(25) $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ докажете че $L(\Gamma_1) = L$

$\Rightarrow$
Нека първо $w \in \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Нека $k \geq 0$ е т.е

$w = a^k b^k = \underbrace{a \dots a}_{k} \underbrace{b \dots b}_{k}$, тогава:

$S \to aSb \to aaSbb \to \dots \to \underbrace{a \dots a}_{k} S \underbrace{b \dots b}_{k} \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{a \dots a}_{k} \underbrace{b \dots b}_{k}$

$\to a^k b^k$ е извод в Γ_1, откъдето $w \in L(\Gamma_1)$

Така $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq L(\Gamma_1)$

$\Leftarrow$ Нека сега $w \in L(\Gamma_1)$ е извод от Γ_1 чрез
$S \to \alpha_1 \to \dots \to \alpha_n \to w$

да забележим че: 1) в w няма нетерминали
2) в $S, \alpha_1 \dots \alpha_n$ има поне 1 терминал

1) правилата на Γ_1 ($S \to \varepsilon$ и $S \to aSB$) или намаляват с 1 броят на нетерминалите при замяна $S \to \varepsilon$ или или запазват броя на нетерминалите $S \to aSB$
$\Rightarrow$ в $S, \alpha_1 \dots \alpha_n$ има по точно 1 нетерминал (S)
като замените по тях могат да се осъществят единствено с помощта на правилото $S \to aSB$. Понеже α_n има S но w няма то замяната $\alpha_n \to w$ може да стане само с помощта на правилото $S \to \varepsilon$. Така изводът на w е:
$S \to aSB \to \dots \xrightarrow{\varepsilon} a^k b^k$
за подходящо $k \geq 0$ тогава $L(\Gamma_1) \subseteq L$.

(26)

Намерете КСГ Г с език = на $L_1 = \{ a^{2n+1} b^{3n+4} \mid n \geq 0 \}$

Нека $w \in L_1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ т.е $w = a^{2n+1} b^{3n+4}$

Ако $n = 0$ то $w = ab^4$

Ако $n > 0$ то $k \geq 0$ $(k = n - 1 \geq 0$.

Тогава $w = a^{2n+1} b^{3n+4} = a^{2(k+1)+1} b^{3(k+1)+4}$

$= a^{2+(2k+1)} b^{(3k+4)+3}$

$= a^2 a^{2k+1} b^{3k+4} b^3$

$= a^2 u b^3$ където $u = a^{2k+1} b^{3k+4} \in L_1$

Обратното ако $u \in L_1$ то $a^2 u b^3$ отново е от L_1

Следователно $w \in L_1 \Leftrightarrow w = ab^4$ или $\exists u (u \in L_1 \ \& \ w = a^2 u b^3)$

(27)

Конкатенация Намерете КСГ език = на $L_2 = \{ a^{2n} b^{n+2m} c^{3m} \mid n, m \geq 0 \}$

$L_2 = \{ a^{2n} b^n \mid n \geq 0 \} \cdot \{ b^{2m} c^{3m} \mid m \geq 0 \} = L' \cdot L''$

L' се поражда от КСГ с начален символ S' и правила

$S' \to \varepsilon \mid a^2 S' b$

а L^2 : $S'' \to \varepsilon \mid b^2 S'' c^3$

Тогава тяхната конкатенация:

$S \to S' S''$

$S' \to \varepsilon \mid a^2 S' b$

$S'' \to \varepsilon \mid b^2 S'' c^3$

(28) $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \le n \le m\}$

Тук за разлика от L_2 (зад. 27) n и m не са независими

Трябва $m \geq n$.

Можеме $n, m \in \mathbb{N}$ то $n \le m$ е еквивалентно на

това да има $p \in \mathbb{N}$ т.ч. $\underline{m = n + p}$ като при това

n и p не са вече зависими.

$L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \le n \le m\}$

$= \{a^n b^m \mid n \geq 0 \ \& \ \exists p\, (p \geq 0 \ \& \ m = n + p)\}$

$= \{a^n b^{n+p} \mid n, p \geq 0\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cdot \{b^p \mid p \geq 0\}$

$= L_1 \cdot L_1''$

за L_1 $\quad S' \to a S b \mid \varepsilon$

за L_2 $\quad S'' \to b S'' \mid \varepsilon$

$S \to S' S''$

(29) $L = \{a^{2n} b^k a^{3k} b^n \mid n, k \geq 0\}$

$K = \{b^k a^{3k} \mid k \geq 0\}$ $\qquad K \to \varepsilon \mid bKa^3$

$N = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$ $\qquad N \to \varepsilon \mid a^2Nb$

