Sistemas Computacionais

Parte 04 – Circuitos lógicos e operações I

Prof. Fancisco Javier

Universidade Católica de Brasília

Circuitos lógicos e operações

Representação algébrica

Postulados (ou axiomas)

Representação algébrica

- Vimos que as operações booleanas básicas podem ser representadas algebricamente.

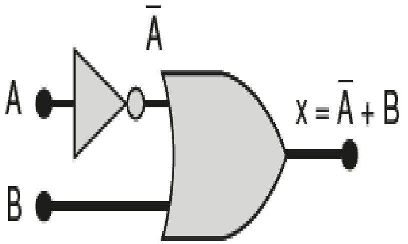
Operação boolena	Representação algébrica
OR	$x = A + B$
AND	$x = A \,.\, B$
NOT	$x = \overline{A}$

Ou simplesmente: x = AB

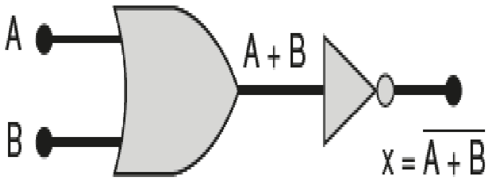
Universidade Católica de Brasília

Representação algébrica

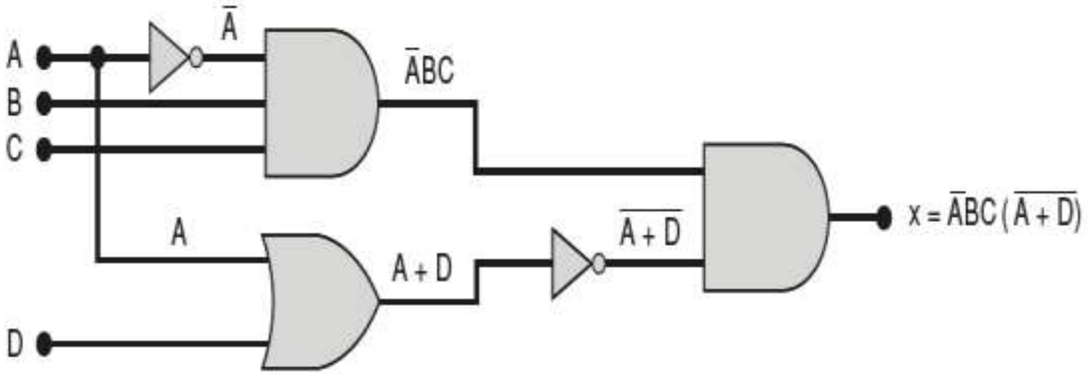
Combinando diversas portas lógicas básicas



1



2



3

Postulados (ou axiomas)

São pressupostições aceitas como verdadeiras

Edward Vermilye Huntington (1874 – 1952): matemático americano.

- Estabeleceu, em 1904, os postulados da Álgebra de Boole, na Universidade de Harvard.

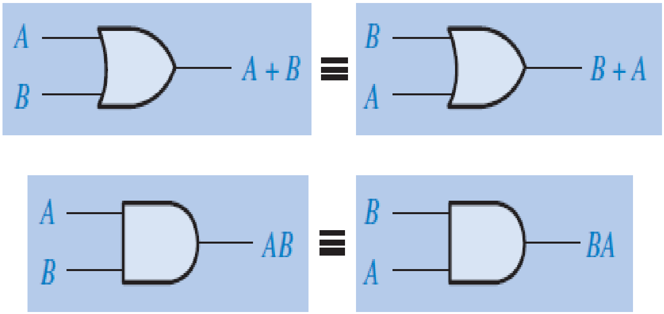
Postulados (ou axiomas)

As leis da álgebra também se fazem presentes nas operações booleanas.

- Leis Cumulativas

Operação booleana	Representação algébrica
OR	$A + B \equiv B + A$
AND	$A \, . \, B \equiv B \, . \, A$

Símbolo de equivalência

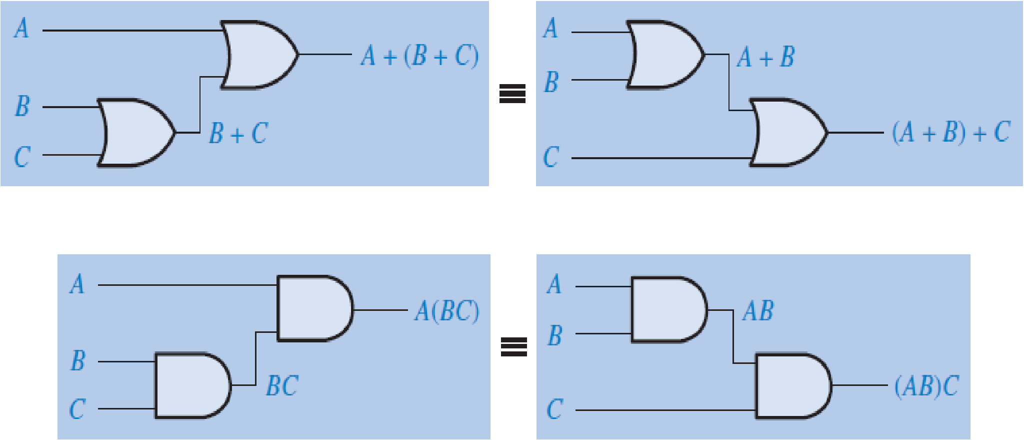


Postulados (ou axiomas)

As leis da álgebra também se fazem presentes nas operações booleanas.

