1
Messtechnik Einführung

Autor: SF
Bearbeitet SO
06.12.2017

Inhalt

1 Aufgaben der Messtechnik

Die Aufgabe der Messtechnik ist die objektive, reproduzierbare und quantitative Erfassung einer physikalischen Größe. Dabei bedeutet:

objektiv:	von den Sinnesorganen des Menschen unabhängig
reproduzierbar:	wiederholbar und kontrollierbar,
quantitativ:	mit einer Zahl versehen

Der Philosoph Plato (427 – 347 v. Chr.):
„Das beste Mittel gegen Sinnestäuschungen ist das Messen, Zählen und Wägen. Dadurch wird die Herrschaft der Sinne über uns beseitigt. Wir richten uns nicht mehr nach dem sinnlichen Eindruck der Größe, der Zahl, des Gewichts der Gegenstände, sondern berechnen, messen und wägen sie. Und das ist Sache der Denkkraft, Sache des Geistes in uns“.

Aufgaben der elektrischen Messtechnik:

- Gewinnung des elektrischen Messsignals
- Struktur der Messeinrichtung festlegen
- Eigenschaften der Signalformen bestimmen
- Übertragung und Verarbeitung der Messsignale
- Ausgabe und Darstellung der gewonnenen Informationen

2 Grundlagen der Messtechnik

2.1 Begriffsdefinitionen laut DIN

Begriff	Definition
Messgröße	Ist die physikalische Größe, die durch die Messung bestimmt werden soll. ZB. der Widerstandswert
Messgerät	Ist das Gerät das für die Messung einer Größe vorgesehen ist
Messeinrichtung	Ist ein System, bestehend aus einem/mehreren Messgeräten zusammen inkl. zusätzlicher Einrichtungen für die Messung
Messgrößenaufnehmer	Auch als Messfühler, Detektor oder Sensor bezeichnet, ist der Teil des Messgerätes der auf die physikalische Größe direkt anpricht
Messwert x_i	Ist ein spezieller, gemessener Wert einer Messgröße. (Zahlenwert + Einheit)
wahre Wert x_W	Ist der eindeutig existierende Wert der Messgröße, dieser ist in der Regel jedoch nicht erfassbar (Aufgrund von äußeren Einflüssen oder Rückwirkungen durch das Messgerät selbst verfälscht)
Richtige Wert x_R	ist ein bekannter Wert, dessen Abweichungen vom wahren Wert als

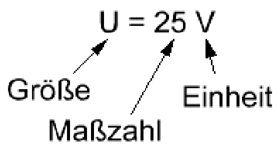
	vernachlässigbar angesehen werden. Er wird auch als Bezugswert verwendet.
Messabweichung e	Ist die Differenz des Messwertes vom wahren Wert

2.1.1 Messen:

Beim Messen wird festgestellt, um wievielmal größer oder kleiner die zu messende Größe im Vergleich zu ihrer Einheit ist.

Darstellung des Messergebnisses → $\boxed{Größe = Maßzahl \cdot Einheit}$

z.B.



Angabe der Einheit einer Größe → $[U] = 1 \cdot V$
(die Einheit der Spannung U ist 1 Volt)

Größen und ihre Einheiten müssen deutlich voneinander unterschieden werden. Daher werden für sie unterschiedliche Symbole verwendet.

2.1.2 Internationales Einheitensystem (SI)

SI → Systéme International d'Unités
Seit 1969 sind die SI-Einheiten für den Geschäfts- und Amtsverkehr verbindlich.

Basisgrößen und –einheiten des SI-Systems:

Basisgröße		Basiseinheit	
Name	Zeichen	Name	Zeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I_V	Candela	Cd
Stoffmenge	n	Mol	mol

Alle anderen physikalischen Größen und Einheiten können auf diese Basisgrößen und – einheiten zurückgeführt werden.

2.1.3 Prüfen, Kalibrieren, Eichen, Justieren

Prüfen	→	ist Festellen ob der Prüfgegenstand einer/mehreren vorgegebenen Bedingungen erfüllt. Das Ergebnis der Prüfung ist die ja/nein Entscheidung
Kalibrieren	→	ist Festellen des Anzeigefehlers eines Messgerätes über den gesamten Messbereich. Kalibiriergebnisse können durch Tabellen oder Kalibrierkurven dargestellt werden.
Eichen	→	ist Kalibieren durch spezielle Eichlabors (“Eichbehörde“)
Justieren	→	ist das Einstellen der Anzeige eines Messgerätes an einem einzigen Punkt des Messbereiches. Beispiel: Nullpunkteinstellung bei einem Zeigermessgerät.

2.1.4 Normalien

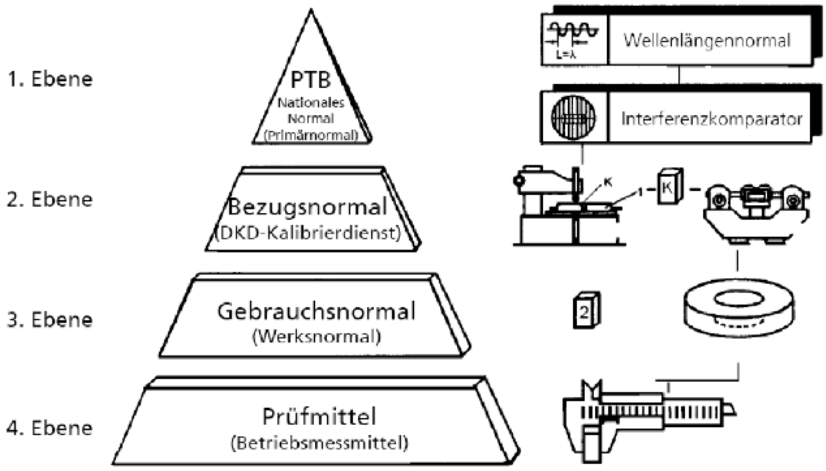
Normalien sind Verkörperungen von Einheiten und sind von den Basisgrößen abgeleitet.

Primärnormalien	→	sind vom Internationalen Büro für Maß und Gewicht unmittelbar durch Primärmessungen von den Basisgrößen abgeleitet. Die einzelnen Länder sind im Besitz solcher Primärnormalien. Sie werden durch staatliche Stellen streng überwacht.
Sekundärnormalien	→	werden von den Primärnormalien abgeleitet und zur Eichung von Arbeitsnormalien in speziellen Eichlabors eingesetzt.
Arbeitsnormalien	→	dienen zur Eichung bzw. Kalibrierung von Messgeräten.