$S \to K \mid a^2 \cancel{N} S b$

започване с произволна дума от K

около която можем да добавим а-та и б-та в 2:1

$\boxed{a^2 b S a^3 b}$

(30) $L = \{a^{2n} b^{k+1} a^{3k} b^{n+2} \mid n, k \geq 0\}$

$\underline{a^{2n}}\ \underline{b^{k+1} a^{3k}}\ \underline{b^{n+2}}$

$N \to \varepsilon \mid a^2Nb \mid Nb^2$

$K \to \cancel{\varepsilon} \mid bKa^3 \mid b$

$S \to a^2Sb \mid Kb^2$

31) $S = \{a^{2k+3n+5} b^{3k+2l+1} a^{2m+l+5} b^{2j+7n} a^{5j+2} \mid j, k, l, m, n \in N\}$

$$a^{2k+3n+5} b^{3k+2l+1} a^{2m+l+5} b^{2j+7n} a^{5j+2}$$

$K \quad M \quad L \quad Y \quad N$

$$a^{3n} a^{2k+5} b^{3k} b^{2l+1} a^{2m+5} a^{l} b^{7n} b^{2j} a^{5j+2}$$

$K \quad L \quad N$

езикът

$N \to a^3 N b^7$

$K \to a^2 K b^3 \mid a^5$ ✓

$L = b^2 L a \mid b$

$M \to a^2 M \mid a^5$ ✓

$Y \to b^2 Y a^5 \mid a^2$ ✓

L е влагането на M в $2^{l+1} a^l$

$L \to bM \mid b^2 L a$

$M \to a^2 M \mid a^5$

конкатенирани

N е влагането на (K L) M

$N \to KL \mid a^3 N b^7$

$K \to$

$L \to$

$M \to$

На края $S \to N.Y$

N

K

(52) $S=\{b^{5m+1}a^{2m+7k}b^{2j+n+4}a^{3l+2n+2}b^{2l+3k+4} \mid j,k,l,m,n\in\mathbb{N}\}$

$$\underbrace{b^{5m+1}a^{2m+7k}}_{M,\ K}\ \underbrace{b^{2j}}_{J}\,b^{+n+4}\,a^{3l+\underbrace{2n}_{N}+2}\,b^{\underbrace{2l}_{L}+3k+4}$$

$$\underbrace{b^{5m+1}\ a^{2m}}_{M}\ \underbrace{a^{7k}\ \underbrace{b^{2j+4}}_{J}\ \underbrace{b^{n}\ a^{2n+2}}_{N}\ \underbrace{a^{3l}\ b^{2l}}_{L}\ b^{3k+4}}_{K}$$

$S \to MK$ ✓

$M \to b^5 M a^2 \mid b$ ✓

$J \to b^2 J \mid b^4$ ✓

$N \to bNa^2 \mid a^2$ ✓

$L \to a^3 L b^2 \mid \varepsilon$ ✓

$K \to a^7 K b^3 \mid JNLb^4$

Няма значение къде ги добавиш константите

4 2 1

33) Намерете КСГ за езика $L = \{a^n b^m c^k \mid m \leq n + k\}$

Идея -> m може да се представи като сума на 2 естествени числа m' и m'' т.е. $m' \leq n$ и $m'' \leq k$

$\Rightarrow L = a^n b^{m'+m''} c^k \mid m' \leq n \ \& \ m'' \leq k\}$

$= \{a^n b^{m'} \mid m' \leq n\} \cdot \{b^{m''} c^k \mid m'' \leq k\}$

$P = aPb \mid \varepsilon \mid a \mid N$ $\qquad a^n b^{m'} b^{m''} c^k$

$Q = bQc \mid \varepsilon \mid c$ $\qquad$ -> защото $P = a^* \{a^n b^n / n \geq 0\}$

-> $Q = \{b^k c^k / k \geq 0\} \cdot c^*$

$S = PQ$

док $\Leftarrow$) Нека $m', m'' \in \mathbb{N}$ са т.ч. $m = m' + m''$, $m' \leq n$ и $m'' \leq k$.

Тогава $m = m' + m'' \leq n + k$

$\Rightarrow$) Нека обратното $m \leq n + k$ е в сила. ще разгледаме 2сл.

1) $m \leq n$ & $0 \leq k$ (или $m' = m$ & $m'' = 0$)

Ако пък $m \leq k$ то $m = 0 + m$ като $0 \leq n$ & $m \leq k$ ($m' = 0$ $m'' = m$)

$\Rightarrow \exists m', m''$ $m = m' + m''$.

