Rappels de calcul (boîte à outils)

Produit **scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

Exercice

1. Donnez deux méthodes de calcul du produit scalaire
2. Quelle méthode est utilisée en synthèse d'images ? Pourquoi ?
3. À l'aide de schémas, indiquez quelle propriété est associée au signe du produit scalaire de deux vecteurs.

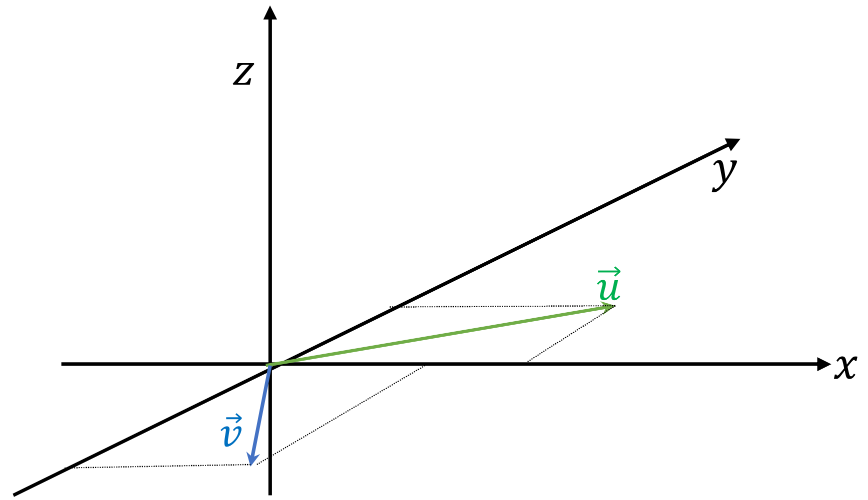
Calcul de produit vectoriel

Exercice

Calcule un vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

Complétez le schéma suivant après avoir calculé $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



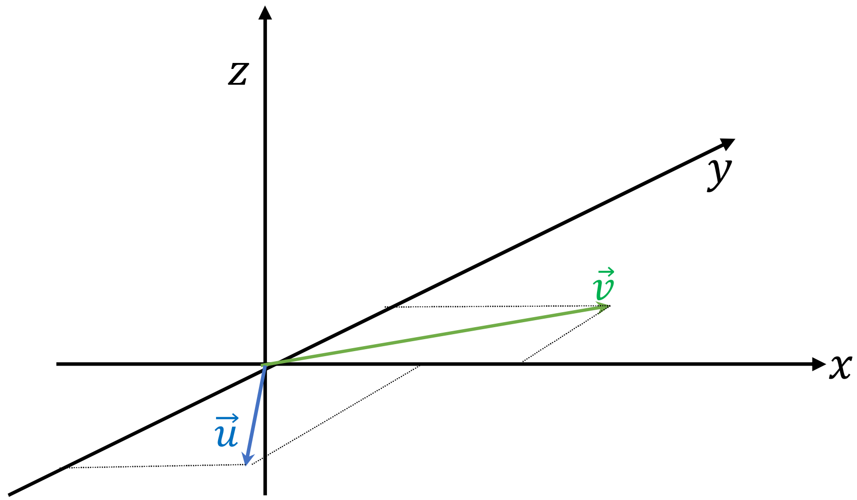
Calcul de produit vectoriel (2)

Exercice

Calcule un vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

Complétez le schéma suivant après avoir calculé $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$



Autres calculs

Exercice

Pour chacun des exemples précédents, calculez le produit scalaire $\vec{u}.\vec{w}$

Enfin, pour un scalaire k quelconque, calculez $\vec{u} \wedge (\overrightarrow{k.u})$

Application

Exercice

Quelle est l'expression de $\Gamma(x, y, z)$ pour le plan P dont l'équation est $-4x + y + 4z - 3 = 0$?

Les points de coordonnées $\mathrm{A} = (0,0,0)$ et $\mathrm{B} = (1,1,1)$ appartiennent-ils au même demi-espace délimité par le plan P ?

Quel point de la droite (AB) appartient à P ?

Applications

Exercice

Quel type de transformation est représenté par la matrice suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,866 \end{pmatrix}$$

Equivalences

Une famille de coordonnées est définie par les 3 premières coordonnées, en considérant que la quatrième est égale à 1.

