$ aRb $ab = R$ $ab = R$

(18) Нека $\trianglelefteq$ е релация над $\mathbb{Z}$ определена чрез $x \trianglelefteq y \iff x=y \lor x+1<y$
Проверете дали тази релация е частична наредба.

$$x \trianglelefteq y \iff x=y \lor x+1<y$$

рефлексивност

Нека $x \in \mathbb{Z}$. Тогава $x = x$ откъдето $\Rightarrow [x = x \lor x+1 < x]$ което е винаги истина. $\Rightarrow$ $x \trianglelefteq x$, тоест релацията $\trianglelefteq$ е рефлексивна.

антисиметричност

Нека $x \trianglelefteq y$. Тогава $[x=y \lor x+1<y]$
За целта допускаме че $y \trianglelefteq x$.
Тогава от допускането и $[y=x \lor y+1<x]$ също ще е истина
Но във всеки друг сценарий различен от $x=y$ това ще
доведе до тривиално противоречие и $\Rightarrow x=y$.
Но x и y са произволни което е противоречие $\Rightarrow$
$\trianglelefteq$ е антисиметрична.

транзитивност

Нека $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq z$. Тогава $[x=y \lor x+1<y]$ и $[y=z \lor y+1<z]$ са истини. Ще докажем че $x \trianglelefteq z$ тоест $[x=z \lor x+1<z]$

1. $x=y$ $y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow x \trianglelefteq z$
2. $x=y$, $y+1<z \Rightarrow x+1<z \Rightarrow x \trianglelefteq z$
3. $x+1<y$, $y=z \Rightarrow x+1<z \Rightarrow x \trianglelefteq z$
4. $y+1<z$, $x+1<y \Rightarrow x+1<y<z-1 \iff x+2<z$ но $x+1<x+2<z \Rightarrow x+1<z$ и така $x \trianglelefteq z$.

(19) Нека $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е определена чрез:

$2a-b$ е четно.

докажете че R е р.е и намерете $\mathbb{Z}/R$

рефл нека $a \in \mathbb{Z}$ тогава $a-a=0$ което е четно $\Rightarrow aRa$

симетричност

$$\frac{\dfrac{\dfrac{aRb}{a,b \in \mathbb{Z} \;\&\; a-b \text{ е четно}}}{b,a \in \mathbb{Z} \;\&\; b-a \text{ е четно}}}{bRa}$$

транзит

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{aRb \;\&\; bRc}{a,b \in \mathbb{Z} \;\&\; a-b \text{ е четно} \quad b-c \text{ е четно}}}{(a-b)+(b-c) \text{ е четно}}}{a-c \text{ е четно}}}{aRc}$$

$[0]_R = \{b \mid b \in \mathbb{Z} \;\&\; bR0\} = \{b \mid b \in \mathbb{Z} \;\&\; b-0 \text{ е четно}\} = \{x \mid x \in$

$[1] = \{b \mid b \in \mathbb{Z} \;\&\; bR1\} = \{b \mid b \in \mathbb{Z} \;\&\; b-1 \text{ е четно}\}$

$= \{b \mid b \in \mathbb{Z} \;\&\; b \text{ е нечетно}\} = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

сл. $\mathbb{Z}/R = \{[0], [1]\}$

$|\mathbb{Z}/R| = 2$

(20) Нека R е релация над $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ определена с $(a,b) R (a_1, b_1)$ $\Leftrightarrow ab_1 = a_1 b$. Докажете че R е релация на еквивалентност.

рефл. Нека $x \in (a,b)$ $a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$ab \, R \, ab \Rightarrow xRx$

симетричност

Нека xRy $\exists a, a_1 \in \mathbb{Z}$ $\exists b, b_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\neq 0$

$x = (a, b)$ $y = (a_1, b_1)$

$ab R a_1 b_1 \Rightarrow a_1 b_1 R a b$

$ab_1 = a_1 b$

$a_1 b = ab_1$

транзитивност

$\exists a, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ $\exists b, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$x = (a, b)$ $y = (a_1, b_1)$ $z = (a_2, b_2)$

$ab R a_1 b_1$

$a_1 b_1 R a_2 b_2$

$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ & $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ $\Rightarrow$ $\exists a, a_2 \in \mathbb{Z}$ $\exists b, b_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $x = (a, b)$ & $z = (a_2, b_2)$ & $\frac{a}{b} = \frac{a_2}{b_2}$

$\Rightarrow ab_2 = a_2 b$

xRz

(21) Дадена е релацията R над мн-вото M от наредени двойки от естествени числа: $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $(a,b) R (c,d) \iff \exists k \in \mathbb{N} : (a = kc \wedge d = kb)$

Проверете дали R е частична наредба и р.е.

Рефлекс

$(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad (a,b) R (a,b) \iff \exists k \in \mathbb{N} : (a = ka \wedge b = kb) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow R$ е рефл.

Симетричност

$(a,b) (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Нека $(a,b) R (c,d) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} (a = kc \wedge d = kb)$

Необходимо е да проверим дали от това следва $(c,d) R (a,b)$

Тоест $\exists p \in \mathbb{N} : c = pa \wedge b = pd)$

Ще докажем че това не е така с контра пример

Трябва за да е изпълнено: $d = kc \quad c = pa \iff a = kpa \iff a(1-kp) = 0$

$\iff a = 0 \vee p = k = 1 \; (p, k \in \mathbb{N})$. Тоест ако вземем пример като не отговаря на тези условия той въе е контрапример.

Нека $a = 2 = k$ и $d = 4$

$(a,b) R (c,d) \rightarrow (2,b) R (c,4)$ $\quad 2 = 2 * c \Rightarrow c = 1$

$4 = 2 \times b = \Rightarrow b = 2$

Трябва да намерим такова $p \in \mathbb{N}$ за което $1 = 2 \times p$, $2 = 4 \times p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

което прави $(1,2)$ и $(1,4)$ валиден контрапример

$\Rightarrow R$ не е симетрична.

Транзитивност

$(a,b) \; (c,d) \; (e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Нека $(a,b) R (c,d) \quad (c,d) R (e,f) \quad \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \; \exists p \in \mathbb{N}$

$[a = kc \wedge d = kb] [c = pe \wedge f = pd]$

дали $\exists q \in \mathbb{N} \Rightarrow [a = qe \wedge f = qb]$ $(a,b) R (e,f)$?

$a = kc = kpe$ $\quad f = dp = bkp = kpb$

$q = \frac{f}{b} = \frac{kpb}{b} = kp \in \mathbb{N} \Rightarrow$ р е ч.н но не р.е