Taller 1 Métodos para hallar la raíz - Análisis Numérico

Juan Sebastian Santamaria Palomino
juansantamaria@javeriana.edu.co

Natalia Andrea Navas Calderón
natalianavas@javeriana.edu.co

Jorge Rodrigo Salgado Tello
salgadojorge@javeriana.edu.co

6 de agosto de 2019

1. Problema en cuestión

Dada la siguiente función, halle las raíces utilizando los métodos de bisección, punto fijo, Newton Raphson, Aitken, Steffensen, posición falsa y un método libre.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ g(x) = \pi x \end{array}\right\} \; h(x) = e^x - \pi x \tag{1}$$

Gráfica de la función:

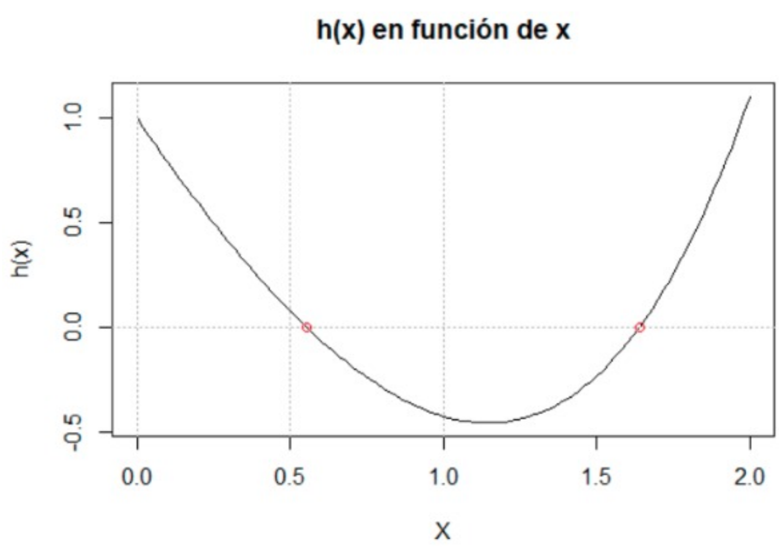

Figura 1: Gráfica de la función del problema.

2. Método de bisección

2.1. Contextualización

Este método está fundamentado en el Teorema de los Valores Intermedios, el cual establece que si una función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces puede alcanzar cada uno de los valores comprendidos entre f (a) y f (b). Esto significa, que para cualquier valor L que se encuentre entre f (a) y f (b) existe al menos un valor c en el intervalo [a,b] que cumple con la ecuación f(c)=L [1].

Para explicar el funcionamiento del método, se parte de suponer que en el intervalo [a,b] existe un cero de la función f . Se empieza por calcular m, que es el punto medio del intervalo [a,b], de esta forma m = (a+b)/2. Seguido a ello se calcula el valor que toma el punto m en la función f. En caso de que dicho valor sea exactamente igual a cero, m es una raíz de la función f. En caso de que no lo sea, se debe verificar el signo de los valores dados por los puntos a y m en la función f. En caso de que el signo de dichos valores sea igual, significa que la función está en el mismo cuadrante para todos los valores comprendidos entre a y m, por tanto, el intervalo [a,b] debe transformarse en el intervalo [m,b]. En caso de que el signo sea diferente, significa que hubo un cambio de cuadrante, por lo cual el intervalo [a,b] debe transformarse en el intervalo [a,m]. A este intervalo hallado se le aplica el mismo procedimiento y así, sucesivamente, se repite el proceso con el fin de delimitar la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la solución.

2.2. Resultados

Entradas:

- Función $h(x) = e^x - \pi x$.
- Intervalo [0,1] y [1,2].
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Raíces: 0.553772 y 1.638489.

