ГРАМАТИКИ: Неограничена граматика $G=(V,\Sigma,R,S)$

$V \to$ крайно множество от променливи (нетерминали)

$\Sigma \to$ крайно множество от букви (терминали)

$S \to$ фиксирана променлива $\to$ начална променлива (аксиома)

$R \subseteq (V\cup\Sigma)^+ \times (V\cup\Sigma)^*$ крайно множество от правила за извод.

свойство: • $\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta$, $\lambda, g \in (V\cup\Sigma^*) \leadsto \lambda\alpha g = \lambda\beta g$.

• $\{\alpha \overset{l}{\Rightarrow} \beta \quad \lambda g \in (V\cup\Sigma^*)\} \leadsto \lambda\alpha g \overset{l}{\Rightarrow} \lambda\beta g$

• $\{\alpha \overset{l_1}{\Rightarrow} \beta \quad \beta \overset{l_2}{\Rightarrow} \gamma\} \leadsto \alpha \overset{l_1+l_2}{\underset{G}{\Rightarrow}} \gamma$

• $\{\alpha_1 \overset{l_1}{\Rightarrow} \beta_1 \quad \alpha_2 \overset{l_2}{\Rightarrow} \beta_2\} \leadsto \alpha_1\alpha_2 \overset{l_1+l_2}{\underset{G}{\Rightarrow}} \beta_1\beta_2$

• $\{\alpha \overset{l_1}{\Rightarrow} \lambda\beta g \quad \beta \overset{l_2}{\Rightarrow} \gamma\} \leadsto \alpha \overset{l_1+l_2}{\Rightarrow} \lambda\gamma g$

КОНТЕКСТНИ ГРАМАТИКИ

$G=(V,\Sigma,R,S)$ $\alpha \in L(G) \Longleftrightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$ & $\alpha \in \Sigma^*$. G е контекстна ако правилата в G имат вида $\lambda A g \to \lambda\alpha g$ където $A \in V$, $\lambda, g \in (V\cup\Sigma)^*$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$

Регулярни граматики • $G=(V,\Sigma,R,S)$ е регулярна ако правилата в G имат вида $A \to aB$ $A \to \varepsilon$.

• за $\forall$ регул. граматика G $\exists$ $L(N) = L(G)$

• за $\forall$ ДКА A $\exists$ регулярна граматика G такова че $L(A)=L(G)$

• $\forall$ рег. език е безконтекстен

Безконтекстни граматики една граматика $G=(V,\Sigma,R,S)$ е безконтекстна ако правилата в G имат вида $A \to \alpha$, $A \in V$, $\alpha \in (V\cup\Sigma)^*$

• Един език $L \subseteq \Sigma^*$ е безконтекстен ако $\exists$ безк. грам. G такова че $L=L(G)$

Основно твърдение Нека G е безконтекстна граматика. Нека $\gamma_1\gamma_2 \overset{l}{\Rightarrow} \beta$. Тогава $\exists$ $l_1, l_2 \in N$ и $\beta_1, \beta_2 \in (V\cup\Sigma)^*$ такива че $\beta = \beta_1\beta_2$ $\gamma_1 \overset{l_1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \beta_1$ $\gamma_2 \overset{l_2}{\underset{G}{\Rightarrow}} \beta_2$ и $l_1 + l_2 = l$

Твърдение безконтекстните езици са затворени относно $\cup, \circ, *$

• **синтактични дървета за извод** Нека G е безконтекс. граматика съвместимо с G, наричаме $P=(T,\lambda)$ където

1) $T \to$ кореново дърво с корен r, за $\forall$ $v \in T$ $succ_v = \{w_1, w_2 \dots w_k\}$ (преките наследници на v) със точно наредба

2) $\lambda: T \to V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ $\lambda(v)$ етикет на v $\lambda(r) \in V \cup \Sigma$

3) за $\forall$ връх $v \in T$ $succ_v = \{w_1 \dots w_k\}$ $k \geq 1$ трябва $\lambda(v) \to \lambda(w_1)\lambda(w_2)\dots\lambda(w_k)$

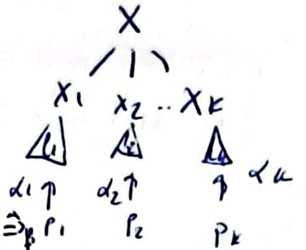
1.4) Ако $v \in T$ и $succ_v = \{w\}$ допускаме $\lambda(w) = \varepsilon$ трябва $X(v) \to_G \varepsilon$ частен случай

