(67) ИЗМИТ 2-част вариант 4 зад 1

$L = \{a^n b^k \mid 5n < 3k + 4\}$

$3k + \cancel{4}^{3} = 5n + p + \cancel{1}$

$3k + 3 = 5n + p$

$L_1 = a^n b^k \mid 3k + 2 = 5n$

$5n = 2 \pmod 3$

$n \equiv 1 \pmod 3$

$n = 3n' + 1$

$3k + 2 = 15n' + 5$

$3k = 15n' + 3$

$k = 5n' + 1$

$a^{3n'+1} b^{5n'+1}$

$S \to a^3 S b^5 \mid a \mid b \varepsilon$

$L_2 = \{a^n b^k \mid 3k + \cancel{1} = 5n + p + 1\}$

$3k = 5n + 3p'$

$5n = 0 \pmod 3$

$n = 0 \pmod 3$

$n = 3k'$ $\quad 3k = 15k' + 3p'$

$a^{3k'} b^{5k'+p'}$

$a^3 S b^5 \mid b^*$

$3k = 5n' + 3p' + 1$

$5n = 2 \pmod 3$

$n = 1 \pmod 3$

$n = 3k' + 1$

$3k = 15k' + 5 + 3p' + 1$

$k = 5k' + 2 + p'$

$a^{3k'+1} b^{5k'+2+p'}$

$a^3 S b^5 \mid a \mid b^2 \mid b^*$

$k = 5k' + 4 + p'$

$a^{3k'+1} b^{5k'+4+p'}$

$a^3 S b^5 \mid a \mid b^4 \mid b^*$

$3k = 5n' + 3p' + 2$

$5n' = 1 \pmod 3$

$n = 2 \pmod 3$

$n = 3k' + 2$

$3k = 15k' + 10 + 2 + 3p'$

CamScanner

68 изпит 2 част вариант 6

$L = \{a^n b^k \mid 2n + 5 < 3k\}$

$3k = 2n + 5 + p + 1$

$3k = 2n + 6 + p = 2(n+3) + p$

$3k = 2n + 3p' + 6$

$2n = 6 \pmod 3$ /2

$n = 2 \pmod 3$

$n = 3n' + 2$

$3k = 6n' + 4$

$3k = 2n + 5 + p - 4$

$3k = 2n + 1 + p = n + n + 1 + p$

$3k = 2n + 1$ U $3k = n + p$

$3k = n + 1$

$\Rightarrow 3k = 1 \pmod 2$

$k = 1 \pmod 2$

$k = 2k' + 1$

$3k = n + 1$

$6k' + 3 = 2n + 1$

$6k' + 2 = 2n$

$\boxed{n = 3k' + 1}$

$3p'$

$3k = 2n + 1 + p$

$3k = 2n + 1$

$3k = 2n + 1 + p$

$3k = 3p' + 4n'$

$4n' = 0 \pmod 3$

$n' = 3n''$

$a^{3k'+1} b^{2k+1} \to a^3 S b^2 \mid a \mid b$

$3k' = 2n + 3p + x$

$2n = 0 \pmod 3$

$n = 0 \pmod 3$

$n = 3n'$

$3k = 6n' + 3p'$

$k = 2n' + p'$

$L = \{a^n b^k \mid 3n > 4k + 3\}$

$3n = 4k + 3 + p + 1 = 4k + 4 + p$

$3n = 4k + 3$

$a^{3n'} b^{2n' + p} \longrightarrow a^3 S b^2$

69

ПИСМЕН ИЗПИТ ЕАИ

Задача 1 Вариант 1

$L=\{a^n b^k \mid 3n+2 > 4k\}$ докажете че езикът е КС.

$L=\{a^n b^k \mid 3n+\cancel{2}^{1} = 4k+p+\cancel{1}^{0}$ за $p \in \mathbb{N}\}$

$=\underbrace{\{a^n b^k \mid 3n+1 = 4k\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^n b^k \mid 3n+\cancel{1} = 4k+p+\cancel{1}$ за $p \in \mathbb{N}\}}_{L_2}$

Ако докажем че L_1 и L_2 са безконтекстни то L е КС защото $\cup$ запазва безконтекстността.