Internationale Normale ↓	Dies sind Normale, die als Basis zur Festlegung des Wertes aller anderen Normale international anerkannt sind. Ein Beispiel für ein solches Urnormal ist der Kilogramm-Prototyp bei Paris zur Definition des Kilogramm.
Primärnormale ↓	Sie werden in den nationalen Instituten aufbewahrt und regelmäßig untereinander und sofern möglich gegen ein internationales Normal verglichen. Beispiele sind die primären Cäsium-Atomuhren der PTB.
Sekundärnormale ↓	Sie stellen die Bezugsnormale in den Kalibrierstellen, z.B. DKD-Laboren oder Kalibrierstellen großer Industrieunternehmen dar. Sie werden außer zu Vergleichsmessungen mit anderen Normalen nicht unmittelbar für Messungen benutzt.
Gebrauchsnormale	Diese Normale sind in den Produktionslinien der Betriebe und sind die Referenzgeräte zur Sicherung der Kenndaten der Produkte.

2.1.5 Rückführbarkeit, Kalibrierkette

Die Verlässlichkeit eines Messergebnisses und Sicherung der Genauigkeit hängt wesentlich von den verwendeten Referenzgeräten bzw. Kalibriereinrichtungen ab. Als Rückverfolgbarkeit wird dabei die Eigenschaft eines Messergebnisses bezeichnet, durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichen auf entsprechende nationale Normale bezogen zu sein.



Diese Vorgehensweise ist aufwendig, drückt sich aber in der Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Produkte aus. Das Qualitätsmanagement hat dabei die Aufgabe, die Qualität der Produkte sicherzustellen. Zur Vereinheitlichung beschreiben die Normen ISO 9000 bis ISO 9004 Elemente der Qualitätssicherung für alle Bereiche einer Firma

Für den Bereich Prüfungen und Prüfmittel schreibt die Norm eine Rückführbarkeit der verwendeten Messmittel inklusive der Dokumentation und Berechnung der Unsicherheiten vor.

2.1.5.1 Darstellung von Kalibrierergebnissen

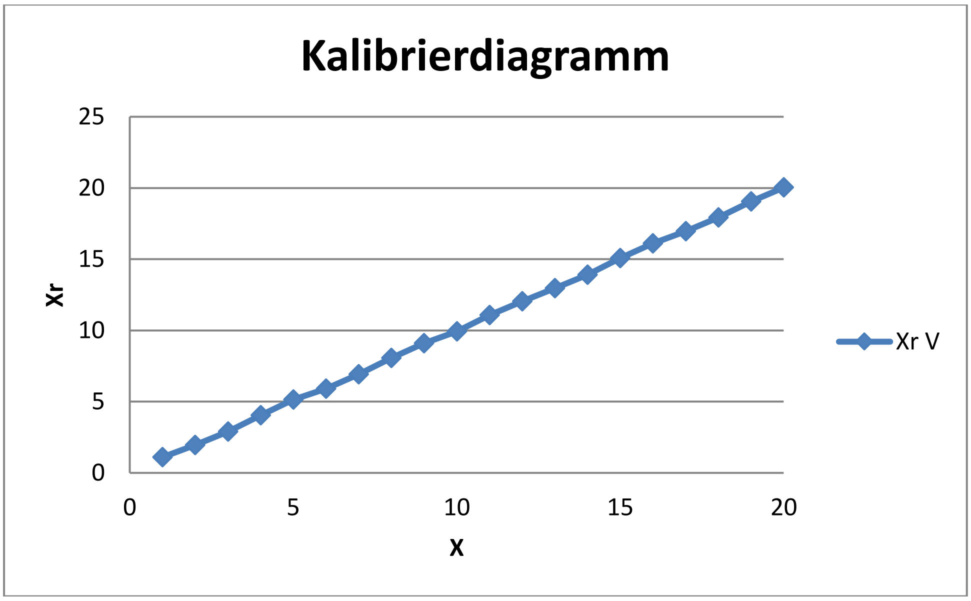
Beispiel: Kalibrierung eines Voltmeters im Messbereich 0 – 20V DC

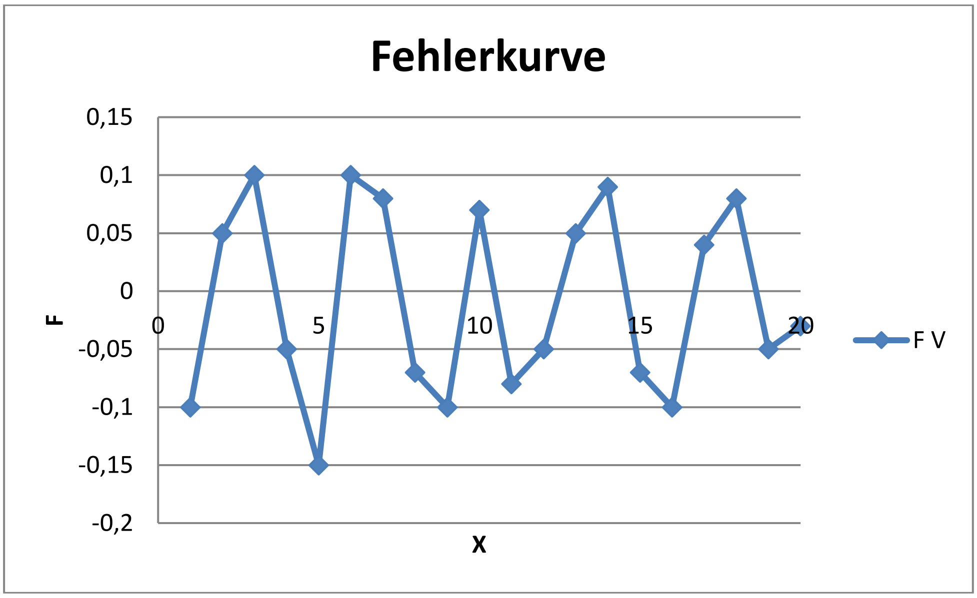
Kalibriertabelle:

X	Xr	F	f
[V]	[V]	[V]	[%]
1	1,1	-0,1	-9,09
2	1,95	0,05	2,56
3	2,9	0,1	3,45
4	4,05	-0,05	-1,23
5	5,15	-0,15	-2,91
6	5,9	0,1	1,69
7	6,92	0,08	1,16
8	8,07	-0,07	-0,87
9	9,1	-0,1	-1,10
10	9,93	0,07	0,70
11	11,08	-0,08	-0,72
12	12,05	-0,05	-0,41
13	12,95	0,05	0,39

X…gemessener Wert
Xr…richtiger Wert
F…absoluter Messfehler
f…relativer Messfehler in%

14	13,91	0,09	0,65
15	15,07	-0,07	-0,46
16	16,1	-0,1	-0,62
17	16,96	0,04	0,24
18	17,92	0,08	0,45
19	19,05	-0,05	-0,26
20	20,03	-0,03	-0,15



