

1 Równanie Schrödingera dla nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

Mamy studnię potencjału o wymiarach $a = 1$, $b = 1$. Liczby kwantowe n_x , n_y .

Równanie Schrödingera jest dane wzorem

$$i\hbar \frac{\delta \Psi}{\delta t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta x^2} + V\Psi. \quad (1)$$

Potencjał rozważanej studni wynosi

$$V = \begin{cases} 0 & x \in [0, a], y \in [0, b] \\ \infty & \text{wpp}, \end{cases} \quad (2)$$

Z metody rozdzielania zmiennych i warunku unormowania

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right), \quad (3)$$

oraz:

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right). \quad (4)$$

Stąd rozwiązanie równania Schrödingera dla rozważanej studni

$$\Psi(x, y, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right) e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}. \quad (5)$$

2 Poziomy energetyczne

Energia jest dana wzorem

$$E = E_x + E_y, \quad (6)$$

$$E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^3}{a^2 2m} \quad (7)$$

oraz

$$E_y = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^3}{a^2 2m}. \quad (8)$$

Stąd poziomy energetyczne dane są wzorem

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} (n_x^2 + n_y^2). \quad (9)$$

3 Stany nieustalone nieskończonej dwuwymiarowej studni potencjału

Stany nieustalone są dane wzorem

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n(x, t) e^{\frac{-iE_x t}{\hbar^2}} \quad (10)$$

oraz

$$\Psi(y, t) = \sum_{m=1}^N c_m \Psi_m e^{\frac{-iE_y t}{\hbar^2}}. \quad (11)$$

Więc:

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n(x, t) \sum_{m=1}^N c_m \Psi_m e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}, \quad (12)$$

Energia jest dana wzorem

$$E = E_x + E_y \quad (13)$$

Współczynniki w przypadku rozważanej studni są unormowane:

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 = 1. \quad (14)$$

4 Paczka gaussowska w dwuwymiarowej nieskończonej studni potencjału

Rozwiązanie ogólne równania Schrödingera jest liniową kombinacją osobnych rozwiązań

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n(x, t) \sum_{m=1}^N c_m \Psi_m e^{\frac{-iEt}{\hbar^2}}. \quad (15)$$

Współczynniki wyznaczone są wzorem

$$c_n = \int_0^L \Psi_n(x)^* \Psi(x, 0) dx, \quad (16)$$

$$c_m = \int_0^L \Psi_m(y)^* \Psi(y, 0) dy. \quad (17)$$

Warunek początkowy funkcji falowej dla paczki gaussowskiej jest dany rozkładem normalnym

$$\Psi(x, 0) = A e^{\frac{-(x-a_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 x} \quad (18)$$

oraz

$$\Psi(y, 0) = A e^{\frac{-(y-b_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_0 y}. \quad (19)$$