Дефиниции

- Σ → азбука → крайно множество от символи.
- Дума над Σ → крайна редица от символи от Σ.
- Език L над Σ → произволно множество от думи над Σ, $\forall$ подмножество на Σ^*
- Празна дума = ( ) не слоши нито един елемент. е дума над $\forall \Sigma$ се означава с ε. дължината е 0
- Дължина на дума = броят на елементите в редицата която описва думата.
- Итерация (звезда на Клини) $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L$ = множеството на $\forall$ крайни конкатенации на думи от L
- Краен детерминиран автомат (ДКА) е $A = \langle \Sigma, Q, q_{start}, \delta, F \rangle$ където:

  Σ → крайна азбука

  Q → крайно множество от състояния

  $q_{start} \in Q$ → начално състояние

  $\delta : Q \times \Sigma \to$ функция на преходите

  $F \subseteq Q$ → финални / заключителни състояния.
- един език L е автоматен ако $\exists$ DKA A тако че $L = L(A)$

  → ДКА A разпознава думите от L
- $\underbrace{\delta^*}_{\text{разширение}} : Q \times \underbrace{\Sigma^*}_{\text{дума}} \to Q$
- конфигурация $K = (q, \alpha) \in Q \times \Sigma^*$, q → текущо състояние, α думата която остава да бъде прочетено.
- Нека L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ. Тогава $L_1 \cap L_2$ също е автоматен.
- Нека L е автоматен език над Σ. Тогава $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ също е автоматен.
- $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$
- $F = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1$ или $q_2 \in F_2\} = F_1 \times Q_2$ и $Q_1 \times F_2$
- $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$
- $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$
- Нека $\Sigma = \{a_1 \ldots a_n\}$ е азбука и $L \subseteq \Sigma^*$ казваме че L е регулярен език над Σ ако може да се изрази от езиците ϕ $\{a_1\}$ $\{a_2\}$ … $\{a_n\}$ използвайки краен брой пъти операциите $\cup$ $\cdot$ $*$. регулярен израз се получава от едно такова изразяване премахвайки скобите. Един език L е регулярен ако $L = \mathcal{L}(r)$ за някой регулярен израз r.

• Теорема Клини. Всеки автоматен език се описва с регулярен израз.

• Множеството от ∀ думи над азбуката Σ ще означаваме с Σ^*. пример:
$\Sigma = \{a, b\}$ $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, aaa, aab \dots\}$

• Недетерминирани крайни автомати (НДКА) => $N = (\Sigma, Q, Q_{start}, \Delta, F)$
$\Sigma \to$ крайна азбука. Q – крайно множество от състояния, $Q_{start} \subseteq Q$ множество от начални състояния
$\Delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$ $\forall q \in Q \; \forall x \in \Sigma$ $\Delta(q, x) \subseteq Q$
$F \subseteq Q \to$ множество от финални състояния.

• Изпълнението е успешно ако имаме финално състояние.: ако започва от началното състояние $p_0 \in I$ и $p_n \in F$
$p_0 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$ е успешен път ако започва от началото състояние с етикет буквите $w \in \Sigma$

• w се разпознава от A ако $\exists$ поне един успешен път с етикет w
$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ се разпознава от $A\} = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists p \in I)(\exists q \in F)(p \xrightarrow{w} q)$ е път в $A\}$

• Тотален автомат КА $A = (Q, \Sigma, I, F, \Delta)$ е тотален ако за ∀ състояние $q \in Q$ и ∀ буква $a \in \Sigma$ $\exists$ поне едно състояние p. т.е $q \xrightarrow{a} p$ е преход (т.е $(q, a, p) \in \Delta$)

• Т. равни скот за ∀ НДКА N $\exists$ ДКА D т.че $L(D) = L(N)$

• Множеството от ∀ думи над азбуката Σ^*

• α е префикс на β ако $\exists$ дума γ т.е $\beta = \alpha\gamma$.

• α е суфикс на β ако $\exists$ дума γ т.е $\beta = \gamma\alpha$.

• Теорема равни скот → за ∀ НДКА $\exists$ ДКА т.е $L(N) = L(D)$
N D

• Автомата на Бжозовски $L \to$ език над Σ и $a \in \Sigma$, $a^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$
L е автоматен <=> $a^{-1}(L)$ е автоматен.