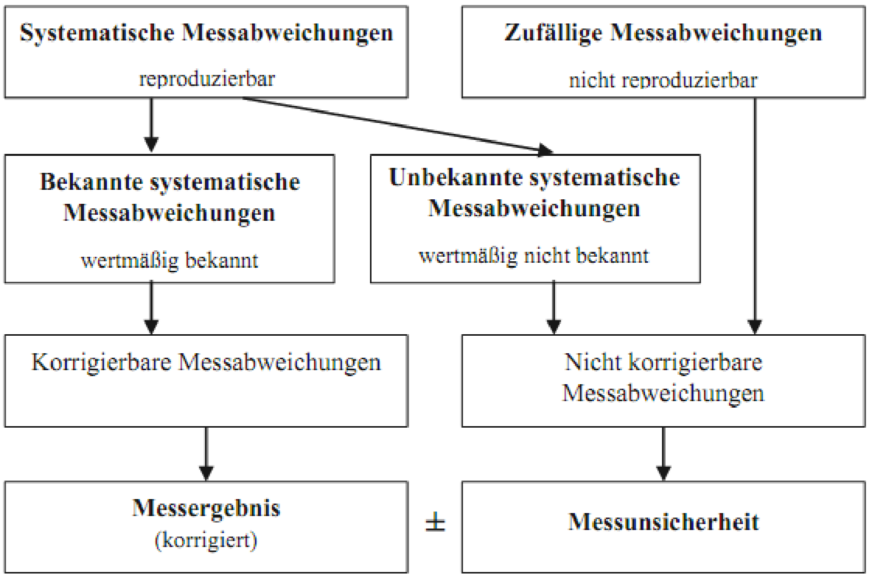


2.2 Messfehler

Grundsätzlich gilt: *„Jeder Messwert ist mit Fehlern behaftet!“*

Wir eine physikalische Größe mit mehreren Messgeräten gemessen, oder mehrmals mit demselben Messgerät, zeigen sich bei genauem Vergleich Unterschiede zwischen den Messwerten, die durch Messfehler bedingt sind.

2.2.1 Fehlerarten und Fehlerangaben



Es werden zwei Arten von Fehlern unterschieden:

Systematische Messabweichungen

- sind Fehler, die unter gleichen Messbedingungen immer mit gleichem Betrag und Vorzeichen auftreten.
- sind vorhersehbar und korrigierbar.
- haben folgende Ursachen:
  - Belastung des Messobjekts mit dem Messgerät
    (z.B. Innenwiderstand des Spannungsmessers parallel zu den Messpunkten)
  - Fehler in der Messwertumformung des Messgeräts
    (z.B. Temperaturgang des Messgeräts)

Zufällige Messabweichungen

- sind Fehler, die unter gleichen Messbedingungen mit unterschiedlichen Beträgen und Vorzeichen auftreten.
- sind nicht vorhersehbar und daher auch nicht korrigierbar.
- können durch häufige Wiederholung des Messvorganges erkannt werden.
- haben z.B. folgende Ursachen:
  - ungenaues Ablesen des Messwertes (z.B. bei Zeigerinstrumenten)
  - Einstreuung von Fremdsignalen (Stichwort: EMV)
  - schlechte Kontakte
  - usw.

2.2.2 Angabe von Messfehlern

Der **<u>absolute Fehler</u>** ist die Differenz zwischen dem gemessenen Wert und dem richtigen Wert der Messgröße.
Er hat die gleiche Einheit wie die Messgröße.

$$\boxed{F = \Delta x = x - x_R}$$

F	absoluter Fehler
x	gemessener Wert der Messgröße
x_R	richtiger Wert der Messgröße
Δx	Differenz der Messwerte

Um die Größe besser einschätzen zu können, wird der absolute Fehler auf den richtigen Messwert bezogen. So entsteht die Angabe des relativen Fehlers.

Der **<u>relative Fehler</u>** bezieht den absoluten Fehler auf den richtigen Wert der Messgröße.
Der relative Fehler hat keine Einheit.

$$\boxed{f = \frac{F}{x_R} = \frac{x - x_R}{x_R}}$$

f relativer Fehler

Bei Messgeräten ist es üblich, den relativen Fehler auf den Messbereichsendwert zu beziehen.

$$\boxed{f_A = \frac{F}{x_R} = \frac{x - x_R}{x_E}}$$

f_A relativer Anzeigefehler eines Messgeräts

x_E Messbereichsendwert des Messgeräts

Der relative Fehler wird häufig in Prozent angegeben.

$$\boxed{f_{\%} = f \cdot 100\%}$$

2.2.3 Umgang mit systematischen Messfehlern

Systematische Fehler können grundsätzlich korrigiert werden. Diese Korrektur ist bei größeren Fehlern notwendig.
In diesem Fall werden Korrekturtabellen oder –Kurven erstellt, nach denen der angezeigte Messwert korrigiert werden kann.

Häufig wird auf eine Korrektur verzichtet und man gibt beim gemessenen Wert nur den *maximal möglichen relativen Fehler* an.

Wird das Messergebnis aus mehreren Teilmesswerten durch Rechenoperationen gebildet, so gehen die Einzelfehler nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten in das Messergebnis ein. Diese Gesetzmäßigkeiten werden *Fehlerfortpflanzungsgesetze* genannt.

2.2.3.1 Fehlerfortpflanzung bei systematischen Fehlern

- Bei der Addition von Messwerten werden die absoluten Fehler addiert.

$$\boxed{x = x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad F = F_1 + F_2}$$

- Bei der Subtraktion von Messwerten werden die absoluten Fehler subtrahiert

$$\boxed{x = x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad F = F_1 - F_2}$$

- Bei der Multiplikation von Messwerten werden die relativen Fehler addiert.

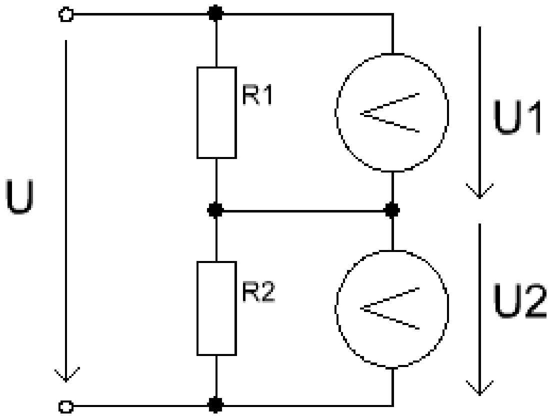
$$\boxed{x = x_1 \cdot x_2 \quad \rightarrow \quad f = f_1 + f_2}$$

- Bei der Division von Messwerten wird der relative Fehler des Nenners vom relativen Fehler des Zählers subtrahiert.

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_2} \quad \rightarrow \quad f = f_1 - f_2}$$

Beispiele:

ACHTUNG: Bei diesen Beispielen werden nur systematische Fehler betrachtet. D.h. das Voltmeter zeigt z.B. immer zu viel an (= positiver Fehler) Eine Fehlerbetrachtung bei Messungen sollte besser mit den in Kapitel :2.2.6 beschriebenen Verfahren gemacht werden.