On confond alors cette famille avec le point 3D.

Exercice A quelle famille appartiennent les points suivants (données en coordonnées homogènes) ?

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Application à la translation

On fait apparaître de manière explicite la quatrième coordonnée, égale à 1

Exercice Déterminez comment est construite la matrice de translation T d'après le calcul suivant :

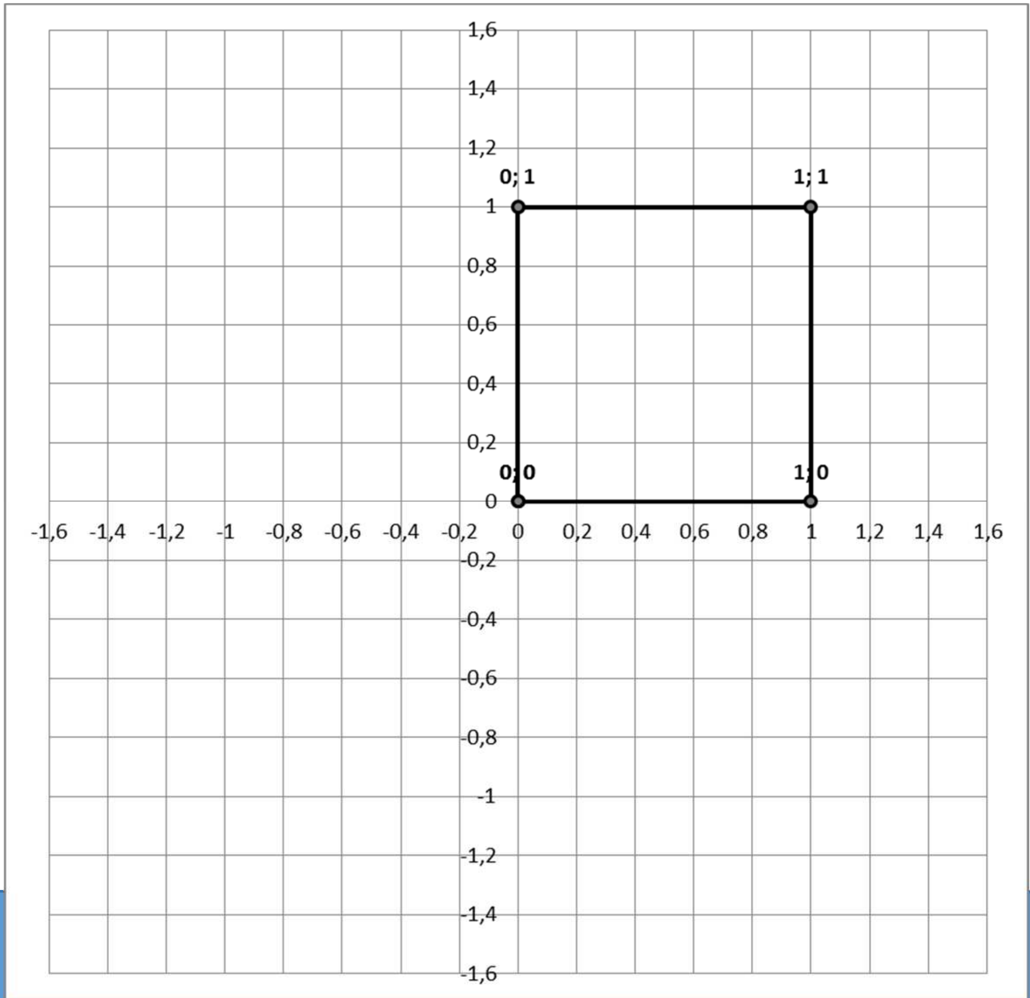
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jouons un peu (avec des matrices)



Le centre du carré est $C = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice

Ecrivez les matrices correspondant aux translations T_1et $T_2 = T_1^{-1}$

Ecrivez la matrice M pour une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$

Succession de transformation

3 étapes :

1. Translation T_1 pour ‘amener’ le centre C à l’origine
2. Rotation (par défaut autour de l’origine)
3. Translation $T_2 = T_1^{-1}$ pour ‘amener’ la figure à sa position initiale

Exercice

Appliquez les transformations par calcul matriciel, dessinez le résultat

Calculez la matrice $A = T_1.M.T_2$, puis appliquez directement A comme une transformation géométrique. Que constatez-vous ?