$B = (Q^B, \Sigma, q^B_{start}, \delta^B, F^B)$

$Q^B = \{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

$q^B_{start} = L = \varepsilon^{-1}(L)$

$\delta^B(M, a) = a^{-1}(M)$

$F^B = \{\alpha^{-1}(L) \mid \varepsilon \in \alpha^{-1}(L)\}$

Разширена ф на пр. в НКА
$\Delta^* : P(Q) \times \Sigma^* \to P(Q)$

• Минимален автомат → (В) ав. Бжозовски има най малкия възможен брой състояния измежду ∀ ДКА който разпознават L

• изоморфни → казваме че A_1 и A_2 са изоморфни ($A_1 \cong A_2$) ако $\exists$ функция

$f(q'_{start}) = q''_{start}$
$q \in F_1 \iff f(q) \in F_2$
$f(\delta_1(q, x)) = \delta_2(f(q), x)$

Σ → азбука → крайно множество от символи

α Дума над Σ → крайна редица от символи

L → език над Σ → произволно множество от думи над Σ

- $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$ всички думи над Σ

The set of all strings including the empty string

$L = \emptyset$ най малкия език

$L = \Sigma^*$ най голямия

Свойства за конкатенация

- $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$
- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
- $\alpha\beta \neq \beta\alpha$
- $\alpha\beta = \varepsilon \iff \alpha = \beta = \varepsilon$

- Казваме че думата α е префикс на думата β ако $\exists$ думата такава че $\beta = \alpha \cdot \gamma$
- α е суфикс $\beta = \gamma\alpha$.

$A^* = \bigcup_{n\geq 0}^{\infty} A^n$ $\quad A^+ = A \cdot A^*$

Крайни детерминирани автомати ДКА е $A = \langle \Sigma, Q, q_{start}, \delta, F \rangle$

$a_1 \dots a_n$

Регулярни езици над $\Sigma \to$ Нека Σ-азбука и $L \subseteq \Sigma^*$ казваме, че L е регулярен език над Σ ако може да се изрази от езиците $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\} \dots \{a_n\}$ използвайки краен брой пъти операциите $\cup, *, \cdot$

$$q_0 \xrightarrow{\alpha} q_1 \xrightarrow{\beta} \dots \to q_F$$

$\delta(q_0, \alpha)$

$q_0 = q_{start}$

Един език е автоматен ако $\exists$ ДКА A и $L = L(A)$

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$$ разширена функция на преходи

с индукция по α:

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0 \xrightarrow{\beta} q_1 \xrightarrow{x} q_2 \to q_3$$

$\delta(q, \beta)$ $\quad \delta(q, x)$

$\delta(\delta(q, \beta))$

База: $\delta^*(q, \varepsilon) = q$

Стъпка: $\delta^*(q, \beta x) = \delta(\delta^*(q, \beta), x)$

- Нека L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ, тогава $L_1 \cap L_2$ също е автоматен език над Σ
- ЛЕМА: $\forall q_1 \in Q_1 \; \forall q_2 \in Q_2 \; \forall \alpha \in \Sigma^*$
  $$\delta((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$$
- Нека L е автоматен език над Σ. тогава $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ също е.
- $L_1 \cup L_2 = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$
- $F = \{q_1, q_2 \mid q_1 \in F_1$ или $q_2 \in F_2\} = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$
- $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$
- $F = F_1 \times (Q_2 \setminus F_2)$

Един език L е регулярен ако $L = \mathcal{L}(r)$ за някой регулярен израз
Регулярните изрази r могат да се опишат със следната абстрактна граматика:

$r ::= \phi \mid \varepsilon \mid a \mid r_1 r_2 \mid r_1 + r_2 \mid r_1^*$

Теорема 1 Клини Всеки автоматен език е регулярен
Теорема 2 Клини всеки регулярен език е автоматен
Недетерминирани крайни автомати НКА N

$N = (\Sigma, Q, Q_{start}, \Delta, F)$

$\Sigma \to$ азбука $\quad Q \to$ мн. със. $\quad Q_{start} \subseteq Q$ нач. мн. със

$\Delta \to Q \times \Sigma \to P(Q)$

$\forall q \in Q \ \forall x \in \Sigma \quad \Delta(q, x) \subseteq Q$

$F \to$ мн. от Final състояния.

ТОТАЛЕН

$A = (\Sigma, Q, Q_{start}, F, \Delta)$ – НКА е тотален ако за $\forall$ $p \in Q$ и $\forall a \in \Sigma$ $\exists$ поне един преход от p, a

$(\forall p \in Q)(\forall x \in \Sigma)(\exists\ \Delta(p, x) \geq 1)$

е детерминиран когато има само 1 начално състояние

Теорема Рабин Скот за $\forall$ недетерминиран автомат N $\exists$ дет. авт. D такова че $L(D) = L(N)$

Лема конкатенация $\Delta^*(R\alpha\beta) = \Delta^*(\Delta^*(R, \alpha)\beta)$

Лема Езиците $\phi, \{\varepsilon\}, \{a\}$ $a \in \Sigma$ са автоматни.