Нека $l_1, l_2 \dots l_k$ е обхождане на T в дълбочина по принципа "най-ляв необходен"
Тогава казваме че дървото извежда думата $\lambda(l_1)\lambda(l_2)\dots\lambda(l_k)$

$yield(\rho) = \lambda(l_1)\lambda(l_2)\dots\lambda(l_k)$ — дълбочина на извода

дефиниция G е безк.гр. $X \in V \cup \Sigma$ $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ $X \overset{l}{\triangleleft} \alpha$ ако има дърво

интуиция $l=0$ X $X \overset{0}{\triangleleft} X$ $l>0$



ρ е цялото дърво

$yield(\rho) = yield(\rho_1) \dots yield(\rho_k)$

твърдение $X \overset{*}{\Rightarrow} \beta \leadsto X \overset{*}{\triangleleft} \beta$ и обратното $X \overset{*}{\triangleleft} \beta \to X \overset{*}{\Rightarrow} \beta$

Лема за показването за безконтекстни езици (pumping lemma).

- $\{A \overset{l}{\triangleleft} \alpha_1, B\alpha_3, B \overset{l_2}{\triangleleft} \alpha_2\}$
- $A \overset{l}{\triangleleft} \beta A \gamma \leadsto A \overset{\le l \cdot i}{\triangleleft} \beta^i A \gamma^i$ за произволно $i \in \mathbb{N}$
- $b = max\{|\gamma| \mid A \to_G \gamma\}$

  1) $A \overset{\le l}{\triangleleft} \alpha \leadsto |\alpha| \le b^l$ 2) $\alpha \in L_G(S)$ & $|\alpha| > b^l \leadsto S \overset{\ge l+1}{\triangleleft} \alpha$

Лема за покачване Нека L е произволен без. език. $\exists p \ge 1$ такова че за $\forall$ дума α такава че: $\alpha \in L$ и $|\alpha| \ge p$ $\exists$ разбиване $\alpha = xyuvw$ със следните свойство $1°$ $|yv| \ge 1$ $2°$ $|yuv| \le p$ $3°$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $xy^iuv^iw \in L$

безконтекстни езици не са затворени относно $\cap$ и допълнение

Полезна се нарича променливата $A \in V$ ако $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta \overset{*}{\Rightarrow} \gamma$ за някои $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ и $\gamma \in \Sigma^*$

Лема Нека $L(G) \neq \emptyset$. $\exists$ алгоритъм който намира $G' = (V', \Sigma, R', S)$ такова че $L(G) = L(G')$ и $\forall A \in V'$ $\exists \gamma \in \Sigma^*$ така че $A \overset{*}{\Rightarrow}_{G'} \gamma$

Лема $\exists$ алгоритъм който намира $G' = (V', \Sigma, R', S)$ безкон. граматика такова че $\forall A \in V'$ $\exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$ $S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \beta$.

Теорема за $\forall$ безк. гр. G $\exists$ без.гр. G' такова че в G' $\forall$ променливо е полезна. G' се нарича <u>ефективно</u> от G'.

Лема $\exists$ алгоритъм който по дадения безкон. G намира безкон. G' такова че в G' няма ε-правила и $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

Лема $\exists$ алгоритъм който при дадена без. гр. в която няма ε-правила намира без. гр. такава че $L(G) = L(G')$ и в G' няма преименуващи правила

Премахване на дългите правила едно правило $A \to \beta$ наричаме дълго ако $|\beta| \ge 3$ за $\forall$ такова правило въвеждаме $A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_{k-2}$, $\beta = X_1 X_2 \dots X_k$
$A \to X_1 A_1 \to X_1 X_2 X_3$ и следните нови правило $A \to X_1 A_1 \to X_1 X_2 A_2 \dots \to X_1 X_2 \dots X_{k-2} A_1$
$\to X_1 X_2 \dots X_{k-2} X_{k-1} X_k$

Нормална форма на Чомски една граматика G е НФЧ ако правилата на G имат вида $A \to BC$ и $A \to a$

Теорема: за $\forall$ безк. език L, $\varepsilon \notin L$ $\exists$ безк. G в НФЧ т.е $L(G) = L$