- Leis Associativas

Operação booleana	Representação algébrica
OR	$(A + B) + C \equiv A + (B + C)$
AND	$(A \,.\, B) .\, C \equiv A \,.\, (B \,.\, C)$

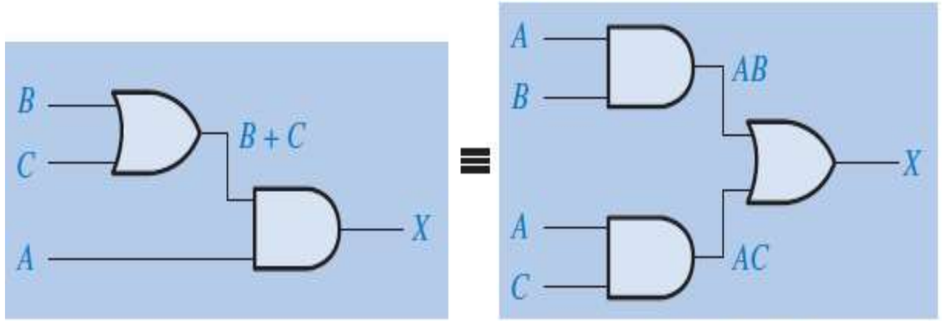


Postulados (ou axiomas)

As leis da álgebra também se fazem presentes nas operações booleanas.

- Leis Distributivas

Operação booleana	Representação algébrica
AND / OR	$A . (B + C) \equiv (A . B) + (A . C)$
OR / AND	$A + (B . C) \equiv (A + B) . (A + C)$



$X = A(B + C)$ $X = AB + AC$

Postulados (ou axiomas)

As leis da álg… …anas.

•

Como seria interpretada a função x $= A + B \, . \, C$?

Oper…

OR

x é o resultado da operação OR de A com o resultado da operação AND de B com C

x é o resultado da operação AND de C com o resultado da operação OR de A com B

x

Postulados (ou axiomas)

Vamos conferir na tabela-verdade de $x = A + B\ .\ C$

A	B	C	Y = B . C	A + Y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

A	B	C	Y = A + B	Y . C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Postulados (ou axiomas)

Vamos confer

A				
0				
0				
0				
1				
1	0			
1			0	
1	1	1	1	1

			B	Y . C
				0
				0
				0
				1
			1	0
		1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Usa-se a mesma convenção da álgebra "normal".

1. A operação AND tem prevalência sobre a operação OR;
2. Para alterar essa prevalência usamos o parêntesis.

E agora?

Postulados (ou axiomas)

x $= A + B \cdot C$

x $= (A + B) \cdot C$

A	B	C	B . C	A + (B.C)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

A	B	C	A + B	(A+B) . C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Universidade Católica de Brasília

Circuitos lógicos

Teoremas booleanos

Universidade Católica de Brasília

Teoremas booleanos

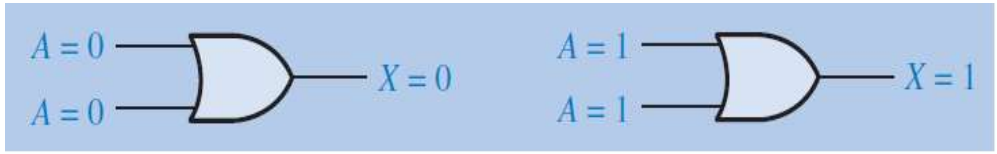
É algo que se pode provar com passos lógicos a partir de axiomas

Sendo K o conjunto dos números booleanos

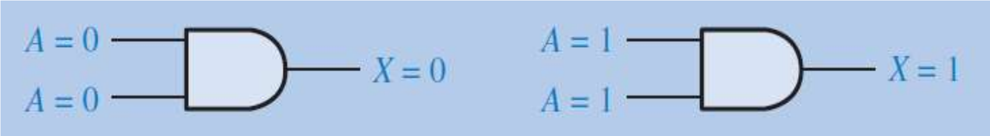
- Os elementos 0 e 1 são únicos.

- Para todo elemento a em K, temos:

$a + a = a$



$a \,.\, a = a$

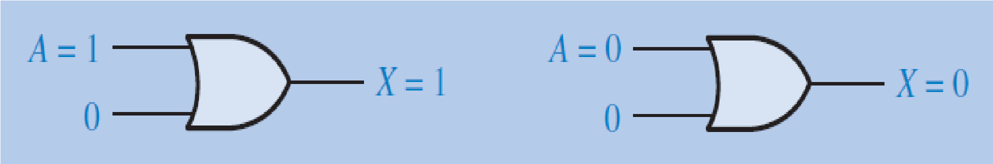


Universidade Católica de Brasília

Teoremas booleanos

- Para todo elemento a em K, temos:

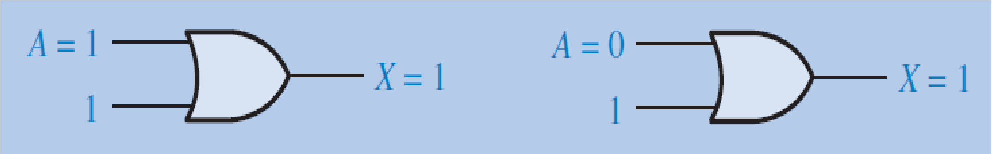
$$a + 0 = a$$



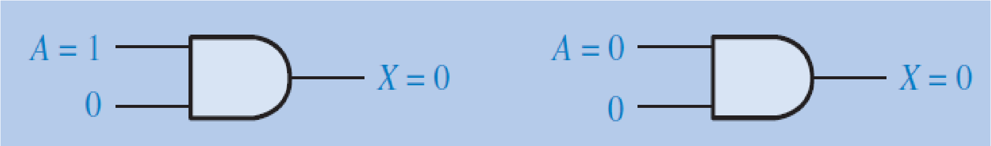
$$a \,.\, 1 = a$$

- Para todo elemento a em K, temos:

$$a + 1 = 1$$



$$a \,.\, 0 = 0$$



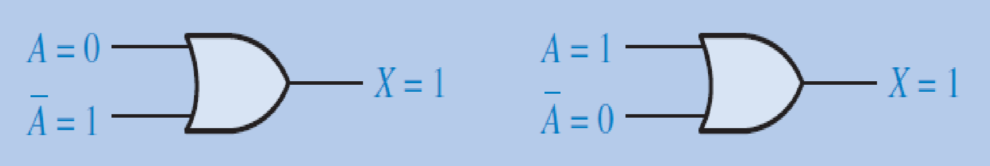
Universidade Católica de Brasília

Teoremas booleanos

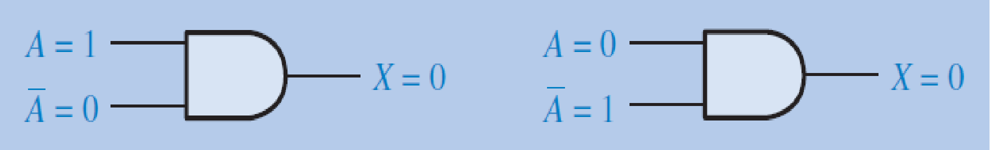
- Os elementos 0 e 1 são distintos e $\overline{1} = 0$

- Para todo elemento a em K, temos:

$$a + \overline{a} = 1$$



$$a \,.\, \overline{a} = 0$$

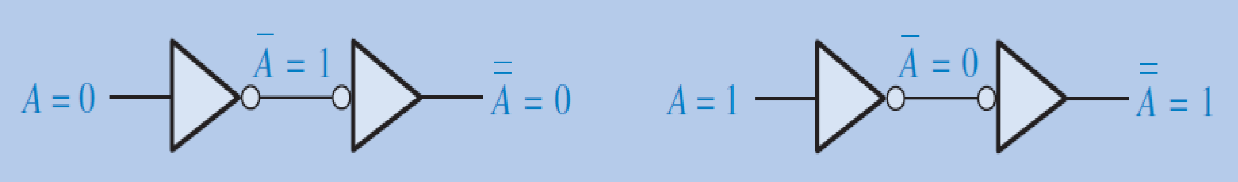


Católica
Universidade Católica de Brasília

Teoremas booleanos

- Para todo elemento a em K, temos:

$$a = \overline{\overline{a}}$$



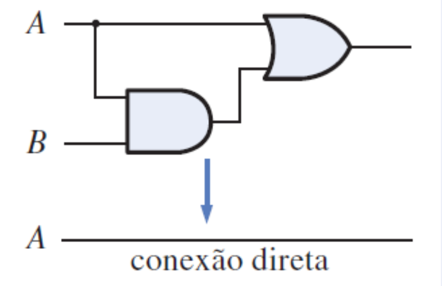
Teoremas booleanos

- Para todo par de elementos a e b em K, temos:

$$a + a.b = a$$

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual



$$a \,.\, (1 + b) = a$$

A	B	Y = A + B	A . Y
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Circuitos lógicos

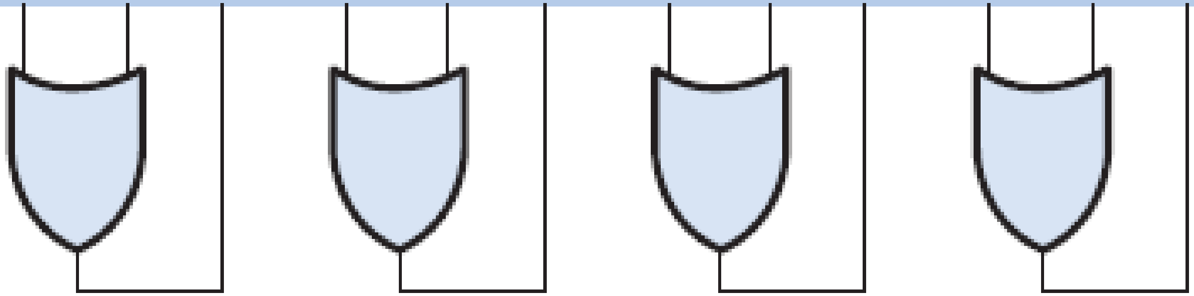
Exercite seus conhecimentos!!!

Adição Booleana

Adição é equivalente à função **OR**

Igual a 1 quando tem qualquer entrada igual a 1.

