(92) ИЗПИТ задача 1 Вариант 1

Нека A, B, C са произволни множества. докажете че:

$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B) \iff A \cap B = A \cap C$

Нека A, B, C са произволни множества.

($\subseteq$) Нека $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B)$. ще докажем че $A \cap B = A \cap C$.

Нека $x \in A \cap B$. Тогава $x \in A$ и $x \in B$.

Трябва да проверим дали $x \in A \cap C$. То че $x \in A$ е ясно.

от лявата страна имаме $x \in A \setminus (B \setminus C)$ което означава че $x \in A$ (ясно) и $\frac{x \notin B \setminus C}{x \notin B \ \& \ x \notin C}$

и е вярно че $\frac{x \in A \setminus (C \setminus B)}{x \in A \ \& \ x \notin C \ x \notin B}$

ако $x \in A$ и $x \notin B$ то $A \cap B = \emptyset$

ако $x \in A$ и $x \notin C$ то $A \cap C = \emptyset$

от тук имаме $A \cap B = A \cap C = \emptyset$.

($\supseteq$) Нека $x \in A \cap B = A \cap C$. Това означава че $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ и $A \cap B = A \cap C$

да докажем че $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B)$ когато условието отгоре е вярно. Ако $x \in B = x \in C$ то означаваме $x \in B \cap C$ и тогава $x \notin B \setminus C \ \& \ x \notin C \setminus B$

$\Rightarrow A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (C \setminus B)$ $\square$

(93) Изпит задача 1 Вариант 2

Нека A, B, C са произволни множества. Докажете че

$$A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B) \iff A\setminus B = A\setminus C$$

$\subseteq$ Нека $A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B)$ е вярно. Трябва да докажем че $A\setminus B = A\setminus C$.

Нека x е произволен елемент $\in A\setminus B$. Трябва да проверим дали $x \in A\setminus C$.

$x \in A\setminus B$. означава че $x \in A$ & $x \notin B$.

от $A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B)$ имаме за произволен елемент

$x' \in A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B)$ че $x' \in A$ & $\underline{x' \notin B\setminus C}$

$x' \notin B$ & $x' \notin C$

$= x' \in A$ & $\underline{x' \notin C\setminus B}$

$x' \notin C$ & $x' \notin B$

Така от това имаме че $x \in A$ & $x \notin B$ & $x \notin C$

$\Rightarrow$ от $x \in A$ & $x \notin B = A\setminus B$
от $x \in A$ & $x \notin C = A\setminus C$
Тъй като $x \in$ в двете посоки то $A\setminus B = A\setminus C$.

$\supseteq$ Нека е вярно че $A\setminus B = A\setminus C$.

за произволен x имаме че $\underline{x \in A\setminus B = A\setminus C}$

$x \in A$ & $x \notin B$ & $x \notin C$

Тъй като $x \in A$ & $x \notin B$ & $x \notin C \Rightarrow x \in A\setminus(B\setminus C)$

Тъй като $x \in A$ & $x \notin C$ & $x \notin B \Rightarrow \underline{x \in A\setminus(C\setminus B)}$

$x \in A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B)$

от $\subseteq$ и $\supseteq$ $A\setminus(B\setminus C) = A\setminus(C\setminus B) \iff A\setminus B = A\setminus C$ $\square$

(94) Изпит задача 2 вариант 1

Нека R е релация която е транзитивна.
Докажете че R не е симетрична или R не е антисиметрична.

- R е релация която е транзитивна
$\Leftrightarrow$ R не симетрична $\wedge$ R не е антисиметрична

Трябва да разгледаме следните случаи:

1. R е транзитивна & R не е симетрична.
То ако R не е симетрична, имаме 2 случаи:
1.1 R е антисиметрична $\wedge$ 1.2 R не е антисиметрична.

Нека a, b, c са произволни елементи или числа които удовлетворяват на това релация
aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc. Трябва да докажем че R е антисиметрична.

за да бъде симетрична трябва aRb, bRa $a \neq b$
за да бъде антисиметрична трябва aRb, bRa $a = b$

от транзитивност ако $a \neq b \neq c$ и aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc
то няма как bRa и cRb и cRa ако са различни
То трябва $a = b = c$ за да имаме aRb, bRa
bRc, cRb
aRc, cRa
примерно за $\boxed{\leq}$

$\Rightarrow$ R не е симетрична, R е антисиметрична.
1.2 R не е антисиметрична.

$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

Тогава R трябва според условие да не е симетрична и да не е антисиметрична.

примерно $R = <$

Нека a, b, c са произволни числа

и $a < b < c \Rightarrow a < c \Rightarrow aRb,\ bRc,\ aRc$

но няма как $bRa,\ cRb,\ cRa$ и

при $a \neq b \neq c$ и при $a = b = c$

Тогава R не е антисиметрична.

задачата е доказана.

(95) изпит задача 2 вариант 2

Нека R е релация за която $(\neg\exists a)(aRa)$. Докажете че R не е транзитивна или R е антисиметрична

R е антирефлексивна $\Leftarrow\Rightarrow$ R не е транзитивна $\vee$ R е антисиметрична

когато е антирефлексивна трябва да докажем че R не е транзитивна $\to$ 1 случай
или R е антисиметрична $\to$ 2 случай.

