

Sistemas Computacionais

Circuitos lógicos combinacionais – Expressões, Tabelas, Mapas K

Prof. Francisco Javier Francisco.diaz@p.ucb.br



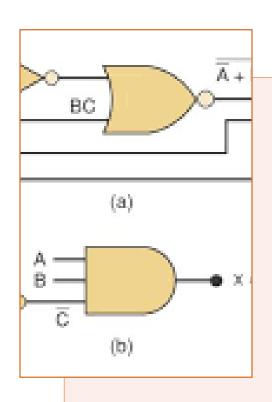


Circuitos lógicos combinacionais

Expressões booleanas, tabelas-verdade e mapa de karnaugh, projetos







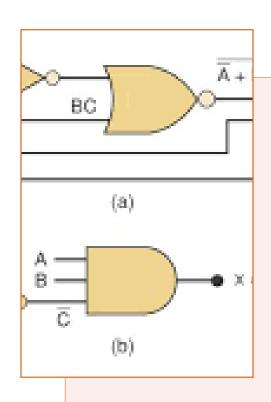
Para projetar os circuitos lógicos combinacionais a partir do problema deve-se:

• Identificar a tabela-verdade correspondente e utilizar as formaspadrão de soma-de-produtos ou produto-de-somas, conforme o nível de ativação da saída.

Esse "trem" vai ter uso afinal!







Representação binária de um termo-produto padrão:

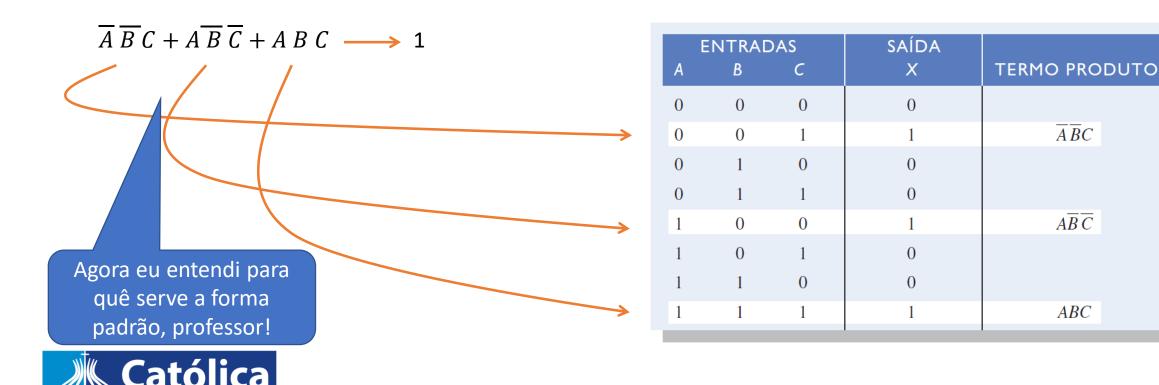
• O termo-produto padrão é igual a 1 para apenas uma combinação de valores das variáveis. Assim, $A\overline{B}C\overline{D}$ é igual a 1 quando A = 1, B = 0, C = 1 e D = 0.

$$A\overline{B}C\overline{D} = 1.\overline{0}.1.\overline{0} = 1.1.1.1 = 1$$





Conversão de expressões de soma-de-produtos em tabela-verdade



Universidade Católica de Brasília

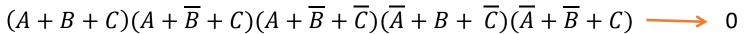
 $\overline{A}\overline{B}C$

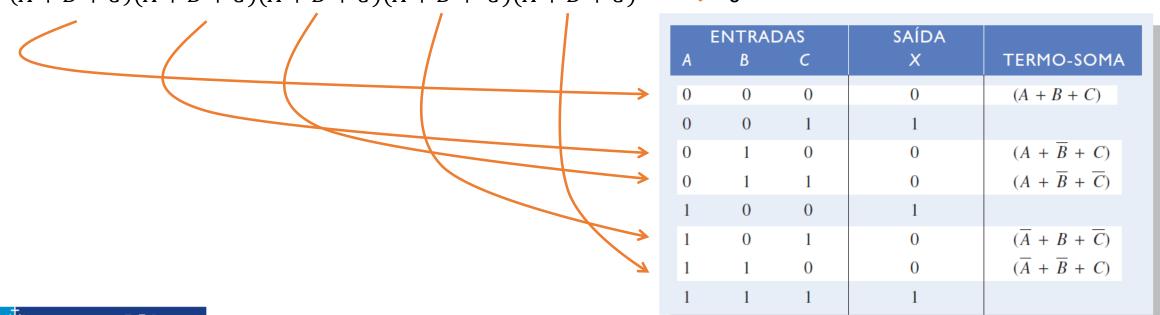
 $A\overline{B}\overline{C}$

ABC



Conversão de expressões de produto-de-somas em tabela-verdade









Conversão de tabelas-verdade em expressões de soma-de-produtos

				$\overline{A}BC=1$
	ENTRA		SAÍDA	$A \overline{B} \overline{C} = 1$
Α	В	С	X	ABC = 1
0	0	0	0	$A B \overline{C} = 1$
0	0	1	0	ABC=1
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	1	1 //
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x = \overline{A} B C + A \overline{B} \overline{C} + A B \overline{C} + A B C$
1	1	1	1	