2) Не е вярно че $m \leq n$ или $m \leq k \Rightarrow m > n$ & $m > k$

$m = n + (m - n)$ като $n \leq n$ $\quad \underline{m - n} \leq k$

естест. число $\quad n < m$

$\Rightarrow \exists m' m''$ $m = m' + m''$

или

$S = N \cdot K$ $\qquad K = QC$

$N = AP$ // поражда $a^n b^m \mid m \leq n$ $\qquad C \to \varepsilon \mid Cc$ // поражда c^*

$A \to \varepsilon \mid aA$ // поражда a^* $\qquad Q \to \varepsilon \mid bQc$ // $b^k c^k \mid k \geq 0$

$P \to \varepsilon \mid aPb$ // поражда $a^n b^n \mid n \geq 0$

(34) $L = \{a^n b^m / n \leq m \leq 2n\}$

$n \leq m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \ (m = n+p)$

В сила са следните еквивалентности.

$w \in L \Leftrightarrow \exists n,m \ (w = a^n b^m \ \& \ n \leq m \leq 2n)$

$\Leftrightarrow \exists n,m,p \ (w = a^n b^m \ \& \ m = n+p \ \& \ n+p \leq 2n)$

$\Leftrightarrow \exists n,p \ (w = a^n b^{n+p} \ \& \ p \leq n)$

$\Leftrightarrow \exists n,p,q \ (w = a^n b^{n+p} \ \& \ n = p+q)$

$\Leftrightarrow \exists q,p \ (w = a^{p+q} b^{2p+q})$

$L = \{a^{p+q} b^{2p+q} \mid p,q \geq 0\}$

Тогава вмъкване на $a^p b^{2p}$ в q

$S \to P \mid aSb$

$P \to \varepsilon \mid aPb^2$

(35) $\{ L = a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0 \ \& \ 2m = n+k \}$

$L = \{a^n b^m c^k \mid 2m = n+k \ \& \ n$ и $k =$ четни$\} \cup \{$ нечетни $\}$

$= L_0 \cup L_1$

$L_0 = \{a^n b^m c^k \mid 2m = n+k$ и $\exists\, n_1, k_1 \ (n = 2n_1 \quad k = 2k_1)\}$

$= \{a^{2n_1} b^m c^{2k_1} \mid 2m = 2n_1 + 2k_1\}$ $\underline{\underline{m = n_1 + k_1}}$

$= \{a^{2n_1} b^{n_1} b^{k_1} c^{2k_1} \mid n_1, k_1 \geq 0\}$

$N \to a^2 N b \mid \varepsilon$

$K \to b K c^2 \mid \varepsilon$

$S_1 = N \cdot K$

$L_1 = \{a^n b^m c^k \mid 2m = n+k$ и $\exists\, n_1, k_1 \ (n = 2n_1 + 1 \ \& \ k = 2k_1 + 1)\}$

$= \{a^{2n_1+1} b^m c^{2k_1+1} \mid 2m = 2n_1 + 1 + 2k_1 + 1\}$

$= \{a^{2n_1+1} b^{n_1 + k_1 + 1} c^{2k+1} \mid n_1, k_1 \geq 0\}$

$N_1 \to a^2 N b \mid a \mid \varepsilon$

$K_1 \to b K c^2 \mid bc$

$S_2 \to N_1 K_1$

$S \to S_1 \cup S_2$

(36) $L = \{ a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0 \;\&\; 2m = 2n + k \}$

$L_0 = \{ a^n b^m c^k \mid \exists n_1, k_1 \; (n = n_1, k = 2k_1) \}$ четни

$= \{ a^{n_1} b^m c^{2k_1} \mid 2m = 2 \cdot 2n_1 + 2k_1 \}$

$= \{ a^{2n_1} b^{n_1 + k_1} c^{2k_1} \mid n_1, k_1 \geq 0 \}$

$N \to aNb \mid \varepsilon$

$K \to bKc^2 \mid \varepsilon$ ✓

$S \to N \cdot K$

нечетни ?

$L_1 = \{ a^n b^m c^k \mid n = n_1 + \frac{1}{2},\; k = 2k_1 + 1 \}$

$\{ a^n b^m c^k \mid 2m = 2n_1 + 1 + 2k_1 + 1 \}$

$= \{ a^{n_1 + \frac{1}{2}} b^m c^{2k_1 + 1} \mid 2m = 2n_1 + 1 + 2k_1 + 1 \}$

$= \{ a^{n_1 + \frac{1}{2}} b^{n_1 + k_1 + 1} c^{2k_1 + 1} \mid n_1, k_1 \geq 0 \}$
?