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $0 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 0 = 1$ $\quad$ $1 + 1 = 1$



Adição Booleana

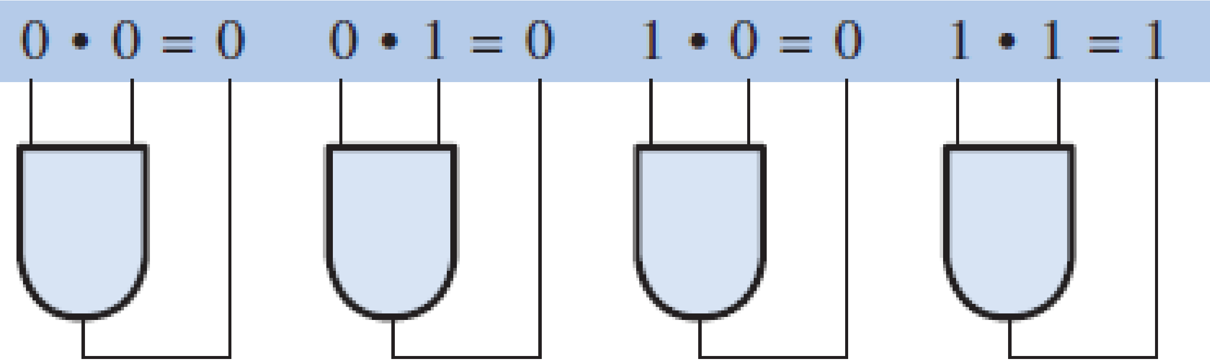
1. Determine os valores para os quais o resultado de $\mathbf{A+\overline{B}+\overline{C}+D}$ é igual a **0**
2. Determine os valores para os quais o resultado de **A+B+C** é igual a **0**

1) => A = 0; B = 1; C = 1 e D =0
2)=> A = B = C = 0

Multipicação Booleana

Multiplicação é equivalente à função **AND**

Igual a 0 quando tem qualquer entrada igual a 0.



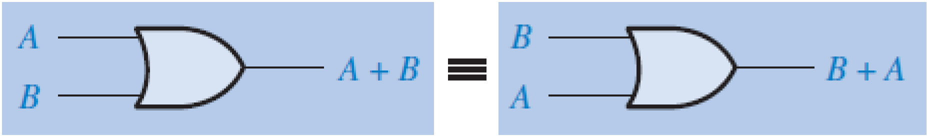
Multiplicação Booleana

1. Determine os valores para os quais o resultado de $\mathbf{A\overline{B}\,\overline{C}D}$ é igual **1**
2. Determine os valores para os quais o resultado de $\mathbf{A\overline{B}C}$ é igual **1**

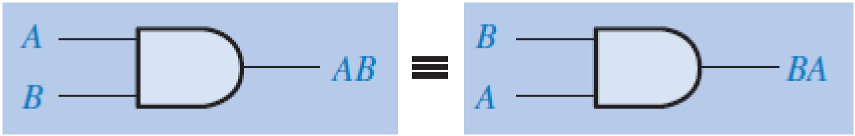
1) A = D = 1 e B = C = 0
2) A=C = 1 e B = 0

Leis da Álgebra Booleana

Comutativa da adição
A+B = B + A



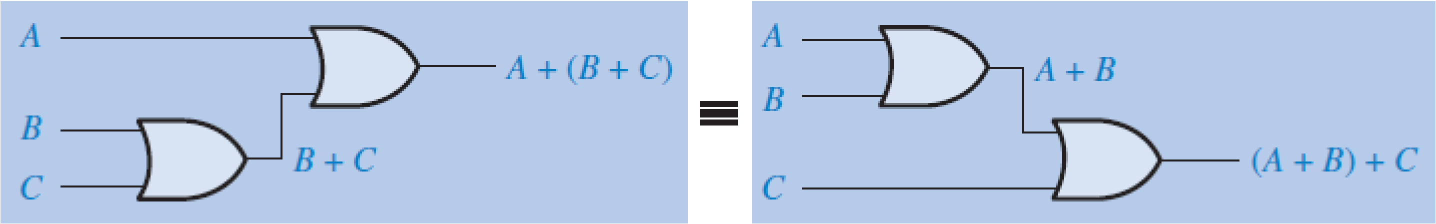
Comutativa da Multiplicação
AB = BA



Leis da Álgebra Booleana

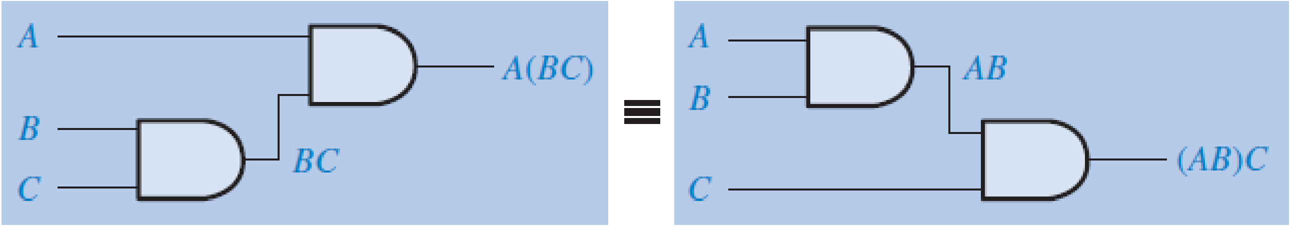
Associativa da adição

A+(B+C) = (A + B)+ C



Associativa da Multiplicação

(AB)C = A(BC)