Conversão de tabelas-verdade em expressões de produto-de-somas

Α	ENTRAI B	DAS C	SAÍDA X	A+B+C=0
0	0	0	0	$A+B+\overline{C}=0$
0	0	1	0	$A + \overline{B} + C = 0$
0	1	1	1	$\overline{A} + B + \overline{C} = 0$
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	1	$y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$





Conversão de tabelas-verdade em expressões de produto-de-somas (POS) e soma-de-produtos (SOP)

E	NTRAE	SAÍDA	
Α	В	С	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$x = \overline{A} B C + A \overline{B} \overline{C} + A B \overline{C} + A B C => SOP$$

$$y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C}) => POS$$

$$x \equiv y$$





Projete um circuito lógico com 3 entradas, cuja saída será nível ALTO somente quando a maioria das entradas for nível ALTO.

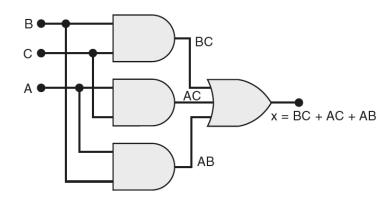
Α	В	С	Х	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\rightarrow \overline{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$\rightarrow A\overline{B}C$
1	1	0	1	$\rightarrow AB\overline{C}$
1	1	1	1	\rightarrow ABC

$$x = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$x = \overline{A}BC + ABC + ABC + ABC + ABC + ABC$$

$$x = BC(\overline{A} + A) + AC(\overline{B} + B) + AB(\overline{C} + C)$$

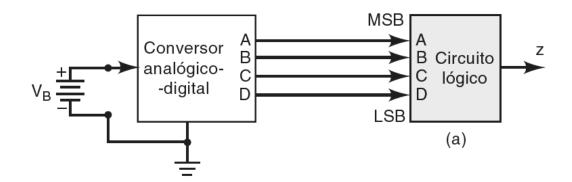
$$x = BC + AC + AB$$







Projete o circuito lógico, cuja saída será nível ALTO somente quando $V_B > 6V_{CC}$. O conversor A/D atua com degraus de $1V_{CC}$.



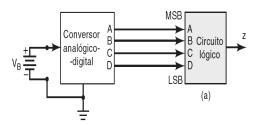
	Α	В	С	D	Z
(0)	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	0
(2)	0	0	1	0	0
(3)	0	0	1	1	0
(4)	0	1	0	0	0
(5)	0	1	0	1	0
(6)	0	1	1	0	0
(7)	0	1	1	1	1→ ABCD
(8)	1	0	0	0	1→ ABCD
(9)	1	0	0	1	1→ ABCD
(10)	1	0	1	0	1→ ABCD
(11)	1	0	1	1	1→ ABCD
(12)	1	1	0	0	1→ ABCD
(13)	1	1	0	1	1→ ABCD
(14)	1	1	1	0	1→ ABCD
(15)	1	1	1	1	1→ ABCD

MSB = Bit mais significativo; LSB = Bit Menos Significativo





Projete o circuito lógico, cuja saída será nível ALTO somente quando $V_B > 6V_{CC}$. O conversor A/D atua com degraus de $1V_{CC}$.



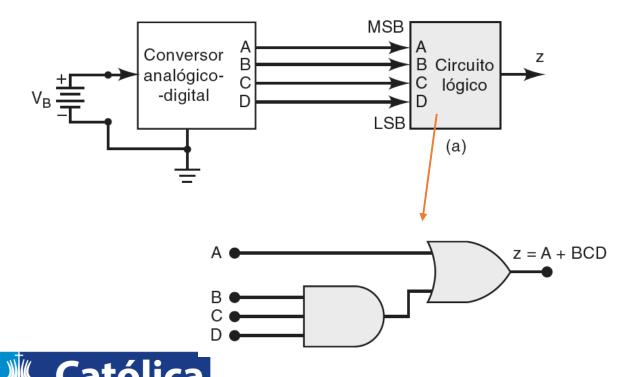
	Α	В	С	D	Z
(0)	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	0
(2)	0	0	1	0	0
(3)	0	0	1	1	0
(4)	0	1	0	0	0
(5)	0	1	0	1	0
(6)	0	1	1	0	0
(7)	0	1	1	1	1→ ABCD
(8)	1	0	0	0	1→ ABCD
(9)	1	0	0	1	1→ ABCD
(10)	1	0	1	0	1→ ABCD
(11)	1	0	1	1	1→ ABCD
(12)	1	1	0	0	1→ ABCD
(13)	1	1	0	1	1→ ABCD
(14)	1	1	1	0	1→ ABCD
(15)	1	1	1	1	1→ ABCD

$$z = \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\overline{D} +$$





Projete o circuito lógico, cuja saída será nível ALTO somente quando $V_B > 6V_{CC}$. O conversor A/D atua com degraus de $1V_{CC}$.



