

Дефиниции

- $\Sigma \rightarrow$ азбука \rightarrow крайно множество от символи. ✓
- **Дуна над Σ** \rightarrow крайна редица от символи от Σ . ✓
- **Език L над Σ** \rightarrow произволно множество от дуни над Σ , \forall подмножество на Σ^* ✓
- **Празна дуна** $= ()$ не съдържа нито един елемент. е дуна над $\forall \Sigma$ и се означава с ϵ . Дължината е 0 ✓
- **Дължина на дуна** = броят на елементите в редицата която описва дуна. ✓
- **Итерация (звезда на Клини)** $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$ = множеството на \forall крайни конкатенации на дуни от L ✓
- **Краен детерминиран автомат (ДКА)** е $A = \langle \Sigma, Q, q_{start}, \delta, F \rangle$
където:
 $\Sigma \rightarrow$ крайна азбука
 $Q \rightarrow$ крайно множество от състояния
 $q_{start} \in Q \rightarrow$ начално състояние
 $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow$ функция на преходите
 $F \subseteq Q \rightarrow$ финални / заключителни състояния.
- **Един език L е автоматен** ако \exists ДКА A тако че $L = L(A)$
 \rightarrow език A разпознава думите от L ✓
- $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

разширение
дуна

✓
- **Конфигурация** $K = (q, \alpha) \in Q \times \Sigma^*$, $q \rightarrow$ текущо състояние, α дуна която остава да бъде прочетена. ✓
- Нека L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ . тогава $L_1 \cap L_2$ също е автоматен.
- Нека L е автоматен език над Σ . тогава $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ също е автоматен.
- $L_1 \cup L_2 = \overline{\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2}$ • $F = \{ (q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1 \text{ или } q_2 \in F_2 \} = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$
- $L_1 \cap L_2 = \overline{\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2}$ • $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$
- Нека $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$
 е изрази от езиците $\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ използвайки краен брой пъти
 операциите $\cup, \cap, \bar{}$. **регуларен израз** е получена от едно такова изразяване
 прехвърляйки скобите. **Един език L е регуларен** ако $L = \mathcal{L}(r)$ за някой **регуларен израз r** .

1 Теорема Клини. Всеки автоматен език се описва с регулярен израз.

2 Множеството от всички думи над азбуката Σ се означава с Σ^* , пример:
 $\Sigma = \{a, b\}$ $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, bb, ab, aab, aab \dots\}$

3 Недетерминирани крайни автомати (НКА) $\Rightarrow N = (\Sigma, Q, q_{start}, \Delta, F)$
 $\Sigma \rightarrow$ крайна азбука, Q - крайно множество от състояния, $q_{start} \in Q$ множество от начални състояния.
 $\Delta: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ $\forall q \in Q \forall x \in \Sigma \Delta(q, x) \subseteq Q$
 $F \subseteq Q \rightarrow$ финални състояния.

4 Изпълнението е успешно ако имаме официално състояние.
 $q_0 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} q_n$ е успешен път ако започва от началното състояние $q_0 \in I$ и $q_n \in F$

5 w се разпознава от A ако \exists поне един успешен път с етикет буквите $w \in \Sigma$
 $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ се разпознава от } A\} = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists q \in I)(\exists q \in F) (q \xrightarrow{w} q) \text{ е път в } A\}$

6 Тотален автомат $K_A = (Q, \Sigma, I, F, \Delta)$ е тотален ако за \forall състояние $q \in Q$ и \forall буква $a \in \Sigma$ \exists поне едно състояние p , т.е. $q \xrightarrow{a} p$ е преход (т.е. $(q, a, p) \in \Delta$)

7 Т. равни скот за \forall НКА N и D т.е. $L(N) = L(D)$

8 Множеството от всички думи над азбуката Σ^*

9 α е префикс на β ако \exists дума γ т.е. $\beta = \alpha\gamma$.

10 α е суфикс на β ако \exists дума γ т.е. $\beta = \gamma\alpha$.

11 Теорема равни скот \rightarrow за \forall НКА N \exists ДКА D т.е. $L(N) = L(D)$

12 Автомата на Бнзювски $L \rightarrow$ език над Σ и $a \in \Sigma$, $a^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$
 L е автоматен $\Leftrightarrow a^{-1}(L)$ е автоматен.

$$Q^B = \{a^{-1}(L) \mid a \in \Sigma^*\}$$

$$q_{start}^B = L = \epsilon^{-1}(L)$$

$$\delta^B(q, a) = a^{-1}(q)$$

$$F^B = \{a^{-1}(L) \mid \epsilon \in a^{-1}(L)\}$$

Разширена ф-та пр. в НКА
 $\Delta^*: P(Q) \times \Sigma^* \rightarrow P(Q)$

13 Минимален автомат \rightarrow (Б) ав. Бнзювски или най малкия възможен брой състояния изключу \forall ДКА който разпознава L