(37) $L = \{w \# u \mid w, u \in \{0,1\}^* \;\&\; w^{R\,(\text{reversed})}$ е поддума на $u\}$

w^R е поддума на u ако $\exists$ думи $y_1\, y_2 \in \{0,1\}^*$ т.ч. $u = y_1 w^R y_2$

$\#$ е символ различен от $\{0,1\}^*$

$\forall$ дума от L се представя като $w \# y_1 w^R y_2$

идеята е да представим тези думи като конкатенация на:

- вмъкването на $\#\Sigma^*$ (отговаря за $\# y_1$) в езика $\{w w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ м/у w и w^R

оттук получаваме КСГ за $w \# v w^R$

- Σ^* се поражда от КСГ с начален нетерминал T и правила

$T \to \varepsilon \mid 0T \mid 1T$

т.че $L = \{w \# v w^R \mid w, v \in \{0,1\}^*\} \cdot \Sigma^*$

следователно за $\forall$ думи $\lambda \in \{0,1\}^*$ е в сила че

$\lambda \in N \Leftrightarrow \lambda = \varepsilon \cdot \varepsilon^R = \varepsilon \;\vee\; \lambda = 0 w w^R 0 \;\vee\; 1 w w^R 1$

за някое думи w.

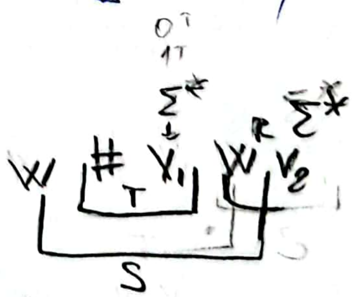
$\Leftrightarrow \lambda = \varepsilon \;\vee\; \lambda = 0u0 \;\vee\; \lambda = 1u1 \;/ u \in N$

$N \to \varepsilon \mid 0N0 \mid 1N1$

$S \to \#T \mid 0S0 \mid 1S1$

$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

$L = ST$



$T \to \varepsilon \mid 0T \mid 1T$ защото $\{0,1\}^*$

$\underbrace{w\, w^R}\, y_2 \Sigma^*$

$S \to \#T \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S1$?

(38) $\{L = a^n b^m c^p d^q \mid n+p = m+q\}$

да забележим че условието $n+p=m+q$ е еквивалентно на $n-m=q-p$

проблемът е че $n-m$ може да е ≥ 0 или ≤ 0

за да опишем и двата случая ще разделим L на 2 части

$$L = \{a^n b^m c^p d^q \mid \underbrace{n-m = q-p}_{=r \geq 0}\} \cup \{a^n b^m c^p d^q \mid m-n = p-q = r \geq 0\}$$

$$= L_1 \cup L_2$$

$$L_1 = \{a^{m+r} b^m c^p d^{p+r} \mid m, p, r \geq 0\}$$

$$= \{a^r a^m b^m c^p d^p d^r\}$$

$M_1 \to aM_1b \mid \varepsilon$

$P_1 \to cP_1d \mid \varepsilon$

$R_1 \to aR_1d \mid MP$

$$L_2 = \{a^n b^{n+r} c^{q+r} d^q \mid n, r, q \geq 0\}$$

$N \to aNb \mid \varepsilon$

$R_2 \to bR_2c \mid \varepsilon$

$Q \to cQd \mid \varepsilon$

$S_2 \to NR_2Q$

$L = R_1 \mid S_2$

(39) докажете че $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не е БКЕ

Нека p е произволно естествено число.
Нека $w = a^p b^p c^p$. Тогава $w \in L$ и $|w| \geq p$.
Нека $w = xyuvz$ и $yv \neq \varepsilon$ и $|yuv| \leq p$
възможни са следните случаи:

$a \dots a b \dots b c \dots c$

в. y-та участват поне 2 символи (различни) или в v.

пример $a \dots \underbrace{a b}_{y} \dots b c \dots c$

за $i = 2$ $w_2 = a \dots \underline{ab\, ab} \dots c \dots c$

имаме a ??? след b-та противоречие, с $a^4 b^4 c^4$

$\Rightarrow w_2 \notin L$

2. И символи в y и в v са еднакви.

$a \dots \underbrace{a}_{y} b \dots b \underbrace{c}_{v} \dots c$ това означава че поне един символ не $\notin$ в y ??? и в v.