Universidade Católica de Brasília

	Α	В	С	D	Z
(0)	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	0
(2)	0	0	1	0	0
(3)	0	0	1	1	0
(4)	0	1	0	0	0
(5)	0	1	0	1	0
(6)	0	1	1	0	0
(7)	0	1	1	1	1→ ABCD
(8)	1	0	0	0	1→ ABCD
(9)	1	0	0	1	1→ ABCD
(10)	1	0	1	0	1→ ABCD
(11)	1	0	1	1	<u>1</u> → ABCD
(12)	1	1	0	0	1→ ABCD
(13)	1	1	0	1	1→ ABCD
(14)	1	1	1	0	1→ ABCD
(15)	1	1	1	1	1→ ABCD

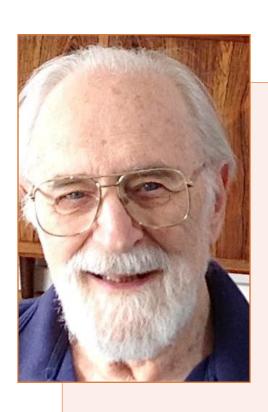


Circuitos lógicos combinacionais





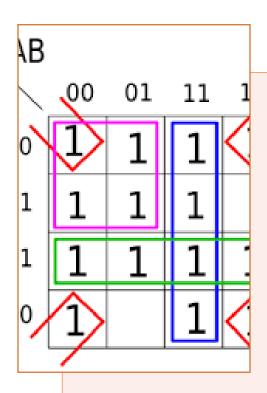
Maurice Karnaugh (1924 - 2021)



- Físico estadunidense
- Formou-se na Yale University (1949) e na mesma instituição concluiu mestrado (1950) e doutorado (1952)
- Além da física, realizou trabalhos na área de engenharia de telecomunicações
- Em 1954 desenvolveu um método de síntese de circuitos lógicos combinacionais (K-Map)







- Método sistemático para simplificação de expressões booleanas para produzir a expressão de soma-de-produtos ou de produto-de-somas mais simples possível.
- O mapa de Karnaugh provê um método do tipo "livro de receitas" para simplificação das expressões booleanas.





- Método do mapa de Karnaugh
- O mapa de Karnaugh (mapa K) é um método gráfico usado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela-verdade no circuito lógico correspondente, de maneira simples e metódica.
- Portanto, é um método sistemático para simplificação de expressões Booleanas





- Método do mapa de Karnaugh
- Mapa de Karnaugh e tabela-verdade para três variáveis: 2³ = 8
- Podemos representar com 0s e 1s. Abaixo a representação em 1s

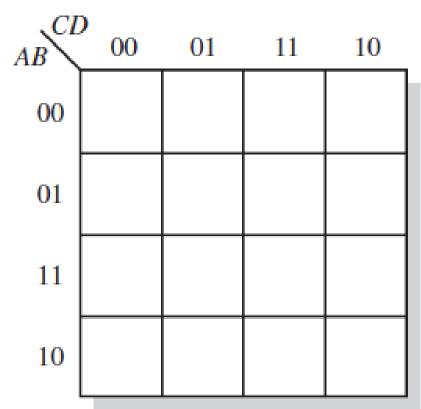
AB C	0	1
00		
01		
11		
10		

AB $\stackrel{C}{\swarrow}$	0	1
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
01	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
11	$AB\overline{C}$	ABC
10	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$





- Método do mapa de Karnaugh
- Mapa de Karnaugh e tabela-verdade para quatro variáveis (representação em 1s):

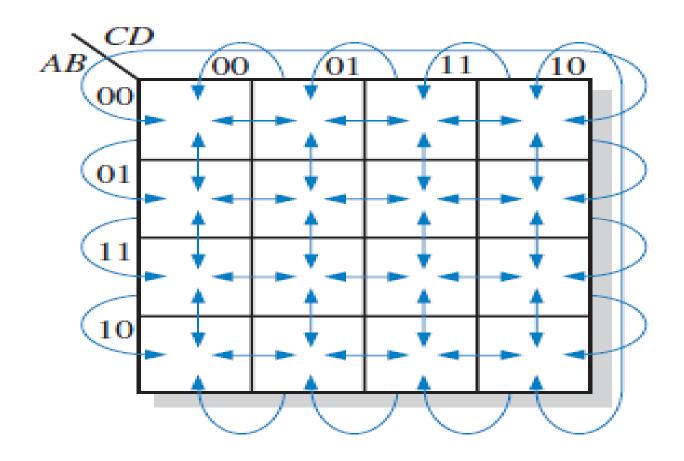


AB $\stackrel{CL}{\searrow}$	00	01	11	10
00	\overline{ABCD}	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
01	ĀBĒD	ĀB Ē D	ĀBCD	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	ABCD	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$



