Trabajo Práctico 1 : Transformaciones, locomoción y sensado

Hofkamp Nataly

Universidad de San Andrés
nhofkamp@udesa.edu.ar

I. Transformaciones 2D y matrices afines

I-A.

La matriz de transformación homogénea T_1 correspondiente a la pose del robot $x_1 = (x_1, y_1, \theta_1)^T$ está dada por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

La posición del obstáculo en las coordenadas del robot es:

$$p_{\text{robot}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para obtener las coordenadas globales del obstáculo p_{global}, realizamos la multiplicación:

$$p_{\text{global}} = T_1 \cdot p_{\text{robot}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$p_{\text{global}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cdot p_x - \sin\theta_1 \cdot p_y + x_1 \\ \sin\theta_1 \cdot p_x + \cos\theta_1 \cdot p_y + y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Por lo tanto, las coordenadas del obstáculo en el sistema global son:

$$p_{\text{global}} = \begin{bmatrix} x_{\text{global}} \\ y_{\text{global}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cdot p_x - \sin\theta_1 \cdot p_y + x_1 \\ \sin\theta_1 \cdot p_x + \cos\theta_1 \cdot p_y + y_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Este resultado muestra que la posición del obstáculo en el sistema global se obtiene aplicando una rotación por θ_1 y luego una traslación por (x_1, y_1).

I-B.

Si se conoce la posición de un obstáculo en el sistema de coordenadas global, queremos encontrar sus coordenadas en el sistema de referencia del robot. Para ello, debemos aplicar la **transformación inversa** de la matriz de transformación homogénea T_1, que representa la pose del robot.

Dado que la matriz de transformación homogénea del robot es:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Su inversa es:

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & -x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & x_1\sin\theta_1 - y_1\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Luego, siendo las coordenadas globales del obstáculo:

$$p_{\text{global}} = \begin{bmatrix} x_{\text{global}} \\ y_{\text{global}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la transformación inversa:

$$p_{\text{robot}} = T_1^{-1} \cdot p_{\text{global}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & -x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & x_1\sin\theta_1 - y_1\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\text{global}} \\ y_{\text{global}} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Realizando la multiplicación de matrices obtenemos las coordenadas del objeto en la terna del robot:

$$p_{\text{robot}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1(x_{\text{global}} - x_1) + \sin\theta_1(y_{\text{global}} - y_1) \\ -\sin\theta_1(x_{\text{global}} - x_1) + \cos\theta_1(y_{\text{global}} - y_1) \end{bmatrix} \tag{9}$$

I-C.

Para encontrar la matriz de transformación T_{12}, que representa la nueva pose $x_2 = (x_2, y_2, \theta_2)^T$ con respecto a la pose inicial $x_1 = (x_1, y_1, \theta_1)^T$, debemos calcular la transformación relativa entre ambas poses.

Sean las matrices de transformación homogenea de la pose x_1 y x_2 respectivamente

$$\mathrm{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & x_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

La transformación relativa entre ambas poses se obtiene como:

$$T_{12} = T_1^{-1} T_2$$

Utilizando la inversa de T_1 previamente obtenida (7),luego

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & -x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & x_1\sin\theta_1 - y_1\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & x_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Realizando la multiplicación obtenemos la transformación homogénea T_{12}, que permite expresar la nueva pose x_2 en el sistema de referencia del robot cuando estaba en x_1:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2-\theta_1) & -\sin(\theta_2-\theta_1) & \cos\theta_1(x_2-x_1)+\sin\theta_1(y_2-y_1) \\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_2-\theta_1) & -\sin\theta_1(x_2-x_1)+\cos\theta_1(y_2-y_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

I-D.

Para calcular la nueva posición del obstáculo en la terna del robot en x_2, utilizamos la transformación inversa de T_{12}:

$$p_{\text{robot 2}} = T_{12}^{-1} p_{\text{robot 1}}$$

Dado que $p_{\text{robot 1}}$ ya está definido, aplicamos la transformación:

$$T_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_1-\theta_2) & x_1 - \cos(\theta_1-\theta_2)x_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)y_2 \\ -\sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) & y_1 + \sin(\theta_1-\theta_2)x_2 - \cos(\theta_1-\theta_2)y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Aplicamos esta transformación a $p_{\text{robot 1}}$:

$$p_{\text{robot 2}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_1-\theta_2) & x_1 - \cos(\theta_1-\theta_2)x_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)y_2 \\ -\sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) & y_1 + \sin(\theta_1-\theta_2)x_2 - \cos(\theta_1-\theta_2)y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Realizando la multiplicación:

$$\text{p}'_x = \cos(\theta_1-\theta_2)p_x + \sin(\theta_1-\theta_2)p_y + x_1 - \cos(\theta_1-\theta_2)x_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)y_2$$

$$\text{p}'_y = -\sin(\theta_1-\theta_2)p_x + \cos(\theta_1-\theta_2)p_y + y_1 + \sin(\theta_1-\theta_2)x_2 - \cos(\theta_1-\theta_2)y_2$$

