Introducción a la teoría de portafolios.

Teoría y Estructuración de Portafolios

Docente: Natalia María Acevedo Prins.

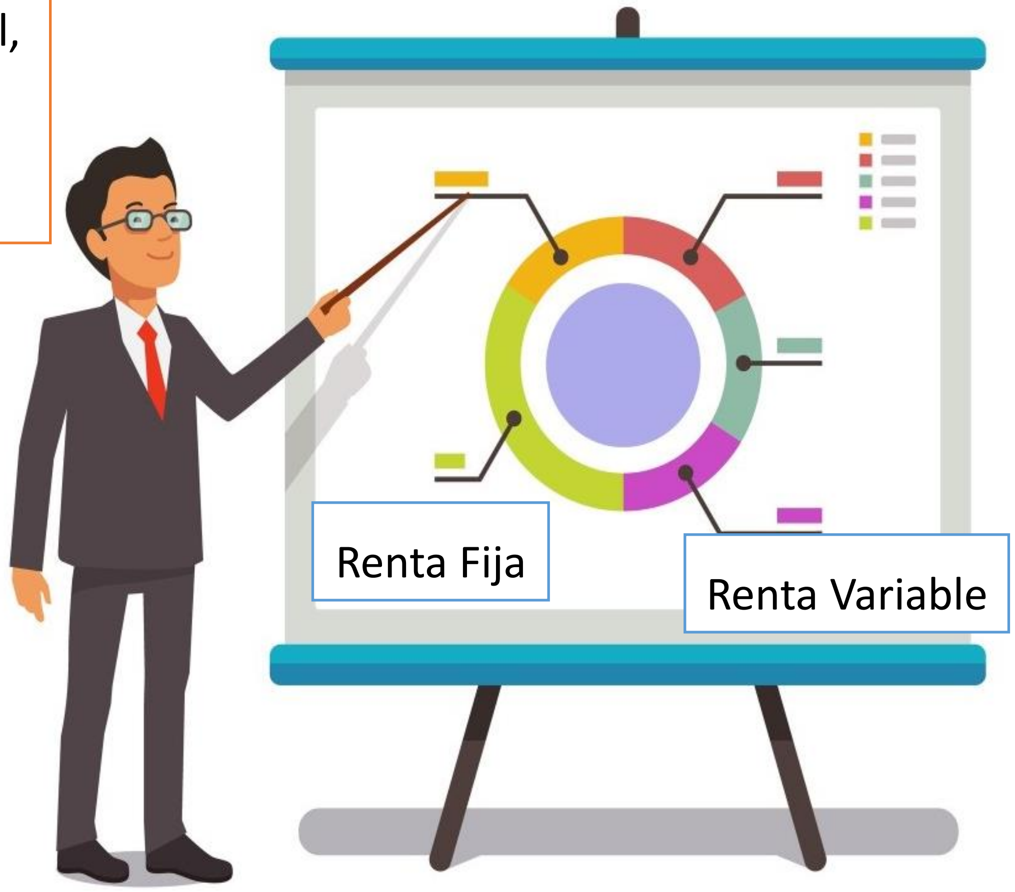
Portafolios de Inversión

Es un conjunto de títulos valores que se cotizan en el mercado bursátil, y en los que una persona o empresa deciden colocar o invertir su dinero.

Objetivo Básico Financiero:

Maximizar los rendimientos minimizando el riesgo.

Tratará entonces de conformar un portafolio diversificado donde ***<u>la pérdida</u>*** en una o en varias acciones ***<u>sea compensada</u>*** por ***<u>la ganancia de una o más acciones</u>***.