Great Place To Work® Certificada Nov/2022 - Nov/2023 BRASIL

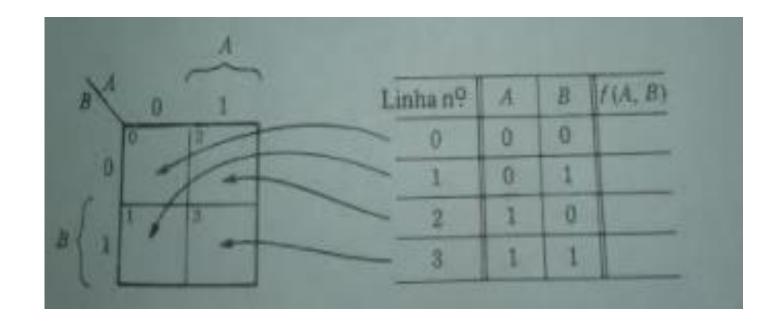
- Método do mapa de Karnaugh
- Células adjacentes







• Esquemas para identificar variáveis no mapa de Karnaugh

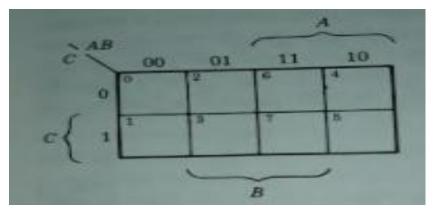


✓ Uma tabela verdade de duas variáveis e seu mapa K

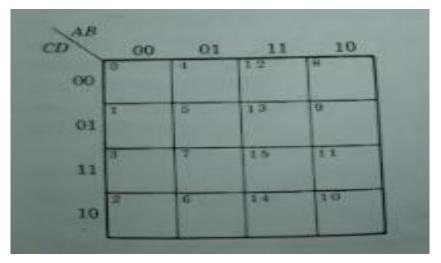


Great Place To Work® Certificada Nov/2022 - Nov/2023

• Esquemas para identificar variáveis no mapa de Karnaugh



√ a) Mapa K para três variáveis



✓ b) Mapa K para 4 variáveis



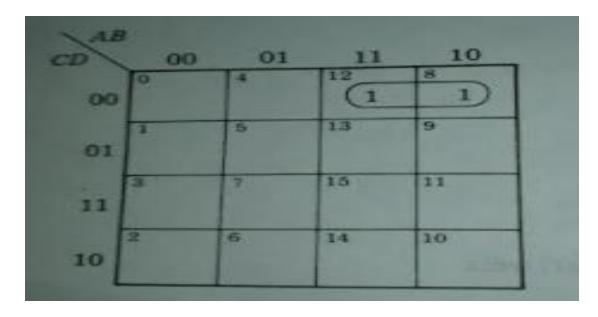


- Mapa de Karnaugh –simplificação de funções lógicas
- "A característica essencial dos mapas K é que células adjacentes horizontalmente e verticalmente (mas não diagonalmente) correspondem a mintermos ou maxtermos que diferem em apenas em uma variável. Esta variável aparece complementada em um termo e não-complementada no outro: exatamente por isso que as células foram ordenadas e numeradas da maneira descrita anteriormente."





- Mapa de Karnaugh –simplificação de funções lógicas
- ✓ Veja o exemplo do mapa abaixo, com duas células adjacentes (mintermos)



- ✓ Temos:
 - \checkmark m₈ (8 = 1000) = A.B.C.D
 - \checkmark m₁₂(12 = 1100) = A.B.C.D
- ✓ Assim:

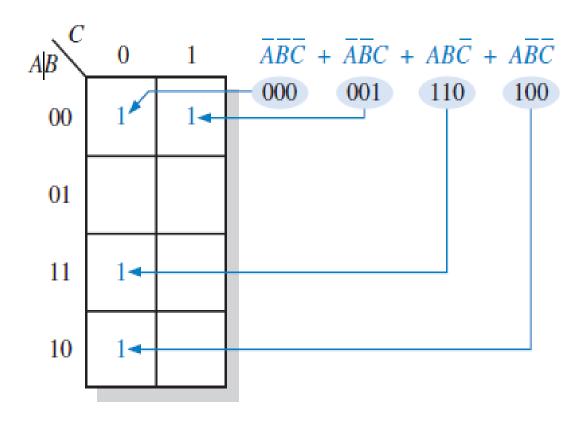
$$A.B.C.D + A.B.C.D = A.C.D.(B + B) = A.C.D$$

Note que a variável B foi eliminada, pois apareceu complementada em um termo e não complementada no outro