Exemple en 3D

Exercice

M_x et M_y étant des matrices de rotation autour des axes Ox et Oy, calculez $A = M_x.M_y$ et $B = M_y.M_x$

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication de matrices n'est pas

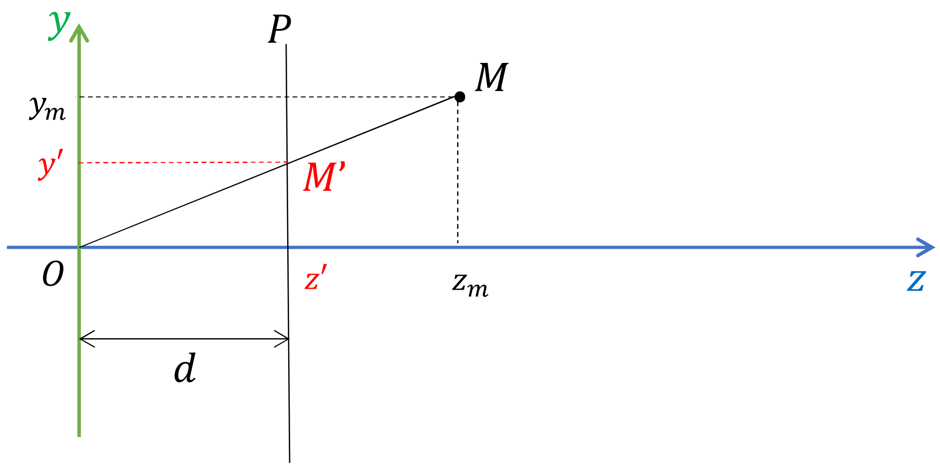
PARIS PANTHÉON-ASSAS UNIVERSITÉ

Question

On considère la scène à un instant t. Quelle sont les transformations à appliquer pour passer à l'instant $t + dt$?

Quel paramètre pourrait-on associer à une rotation de manière à simplifier la séquence de transformations ?

Matrice de projection perspective



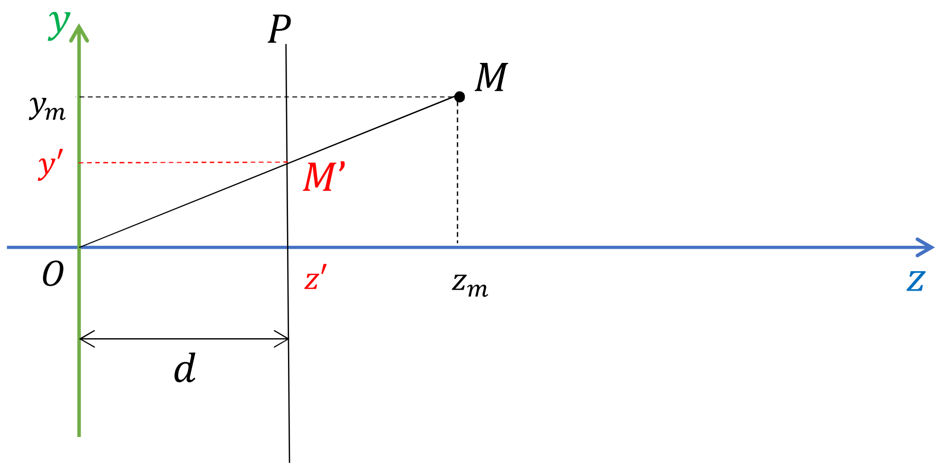
Soit O le centre de projection choisi pour la scène et P le plan de projection choisi pour former une image.

On appelle distance focale d la distance entre le point de projection et ce plan P

Soit M un point dans l'espace, de coordonnées $\begin{pmatrix} y_m \\ z_m \end{pmatrix}$

Quelles sont les coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$ de M', projection de M sur le plan P ?

Matrice de projection perspective



en utilisant $\frac{z_m}{d}$, réécrivez la relation liant M' et M en coordonnées homogènes.

