Projektil ispaljen sa podmornice

Divna Mićić, Natalija Asanović, Anđela Stajić

Maj 2022

1 Opis problema

Projektil mase 200kg, gustine jednake gustini vode, se ispaljuje sa podmornice na dubini 100m, nekom brzinom v_0 pod nekim uglom θ u odnosu na horizontalu. Do površine vode će se kretati pravolinijski ali na njega deluje otpor vode silom koja je proporcionalna brzini, sa koeficijentom proporcionalnosti $c = 5$ u SI sistemu jedinica. Nakon izlaska iz vode, projektil se kreće sa zanemarljivim otporom vazduha.

Napraviti matematički model i odrediti optimalni ugao θ za koji projektil ponovo dodirne površinu vode na maksimalnoj udaljenosti.

2 Modeliranje

2.1 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini tela

Dok je projektil u vodi, na njega deluju tri sile: sila Zemljine teže (vertikalno naniže), sila potiska (vertikalno naviše) i sila otpora sredine (u suprotnom smeru od smera kretanja projektila). Kako se projektil kreće pravolinsijski do površine vode (prema uslovu zadatka)

$$F_{pot} \approx mg \Leftrightarrow \rho_v V g \approx \rho V g \Leftrightarrow \rho_v \approx \rho.$$

Ovaj uslov je ispunjen za projektile čija je gustina približno jednaka gustini vode. Iz teksta zadatka imamo da je $\rho_v = \rho$, što znači da su intenziteti ovih sila (sile potiska i gravitacione) jednaki, a smerovi suprotni, pa se ove sile poništavaju. U ovom slučaju preostaje samo sila otpora sredine F_v koja je proporcionalna brzini tela.

$$F_v = cv$$

gde je c koeficijent proporcionalnosti (u našem zadatku $c = 5$ u SI sistemu jedinica, tj. $5\frac{kg}{s}$).

Projekcija II Njutonvog zakona na pravac kretanja projektila daje

$$ma = -cv \tag{1}$$

što možemo zapisati i kao

$$m\frac{dv}{dt} = -cv.$$

Deljenjem ove jednačine sa masom, dobijamo diferencijalnu jednačinu za određivanje brzine tela

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}v.$$

Ova diferencijalna jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{dv}{-\frac{c}{m}v} = dt$$

koja se može integraliti

$$\int \frac{dv}{-\frac{c}{m}v} = t + C.$$

Integral na levoj strani možemo svesti na tablični uvođenjem smene $x = -\frac{c}{m}v$. Odatle je $dx = -\frac{c}{m}dv$, pa prethodni integral prelazi u

$$-\frac{m}{c}\int \frac{dx}{x} = -\frac{m}{c}\ln x = -\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v).$$

Odavde vidimo da je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$-\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v) = t + C. \tag{2}$$

Konstantu C određujemo na osnovu početnih uslova, odnostno da je u početnom trenutku $t = 0$ telo ispaljeno brzinom $v = v_0$, pa dobijamo da je konstanta $C = -\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v_0)$.

Sada kada nam je poznato C možemo se vratiti u jednačinu (2) i iz nje izraziti brzinu

$$-\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v) = t - \frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v_0).$$

Uz malo računa dolazimo do formule za određivanje brzine projektila dok se kreće kroz vodu, tj. od trenutka ispaljivanja do trenutka kada izlazi iz vode

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{3}$$

Naredni korak jeste da odredimo trenutak u kom projektil izlazi iz vode. Da bismo to uradili, koristimo činjenicu da se projektil ispaljuje sa podmornice koja je na dubini od $100m$ (dalje u tekstu označeno sa h), početnom brzinom v_0, pod uglom θ u odnosu na horizont.