2.1 случай: a не участва нито в y нито в v
$|yv|_a = 0$

Тогава $|w_i|_a = |x \overbrace{y \dots y}^{i} u \overbrace{v \dots v}^{i} z|_a = |xyuvz|_a + (i-1)|yv|_a$
$= |w|_a = p$ но $|yv| \neq 0 \Rightarrow |yv|_b > 0$ или $|yv|_c > 0$
$\Rightarrow |w_2|_b = |w|_b + |yv|_b$ или $|w_2|_c = |w|_c + |yv|_c \Rightarrow$

$\Rightarrow |w_2|_b > \underline{|w|_b = p}$ или $|w_2|_c > |w|_c - p$

така $|w_2|_b > |w_2|_a$ или $|w_2|_c > |w_2|_a$

$\Rightarrow w_2 \notin L$

това е същото както аз го напревз

$i = 2$ $aaa\underbrace{bbb\ bbb}_{y^2}$

$|b| > |a|$

2 случай

b не участва нито в y нито в v

$|yv|_b = 0$

$w = a^p b^p c^p = xyuvz$

$w^i = xy^i u v^i z$

$|w_i|_b = |xyuvz|_b + (i-1)\overbrace{|yv|_b}^{0} = p$

$|w_2|_a = |w|_a + |yv|_a$ или $|w_2|_c = |w|_c + |yv|_c$

$|w_2|_a > |w|_a$ или $|w_2|_c > |w|_c$

$|w_2|_a > |w_2|_b$ или $|w_2|_c > |w_2|_b$

3 случай $|yv|_c = 0$

40 Докажете, че L е не БКЕ

$L = \{a^n b^m c^k \mid n < m < k\}$

→ Нека p е произв. естест. число.

→ Нека $w = a^p b^{p+1} c^{p+2}$

→ Ясно е че $|w| = 3p + 3 \geq p$

→ Нека $xyuvz$ са т.ч. $w = xyuvz$ $|yzu| \leq p$ $|yu| > 0$

aaa bbbb ccccc

1. случай поне едно от y или u има $2 \neq$ типове от симв.

Пример u има b-c

но $w_2 = a \dots a b \dots b\underline{cb}c \dots c \dots c$.

c преди b-та $w_2 \notin L$

2 сл. $\forall$ символи в y са еднакви и в u са еднакви

2.1 сл. a не участва в $|yu|$

$|yu|_a = 0$

$|w_i|_a = |xy^i u^i vz|_a + (i-1)|yu|_a = |xyuvz|_a = |w|_a = p$

$\therefore |yu|_b > 0$ или $|yu|_c > 0$

похоже yu

Ако $|yu|_b > 0$ то $|w_0|_b = |w|_b - |yu|_b \leq |w|_b - 1$

$a \dots a \underbrace{b \dots b}_{yu} c \dots c$ $= p + 1 - 1 = p = |w|_a$

$\Rightarrow w_0 \notin L$ защото $|w|_a > |w|_b$

2.2 сл. b не участва нито в y нито в u

$\underline{|yu|_b = 0}$

$|xy^iuv^iz|_b = |w|_b = p+1$

но $|yu|_b = 0$

$\Rightarrow$ ~~$|w_2|_2 = |w|_b$ ...~~

$\Rightarrow |w_2|_a = |w|_a + |yu|_a \geq p+1$ защото $|w|_a = p$ и $|yu|_a > 0$

обаче $|w_2|_a \geq p+1 = |w_2|_b$ $w_2 \notin L$

2.3 Сл. за c.

(41) докажете че L не е БКЕ $L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid |w|_0 < |w|_1 < |w|_2\}$

1 сл. $\underline{0 \text{ не участва в } vy.}$

$\underline{\text{понеже } vy \neq \varepsilon \text{ то 1 или 2 участват в него}}$

тогава в $w_0 = uxz$ този символ ще се среща по малко пъти колкото в $w = xyuvz$ докато 0 ще се среща пак толкова пъти.