Para este ejercicio en particular, se obtuvieron un total de dos raíces de la función h(x) las cuales fueron 0.55377197265625 y 1.63848876953125 con error $7.45058059692383 \times 10^{-9}$. Este resultado se obtuvo al realizarse un total de 28 iteraciones. La relación iteración-error se evidencia en la figura 2 donde se puede evidenciar que la convergencia del algoritmo es lineal. La figura 1 muestra gráficamente cómo se obtuvieron las raíces, es decir igualando la ecuación a 0. La tabla 1 muestra el proceso realizado por el método para hallar una aproximación a la solución.

a	b	m	Error est.	Error ant.
0.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	2.0000000
0.5000000	1.0000000	0.5000000	0.5000000	1.0000000
0.5000000	0.7500000	0.7500000	0.2500000	0.5000000
0.5000000	0.6250000	0.6250000	0.1250000	0.2500000
0.5000000	0.5625000	0.5625000	0.0625000	0.1250000
0.5312500	0.5625000	0.5312500	0.0312500	0.0625000
0.5468750	0.5625000	0.5468750	0.0156250	0.0312500
0.5468750	0.5546875	0.5546875	0.0078125	0.0156250
0.5507812	0.5546875	0.5507812	0.0039062	0.0078125
0.5527344	0.5546875	0.5527344	0.0019531	0.0039062
0.5537109	0.5546875	0.5537109	0.0009766	0.0019531
0.5537109	0.5541992	0.5541992	0.0004883	0.0009766
0.5537109	0.5539551	0.5539551	0.0002441	0.0004883
0.5537109	0.5538330	0.5538330	0.0001221	0.0002441
0.5537720	0.5538330	0.5537720	0.0000610	0.0001221
0.5538025	0.5538330	0.5538025	0.0000305	0.0000610
0.5538177	0.5538330	0.5538177	0.0000153	0.0000305
0.5538254	0.5538330	0.5538254	0.0000076	0.0000153
0.5538254	0.5538292	0.5538292	0.0000038	0.0000076
0.5538254	0.5538273	0.5538273	0.0000019	0.0000038
0.5538263	0.5538273	0.5538263	0.0000010	0.0000019
0.5538268	0.5538273	0.5538268	0.0000005	0.0000010
0.5538268	0.5538270	0.5538270	0.0000002	0.0000005
0.5538269	0.5538270	0.5538269	0.0000001	0.0000002
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000001	0.0000001
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000	0.0000001
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000	0.0000000
0.5538270	0.5538270	0.5538270	0.0000000	0.0000000

Tabla 1: Proceso del método de bisección.

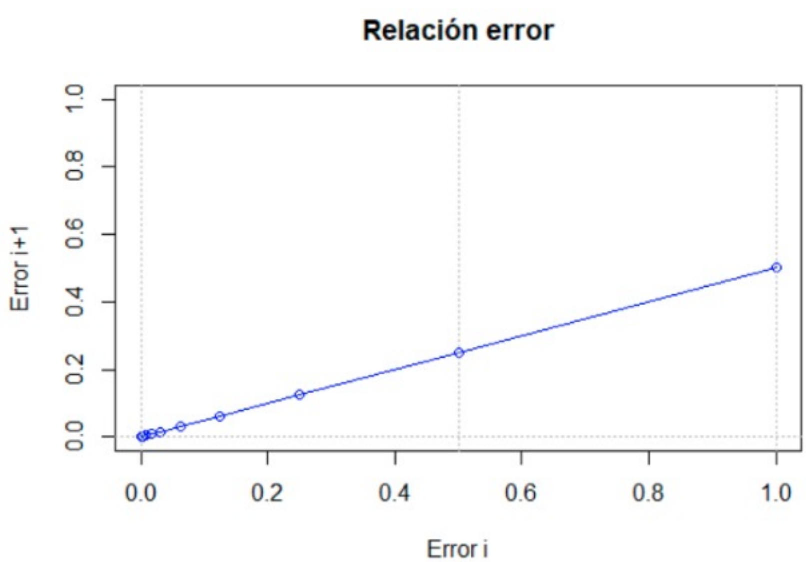

Figura 2: Gráfica del método de bisección.