Great Place To Work Certificada Nov/2022 - Nov/2023 BRASIL

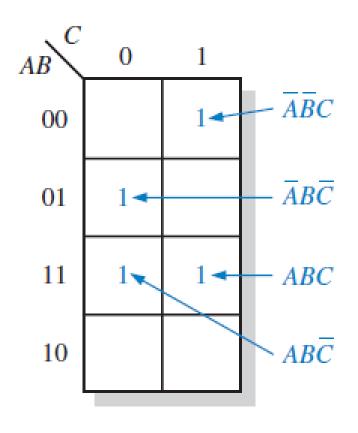
- Método do mapa de Karnaugh
- Mapear soma de produtos





- Método do mapa de Karnaugh
- Mapear soma de produtos
- Coloque no mapa de Karnaugh

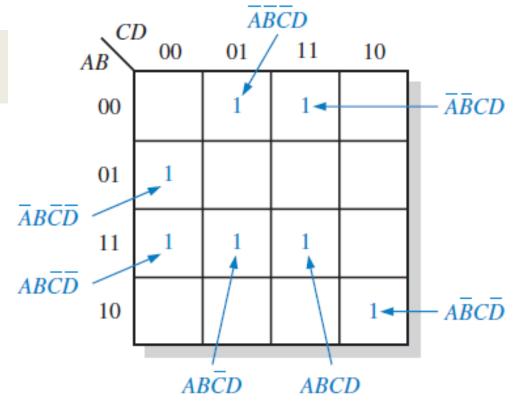






Great Place To Work® Certificada Nov/2022 - Nov/2023 BRASIL

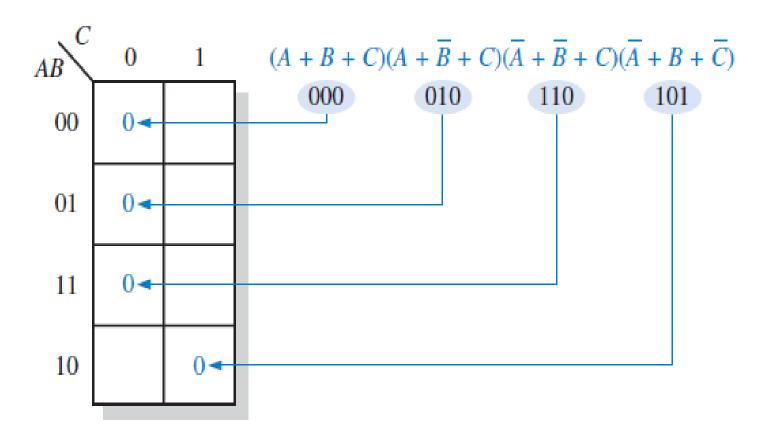
- Método do mapa de Karnaugh
- Mapear soma de produtos
- Coloque no mapa de Karnaugh





Great Place To Work® Certificada Nov/2022 - Nov/2023

- Método do mapa de Karnaugh
- Mapear produtos de somas

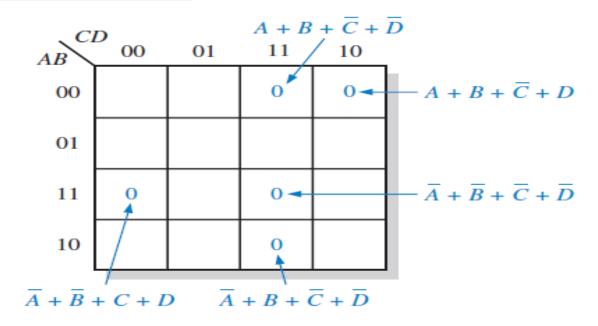




Great Place To Work® Certificada Nov/2022 - Nov/2023

- Método do mapa de Karnaugh
- Mapear produtos de somas
- Coloque no mapa de Karnaugh

$$(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$







- Método do mapa de Karnaugh
- Exemplo Mapa de Karnaugh e tabela-verdade para três variáveis:

Α	В	С	X
0	0	0	$1 \rightarrow \overline{ABC}$
0	0	1	$1 \rightarrow \overline{ABC}$
0	1	0	$1 \rightarrow \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	$1 \rightarrow AB\overline{C}$
1	1	1	0

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \overline{\underline{A}} \overline{B} \overline{\underline{C}} \, + \overline{A} \overline{B} \underline{C} \\ &+ \overline{A} B \overline{C} \, + A B \overline{C} \end{aligned} \right\}$$