$|w_0|_0 \nless |w_0|_1$ или $|w_0|_0 \nless |w_0|_2$ или $|w_0|_1 \nless |w_0|_2$

$\Rightarrow w_0 \notin M$

2 случай $\underline{1 \text{ не участва в } vy.}$

$\underline{\text{тогава в } w_2 = uvvxyyz \text{ имаме}}$

$\underline{|w_2|_0 > |w|_0 = p \quad |w_2|_1 = |w|_1 = p+1}$

$|w_2|_0 \nless |w_2|_1 \Rightarrow w_2 \notin M$

3 случай $\underline{2 \text{ не участва в } vy}$

$\underline{|w_2|_2 = |w|_2 = p+2}$

$|w_2|_1 > |w|_1 = p+1 \Rightarrow |w_2|_1 \nless |w_2|$ $\Rightarrow w_2 \notin M$

(42) Докажете че $L = \{a^n b^j a^n b^j \mid n, j \geq 0\}$

Да допуснем че L е БКЕ

Нека $p > 0$ е свидетел за безконтекстността му

Нека $w = a^p b^p a^p b^p$

$w = xyuvz$

Ако в поне едно от v или y има както а-та и b-та то в w_2 ще се увеличава броят на блоковете от а и b.

$$W = a \dots a b \dots \underbrace{b\ a}_{y} \dots a b \dots b$$

$$w_2 = a \dots a b \dots \underline{baba} \dots a b \dots b$$

$$\Rightarrow w_2 \notin L$$

$\Rightarrow$ в v символи са от един и същ тип и в y.

в w_0 ще имаме блок от а-та с дължина p и блок от b-та с дължина p. В същото време ще имаме и блок от а-та ? или блок от b-та с дължина по малка от p. $\Rightarrow w_0 \notin L$

$W = a \dots a b \dots b a \dots a b \dots b$

$W = xyuvz$

$W_0 = xuz$

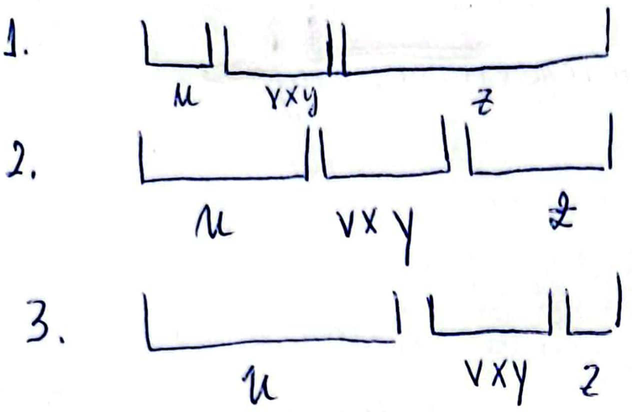
$|w_0|_a = |w|_a = p = |w|_b$

(43) Докажете че не е КСЕ $L = \{mm \mid m \in \{0,1\}^*\}$

Нека $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$. Понеже $w \in L$ $(m = 0^p 1^p)$ и $|w| \geq p$, то $\exists$ такова представяне на $w = xyuvz$ че $|vyz| \leq p$, $|vy| > 0$ и за $\forall i \in N$ $uv^i x y^i z \in L$

Понеже $|vxy| \leq p$ то vxy обхваща най много 2 съседни блока от 0 и 1. Така са 3 възможни случая

$w = \overbrace{0\dots0}^{p}\,\overbrace{1\dots1}^{p}\,\overbrace{0\dots0}^{p}\,\overbrace{1\dots1}^{p}$



1. vxy е в първата половина на w.
Тогава $w_0 = uxz = 0^r1^t0^p1^p$
При това: (1-i)
- $|vy| \le |vxy| \le p$ откъдето $2p - |vy| \geq 2p - p = p$
- $0 < |vy|$ откъдето $2p - |vy| < 2p$

Но $r+t = 2p - |vy|$ откъдето $3p \le |w_0| < 4p$
Сега да допуснем че $w_0 \in L$. Тогава $\exists$ дума $m \in \{0,1\}^*$ т.ч. $w_0 = mm$ така? $\frac{3p}{2} \le |m| < 2p$
$\Rightarrow$ средата на w_0 е някъде във втория блок 0.
Така $m = 0^r1^t0^q$ и $m = 0^{p-q}1^p$ $q \geq 1$ (защото $|m| < 2p$)
Това е невъзможно $w_0 \notin L$

2. В този случай vxy е в средните 2 блока.
$w_0 = 0^p1^r0^t1^p$ като както в 1) $p \le r+t < 2p$
В частност поне едно от r или t не е = на p.
Да допуснем че $w_0 = mm \in L$.
Щом m започва с 0 и свършва 1 то започва с 0^p и завършва с 1^p. Понеже $w_0 = mm$ то $m = 0^p1^p = 0^p1^r = 0^p1^t$

откъдето $r=t=p$ което е противоречие на това че $r+t<2p \Rightarrow w_0 \notin L$