Rendimiento esperado del activo para el portafolio

Rendimiento o rentabilidad discreta.

$$\boxed{R = \frac{P_{Final} - P_{Inicial}}{P_{Inicial}} = \frac{P_{Final}}{P_{Inicial}} - 1}$$

Rendimiento o rentabilidad discreta con dividendos .

$$\boxed{R = \frac{P_{Final} - P_{Inicial} + dividendos}{P_{Inicial}} = \frac{P_{Final} + dividendos}{P_{Inicial}} - 1}$$

Rendimiento o rentabilidad continua.

$$\boxed{R = \ln\left[\frac{P_{Final}}{P_{Inicial}}\right]}$$

Rendimiento o rentabilidad continua con dividendos .

$$\boxed{R = \ln\left[\frac{P_{Final} + dividendos}{P_{Inicial}}\right]}$$

De una tasa continua a discreta:

$$\boxed{R = e^{R_c} - 1}$$

De una tasa discreta a continua:

$$\boxed{R_C = ln[1 + R]}$$

Rendimiento esperado del portafolio

$$E[R_P] = \sum_{i=1}^{n} W_i \times R_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$$

$E[R_P]$: rendimiento esperado del portafolio de inversión.

W_i: proporción invertida en el activo i.

R_i: rendimiento esperado del activo i.

n: cantidad de títulos que conforman el portafolio.

La valoración de cada acción y del portafolio de inversión se hace con el último precio, este es el precio de mercado o también llamado precio spot.

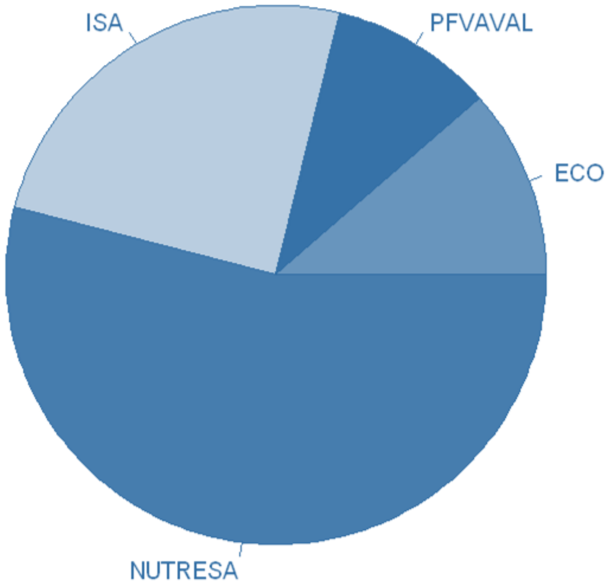
Proporciones de inversión:

$$W_i = \frac{Valor\ de\ mercado\ acción_i}{Valor\ portafolio}$$

$$Valor\ portafolio = \sum_{i=1}^{n} Valor\ de\ mercado\ acción_i \times W_i$$

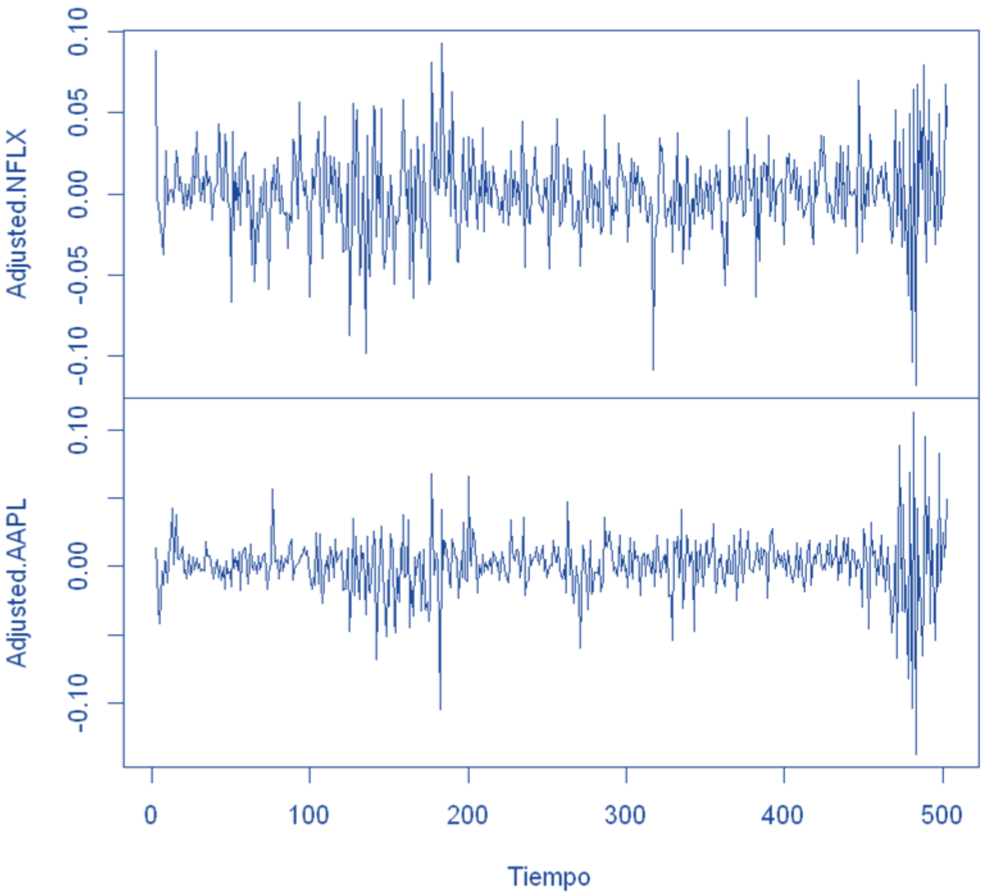
$$Valor\ de\ mercado\ acción = S \times número\ de\ acciones$$

S: precio de la acción, precios *spot o al contado*.



Rendimiento esperado del portafolio

Con datos históricos:



$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}}$$

Valor esperado

μ: rendimiento medio o promedio del activo.

$$\boxed{\mu_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{P_i}}{n}}$$

Valor esperado

μ_P: rendimiento medio o promedio del portafolio.

Volatilidad del activo

Con datos históricos:

La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar: σ.

También se conoce como volatilidad. → **Volatilidad histórica:**

Un solo activo: $$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\mu)^2}}$$

Portafolio de inversión: $$\boxed{\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{P_i}-\mu_P\right)^2}}$$

→ También se puede hallar de otras dos maneras.

Escalamiento en el tiempo

Días bursátiles:

Una semana tiene 5 días.

Un mes tiene 20 días.

Un año tiene 250 días.

Un año tiene 52 semanas.

$$\boxed{\sigma_{semanal} = \sigma_{diaria}\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{semanal}}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{\sigma_{mensual} = \sigma_{diaria}\sqrt{20}}$$

$$\boxed{\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{mensual}}{\sqrt{20}}}$$

$$\boxed{\sigma_{anual} = \sigma_{diaria}\sqrt{250}}$$

$$\boxed{\sigma_{diaria} = \frac{\sigma_{anual}}{\sqrt{250}}}$$

Supuesto:

los rendimientos continuos siguen una distribución normal y están i.i.d.

$$\boxed{E[R_{semanal}] = E[R_{diario}] \times 5}$$

$$\boxed{E[R_{diario}] = \frac{E[R_{semanal}]}{5}}$$

$$\boxed{E[R_{mensual}] = E[R_{diario}] \times 20}$$

$$\boxed{E[R_{diario}] = \frac{E[R_{mensual}]}{20}}$$

$$\boxed{E[R_{anual}] = E[R_{diario}] \times 250}$$

$$\boxed{E[R_{diario}] = \frac{E[R_{anual}]}{250}}$$

Comovimiento

Covarianza:

Es una medida de relación lineal entre dos variables que describe el movimiento conjunto entre éstas.

$$\sigma_{A,B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B)$$

Coeficiente de correlación:

Mide el grado de movimiento conjunto entre dos variables o la relación lineal entre ambas en un rango entre -1 y +1

$$\sigma_{A,B} = \rho_{A,B}\,\sigma_A\,\sigma_B$$

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

+ Si las rentabilidades de los activos tienden a moverse para arriba y para abajo juntas, los dos títulos tienen una correlación positiva.

