.

Берeбердина Наталья

Дележ без зависти до одного товара с условием освобождаемости от зависти или ограничением числа типов товаров.

Ключевые слова: справедливое разделение, неделимые товары, дележ освобождаемый от зависти (EF-able), дележ без зависти до одного товара (EFX), аддитивные функции оценки, модель справедливого разделения, мотивационные примеры

Научный руководитель: Игнатьев Артур

Содержание

1 Аннотация

В работе я буду говорить о нескольких задачах, которые возникают в справедливом разделении (fair division). Эти задачи возникают при попытке подобраться к давним открытым вопросам, таким как существование EFX дележа и оценки платежей, которые необходимо ввести в $EF - able$ дележ.

EFX и EF-able дележ: В первой части работы вводится понятие EFX-дележа и EF-able дележа. Далее представлен алгоритм поиска дележа одновременно EFX и EF-able для двух агентов.
EFX для объектов нескольких типов: Вторая часть работы рассматривает EFX-дележ когда все объекты разбираются на классы(типы) с одинаковыми оценками полезности. Вместо ограничения количества агентов, как в предыдущих исследованиях, работа фокусируется на ограничении количества типов объектов.
- EFX для двух типов объектов: Представлен алгоритм достижения EFX-дележа для двух типов объектов.
- EFX для трех типов объектов: Анализируется возможность достижения EFX-дележа для трех типов объектов и обсуждаются продвижения и сложности данного случая.

2 Введение

2.1 Мотивация.

Справедливое разделение (fair division) – это область математики, экономики и информатики, которая изучает способы раздела ресурсов между несколькими людьми так, чтобы разделение было справедливым для всех.

Проблема:

Как уже было сказано, задача справедливого дележа возникает в самых разных ситуациях, от разделения наследства между родственниками до распределения ресурсов в проекте между командой.

Ключевые вопросы:

Что значит "справедливо"? Нет однозначного ответа на этот вопрос. Существует множество критериев справедливости, которые могут быть использованы в зависимости от ситуации:
* Равенство: каждый получает равную долю.
* Пропорциональность: каждый получает долю, пропорциональную своему вкладу.
* Зависть: никто не хочет поменяться своей долей на долю другого.
* Эффективность: разделение максимально использует все доступные ресурсы.
* Справедливость по отношению к уязвимым: учитываются особые потребности отдельных участников.

Как найти решение, удовлетворяющее всем критериям справедливости? Часто это невозможно сделать, так как критерии справедливости могут конфликтовать друг с другом.

Подходы к решению:

Существует множество подходов к решению задачи справедливого дележа:

Разделение по частям (piecewise division): деление ресурса на части, например, пирог на кусочки, а затем распределение частей между участниками. Разделение по очередности (sequential division): один участник делит ресурс на части, а затем остальные выбирают по очереди. Аукционы: использование аукциона для определения цены на ресурс, а затем распределение ресурса между участниками, которые готовы платить. Алгоритмы: разработка алгоритмов, которые гарантируют справедливое разделение ресурса.

Задача справедливого дележа возникает в различных ситуациях, таких как раздел наследства между родственниками или имущества бизнеса между несколькими инвесторами. Однако давайте рассмотрим мотивацию этой задачи на другом примере.

Пусть мы закрываем картинную галерею и хотим распределить картины между несколькими меценатами, в равной степени причастными к коллекции. Картины являются неделимыми и уникальными. Их продажа не целесообразна. Кроме того, картины неликвидный товар, стоимость которого сложно оценить объективно. Поэтому каждый меценат по своему заинтересован в конкретных картинах, то есть имеет свою функцию оценки картин. Распределение картин между меценатами и будет задачей и справедливом дележе. В следующем пункте мы формализуем эту конструкцию.

2.2 Модель.

