Projektil ispaljen sa podmornice

Divna Mićić, Natalija Asanović, Anđela Stajić

Maj 2022

1 Opis problema

Projektil mase 200kg, gustine jednake gustini vode, se ispaljuje sa podmornice na dubini 100m, nekom brzinom v_0 pod nekim uglom θ u odnosu na horizontalu. Do površine vode će se kretati pravolinijski ali na njega deluje otpor vode silom koja je proporcionalna brzini, sa koeficijentom proporcionalnosti $c = 5$ u SI sistemu jedinica. Nakon izlaska iz vode, projektil se kreće sa zanemarljivim otporom vazduha.

Napraviti matematički model i odrediti optimalni ugao θ za koji projektil ponovo dodirne površinu vode na maksimalnoj udaljenosti.

2 Modeliranje

2.1 Kretanje tela u prisustvu sile otpora proporcionalne brzini tela

Ako se telo kreće kroz vodu, na njega deluje sila otpora sredine proporcionalna brzini tela,

$$F_v = cv$$

gde je c koeficijent proporcionalnosti (u našem zadatku $c = 5$ u SI sistemu jedinica, tj. $5\frac{kg}{s}$).

Projekcija II Njutonvog zakona na pravac kretanja projektila daje

$$ma = -cv \tag{1}$$

što možemo zapisati i kao

$$m\frac{dv}{dt} = -cv.$$

Deljenjem ove jednačine sa masom, dobijamo diferencijalnu jednačinu za određivanje brzine tela

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}v.$$

Ova diferencijalna jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{dv}{-\frac{c}{m}v} = dt$$

koja se može integraliti

$$\int \frac{dv}{-\frac{c}{m}v} = t + C.$$

Integral na levoj strani možemo svesti na tablični uvođenjem smene $x = -\frac{c}{m}v$. Odatle je $dx = -\frac{c}{m}dv$, pa prethodni integral prelazi u

$$-\frac{m}{c}\int \frac{dx}{x} = -\frac{m}{c}\ln x = -\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v).$$

Odavde vidimo da je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$-\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v) = t + C. \tag{2}$$

Konstantu C određujemo na osnovu početnih uslova, odnostno da je u početnom trenutku $t = 0$ telo ispaljeno brzinom $v = v_0$, pa dobijamo da je konstanta $C = -\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v_0)$.

Sada kada nam je poznato C možemo se vratiti u jednačinu (2) i iz nje izraziti brzinu

$$-\frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v) = t - \frac{m}{c}\ln(-\frac{c}{m}v_0).$$

Uz malo računa dolazimo do formule za određivanje brzine projektila dok se kreće kroz vodu, tj. od trenutka ispaljivanja do trenutka kada izlazi iz vode

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{3}$$

Naredni korak jeste da odredimo trenutak u kom projektil izlazi iz vode. Da bismo to uradili, koristimo činjenicu da se projektil ispaljuje sa podmornice koja je na dubini od $100m$, početnom brzinom v_0, pod uglom θ u odnosu na horizont.

Na podmornicu postavljamo koordinatni sistem, tako da mu početak bude na mestu odakle se ispaljuje projektil, jedna osa je paralelna sa horizontom, a druga je vertikalna u odnosu na horizont. Pomoću ovog koordinatnog sistema možemo predstaviti položaj projektila u trenutku t, $x(t)$ je daljina i $y(t)$ je visina.

Pretpostavićemo da su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ dva puta neprekidno diferencijabilne. Ova pretpostavka nam omogućava primenu diferencijalnog i integralnog računa. Znamo da fizika definiše ubrzanje kao drugi izvod položaja tela po vremenu, pa kada se vratimo u jednačinu (1) dobijamo

$$a = -\frac{c}{m}v \qquad \rightarrow \qquad y^{''}(t) = -\frac{c}{m}v.$$

Dobijenu jednačinu možemo integraliti i time dobijamo

$$y^{'}(t) = -\frac{c}{m}v_y t + C,$$

a konstantu C možemo odrediti na osnovu početnih uslova. U početnom trenutku $t = 0$ znamo da je $v_y = v_{0y} = v_0 sin\theta$, pa je $C = v_0 sin\theta$. Ovo znači da smo dosli do jednačine

$$y^{'}(t) = v_0 sin\theta - \frac{c}{m}v_y t.$$

Još jedna integracija i činjenica da je $y(0)$=0 daju

$$y(t) = v_0 sin\theta - \frac{c}{m}v_y t^2.$$

Potrebno je da odredimo u kom trenutku t će y(t) postati 100m. Tu vrednost zatim vraćamo u jednačinu (3) i time dobijamo brzinu projektila u trenutku kada izađe iz vode.