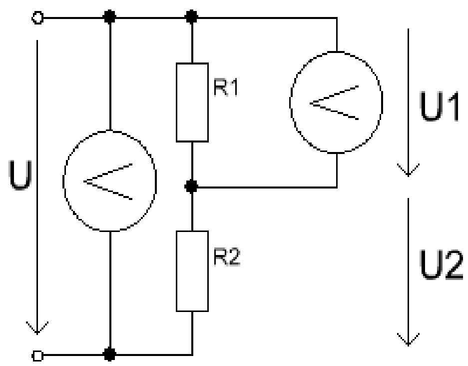
Relativer Fehler der Messgeräte:
$f_{\%} = +1\%$
Messbereichsendwert:
$x_E = 24V$
Angezeigte Werte:
U1 = 15V, U2 = 5V
absoluter Fehler der Einzelmesswerte:

$$F_1 = F_2 = \frac{f_{\%}}{100\%} \cdot x_E = \frac{1\%}{100\%} \cdot 24V = 0{,}24V$$

Fehler der Gesamtspannung U:
$\underline{F_U} = F_1 + F_2 = 0{,}24V + 0{,}24V = \underline{0{,}48V}$

Die messtechnisch ermittelte Gesamtspannung von 20V ist um 0,48V zu hoch (der gesamte relative Fehler ergibt sich zu 0,48/(20-0,48)=0,025 also 2,5%)

Abbildung 1, Addition von Messwerten



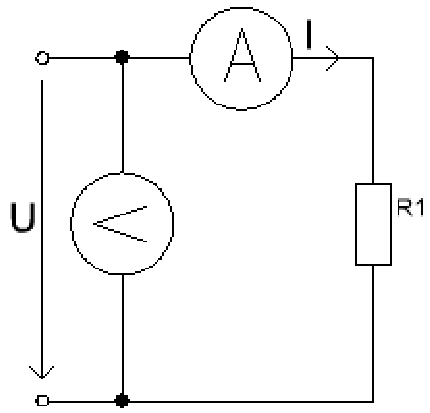
Relativer Fehler der Messgeräte:
$f_{\%} = +1\%$
Messbereichsendwert:
$x_E = 24V$
Angezeigte Werte:
U = 20V, U1 = 15V
absoluter Fehler der Einzelmesswerte:

$$F_U = F_1 = \frac{f_{\%}}{100\%} \cdot x_E = \frac{1\%}{100\%} \cdot 24V = 0{,}24V$$

Fehler der Teilspannung U2:
$\underline{F_{U2}} = F_u - F_1 = 0{,}24V - 0{,}24V = \underline{0V}$

Die messtechnisch ermittelte Spannung von U2 ist nicht Fehlerbehaftet, da sich die Einzelfehler „zufällig“ aufheben

Abbildung 2, Subtraktion von Messwerten



Relative Fehler der Messgeräte:
$f_{V\%} = 1\%$, $f_{A\%} = 1{,}5\%$
relativer Fehler der Leistung P:

$$f_P = f_V + f_A = 0{,}01 + 0{,}015 = 0{,}025$$

$$f_{P\%} = 2{,}5\%$$

relativer Fehler des Widerstandes R:

$$f_R = f_V - f_A = 0{,}01 - 0{,}015 = -0{,}005$$

$$f_{R\%} = 0{,}5\%$$

Die messtechnisch ermittelte Leistung ist also um 2,5% größer als die tatsächliche und der Widerstand um 0,5%

Abbildung 3, Multiplikation und Division von Messwerten

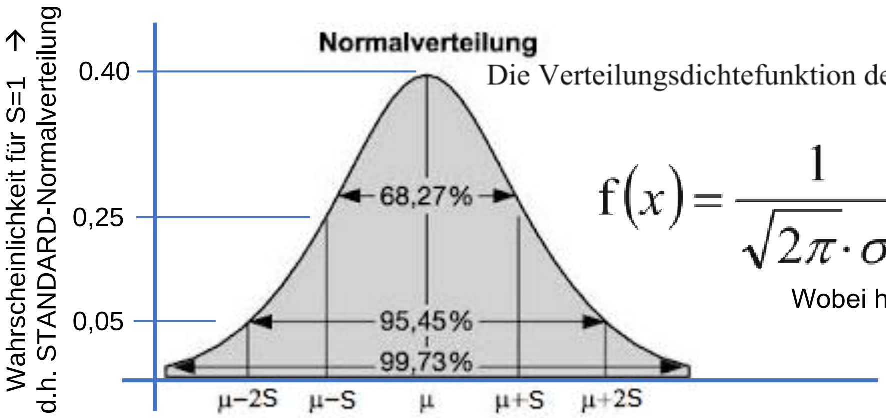
2.2.4 Umgang mit zufälligen Messfehler

Bestimmung der Messunsicherheit u eines Messgerätes bzw. einer Messmethode:

In der Praxis wird zur Bestimmung der Messunsicherheit eines Messgerätes oder einer Messmethode eine Reihe von <u>*Einzelmessungen an der gleichen Messgröße unter gleichen Bedingungen*</u> durchgeführt.
Daraus wird die Standardabweichung s nach folgender Formel bestimmt:

$$\text{Standardabweichung} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{mit Mittelwert} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Für die Messunsicherheit bei nur einer Messung gilt dann näherungsweise:



Die Verteilungsdichtefunktion der Normalverteilung ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-0{,}5 \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Wobei hier das σ für S steht

Messunsicherheit u = +/- 2s bei 95,5% statistischer Sicherheit
Messunsicherheit u = +/-3s bei 99,7% statistischer Sicherheit.

Angabe eines einzelnen Messwertes: X = x +/- u

Beispiel: Spannungsmessung mit dem Oszilloskop

Mit einem Oszilloskop wurde der Spitze – Spitze Wert (Vss) 10 mal unabhängig voneinander gemessen. Es ergaben sich folgende Messwerte:

Messnummer	**Messwert Vss [V]**
1	2,455
2	2,540
3	2,330
4	2,410
5	2,595
6	2,480
7	2,420
8	2,590
9	2,315
10	2,490

Daraus ergibt sich:

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}462V$

Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}097V$

Messunsicherheit eines Einzelmesswertes **u = +/- 0,194 V bei 95% statistischer Sicherheit.**

Wird z.B. durch eine Einzelmessung ein Wert von Uss = 2,1 V bestimmt, kann folgende Aussage getroffen werden:

Der wahre Wert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% im Intervall von 2,1 V +/- 0,194 V!

2.2.5 Verbesserung der Messgenauigkeit durch wiederholtes Messen

Durch wiederholtes messen derselben Größe mit derselben Messmethode kann die Messgenauigkeit erhöht werden. Desto mehr Einzelmessungen durchgeführt werden, umso kleiner wird die Messunsicherheit.

