Контролно 1 Вариант 1

(75) Нека $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$. Докажете че $A \times B = (D \times B) \cap (A \times C)$

Нека A, B, C, D са произволни множества.

($\subseteq$) Нека x е произволен елемент $x \in A \times B$. Тогава $\exists$ a и b такова че $x = (a, b)$ и $a \in A$, $b \in B$ (според декартовото произведение). Трябва да докажем че $x \in D \times B$ и $x \in A \times C$. От условието че $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$ следва че $\forall$ произволен елемент на A принадлежава и в B, тогава принадлежава и в C и в D.

Трябва да докажем че от $(D \times B) \cap (A \times C) = x = (a, b)$

Ако y е произволен елемент $y = (d, b') \in D \times B$ където $d \in D$, $b' \in B$ и z е произволен елемент $z = (a', c)$ $a' \in A$, $c \in C$ тогава имаме $y \cap z$ където $y = (d, b') \cap z = (a', c)$. Нека допускаме че $b' = b$ и $a' = a$

Тогава $y = (d, b) \cap z = (a, c) = (a, b) = x$ защото x принадлежава в $\forall$ множества. От това следва че

$A \times B = (D \times B) \cap (A \times C)$

($\supseteq$) Нека x' е произволен елемент който $\in (D \times B) \cap (A \times C)$

Нека $x' = (a', b')$.

Нека $y' = (c, b') \mid c \in D$ и $b' \in B$

$z' = a', d \mid a' \in A$ и $d \in C$

И нека $x = a' \in A$, $b' \in B$ Тогава $x \in A \times B$.

От $\subseteq$ и $\supseteq$ следва че $A \times B = (D \times B) \cap (A \times C)$

друг начин

$$A \times B = (D \times B) \cap (A \times C)$$

$(\subseteq)$ $x = (a,b) \in A \times B$ $\quad a \in A \quad b \in B$

по условие $\quad A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$

$a \in A, B, C, D \qquad b \in B, C, D$

$\Rightarrow (a,b) \in (D \times B)$ & $(a,b) \in (A \times C)$

$(a,b) \subseteq (a,b) \cap (a,b)$

$(\supseteq)$ $\underline{x = a,b \in (D \times B) \cap (A \times C)}$

$\underline{(a,b) \in (D \times B) \text{ и } (a,b) \in (A, C)}$

$a \in D \quad b \in B \qquad a \in A \quad b \in C$

$\Rightarrow a \in A \quad b \in B \Rightarrow A \times B$

$\square$

Вариант 2 контролно 1

(76) Нека $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$. докажете че $A \times C = (A \times D) \cap (B \times C)$

$A \times C = (A \times D) \cap (B \times C) \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$

Нека A, B, C са произволни множества.

($\subseteq$) Нека x е произволен елемент. $\in A \times C$

Нека $x = (a, b)$ където $a \in A$ $b \in C$

Знаем че тъй като $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$ трябва да докажем че $(A \times D) \cap (B \times C) = A \times C$.

Това означава че ако в A имаме произволен елемент x, той участва и в B и в C и в D, но B освен x може има и други елементи които също участват и в C и в D, и C има други елементи които участват в D.

Ще разгледаме следните случаи:

първия елемент трябва от множеството което е в ~~+~~ другите (A) и за втория само C защото D не става.

1. Нека $x \in A$ $\cancel{x}$ $\in C$

Тогава $A \times C = m(x, x \mid x \in A, x \in C)$

Нека и за другата страна пак вземаме декартото произведение само на x.

$x \in A$ $x \in D$ $x \in B$ $x \in C$

Тогава $A \times D = (x, x) = m \mid x \in A, x \in D$

$B \times C = (x, x) = m \mid x \in B, x \in C$

$(A \times D) \cap (B \times C) = (x, x) \cap (x, x)$

$= m \cap m = m = A \times C$

2. Нека $x \in A$ $y \in C$

$A \times C = (x, y) = n \mid x \in A, y \in C$

продължение на 76.

Сега от условието че $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$

ако $x \in A$, $d \in D$ то $A \times D = \{ f = (x, d) \mid x \in A,\ d \in D,\ x \in D \}$

ако $z \in B$, $y \in C$ то $B \times C = \{ (z, y) = g \mid z \in B,\ y \in C,\ z \in C \}$

$$f \cap g = (x, d) \cap (z, y) = (x, y) = m = A \times C$$

($\supseteq$) Трябва да докажем че $(A \times D) \cap (B \times C) \subseteq A \times C$ ако $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$

Нека h е произволен елемент $\in (A \times D) \cap (B \times C)$

Тогава $h = (a, b)$. Тъй като $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$

за произволен елемент от A който участва в три другите множества, то е ясно че сечението ни задава един и същ елемент.

Но ако имаме произволен елемент $a \in A$, $g \in D$, $c \in B$, $b \in C$ тогава

$$\left.\begin{array}{l} A \times D = (a, g) \\ B \times C = (c, b) \end{array}\right\} \quad (a, g) \cap (c, b) = h = (a, b)$$

от тук $h \in A \times C$

$A \times C = (a, b)$

от принципа за обема
$A \times C \subseteq (A \times D) \cap (B \times C)$
$A \times C \supseteq (A \times D) \cap (B \times C)$
то $A \times C = (A \times D) \cap (B \times C)$
за $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$
е доказано $\square$.

контролно 1 задача 2 вариант 1

(77) Релацията R над P(IN) е дефинирана с:

$A R B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B)(a \leq b)$

За подмножества A, B на IN. Проверете дали R е рефлексивна, симетрична, транзитивна, антисиметрична.