3. Método de punto fijo

3.1. Contextualización

El método del punto fijo, también conocido como método de la iteración funcional, es el fundamento matemático para construir métodos eficientes para el cálculo de raíces reales de ecuaciones no lineales. Este método consiste en reescribir la ecuación f(x)=0 en la forma g(x). Esta nueva ecuación debe ser equivalente a la ecuación original en el sentido que debe satisfacerse con la misma raíz, es decir, la existencia de un punto fijo r de la ecuación x=g(x) es equivalente a encontrar una raíz real r de la ecuación f(x)=0: r=g(r) = (r)=0 [2].

3.2. Resultados

Entradas:

- Función $g(x) = e^x - \pi x$, o $g(x) = \frac{e^x}{\pi}$.
- Valores iniciales $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Si hay convergencia, dos aproximaciones x_n de un punto fijo = 0.5538270399 y 1.63848877.

En el método de punto fijo usado para encontrar dos raíces reales de una ecuación no lineal, en el caso de $x_0 = 0$ dio un valor de 0.5538270399, mientras que en el caso de $x_0 = 1$ dio un valor de 1.63848877 con un error aproximado de $7.450580597 \times 10^{-9}$.Las iteraciones necesarias para obtener el resultado del método con $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$ fueron 26. La relación iteración-error se evidencia en la figura 3 donde se puede evidenciar que la convergencia del algoritmo es lineal. La figura 1 muestra gráficamente cómo se obtuvieron las raíces, es decir igualando la ecuación a 0. La tabla 2 muestra el proceso realizado por el método para hallar una aproximación a la solución.

En comparación al método de bisección, este es más eficiente pues requiere de menor iteraciones. Lo anterior dicho se puede evidenciar en las figuras 2 y 3, donde se observa que la pendiente de la figura 3 es mayor, lo cual justifica la diferencia de optimización.

Iteración	g(x)	x	Error est.
0.6738620	0.7500000	0.5000000	0.0000000
0.5946812	0.6250000	0.2500000	0.5000000
0.5586512	0.5625000	0.1250000	0.2500000
0.5414634	0.5312500	0.0625000	0.1250000
0.5499902	0.5468800	0.0312500	0.0625000
0.5543038	0.5546900	0.0156250	0.0312500
0.5521428	0.5507800	0.0078125	0.0156250
0.5532222	0.5527300	0.0039062	0.0078125
0.5537627	0.5537100	0.0019531	0.0039062
0.5540332	0.5542000	0.0009766	0.0019531
0.5538980	0.5539600	0.0004883	0.0009766
0.5538303	0.5538300	0.0002441	0.0004883
0.5537965	0.5537700	0.0001221	0.0002441
0.5538134	0.5538000	0.0000610	0.0001221
0.5538219	0.5538200	0.0000305	0.0000610
0.5538261	0.5538300	0.0000153	0.0000305
0.5538282	0.5538300	0.0000076	0.0000153
0.5538272	0.5538300	0.0000038	0.0000076
0.5538266	0.5538300	0.0000019	0.0000038
0.5538269	0.5538300	0.0000010	0.0000019
0.5538270	0.5538300	0.0000005	0.0000010
0.5538270	0.5538300	0.0000002	0.0000005
0.5538270	0.5538300	0.0000001	0.0000002
0.5538270	0.5538300	0.0000001	0.0000001
0.5538270	0.5538300	0.0000000	0.0000001
0.5538270	0.5538300	0.0000000	0.0000000

Tabla 2: Proceso del método de punto fijo.