1) Усл. $3n+1=4k$ е еквивалентно на $3n+1=4k$ & $4k \equiv 1 \pmod 3$ нi

което е еквивалентно на $3n+1=4k$ & $k \equiv 1 \pmod 3$ откъдето

ги разкриваме свойте

$L_1 = a^n b^{3k'+1} \mid 3n+1 = 4(3k'+1)\} = \{a^n b^{3k'+1} \mid n = 4k'+1\}$

$=\{a^{4k'+1} b^{3k'+1} \mid k' \in \mathbb{N}\} = \{a\} \circ \underbrace{\{a^{4k'} b^{3k'}_{\mid k' \in \mathbb{N}}\}}_{L'} \circ \{b\}$ които

е безк. Ето граматика за L' която се доказва аналогично на тази за $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$G = \langle \{S\}, \{a,b\}, \{S \to a^4 S b^3 \mid \varepsilon\}, S \rangle \quad L(G)=L$

2) $L_2 = \{a^n b^k \mid 3n = 4k+p$ за $p \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^k \mid 3n \geq 4k\}$

Усл. $3n = 4k+p$ е еквивалентно на $3n = 4k+3p'$ $\cup$ $3n = 4k+3p'+1$

$\cup$ $3n = 4k+3p'+2 \iff \left| \begin{array}{l} 3n = 4k+3p' \\ k \equiv 0 \pmod 3 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} 3n = 4k+3p'+1 \\ k \equiv 2 \pmod 3 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} 3n = 4k+3p'+2 \\ k \equiv 1 \pmod 3 \end{array} \right.$

защото $3n-1$ защото $3n-2$

откъдето $L_2 = \{a^{4k'+p'}b^{3k'} \mid k',p' \in N\} \cup \{a^{4k'+p'+3}b^{3k'+2} \mid k',p' \in N\}$

$\cup \{a^{4k'+p'}b^{3k'+2} \mid p', k' \in N\} = \{a\}^* \circ \{a^{4k'}b^{3k'} \mid k' \in N\} \cup$

$\{a^3\} \circ \{a\}^* \circ L' \cup \{a^2\} \circ \{a\}^* \circ L' \to$ безк. е зиб.

$\Downarrow$

разширение.

за $1^\circ \to \left| \begin{array}{l} 3n = 4k + 3p' \\ k \equiv 0 \pmod 3 \end{array} \right| \to \left| \begin{array}{l} k = 3k' \\ 3n = 12k' + 3p' \,/3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{l} k = 3k' \\ n = 4k' + p' \end{array} \right.$ $k', p' \in N$

$\Rightarrow a^{4k'+p'}b^{3k'} \to a^{p'} \underbrace{a^{4k'}\, b^{3k'}}$

$\to \boxed{aP,\ a^4Sb^3}$

за 2° $\left| \begin{array}{l} 3n = 4k + 3p' + 1 \\ k = 2 \pmod 3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{l} k = 3k' + 2 \\ 3n = 12k' + 8 + 3p' + 1 \,/3 \end{array} \right. \to \begin{array}{l} k = 3k' + 2 \\ n = 4k' + p' + 3 \end{array}$

$\to a^{4k'+p'+3}b^{3k'+2} \to \{a^{p'}\} \circ \{a^3\} \circ \{a^{4k'}b^{3k'}\} \circ \{b^2\}$

$\to aP',\ a^3,\ a^4S''b^3,\ b^2$

за 3° $\left| \begin{array}{l} 3n = 4k + 3p' + 2 \\ k \equiv 1 \pmod 3 \end{array} \right. \to \left| \begin{array}{l} k = 3k' + 1 \\ 3n = 12k' + 4 + 2 + 3p' \end{array} \right. \to \begin{array}{l} k = 3k' + 1 \\ n = 4k' + 2 + p' \end{array}$

$a^2\, a^{p'}\, a^{4k'}\, b^{3k'}\, b \to a^2 / aP''' / a^4S'''b^3 / b$

Зад. 1 Вариант 2

$L = \{a^n b^k \mid 3k > 5n+2\}$

$L = \{a^n b^k \mid 3k = 5n+2+p+1\} = \{a^n b^k \mid 3k = 5n+3+p\}$

$= \underbrace{\{a^n b^k \mid 3k = 5n+3\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^n b^k \mid 3k = 5n+3+p\}}_{L_2}$

