(81) контролно 2 задача 2 вариант 1

Намерете броя на всички наредени 5-торки от естествени числа за които

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ 10 \le x_1 < 20 \\ x_2 \geqslant 20 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

първо да забележим че изображението $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5) = (x_1 - 10,\ x_2 - 20,\ x_5)$ е биекция между множеството A.

$10 \le x_1 < 20$ е също като $0 \le x_1 - 10 < 20 - 10 \Rightarrow \boxed{x_1 < 10}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ x_1 < 10 \\ x_2 \geqslant 20 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

$A = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \ \&\ 10 \le x_1 < 20 \ \&\ x_2 \geqslant 20 \ \&\ x_5 < 30 \}$

Така че множеството което търсим е:

$B = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 - 10 - 20 \ \&\ x_1 < 10 \ \&\ x_5 < 30 \}$

следователно двете множества имат еднакъв брой елементи $|A| = |B|$. За да намерим $|B|$ трябва да разгледаме следните случаи:

$C = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in B_0 \mid x_1 \geqslant 10 \}$ разглеждаме решенията за които от B_0 не е вярно за $x_1 < 10$.

$D = \{ (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in B_0 \mid x_5 \geqslant 30 \}$

$B_0 = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70\}$

B_0 е също като B но без допълнителни изисквания за x_1 и x_5.

Тогава $B, C, D \subseteq B_0$ като $B \cap (C \cup D) = \emptyset$

освен това $B = B_0 \setminus C \cup D$

откъдето $|B| = |B_0| - |C \cup D|$

$$|B_0| = \binom{70+5-1}{5-1}$$

$$|C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D|$$

$$|C| = \binom{(70-10)+5-1}{5-1} \qquad |D| = \binom{(70-30)+5-1}{5-1}$$

$= \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 70-10\}$

$$|C \cap D| = \binom{(70-10-30)+5-1}{5-1}$$

$$|B| = \binom{70+5-1}{5-1} - \binom{(70-10)+5-1}{5-1} - \binom{70-30+5-1}{5-1} + \binom{70-10-30+5-1}{5-1}$$

(82) контролно 2 задача 2 вариант 2

Намерете броя на всички наредени 5-торки $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ от естествени числа за които:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 150 \\ 20 \le x_2 < 40 \\ x_3 < 40 \\ x_4 \geq 70 \end{cases}$$

$20 \le x_2 < 40$ е също като

$0 \le x_2 - 20 < 40 - 20$

$x_2 < 20$

първо да забележим че изображението

$f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (x_1, x_2 - 20, x_3, x_4 - 70)$ е биекция на множеството

$A = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 150 \ \& \ 20 \le x_2 < 40 \ \& \ x_3 < 40$
$\& \ x_4 \geq 70\}$

множеството което ние търсим е:

$B = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 150 - 20 - 70 \ \& \ x_2 < 20 \ \&$
$x_3 < 40\}$

$\Rightarrow |A| = |B|$ за да намерим $|B|$ ще разгледаме следните случаи:

$B_0 = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in \mathbb{N}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60\}$

$C = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in B_0 \mid x_2 \geq 20\}$

$D = \{(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) \in B_0 \mid x_3 \geq 40\}$

Тогава $B, C, D \subseteq B_0$ като $B \cap (C \cup D) = \emptyset$

освен това $B = B_0 \setminus C \cup D$

$$|B| = |B_0| - |C \cup D|$$

$$|B_0| = \binom{60+5-1}{5-1} \qquad |C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D|$$

$$|C| = \binom{(60-20)+5-1}{5-1} \qquad |D| = \binom{(60-40)+5-1}{5-1}$$

$$|C \cap D| = \binom{(60-20-40)+5-1}{5-1}$$

ОТ ТУК

$$|B| = \binom{60+5-1}{5-1} - \binom{(60-20)+5-1}{5-1} - \binom{(60-40)+5-1}{5-1} + \binom{(60-20-40)+5-1}{5-1}$$