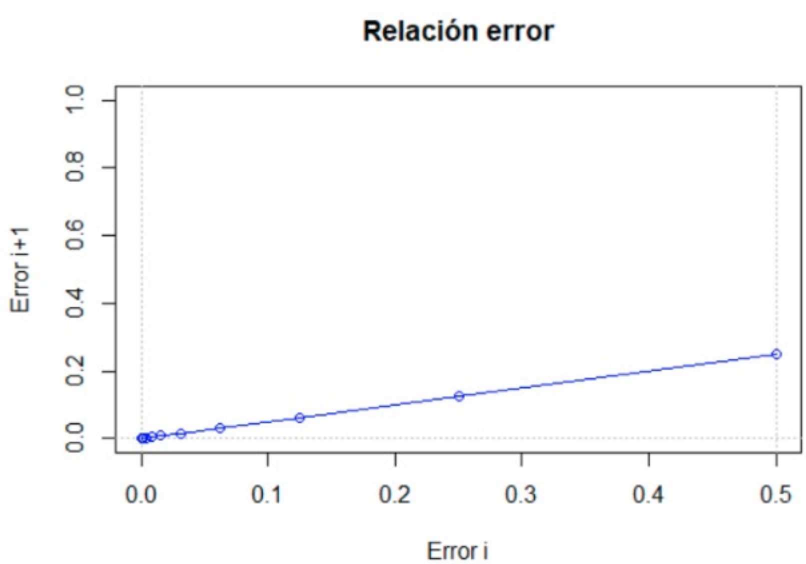

Figura 3: Gráfica del método de punto fijo.

4. Método de Newton-Raphson

4.1. Contextualización

El método de Newton es una fórmula iterativa eficiente para encontrar r (raíz real de una ecuación). Es un caso especial del método del punto fijo en el que la ecuación $f(x) = 0$ se reescribe en la forma $x = g(x)$ eligiendo g de tal manera que la convergencia sea de segundo orden. Se considera uno de los mejores métodos que muestra mejor velocidad de convergencia llegando (bajo cierta condiciones) a duplicar, en cada iteración, los decimales exactos[3]. El método se explica mediante el siguiente pseudocódigo:

```
r ← x - f(x)/f'(x)
Mientras |r - x| > E
     x ← r
     r ← x - f(x)/f'(x)
Fin
```

4.2. Resultados

Entradas:

- Función $h(x) = e^x - \pi x$.
- Derivada $h'(x) = e^x - \pi$.
- Valor inicial $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$.
- Tolerancia: 1×10^{-8}.
- Valor máximo de iteraciones.

Salidas:

- Raíces: 0.5538270366 y 1.63852842.

Para este ejercicio en particular, se obtuvieron un total de dos raíces de la función h(x) las cuales fueron 0.5538270366 y 1.63852842 con error $6.07828232190855 \times 10^{-11}$. Este resultado se obtuvo al realizarse un total de 7 iteraciones. La relación iteración-error se evidencia en la figura 4 donde se puede evidenciar que la convergencia del algoritmo es cuadrática. La figura 1 muestra gráficamente cómo se obtuvieron las raíces, es decir igualando la ecuación a 0. La tabla 3 muestra el proceso realizado por el método para hallar una aproximación a la solución.

x_k	f(x_k)	Error est.	Error ant.
0.466942207	0.128167008	0.466942207	0.000000000
0.549818625	0.005632525	0.082876418	0.466942207
0.553817140	0.000013872	0.003998516	0.082876418
0.553827037	0.000000000	0.000009896	0.003998516
0.553827037	0.000000000	0.000000000	0.000009896

Tabla 3: Proceso del método de Newton-Raphson.