за 1° случай:
Нека R е антирефлексивна и $(\neg\exists a)(aRa)$.
Трябва да докажем че R не е транзитивна.

Нека допуснем противното че R е транзитивна и R е антисиметрична
$\Rightarrow \exists\, a, b, c$ за което aRb, $bRc \Rightarrow aRc$

за да е антисиметрична имаме
(aRb) (bRa) $(a=b)$ $\Rightarrow a=b=c \Rightarrow$ ако aRb, aRc
(bRc) (cRb) $(b=c)$ то aRa

но по условие $a\not R a$

96 изпит задача 2 вариант 1

R не е транзитивна. докажете че R не е симетрична $\vee$ R не е антисиметрична.

2 случаи

R не е симетрична < антисиметрична или не е антисиметрична

aRb bRc но $a \not R c$ за произволни a, b, c.

Нека допуснем противното. R е симетрична и антисиметр.

от $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ и от $(b,c) \in R \Rightarrow (c,b) \in R$

но R е антисиметрична $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \in R \ \& \ (b,a) \in R \Rightarrow a=b \\ (b,c) \in R \ \& \ (c,b) \in R \Rightarrow c=b\end{array}\right\} a=c$$

$\Rightarrow (a,c) = (c,b) \in R$ но $(a,c) \notin R$ ↯

$\Rightarrow$ допускането не е вярно

Изпит вариант 1 задача 3

Да означим с S множеството на всички множества от естествени числа, съдържащи 2023.

$$S = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid 2023 \in A \}$$

Докажете че S е равномощно с $P(\mathbb{N}) \setminus S$.

Казваме че A е равномощна на B ако $\exists$ биекция от A към B. Трябва да намерим такава функция че $f: S \to P(\mathbb{N}) \setminus S$. че f да е биекция.

Нека вземем такава f че за $\forall s \in S$ $f(s) = S \setminus \{2023\}$

Ще докажем че f е биекция.

- доказване инективност.

Нека $s_1, s_2 \in S$ като $s_1 \neq s_2$. Тогава $f(s_1) = s_1 \setminus \{2023\}$ и $f(s_2) = s_2 \setminus \{2023\} \Rightarrow s_1 \setminus \{2023\} \neq s_2 \setminus \{2023\}$

- сюрекция.

Нека $a \in P(\mathbb{N}) \setminus \{2023\}$. Тогава за $\forall a$ можем да вземем множеството $a \cup \{2023\}$ и знаем че $f(a \cup \{2023\}) = a$

$\Rightarrow f$ е инекция и сюрекция $\Rightarrow S \cup P(\mathbb{N}) \setminus S$ са равномощни.

- доказване сюрективност.

Нека a е произволен елемент на $P(\mathbb{N}) \setminus S$.

$a \in P(\mathbb{N})$ & $a \notin S \Rightarrow a \in P(\mathbb{N}) \Rightarrow a \subseteq \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a \subseteq \mathbb{N} \\ \{2023\} \subseteq \mathbb{N} \end{array}\right\} a \cup \{2023\} \subseteq \mathbb{N}$$

$$2023 \in \{2023\} \Rightarrow 2023 \in a \cup \{2023\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cup \{2023\} \subseteq \mathbb{N} \\ 2023 \in a \cup \{2023\} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cup \{2023\} \in S$$

$$\left.\begin{array}{l} a \subseteq \mathbb{N} \\ a \notin S \end{array}\right\} \; 2023 \notin a \Rightarrow (a \cup \{2023\}) \setminus \{2023\} = a$$

$$\Rightarrow f(a \cup \{2023\}) = a$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cup \{2023\} \in S \\ f(a \cup \{2023\}) = a \end{array}\right\} \forall A \in P(\mathbb{N}) \setminus S \; \exists B \in S : f(B) = A$$

$\Rightarrow f$ е сюрекция.

(98) изпит вариант 1 задача 3

S е множество на ∀ множества от цели число, несъдържащи 2023.

$$S = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid 2023 \notin A\}$$

докажете че S е равномощно с $P(\mathbb{Z}) \setminus S$.

Нека $f: S \to P(\mathbb{Z}) \setminus S$. Трябва да проверим дали f е биекция. $\Rightarrow |P(\mathbb{Z}) \setminus S| = |S|$

o инекция.

Нека $a, b \in S$ и $a \neq b$: $\exists k : k \in a$ & $k \notin b$

$f(a) = \alpha \mid \alpha = a \cup 2023$

$f(b) = \beta \mid \beta = b \cup 2023$ $\quad k \in a \quad k \notin b$

$\alpha \neq \beta \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

o сюрекция.

Нека $\alpha \in P(\mathbb{Z}) \setminus S$ да проверим дали $\exists a$ такова че $f(a) = \alpha$

Нека $a = \alpha \setminus 2023$ и $f(a) = \alpha$

$\Rightarrow$ за $\forall \gamma \in P(\mathbb{Z}) \setminus S$ $\exists \gamma \setminus 2023 \Rightarrow f(\gamma \setminus 2023) = \gamma$

$\Rightarrow f$ е сюрекция.