(83) контролно 2 вариант 1 задача 1

Нека $U = \{1, 2, \dots n\}$ и $n \geq 4$ намерете броя на всички наредени двойки (X, Y) такива че $X \cup Y \subseteq U$ и $|X \cap Y| \geq 3$

$$T = \{(X, Y) \mid X \cup Y \subseteq U \ \& \ |X \cap Y| \geq 3\}$$

означаваме $S = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ X \cup Y \subseteq U\}$

$$M = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ X \cup Y \subseteq U \ \& \ |X \cap Y| < 3\}$$

тогава $T, M \subseteq S$ $\quad M \cap T = \emptyset$ и $M \cup T = S$

следователно $|T| = |S \setminus M| = |S| - |M|$

1. $(X, Y) \in S \iff X, Y \subseteq U \ \& \ X \cup Y \subseteq U \iff X, Y \subseteq U$ $\& \ \forall k \ (u_k \in X \vee Y) \iff X, Y \subseteq U \ \& \ \forall k \ \alpha_{X,Y}$ е дума с дължина n над Σ к която няма буква 00. броят на различните такива думи е $\underline{3^n}$.

2. да забележим че $M = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ X \cup Y \subseteq U \ \& \ |X \cap Y| < 3\}$

$\Rightarrow M = \{(X, Y) \in S \mid |X \cap Y| < 3\}$

$= \{(X, Y) \mid (X, Y) \in S \ \& \ |X \cap Y| = 0\} \ \cup$

$\cup \{(X, Y) \mid (X, Y) \in S \ \& \ |X \cap Y| = 1\} \ \cup$

$\cup \{(X, Y) \mid (X, Y) \in S \ \& \ |X \cap Y| = 2\}$

$= T_0 \cup T_1 \cup T_2$

• имаме $(X,Y) \in T_0 \iff (X,Y) \in S$ & $X \cap Y = \emptyset \iff X \cup Y \subseteq U$ & $X \cap Y = \emptyset$

$\iff \forall k$ (u_k е елемент на поне едно X или Y) & $\forall l$ (u_l е елемент на най много едно от X и Y)

$\iff \forall k$ (u_k е елемент на точно едно от X и Y) $\Rightarrow$ $\alpha_{X,Y}$ е съставена само от буквите 01 и 10.

броят на тези думи е $\underline{2^n}$.

• $\{(X,Y) \in T_1 \iff X \cup Y \subseteq U$ & $|X \cap Y| = 1\}$

$\iff \forall k$ (u_k е ел. на най много X или Y) & u_l($\exists! l$ т.че $u_l \in X$ & $u_l \in B$)

$\iff \alpha_{X,Y}$ (има единствена буква 11) и (няма буква 00)

броят на търсените думи е: $\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n2^{n-1}$

• $\{(X,Y) \in T_2 \iff X \cup Y \subseteq U$ & $|X \cap Y| = 2\}$

$\iff \forall k$ (u_k е ел. на най много X или Y) & u_l($\exists$ l т.че $u_l \in X$ & $u_l \in Y\}$

$\iff \alpha_{X,Y}$ (има 2 букви 11) и (няма буква 00)

броят на търсените думи с дължина n е:

$\binom{n}{2} \cdot 2^{n-1}$.

CamScanner

следователно

$$|T| = 3^n - 2^n - n2^{n-1} - \binom{n}{2} 2^{n-1}$$

(84) контролно 2 вариант 2 задача 1

Нека $U = \{1, 2, \dots n\}$ и $n \geq 4$. Намерете броя на всички наредени двойки (X, Y) такива че $X \subseteq Y \subseteq U$ и $|Y \setminus X| \geq 3$.

$$S_0 = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \subseteq U \mid |Y \setminus X| \geq 3 \}$$

$$S = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \subseteq U \} \quad T = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \subseteq U \mid |Y \setminus X| < 3 \}$$