Exprimez la relation liant M' et M en coordonnées homogènes à l'aide d'un calcul matriciel simple (une matrice 3x3)

l'opération de projection est-elle réversible ?
Quelle particularité de la matrice de projection traduit ce fait ?

Exercice : Matrice de projection

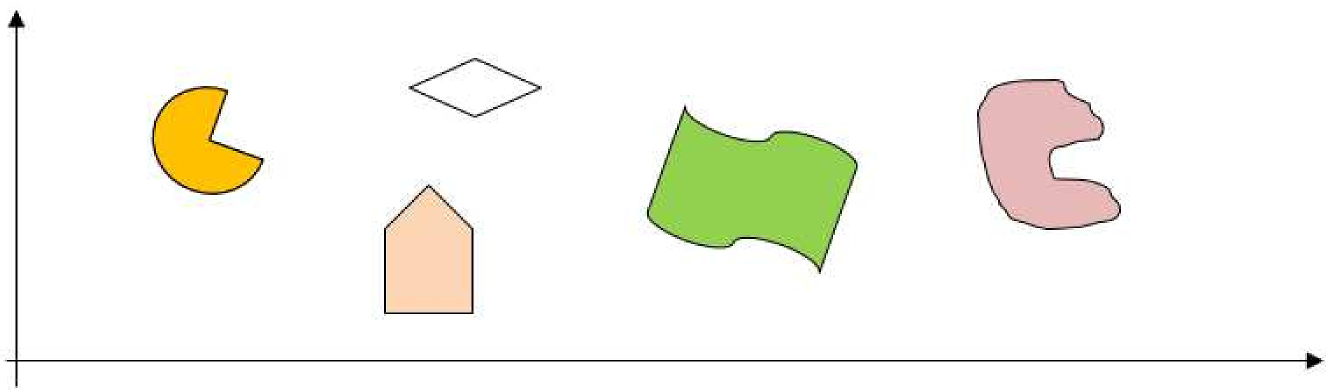
On cherche P telle que $P.M = M'$

$$\begin{pmatrix} y_m \\ z_m \\ 1 \end{pmatrix} = M$$

$$P = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ z_m \\ \frac{z_m}{d} \end{pmatrix} = M'$$

AABB

Axis Aligned Bounding Box : le plus petit parallélépipède qui englobe l’objet, axes parallèles aux axes du repère



Dessinez les AABB des objets proposés.

Algorithmes AABB, BS

Ecrivez les algorithmes de construction d'une AABB et d'une BS

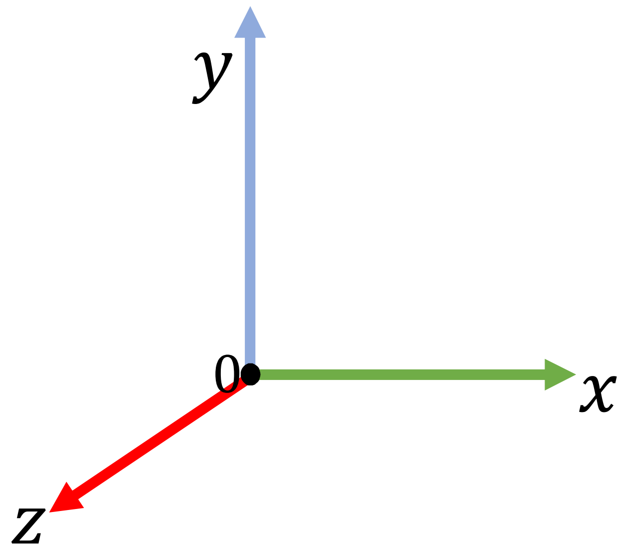
En entrée : liste de sommets **`s[i]`**, nombre de sommets **`n`**, chaque sommet a des coordonnées x, y et z accessibles par **`s[i].x`**, **`s[i].y`**, **`si.[z]`**