$L_1 = \{a^n b^k \mid 3k = 5n+3\}$

$3k = 5n+3$ && $3k = 3 (\mathrm{mod}\ 5)$ или $k = 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

$\Rightarrow k = 5k'+1$ и $3(5k'+1) = 15k' + \cancel{3} = 5n + \cancel{3}$

$5n = 15k'$

$n = 3k'$

$a^{3k'} b^{5k'+1} = a^{3k'} b^{5k'} b$

за L_1 е $a^3 S b^5 \mid \varepsilon \mid b$

$L_2 = \{a^n b^k \mid 3k = 5n+3+p\}$

$3k = 5n+3+p$ е еквивалентно като $3k = 5n+3+3p$

$\cup$ $3k = 5n+3+1+3p$ $\cup$ $3k = 5n+3+2+3p'$

$3k = 5n+3+3p'$

$n = 0 (\mathrm{mod}\ 3)$

$n = 3n'$

$3k = 15n' + 3 + 3p'$

$k = 5n' + 1 + p'$

$a^{3n'} b^{5n'} b\, b^{p'}$

$3k = 5n + 4 + 3p'$

$n = 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

$n = 3n' + 1$

$3k = 15n' + 9 + 3p''$

$k = 5n' + 3 + p''$

$a^{3n'} a\, b^{5n'} b^3 b^{p'}$

$3k = 5n + 5 + 3p''$

$n = 2 (\mathrm{mod}\ 3)$

$n = 3n' + 2$

$3k = 15n' + 15 + 3p$

$k = 5n' + 5 + p'$

$a^{3n'} a^2 b^{5n'} b^5 b^{p'}$

$L_2 = a^3 S'' b^5 \mid \{a\}\{b\}\{b\}^* \mid a^2$ $\quad L = L_1 \cup L_2$

Зад 1 Вариант 3 71

$L=\{a^n b^k \mid 2k < 3n+2\}$

$L=\{a^n b^k \mid 3n+\cancel{2} = 2k + p + \cancel{1} \text{ за } p \in \mathbb{N}\}$

$L = L_1 \cup L_2 = \underbrace{\{3n+1 = 2k\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{3n+\cancel{1} = 2k+p+\cancel{1}\}}_{L_2}$

за $L_1 \Rightarrow 3n+1 = 2k$ е $2k = 1 \pmod 3$ или $k = 2 \pmod 3$

$k = 3k' + 2$

$3n+1 = 6k'+4$

$3n = 6k'+3$

$n = 2k'+1$

$a^{2k'+1} b^{3k'+2}$

Граматика за L_1 е:

$a^2 S b^3 \mid a \mid b^2 \mid \varepsilon$

за $L_2 \to 3n = 2k+p$ е еквивалентно с:

$\begin{cases} 3n = 2k+3p' \\ k \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$ $\cup$ $\begin{cases} 3n = 2k+3p'+1 \\ k = 2 \pmod 3 \end{cases}$ $\cup$ $\begin{cases} 3n = 2k+3p'+2 \\ k = 1 \pmod 3 \end{cases}$

$k = 3k'$

$3n = 6k'+3p'$

$n = 2k'+p'$

$a^{2k'+p'} b^{3k'}$

$k \to a^2 b^3 \mid \varepsilon$

$A \to \{a\}^*$

$K \cdot A$

$k = 3k'+4$

$3n = 6k'+8+3p'+1$

$n = 2k'+3+p'$

$a^{2k'+3+p'} b^{3k'+4}$

$k' \to a^2 k' b^3 \mid \varepsilon$

$\cup$

a^3

b^4

$\{a\}^*$

$k = 3k'+2$

$3n = 6k'+6+3p'$

$n = 2k'+2+p'$

$a^{2k'+2+p'} b^{3k''+2}$

$k'' \to a^2 k'' b^3 \mid \varepsilon$

$\cup$

a^2

$\{a^*\}$

b^2

$\cup\ L_1$

Зад. 2 П.И.2-част Вариант 1
Нека $0 \in \Sigma$ и $M \subseteq \Sigma^*$ е произволен КС език. докажете че езикът

$$L=\{0x_1^k 0x_2^k 0 \dots 0x_n^k 0 \mid x_1, x_2, \dots x_n \in M \ \& \ n \equiv k \pmod 3) \ \& \ k \in \{2,3\}$$

също е КС.