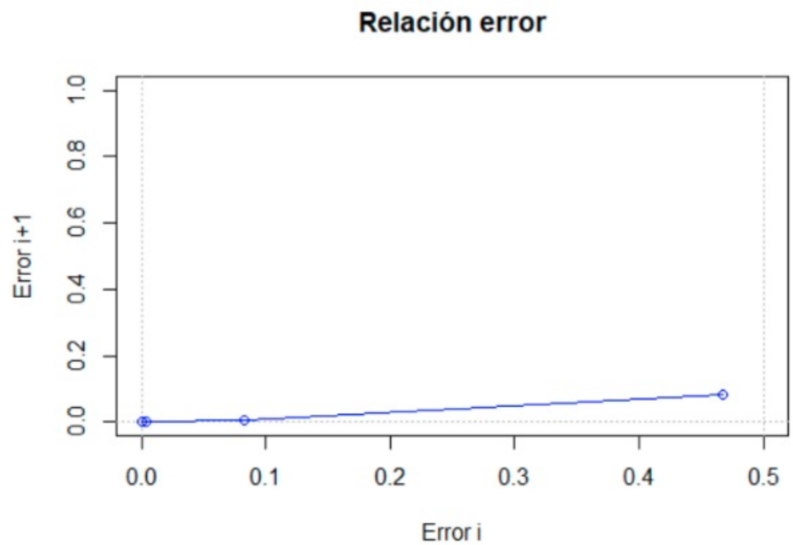

Figura 4: Gráfica del método de Newton-Raphson.

5. Método de la secante

5.1. Contextualización

El método de la secante se puede se puede pensar como una simplificación del método de Newton-Raphson. En lugar de tomar la derivada de la función cuya raíz se quiere encontrar, se aproxima por una recta secante (de ahí el nombre) a la curva, cuya pendiente es aproximadamente igual a la derivada en el punto inicial. La principal diferencia con el método anterior es conocer dos puntos del a función para poder generar dicha recta[4].

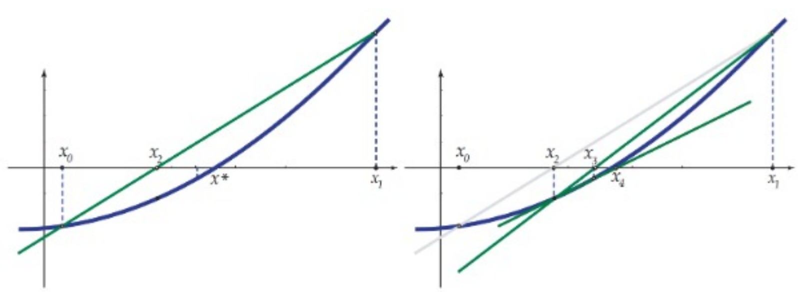

Figura 5: Ejemplo del método de la secante.

5.2. Resultados

Entradas:

- Función $h(x) = e^x - \pi x$.

- Intervalo $[x_0, x_1]$.
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Raíces: 0.553827 y 1.638528.

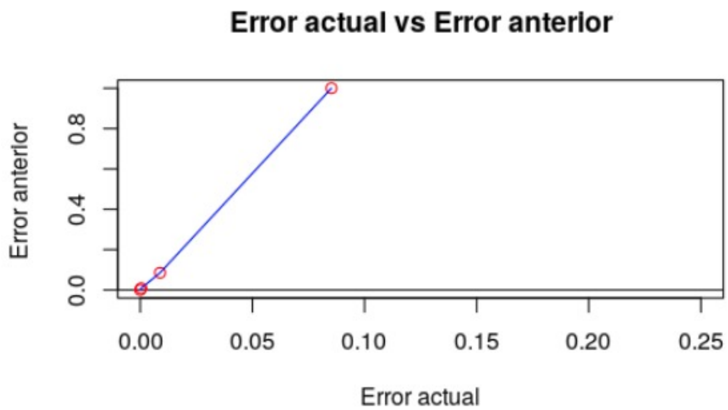

Figura 6: Gráfica del método de la secante [0,1].