En sortie : les caractéristiques de l'AABB ou de la BS

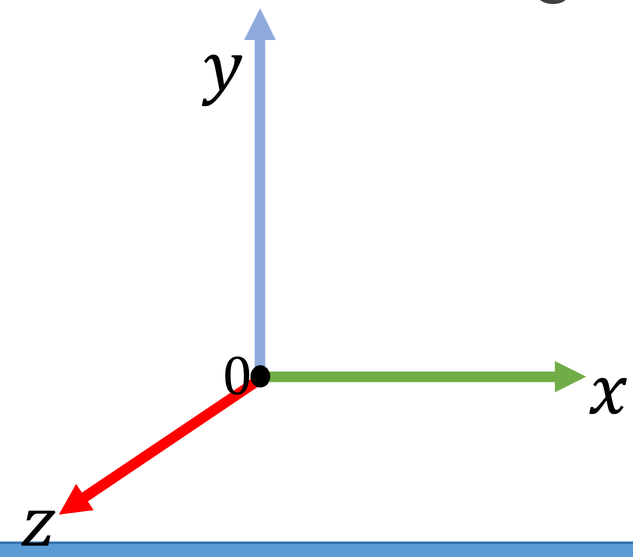
Exemple

Soit l'AABB $(2,-1,-1)-(4,1,1)$

Dessinez-la sur le schéma suivant :



Elle subit une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe $0x$: dessinez-là, calculez la nouvelle AABB et dessinez-là également



Elimination (step 1)

Ecrivez un algorithme qui indique si une sphère est totalement du ‘mauvais côté’ d’un plan du frustum

Ecrivez un algorithme indiquant si une sphère a une intersection avec un frustum de caméra

Choix de conception : garder ou rejeter ?

Elimination (step 2)

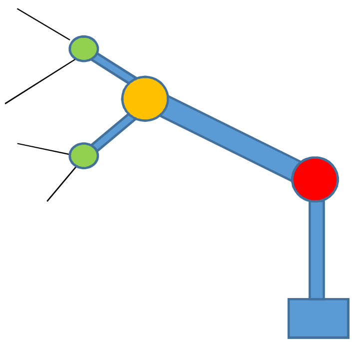
Ecrivez un algorithme qui indique si une AABB est totalement du ‘mauvais côté’ d’un plan du frustum

Ecrivez un algorithme indiquant si une AABB a une intersection avec un frustum de caméra

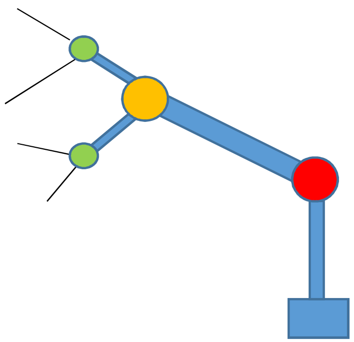
Alors, BS ou AABB ?

Utile pour le BSP, quadtrees, octrees

Exemple : quel est le graphe de scène de l'objet ci-dessous ?



Dessiner l'AABB de l'articulation rouge



Exercice

Soit un cube. Combien de facettes triangulaires sont nécessaires pour avoir un maillage d’un cube ?

Combien de faces d’un cube sont visibles à un instant donné ? Combien de triangles seront rendus au maximum ?

Stockage de maillages

Proposer un format d'écriture de données (format de fichier) pour stocker de manière simple les points du maillage d'un cube de centre (0,0,0) et de côté 2.

Contrainte : dans ce format, les coordonnées de sommets ne doivent apparaître qu'une seule fois

Stockage de maillages

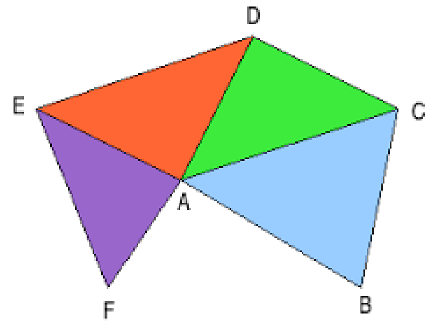
Proposer un format d’écriture de données (format de fichier) pour stocker la liste des facettes triangulaires composant le maillage

Contrainte : Vous devez utiliser la liste de sommets de l’étape précédente

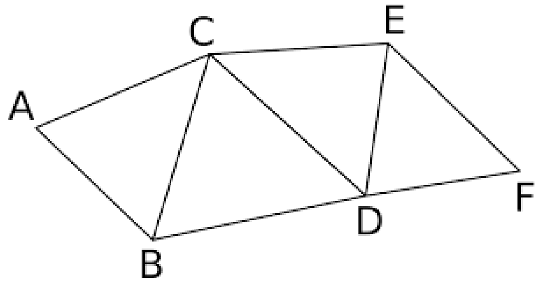
Stockage de maillages (3)

