Variáveis pseudo-aleatórias e distribuições não uniformes

Natasha M. da Rocha

9 de Julho de 2013

1 Introdução

Existem dois tipos de sistemas físicos: os **determinísticos** - onde a evolução de um sistema é definida pelas leis que o governam e pelo seu estado inicial - e os **aleatórios**, em que não podemos prever o resultado de um experimento, podemos apenas estimá-lo por leis probabilísticas. Muitos sistemas determinísticos se comportam como aleatórios, quando sua evolução depende de uma grande quantidade de fatores.
Para o estudo do segundo tipo de sistemas, são feitas simulações computacionais que geram variáveis aleatórias a partir de uma certa distribuição esperada e estudamos suas características, como médias, variâncias, correlações, etc. Podemos usar, por exemplo, os métodos da **transformada** e da **rejeição** para gerar uma sequência de tais números a partir de uma distribuição contínua. Iremos aplicá-los para uma distribuição do tipo:

$$f_x(x) = Cx^3 \tag{1}$$

No intervalo $0 \leq x \leq 3$. Primeiro devemos normalizá-la. Para isso a integral no intervalo deve ser igual a 1:

$$\int_0^3 Cx^3 dx = 1 \tag{2}$$

O que nos leva a:

$$\frac{81}{4}C = 1 \rightarrow C = \frac{4}{81} \tag{3}$$

2 Método da Transformada

Para gerar uma sequência segundo uma distribuição $f_x(x)$ não uniforme usando o método da transformada devemos:

- Escolher uma variável qualquer y tal que $x = g(y)$ e $|f_x(x)dx| = |f_y(y)dy|$
- Gerar uma sequência segundo $f_y(y)$, que pode ser uniforme
- $g(y)$ pode ser encontrada resolvendo a equação diferencial ordinária $|f_x(x)dx| = |f_y(y)dy|$

- Obtém-se $f_x(x)$ usando $x = g(y)$

Para o nosso caso em particular, usaremos $f_y(y) = 1$:

$$f_x(x)dx = f_y(y)dy \rightarrow \frac{4}{81}x^3dx = dy \rightarrow \int_0^3 \frac{4}{81}x^3dx = \int_a^b dy \tag{4}$$

Assim, temos:

$$y = \sqrt[4]{81x} \tag{5}$$

$$[a, b] = [0, 1] \tag{6}$$

3 Método da Rejeição

O método da rejeição é um procedimento de geração de números pseudo-aleatórios para qualquer distribuição com uma densidade probabilística $f_x(x)$ contínua e limitada dentro de um intervalo finito $[a, b]$. O método consiste em:

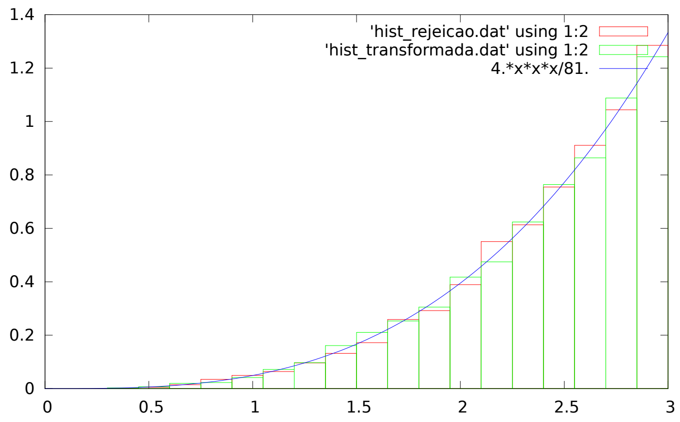
- Determinar um valor F_{sup} tal que $f_x(x) < F_{sup}$, $\forall\ x\ \epsilon\ [a, b]$
- Sortear um número x tal que $a < x < b$
- Sortear um número y tal que $0 < y < F_{sup}$
- x é rejeitado se $y > f_x(x)$

O método da rejeição é conveniente por ser aplicável a qualquer distribuição contínua, mas possui dois pontos fracos:

- Se F_{sup} for muito maior que o valor máximo de f_x
- Se f_x possuir um pico muito pronunciado

Usaremos $F_{sup} = 1.3$.

4 Resultados



Em vermelho podemos ver o histograma obtido pelo método da rejeição e em verde, pelo método da transformada. A curva real foi colocada para melhor visualização. Foram gerados 5000 números pseudo-aleatórios para cada procedimento. Calculamos também a média e variância de ambos os processos e os resultados analíticos, que podem ser observados na tabela abaixo:

Método	**Média**	**Variância**
Analítico	2.400000	0.489898
Transformada	2.402014	0.490214
Rejeição	2.412343	0.483260

5 Conclusões

Assim, observando os resultados obtidos e comparando-os com os valores esperados, conclui-se que o método da transformada se mostrou mais acurado nesse caso, pois seus valores se aproximam mais da curva real e da média e variância esperadas. No entanto, é importante relembrar que às vezes encontrar tal transformada pode ser muito difícil (ou até mesmo impossivel), sendo necessário recorrer à rejeição ou a outros métodos de geração de números aleatórios.