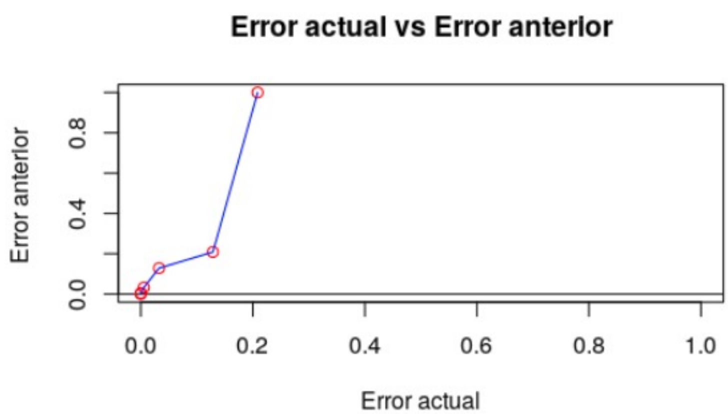

Figura 7: Gráfica del método de la secante [1,2].

En este método se obtuvo como resultado la raíz 0.553827 con error 7.02433×10^{-10} para el intervalo [0,1], y la raíz 1.638528 con error 4.650136e-10 para el intervalo [1,2]. Tal como se observa en la figura 6 la convergencia para el intervalo [0,1] tiene una tendencia lineal, sin embargo en la figura 7 se evidencia que para el intervalo [1,2] la convergencia se comporta de manera extraña, ya que al inicio converge lentamente y luego crece desmesuradamente, por lo que se puede concluir que dependiendo de la cercanía del intervalo a la solución, hay una convergencia completamente lineal o parcialmente lineal.

6. Método $\triangle^2$ de Aitken

6.1. Contextualización

Consiste en un método de aceleración de la convergencia de otros métodos, en particular es usado para el método de bisección. Es muy útil para las sucesiones que convergen lineal-mente y que no dependen de su origen. Cuando se aplica el método Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo, se conoce como método de Steffensen[3].

6.2. Resultados

Entradas:

- $h(x) = e^x - \pi x$.
- Intervalo $[x_0, x_1]$.
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Resultado sin aceleración: 0.5538292.
- Resultado con aceleración: 0.553833.
- Valor real de la solución: 0.55382701.
- Resultado sin aceleración: 1.638531.
- Resultado con aceleración: 1.63855.
- Valor real de la solución: 1.63853.

Tal como se observa en los resultados al aplicar la aceleración para que el método converja a la solución más rápidamente, se pierde precisión en la aproximación de la raíz. Esto sucede a causa de que se fuerza a obtener la solución en menor número de iteraciones.

7. Método de Steffensen

7.1. Contextualización

Se puede considerar como una combinación del método de punto fijo y del método de Aitken. Al igual que los métodos mencionados anteriormente es un algoritmo para obtener las raíces de una función. Así como el método de Aitken acelera la convergencia de otro método, Steffensen se considera como el método de punto fijo acelerado[3].

7.2. Resultados

Entradas:

- $g(x) = e^x - \pi x \quad \text{o} \quad g(x) = \frac{e^x}{\pi}$.
- Valores iniciales $x_0 = 0, x_0 = 1$.
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Resultado sin aceleración: 0.5538272858.
- Resultado con aceleración: 0.5538330078.
- Valor real de la solución: 0.55382701.
- Resultado sin aceleración: 1.63848877.
- Resultado con aceleración: 1.638487454.
- Valor real de la solución: 1.63853.

En el método de punto fijo acelerado con Aitken permitió encontrar dos raíz real de una ecuación no lineal, en el caso de $x_0 = 0$ dio un valor de 0.5538270399, mientras que en el caso de $x_0 = 1$ dio un valor de 1.63848877. Las iteraciones necesarias para obtener el resultado del método con $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$ fueron 17. Comparación: como se puede evidenciar el punto fijo requirió de 26 iteraciones para obtener los valores deseados, por otro lado el algoritmo acelerado Steffensen solo necesitó 17. Los dos resultados dan una diferencia de -0.000005722 lo cual es un acercamiento bastante razonable, por consiguiente se puede afirmar que el método de Steffensen es mejor que del punto fijo.