	C	С
ĀB	1	1
ĀB	1	0
AB	1	0
AB	0	0

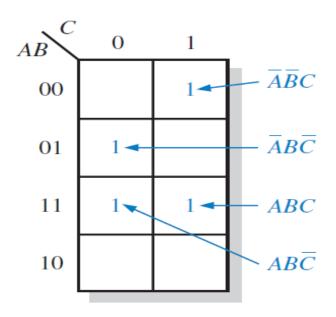




Expressão-padrão de soma-de-produtos 3 variáveis

$$\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

001 010 110 111







Expressão comum de soma-de-produtos –simples que não está na forma padrão 3 variáveis

$$\overline{A} + A\overline{B} + AB\overline{C}$$

\overline{A}	$A\overline{B}$	$AB\overline{C}$
000	100	110
001	101	
010		
011		

AB C	O	1
00	1	1
01	1	1
11	1	
10	1	1





Expressão comum de soma-de-produtos 4 variáveis

$$\overline{B}\overline{C} + A\overline{B} + AB\overline{C} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}CD$$

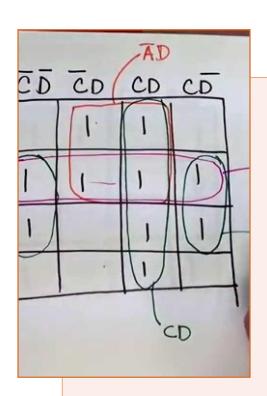
\overline{BC}	$A\overline{B}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$
0000	1000	1100	1010	0001	1011
0001	1001	1101			
1000	1010				
1001	1011				

AB	D 00	01	11	10
00	1	1		
01				
11	1	1		
10	1	1	1	1









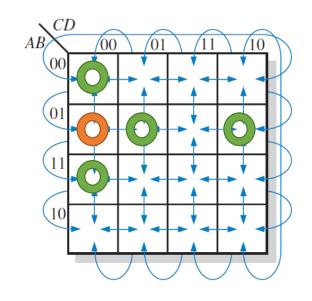
Regras de agrupamento de 1s:

- 1. Um grupo tem que conter 1, 2, 4, 8 ou 16 células, cujos números são potências inteiras de 2. No caso de um mapa de 3 variáveis, 2³ = 8 células é o grupo máximo.
- 2. Cada célula num grupo tem que ser <u>adjacente</u> a uma ou mais células do mesmo grupo, porém todas as células não têm que ser <u>adjacentes</u> uma da outra.
- 3. Sempre inclua o maior número de 1s num grupo de acordo com a regra 1.
- 4. Cada 1 no mapa tem que ser incluído em pelo menos um grupo. Os 1s que já fazem parte de um grupo podem ser incluídos num outro grupo enquanto os grupos sobrepostos incluem 1s não comuns.





Células adjacentes

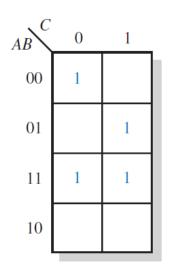


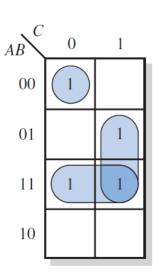
- Existe apenas uma mudança simples de variável entre uma célula adjacentes e outra.
- São adjacentes à célula 0100:
 - 1100
 - 0000
 - 0110
 - 0101





3 variáveis -exemplo Células adjacentes

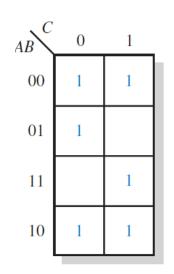




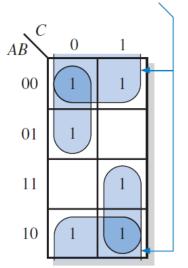




3 variáveis -exemplo Células adjacentes



Adjacência cilíndrica

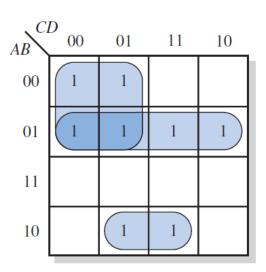






4 variáveis -exemplo Células adjacentes

AB	D 00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11				
10		1	1	

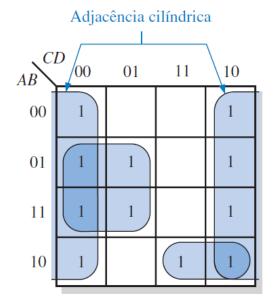






4 variáveis -exemplo Células adjacentes

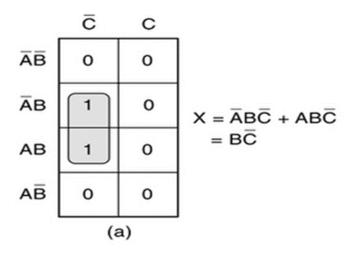
AB	D 00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1		1	1