- Si tienden a moverse en direcciones opuestas, entonces tienen correlación negativa.

0 Si no hay una correlación, entonces están incorrelacionados.

$\rho_{A,B}$: correlación entre los activos A y B.

$\sigma_{A,B}$: covarianza entre los activos A y B.

σ_A: desviación estándar del activo A.

σ_B: desviación estándar del activo B

Rendimiento y Volatilidad portafolio

Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de dos activos:

Rendimiento:

$$\boxed{R_P = w_A R_A + w_B R_B}$$

R_P: Rendimiento esperado del portafolio.

R_i: Rendimiento esperado del activo i.

w_A: Ponderación del activo A.

w_B: Ponderación del activo B.

Volatilidad a partir de la covarianza:

$$\boxed{\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{A,B}}$$

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{A,B}}}$$

σ_P^2: Varianza del portafolio.

σ_P: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

σ_A^2: Varianza del activo A.

σ_B^2: Varianza del activo B.

$\sigma_{A,B}$: Covarianza entre activo A y B.

Volatilidad a partir de la correlación:

$$\boxed{\sigma_P^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_A}}$$

σ_A: Desviación estándar o volatilidad del activo A.

σ_B: Desviación estándar o volatilidad del activo B.

$\rho_{A,B}$: Coeficiente de correlación entre el activo A y B.

Rendimiento y Volatilidad portafolio

Rendimiento esperado y volatilidad de un portafolio de tres activos:

Rendimiento:

$$\boxed{R_P = w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C}$$

Volatilidad a partir de la covarianza:

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_{A,B} + 2w_A w_C \sigma_{A,C} + 2w_B w_C \sigma_{B,C}}}$$

Volatilidad a partir de la correlación:

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2w_A w_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2w_B w_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}}$$

R_P: Rendimiento esperado del portafolio.

R_i: Rendimiento esperado del activo i.

w_1: Ponderación del activo i.

σ_P^2: Varianza del portafolio.

σ_P: Desviación estándar o volatilidad del portafolio.

σ_i^2: Varianza del activo i.

σ_i: Desviación estándar o volatilidad del activo i.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre activo i y j.

$\rho_{i,j}$: Coeficiente de correlación entre el activo i y j.

Volatilidad Portafolio

Forma matricial para calcular la volatilidad de un portafolio de n activos:

$$\boxed{\sigma_P^2 = \begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{W\Omega W^T}}$$

$\begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix}$: Vector fila de ponderaciones

$\begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{A2} & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$: Matriz de varianzas - covarianzas

Ω: Matriz de varianzas – covarianzas.

W: Vector fila de ponderaciones.

W^T: Vector de proporciones transpuesto.

Varianza del portafolio:

$$\begin{bmatrix} W_A & W_B & W_C \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AC} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BC} \\ \sigma_{CA} & \sigma_{CB} & \sigma_C^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix}$$