$S_0, T \subseteq S$ $\qquad$ $S_0 \cap T = \emptyset \Rightarrow S_0 \cup T = S$

$$|T| = |S| - |S_0|$$

- $(X, Y) \in S \Leftrightarrow X, Y \subseteq U$ $\quad \alpha_{X,Y}$ съвършена ∀ букви но не 00 $\boxed{3^n}$

$$T = \{|Y \setminus X| = 0\} \cup \{|Y \setminus X| = 1\} \cup \{|Y \setminus X| = 2\}$$

$|T_0| = 2^n$ $\qquad$ $|T_1| = n \cdot 2^{n-1}$ $\qquad$ $|T_2| = \binom{n}{2} 2^{n-1}$

$$|T| = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1} - \binom{n}{2} 2^{n-1}$$

(85) контролно 2 вариант 1 задача 3

Нека $F = \{1, \bar{x}, (\bar{x}y \vee x.\bar{y}).z \vee x.y, x \Leftrightarrow y\}$

Проверете дали F е пълно множество и ако е такова намерете $\forall$ пълни подмножества на F.

	T_0	T_1	S	L	M
f_0 1	−	+	−	+	+
f_3 $\bar{x}$	−	−	+	+	−
f_1	+	+	+	−	+
f_2	−	+	−	−	−

е пълна.

	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	z	$\bar{x}y$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y \vee x\bar{y}$	$.z$	xy	$.z \vee xy$
0	0	0	0	0	0	0	0	0 1
0	0	1	0	0	0	0	0	0 1
0	1	0	1	0	1	0	0	0 1
0	1	1	1	0	1	1	0	1 0
1	0	0	0	1	1	0	0	0 1
1	0	1	0	1	1	1	0	1 0
1	1	0	0	0	0	0	1	1 0
1	1	1	0	0	0	0	1	1 0

$x \Leftrightarrow y$

x	y	f_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x \Rightarrow y = \overline{\bar{x}\bar{y} \oplus \bar{x} \oplus 1} \notin L$

М.Н за $X \Rightarrow Y$

$a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_{12} XY$.

$f(0,0) = a_0 + 0 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$

$f(1,0) = a_0 + a_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

$f(0,1) = \underbrace{\phi + 0}_{0} + a_2 + 0 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$

$f(1,1) = \underbrace{1 + 1}_{0} + 0 + a_{12} = 1 \Rightarrow a_{12} = \phi$

$1 \oplus x \oplus xy \notin L$

$\forall$ пълни подмножества:

(f_0, f_3, f_1)

(f_3, f_1, f_2)

контролно 2 задача 3 вариант 2

(86) Нека $F = \{0,\ \bar{x},\ \bar{x}\cdot(\bar{y}z \vee y\bar{z}) \vee \bar{y}\bar{z},\ x \oplus y \oplus z\}$

Проверете дали F е пълно и ако е такова намерете $\forall$ подмножества на F.

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

$x\oplus y\oplus z$	$\bar{y}\bar{z}$	x	y	z	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{y}z$	$y\bar{z}$	$\underbrace{\bar{y}z \vee y\bar{z}}_{g}$	$\underbrace{\bar{x}\cdot g}_{h}$	$h \vee \bar{y}\bar{z}$
1 0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1 0
0 1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1 0
0 1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1 0
1 0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0 1
0 1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1 0
1 0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0 1
1 0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0 1
0 1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0 1

	T_0	T_1	S	L	M
$f_1 : 0$	+	−	−	+	+
$f_2 : \bar{x}$	−	−	+	+	−
$f_3 : f$	−	−	+	−	−
$f_4 : x\oplus y\oplus z$	+	+	+	+	−

е пълна

подмножестват на F които са пълни

$\{f_1, f_3\}$

$\{f_1, f_2, f_3\}$

полинома на Жегалки за $f(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{12}xy$
$+ a_{13}xz + a_{23}yz + a_{123}xyz$

за: $f: x(\bar{y}z \vee y\bar{z}) \vee \bar{y}\bar{z}$

$f(0,0,0) = \boxed{0 = a_0}$

$f(1,0,0) = 1 = 0 + a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$

$f(0,1,0) = 1 = 0 + a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$

$f(0,0,1) = 1 = 0 + a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$f(1,1,0) = 0 = 0 + 1 + 1 + a_{12} \Rightarrow \boxed{a_{12} = 0}$