14 Изоморфни \rightarrow казваме че A_1 и A_2 са изоморфни ($A_1 \cong A_2$) ако \exists функция

$$f(q_{start}^1) = q_{start}^2$$

$$q \in F_1 \Leftrightarrow f(q) \in F_2$$

$$f(\delta_1(q, x)) = \delta_2(f(q), x)$$

$\Sigma \rightarrow$ алфавит \rightarrow крайно множество от символи

Σ дума или $\Sigma \rightarrow$ крайна редица от символи

$L \rightarrow$ език или $\Sigma \rightarrow$ произволно множество от думи над Σ

$\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$ Всички думи над Σ
The set of all strings including the empty string

$L = \emptyset$ или празен език

$L = \Sigma^*$ или голякия

СВОЙСТВА ЗА КОНКАТЕНАЦИЯ

• $\alpha \epsilon = \epsilon \alpha = \alpha$

• $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

• $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

• $\alpha\beta = \epsilon \Leftrightarrow \alpha = \beta = \epsilon$

• казваме че думата α е префикс на думата β ако \exists думата γ такава че $\beta = \alpha\gamma$

• α е суфикс $\beta = \gamma\alpha$.

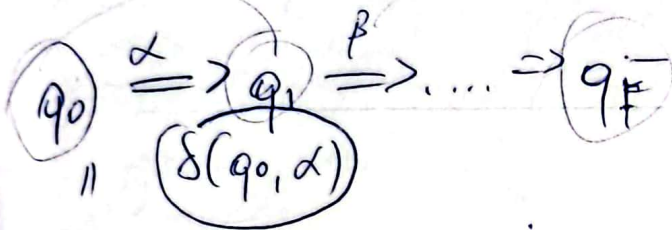
$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$A^+ = A \cdot A^*$$

Краини детерминирани автомати 1КА е $A = \langle \Sigma, Q, q_{start}, \delta, F \rangle$

" $a_1 \dots a_n$ "

Регуларни езици над $\Sigma \rightarrow$ Нека Σ -азбука и $L \subseteq \Sigma^*$ казваме че L е регуларен език над Σ ако може да се изрази от езиците $\phi, \{a\}, \{a\}^*, \dots, \{a_1 a_2 \dots a_n\}$ използвайки краен брой пъти операции $\cup, *, \cdot$



Един език е автоматен ако $\exists \text{ 1КА } A \text{ и } L = L(A)$

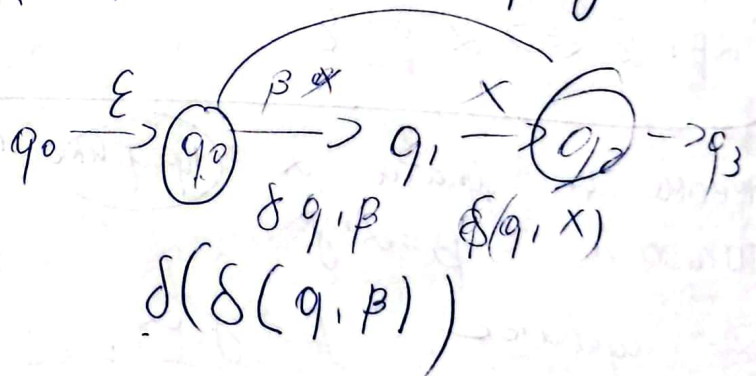
$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ разширена функция на преходи

с индукция по α :

база: $\delta^*(q, \epsilon) = q$

стъпче: $\delta^*(q, \beta x) =$

$\delta(\delta^*(q, \beta), x)$



• Нека L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ , тогава $L_1 \cap L_2$ също е автоматен език над Σ

• ЛЕМА: $\forall q_1 \in Q_1, \forall q_2 \in Q_2, \forall \alpha \in \Sigma^*$
 $\delta((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$

• Нека L е автоматен език над Σ , тогава $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ също е

• $L_1 \cup L_2 = \overline{L_1 \cap L_2}$

• $F = \{q_1, q_2 \mid q_1 \in F_1 \text{ или } q_2 \in F_2\} = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$

• $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$

• $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$

Един език L е регулярен ако $L = \mathcal{L}(r)$ за някаква регулярна изразна формула r .
 Регулярните изрази r могат да се опишат със следната абстрактна граматика:

$$r ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid a \mid r_1 r_2 \mid r_1 + r_2 \mid r_1^*$$

Теорема 1 Клини: Всеки автоматен език е регулярен.
 Теорема 2 Клини: Всеки регулярен език е автоматен.
 Недетерминирани крайни автомати НКА N

$$N = (\Sigma, Q, Q_{\text{start}}, \Delta, F)$$

$\Sigma \rightarrow$ азбука $Q \rightarrow$ ^{множ.} съв. $Q_{\text{start}} \in Q$ ^{нач. съв.}

$$\Delta \rightarrow Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$$

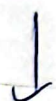
$$\forall q \in Q \forall x \in \Sigma \quad \Delta(q, x) \subseteq Q$$

$F \rightarrow$ ^{множ.} от ^{множ.} Final състояния

ТОТОНЕН

$A = (\Sigma, Q, Q_{\text{start}}, F, \Delta)$ - НКА е тотонен ако за $\forall p \in Q$ и $\forall a \in \Sigma \exists$ точно един преход от p по a .

$$(\forall p \in Q)(\forall x \in \Sigma)(\exists! \Delta(p, x) \geq 1)$$



е детерминиран когато има само 1 преход от всяко състояние по всяка буква.