Vector de proporciones

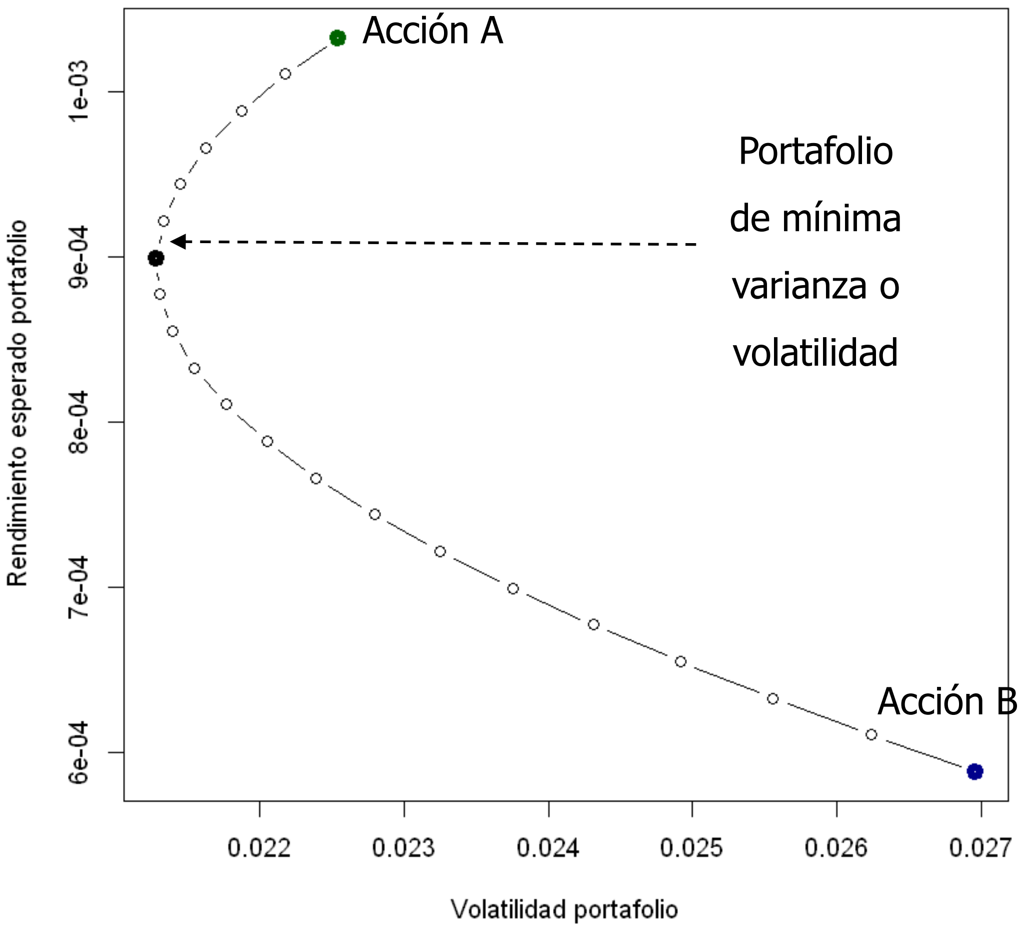
Matriz Varianzas y Covarianzas

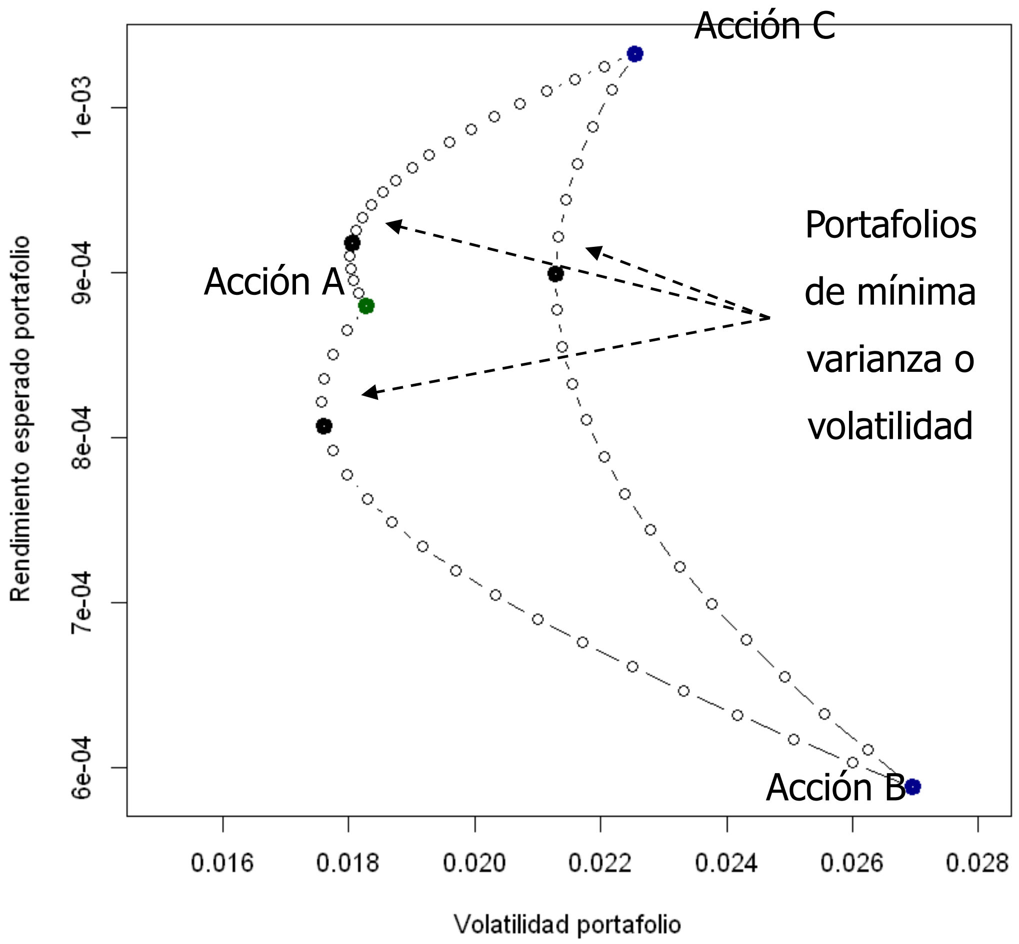
Vector de proporciones transpuesto

$$\begin{bmatrix} V_A & COV_{AB} & COV_{AC} \\ COV_{2A} & V_B & COV_{B3} \\ COV_{CA} & COV_{CB} & V_C \end{bmatrix}$$

Matriz Varianzas y Covarianzas es simétrica

Volatilidad





Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}$$

Correlación negativa perfecta

Si $\rho_{A,B} = -1$

$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB} = \sqrt{(A-B)^2} = A - B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B$$

Es el portafolio de mayor diversificación.

En el caso en que los dos activos tenga igual proporción y volatilidad → $\boldsymbol{\sigma_P}$ **= 0**

Incorrelacionados

Si $\rho_{A,B} = 0$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + \cancel{2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{A,B}}} \quad 0$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_A^2\sigma_B^2 + w_B^2\sigma_B^2}$$