Im vorigen Beispiel erhalten nach 10 Messungen einen Mittelwert von $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}462V$

Bei mehrmaligem Wiederholen der **Messserie** würden sich unterschiedliche Mittelwerte ergeben.

Die *Standardabweichung der einzelnen Mittelwerte* ergibt sich zu $\boxed{\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$ und wird auch ***mittlerer Fehler des Mittelwertes*** genannt.

In unserem Beispiel ergibt sich $\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}097}{\sqrt{10}} = 0{,}031V$

Damit gilt nach 10 maliger Messung:

Der wahre Wert beträgt 2,462 V +/- 0,031 V

Wichtig: Die Einzelmessungen müssen völlig unabhängig voneinander sein

2.2.6 Fehlerfortpflanzung bei zufälligen Fehlern

Da zufällige Fehler schwankende Vorzeichen haben, können sich Einzelfehler bei Berechnungen teilweise aufheben. Der Gesamtfehler ist daher statistisch zu ermitteln.

Bei *Addition **und** Subtraktion* ergibt sich der Fehler des Ergebnisses nach:

$$\boxed{F_y = \sqrt{F_{x1}^2 + F_{x2}^2 + ... + F_{xn}^2}}$$

relativer Fehler: $\boxed{f_y = \frac{F_y}{X_y}}$

<u>Beispiel:</u>
Zwei Ströme werden gemessen zu I_1 = 3,176 +/-0,095 mA und I_2 = 1,465 +/-0,059 mA.
Der zufällige Fehler der Summenstromes ergibt sich daraus zu

$F_I = \sqrt{F_{I1}^2 + F_{I2}^2} = \sqrt{0{,}095^2 + 0{,}059^2}\,mA = 0{,}112mA$ $\quad f_I$=0,112mA/4,641mA=0,024

Ergebnis: I = 4,641 +/-0,112 mA bzw. +/-2,4%

Bei *Multiplikation* von Messwerten ergibt sich der Fehler des Ergebnisses nach:

$$\boxed{F_y = \sqrt{(X_1 F_2)^2 + (X_2 F_1)^2}}$$

relativer Fehler: $\boxed{f_y = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + ... + (f_n)^2}}$

Formel ist für multipl. und div. Identisch !

<u>Beispiel:</u>
Messwerte U = 14,3V +/- 0,3V I = 1,7A +/- 0,1A
Der zufällige Fehler der Leistung ergibt sich damit zu

$F_P = \sqrt{(UF_I)^2 + (IF_U)^2} = \sqrt{(14{,}3 \cdot 0{,}1)^2 + (1{,}7 \cdot 0{,}3)^2}\,W = 1{,}52W$ $\quad f_P = \sqrt{(0{,}021)^2 + (0{,}059)^2} = 0{,}062$

Ergebnis: P = 24,31 +/-1,52 W oder +/-6,2%

Bei *Division* von Messwerten ergibt sich der Fehler des Ergebnisses nach:

$$\boxed{F_y = \sqrt{(\frac{F_1}{X_2})^2 + (\frac{X_1}{X_2^2} F_2)^2}}$$

relativer Fehler: $\boxed{f_y = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + ... + (f_n)^2}}$

Formel ist für multipl. und div. Identisch !

<u>Beispiel:</u>
Messwerte U = 7,13V +/- 0,21V I = 0,417 +/- 0,01A
Der zufällige Fehler des Widerstandes ergibt sich damit zu

$$F_R = \sqrt{(\frac{F_U}{I})^2 + (\frac{U}{I^2} F_I)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}21}{0{,}417}\right)^2 + \left(\frac{7{,}13}{0{,}417^2} \cdot 0{,}01\right)^2} = 0{,}65\Omega$$

$f_P = \sqrt{(0{,}029)^2 + (0{,}024)^2} = 0{,}038$ **Ergebnis: R = 17,09 +/-0,65 Ω oder +/-6,5%**

2.2.7 Unterscheidung der Begriffe bei Messgeräten

2.2.7.1 Anzeigebereich und Messbereich

Jedes Messgerät kann die Messgröße nur in einem bestimmten Bereich erfassen. Zu unterscheiden ist hierbei zwischen Anzeige- und Messbereich. Der **Anzeigebereich** (Display Range) ist der Bereich der Messgröße, innerhalb dessen Werte angezeigt werden. Der darin enthaltene **Messbereich** (Specified Measuring Range) ist der Bereich der Messgröße, der vom Messgerät erfasst wird und in dem vom Hersteller festgelegte Genauigkeitsangaben gelten. So kann zum Beispiel ein Temperaturmesser einen Anzeigebereich von -100°C bis 500°C und einem Messbereich von -40°C bis 400°C mit der Angabe der Genauigkeit in diesem Bereich besitzen. Außerhalb des Messbereiches werden zwar Messwerte angezeigt, aber keine Genauigkeitsangaben dazu angegeben. Bei Geräten mit mehreren Messbereichen können für die einzelnen Messbereiche unterschiedliche Genauigkeitsangaben gelten.

2.2.7.2 Auflösung und Genauigkeit

Die **Auflösung** (Resolution) einer Messeinrichtung ist die kleinste darstellbare, bzw. ausgebbare Änderung der Ausgangsgröße. Sie entspricht z.B. bei einem Analog-Digitalwandler der Anzahl der Bits.Der Begriff Auflösung ist deutlich von der **Genauigkeit** (Accuracy), zu unterscheiden. So kann ein Digitalvoltmeter im Anzeigebereich bis 1V eine Auflösung (analog zur Bit-Auflösung) von 0,1mV und eine Genauigkeit von 5mV besitzen. In der Regel ist es sinnvoll, die Auflösung etwa eine Zehnerpotenz kleiner als die zu erwartende Genauigkeit zu wählen, damit durch die Auflösung keine nennenswerten zusätzlichen Abweichungen entstehen.

2.2.8 Fehlerangaben bei Messgeräten

2.2.8.1 Garantiefehlergrenzen

Die Garantiefehlergrenzen eines Messgeräts sind die vom Hersteller garantierten maximal zulässigen Fehlergrenzen unter den angegebenen Bedingungen. Sie sind auf den Messbereichsendwert bezogen und können zweiseitige (+/-) oder einseitige (+ oder -) Fehler sein und wird meist in % angegeben.

$$\boxed{G = \frac{F}{x_E} \cdot 100\%}$$

G	Garantiefehlergrenze
F	absoluter Fehler
x_E	Endwert des Messbereichs

Aus den Garantiefehlergrenzen können der maximale absolute Fehler F innerhalb des Messbereichs und der maximale relative Fehler f eines Messwerts bestimmt werden:

$$\boxed{F = \frac{G \cdot x_E}{100\%}} \qquad \boxed{f = \frac{F}{x} = \frac{x_E}{x} \cdot \frac{G}{100\%}}$$

UM DEN RELATIVEN MESSFEHLER KLEIN ZU HALTEN, SOLLTE DER MESSBEREICH SO GEWÄHLT WERDEN, DASS DIE ANZEIGE IN DER NÄHE DES BEREICHSENDWERTS ERFOLGT.

