(49) Нека $G=(V,E)$ е граф. Докажете че броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Нека $V_0 = \{v \in V \mid 2 \mid deg(v)\}$

$V_1 = \{v \in V \mid 2 \nmid deg(v)\}$

$V_0 \cap V_1 = \emptyset$ $\quad V = V_0 \cup V_1 \Rightarrow |V| = |V_0| + |V_1|$

ф. Ойлер

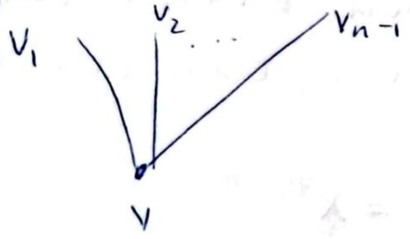
$$\underbrace{2|E|}_{\text{четно}} = \sum deg(u) = \left(\sum_{u \in V_0} deg\, u\right) + \left(\sum_{u \in V_1} deg\, u\right)$$

$$\sum_{u \in V_1} deg(u) = 2|E| - \sum_{u \in V_0} deg\, u = \text{четно}$$

$\Rightarrow \square$.

(50) Нека $G=(V,E)$ е граф с $\underline{\underline{n}}$ върха и повече от $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребра. Докажете че G е свързан.

Док. (1) Нека в G има връх от степен $n-1$



МБТ с дължина най-много 2 ребра.

от степен $n-1$. Тогава за $\forall v \in V$

(2) В G няма върхове от степен $n-1$

степента му $deg(u) \leq n-2$.

• G съдържа връх от степен $n-2$.

Да допуснем противното $deg(u) \neq n-2$ $\quad deg(u) \leq n-3$

Тогава $\sum deg(u) \leq |V|(n-3) = n(n-3)$

Но $\sum deg(u) = 2|E| > 2\frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)(n-2)$

тоест $n(n-3) \geq \sum deg(u)$ ⚡

(51) даден е граф $G(V,E)$ с $|V| \geq 2$. докажете че в G $\exists$ поне 2 върха от една и съща степен.

$\Rightarrow$ допускаме че в G няма 2 върха от една и съща степен.
$\Rightarrow$ това означава $\forall u_i u_j \in v [i \neq j]: deg(u_i) \neq deg(u_j)$
$\Rightarrow \exists$ точно един връх от степен $=0$, един връх $=1$ ..., един връх $= n-1$.
$\Rightarrow$ в частност ще имаме върховете u_i и u_j с $deg(u_i)=0$ и $deg(u_j)=n$
което е противоречие с допускането. тъй като u_i не е свързан с никой друг връх в граф а u_j е свързан с $\forall$ останали върхове в същия граф. $\Rightarrow$ в G има поне 2 върха от една и съща степен

(52) даден е граф $G(V,E)$ без цикли с $|V|=n$ и k на брой компоненти на свързаност. намерете $|E|$.

$$|E| = |E_1| + |E_2| + \dots + |E_k|$$
$$= \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| - \sum_{i=1}^{k} 1 = |V| - k = n-k$$

(53) дадено е дърво G с n на брой върхове в което $\forall$ връх е от степен 1 или 4. да се намери броя на върховете от степен 1 и да се докаже че $3 | n+1$.

Нека броя на върховете от степен 1 е $= x$.
Тогава броя на върховете от степен 4 е $= n-x$.
От това че G е дърво следва че $|E| = |V| - 1 = n-1$
от формулата на ойлер имаме че $2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) = x \cdot 1 + (n-x) \cdot$
$\Rightarrow 2(n-1) = x + 4(n-x)$ или $3x = 2n+2 = 2(n+1)$ и тъй като x е естествено число.
$gcd(2,3)=1$ то $3 | n+1$ защото

(54) даден е свързан граф G с 2n върха като n от тях имат степен равна на 3. да се докаже че в G има цикъл.

Искаме да докажем че G не е дърво.
допускаме че G е дърво тоест няма цикъл.
Тогава броят на ребрата ще е 2n−1.
от формулата на ойлер имаме че:

$$2(2n-1) = 2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) \geq n \cdot 3 + n \cdot 1 \geq 4n$$

$\Rightarrow 4n - 2 \geq 4n$ което е противоречие.

$\Rightarrow$ в G има поне един цикъл.

(55) даден е свързан граф G(V,E) с точно един цикъл в него да се намери броя на ребрата |E|, ако броя на върховете |V| е равен на 2018.