В общем случае дискретного справедливого разделения, есть набор N из n агентов и набор M из m неделимых товаров. Каждый агент $i \in N$ имеет функцию оценки $v_i : 2^M \to R_{\geq 0}$, которая присваивает неотрицательное действительное число каждому возможному подмножеству предметов и является нормализованной и монотонной, т. е. $v_i(\emptyset) = 0$ и $v_i(S) \leq v_i(T)$ для всех $S \subseteq T \subseteq M$. В этом обзоре мы в основном фокусируемся на случае, когда функция оценки каждого агента i также предполагается аддитивной, так что $v_i(S) = \sum_{g \in S} v_i(g)$ для любого подмножества предметов $S \subseteq M$, где $v_i(g)$ используется как сокращение для $v_i(\{g\})$. Дележ представляет собой набор подмножеств M, $A = (A_1, ..., A_n)$, такой, что каждый агент $i \in N$ получает набор $A_i \subseteq M$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ для каждого $i, j \in N$ и $A_1 \cup ... \cup A_n = M$. Сформулируем теперь несколько опеределений интересных для изучения распределений.

Определение 1 (EF). Дележ A называется дележом без зависти (EF), если $v_i(A_i) \geq v_i(A_j)$ для любой пары агентов $i, j \in N$.

Определение 2 (EFX). Дележ A называется дележом без зависти до одного товара (EFX), если для любой пары агентов $i, j \in N$ выполняется условие $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\})$ для любого $g \in A_j$.

Заметим, что дележ EF не всегда существует. Простейший пример - это случай двух агентов и одного товара, который положительно оценивается обоими агентами. Но для EFX такого примера не существует, как и не сущетсвует доказательства, что EFX дележ есть всегда для числа агентов $n \geq 4$.

Вопрос 1: Всегда ли существует EFX дележ?

3 EFX и EF-able дележ.

3.1 Постановка задачи.

Введем теперь в нашу задачу делимые объекты - деньги. Если мы заплатим каждому i-ому агенты сумму p_i у нас появится вектор платежей p. Учитывая дележ A и вектор платежей p, мы называем пару (A, p) дележом с платежами. При (A, p) полезность для агента i равна $v_i(A_i) + p_i$. То есть теперь агенты выражают свои ценности товаров деньгами в качестве условной единицы. С помощью денег появляется общий товар, к которому агенты могут привести свои полезности. Таким образом, в отличие от ситуаций без денег, межличностные сравнения полезностей имеют смысл в нашей системе. Заметим, что дележ A эквивалентно распределению с платежами $(A, 0)$, где каждый агент получает нулевую выплату. Теперь мы можем расширить определение отсутствия зависти на распределения с платежами.

Определение 3 (EF-able). Дележ A называется освобождаемым от зависти, если существует вектор платежей p такой, что (A, p) является дележом без зависти.

Заметим, что $EF-able$ дележ всегда существует. Например, можно отдать все объекты человеку, который суммарно оценивает A выше всех, а всем остальным выдать деньги. Поэтому интересно искать $EF - able$ дележ с особенными свойствами. Об этом будет следующая секция работы.

Вопрос 2: Когда существует дележ являющееся EFX и EF-able?

3.2 EFX and EF-able for n = 2

Давайте предложим обоим игрокам привести максимально честный дележ объектов на две кучки, т.е. для первого игрока кучки A_1 и B_1 такие, что разность $|v_1(A_1) - v_1(B_1)|$ минимальная из возможных по всем разбиениям, а для второго кучки A_2 и B_2 такие что минимальна разность $|v_2(A_2) - v_2(B_2)|$. Из этих двух разбиений выберем снова с минимальной разностью - в некотором смысле самое максимально честное (в представлении одного из игроков). Н.У.О. пусть это будет A_1 и B_1, т. е. $|v_1(A_1) - v_1(B_1)| < |v_2(A_2) - v_2(B_2)|$, причем $v_1(A_1) - v_1(B_1) = d, d > 0$. Теперь предложим второму игроку выбрать из этих двух кучек более полезную для него. Покажем что такой дележ EFX и EF-able.

Заметим сперва что если второму выгоднее кучка то B_1, то дележ вообще EF:

$$v_1(A_1) > v_1(B_1), v_2(B_1) > v_2(A_1)$$

Значит остается рассмотреть случай когда $v_2(A_1) > v_2(B_1)$ и второй забирает A_1.

