Trabajo Práctico 1

Análisis Matemático III
Josefina Dehan, Vulcano Facundo,Hofkamp Nataly.

September 19, 2023

Serie de Fourier de Tren de Pulsos

La señal $x(t)$ es una señal tren de pulsos con amplitud A y período T, definida de la siguiente manera:

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi f t)) \tag{1}$$

Como punto de partida, calculamos el valor de a_0, el cual se anula en el intervalo $[0, \frac{T}{2}]$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi f t))\, dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -A\, dt\right] \\
&= \frac{1}{T}A\left[\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right] \\
&= \frac{1}{T}A\left[\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right] = 0
\end{aligned}$$

Podemos observar que esta función es impar debido a la presencia de la función signo $sgn(\sin(2\pi f t))$. La función $sgn(x)$ es impar para cualquier x. Para una función impar $x(t)$, los coeficientes a_n representan las componentes coseno en la descomposición de Fourier. Debido a la simetría impar, estas componentes se cancelan mutuamente y, por lo tanto, $a_n = 0$.

Por último se calcula b_n, ya que La simetría impar en ambas funciones no cancelará los términos de b_n en la serie de Fourier:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi f t))\, dt \\
&= \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin(nwt)\, dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -A\sin(nwt)\, dt\right] \\
&= \frac{2}{T}A\left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(nwt)dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(nwt)dt\right] \\
&= \frac{4}{T}A\left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(nwt)dt\right] \\
&= \frac{4}{T}A\left[\frac{-\cos(nwt)}{nw}/_0^{\frac{T}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{T}A\left[\frac{-\cos(nw\frac{T}{2}) - 1}{nw}\right]
\end{aligned}$$

Luego, la serie de Fourier de la señal tren de puente se define como:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{T}A\left[[\frac{-\cos(nw\frac{T}{2}) - 1}{nw}]\sin(nwt)\right]$$

Serie de Fourier de Señal Diente de Sierra

La señal $x(t)$ es una señal diente de sierra con amplitud A y período T, definida de la siguiente manera:

$$x(t) = A\left(tf - \lfloor\frac{1}{2} + tf\rfloor\right) \tag{2}$$

Comenzamos calculando el valor de a_0, el cual se anula en el intervalo $[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}]$:

$$a_0 = \frac{4}{T}\left[\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\frac{t}{T}\,dt + \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} -A\frac{t}{T}\lfloor\frac{1}{2} + tf\rfloor\,dt\right]$$

La segunda integral se cancela porque la función piso en el intervalo dado es una fracción menor a uno.

$$a_0 = \frac{4}{T^2}A\left[\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} tdt\right]$$

$$a_0 = \frac{4}{T^2}A\left[\frac{t^2}{2}\right]\Big|_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$a_0 = \frac{4}{T^2}A\left[\frac{(\frac{T}{2})^2}{2} - \frac{(\frac{-T}{2})^2}{2}\right] = 0$$

Debido a la simetría impar de la función, solo calculamos el coeficiente b_n, ya que si calculáramos a_n, se cancelaría debido a que la función resultante sería impar al integrarla. En este intervalo, la función de piso se anula debido a que es una fracción menor que uno. Posteriormente, utilizando $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, el cálculo de la serie de Fourier se simplifica de la siguiente manera:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{-T}{2}} A\left(tf - \lfloor\frac{1}{2} + tf\rfloor dt\right)$$

$$b_n = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\frac{t}{T}\sin(nwt)\,dt\right]$$

$$b_n = \frac{4A}{T^2}\left[-t(\frac{\cos(nwt)}{(nw)} - \frac{\sin(nwt)}{(nw)^2}\right]\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$b_n = \frac{4A}{T^2}\left[-\frac{T(\cos(nw\frac{T}{2}))}{2nw} - \frac{\sin(nw\frac{T}{2})}{(nw)^2}\right]$$

Luego, la serie de Fourier de la señal diente de sierra se define como:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{T^2}A\left[[-\frac{T(\cos(nw\frac{T}{2}))}{2nw} - \frac{\sin(nw\frac{T}{2})}{(nw)^2}]\sin(nwt)\right]$$

Serie de Fourier de la Señal Triangular

Consideremos la señal triangular $x(t)$ definida en el intervalo $[0, T]$ como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T}t - A & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \tag{3}$$

Debido a la simetría par de la función, sólo necesitamos considerar el intervalo $[0, \frac{T}{2}]$.
El coeficiente a_n es:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{4A}{T}t - A\right)\cos(n\omega_0 t)dt$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Descomponemos la integral en dos partes:

$$a_n = \frac{2}{T}\left(\frac{4A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega_0 t)dt - A\int_0^{\frac{T}{2}}\cos(n\omega_0 t)dt\right)$$

Para resolver la integral $\int t\cos(n\omega_0 t)dt$, usamos integración por partes. Tomando $u = t$ y $dv = \cos(n\omega_0 t)dt$, obtenemos:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} t\cos(n\omega_0 t)dt = t\cdot\frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)dt$$

La segunda integral resulta ser:

$$\frac{-1}{(n\omega_0)^2}\cos(n\omega_0 t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

La integral de $\cos(n\omega_0 t)dt$ es:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)dt = \frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

Combinando todo, encontramos:

$$a_n = \frac{8A}{n^2\pi^2}$$

para n impar, y $a_n = 0$ para n par.
Por lo tanto, la serie de Fourier de $x(t)$ es:

$$F(t) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{8A}{n^2\pi^2}\cos(n\omega_0 t)$$