Equações do 1º grau com uma variável

Prezado estudante!

Como você já sabe, nosso objetivo nesta Unidade é levar você a revisar conceitos relacionados às equações de primeiro e de segundo grau de uma variável, relembrar assuntos relacionados à inequação de primeiro grau, além de auxiliá-lo na resolução de equações de segundo grau que necessitem da regra de Bhaskara. Não se assuste! Vamos dar um passo de cada vez, de maneira que você possa acompanhar a caminhada. Para tanto, é muito importante que você se dedique ao estudo da Unidade, aproveitando-se do momento que é fundamental para sua formação pessoal e profissional. Bons estudos!

Estas equações e inequações são importantes em resolução de algumas situações práticas. Enquanto as resoluções de equações de 1º grau sempre são os pontos fixos e as inequações de 1º grau sempre são os intervalos na reta real, as equações do segundo grau (às vezes chamamos de polinômios de segunda ordem) sempre são soluções com dois valores fixos. Vamos entender melhor esta explicação nas próximas páginas.

Para resolvermos um problema matemático, quase sempre devemos transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da Matemática. Veja o exemplo a seguir:

Sentença com palavras	Sentença matemática
8 barras de chocolates marca AAA + 6Kg =14Kg	$8x + 6 = 14$

Normalmente, na sentença matemática, aparecem letras conhecidas como variáveis ou incógnitas. A partir daqui, a Matemática se posiciona perante diferentes situações e será necessário conhecer o valor de algo desconhecido; este é o objetivo do estudo de equações. Por exemplo, adotando a demostração anterior você pode calcular quanto pesa cada barra de chocolate marca AAA?

A palavra *incógnita* significa *desconhecida* e equação tem o prefixo *equa* que provém do Latim e significa *igual*.

Você sabe como fazer este cálculo? Vamos lá?

Bem, se você tem 8 *barras de chocolate marca AAA* + 6*Kg* = 14*Kg*, basta usar uma letra qualquer, por exemplo, x, para simbolizar o peso de cada barra de chocolate. Assim, a equação poderá ser escrita, do ponto de vista matemático, como sendo:

$$8x + 6 = 14$$

Portanto, $x = 1$ o que nos permite afirmar que cada barra de chocolate tem 1kg.

Observe que este é um exemplo simples de uma equação contendo uma variável, mas que é extremamente útil e aparece em muitas situações reais. Valorize este exemplo simples!

Antes de prosseguirmos é importante observar que todas as equações têm:

- Uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incógnitas;
- Um sinal de igualdade, denotado por =;
- Uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda; e

- Uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita.

Portanto,

$8x + 6$	$=$	14
1º membro	Sinal de igualdade	2º membro

Observe que neste exemplo a letra x *é* a incógnita da equação e as expressões do primeiro e segundo membro da equação são os *termos* da equação. Para resolver essa equação e encontrar o valor de x podemos utilizar o seguinte processo para obter o valor de x.

$8x+6 = 14$ → equação original

$8x+6 - 6 = 14 - 6$ → subtraímos 6 dos dois membros

$8x = 8$ → dividimos por 8 os dois membros da equação

$x = 1$ → solução.

Atenção! Quando adicionamos (ou subtraímos) valores iguais em ambos os membros da equação, ela permanece em equilíbrio. Da mesma forma, se multiplicamos ou dividimos ambos os membros da equação por um valor não nulo, a equação permanece em equilíbrio. Este processo nos permite resolver uma equação, ou seja, permite obter as raízes da equação.

A resolução de equações e inequações pertence a uma parte da Matemática chamada Álgebra. Essas equações surgem no nosso cotidiano, nas atividades científicas e na resolução de problemas.

Os procedimentos de resolução de equações e de sistemas de equações foram descobertos por matemáticos que se ocuparam deste tema durante muitos anos e em diferentes épocas da história da Matemática

Aqui, vamos descrever as equações do 1º e 2º segundo grau e as inequações de 1º grau com seus métodos de resoluções. Estas últimas aparecem no contexto da vida cotidiana para comparar ofertas, pressupostos etc.

Para você o que é uma equação?

Muito bem equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. Assim podemos dizer que a equação envolve um sinal de igualdade e uma variável. Por exemplo,

- $2x+8 = 0$;
- $5x - 6 = 6x+8$;
- $5x - 3x = -6+18$.

Em função de nossos objetivos, podemos distinguir três tipos de equações: equações de definição, equações de comportamento e equações de condições de equilíbrio.

- **Equação de definição**: estabelece uma identidade entre duas expressões alternativas que possuem exatamente o mesmo significado. Por exemplo, o lucro total (LT) é definido como sendo o excesso da receita total (RT) sobre o custo total (CT) e podemos escrever:

$$LT = RT - CT.$$

- **Equação de comportamento**: especifica a maneira pela qual uma variável se comporta em resposta a mudanças em outras variáveis. Isto pode envolver comportamento humano (o padrão de consumo em relação à renda), aspectos tecnológicos (a função de produção) e legais (carga tributária). Por exemplo, seja o custo total dado por $CT = 200 + 10x$, onde x denota a quantidade de determinado produto. O custo fixo (o valor de CT quando $x = 0$) é 200. À medida que x aumenta, CT aumenta.

- **Equação de condições de equilíbrio**: temos quando um modelo matemático econômico envolve a noção de equilíbrio. Duas das mais frequentes condições de equilíbrio em Economia são:

$Q_p = Q_o$ (quantidade procurada = quantidade ofertada).