Лема: $A \overset{*}{\Rightarrow} a_i a_{i+1} \dots a_{i+s} \iff \exists B, C \in V, A \underset{G}{\to} BC$ и $B \overset{*}{\Rightarrow} a_i a_{i+1} \dots a_r$

$C \overset{*}{\Rightarrow} a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{i+s}$

Стеков автомат: $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \#, \Delta, q_{start}, q_{accept})$, ф на преходи

$Q \to$ крайно множество от състояние; q_{start} — начално състоя.; q_{accept} — финално

$\Sigma \to$ -//- азбука

$\Gamma \to$ -//- стекова азбука

$\# \to$ символ за дъно на стека

$\Delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^{\leq 2})$

$\Gamma^{\leq 2} = \{\varepsilon\} \cup \Gamma \cup \Gamma^2$ $\qquad \Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Конфигурация $(q, \alpha, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ когато автомата се намира в състояние q, остава да се прочете α от входа и съдържанието на стека е γ.

Дефиниция: $L(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_{start}, w, \#) \vdash^* (q_{accept}, \varepsilon, \varepsilon) \}$
(начална конф; финална)

Твърдение: 1) $(p, \alpha, \gamma_1) \vdash^{l_1} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ $(q, \alpha_2, \gamma_2) \vdash^{l_2} (r, \varepsilon, \varepsilon)$ тогава $(p, \alpha_1\alpha_2, \gamma_1\gamma_2) \vdash^{l_1+l_2} (r, \varepsilon, \varepsilon)$

2) $(q, \alpha, \gamma_1\gamma_2) \vdash^{l} (p, \varepsilon, \varepsilon)$ $\quad l_1 + l_2 = l$ $\quad \alpha = \alpha_1\alpha_2$

$(q, \alpha_1, \gamma_1) \vdash^{l_1} (r, \varepsilon, \varepsilon)$ и $(r, \alpha_2, \gamma_2) \vdash^{l_2} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

Теорема: За $\forall$ безк. гр. G, $\exists$ недетерминиран стеков автомат P такъв че $L(P) = L(G)$ и обратното

Теорема: Нека L е безкон. език над Σ и R е рег. език над Σ. Тогава $L \cap R$ е безк. език.

Машина на Тюринг: детерминистична машина на Тюринг:

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, q_s, q_a, q_{reject})$

Q — кр. мн-во от съст.; Σ — крайна входна азбука; Γ — крайна азбука за лентата; $\sqcup$ — символ за празна клетка; q_s — стартово; q_a — приемащо; q_{reject} — отхвърлящо състояние една тотална ф-я наричаме изчислима ако $\exists$ машина на Тюринг M т.че $(\varepsilon, q_{st}, \alpha\sqcup) \vdash_M^* (\sqcup, q_{acc}, f(\alpha)\sqcup)$

Недет. м. Тюринг. → ф. на преходите Δ е от вида:

$$\Delta : Q' \times \Gamma \to P(Q \times \Gamma \times \{\triangleleft \square \triangleright\})$$

Кодът на машината на Тюринг M е

$$\ulcorner M \urcorner = 1110^{\ell} 11 \, code_1 \, 11 \, code_2 \, 11 \ldots 11 \, code_r \, 111$$

code е кодът на i-тия преход от δ

$L_{code} = \{ \omega \in \{0,1\}^* \mid \omega$ е код на $M \}$ е разрешим

диагоналният език

$L_{diag} = \{ \omega \in \{0,1\}^* \mid \omega \in L_{code} \; \& \; \omega \notin L(M_\omega) \}$

не се разпознава от м. Тюрин. т.е не е полуразреш

Езикът $L_{univ} = \{ \ulcorner M \urcorner \# \omega \mid M$ е машина и $\omega \in L(M) \}$ е полуразрешим но не е разрешим

Нека $K, L \subseteq \Sigma^*$ и $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ казваме че f свежда K към L ако $\forall \omega \in \Sigma^*$

$\omega \in K \iff f(\omega) \in L$.

М. Тюринг M работи за полиномиално време, ако $\exists$ полином $p \in \mathbb{N}[x]$ т.че:

$(\varepsilon, q_{st}, \omega\sqcup) \xrightarrow{p(|\omega|)+1} (x, p, y)$

1) $P = (L \subseteq \Sigma^* \mid L = L(M)$ където M е детер)

NP $\qquad L = L(N) \qquad N$ е недет