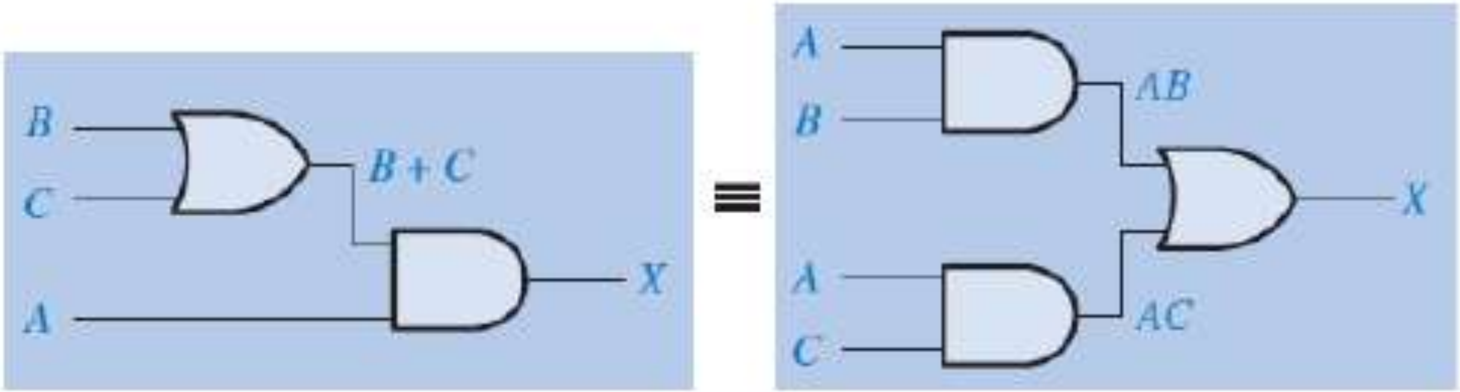


Universidade Católica de Brasília

Leis da Álgebra Booleana

Lei Distributiva

$A(B + C) = AB + AC$



$X = A(B + C)$ $\qquad$ $X = AB + AC$

Leis da Álgebra Booleana

Regra da álgebra Booleana

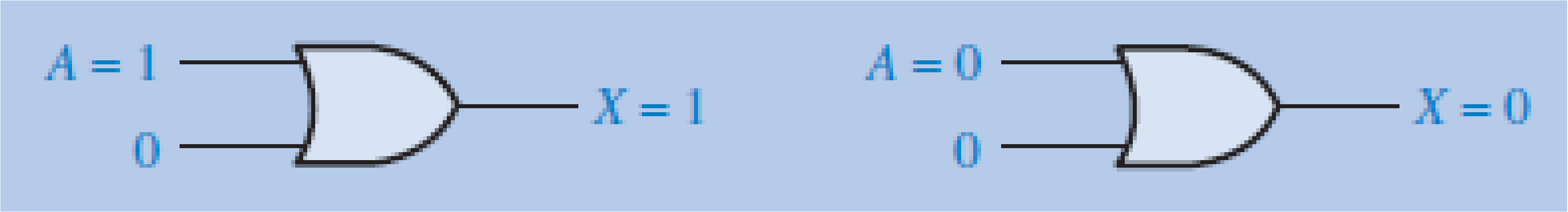
1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

10 => A+A.B = A(1+B) = A.(1) = A

12 => (A.A+A.C+B.A+B.C) = (A+AB+AC+BC)
= (A+AC+BC)
= A + BC

Leis da Álgebra Booleana

Regra 1. $A + 0 = A$ A operação OR de uma variável com 0 é sempre igual a variável. Se a variável de entrada A for 1, a variável X de saída será 1, que é igual a A. Se A for 0, a saída será 0, que também é igual a A. Essa regra é ilustrada na Figura 4–6, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 0.



$$X = A + 0 = A$$

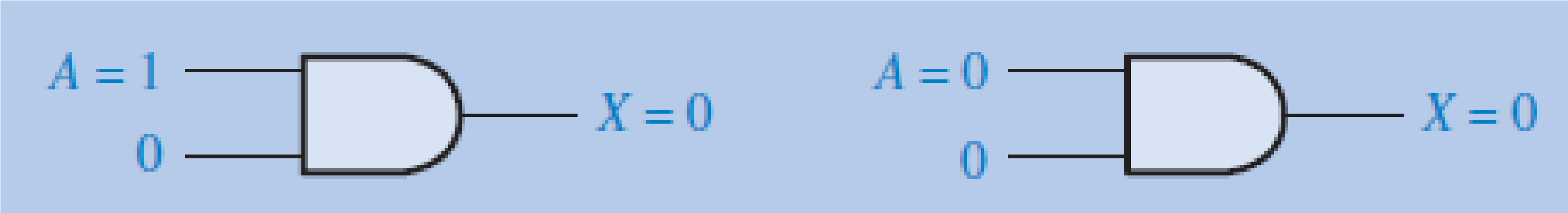
Leis da Álgebra Booleana

Regra 2. $A + 1 = 1$ A operação OR da variável com 1 é igual a 1. Um 1 numa entrada de uma porta OR produz um 1 na saída, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra é ilustrada na Figura 4–7, na qual a entrada inferior da porta está fixa em 1.

$$X = A + 1 = 1$$

Leis da Álgebra Booleana

Regra 3. $A \cdot 0 = 0$ A operação AND da variável com 0 sempre é igual a 0. Todas as vezes que uma entrada de uma porta AND for 0, a saída será 0, independente do valor da variável na outra entrada. Essa regra está ilustrada na Figura 4–8, na qual a entrada inferior está fixa em 0.