EFX Заметим, что второй игрок не завидует первому, так как он взял себе более полезную кучку. Покажем, что первый игрок перестает завидовать второму при убирании любого предмета из A_1.

Предположим противное. Пусть в A_1 есть предмет X такой что $v_1(X) = x < d$, т.е. удаление этого предмета не убирает зависть первого. Тогда перекладывание этого предмета из кучки A_1 в кучку B_1 уменьшает модуль разности полезности двух кучек для первого игрока. Действительно:

$$v_1(A_1\ X) - v_1(B_1 \cup X) = d - 2x$$

$$0 < x < d => -d < d - 2x < d.$$

Но мы знаем, что дележ на кучки максимально честный, значит такого быть не могло. Получили протииворечие.

EF-able Заметим что утверждение о том что дележ envy-freeable равносильно тому что GA разделения has no positive-weight cycles. При нашем разделении это действительно так: единственный цикл в нашем графе это цикл на двух вершинах и его weight равен $v_1(A_1) - v_1(B_1) + v_2(B_1) - v_2(A_1)$. Но мы знаем, что дележ на A_1 и B_1 был самым честным для первого игрока, а значит $v_1(A_1) - v_1(B_1) < v_2(A_1) - v_2(B_1)$, значит

$$v_1(A_1) - v_1(B_1) + v_2(B_1) - v_2(A_1) < 0$$

Это гарантирует нам EF-able allocation.

4 EFX для объектов нескольких типов.

4.1 Постановка задачи.

В введении упоминались результаты, полученные при ограничении числа агентов. Мы же вместо этого попробуем ограничить число типов объектов.

Определение 4. Будем говорить что объекты a и b эквивалентны, то есть имеют один тип, если для любого игрока i верно:

$$v_i(a) = v_i(b).$$

Тогда число типов объектов - мощность множества классов эквивалентности.

Теперь мы можем рассматривать дележ с не более чем k различными типами объектов. Заметим, что функции оценки одного типа могут отличаться для разных игроков.

Вопрос 3: Для каких k верно, что при k различных типов объектов сущетсвует EFX дележ?

Понятно, что ответ на этот вопрос даст нам ответ и на вопрос 1. В работе ниже будут рассмотрены случаи $k = 2$ и $k = 3$. Случай когда $k = 1$ очевиден.

4.2 EFX for 2 types

Пусть в дележе участвуют объекты двух типов a и b. Н.У.О. будем считать что $v_i(a) + v_i(b) = 1$. Тогда отсортируем агентов в порядке возрастания ценности a, т.е. так, так что $v_i(a) > v_j(a)$, при $i > j$. Тогда нетрудно заметить, что этот порядок также будет удовлетворять следующему условию: $v_j(b) > v_b(a)$, при $j < i$. Тогда игроки бьются на два множества A и B: те, кому больше нравятся a и b соответственно. Введем еще обозначения:

$$|A| = \alpha, |B| = \beta; \qquad A = \{A_i\}, B = \{B_i\}.$$

Начнем раздавать игрокам объекты тех типов, которые им нравятся больше всего слоями по кругу. То есть, сперва заполняем первый слой и все получают по одному объекту. Далее идет второй слой. Если объектов каждого типа хватает, то каждый игрок получает по 2 объекта. Так идем далее, пока на очередном круге мы не сможем заполнить $(t+1)$-ый слой полностью. Н.у.о., пусть у нас закончились предметы типа b. Остатки по порядку раздадим тем агентам, которые наиболее сильно ценят товары типа b. Рассмотрим теперь агента из множества B, который меньше всех в этом множестве ценит b и при этом успел получить элемент b на последнем слое. Давайте найдем для него оценку k такую что:

$$k \cdot v(a) < v(b) < (k+1) \cdot v(a),$$

где $v(x)$ его функция полезности. Теперь на следующей итерации алгоритма будем раздавать объекты типа a агентам из множества B, которым на $(t+1)$-ом слое предметов b не хватило, а также агентам из множества B. Делать это будем снова слоями идя по возрастанию ценности b для агентов. При этом на каждом шаге раздачи мы будем получать EFX разделение. Если раздав $k-1$ таких слоев у нас еще останутся элементы, на следующем слое мы начинаем раздачу на всех агентов, снова по возрастанию ценности b для агентов. Таким образом мы получим примерно следующую картинку:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 & A_2 & \dots & \dots & A_\alpha & B_1 & B_2 & \dots & \dots & \dots & B_\beta \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & b & \dots & b \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & & & \\
a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a \\
a & a & a & \dots & a & a & & & & &
\end{array}
$$

Сперва заметим, что люди множества A никому не завидуют, в смысле EFX. Они имеют не меньше объектов, чем люди из B, причем все их объекты типа a, то есть наиболее ценны для них. Друг другу они не завидуют, т.к. их наборы совпадают с точностью до одного объекта a.

Теперь покажем что люди множества B никому не завидуют, в смысле EFX. Обозначим за $B_A \subset B$ множество игроков, у которых в слое $t+1$ лежит a. Множество B_B появится соответственно.

Люди из множества B_A не завидуют людям из множества A, так они имеют не менее ценный объект в каждом слое кроме последнего. Также они не завидуют людям из множества B_B, так как они имеют преимущество в k объектов типа a и для них $v(b) < (k+1) \cdot v(a)$, а значит после убирания одного элемента типа a их куча становится для них более ценной. Друг другу они не завидуют т.к. их наборы совпадают с точностью до одного объекта a.

Люди из множества B_B не завидуют друг другу аналогично агентам множества A и B_A. Людям из B_A они не завидуют, так как для них ценность b выше чем k элементов типа a. Остается множество A, которому они не завидуют так как все кучки там мажорируются кучками людей из B_A.

4.3 EFX for 3 types

Пусть теперь у нас есть три типа объектов: a, b, c. Тогда агенты бьются на три множества A, B, C: те, кому больше нравятся a, b, c соответственно. Введем еще обозначения аналогично прошлому пункту:

$$|A| = \alpha, |B| = \beta, |C| = \gamma; \qquad A = \{A_i\}, B = \{B_i\}, C = \{C_i\}.$$

Начало алгоритма похоже на алгоритм для двух типов предметов. Мы будем раздавать игрокам объекты тех типов, которые им нравятся больше всего слоями. Раздаем так, пока на очередном круге мы не сможем заполнить $(t+1)$-ый слой полностью. Здесь у нас есть три варианта, какие типы закончились.

Закончились все три типа объектов. Тут все просто. Покажем почему человека A_i, который больше любит a никому не завидует в смысле EFX. Для остальных типов все аналогично.

Человек A_i не завидует другому человеку своего типа в смысле EFX, так как их кучки отличаются не более чем на один объект. Человеку другого типа A тем более не завидует, так как оценка его кучки для него не менее $t \cdot v_{A_i}(a) > t \cdot v_{A_i}(b)$ и $t \cdot v_{A_i}(a) > t \cdot v_{A_i}(c)$.

Убиранием одного предмета A_i оставляет игрокам других типов не более t предметов, менее полезных для него, а значит не завидует им, в смысле EFX.

Закончились все два типа объектов. Допустим на $(t+1)$-ом слое мы понимаем, что у нас заканчиваются объекты типа b и c. Давайте выдадим остатки b и c тем, кто меньше всего ценит тип a, а остальным выдадим тип a. Таким образом кучи выглядят примерно так:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
A_1 & A_2 & \dots & \dots & A_\alpha & B_1 & B_2 & \dots & \dots & \dots & B_\beta & C_1 & C_2 & \dots & \dots & \dots & C_\gamma \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & b & \dots & b & a & \dots & a & c & \dots & c
\end{array}$$