Решение

$$L=\underbrace{\{0x_1^2 0x_2^2 0 \dots 0x_n^2 0 \mid x_1 \dots x_n \in M \ \& \ n \equiv 2 \pmod 3)\}}_{L_2} \cup$$

$$\cup \underbrace{\{0x_1^3 0x_2^3 0 \dots 0x_n^3 0 \mid x_1 \dots x_n \in M \ \& \ n \equiv 0 \pmod 3)\}}_{L_3}$$

Ще докажем че L_2 е КС и L_3 е аналогично КС.

→ знаем че $\{\underbrace{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \equiv 2 \pmod 3}_{R_2}\}$ е регулярен, след безконт.

а оттам $M \cap R_2$ също е КС.
Нека $G_2 = < V_2, \Sigma, R_2, S_2 >$ е в НФЧ и $L(G_2) = M \cap R_2$
строим $G = < V, \Sigma, R, S >$ където

$V = V_2$ $S = S_2$ $R_2 = \{A \to BC \mid A \to BC \in R_2\}$ (от НФЧ) $\cup \{S \to \varepsilon \mid S_2 \to \varepsilon \in R_2\}$ (е рег.)

$\cup \{A \to 0xx \mid A \to x \in R_2\}$ (безкг рег. / НФЧ)

Ясно е че $A \overset{1}{\underset{G}{\Rightarrow}} 0xx \Longleftrightarrow A \overset{1}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} x$ оттам лесно се доказва че $\forall \alpha = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$

$$S_2 \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} \alpha \Longleftrightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} 0x_1^2 0x_2^2 \dots 0x_n^2$$

⇒ след $L(G) = \{0x_1^2 0x_2^2 \dots 0x_n^2 \mid x_1, \dots x_n \in M \ \& \ n \equiv 2 \pmod 3$
забелязваме че $L_2 = L(G) \cdot \{0\}$ — КС.Е.

Зад. 2 ПИ-2-част вариант 2
Нека $0 \in \Sigma$ и $L \subseteq \Sigma^*$ е произволен КСЕ. докажете че езикът

$M = \{0^k x_1 0^{2k} x_2 0^{2k} \dots 0^{2k} x_n 0^k \mid x_1 x_2 \dots x_n \in L$ & $n \equiv k \pmod 3$

& $k \in \{1,2\}\}$ също е КС

$M = M_1 \cup M_2$ където $M_1 = \{0^1 x_1 0^2 x_2 0^2 \dots 0^2 x_n 0^1 \mid n \equiv 1 \pmod 3\}$

и $M_2 = \{0^2 x_1 0^4 x_2 0^4 \dots 0^4 x_n 0^2 \mid x_1 \dots x_n \in L$ & $n \equiv 2 \pmod 3\}\}$

→ знаем че $\overbrace{\{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \equiv 1 \pmod 3\}}^{R_1}$ е рег. $\Rightarrow$ е КС от твърдение.
→ оттук $L \cap R_1$ е регулярен. КСЕ.

→ $G_1 = \langle V_1, \Sigma, R, S_1 \rangle$ е в НФЧ и $L(M_1) = L \cap R_1$

→ строим $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ където

$V = V_1$, $R = R_1$, $S = S_1$

$R_1 = \{A \to BC \mid A \overset{\text{нфч}}{\to} BC \in R_1\} \cup \{S \underset{G}{\to} \varepsilon \mid S_1 \underset{G_1}{\to} \varepsilon \in R_1\}$

$\cup \{A \to 0x00 \mid A \to 0 \in R_1\}$

ясно е че $A \overset{1}{\underset{G}{\Rightarrow}} 0x00 \overset{1}{\underset{G_1}{\Longleftrightarrow}} 0$

$\Rightarrow \forall \alpha = x_1 x_2 \dots x_n \in L \quad S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} \alpha \Longleftrightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} 0 x_1 0^2 x_2 0^2 \dots 0^2 x_n 0$

$\Rightarrow L(G) = 0x_1 0^2 x_2 0^2 \dots x_n 0 \mid x_1 \dots x_n \in L$ & $n \equiv 1 \pmod 3\}$.