$X = A \cdot 0 = 0$

Leis da Álgebra Booleana

Regra 4. $A \cdot 1 = A$ A operação AND da variável com 1 é sempre igual a variável. Se A for 0 a saída da porta AND será 0. Se A for 1, a saída da porta AND será 1 porque ambas as entradas agora são 1s. Essa regra é mostrada na Figura 4–9, onde a entrada inferior está fixa em 1.

$$X = A \cdot 1 = A$$

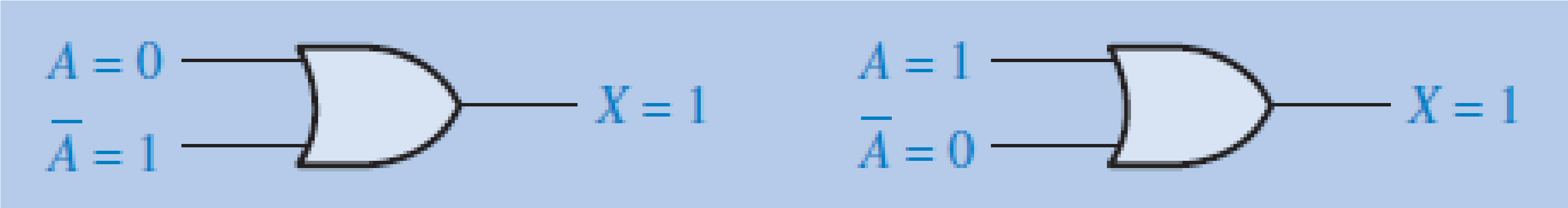
Leis da Álgebra Booleana

Regra 5. $A + A = A$ A operação OR da variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se A for 0, então $0 + 0 = 0$; e se A for 1, então $1 + 1 = 1$. Isso é mostrado na Figura 4–10, onde as duas entradas são a mesma variável.

$X = A + A = A$

Leis da Álgebra Booleana

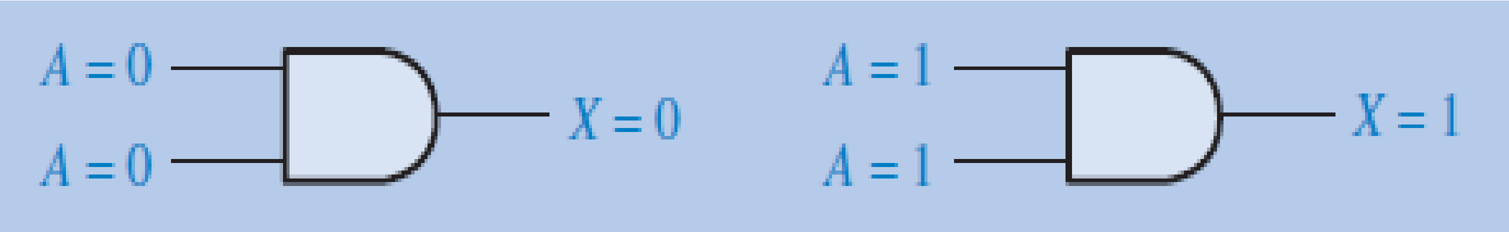
Regra 6. $A + \bar{A} = 1$ A operação OR da variável com o seu complemento é sempre igual a 1. Se A for 0, então $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$. Se A for 1, então $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$. Veja a Figura 4–11, onde uma entrada é o complemento da outra.



$$X = A + \bar{A} = 1$$

Leis da Álgebra Booleana

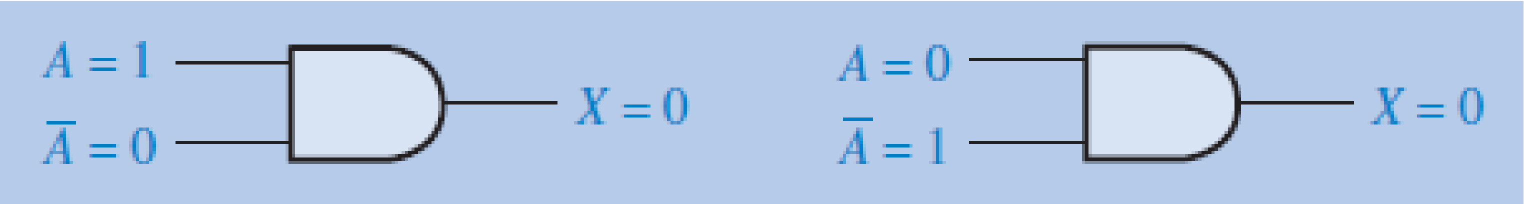
Regra 7. $A \cdot A = A$ A operação AND de uma variável com ela mesma é sempre igual a variável. Se $A = 0$, então $0 \cdot 0 = 0$; e se $A = 1$, então $1 \cdot 1 = 1$. A Figura 4–12 ilustra essa regra.



$$X = A \cdot A = A$$

Leis da Álgebra Booleana

Regra 8. $\mathbf{A \cdot \bar{A} = 0}$ A operação AND de uma variável e o seu complemento é sempre igual a 0. Nesse caso, ou $\bar{A}$ ou sempre será 0; e quando um 0 é aplicado na entrada de uma porta AND, a saída também será 0. A Figura 4–13 ilustra essa regra.



$$X = A \bullet \bar{A} = 0$$

Leis da Álgebra Booleana

Regra 9. $\bar{\bar{A}} = A$ O complemento duplo de uma variável é sempre igual a variável. Se complementarmos (invertermos) a variável A uma vez, obtemos $\bar{A}$. Então se complementarmos (invertemos) $\bar{A}$, obtemos A, que é a variável original. Essa regra é mostrada na Figura 4–14 usando inversores.