Dalje, iz jednačine (3) možemo da nađemo put koji projektil pređe tako što ćemo izraziti s

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}.$$

kao

$$s = v_0\int_0^t e^{-\frac{c}{m}t}\,dt = v_0 \frac{e^{-\frac{c}{m}t}}{-\frac{c}{m}}\Big|_0^t = \frac{v_0 m}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t}).$$

Sada smo dobili jednačinu za pređeni putu zavisnosti od vremena.

$$s(t) = \frac{v_0 m}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t}). \tag{4}$$

Pređeni put projektila do trenutka dodira sa površinom vode možemo izraziti i kao

$$s = \frac{h}{sin\theta}$$

tj.

$$\frac{h}{sin\theta} = \frac{v_0 m}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Odavde možemo izraziti t

$$\frac{hc}{mv_0 sin\theta} = 1 - e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$e^{-\frac{c}{m}t} = 1 - \frac{hc}{mv_0 sin\theta}$$

$$t = -\frac{m}{c}\ln(1 - \frac{hc}{mv_0 sin\theta}) \quad (5)$$

Sada t koje smo izrazili možemo da vratimo u jednačinu (3) i uz malo računa dobijamo sledeći izraz za brzinu

$$v(t) = v_0 - \frac{hc}{msin\theta}. \quad (6)$$

2.2 Kretanje projektila nakon izlaska iz vode

Na dalje na naš projektil deluje samo sila Zemljine teže, pa ovo možemo posmatrati kao kosi hitac, sa početnom brzinom v_p (6) i uglom izbačaja θ.
Dakle, na projektil deluje sila Zemljine teže u negativnom pravcu što se može posmatrati kao negativno ubrzanje, tj. možemo reći da je

$$x^{''}(t) = 0$$

$$y^{''}(t) = -g.$$

Sa druge strane, pri uslovima da je početna brzina projektila v_p i ugao pod kojim izleće θ, tada važe sledeće relacije

$$v_x(t) = v_p cos\theta$$

$$v_y(t) = v_p sin\theta - gt$$

Sa obzirom da se projektil kreće u vazduhu i da taj otpor zanemarujemo možemo posmatrati ovo kao da se projektil kreće u vakuumu, na njega neće delovatni ni jedna horizontalna sila, pa će brzina kretanja biti konstantna.
Diferenciranjem ovih jednačina, dobija se da je

$$x(t) = v_p t cos\theta$$

$$y(t) = v_p t sin\theta - \frac{gt^2}{2}$$

Trenutak ponovnog dodira sa površinom vode dat je sa

$$y(t) = 0$$

tj.

$$v_p t sin\theta - \frac{gt^2}{2} = 0$$

$$t = \frac{2v_p sin\theta}{g} \tag{7}$$

U tom trenutku, duž $x - ose$ projektil pređe rastojanje D (domet)

$$D = v_p t cos\theta$$

Ubacujemo t koje smo izrazili (7)

$$D = v_p cos\theta \frac{2v_p sin\theta}{g} = \frac{2v_p^2 sin\theta cos\theta}{g}$$

Sada vraćamo nazad naš izraz za početnu brzinu v_p (6) i dobijamo

$$D = \frac{2sin\theta cos\theta}{g}(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})^2 \tag{8}$$

Kako se u zadatku traži da da projektil ponovo dodirne površinu vode na maksimalnoj udaljenosti, potrebno je uračunati i deo puta koji projektil pređe dok je u vodi, tj. $D_u = D + D_v$. D_v lako možemo odrediti iz početnih uslova i dobijamo da je $D_v = hctg\theta$. Odatle dobijamo da je

$$D_u = \frac{sin(2\theta)}{g}(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})^2 + hctg\theta.$$

Sada je potrebno odraditi ekstremizaciju funkcije $D_u = D_u(\theta)$.

$$\frac{dD_u}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow 2cos(2\theta)(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})^2 + 2sin(2\theta)(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})\frac{hc}{msin^2\theta}cos\theta - \frac{hg}{2sin^2\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})\Big(cos(2\theta)(v_0 - \frac{hc}{msin\theta}) + sin(2\theta)\frac{hc}{msin^2\theta}cos\theta\Big) = \frac{hg}{2sin^2\theta}$$

Ovu jednacinu dalje mozemo da podelimo sa $2(v_0 - \frac{hc}{msin\theta})$, uz uslove da je $sin\theta \neq 0$ i $sin\theta \neq \frac{hc}{mv_0}$, tj. $\theta \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ i $\theta \neq arcsin(\frac{hc}{mv_0})$.