3) vxy е в дясната половина на w,

$w_0 = 0^p 1^p 0^r 1^t$ като $\underset{+2p}{p} \le \underset{+2p}{r+t} < \underset{+2p}{2p}$

отново като в 1) $3p \le |w_0| < 4p$

Ако предположим че $w_0 \in L$ то ще има дума m т.е $w_0 = mm$ като $\frac{3p}{2} \le |m| < 2p$ тогава средата на w_0 е някъде в първия блок 1-ци и така

$m = 0^p 1^{p-q}$ и $m = 1^q 0^r 1^t$ като $q \ge 1$ понеже $|m| < 2p$ няма как да бъде изпълнено $w_0 \notin L$

(44) $L = \{a^n b^j \mid n \le j^2\}$

да предположим че L е КСЕ и $p > 0$ е свидетел за безконтекстността на L.

Нека $a^{p^2} b^p$. Тъй като $w \in L$ и $|w| \ge p$ то $\exists$ разбиване на $w = uvxyz$ т.е $|vxy| \le p$ $vy \ne \varepsilon$ $w_i = uv^i x y^i z \in L$

първо да забележим че не е възможно в низа v да има както a-та така и b-та защото в противен случай в $w_2 = uvvxyyz$ не $\forall$ a-та ще бъдат преди $\forall$ b-та т.е няма как $w_2 \in L$.

$\Rightarrow \forall$ символи в v са еднакви и в y.

CamScanner

1 сл v съдържа само a-та, y съдър...

Тогава $v = a^k$ и $y = b^l$ като $1 \le k + l \le p$

(понеже $|vxy| \le p$ и $|vy| \ge 1$) тогава поне едно от

k или $l = 1$

• Нека $l \ge 1$. Тогава $w_0 = u v^0 x y^0 z = u x z$

$$= a^{p^2 - k} b^{p - l}$$

Според Л.Р $w_0 \in L$ откъдето

$p^2 - k \le (p - l)^2$ обаче това е невъзможно понеже

$(p - l)^2 \le (p - 1)^2$ (понеже $l \ge 1$)

$= p^2 - 2p + 1$

$< p^2 - k$ (понеже $k < p \mid p \ge 1$)

Нека $l = 0$ понеже $k + l \ge 1$ то $k \ge 1$

Според ЛР $w_2 = u v^2 x y^2 z \in L$

Но $w_2 = a^{p^2 + k} b^p$ откъдето $p^2 + k \le p^2$ това е невъзможно

при $k \ge 1$

2 сл v и y са съставени от a-та

Тогава $w_2 = u v^2 x y^2 z = a^{p^2 + k} b^p$ за подходящо $k \ge 1$

и $w_2 \notin L$

3 сл v и y са съставени от b-та

Тогава $w_0 = u x z = a^{p^2} b^{p - k}$ за $1 \le k \le p$ и $w_0 \notin L$

(45) Докажете че не е БКЕ.

$L=\{0^n \mid n \text{ е просто}\}$

Да допуснем че L е КСЕ и нека $p>0$ е свидетел.
Нека $q \geq p$ е просто число.
Нека $w = 0^q$.
Тогава $w \in L$ и $|w| \geq p$.
Нека $w = uvxyz$ е представяне на w че $|vy|>0$,
$|vxy| \leq q$ и $\forall i \geq 0$ $w_i = uv^ixy^iz$.

Тогава при $i=q+1$ имаме че:

$$uv^{q+1}xy^{q+1}z = uxz(vy)^{q+1}$$

$$= 0^{q-|vy|} \cdot 0^{(q+1)|vy|} \quad (\text{и разкриване скобите})$$

$$= 0^{q+q|vy|} = 0^{q(1+|vy|)} \in L$$

$\Rightarrow$ $q(1+|vy|)$ е просто но това обаче е невъзможно
понеже $q \geq 2$ (q е просто) и $1+|vy| \geq 2$ ($|vy|>0$)

Противоречие

(46) Докажете че езикът $L=\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ е породено от КСГ Г с правила $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$.

Ще използваме следната лема:
Нека $w \in \{a,b\}^*$ тогава $|w|_a = |w|_b + 1 \iff \exists w_1, w_2$
$(w = w_1 a w_2$ & $|w_i|_a = |w_i|_b$ за $i=1,2)$.