(74)

П.И → 1-част Вариант 1 Зад 1

За думи $v, w \in \Sigma^*$ ще казваме че v се намира в w на позиция $i \in \mathbb{N}$ ако $w = xvy$ за $x, y \in \Sigma^*$, $|x| = i$

Зад. 1 Нека $\Sigma = \{a, b\}$. докажете че L е регул:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid abbb \text{ се намира в } w \text{ на нечетен брой позиции}\}$$

Решение

→ Нека $R = \{a,b\}^* \circ \{abbb\} \circ \{a,b\}^*$

→ R е регулярен тъй като операциите : $*$, $\circ$, $|$ запазват регулярност

→ искаме да покажем че : $L = (R \circ \{abbb\} \circ R \circ \{abbb\})^* \circ R \circ \{abbb\} \circ R$

$=: M$

доказателство

$(\subseteq)$ Нека $\alpha \in L$ т.е $\alpha = \alpha_1 abbb \alpha_2 abbb \ldots \alpha_{2k} abbb \alpha_{2k+1} abbb \alpha_{2k+2}$

където за $\forall i \in \{1, \ldots 2k+2\}$ е изпълнено че α_i не съдържа 'abbb' като поддума.
оттам $\forall i \in \{1, \ldots 2k+2\} : \alpha_i \in R$, следователно $\alpha_1 abbb \alpha_2 abbb \ldots$
$\alpha_{2k} abbb \in (R \circ \{abbb\} \circ R \circ \{abbb\})^*$ и $\alpha_{2k+1} abbb \alpha_{2k+2}$
$\in R \circ \{abbb\} \circ R$ т.е $\alpha \in M$.

(2) Нека $\alpha \in M$ т.е $\alpha = \alpha_1 abbb \alpha_2 abbb \ldots \alpha_{2k} abbb \alpha_{2k+1} abbb \alpha_{2k+2}$
и за $\forall i \in \{1, \ldots 2k+2\}$ $\alpha_i \in R$. Искаме да покажем че
~~за $\forall i \in \{1 \ldots 2k+1\}$~~ бројат срещания на 'abbb' в α е нечетн
забелязваме че за $\forall i \in \{1, 2, \ldots 2k+1\}$, α_i abbb съдържа 'abbb'
точно веднъж защото α_i не съдържа 'abbb', а няма как срещане
на 'abbb' да включва букви от α_i. Аналогично за това
че за $\forall i \in \{2, \ldots 2k+2\}$ abbb α_i съдържа 'abbb' точно веднъж.
оттам α съдържа неч. брой срещания на 'abbb' т.е $\alpha \in L$. $\Rightarrow L = M$

(75)

Зад. 2 Вариант 1

Нека $\Sigma = \{0,1\}$ и M е рег. език над Σ. докажете че L също е рег.

$L = \{ w \in \Sigma^* \mid \forall$ позиции на които в w се намират думи $v \in M$, са четни$\}$

Нека докажем че $\bar{M}$ е рег и оттам $\Rightarrow$ че M е рег, тъй като операцията допълнение запазва рег.

$\bar{M} = \{ w \in \Sigma \mid (\exists i \in \mathbb{N})$ т.че на нея се намира дума $v \in L$ и i е нечетно$\}$

Лесно се съобразява че $\bar{M} = \{a,b\} \circ (\{a,b\} \circ \{a,b\})^* \circ L \circ \{a,b\}^*$ рег. език

// а вместо 0 и b вместо 1

Оттук $\bar{M}$ е рег. $\Rightarrow$ M е рег.

(76)

Зад 3 Вариант 1

Нека $\Sigma = \{a,b\}$. докажете че $\exists$ рег. език M над Σ т.ч езикът:

$L = \{ \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ \forall i \in \{1, \dots n\}$
$\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^* \ \& \ \beta_i \alpha_{n-i+1} \in M \}$

Не е регулярен.