- разглеждаме графа G'(V',E') който се получава от G, чрез премахване на някое ребро от единствения цикъл на G
тогава $|E| = |E'| + 1$. освен това в G' няма цикъл
и тъй като G' е свързан то G' е дърво $\Rightarrow |E'| = |V| - 1$.

$$|E| = |V| - 1 + 1 = |V| = 2018.$$

(56) дадено е дърво G в което нито един връх не е от степен по висок... от 3. да се докаже че броя на върховете от степен 1 е с 2 по-голям от този на върховете от степен 3.

Нека с N(i) означим броя на върховете от степен i. Ако $i \geq 4 \Rightarrow N($

G е дърво $\Rightarrow |E| = |V| - 1 = N(1) + N(2) + N(3) - 1$.
от ойлер имаме: $|E| = 2(N(1) + N(2) + N(3) - 1) = \sum_{u \in V} deg(u)$

$= N(1) \times 1 + N(2) \times \boxed{2 + N(3)} \times 3$

$\Rightarrow N(1) = 2 + N(3)$ $\quad 2N_1 + 2N_2 + 2N_3 - 2 = N_1 + 2N_2 + 3N_3$

$N_1 = 2 + N_3$

57) Дадено е дърво G, в което има върхове само от степен 1, 2, и 4. Докажете че броят на върховете от степен равно на 1 е с две-по голям от удвоения брой на върховете от степен 4.

Нека с $N(i)$ отбелязваме броя на върховете от степен равна на i
от това че G е дърво следва че $|V| = |E| + 1$
а от формулата на Ойлер имаме че $2|E| = \sum_{v \in V} deg(u)$

$$2(|V|-1) = 2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) = N(1) \times 1 + N(2) \times 2 + N(4) \times 4$$

$$2(N(1) + N(2) + N(4) - 1) = N(1) \times 1 + N(2) \times 2 + N(4) \times 4$$

$$2N_1 + \cancel{2N_2} + 2N_4 - 2 = N_1 + \cancel{2N_2} + 4N_4$$

$$N_1 = 2 + 2N_4$$

тоест $N(1) = 2 \times N(4) + 2$

58) Даден е граф G, в който има поне един връх от нечетна степен, да се докаже че $\exists$ поне още един връх от нечетна степен, който е свързан с път с другия връх от нечетна степен.

Нека връх u е връх от G и е от нечетна степен.
Нека $u \in G_1$, където G_1 е компонента на свързаност на G
$\Rightarrow$ G_1 е свързан граф и съгласно задача. ча - има четен брой върхове от нечетна степен. Тогава в G_1 има поне още един връх от нечетна степен и тъй като G_1 е свързан, то между тях $\exists$ път.

59) дадем е ацикличен граф G с $2n+2$ броя върхове. Броят на върховете от степен равна на 3 е равен на n. а броят на върховете от степен $= 1$ е равен на $n+2$.

докажете че G е свързан.

→ Тъй като по условие G е ацикличен то G може да се разбие на k компоненти на свързаност които също са ациклични, но за разлика от G - за тях може да кажем че са свързани.

⇒ тези D_k компоненти на свързаност са дървета.

за $\forall$ D_k имаме че $|E_D| = |V_D| - 1$. Тоест

$$|E| = \sum^{k} |E_d| = \sum^{k} (|V_d| - 1) = V - k = 2n + 2 - k$$

от формулата на Ойлер имаме

$$2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) = n \times 3 + (n+2) \times 1 = 4n + 2$$

$$\Rightarrow 2(2n+2-k) = 4n+2$$

$$4n + 4 - 2k = 4n + 2$$

$\boxed{k = 1}$ което искаме да докажем тъй като k е броя на компонентите на свързаност.

60) даден е граф G с $\underline{n \text{ върха}}$ от които 7 върха са от степен $= n-1$, 3 върха са от степен $= n-2$ и 13 върха от степен $n-3$. Всеки връх от степен по малка от $n-3$ е с четна степен.

да се докаже че G има четен брой върхове.