ИЗПИТ задача 2 вариант 1

99 Нека $G(V,E)$ е ацикличен граф с 4 свързани компоненти. Нека за всеки връх $v \in V$ е изпълнено $d(v)=1$ или $d(v) \geq 3$ като броят на върховете $v \in V$ с $d(v) = 1$ е 2022. докажете че максимумът на брои на върховете $v \in V$ с $d(v) \neq 1$ е 2014.
докажете че $\exists$ граф $G(V,E)$ с изброените свойства при който този максимум се достига.

4 свързани компонента

$d(v)=1 \quad \vee \quad d(v) \geq 3$ $\quad \boxed{d(v)=1 \quad |V| = 2022}$

$\boxed{|V| \neq 1 = 2014}$

Тъй като G е ацикличен граф $|E| = |V| - 1$

$|V| = |V_1| + |V_2| + |V_3| + |V_4|$ $\qquad |V_i| = |E_i| + 1$

$|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4|$

$|V_i| = |E_i| + 1$

$|E| = |V| - 1 = N(1) + (N_{3+}) - 1$

от ф. ойлер $2|E| = \sum deg(u)$

$2\left(\sum_{i=1}^{4}|E|\right) = \sum 2022 \cdot 1 + y \cdot 3$

$2(|V|-4) = 2022 + 3y$

$2(2022 + y - 4) = 2022 + 3y$

$4044 + y - 8 = 2022 + 3y$

$2022 - 8 = 2y$

$2014 = \boxed{2y} \Rightarrow d(v) \neq 1$ е доказано.

изпит задача 2 вариант 2

(100) G ацикличен граф с 3 свързани компоненти. $d(x)=1 \vee d(x) \geq 3$ е изпълнено. $|V|=2023$. докажете че max на броя с $d(x) \neq 1$ е 2017.

$|E|=|V|-1$

$|E|=|E_1|+|E_2|+|E_3|$

$|V|=|V_1|+|V_2|+|V_3|$

$|E_3|=|V_3|-3$

$|E_3|=2023+x-3$

от ойлер имаме че:

$2|E|=\sum deg(u)$

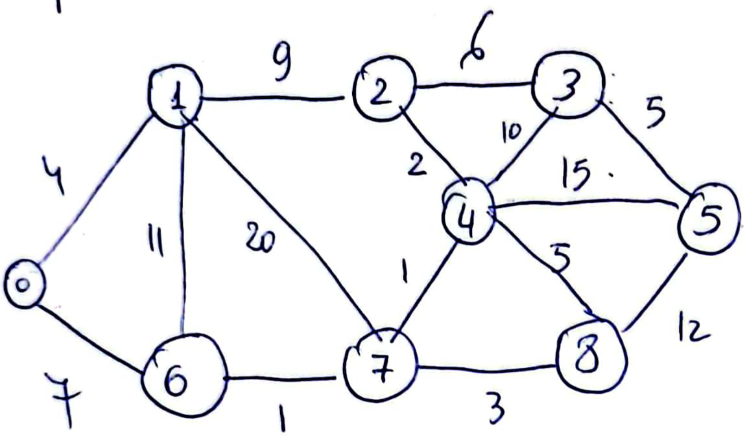
$404\cancel{6}+\cancel{2}x-6=20\cancel{2}3+3x$

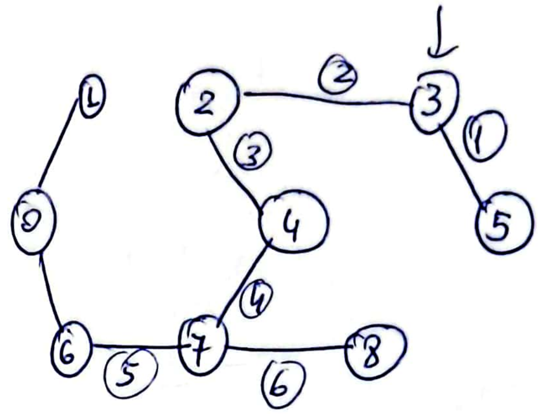
$2023-6=x$

$2017=\boxed{x}$ за $d(x)\geq 3$.

(101) Изпит задача 3 вариант 2

Използвайки алгоритъма на Дийкстра намерете теглата на най леките пътища от върха 0 до ∀ останали. С помоща на Prim намерете минимално покриващо дърво на G което има за корен върха 3.





0	1	2	3	4	5	6	7	8	непосетени
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0 1 2 3 4 5 6 7 8
–	4	∞	∞	∞	∞	7	∞	∞	1 2 3 4 5 6 7 8
–	–	13	∞	∞	∞	7	24	∞	2 3 4 5 6 7 8
–	–	13	∞	∞	∞	–	8	∞	
–	–	13	∞	9	∞	–	–	11	
–	–	11	19	–	24	–	–	11	
–	–	–	17	–	24	–	–	11	
–	–	–	17	–	23	–	–	–	
–	–	–	–	–	22	–	–	–	
–	–	–	–	–	–	–	–	–	