Por lo tanto, la posición del obstáculo en la nueva referencia del robot es:

$$p_{\text{robot 2}} = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2)p_x + \sin(\theta_1-\theta_2)p_y + x_1 - \cos(\theta_1-\theta_2)x_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)y_2 \\ -\sin(\theta_1-\theta_2)p_x + \cos(\theta_1-\theta_2)p_y + y_1 + \sin(\theta_1-\theta_2)x_2 - \cos(\theta_1-\theta_2)y_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

II. Sensado

Un robot se encuentra en la pose $x = 5$ m, $y = -7$ m, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, según una terna global.

Sobre el robot, hay montado un LIDAR en la posición $x = 0{,}2$ m, $y = 0{,}0$ m, $\theta = \pi$ (con respecto a la terna del cuerpo del robot).

La primera medición se toma para el ángulo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ (según la terna del sensor) y la última se toma para el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

El sensor tiene una apertura angular (FOV) de π y todas las mediciones intermedias tienen una separación angular constante.

II-A. Mediciones en la terna de referencia del LIDAR.

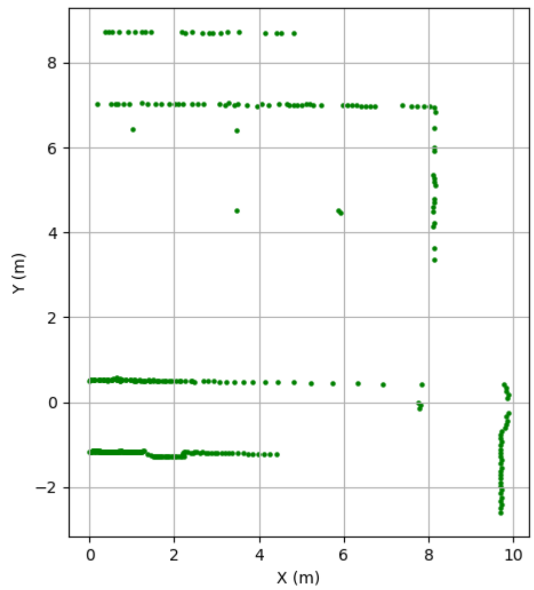

Figura 1: Gráfico de las mediciones realizadas por el LIDAR en su propia terna de referencia

II-B. Interpretación del entorno

En función de lo que se puede apreciar en el gráfico, es posible distiguir que el robot se encontraba en una habitación con multiples paredes que generaban un pasillo por el que podía transitar. Además, hay puertas abiertas que le permitieron el acceso a otras partes de la habitación.

II-C. Posiciones en la terna global.

Dado que contamos con las coordenadas del robot en la terna global, su matriz de transformación en esta es

$$\text{T}_{\text{robot}} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) & 5 \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Por otra parte, el LIDAR está montado en la posición $(x_L, y_L, \theta_L) = (0{,}2, 0, \pi)$ en la terna del robot. Su matriz de transformación en la terna del robot es:

$$\text{T}_{\text{LIDAR/robot}} = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0{,}2 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para obtener la posición del LIDAR en la terna global:

$$T_{\text{LIDAR/global}} = T_{\text{robot/global}} \cdot T_{\text{LIDAR/robot}}$$

Por lo que multiplicando obtenemos

$$T_{\text{LIDAR/global}} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) & 5 \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos(-\pi/4) & \sin(-\pi/4) & 5 - 0{,}2\cos(-\pi/4) \\ -\sin(-\pi/4) & -\cos(-\pi/4) & -7 - 0{,}2\sin(-\pi/4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Por lo que la posición global del LIDAR es:

$$(x_L, y_L) = (5 - 0{,}2\cos(-\pi/4), -7 - 0{,}2\sin(-\pi/4)) \tag{21}$$

FInalmente, cada medición del LIDAR es un punto en coordenadas polares en la terna del sensor:

$$p_{\text{LIDAR}} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

donde r es la distancia medida y α el ángulo.

Para obtener las posiciones en la terna global, transformamos cada medición:

$$p_{\text{global}} = T_{\text{LIDAR/global}} \cdot p_{\text{LIDAR}}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{global}} \\ y_{\text{global}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(-\pi/4) & \sin(-\pi/4) & 5 - 0{,}2\cos(-\pi/4) \\ -\sin(-\pi/4) & -\cos(-\pi/4) & -7 - 0{,}2\sin(-\pi/4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Obtenemos las ecuaciones para los ejes X e Y

$$x_{\text{global}} = -r\cos(-\pi/4)\cos\alpha + r\sin(-\pi/4)\sin\alpha + 5 - 0{,}2\cos(-\pi/4) \tag{24}$$

$$y_{\text{global}} = -r\sin(-\pi/4)\cos\alpha - r\cos(-\pi/4)\sin\alpha - 7 - 0{,}2\sin(-\pi/4) \tag{25}$$

Esta fórmula se aplica a cada medición del LIDAR y se obtienen las coordenadas en la terna global.