Proposer un format compact pour les structures :

Trianglefan :



Trianglestrip :



Quad et triangles

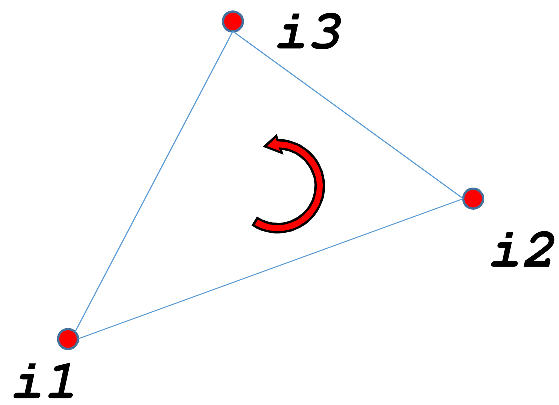
On vous donne les coordonnées des sommets :

Calculer le vecteur normal $\vec{n}$ aux facettes triangulaires générées par la commande **`quad()`** précédente. Attention, le vecteur $\vec{n}$ devra être normalisé, donnez les valeurs avec 3 chiffres après la virgule

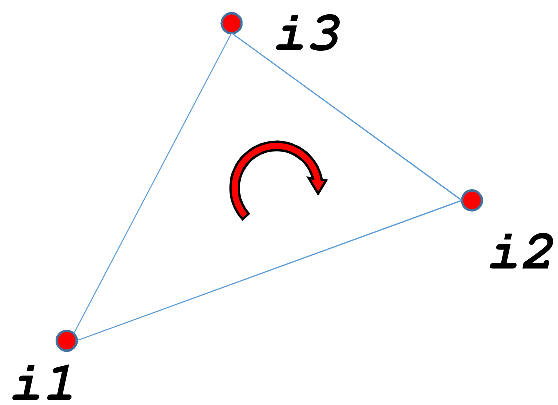
$i_1(1,1,1)$ $i_2(2,3,2)$ $i_3(3,0,1)$ $i_4(3,2,3)$

Quad et triangles

`triangle(i1,i2,i3)`



`triangle(i1,i3,i2)`



Calculez le vecteur normal au triangle construit par **`triangle(i1,i3,i2)`**

Vue de la caméra

Soit $\overrightarrow{V_{cam}}$ le vecteur normalisé perpendiculaire à l'objectif de la caméra (near plane)

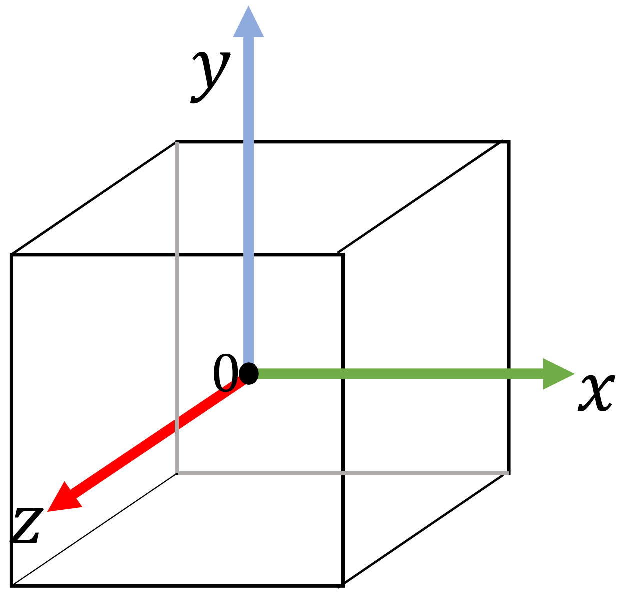
La caméra est positionnée en $(5,0,12)$ et « regarde » vers le point $(0,0,0)$

Calculer $\overrightarrow{V_{cam}}$, puis $\overrightarrow{V_{cam}}.\vec{n}$ pour les exemples précédents.

Qu'en concluez-vous ?