Теорема Рабин-Скот за \forall недетерминиран автомат N

\exists дет. авт. D такъв че $L(D) = L(N)$

Лема конкатенация $\Delta^*(R \& B) = \Delta^*(\Delta^*(R, a) B)$

Лема Езиците $\emptyset, \{\varepsilon\}$ и $\{a \mid a \in \Sigma\}$ са автоматни.

Лема Ако L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ то тяхната конкатенация $L_1 \cdot L_2$ също е автоматен език над Σ .

Лема Нема L е автоматен език над Σ , тогава L^* е също автоматен език над Σ .

Твърдение Ако L е автоматен език то L^{rev} също е.

Pumping Lemma \rightarrow Нека L е възвратен регулярен език. \exists

\exists естествено число $p \geq 1$ такава че за \forall думи $\alpha \in L$ с дължина $|\alpha| \geq p$ \exists разбиване на 3 думи:

$\alpha = xyz$ със следните свойства:

$$|y| \geq 1 \quad |xy| \leq p \quad \forall i \in \mathbb{N} \alpha = xy^i z \in L$$

Товава L не е регулярен език

АВТОМАТ НА БЖОЗОВСКИ

$$B = (\Sigma, Q^B, q_{start}^B, \delta^B, F^B)$$

$$Q^B = \{ \alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^* \}$$

$$q_{start}^B = L = \varepsilon^{-1}(L)$$

$$\delta^B(M, a) = a^{-1}(M)$$

$$F^B = \{ \alpha^{-1}(L) \mid \varepsilon \in \alpha^{-1}(L) \}$$

Твърдение: $\delta^{B^*}(M, \alpha) = \alpha^{-1}(M)$

Имаме автомат $A(\Sigma, Q, q_{start}, \delta, F)$ е Δ КА

$L_A(q) \rightarrow$ десен език на $q \in Q$

$$= \{ \omega \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, \omega) \in F \}$$

$L_A(q_{start}) = L(A)$ означаване $q_\alpha = \delta^*(p_{start}, \alpha)$

Многопопамете че $\forall q \in Q \exists \alpha \in \Sigma^* q = q_\alpha$

A е свързан + състояния са достижими

Теорема Нека $L \rightarrow$ регулярен език $L = L(A)$ Нека B е автоматът на БЖОЗОВСКИ за L тогава $|Q^B| \leq |Q^A| \Rightarrow L$ е регулярен B е кратен

ИЗОМОРФИЗМИ АВТОМАТИ

$$A_1 = (\Sigma, Q_1, q'_1, \delta_1, F_1)$$

$$A_2 = (\Sigma, Q_2, q''_2, \delta_2, F_2)$$

казваме че A_1 и $A_2 \cong$ ако \exists биекция

$$f(q'_1) = f(q''_2)$$

$$q \in F_1 \Rightarrow f(q) \in F_2$$

$$f(\delta_1(q, x)) = \delta_2(f(q), x)$$

Теорема За \forall рег. език L \exists единствен минимален автомат
с точност по изоморфизъм.

Критери за минималност

Яке A е свързан \wedge A е минимален $\iff \forall p \in Q \forall q \in Q \ p \neq q$
 $L_A(p) \neq L_A(q)$

Автомат на Найхил-Нероуд.

$$L \text{ език на } \Sigma$$

рел. на еквив.
за α и β

$$M = (\Sigma, Q^M, q_{start}^M, \delta^M, F^M)$$

$$Q^M = \{[\alpha]_L \mid \alpha \in \Sigma^*\}$$

$$q_{start}^M = [\epsilon]_L$$

$$\delta^M([\alpha]_L, x) = [\alpha x]_L$$

$$F^M = \{ [\alpha]_L \mid \alpha \in L \}$$

L -език

α, β думи

казваме че α и β са
еквивалентни относно L

$$\alpha \approx_L \beta \iff \alpha^{-1}(L) = \beta^{-1}(L)$$

Т. на Найхил-Нероуд.

Нека L е рег. език. Тогава \exists
 \wedge A който разпознава L
с точно толкова състояния
колкото са класовете на
еквивалентност относно рел. \approx_L

звф. Алгор. за минимализация!

свс. $p, q \in Q$ са екв. ако $L_A(p) = L_A(q)$
 $p \equiv_A q$

$$\forall w \in \Sigma^* (\delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F)$$

$[q] \equiv_A$ кл. по ек. по q

A е миним $\Leftrightarrow \exists A$ съвморо $C = \{ \text{критерий за мин} \}$