Absolute oder relative Angabe der Grenzwerte:

Beispiel:
Angabe der Abweichungsgrenzwerte eines Spannungsmessers:

absolut	$\pm$ 1V	
relativ	$\pm$ 0,5%	bezogen auf den Anzeigewert
Kombination	$\pm$ (0,5% $\cdot$ Messwert + 20mV) .	

zusätzlicher Fehler bei Digitalanzeigen:

Bei digital anzeigenden Messgeräten kommt zusätzlich noch der **Quantisierungsfehler** von +/-1 Digit dazu.
D.H. die Anzeige der niederwertigsten Stelle hat einen maximalen Fehler von +/-1.

Beispiele:

Anzeige 1000 → rel. Fehler 1/1000 = 1°/oo
Anzeige 100 → rel. Fehler 1/100 = 1%
Anzeige 10 → rel. Fehler 1/10 = 10%

Auch Digitalanzeiger sollten daher in der Nähe des Bereichsendwerts betrieben werden, um den relativen Anzeigefehler klein zu halten.

2.2.8.2 Klasseneinteilung von Messgeräten

Messgeräte werden entsprechend ihrer Garantiefehlergrenzen in Genauigkeitsklassen eingeteilt. Der Klassenindex kennzeichnet die Genauigkeitsklasse und entspricht der maximal zulässigen, relativen Messabweichung, bezogen auf den Skalenendwert.
Je Messgerätearte gibt es dafür eigene Normen: zB: analoge Messgeräte IEC51 (DIN 43780)
Im Normalfall gibt die Genauigkeitsklasse einen Bereich von 2σ der Normalverteilung an.
D.h. der tatsächliche Messwert liegt mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit im angegebenen Bereich falls alle geforderten Umgebungsbedingungen erfüllt sind.

Beispiel:
Garantiefehlergrenze +/-1,5% bedeutet Klasse 1,5.

Klasseneinteilung:

Feinmessgeräte	Betriebsmessgeräte
Klassen	Klassen
0,05; 0,1; 0,2; 0,5	1; 1,5; 2,5; 5

Beispiel:

Ein Spannungsmesser der Genauigkeitsklasse 0,5 und einem Skalenendwert von 10V hat damit im gesamten Messbereich eine maximal zulässige relative Messabweichung von 0,5% bezogen auf den Skalenendwert von 10V, oder als absolute Angabe: eine zulässige Messabweichung von +/- 05% * 10V= +/- 0,05V für alle Messwerte innerhalb des Messbereichs.

Vorsicht ist bei der Spezifikation in % bezogen auf den Skalenendwert geboten. Dies hat zur Konsequenz, dass bei Nicht-Vollaussteuerung deutlich größere, relative Abweichungen zulässig sind. Für das obige Beispiel beträgt die zulässige relative Messabweichung bezogen auf einen Anzeigewert von 5V schon 0,05V/ 5V = 1% und einen Anzeigewert von 1V sogar 0,05V/ 1V = 5%.
<u>Deshalb sollen die Messinstrumente durch geeignete Bereichswahl immer möglichst weit ausgesteuert werden.</u>

(Mess)unsicherheit u:
Sie kennzeichnet die Streuung der Werte, die der Messgröße vernünftigerweise zugeordnet werden können. Die Unsicherheit $u(x)$ des Messwertes oder Messergebnisses x kann als Schätzung der Messabweichung angesehen werden. Der wahre Wert liegt mit relativ großer Wahrscheinlichkeit im Intervall $x \pm u(x)$.
Die Messunsicherheit wird entweder m.H. statistischer Methoden aus den Messwerten ermittelt (Methode A) oder, wenn dies nicht möglich ist, auf der Grundlage aller vorliegenden Informationen zu den Messgeräten und Messverfahren geschätzt (Methode B).
Beispiel (für den Messwert $l = 1{,}254$ m):
$u(l) = 0{,}005$ m (**absolute Unsicherheit**),
$u(l)/l = 0{,}4\%$ (**relative Unsicherheit**)

Vollständiges Messergebnis
Messergebnis mit Messunsicherheit. Die Unsicherheit wird mit 1...2 Stellen angegeben. Mögliche Schreibweisen sind:
$l = 1{,}254 \text{ m} \pm 5 \text{ mm}$
$l = (1{,}254 \pm 0{,}005) \text{ m}$
$l = 1{,}254(5) \text{ m}$
$l = 1{,}254 \text{ m}$ und $u(l)/l = 0{,}4\ \%$

2 Ermittlung von Messunsicherheiten

Zur Abschätzung der Genauigkeit von Messungen dienen verschiedene Informationsquellen, z.B. die Messwertstatistik (↗Methode A), Herstellerangaben und Zertifikate zu den verwendeten Messgeräten, oder einfache Schätzung. Damit die auf verschiedenen Wegen ermittelten Unsicherheiten quantitativ vergleichbar sind, sollen sie grundsätzlich immer die Bedeutung einer Standardabweichung haben. Um das zu betonen, nennt man sie auch Standardunsicherheiten.

2.1 Ermittlungsmethode A

Wird eine Messgröße x n mal gemessen, so streuen die einzelnen Messwerte x_i ($i = 1 \dots n$) aufgrund der zufälligen Messabweichungen um einen Erwartungswert μ. Die Verteilung der Messwerte ist meist näherungsweise eine Normalverteilung (Abb.1). Der beste Schätzwert für μ ist dann der **arithmetische Mittelwert**

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (1)$$

Ein Maß für die Streuung der Messwerte ist die **Standardabweichung** σ. Der aus den Messwerten berechnete beste Schätzwert für σ ist die experimentelle Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \,. \qquad (2)$$

Bei einer Normalverteilung liegen etwa 68 % der Messwerte im Intervall $\mu \pm \sigma$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert in diesem Intervall anzutreffen, beträgt 68 %. Für das Intervall $\mu \pm 2\sigma$ beträgt diese Wahrscheinlichkeit etwa 95 %.