8. Método de posición falsa

8.1. Contextualización

La idea de este método es calcular la recta secante que une los puntos extremos (a1, f (a1)) y (b1, f(b1)). Luego se determina el punto m en que esta recta corta el eje x y este valor entra a jugar el papel que en el método de bisección jugaba el punto medio.[2]

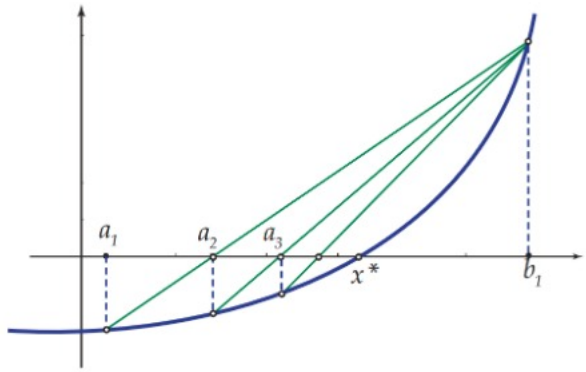

Figura 8: Ejemplo del método de posición falsa.

8.2. Resultados

Entradas:

- Función $h(x) = e^x - \pi x$.
- Intervalo [a,b].
- Tolerancia: 1×10^{-8}.

Salidas:

- Raíces: 0.5538271 y 1.638528.

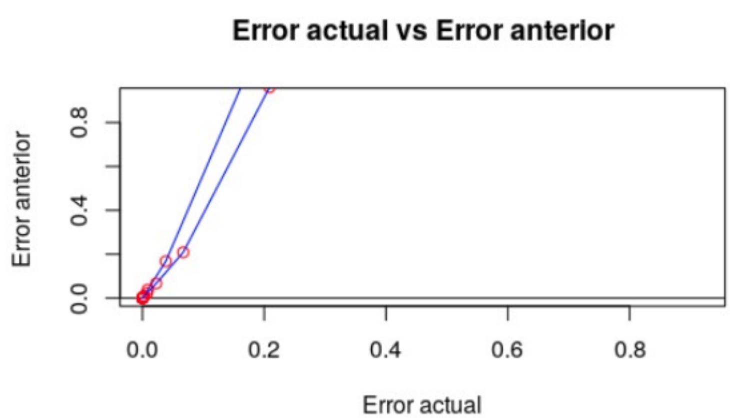

Figura 9: Gráfica del método de posición falsa.

En este método se alcanzó como resultado la raíz 0.5538271 con error $5.450408 \times 10{-}8$ para el intervalo [0,1], y la raíz 1.638528 con error $6.241771 \times 10{-}8$ para el intervalo [1,2]. Tal como se observa en la figura 9 la convergencia para ambos intervalos tiene una tendencia lineal.

9. Método de Horner (Libre)

9.1. Contextualización

El método de Horner consiste en aplicar un algoritmo que permita calcular el resultado de un polinomio evaluado en un valor específico de x. Además de ello, el algoritmo consigue hacer su labor con la cantidad mínima de operaciones posible, lo cual lo convierte en un método muy eficiente, ya que reduce la cantidad de tareas que debe ejecutar el procesador de un dispositivo para obtener la solución del polinomio.

9.2. Resultados

Entradas:

- Coeficiente = 2, 0, -3, 3, -4. Vector que contiene los coeficientes del polinomio.
- x_0 = -2. Valor a ser evaluado en el polinomio.

Salidas:

- Resultado = 10. El número mínimo de operaciones es 8, y se compone de 4 sumas y 4 multiplicaciones.

10. Referencias

[1]F. Walter, Introducción a los métodos numéricos, Implementaciones en R. Revista digital, 2013.

[2]L. Rodríguez, Análisis numérico básico, 3rd ed. Escuela Superior Politécnica del Litoral Phyton, 2014.

[3]http://files.tutoriametodosnumericos.webnode.es/200000371-eba66eca00/Aitken.pdf

[4]http://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/convergence_acceleration.pdf

[5]http://www3.fi.mdp.edu.ar/metodos/apuntes/secante_rodrigo.pdf