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Leis da Álgebra Booleana

Regra 10. $A + AB = A$ Essa regra pode ser provada aplicando a lei distributiva, Regra 2, e a Regra 4 como a seguir:

$$A + AB = A(1 + B) \qquad \text{Fatorando (lei distribuitiva)}$$
$$= A \cdot 1 \qquad \text{Regra 2: } (1 + B) = 1$$
$$= A \qquad \text{Regra 4: } A \cdot 1 = A$$

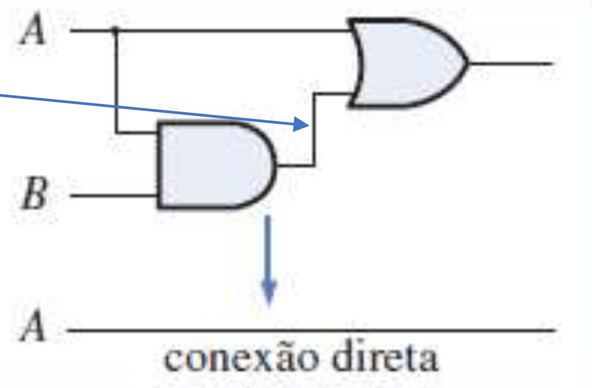
Universidade Católica de Brasília

Leis da Álgebra Booleana

A prova é mostrada na Tabela 4–2, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual



Leis da Álgebra Booleana

Regra 11. $A + \bar{A}B = A + B$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

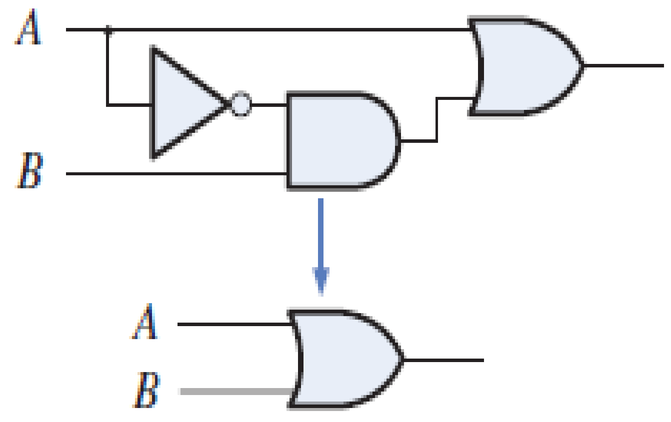
$A + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B$	Regra 10: $A = A + AB$
$= (AA + AB) + \overline{A}B$	Regra 7: $A = AA$
$= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B$	Regra 8: adicionando $A\overline{A} = 0$
$= (A + \overline{A})(A + B)$	Fatorando
$= 1 \cdot (A + B)$	Regra 6: $A + \overline{A} = 1$
$= A + B$	Regra 4: simplifica o 1

Leis da Álgebra Booleana

A prova é mostrada na Tabela 4–3, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual



Leis da Álgebra Booleana

Regra 12. $(A + B)(A + C) = A + BC$ Essa regra pode ser provada da seguinte forma:

$(A + B)(A + C)$	$= AA + AC + AB + BC$	Lei distribuitiva
	$= A + AC + AB + BC$	Regra 7: $AA = A$
	$= A(1 + C) + AB + BC$	Fatorando (lei distribuitiva)
	$= A \cdot 1 + AB + BC$	Regra 2: $1 + C = 1$
	$= A(1 + B) + BC$	Fatorando (lei distribuitiva)
	$= A \cdot 1 + BC$	Regra 2: $1 + B = 1$
	$= A + BC$	Regra 4: $A \cdot 1 = A$

Regra da álgebra Booleana

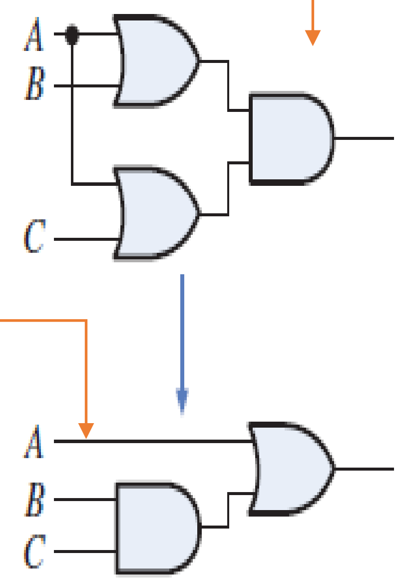
1. $A + 0 = A$	7. $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	8. $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	9. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	10. $A + AB = A$
5. $A + A = A$	11. $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

Leis da Álgebra Booleana

A prova é mostrada na Tabela 4–4, onde temos a tabela-verdade e a conseqüente simplificação do circuito lógico.