Portafolio incorrelacionado

Correlación positiva perfecta

Si $\rho_{A,B} = +1$

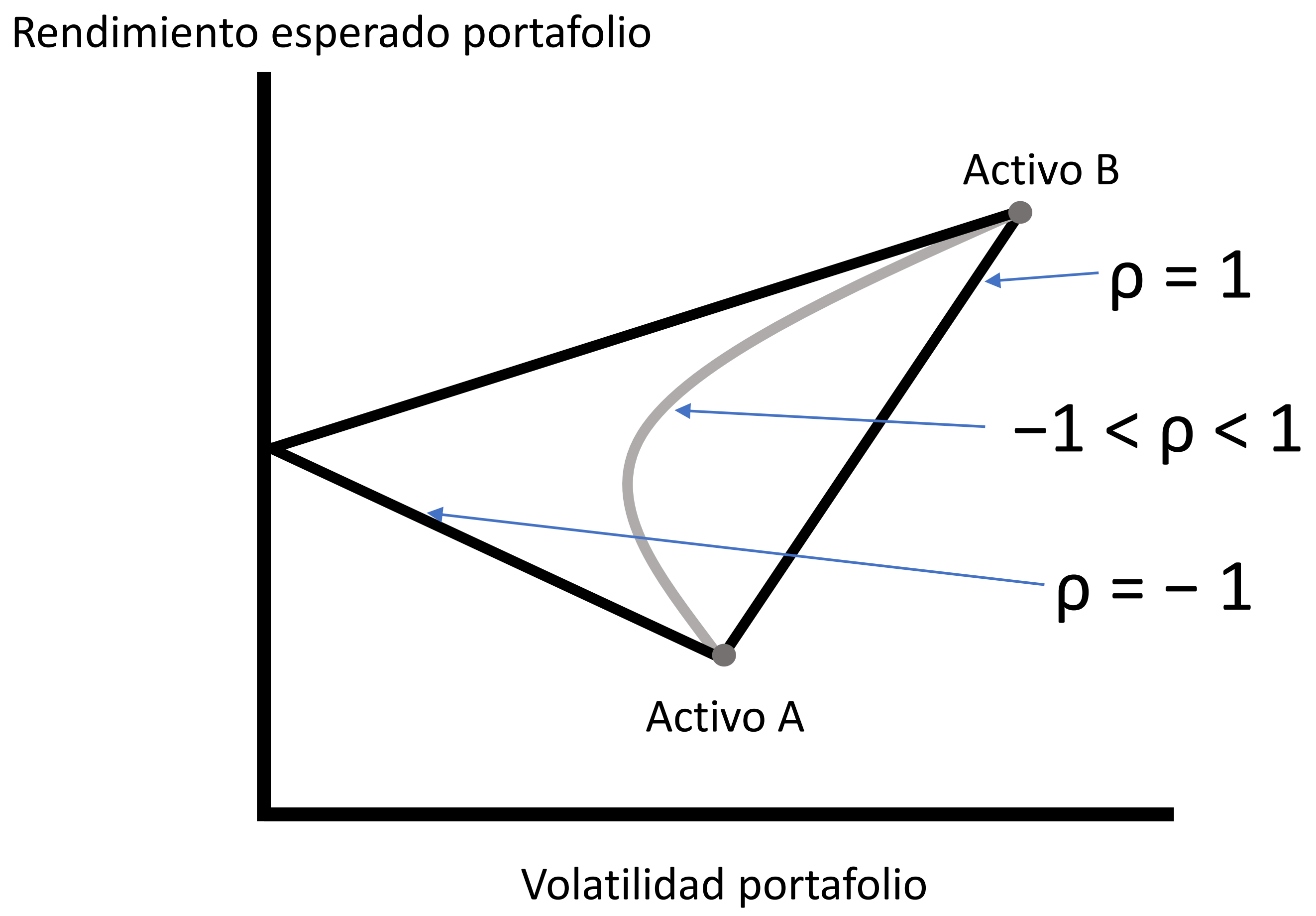
$$\sigma_P = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{(A+B)^2} = A + B$$

$$\sigma_P = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$

Portafolio de mayor riesgo.

Con correlación perfecta positiva el la volatilidad del portafolio es la suma de la volatilidad de cada activo multiplicada por la proporción de cada uno

Efecto del coeficiente de correlación sobre el portafolio



Indicador de diversificación

Diversification score:

Una manera de medir la diversificación es comparar la desviación estándar de los activos en un portafolio con la desviación estándar del mismo portafolio.

$$h = 1 - \frac{\sigma_P}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}$$

Si los activos tienen baja correlación, la volatilidad del portafolio será baja, incluso si la volatilidad de los activos en el portafolio es alta.

Toma valores entre 0 y 1.

0: portafolio no diversificado.

1: portafolio totalmente diversificado.

Introducción a la teoría de portafolios.

¡GRACIAS!

Docente: Natalia María Acevedo Prins.