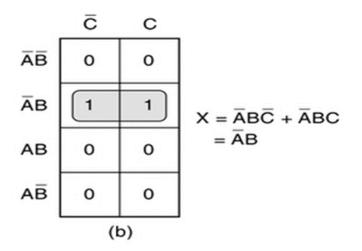


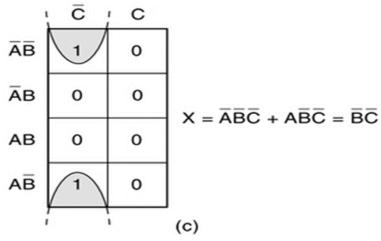


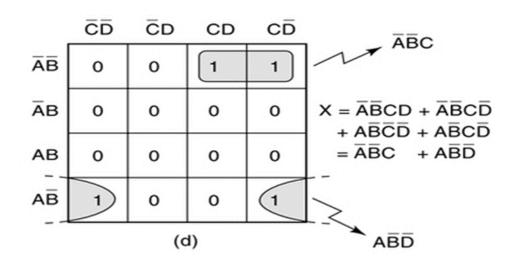


• Mapa de Karnaugh – Agrupamento de par de 1s adjacentes - exemplos



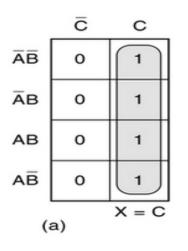


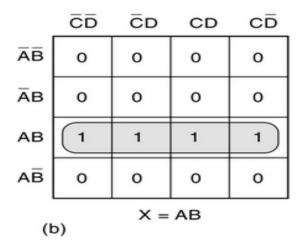




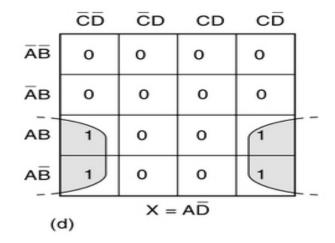


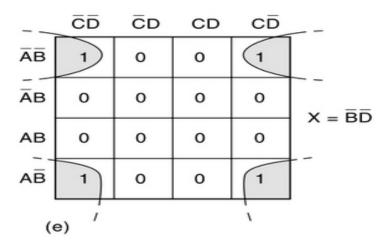
• Mapa de Karnaugh – Agrupamento de quatro 1s adjacentes





	ĊĎ	СD	CD	CD	
ĀĒ	0	0	0	0	
$\bar{A}B$	О	1	1	0	
АВ	0	1	1	0	
$A\overline{B}$	0	0	0	0	
(6	(c) X = BD				









• Mapa de Karnaugh – Agrupamento de oito 1s adjacentes

	CD	СD	CD	CD	
ĀĒ	0	О	О	О	
ĀВ	1	1	1	1	
АВ	1	1	1	1	
ΑĒ	О	О	О	О	
X = B (a)					

	CD	CD	CD	CD	
ĀĒ	1	1	0	0	
ĀВ	1	1	0	0	
АВ	1	1	0	0	
ΑĒ	1	1	0	0	
$X = \overline{C}$ (b)					

,	CD	СD	CD	CD ;	
ĀĒ	1	1	1	1/	
ĀВ	О	О	О	О	
АВ	О	0	О	О	
ΑĒ	1	1	1	1	
$X = \overline{B}$ (c)					

	CD	СD	CD	CD		
ĀĒ	1	О	О	1		
ĀВ	1	О	О	1		
АВ	1	О	О	1		
ΑĒ	1	О	О	1		
$X = \overline{D}$						
(d)						





Expressão de soma-de-produtos mínima

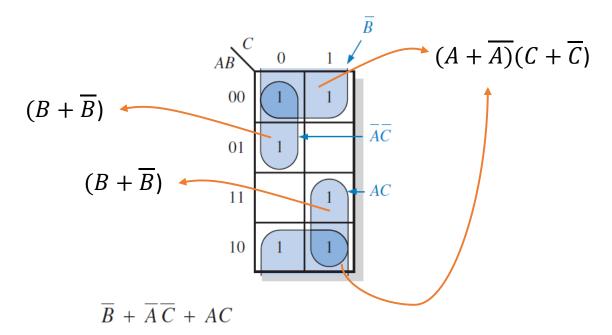
3 variáveis

$$\overline{A} \, \overline{B} \, \overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$

$$AB \quad C \quad AB\overline{C} \quad BC$$

$$AB \quad C \quad AB\overline{C} \quad AB\overline{C$$

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + A B C + A \overline{B} C$$