Нека $M = \{ba\}$. ще докажем че при този избор на M, L не е рег.

Нека $p>0$ е произволно. $\alpha = a^p b^p \in L$ и

$\alpha = xyz$ за x, y, z т.ч. $|y|>0$ и $|xy| \leq p$.

Нека $i=0$. Ясно е че за $\forall$ дума $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n$ от L е изпълнено че $|\alpha|_a = |\alpha|_b = n$ защото за

$\forall i \in \{1, \ldots n\}$ $\beta_i \alpha_{n-i+1} = ba$.

Но $xy^0z = a^{p-|y|} b^p \notin L$ защото $|y|>0$

следователно от л. покачването L не е рег. т.е

$\exists$ н-рег. за които L не е рег.

(47) П.И 140ст. Вариант 2

Зад. 1 Нека $\Sigma = \{0,1\}$ докажете че L е рег.

$L = \{w \in \Sigma^* \mid 0011$ се намира в w на четен брой позиции$\}$

решение.

$\to$ Нека $R = \overline{0011} \circ \{01\}^* \circ \overline{0011} \circ \{01\}^*$

R е рег защото $*, \circ, -$ запазват регулярност.

$\to$ искаме да покажем че $L = \underbrace{(0011 \circ R \circ 0011 \circ R)^* \circ 0011 \circ R \circ 0011}_{=:M}$

Д-во.

($\subseteq$) Нека $\alpha \in L$ т.е $0011\alpha_1 0011 \alpha_2 0011 \ldots \alpha_{2k} 0011 \alpha_{2k+1} 0011 \alpha_{2k+2}$

където за $\forall i \in \{1, \ldots 2k+1\}$ е изпълнено че α_i не съдържа 0011 като поддума. Оттам $\forall i \in \{1, \ldots 2k+1\}$: $\alpha_i \in R$

$\Rightarrow 0011\alpha_1 0011 \alpha_2 \ldots 0011\alpha_{2k} \in (0011 \circ R \circ 0011 \circ R)^*$ и $0011\alpha_{2k+1} \in 0011 \circ R \circ 0011$

(2) Нека $\alpha \in M$ т.че $\alpha = 0011\alpha_1 0011\alpha_2 \dots 0011\alpha_{2k}\, 0011\alpha_{2k+1}$ и за $\forall i \in \{1, \dots 2k+1\}$ $\alpha_i \in R$.

Искаме да покажем че броят срещания на 0011 в α е четен. Забелязваме че за $\forall i \in \{1, 2k\}$ $0011\alpha_i 0011$ съдържа 0011 точно 2 пъти

Аналогично за $\forall i \in \{2 \dots 2k+1\}$ $0011\alpha_i 0011$ съдържа 0011 точно 2 пъти.

Оттам α съдържа четен брой срещания на 0011 т.е $\alpha \in L \Rightarrow L = M \Rightarrow L$ е рег.

(78) Зад 2 Вариант 2

Нека $\Sigma = \{a, b\}$ и M е рег. език над Σ. докажете че L е също рег.

$L = \{w \in \Sigma^* \mid \forall$ думи v, които се намират в w на нечетни позиции, принадлежат на $M\}$

Нека докажем че $\overline{M}$ е рег. и оттам $\Rightarrow M$ е рег.

$\overline{M} = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists i \in N)$ т.ч на не S се намира дума $v \in L$ и i е четна$\}$

$\overline{M} = \{a, b\}^* \circ L \circ (\{a, b\} \circ \{a, b\})^* \circ L \circ \{a, b\}^* \Rightarrow$ рег. език.

$\Rightarrow M$ е рег.

(49)

Зад 3 Вариант 2

Нека $\Sigma=\{0,1\}$. докажете че $\exists$ рег. език L над Σ т.ч езикът

$M=\{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ \forall i \in \{1,\dots n\} (\alpha_i \beta_i \in \Sigma^* \ \& \ \alpha_{n-i+1}\beta_i$

не е рег.

Нека $L=\{ab\}$ ще докажем че при този избор на L M не е рег.