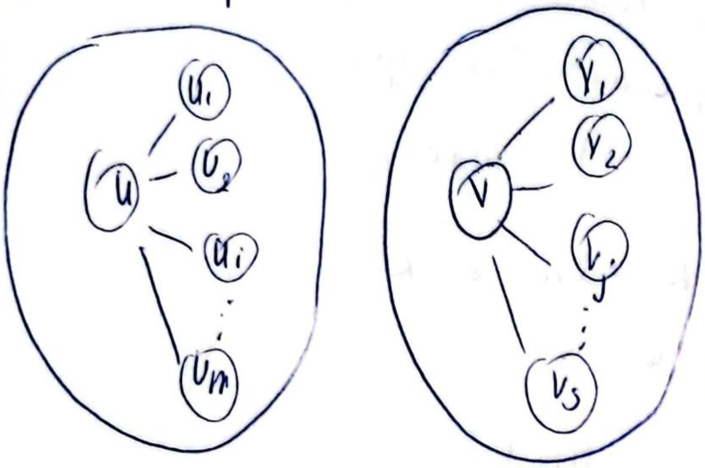
1 начин. → от формулата на Ойлер имаме че броят на върховете с нечетна степен = на четно число. да допуснем че n - броят на върховете е нечетно число, тогава $n-1$ и $n-3$ са четни а $n-2$ е нечетно. ⇒ единствените върхове от нечетна степен са тези със степен $= n-2$. Техният брой обаче е $= 3$ което е нечетно. ⇒ противоречие че n е нечетно ⇒ n е четно

2 начин Ойлер : $2|E| = 7(n-1) + 3(n-2) + 13(n-3) + 2N(k)_{k<n-3} \equiv 0 \mod 2$

$2|E| = 23n - 52 + 2N(k)_{k<n-3}$. Тъй като $gcd(2,23) = 1$ то $2 / n$ което искаме да докажем

(61) Даден е граф G с $2n+1$ върхове където $n \geq 2$. Всеки връх от G е от степен = на поне n. Да се докаже че G е свързан.

→ Допускаме че G не е свързан граф и нека $u \neq v$ са 2 различни върха от различни компоненти на свързаност. Тоест м/у u и v не $\exists$ път както и никой връх u_i $(i=\overline{1,m})$ не е свързан с никой връх v_j $(j=\overline{1,s})$



От условието => че във $\forall$ компонента на свързаност ще има поне $n+1$ броя върхове.

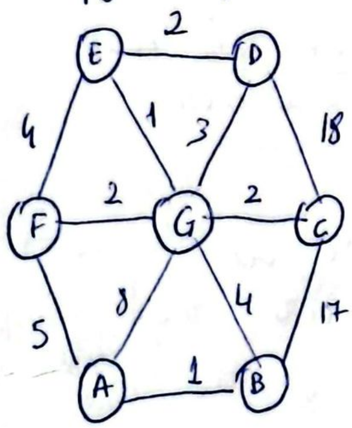
Нека броят на компонентите на G е $= k \Rightarrow k(n+1) \leq 2n+1$

? но $k \geq 2 \Rightarrow 2(n+1) \leq k(n+1) = 2n$

$\Rightarrow 2 \leq 1$ противоречие

$\Rightarrow G$ е свързан граф.

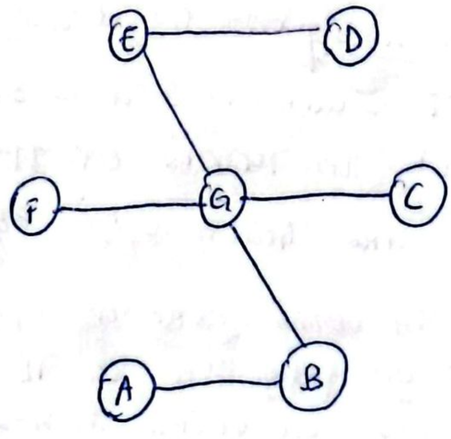
(62) Да се намери минимално покриващо дърво за графа Г (Крускал)



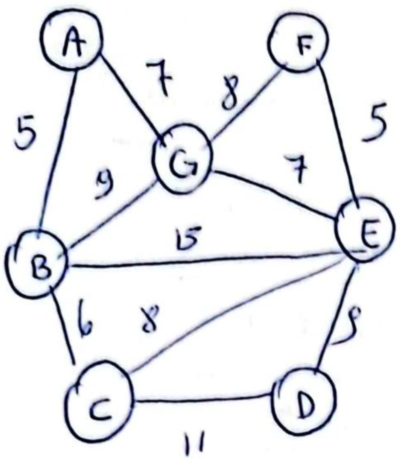
(числата на ребрата репрезентират последователността на избиране)

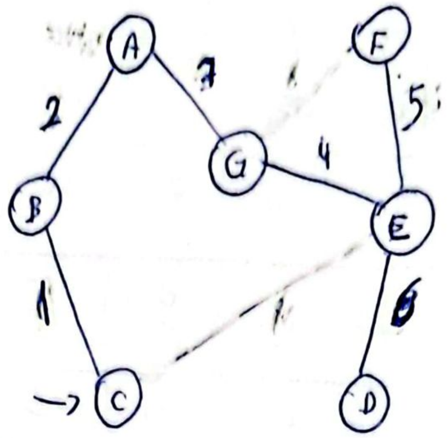
1	1	2	2	2	3	4	4	5	17	18
AB	GE	FG	GC	ED		EF	GB			

ги сортираме да няма цикъл.

