

Resolução de Sistemas de EDOs

Natasha M. da Rocha

2 de Julho de 2013

1 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Os métodos de Runge-Kutta são um conjunto de métodos para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias. O mais utilizado é o chamado método de Runge-Kutta de quarta ordem, ou simplesmente "RK4". Dado um problema de valor inicial, com condições do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Podemos aproximar pontos sucessivos da função usando as seguintes fórmulas:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) \quad (2)$$

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (3)$$

Onde:

$$\begin{aligned} f_0 &= f(x_0, y_0) \\ f_1 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \left(\frac{h}{2}\right)f_0\right) \\ f_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \left(\frac{h}{2}\right)f_1\right) \\ f_3 &= f(x_0 + h, y_0 + hf_2) \end{aligned}$$

O método também pode ser usado para resolver sistemas de equações acopladas se usarmos notação vetorial:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{f}(\vec{S}) \quad (4)$$

2 Movimento da Terra em torno do Sol

Considere que a única força que atua sob a Terra é a atração gravitacional entre ela e o Sol. Pela Segunda Lei de Newton, temos então que:

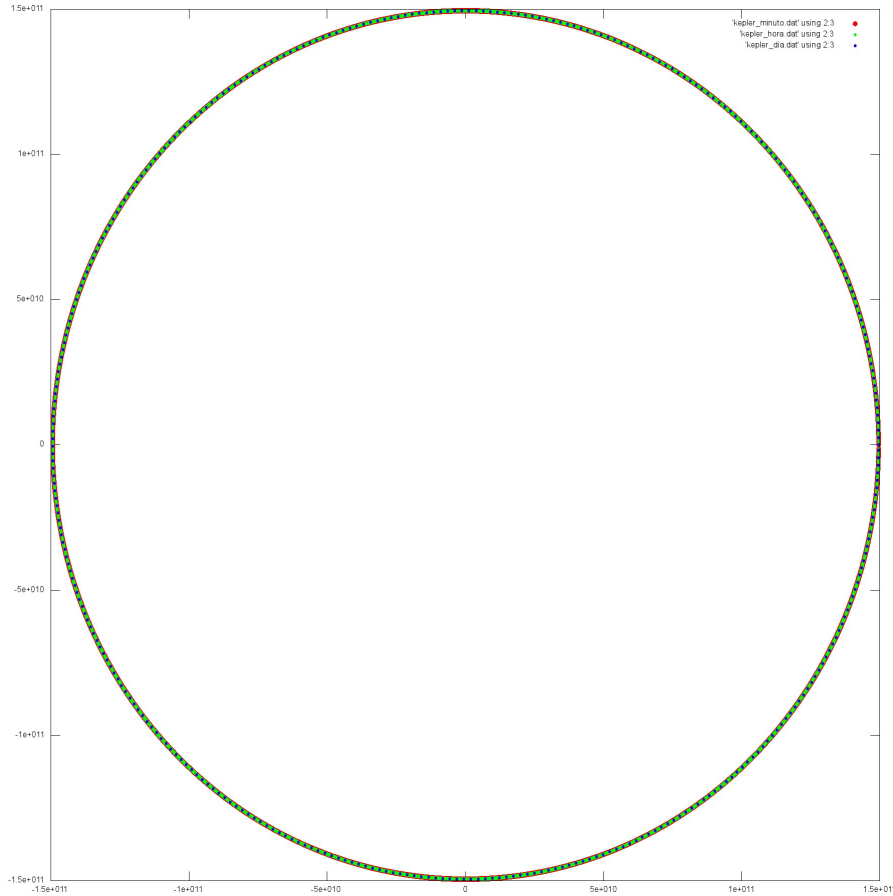
$$\vec{F} = \frac{GM_{sol}M_{terra}}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = M_{terra}\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5)$$

Sendo assim, teremos as seguintes variáveis (e suas derivadas) para o uso no método de Runge-Kutta:

j	$S[j]$	$dS[j]/dt$
0	x	v_x
1	v_x	$-\frac{GM_{sol}}{(x^2+y^2)^{3/2}}x$
2	y	v_y
3	v_y	$-\frac{GM_{sol}}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$

3 Resultados

Consideramos $G = 6.67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2$, $M_{sol} = 1.98 * 10^{30} kg$, $x_0 = 1.496 * 10^{11} m$ e $v_{y0} = 2.97 * 10^4 m/s$. Como a velocidade é perpendicular à força, \vec{F} não realiza trabalho e o módulo da velocidade se mantém constante, só mudando sua direção. Assim, esperava-se que a curva fosse uma circunferência de raio x_0 . No gráfico a seguir estão os resultados encontrados para passos de um dia, uma hora, e um minuto:



4 Conclusões

Podemos ver pelo gráfico que conseguimos uma boa precisão com os três passos. O mais eficiente, entretanto, foi o passo de uma hora, pois com ele conseguimos um número considerável de pontos, mas sem prejudicar o tempo de processamento dos dados, como aconteceu para o passo de um minuto.