Нека $p>0$ е произволно $\alpha=a^p b^p \in M$ и $\alpha=xyz$ за x,y,z т.ч $|y|>0$ $|xy|\leq p$.

Ясно е че за $\forall$ дума $\alpha=\alpha_1\dots\alpha_n \beta_1\dots\beta_n$ от M е изпълнено че $|\alpha|_a=|\beta|_b=n$ защото за $\forall i \in \{1,\dots$

$\alpha_{n-i+1}\beta_i = ab$ // $a-1$ $b-0$

при $i=0$ $xy^0z=a^{p-|y|}b^p \notin M$ защото $|y|>0$

$\Rightarrow \exists$ рег L за който M не е рег.

Вариант 2 зад 1

(80) $L = \{a^n b^k \mid 3k > 5n+2\}$

$3k = 5n+2+p-1$

$3k = 5n+1+p$

$3k = 5n+1$ $\cup$ $3k+\cancel{1} = 5n+p+\cancel{1}$

$3k \equiv 1 \pmod 5$

$k \equiv 2 \pmod 5$

$k = 5k'+2$

$15k'+6 = 5n+1$

$15k'+5 = 5n \;/5$

$\boxed{k'+1 = n}$

$a^{k'+1} b^{5k'+2}$

$aSb^5 \mid a \mid b^2$

$3k = 5n+3p$

$5n \equiv 0 \pmod 3$

$n \equiv 0 \pmod 3$

$n = 3n'$

$3k = 15n'+3p$

$k = 5n'+p$

$a^{3n'} b^{5n'+p}$

$a^3Sb^5 \mid b^*$

$3k = 5n+3p+1$

$5n \equiv 2 \pmod 3$

$n \equiv 1 \pmod 3$

$n = 3n'+1$

$3k = 15n'+5+3p+1$

$3k = 15n'+6+3p$

$k = 5n'+2+p$

$a^{3n'+1} b^{5n'+2+p}$

$a^3Sb^5 \mid a \mid b^2 \mid b^*$

$3k = 5n+3p+2$

$5n \equiv 1 \pmod 3$

$n \equiv 2 \pmod 3$

$n = 3n'+2$

$3k = 15n'+12+3p$

$k = 5n'+4+p$

$a^{3n'+2} b^{5n'+4+p}$

$a^3Sb^5 \mid a^2 \mid b^4 \mid b^* + p$

$6 \cdot /4$
$9 : 4 = 2$

(81) Варианты Зад 1

$L = \{a^n b^k \mid 3n > 4k+3\}$

$3n = 4k + 3 + p - 2$

$3n = 4k + 1 + p$

$\boxed{3n = 4k+1}$

$3n \equiv 1 \pmod 4$

$n \equiv 3 \pmod 4$

$\boxed{n = 4n' + 3}$

$12n' + 9 = 4k + 1$

$12n' + 8 = 4k$

$\boxed{k = 2n' + 2}$

$a^{4n'+3} b^{2n'+2}$

$a^4 S b^2 \mid a^3 \mid b^2$

$3n + 1 = 4k + 1 + p$

$\boxed{3n = 4k + p}$

$\cup$

$3n = 4k + 3p$

$4k \equiv 0 \pmod 3$

$k \equiv 0 \pmod 3$ $\boxed{k = 3k'}$

$3n = 12k' + 3p$

$\boxed{n = 4k' + p}$

$a^{4k'+p} b^{3k'}$

$a^4 S b^3 \mid a^*$

$3n = 4k + 3p + 1$

$4k \equiv 2 \pmod 3$

$k \equiv 2 \pmod 3$

$k = 3k' + 2$

$3n = 12k' + 8 + 3p + 1$

$n = 4k' + 3 + p$

$a^{4k'+3+p} b^{3k'+2}$

$a^4 S b^3 \mid a^3 \mid a^* \mid b^2$

$3n = 4k + 3p + 2$

$4k \equiv 1 \pmod 3$

$k = 3k' + 1$

$3n = 12k' + 6 + 3p$

$n = 4k' + 2 + p$

$a^{4k'+2+p} b^{3k'+1}$

$a^4 S b^3 \mid a^2 \mid b \mid a^*$