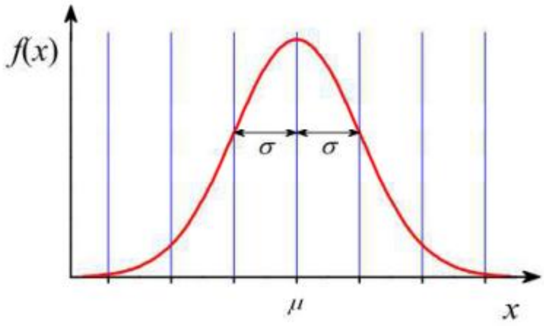


Abb. 1: *Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ*

Wenn zufällige Messunsicherheiten dominieren (d.h. systematische Unsicherheitsanteile vernachlässigt werden können), ist die Unsicherheit eines Einzelmesswertes $u(x) = s$.
Der Mittelwert $\overline{x}$ aus n Einzelmesswerten ist genauer als ein einzelner Messwert. Man kann sich vorstellen, viele Messreihen der Messgröße x vom selben Umfang n aufzunehmen. Die Mittelwerte aller dieser Messreihen werden sich etwas voneinander unterscheiden. Sie sind ebenfalls normal-

verteilt, das Maß für ihre Streuung ist die **Standardabweichung des Mittelwertes**:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Ist das Messergebnis ein Mittelwert $\bar{x}$ einer Messreihe mit ausreichend vielen ($n \geq 10$) Messwerten x_i und können dabei die systematischen Unsicherheitsanteile gegenüber den zufälligen vernachlässigt werden, so ist die Messunsicherheit:

$$u(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}. \quad (4)$$

Weitere Beispiele, wie Messunsicherheiten m.H. statistischer Methoden als Standardabweichungen berechnet werden, finden sich in Abschnitt 3 (Regression).

2.2 Ermittlungsmethode B

Wenn die Berechnung einer Standardabweichung nicht möglich ist (z.B. weil systematische Unsicherheiten immer in gleicher Weise wirken oder weil nur ein Messwert vorhanden ist), wird die Standardunsicherheit auf der Basis aller vorliegenden Informationen geschätzt.

2.2.1 Toleranzangaben zu Messgeräten

In Bedienungsanleitungen von Messgeräten findet man Angaben zu Messtoleranzen oder garantierten Messgenauigkeiten (Beispiele: 1,5 % vom Messbereich; 0,5 % vom Messwert + 3 Digit). Auf manchen Geräten ist die „Genauigkeitsklasse" angegeben. Das ist die maximale Messabweichung in % vom Endwert des Messbereichs bzw. vom Wert der Maßverkörperung.

Bezeichnet man die Toleranz eines Messwertes x mit $t(x)$, so ergibt sich daraus seine Standardunsicherheit entsprechend

$$u(x) = t(x)/\sqrt{3}. \quad (5)$$

Erklärung: Einzige Information ist die Garantie, dass die Messabweichung nicht größer ist als $t(x)$. Daher ordnet man der Messgröße x eine Gleichverteilung der Breite $2t$ zu. Deren Standardabweichung ist $t/\sqrt{3}$.

2.2.2 Unsicherheit von Zählrohrmessungen

Zählt man zufällige Ereignisse in einem Zeitintervall (z.B. bei Messung mit einem Geigerzähler) und werden N Ereignisse gezählt, so ist die Messunsicherheit (ohne Berücksichtigung systematischer Einflüsse)

$u(N) = \sqrt{N}$.

Erklärung: siehe Versuch O16

2.2.3 Schätzung der Messunsicherheit

Bei sehr einfachen Messgeräten liegen oft keine Angaben zur Messgenauigkeit vor. Dann ist die Standardunsicherheit (nicht die maximale Messabweichung!) zu schätzen. Sie setzt sich zusammen aus der Ungenauigkeit des Messgerätes selbst und der Ungenauigkeit beim Ablesen des Wertes.

- Ablesen von Skalen (Lineal, Thermometer,...): $u(x) \approx 0{,}5$ Skalenteile
- Längenmessungen mit einem Messschieber (Noniusablesung): $u(l) = 1$ Skalenteil des Nonius
- Messung eines Zeitintervalls mit einer Handstoppuhr: $u(t) \approx 0{,}1$ s

2.3 Die Unsicherheit von Messergebnissen („Fehlerfortpflanzung")

Es sei $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ein Messergebnis, das aus den Messwerten $x_1, x_2, ..., x_n$ mit den Unsicherheiten $u_1, u_2, ..., u_n$ zu berechnen ist. Wie groß ist dann die Unsicherheit $u(y)$ des Messergebnisses?

2.3.1 Maximale Unsicherheit

Eine kleine Änderung Δx_i des Messwertes x_i würde im Messergebnis etwa die Änderung $\Delta y_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i$ hervorrufen; $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ bezeichnet dabei die partielle Ableitung der Funktion $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ nach x_i. Wenn man also voraussetzt, dass die Unsicherheiten der Messwerte im Vergleich zu den Messwerten selbst klein sind, ergibt sich durch Addition der Auswirkungen aller Messunsicherheiten auf das Ergebnis die **Maximale Unsicherheit** des Messergebnisses:

$$u(y) = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| u_1 + \cdots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right| u_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| u_i \quad (6)$$

Gl.(6) kann in einfachen Fällen (wenige Messwerte) zur groben Abschätzung der Unsicherheit des Ergebnisses dienen.

2.3.2 Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz

Im Allgemeinen werden sich die einzelnen Unsicherheitskomponenten nicht immer addieren, sie können sie sich auch teilweise gegenseitig kompensieren. Die exakte mathematische Behandlung dieses Problems nach C. F. GAUß ergibt das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u_i^2} \,. \qquad (7)$$

$u_c(y)$ heißt **kombinierte Messunsicherheit**. Gl.(7) setzt voraus, dass die Messgrößen x_i voneinander statistisch unabhängig sind. Das ist im Grundpraktikum in der Regel der Fall. Daher ist die Messunsicherheit des Ergebnisses in den meisten Fällen nach (7), (8) oder (9) zu berechnen.

2.3.3 Besonders einfache Fälle

Oft besitzt die Gleichung $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine sehr einfache Struktur. In bestimmten Fällen lässt sich der Rechenaufwand zur Bestimmung von $u_c(y)$ nach (7) deutlich verringern. Im eigenen Interesse sollte jeder davon Gebrauch machen.

Fall 1: $$y = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 \qquad (8)$$

(c_1, c_2 Konstanten)
Durch Einsetzen in (7) ergibt sich

$$u_c(y) = \sqrt{c_1^{\,2} u_1^{\,2} + c_2^{\,2} u_2^{\,2}} \,. \qquad (9)$$

Fall 2: $$y = c \cdot x_1^{\,n} \cdot x_2^{\,m} \qquad (10)$$

(c reelle und n, m ganzzahlige Konstanten)
Einsetzen von (9) in (7) ergibt eine einfache Gleichung für die relative kombinierte Unsicherheit des Ergebnisses:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{n^2\left(\frac{u_1}{x_1}\right)^2 + m^2\left(\frac{u_2}{x_2}\right)^2} \qquad (11)$$

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung $s = a/2 \cdot t^2$; Weg s und Zeit t werden gemessen mit einer relativen Messunsicherheit von jeweils 1 %, die Beschleunigung a ist zu berechnen:

$$a = 2 \cdot \frac{s}{t^2} = 2 \cdot s^1 \cdot t^{-2}$$

$$\frac{u_c(a)}{a} = \sqrt{\left(\frac{u(s)}{s}\right)^2 + 2^2\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(1\%)^2 + 2^2 \cdot (1\%)^2} \approx 2{,}3\%$$

3 Anpassung einer Funktion an eine Messreihe (Regression)

3.1 Lineare Regression

Häufig besteht zwischen verschiedenen Messgrößen x und y ein linearer Zusammenhang

$$y = f(x) = a + b \cdot x \qquad (12)$$

oder es wird ein solcher vermutet.

