Θέμα 6 | Να το λύσω $x \cdot y \cdot z = 103$ μαννα το στείλω | $+\Theta \perp$ (A)

Η επιφάνεια A του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι:

$$A = x \cdot y + 2(xz + yz)$$

ο όγκος του είναι: $x \cdot y \cdot z = 108$.

<u>Άρα:</u> $A = f(x,y,z) = x \cdot y + 2(xz + yz)$

με τον περιορισμό: $x \cdot y \cdot z = 108 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = x \cdot y \cdot z - 108$.

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) \cdot \lambda \varphi(x,y,z) = x \cdot y + 2(xz + yz) + \lambda(xyz - 108)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = xyz - 108$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy.$$

$$\begin{cases} (1)\ y + 2z + \lambda yz = 0 \\ (2)\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ (3)\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ (4)\ x \cdot y \cdot z = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ \lambda yz = -y - 2z \\ \lambda xz = -x - 2z \end{cases} \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ \lambda = \dfrac{-y - 2z}{yz} \\ \lambda = \dfrac{-x - 2z}{xz} \end{cases} \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ \dfrac{y + 2z}{yz} = \dfrac{x + 2z}{xz} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xy + 2xz = xy + 2yz \end{cases} \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ x = y \end{cases} \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 108 \\ x = y \\ \lambda = -\dfrac{2x + 2y}{xy} \end{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 \cdot z = 108 \\ \dfrac{2x + 2x}{x^2} = \dfrac{x + 2z}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 \cdot z = 108 \\ \dfrac{4x}{x} = x + 2z \end{cases} \begin{cases} x = y \\ x^2 z = 108 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \begin{cases} \cancel{x = y} \\ \cancel{x^2 z = 108} \\ \cancel{x = 4 - 2z} \end{cases} \begin{cases} \cancel{x = y} \\ \cancel{x = 4 - 2z} \\ \cancel{(4 - 2z)^2 \cdot z = 108} \end{cases} \begin{cases} \cancel{x = y} \\ \cancel{x = 4 - 2z} \\ \cancel{(16 - 16z + 4z^2)z = 108} \end{cases} \begin{cases} \cancel{x = y} \\ \cancel{x = 4 - 2z} \\ \cancel{(4z^3 - 16z^2 + 16z) = 108} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 dv \int_{-v}^{v} du e^{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right] dv = \frac{1}{2}\int_1^2 v\left[e - \frac{1}{e}\right] dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e - \frac{1}{e}\right]\frac{v^2}{2}\Big|_0^2 = e - \frac{1}{e}$$

6.7 Εφαρμογές

(Μάζα, συντεταγμένες κέντρου μάζας και ροπές αδράνειας επίπεδης υλικής πλάκας)

Θεωρούμε μια λεπτή επίπεδη υλική πλάκα, που καταλαμβάνει την περιοχή Τ και έστω p(x,y) η συνάρτηση πυκνότητας της πλάκας. Τότε:

α) Η μάζα Μ της πλάκας δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$M = \iint_T p(x, y) dxdy \qquad (6.7.1)$$

β) Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας δίνονται από τα διπλά ολοκληρώματα:

$$\boxed{x_k = \frac{1}{M}\iint_T xp(x, y)dxdy,} \quad \boxed{y_k = \frac{1}{M}\iint_T yp(x, y)dxdy} \qquad (6.7.2)$$

γ) Οι ροπές αδράνειας I_x, I_y, I_O, I_ℓ της πλάκας ως προς τους άξονες ΟΧ, ΟΥ την αρχή Ο και ως προς οποιαδήποτε ευθεία ℓ, είναι αντίστοιχα:

$$I_x = \iint_T y^2 p(x, y) dxdy \qquad (6.7.3)$$

$$I_y = \iint_T = x^2 p(x, y) dxdy \qquad (6.7.4)$$

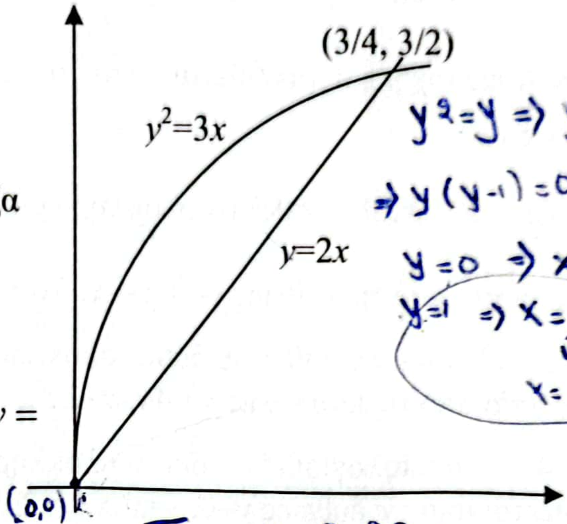
$$I_O = \iint_T (x^2 + y^2) p(x, y) dxdy \qquad (6.7.5)$$

$$I_\ell = \iint_T d^2 p(x, y) dxdy \qquad (6.7.6)$$

όπου $d(x,y)$ είναι η απόσταση του σημείου (x,y) της πλάκας από την ευθεία ℓ .

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας της επίπεδης υλικής περιοχής Τ που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2=3x$, $y=2x$ και έχει σταθερή πυκνότητα ρ.

<u>Λύση</u>: Εφαρμόζουμε τους τύπους:



$y^2 = y \Rightarrow y^2 - y = 0$
$\Rightarrow y(y-1) = 0$
$y=0 \Rightarrow x=0$
$y=1 \Rightarrow x = 1/2$.
ή
$x = 1/3$

$y=\sqrt{3x} \Rightarrow y^2 = 3x^2$
$y = 3/2 \Rightarrow$
$\frac{9}{4} = 3x^2$

$$x_k = \frac{1}{M}\iint_T xp(x,y)dxdy$$

$$y_k = \frac{1}{M}\iint_T yp(x,y)dxdy$$ όπου η μάζα

Μ δίνεται από τον τύπο:

$$M = \iint_T p(x,y)dxdy = p\int_{x=0}^{3/4} dx \int_{y=2x}^{y=\sqrt{3x}} dy =$$

$$= p\int_{x=0}^{3/4} dx\left[\sqrt{3x} - 2x\right] =$$

$$= p\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} - x^2\right]_{x=0}^{3/4} = \frac{3}{16}p$$

$$x_K = \frac{1}{M}\iint_T xpdxdy = \frac{p}{M}\int_{x=0}^{3/4} dx \int_{y=2x}^{\sqrt{3x}} xdy = \frac{16}{3}\int_{x=0}^{3/4} dx\left[xy\right]_{y=2x}^{y=\sqrt{3x}} =$$

$$= \frac{16}{3}\int_{x=0}^{3/4} dx\left[\sqrt{3}x^{3/2} - 2x^2\right] = \frac{16}{3}\left[\frac{2\sqrt{3}}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{3/4} = \frac{3}{10}$$

$$y_k = \frac{1}{M}\iint_T yp(x,y)dxdy = \frac{16}{3}\iint_T ydxdy =$$

$$= \frac{16}{3}\int_{x=0}^{3/4} dx \int_{y=2x}^{y=\sqrt{3x}} ydy = \frac{16}{3}\int_{x=0}^{3/4}\frac{1}{2}\left[3x - 4x^2\right]dx = \frac{3}{4}$$