Equações do 2° Grau ou Equações Quadráticas

As equações do segundo grau são abordadas na história da Matemática desde a época dos egípcios, babilônios, gregos, hindus e chineses.

O primeiro registro das equações polinomiais do 2º grau foi feita pelos babilônios. Eles tinham uma álgebra bem desenvolvida e resolviam equações de segundo grau por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Como as resoluções dos problemas eram interpretadas geometricamente, não fazia sentido falar em raízes negativas. O estudo de raízes negativas foi feito a partir do Século XVIII.

Na Grécia, a Matemática tinha um cunho filosófico e pouco prático. Euclides, nos *Elementos*, resolve equações polinomiais do 2º grau através de métodos geométricos. Buscando contribuir na busca da resolução de equações do 2º grau Diophanto apresentou outra representação da equação introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva.

Na Índia as equações polinomiais do 2º grau eram resolvidas completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada geometricamente por Al-Khowârizmi, no século IX. Eles descartavam as raízes negativas, por serem “inadequadas” e aceitavam as raízes irracionais. Tinham também uma “receita” para a solução das equações de forma puramente algébrica.

No Brasil, costuma-se chamar de fórmula de Bhaskara àquela que dá as soluções da equação do segundo grau. São equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$. Suas soluções são dadas por

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0.$$

Para resolvermos uma equação do segundo grau devemos lembrar:

i) Δ, lê-se delta, do alfabeto grego e $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado descriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$,

ii) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e distintas;

iii) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui soluções reais e iguais;

iv) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui soluções reais.

Atenção! Se $a = 0$ em $ax^2 + bx + c = 0$, vem $0x^2 + bx + c = 0$ ou $0 + bx + c = 0$, ainda $bx + c = 0$ e você tem uma equação do primeiro grau em x. Se $b = 0$ ou $c = 0$, a equação está na forma incompleta.

Exemplos 5.5 Resolver as equações em $\mathbb{R}$.

▶ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, você tem $a = 1$; $b = -5$ e $c = 6$. Aplicando a fórmula acima, você tem:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ ou $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Portanto, $S = \{2, 3\}$.

▶ $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Resolução: Na equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, você tem, $a = 1$; $b = -4$ e $c = 3$. Aplicando a fórmula acima, teremos:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

ou seja,

$x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ ou $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ são as soluções da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Portanto, $S = \{1, 3\}$.

Para verificarmos se você entendeu, separamos algumas equações para você resolver:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$.

Resposta: $S = \{3\}$.

Você pode estar se perguntando: qual o lado prático de equação do segundo grau? Veja na sequência.

Exemplo 5.6 O lucro mensal, em reais, de uma empresa é dado por $L = -100x^2 + 1000x - 1600$, em que x é a quantidade vendida. Para que valores de x o lucro é igual a R$ 900,00?

Resolução. Para que o lucro seja igual a R$ 900,00 você tem $L = 900$, ou seja,

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Para encontrar os valores de x basta resolver a equação do segundo grau:

$$-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900.$$

Dividindo ambos os membros da equação $-100x^2 + 1.000x - 1.600 = 900$ por 100 você tem:

$$- x^2 + 10x - 16 = 9$$
$$\Rightarrow - x^2 + 10x - 16 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow - x^2 + 10x - 25 = 0,$$

onde $a = -1$, $b = 10$ e $c = -25$.

Aplicando a fórmula de Bhaskara para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, você tem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \text{x} (-1) \text{x} (25)}}{2 \text{x} (-1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \text{x} 25}}{2 \text{x} (-1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{-2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-10 \pm 0}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5,$$

ou seja,

$x = 5$.

Portanto, para que o lucro seja igual a R$ 900,00 é necessário que a quantidade vendida seja 5 unidades.