Лема Ако L_1 и L_2 са автоматни езици над Σ то тяхната конкатенация $L_1 \cdot L_2$ също е автоматен език над Σ.

Лема Нека L е автоматен език над Σ, тогава L^* е също автоматен език ...

Твърдение Ако L е автоматен език то L^{rev} също е.

Pumping Lemma → Нека L е безкраен регулярен език. $\exists$

$\exists$ естествено число $p \geq 1$ такова че за $\forall$ дума $\alpha \in L$

с дължина $|\alpha| \geq p$ $\exists$ разбиване на 3 думи:

$\alpha = xyz$ със следните свойства:

$|y| \geq 1$ $\quad |xy| \leq p \quad \forall i \in \mathbb{N}\ \alpha = xy^iz \in L$

Тогава L не е регулярен език.

АВТОМАТ НА БЖОЗОВСКИ

$$B = (\Sigma, Q^B, q^B_{start}, \delta^B, F^B)$$

$$Q^B = \{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$$

$$q^B_{start} = L = \varepsilon^{-1}(L)$$

$$\delta^B(M, a) = a^{-1}(M)$$

$$F^B = \{\alpha^{-1}(L) \mid \varepsilon \in \alpha^{-1}(L)\}$$

Твърдение: $\delta^{B*}(M, \alpha) = \alpha^{-1}(M)$

Минимален автомат $A(\Sigma, Q, q_{start}, \delta, F)$ е ДКА

$L_A(q)$ → десен език на $q \in Q$

$= \{\omega \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, \omega) \in F\}$

$L_A(q_{start}) = L(A)$ означаване $q_\alpha = \delta^*(q_{start}, \alpha)$

Предполагаме че $\forall q \in Q\ \exists \alpha \in \Sigma^*\ q = q_\alpha$

A е свързан $\forall$ състояния са достижими

Теорема Нека L → регулярен език $L = L(A)$ Нека B е автоматът на Бжозовски за L тогава $|Q^B| \leq |Q^A| \Rightarrow L$ е регулярен B е краен.

Изоморфни автомати

$A_1 = (\Sigma, Q_1, q's, \delta_1, F_1)$

$A_2 = (\Sigma, Q_2, q''s, \delta_2, F_2)$

казваме че A_1 и A_2 $\cong$ ако $\exists$ биекция

$f(q's) = f(q''s)$

$q \in F_1 \Rightarrow f(q) \in F_2$

$f(\delta(q, x)) = \delta_2(f(q), x)$

Теорема за $\forall$ рег. език L $\exists$ единствен минимален автомат с точност до изоморфизъм.

Критерий за минималност

Нека A е свързан ДКА който разпознава L.

A е минимален $\Leftrightarrow$ $\forall p \in Q\ \forall q \in Q\ p \neq q$

$L_A(p) \neq L_A(q)$

Автомат на Майхил-Нероуд.

L език над Σ

$\alpha \approx_L \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1}(L) = \beta^{-1}(L) \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* (\alpha w \in L \Leftrightarrow \beta w \in L)$

екв

рел. на еквив.

дясно инвар.

$M = (\Sigma, Q^M, q^M_{start}, \delta_M, F^M)$

$Q^M = \{[\alpha]_L \mid \alpha \in \Sigma^*\}$

$q^M_{st} = [\varepsilon]_L$

$\delta_M([\alpha]_L, x) = [\alpha x]_L$

$F^M = \{[\alpha]_L \mid \alpha \in L\}$

L - език

α, β думи

Казваме че α и β са еквивалентни относно L

$\alpha \approx_L \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1}(L) = \beta^{-1}(L)$

Т. на Майхил-Нероуд.

Нека L е рег. език. Тогава $\exists$ ДКА A който разпознава L с точно толкова състояния колкото са класовете на еквивалентност относно рел. $\approx_L$

деф. Алгор. за минимализация

свс. $p, q \in Q$ са екв. ако $L_A(p) = L_A(q)$

$p \equiv_A q$

$$\forall w \in \Sigma^* \left(\delta^*(p, w) \in F \iff \delta^*(q, w) \in F \right)$$

$[q]_{\equiv_A}$ кл. на екв. на q

A е миним $\iff \equiv_A$ съвпада с $=$ } критерий за мин.