$f(0,1,1) = 0 = 0 + 1 + 1 + a_{23} \Rightarrow \boxed{a_{23} = 0}$

$f(1,0,1) = 0 = 0 + 1 + 1 + a_{13} \Rightarrow \boxed{a_{13} = 0}$

$f(1,1,1) = 0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + a_{123} \Rightarrow \boxed{a_{123} = 1}$

$f \Rightarrow \cancel{a_1}x + y + z + xyz$

111

110 101 011

100 010 001

(0,0,0)

(87) Контролно 2 задача 4 вариант 1

Проверете дали множеството $((L \cap M) \setminus T_0) \cup (S \cap T_0)$ е пълно.

$f \in L \cap M \setminus T_0$ или $f \in S \cap T_0$

Имаме 2 случая:

1. $f \in L \cap M \setminus T_0$ което означава че
$f \in L \cap M$ и $f \notin T_0$
$f \in L$ и $f \in M$ и $f \notin T_0$

2. $g \in S \cap T_0$
$g \in S$ и $f \in T_0$.

	T_0	T_1	S	L	M
f	−			+	+
g	+		+		

За да е пълно, множеството трябва да е:

	T_0	T_1	S	L	M
f	−	+/−	−	+	+
g	+	−/+	+	−	−

$\bar{x} \notin T_0 \notin T_1 \in S$

не върши работа

$f(0 \quad) = 1 \notin T_0$

$f(1 \ldots 1) = 0 \notin T_1$ или $\in T_1$

$\notin S$

имаме 3 таблици които са възможни:

	T_0	T_1	S	L	M
f	−	+	−	+	+
g	+	−	+	−	−

	T_0	T_1	S	L	M
f	−	−	−	+	+
g	+	−	+	−	−

	T_0	T_1	S	L	M
f	−	−	−	+	+
g	+	+	+	−	−

ако $f = 1$ има − + − + + тогава е пълна.

(88) контролно 2 задача 4 вариант 2

Проверете дали множеството е пълно.

$$((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$$

$f \in L \cap M \setminus T_1$ или $f \in S \cap T_1$

1 сл. $f \in L \cap M \setminus T_1$

$f \in L$ & $f \in M$ $f \notin T_1$

2 сл. $g \in S \cap T_1$

$g \in S$ & $f \in T_1$

	T_0	T_1	S	L	M
f		$-$		$+$	$+$
g		$+$	$+$		

има следните възможности

	T_0	T_1	S	L	M
f	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
g	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

	T_0	T_1	S	L	M
f	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
g	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

	T_0	T_1	S	L	M
f	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
g	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

ако $f = 0$ тогава имаме $+ - - + +$ което означава е пълно.

(89) Намерете броя на елементите на

$$S_4 = \{ (A, B) \mid A, B \subseteq U \ \& \ |A \cap B| \geq 1 \}$$

Да забележим че $(A, B) \in S_4 \iff A, B \subseteq U \ \& \ |A \cap B| \geq 1$

$\iff (A, B) \in S_1 \ \& \ \neg (|A \cap B| < 1) \iff$

$\iff (A, B) \in S_1 \ \& \ \neg (|A \cap B| = 0) \iff$

$\iff (A, B) \in S_1 \ \& \ \neg (A \cap B = \emptyset) \iff$

$\iff (A, B) \in S_1 \ \& \ (A, B) \notin S_3 \iff (A, B) \in S_1 \setminus S_3$

Понеже $S_4 = S_1 \setminus S_3$ то $|S_4| + |S_3| = |S_1|$

откъдето $|S_4| = |S_1| - |S_3| = 4^n - 3^n$

Тук използвахме принципа за включване и изключване.