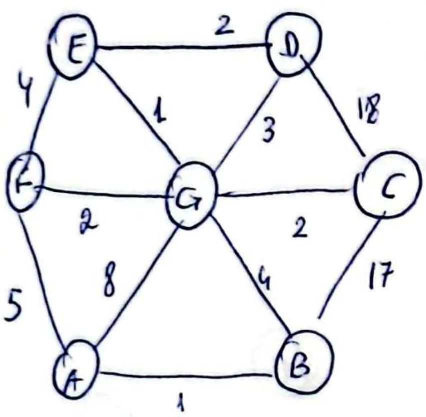


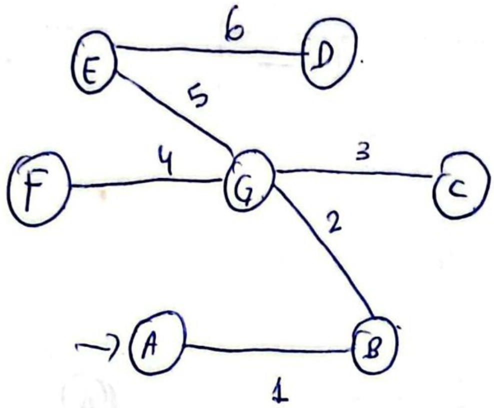
63) Да се намери минимално покриващо дърво за $Г_1$ и $Г_2$ Прим



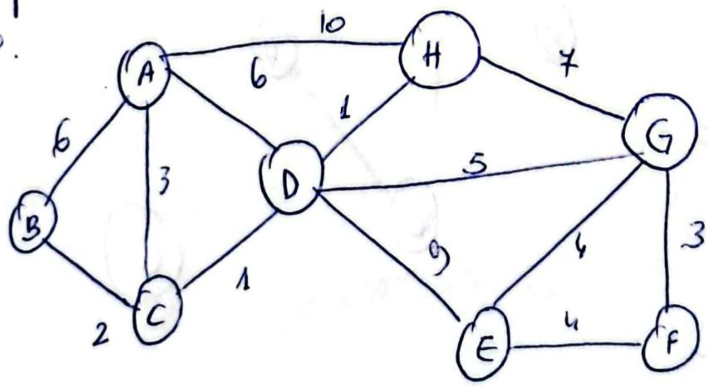


Избираме начален връх C





64) Намерете теглата на най-леките пътища от A до останалите върхове.



Начален връх v_0 = A

$f(C)=\min\{f(C), f(A)+\delta(A,C)\}=\min\{\infty, 0+3\}=3$

A	B	C	D	E	F	G	H	НЕПОСЕТЕНИ
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A B C D E F G H
–	6	3	6	∞	∞	∞	10	B C D E F G H
–	5	–	4	∞	∞	∞	10	B D E F G H
–	5	–	–	13	∞	9	5	B E F G H
–	–	–	–	13	∞	9	5	E F G H
–	–	–	–	13	∞	9	–	E F G
–	–	–	–	13	12	–	–	E F
–	–	–	–	13	~~12~~	–	–	E
–	–	–	–	–	–	–	–	∅