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual



Resumo das Propriedades:

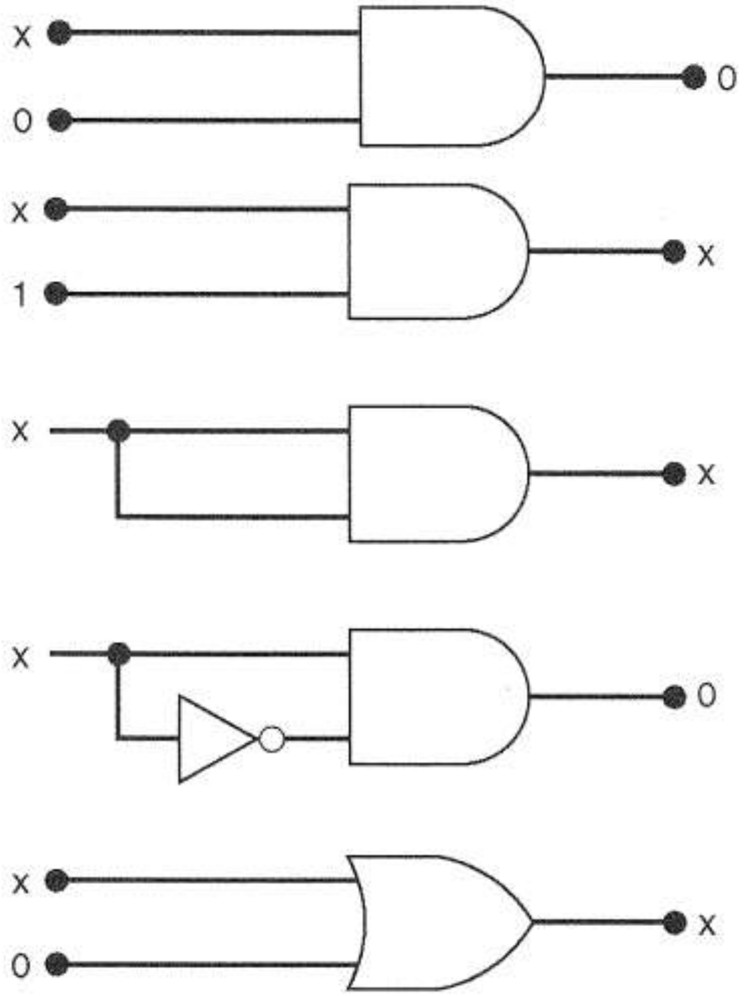
(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(3) $x \cdot x = x$

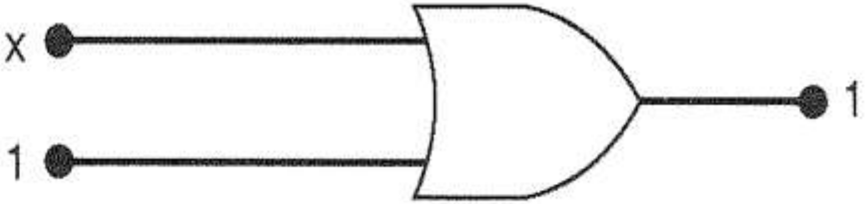
(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

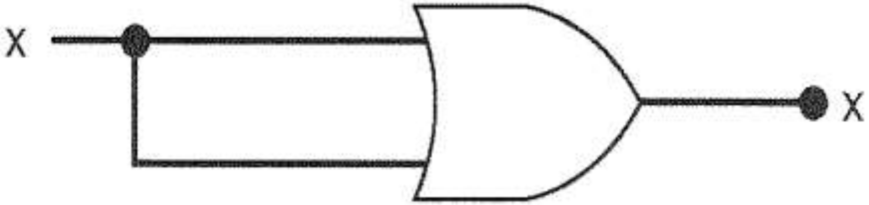


Resumo das Propriedades:

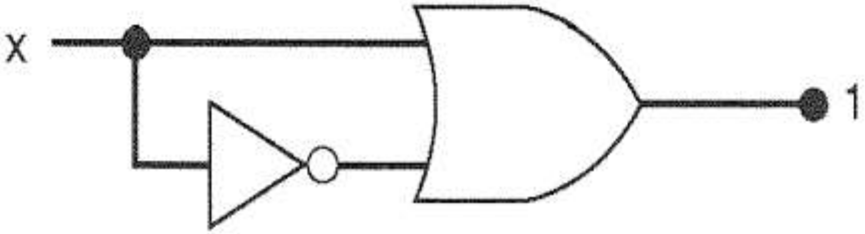
(6) $x + 1 = 1$



(7) $x + x = x$



(8) $x + \overline{x} = 1$



Resumo das Propriedades:

(9)	$x + y = y + x$
(10)	$x \cdot y = y \cdot x$
(11)	$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$
(12)	$x(yz) = (xy)z = xyz$
(13a)	$x(y + z) = xy + xz$
(13b)	$(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$
(14)	$x + xy = x$
(15)	$x + \overline{x}y = x + y$

Great Place To Work. Certificada

Católica
Universidade Católica de Brasília

Próxima aula

- Circuitos lógicos
  - Portas NAND e NOR
  - Teorema de De Morgan
  - Atraso de propagação

Dúvidas?