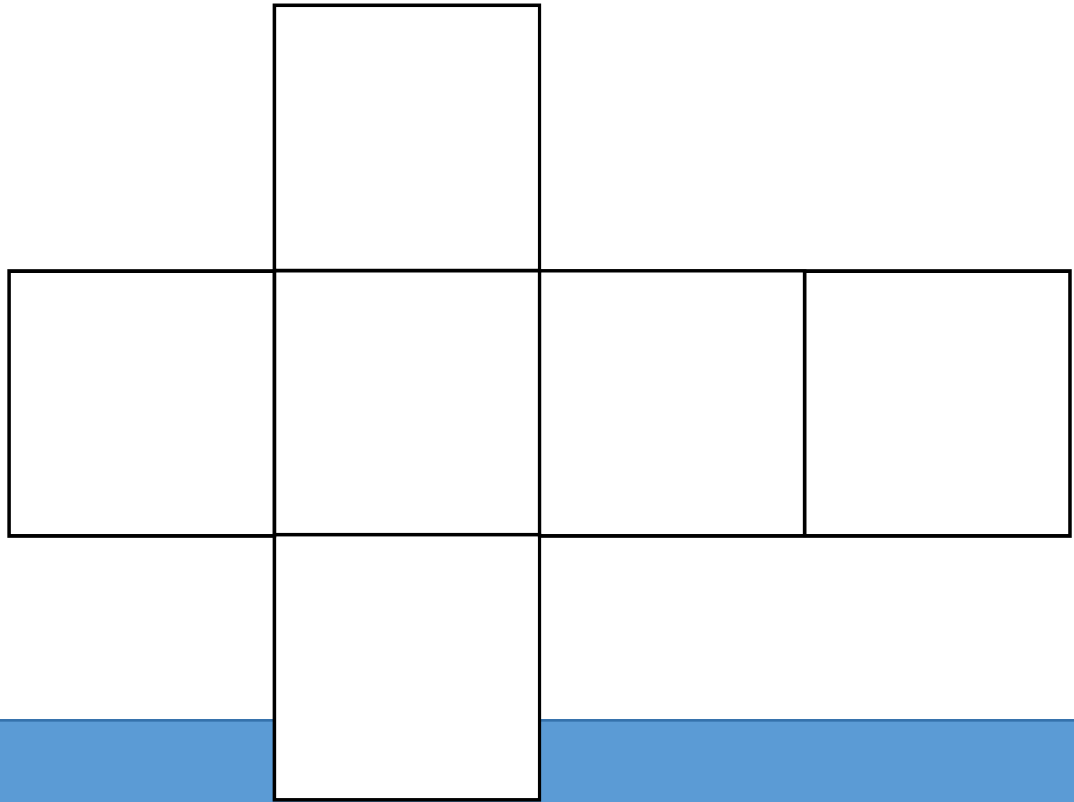
Préparation d'un maillage pour Ogre3D

3) Repérer les numéros (indices des sommets) sur le schéma



Préparation d'un maillage pour Ogre3D

4) Repérer les numéros (indices des sommets) sur le schéma

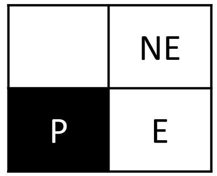


Algorithme de Bresenham (2)

Avec les rotations, on peut ne considérer que les cas $x_a < x_b, y_a < y_b$ et $dy < dx$ (premier octant).

Principe : chercher les points P appartenant à la droite, de proche en proche, en commençant par A.

Question : où peut se trouver le point suivant P ?



Algorithme de Bresenham

Le calcul de d_p est encore trop couteux : on cherche alors à calculer d_{p+1} en fonction de d_p selon les cas

Cas 1 : si le pixel P+1 est le pixel E de P

Question : à partir des formules de (d_{p+1}) / 2 et $d_p/2$, établissez une relation simple entre d_{p+1} et d_p

Cas 2 : si le pixel P+1 est le pixel NE de P

Question : à partir des formules de (d_{p+1}) / 2 et $d_p/2$, établissez une relation simple entre d_{p+1} et d_p

Question : Ecrivez l'algorithme de tracé de segment correspondant. Vous utiliserez les quantités de = $2 * dy$ et $dne = 2 * (dy - dx)$ afin d'optimiser cet algorithme