$dist[k] = \min(dist[k], dist[j] + c(j,k))$

$f(B) = \min(6, 3+2) = 5$

$f(D) = \min(6, 3+1) = 4$

$f(H) = \min(10, 4+1) = 5$

$f(G) = \min(\infty, 4+5) = 9$

$f(E) = \min(\infty, 4+9) = 13$

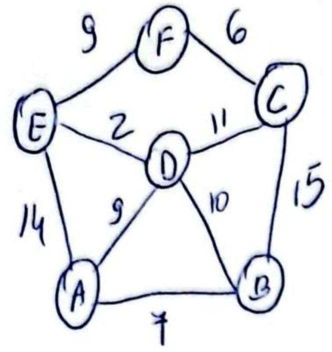
$f(G) = \min(9, 5+7) = 9$

$f(E) = \min(13, 9+4) = 13$

$f(F) = \min(\infty, 9+3) = 12$

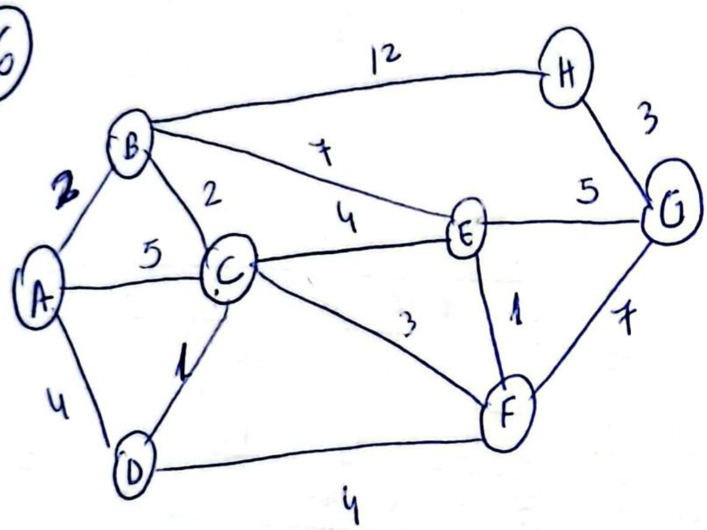
$f(E) = \min(13, 12+4) = 13$

65 [illegible] дейкстра



A	B	C	D	E	F	непосетени
0	∞	∞	∞	∞	∞	A B C D E F
–	7	∞	9.	14	∞	B C D E F
–	–	22	9	14	∞	C D E F
–	–	20	–	11	∞	C E F
–	–	20	–	–	20	C F
–	–	–	–	–	20	F

66

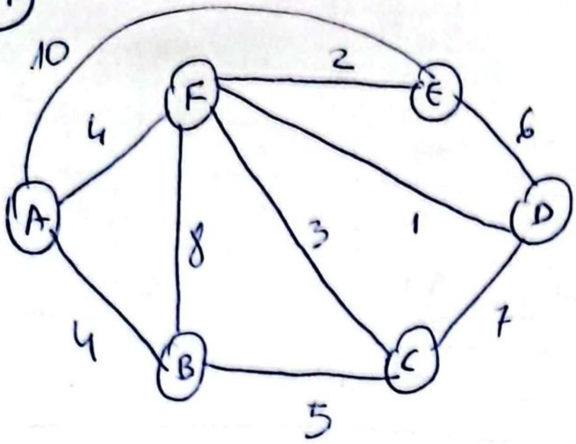


A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	5	4	∞	∞	∞	∞
–	–	4	4	9	∞	∞	14
–	–	–	4	8	7	∞	14
–	–	–	–	8	7	∞	14
–	–	–	–	8	–	14	14
–	–	–	–	–	–	13	14
–	–	–	–	–	–	–	14

търсените най леки пътища от А до всеки връх са.

от А до	път с тегло
B	$A \xrightarrow{2} B$
C	$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} C$
D	$A \xrightarrow{4} D$
E	$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} E$
F	$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} F$
G	$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} E \xrightarrow{5} G$
H	$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{12} H$

67



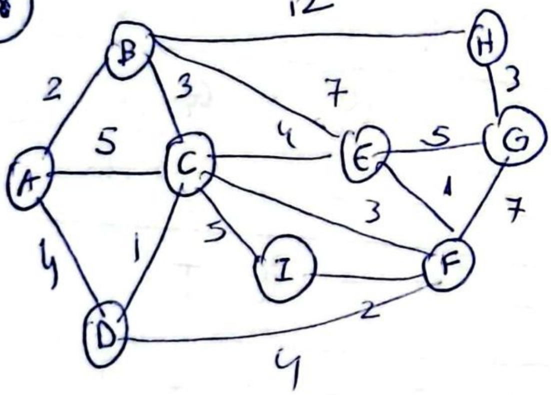
A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞
–	4	∞	∞	10	4
–	–	9	∞	10	4
–	–	7	5	6	–
–	–	7	–	6	–
–	–	7	–	–	–
–	–	–	–	–	–

OT A go	
B	A $\xrightarrow{4}$ B
C	A $\xrightarrow{4}$ F $\xrightarrow{3}$ C
D	A $\xrightarrow{4}$ F $\xrightarrow{1}$ D
E	A $\xrightarrow{4}$ F $\xrightarrow{2}$ E
F	A $\xrightarrow{4}$ 4

shiko atë për të jep vlerën më të vogël

psh A $\xrightarrow{10}$ E   A $\xrightarrow{4}$ F $\xrightarrow{2}$ E (6)

68



A	B	C	E	F	G	H	I	D
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
–	2	5	∞	∞	∞	∞	∞	4
–	–	5	9	∞	∞	14	∞	4
–	–	5	9	8	∞	14	∞	–
–	–	–	9	8	∞	14	10	–
–	–	–	9	–	15	14	10	–
–	–	–	–	–	14	14	10	–
–	–	–	–	–	14	14	–	–
–	–	–	–	–	–	14	–	–