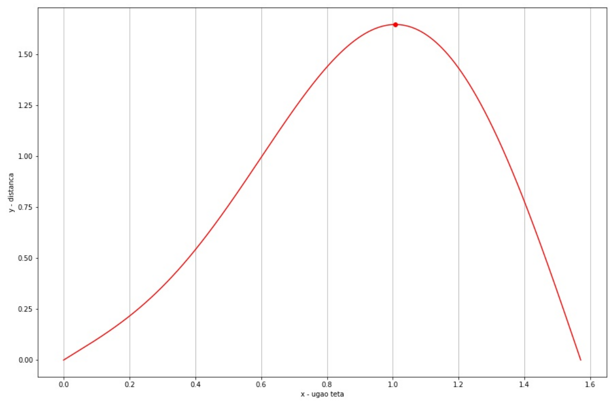
Uz malo sređivanja dolazimo do jednačine

$$sin^4\theta - \frac{hc}{mv}sin^3\theta + \frac{1}{2}sin^2\theta - \frac{h^2c^2}{2m^2v_0^2} + \frac{hg}{8v_0^2} = 0 \tag{9}$$

tj. dobili smo jednačinu četvrtog stepena po $sin\theta$.

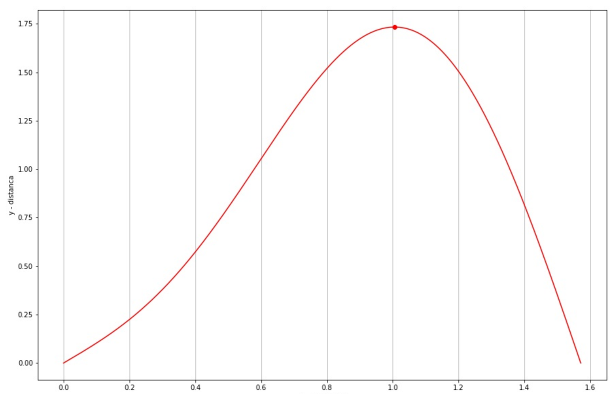
3 Diskusija rešenja

Sada je potrebno pronaći maksimum jednačine (9). Na narednim slikama možemo videti kako se vrednost ugla θ menja sa promenom početne brzine v_0. Za ispitivanje zavisnosti ugla θ od početne brzine v_0 izabrali smo početne brzine $30\frac{m}{s}$, $300\frac{m}{s}$ i $100000\frac{m}{s}$.



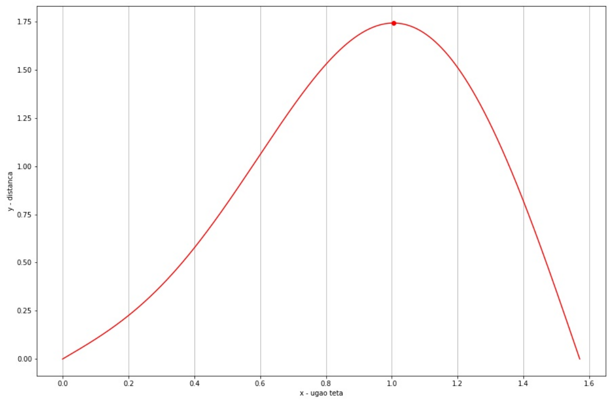
Slika 1: $v_0 = 30\frac{m}{s}$

Za početnu brzinu $v_0 = 30\frac{m}{s}$ optimalni ugao θ je 57.74°.



Slika 2: $v_0 = 300\frac{m}{s}$

Za početnu brzinu $v_0 = 300\frac{m}{s}$ optimalni ugao θ je 57.59°.



Slika 3: $v_0 = 100000\frac{m}{s}$

Za početnu brzinu $v_0 = 100000\frac{m}{s}$ optimalni ugao θ je $57.59°$.
Analizom dobijenih rešenja dolazimo do zaključka da je optimalni ugao

$$\theta \approx 57.59°.$$

4 Literatura

1. M. Dražić. *Matematičko modeliranje*. Matematički fakultet, Beograd, 2017.

2. http://tesla.pmf.ni.ac.rs/f_odeljenje/ucenicki%20folder/ucenici2008/meh.pdf(posećeno 12.5.2022.)