(90) Намерете броя на елементите на

$$S_5 = \{ (A, B) \mid A, B \subseteq U \ \& \ A \cup B = U \ \& \ |A \cap B| \geq 2 \}$$

Означаваме $S = \{ (A, B) \mid A, B \subseteq U \ \& \ A \cup B = U \}$

$T = \{ (A, B) \mid A, B \subseteq U \ \& \ A \cup B = U \ \& \ |A \cap B| < 2 \}$

Тогава $S_5, T \subseteq S \quad S_5 \cap T = \emptyset$ и $S_5 \cup T = S$

следователно $|S_5| = |S \setminus T| = |S| - |T|$

1. $(A, B) \in S \iff A, B \subseteq U$ & $A \cup B = U \iff A, B \subseteq U$ & $\forall k (u_k \in A \cup B) \iff A, B \subseteq U$ & $\forall k \left(\begin{matrix} u_k \text{ е елемент на} \\ \text{поне едно от } A \vee B \end{matrix} \right)$

$\iff \alpha_{A,B}$ е дума с дължина n над Σ в която няма буква 00.

(00 отговоря за елемент на U, който не е нито в A нито в B → такива елементи няма защото $A \cup B = U$)

Броят на различните такива думи е 3^n щото на всяка от n-та позиции има го 3 възможности за буква 01, 10 или 11. Така $|S| = 3^n$

2. Да забележим че $T = \{(A, B) \mid (A, B) \in S$ & $|A \cap B| < 2\}$

$= \{(A, B) \mid (A, B) \in S$ & $|A \cap B| < 2\}$

$= \{(A, B) \mid (A, B) \in S$ & $|A \cap B| = 0\} \uplus \{(A, B) \mid (A, B) \in S$ & $|A \cap B| = 1\}$

$= T_0 \cup T_1$ може не $T_0 \cap T_1 = \emptyset$ то $|T| = |T_0| + |T_1|$

Имаме че:

- $(A, B) \in T_0 \iff (A, B) \in S$ & $A \cap B = \emptyset \iff A \uplus B = U$ & $A \cap B = \emptyset$!

$\iff \forall k \left(\begin{matrix} u_k \text{ е елемент на} \\ \text{поне едно } A \vee B \end{matrix} \right)$ & $\forall l \left(\begin{matrix} u_l \text{ е елемент на най много} \\ \text{едно от } A \text{ и } B \end{matrix} \right)$

$\iff \forall k \left(\begin{matrix} u_k \text{ е елемент на} \\ \underline{\text{точно едно}} \text{ от } A \text{ и } B \end{matrix} \right) \iff$ $\alpha_{A,B}$ е съставена само от буквите 01 и 10.

Броя на тези думи е с дължина n е 2^n → на всяка една от n-та позиции имаме 2 възможности.

Продължение на (9.0)

- $(A,B) \in T_1 \iff A \cup B = U \ \& \ |A \cap B| = 1 \iff$

$\iff \forall k$ (u_k е елемент на поне едно от A или B) & ($\exists$ единствено ℓ т.че $u_\ell \in A \ \& \ u_\ell \in B$)

$\iff \alpha_{A,B}$ (има единствена буква 11) и (няма буква 00)

броят на търсените думи с дължина n е:

$$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n 2^{n-1}$$

по останалите n-1 свободни позиции можем да слагаме само 01 или 10.

по толкова начина избираме позиция за единственото срещане на 11

Следователно $|T_1| = n2^{n-1}$, така $|S_5| = |S| - |T_0| - |T_1|$
$= 3^n - 2^n - n2^{n-1}$

91

Нека $S = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| < 2\}$

$S = T \cup K$

$T \cap K = \emptyset \quad K, T \subseteq S \Rightarrow T, K$ са разбиване на S

и $\quad |S| = |T| + |K| \quad$ или $|T| = |S| - |K|$

$S: \quad |S| = 3^n$

$K: K = \underbrace{\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A|}_{K_1}$

$|K| = |K_0| + |K_1|$

$|K_0|$: в думата $\beta_{A,B}$ участват само 01 и 10 $\Rightarrow 2^n$

$|K_1|$: $n \cdot 2^{n-1}$

$|T| = |S| - |K| = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$