знаем че:

R е над P(IN)

A, B на IN

$A, B \iff (\forall a \in A)(\exists b \in B)(a \leq b)$

рефлексивност над P(IN)

Нека a, b са произволни елементи от подмножествата A, B.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A \subseteq IN,\ a \in IN,\ b \in IN}{\forall a \in A\ \exists b \in B\ a \leq b}}{a \leq b \Rightarrow a \leq a}}{ARB \Rightarrow ARA \iff (A,a) = (A,a)}$$

Транзитивност над P(IN)

Трябва да докажем че ARB, BRC, ARC

ARB имаме $\forall a \in A\ \exists b \in B$ за което $a \leq b$

BRC имаме $\forall b \in B\ \exists c \in C$ за което $b \leq c$

това означава че ако $a \leq b \leq c$ то $a \leq c$

така че имаме ARC имаме $\forall a \in A\ \exists c \in C$ за което $a \leq c$.

Продължение на (77)

Симетричност или антисиметричност над $P(\mathbb{N})$

за да бъде симетрична трябва: ARB BRA

което означава $\forall a \in A\ \exists b \in B\ a \leq b$ и за $\forall b \in B$

$\exists a \in A$ за което $b \leq a$ и $a \neq b$.

Но това е невъзможно при $a \neq b$ защото

ако $\forall\ a \leq b$ то няма как различно b от a да бъде

$b \leq a$. Така достигаме до антисиметричност

което означава че $\dfrac{ARB \ \&\ BRA}{\forall a \in A\ \exists b \in B\ \ a \leq b\ \ \&\ \ \forall b \in B\ \exists a \in A\ \ b \leq a}$

$\dfrac{\text{само при } a = b}{}$

$\dfrac{ARB \ \&\ BRA}{ARA \ \&\ BRB}$

$(A, a) = (B, b)$

контролно 1 зад 2 вариант 2.

(78) Релацията R над P(IN) е дефинирана с:

$$ARB \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$$

за подмножества A, B на IN. проверете дали R е рефлексивна, симетрична, транзитивна, антисиметрична.

рефлексивност над P(IN) за произволни A, B на IN,

$a \in A, b \in B \} \in IN$.

$$\frac{\dfrac{A \subseteq IN,\ B \subseteq IN,\ a, b \in IN}{\text{за } \forall b \in B\ \exists a \in A\quad b \geq a}}{b \geq b \qquad BRB \Leftrightarrow (B, b)\ R\ (B, b)}$$

Транзитивност над P(IN)

Трябва да докажем че ако $ARB \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$

$BRC \Leftrightarrow (\forall c \in C)(\exists b \in B)(b \leq c)$

то и ARC.

$ARB \Leftrightarrow a \leq b$

$BRC \Leftrightarrow b \leq c$

тъй като $a \leq b \leq c$ това означава че $a \leq c$

$\Rightarrow$ за $(\forall c \in C)(\exists a \in A)(a \leq c)$

оттук следва че ARC е транзитивна.

Симетричност или антисиметричност над P(N).

$ARB \Leftrightarrow (\forall b \in B)(\exists a \in A)(b \geq a)$

$BRA \Leftrightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in B)(a \geq b)$ и $a \neq b$

но при $a \neq b$ то е невъзможно защото или b или a ще бъде по-голямо. Това означава че релацията е антисиметрична за да се изпълне условието и $a = b$.

Контролно 1 задача 3 вариант 1

79

Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функция такава че за всяко реално число $x\in\mathbb{R}$ е в сила че $f(f(f(2x+3)))=x$. Докажете че f е биекция.

Инекция

Нека имаме 2 произволни реални число x_1 и x_2. За да бъде инективна $f(x_1)\neq f(x_2)$

$x_1\neq x_2$

$$f(f(f(2x_1+3)))=x_1 \quad \& \quad f(f(f(2x_2+3)))=x_2$$

$$f(f(f(2x_1+3)))\neq f(f(f(2x_2+3))) \text{ защото } x_1\neq x_2$$

Тогава следва че f е инекция.

Сюрекция за да бъде сюрекция то трябва $f(x)=y$ за x и y които са произволни реални числа.

$x=f(f(f(2y+3)))$ и тогава имаме

$$f(f(f(2x+3)))=f(f(f(2(\underbrace{f(f(f(2y+3)))}_{y}+3))))$$

$$=f(f(f(2y+3)))=x \Rightarrow f(x)=y$$

От 1° и 2° следва че f е биекция

(80) Контролно 1 задача 3 Вариант 2

Нека $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функция такава че за $\forall$ реално число $x \in \mathbb{R}$ е в сила че $f(f(f(x))) = 3x+2$. Докажете че f е биекция.

<u>Инекция</u> За да имаме инекция трябва $f(x_1) \neq f(x_2)$

Нека x_1, x_2 са произволни реални числа. Тогава имаме $f(f(f(x_1))) = 3x_1 + 2$ и $f(f(f(x_2))) = 3x_2 + 2$

Тъй като $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Rightarrow f$ е инекция.

<u>Сюрекция</u> За да имаме сюрекция трябва $f(x) = y$

Нека x и y са произволни реални числа.

$3x + 2 = f(f(f(y)))$

Тогава за да проверим дали $f(x) = y$ ще имаме:

<u>Нека $y = 3x+2$</u> $\Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$

$\underline{f(f(f(y))) = 3 \cdot y + 2}$

Тъй като имаме $f(f(f(\frac{y-2}{3}))) = 3 \cdot \frac{y-2}{3} + 2$

$|y = 3x+2|$

$$f(f(f(\frac{y-2}{3}))) = y$$

но $y = 3x+2$ $\square$

Имаме биекция защото f е и инекция и сюрекция.