Beispiel:
Bei der thermischen Ausdehnung von Metallen gilt für die Länge $l = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$, α ist der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient, l_0 die Länge bei der Temperaturdifferenz ΔT=0 (siehe Versuch W1).

Die eigentliche Messaufgabe besteht in der Bestimmung der (konstanten) Parameter a und b in Gl. (12). Grundsätzlich könnten a und b durch Messung von zwei Wertepaaren (x, y) bestimmt werden. Meist wird jedoch eine ganze Messreihe mit n Wertepaaren (x_i, y_i) (i = 1 ... n) aufgenommen, um zunächst den linearen Zusammenhang nachzuweisen, ehe a und b ermittelt werden.
Werden die Messwerte grafisch dargestellt, so streuen die Messpunkte wegen der unvermeidlichen statistischen Messabweichungen um eine ausgleichende Gerade. Die Aufgabe

2.3 Prüfmittelfähigkeit

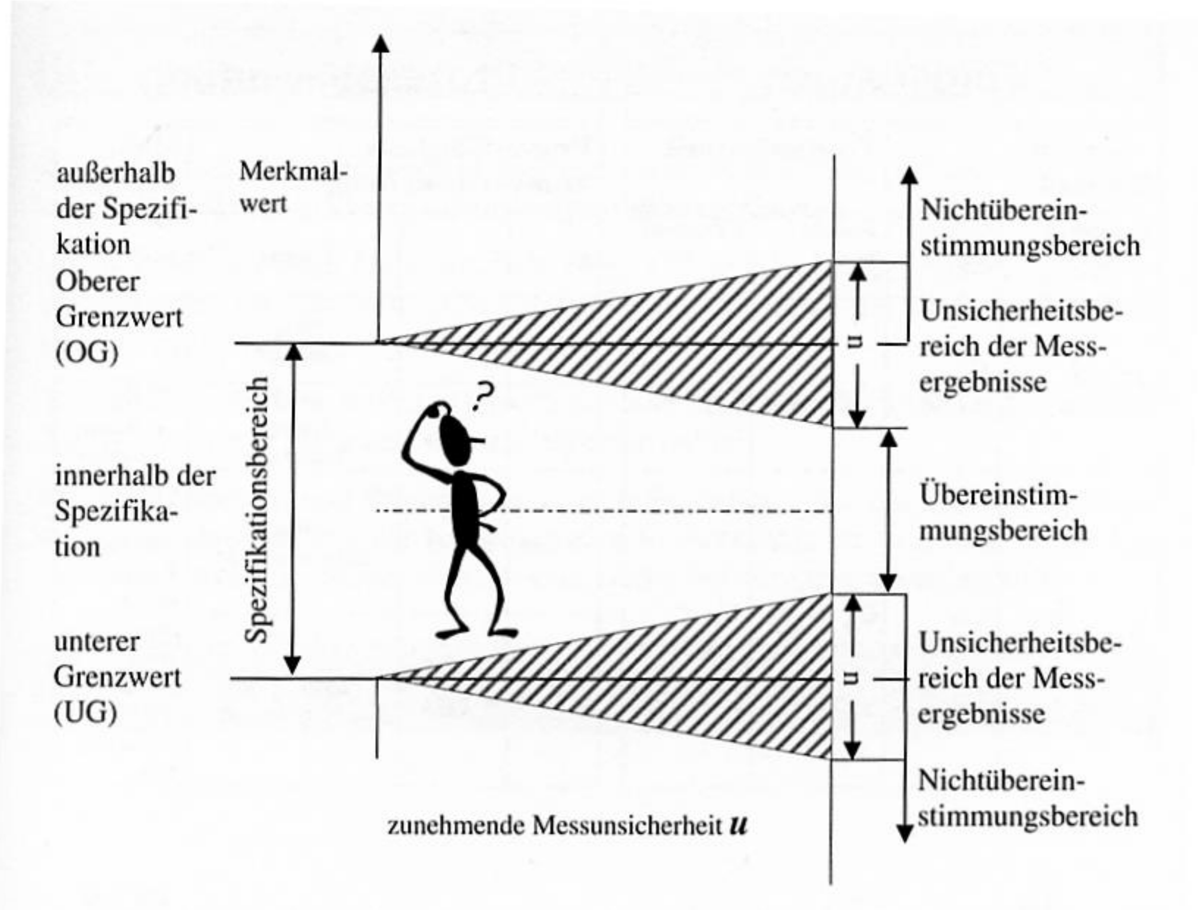
Die Genauigkeit von Messgeräte bzw. Messmethoden zur Messung qualitätsbestimmender Merkmale in der Qualitätssicherung muss auf die vorgeschriebenen Toleranzen der Messgrößen abgestimmt werden.

Es gilt dabei die so genannte *Goldene Regel der Messtechnik*:

Das übliche Toleranzverständnis sagt, dass das Messergebnis innerhalb der Grenzwerte der Zeichnung liegen soll, um ein Werkstück als gut zu beurteilen. Wenn der Messwert nahe der Toleranzgrenze liegt, besteht somit ein gewisses Risiko, dass der wahre Wert gerade auf der anderen Seite der Grenze liegt.
Um die Anzahl von Fehlentscheidungen klein zu halten, empfiehlt die Goldene Regel, dass die Messunsicherheit maximal ein Zehntel der Toleranz betragen soll: $u/T \leq 1/10$. Manchmal gibt man sich aber auch mit $u/T \leq 1/5$ zufrieden. Größer sollte das Verhältnis auf keinen Fall werden, da sonst das Risiko von Fehlentscheidungen zu stark ansteigt.

$$\frac{u}{T} \leq \frac{1}{5} \text{ oder besser } \frac{u}{T} \leq \frac{1}{10} \text{ sein.}$$

u… Messunsicherheit
T… Toleranz



Einschränkung des Übereinstimmungsbereichs auf Grund zunehmender Messunsicherheit

Quellenverzeichnis:

Schmusch Wolfgang; **Elektronische Meßtechnik**, Vogel Fachbuch (1993)

Mühl Tomas; **Einführung in die elektrische Messtechnik**, Vieweg + Teubler (2007)

Deiml + Hasenzagl; **Grundlagen der Elektrotechnik 1**, Veritas (2010)