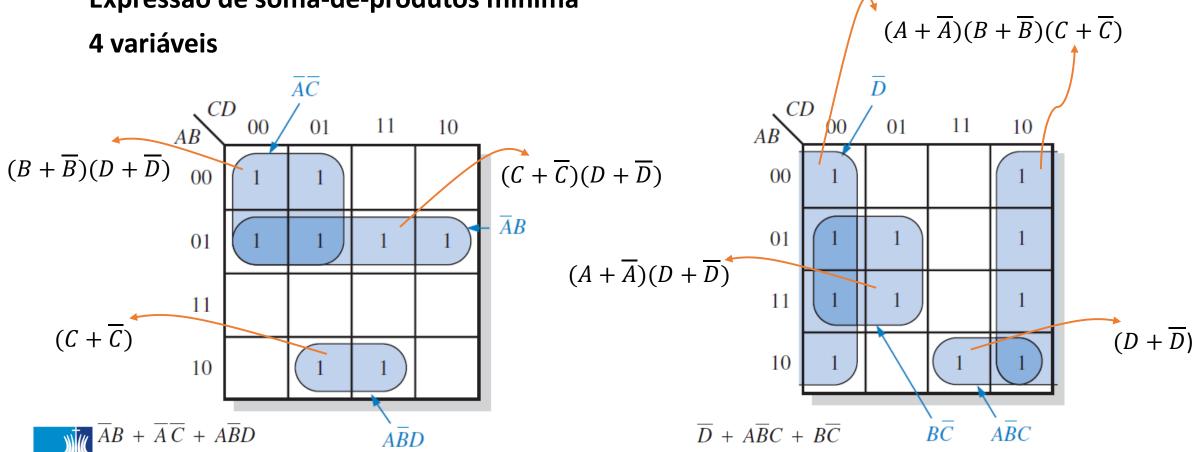




Expressão de soma-de-produtos mínima

4 variáveis

Universidade Católica de Brasília





Circuitos lógicos combinacionais

Exercite seus conhecimentos

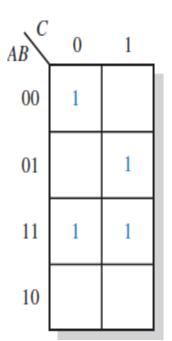


Exercite seus conhecimentos



• Agrupamento 1s -exercite

Encontre a expressão mínima que pode ser obtida com a representação do mapa de karnaugh indicada a seguir:



AB C	0	1	
00	1	1	
01	1		
11		1	
10	1	1	

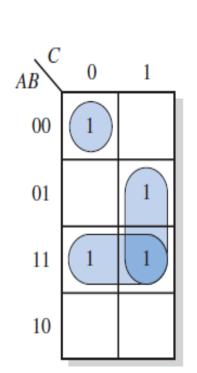
AB	D 00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11				
10		1	1	

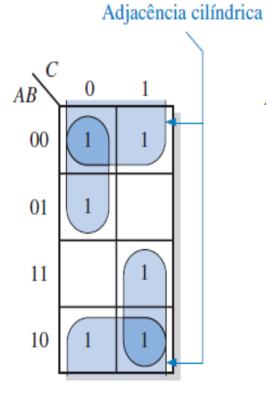
AB	D 00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1		1	1

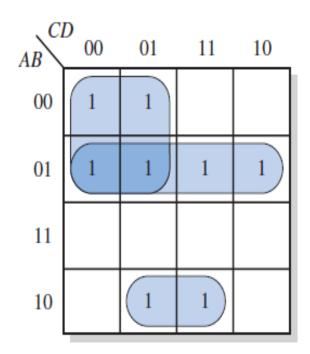
Exercite seus conhecimentos

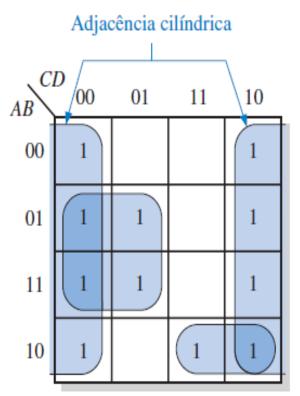


• Agrupamento 1s –exercite, obtenha as expressões mínimas







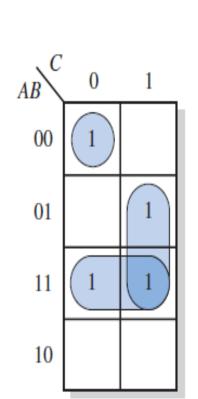


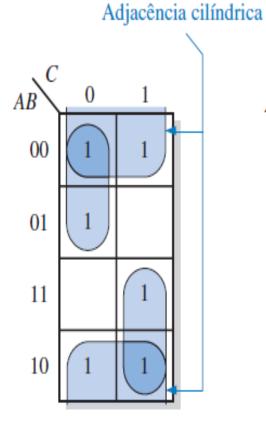


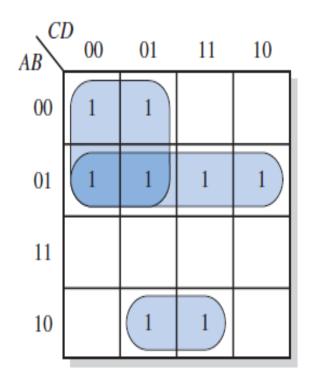
Exercite seus conhecimentos

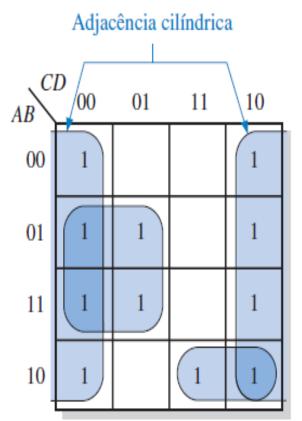


• Agrupamento 1s -exercite













Dúvidas?