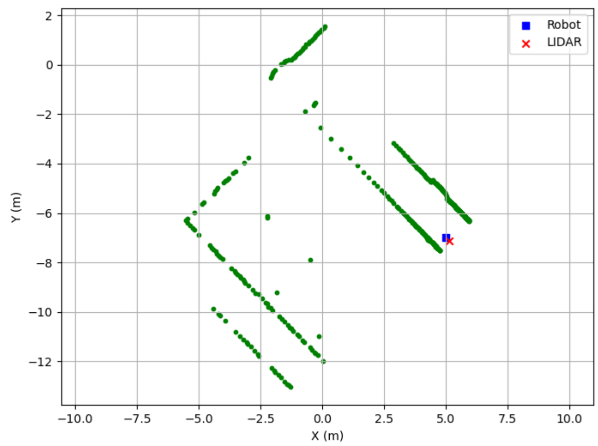

Figura 2: Gráfico de las mediciones realizadas por el LIDAR en la terna de referencia global

III. Accionamiento diferencial

Dada la cinemática de un robot de accionamiento diferencial, es posible determinar su velocidad lineal y angular a partir de las velocidades de sus ruedas. La velocidad lineal del centro del robot v y su velocidad angular ω están dadas por:

$$v = \frac{v_r + v_l}{2} \tag{26}$$

$$\omega = \frac{v_r - v_l}{l} \tag{27}$$

donde:

- v_r y v_l son las velocidades de la rueda derecha e izquierda, respectivamente.
- l es la distancia entre las ruedas.

A partir de estas expresiones, se pueden calcular los cambios en la posición x, y y la orientación θ en función del tiempo t:

$$x_n = x + vt\cos(\theta) \tag{28}$$

$$y_n = y + vt\sin(\theta) \tag{29}$$

$$\theta_n = \theta + \omega t \tag{30}$$

Si $v_l = v_r$, el robot se mueve en línea recta, y si $v_l \neq v_r$, el robot sigue una trayectoria curva alrededor de un centro de curvatura. Para este caso, se define el radio de curvatura R como:

$$R = \frac{l}{2}\frac{v_l + v_r}{v_r - v_l} \tag{31}$$

El centro de curvatura, denominado *Instantaneous Center of Curvature* (ICC), tiene coordenadas:

$$ICC_x = x - R\sin(\theta) \tag{32}$$

$$ICC_y = y + R\cos(\theta) \tag{33}$$

Para calcular la nueva posición del robot después de un tiempo t, aplicamos la transformación de rotación alrededor del ICC:

$$x_n = \cos(\omega t)(x - ICC_x) - \sin(\omega t)(y - ICC_y) + ICC_x \quad (34)$$

$$y_n = \sin(\omega t)(x - ICC_x) + \cos(\omega t)(y - ICC_y) + ICC_y \quad (35)$$

$$\theta_n = \theta + \omega t \quad (36)$$

Obteniendo así las ecuaciones para encontrar las coordenadas cartesianas.

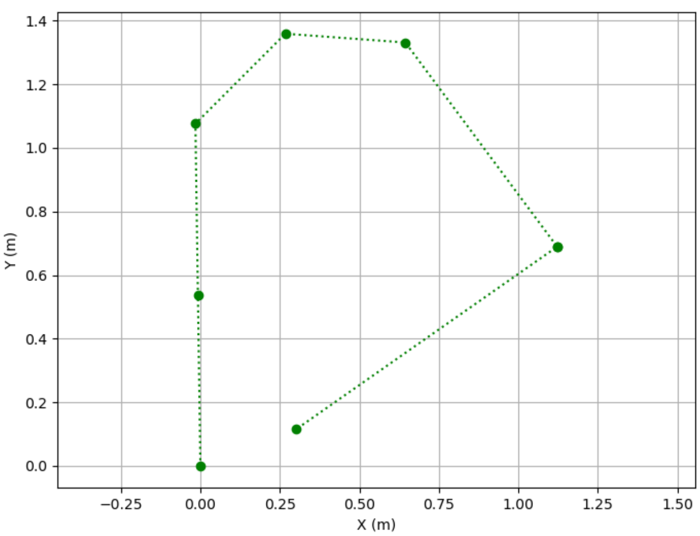

Figura 3: Gráfico de la trayectoria realizada por un robot de accionamieto diferencial

De esta manera, dada la distancia entre las ruedas y las velocidades de las ruedas en distintos tiempos, es posible graficar la trayectoria llevada a cabo por el robot, como es observa en la Figura 3.