Посоката $\Leftarrow$ е тривиална

За $\Rightarrow$ ще използваме пълна индукция по $|w|$

Нека $|w|$ е т.ч. $|w|_a = |w|_b + 1$ тогава $|w|$ е нечетно

• Ако $|w| = 1$ то $|w|_a = 1$ и $|w|_b = 0$ и $w = \varepsilon a \varepsilon$

те $w_1 = w_2 = \varepsilon$ са свидетели за верността на дясната част.

• Нека $|w| = 2n+1$, възможни са 2 сл.

a) $w = au$ тогава $w_1 = \varepsilon$ и $w_2 = u$

b) $w = bu$ тогава $\Rightarrow$ за $i \geq 0$ $w = b^{i+1} a v$

Нека $\tilde{w} = b^i v$ (махнали сме първото ba от w) тогава

$|\tilde{w}| = 2n-1$ $|\tilde{w}|_a = |\tilde{w}|_b + 1$ според ИП. $\exists$ $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$

т.е $\tilde{w} = \tilde{w}_1 a \tilde{w}_2$ като за $i = 1, 2$. ? продължава но не се разбира.

(47) Намерете КСГ пораждаща $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

$$L = \underbrace{\{a^n b^m \mid n < m\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^n b^m \mid n > m\}}_{L_2} = L_1 \cup L_2$$

За L_1 $\exists p$ $m = n + p$ $a^n b^{n+p}$

$N \to aNb \mid \varepsilon$

$P \to bP \mid b$

$L_1 = NP$

за L_2 $m < n$ $\Rightarrow$ $n = m + p$

$a^{m+p} b^m$

$L_2 \to AM$

$A \to aA \mid a$

$M \to aMb \mid \varepsilon$

$S \to L_1 \mid L_2$

(48) Намерете КСГ за $L = \{a^{\dots} b a \dots$

$(n_i \geq 0)\}$

∀ дума от L е крайна последователност от думи от вида $a^n b \Rightarrow L = (\{a^n b \mid n \geq 0\})^* = (L_1)^*$

L_1 се поражда от КСГ с правила:

$S_1 \to b \mid aS_1$

$\Rightarrow L = L_1^*$ се поражда от КСГ с правила:

$S \to \varepsilon \mid SS_1$

$S_1 \to b \mid aS_1$

(49) Намерете КСГ с език:

$(L(A) \cup L(\Gamma) \cdot L(\Gamma))^*$ където A е НДКА.

Δ	0	1
$\to * S$	$\{0, P\}$	$\emptyset$
$* 0$	$\{0\}$	$\{S\}$
P	$\emptyset$	$\{0, P\}$

В A има състояние и буква от Σ означени със един и същ символ.

а Γ е КСГ.

$\Gamma = \{\{P\}, \{0,1\}, \{P \to P0P \mid 11P \mid 01 \mid \varepsilon\}, P\}$

Решение

КСГ за L(A) понеже 0 участва и като нетерм. и терм. за нетерминален го сменяме с T.

Така L(A) се разп. от: $S \to 0T \mid 0P \mid \varepsilon$

$T \to 0T \mid 1S \mid \varepsilon$

$P \to 1P \mid 1S$

КСГ за $L(\Gamma) \cdot L(\Gamma)$

$S \to PP$

$P \to P0P \mid 11P \mid 01 \mid \varepsilon$

3) КСГ за $L(A)$ и $L(\Gamma) \cdot L(\Gamma)$

$S \to S_1 \mid S_2$

$S_1 \to 0T \mid 0P_1 \mid \varepsilon$

$T \to 0T \mid 1S_1 \mid \varepsilon$

$P_1 \to 1T \mid 1P_1$

$S_2 \to P_2 P_2$

$P_2 \to P_2 0 P_2 \mid 11 P_2 \mid 01 \mid \varepsilon$

КСГ за $(L(A) \text{ и } L(\Gamma)L(\Gamma))^*$

Преименуване на началния нетерминал на 3) S на V

Начален нетерминал $S \to \varepsilon \mid SV$ за итерация

$V \to S_1 \mid S_2$

— || — другите остават същи

50) да се д. че е БКЕ $L_1 \oplus L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, |w_1| = |w_2|\}$

$A = (\Sigma, Q, S, F, \delta)$ за L_1

$A' = (\Sigma, Q', F', S', \delta')$ за L_2

$\Gamma = \{Q \times Q_1, \Sigma, R, (S, S')\}$

$R = \{(p, p') \to x(\delta(p, x), \delta'(p', y)) \mid p \in Q, p' \in Q', x, y \in \Sigma\}$ и

$\{(p, p') \mid p \in F, p' \in F'\}$

$L(\Gamma) = L_1 \oplus L_2$?