Причем $v_{C_i}(a) > v_{C_j}(a)$ и $v_{B_i}(a) > v_{B_j}(a)$, при $i > j$. Обозначим за $B_A \subset B$ и $C_A \subset C$ множество игроков, у которых в слое $t+1$ лежит a. Множества B_B и C_C появятся соотвественно. Далее давайте найдем игрока из множества $B_B \cup C_C$, который больше всего ценит a. Н.у.о., пусть это игрок B_z. Найдем для него оценку k такую что:

$$k \cdot v_{B_z}(a) < v_{B_z}(b) < (k+1) \cdot v_{B_z}(a).$$

Теперь на следующем этапе мы будем выдывать объекты типа a людям из множества $A \cup B_a \cup C_a$ в k слоев. На каждом новом шаге мы получим EFX allocation. Это станет ясно дальше при рассмотрении случая, когда мы перейдем к объяснению слоедующего шага.

Далее будем раздавать оставшиеся объекты слоями, по порядку начиная с множества A и далее по убыванию оценок a. Покажем, почему это всегда EFX. Пусть элементы a кончились на $(t+1)+k+(l+1)$ слое. Заполнение $t+1+k+l$ слоев выглядит примерно так:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
A_1 & A_2 & \dots & \dots & A_\alpha & B_1 & B_2 & \dots & \dots & \dots & B_\beta & C_1 & C_2 & \dots & \dots & \dots & C_\gamma \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & a & \dots & a & b & b & b & b & \dots & b & c & c & c & c & \dots & c \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & b & \dots & b & a & \dots & a & c & \dots & c \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & & & & a & \dots & a & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
a & a & a & \dots & a & a & \dots & a & & & & a & \dots & a & & & \\
a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a & a & a & a & a & \dots & a
\end{array}$$

Сперва заметим, что люди множества A никому не завидуют, в смысле EFX. Они имеют не меньше объектов, чем люди из B и C, причем все их объекты типа a, то есть наиболее ценны для них. Друг другу они не завидуют, т.к. их наборы совпадают с точностью до одного объекта a.

Теперь покажем, что люди множества B никому не завидуют, в смысле EFX, тогда для множества C все будет аналогично. Для этого рассмотрим оценки ценности для некоторого B_i. Она может быть одного из четырех типов:

$$v_{B_i}(AL_{B_i}) = t \cdot v_{B_i}(b) + k \cdot v_{B_i}(a) + l \cdot v_{B_i}(a)$$

$$v_{B_i}(AL_{B_i}) = t \cdot v_{B_i}(b) + k \cdot v_{B_i}(a) + l \cdot v_{B_i}(a) + v_{B_i}(a)$$
$$v_{B_i}(AL_{B_i}) = t \cdot v_{B_i}(b) + v_{B_i}(b) + l \cdot v_{B_i}(a)$$
$$v_{B_i}(AL_{B_i}) = t \cdot v_{B_i}(b) + v_{B_i}(b) + l \cdot v_{B_i}(a) + v_{B_i}(a)$$

Нетрудно проверить, что агенты не завидуют друг другу из условия выбора k, а также не завидуют людям из множества C, так как полезность кучек каждого агента из C оценивается сверху кем-то из агентов множества B.

Закончился один тип объектов. С этим случаем пока разобраться не получилось. Понятно только, что он не эквивалентен случаю, когда в дележе изначально только два типа объектов.

5 Заключение.

Если удастся разобрать последний случай, то далее встает новый вопрос:
- для каких k верно, что при k различных типах объектов существует EFx дележ?
Кроме этого хотелось бы переписать объяснение алгоритма и найти общее случаев двух и трех типов.

Возвращаясь к теме EFX и EF-able дележей, остается несколько вопросов:
- существует ли такой же дележ для более чем двух агентов?
- можно ли придумать алгоритм находящий Парето-эффективный справедливый дележ?
- если дележ EFX и EF-able, как мы можем оценить минимальный необходимый вектор платежей?

Список литературы

[1] Georgios Amanatidis, Haris Aziz, Georgios Birmpas, Aris Filos-Ratsikas, Bo Li, Herve Moulin, Alexandros A. Voudouris, and Xiaowei Wu, "Fair Division of Indivisible Goods: Recent Progress and Open Questions", *arXiv:2208.08782*, (2023)