$S = I$ (poupança planejada = investimento planejado).

Resolução de uma equação

Resolver uma equação ou problema por ela proposto significa determinar o seu conjunto solução (S), dentro do conjunto universo (U) considerado que torna a equação verdadeira. As equações de 1° grau são do tipo $ax + b = 0$. Para resolvê-las, normalmente isolamos a variável no lado esquerdo da expressão.

Exemplos 5. 1 Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

- $2x + 3 = -5$.

Resolução: Para resolver $2x + 3 = -5$, você adiciona -3 a ambos os membros desta equação obtendo uma equação equivalente, assim

$2x + 3 = -5 \Rightarrow 2x + 3 - 3 = -5 - 3$

$\Rightarrow 2x + 0 = -8$ (pois zero é o elemento neutro da adição)

$\Rightarrow 2x = -8$.

Agora, você multiplica ambos os membros de $2x = -8$ por $\frac{1}{2}$ e tem:

$$2x = -8 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times -8$$

$\Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{-8}{2} = -4$, pois 1 é o elemento neutro da multiplicação.

$\Rightarrow 1 \cdot x = -4 \Rightarrow x = -4.$

Omitindo algumas etapas realizadas acima, após compreendê-las, para resolver a equação $2x + 3 = -5$, você isola a variável x no lado esquerdo de $2x + 3 = -5$, vem $2x + 3 = -5 \Rightarrow 2x = -5 - 3$

$$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2} = -4.$$

Portanto, $S = \{-4\}$.

▶ $5x = 30.$

$$5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} = 6.$$

Portanto, $S = \{6\}$.

▶ $-3x + 5x = -2.$

$$-3x + 5x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} = -1.$$

Portanto, $S = \{-1\}$.

▶ $-3(-5 + x) - x = -7x + 1.$

$-3(-5 + x) - x = -7x + 1.$

$\Rightarrow 15 - 3x - x = -7x + 1$

$\Rightarrow 7x - 4x = -15 + 1 = -14$

$$\Rightarrow 3x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{3} = -\frac{14}{3}.$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{14}{3}\right\}$.

Exemplos 5.2 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

- $\dfrac{y}{6}=\dfrac{-8}{3}.$

Resolução: $\dfrac{y}{6}=\dfrac{-8}{3} \Rightarrow y=\dfrac{(-8)\,6}{3}=\dfrac{-48}{3}=-16.$

Portanto, $S = \{-16\}$.

- $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x+3}{4}=2x-\dfrac{6-x}{6}+\dfrac{1}{2}.$

Resolução: $\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x+3}{4}=2x-\dfrac{6-x}{6}+\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2(3x)+x+3}{4}=\frac{12x-(6-x)+3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+x+3}{4}=\frac{12x-6+x+3}{6} \Rightarrow \frac{7x+3}{4}=\frac{13x-3}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7x+3}{2}=\frac{13x-3}{3} \Rightarrow 3(7x+3)=2(13x-3)$$

$$\Rightarrow 21x+9=26x-6 \Rightarrow 21x-26x=-6-9$$

$$\Rightarrow -5x=-15 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{5}=3$$

Portanto, $S = \{3\}$.

Para verificar se você entendeu, reservamos algumas equações para você resolver:

a) $\dfrac{3z}{4}=\dfrac{-1}{3}.$

Resposta: $S=\left\{-\dfrac{4}{9}\right\}.$

b) $\frac{2x-3}{2}+\frac{-x+1}{5}=\frac{-x+5}{10}$.

Resposta: $S = \{2\}$.

Agora que você já sabe tudo sobre equação de 1º grau vamos ver alguns exemplos práticos?

Exemplo 5.3 O lucro mensal (L) da empresa Falida é dado por $L = 30x - 4.000,00$, onde x é a quantidade mensal vendida de seu produto. Qual a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro da empresa Falida seja igual a R$ 11.000,00?

Resolução: Sendo $L = 30x - 4.000,00$ a equação do lucro mensal da empresa Falida e como ela pretende ter um lucro mensal de R$ 11.000,00, você tem a seguinte equação:

$$30x - 4.000,00 = 11.000,00$$

e resolvendo,

$30x - 4.000,00 = 11.000,00$

$\Rightarrow 30x = 11.000,00 + 4.000,00 = 15.000,00$

$\Rightarrow 30x = 15.000,00$

$\Rightarrow x = \frac{15.000,00}{30} = 500.$

Portanto, a quantidade que deve ser vendida mensalmente para que o lucro seja R$ 11.000,00 é 500 itens de seu produto.

Exemplo 5.4 O custo mensal (C) de produção de x, $x \in \mathbb{R}$, computadores marca AAA de uma fábrica é $C = 800 + 25x$. Determinar a quantidade mensal produzida sabendo-se que o custo mensal é R$ 15.000,00.

Resolução: Você tem o custo mensal de produção que é $C = 800 + 25x$. E como a fábrica deseja calcular a quantidade mensal produzida para um custo mensal de R$ 15.000,00, tem-se a seguinte equação.

$$800 + 25x = 15.000$$

e resolvendo temos:

$800 + 25x = 15.000$

$\Rightarrow 25x = 15.000 - 800 = 14.200$

$\Rightarrow 25x = 14.200$

$\Rightarrow x = \dfrac{14.200}{25} = 568.$

Portanto, a quantidade mensal produzida de computadores marca AAA é 568.