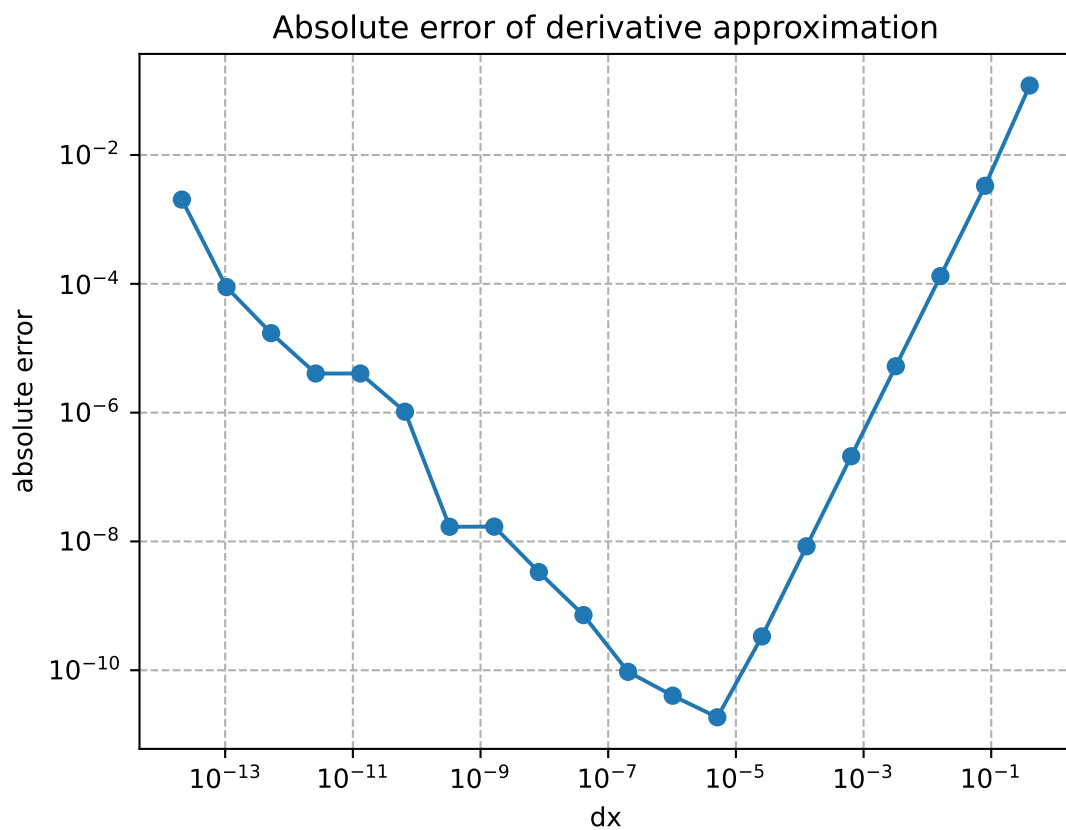


Metody numeryczne - laboratorium 2

Natan Tułodziecki

10 marca 2025

1 Analiza błędu przybliżenia pochodnej



Rysunek 1: Wartość bezwzględna błędu przybliżenia pochodnej

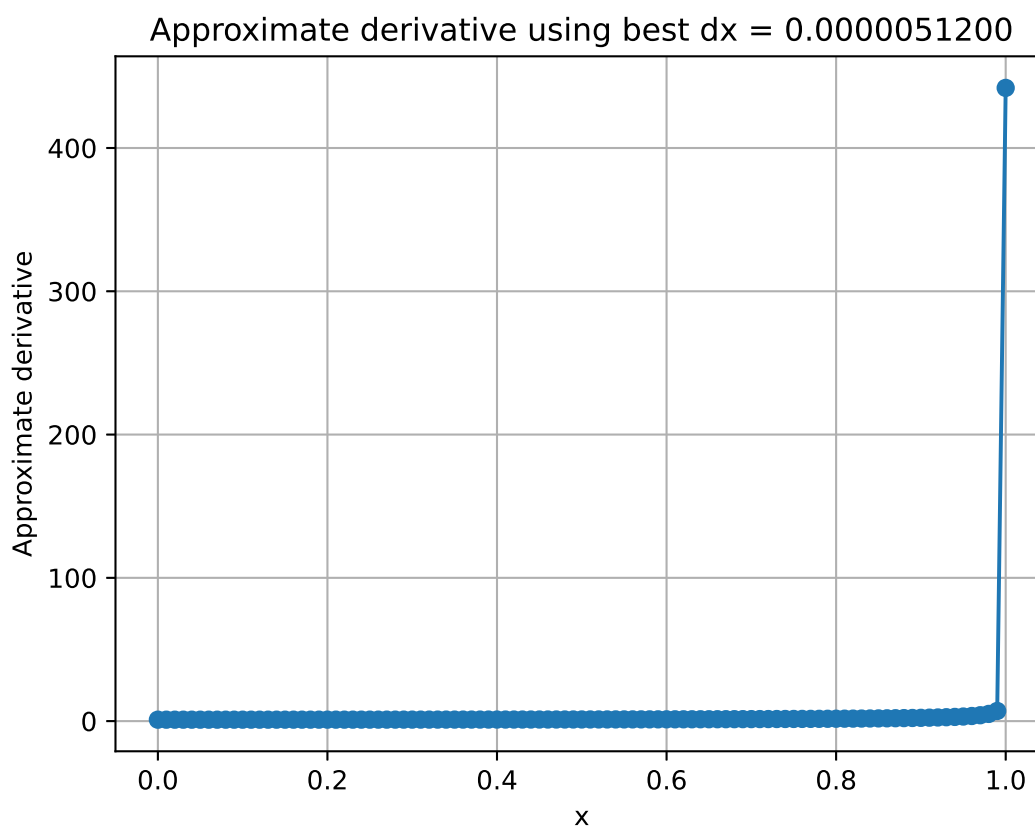
Wykres błędu w skali log-log (rys. 1) wykazuje charakterystyczny kształt litery „U”, co jest efektem działania dwóch głównych źródeł błędów:

- **Błąd obcięcia** – dla dużych wartości dx metoda centralnej różnicy przybliża pochodną z dokładnością rzędu $O(dx^2)$, co prowadzi do większego błędu obliczeń.
- **Błąd zaokrągleń** – dla bardzo małych wartości dx , różnice funkcji stają się porównywalne z precyzją maszynową, co skutkuje niestabilnością numeryczną i wzrostem błędu.

Wartość dx , dla której błąd osiąga minimum, to optymalny krok różnicowy, pozwalający na najbardziej precyzyjne przybliżenie pochodnej. Wartość ta została wyznaczona jako:

$$dx \approx best_dx$$

2 Analiza przybliżenia pochodnej



Rysunek 2: Przybliżenie pochodnej dla dx minimalizującego błąd

Wykres na rysunku 2 przedstawia wartości przybliżonej pochodnej funkcji $\arcsin(x)$ wyznaczonej metodą centralnej różnicy dla optymalnej wartości dx . Można zauważyć kilka kluczowych zależności:

- W zakresie $x \in [0, 0.9]$ aproksymacja pochodnej jest bardzo dokładna i zgodna z analitycznym wzorem $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- W miarę zbliżania się x do 1, wartości pochodnej gwałtownie rosną. Jest to zgodne z zachowaniem rzeczywistej pochodnej funkcji $\arcsin(x)$, która dąży do nieskończoności, gdy $x \rightarrow 1$.
- Dla wartości x bardzo bliskich 1 (np. $x > 0.98$), obliczona pochodna staje się niestabilna numerycznie, co objawia się gwałtownym wzrostem wartości. Efekt ten wynika z ograniczonej precyzji numerycznej oraz faktu, że mianownik wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zbliża się do zera, powodując znaczne powiększenie błędów obliczeniowych.

Podsumowując, wykres ilustruje wysoką dokładność aproksymacji w szerokim zakresie x , jednak w pobliżu $x \rightarrow 1$ precyzja maleje ze względu na naturę funkcji oraz ograniczenia numeryczne.