Transformations géométriques

Isométries et similitudes

Une **isométrie** est une transformation qui conserve les distances (et donc les angles)

Invariance du produit scalaire

Une **similitude** est une transformation qui conserve les angles

Invariance du signe du produit scalaire

Une similitude **directe** conserve les orientations (produit vectoriel)

Invariance du signe du produit vectoriel

Quelques exemples

Transformation	Similitude ?	Isométrie ?	Directe ou indirecte ?
Rotation			
Homothétie			
Translation			
Symétrie par rapport à un plan			

Géométrie et espaces vectoriels

Une isométrie directe est représentée par une **matrice orthogonale de déterminant 1**

Une isométrie indirecte est représentée par une **matrice orthogonale de déterminant -1**

Une homothétie est représentée par une **matrice scalaire** :

$\lambda . I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda \neq 0$.

Applications

Exercice

Quel type de transformation est représenté par la matrice suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,866 \end{pmatrix}$$

Illustrations : rotation en 2D

La matrice de rotation pour un angle α est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Exercice

Vérifier ses propriétés : orthogonalité et déterminant

Vérifier que $M_{-\alpha} = M_\alpha^{-1}$

Homothétie, similitude et un souci ?

La matrice d'une homothétie d'un facteur k est
$M_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Toute similitude se décompose en isométries et en homothéties

On peut '*rotationner*' un vecteur, '*homothétifier*' un vecteur.

Plusieurs soucis

Peut-on translater un vecteur ?

Les transformations géométriques que l'on souhaite appliquer concernent des **points**, pas des vecteurs.

Confusion vecteurs / points car un vecteur est aussi un '**bipoint**', mais deux bipoints distincts peuvent correspondre au même vecteur !

Les transformations s'effectuent dans un **espace affine**

Rotation et homothétie affines

Dans l'espace 3D des points, les coordonnées sont exprimées par rapport à une origine O $(0,0,0)$.

Ainsi, on confond un point A (x_a, y_a, z_a) avec le vecteur $\overrightarrow{OA}$

Le repère orthonormé (O, x, y, z) est confondu avec la base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation et homothétie affines

Une rotation est caractérisée par :

Un angle α et un axe — Exprimé dans la matrice de rotation

Un centre $C\ (x_c, y_c, z_c)$ — Pas exprimé dans la matrice de rotation

Une homothétie est caractérisée par :

Un facteur k — Exprimé dans la matrice d'homothétie

Un centre $C\ (x_c, y_c, z_c)$ — Pas exprimé dans la matrice d'homothétie

Processus calculatoire

$P \longrightarrow$ Transformation - matrice M $\longrightarrow P'$

$$P' = M.P$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \\ z_{p'} \end{pmatrix}$$

$$x_{p'} = m_{11}.x_p + m_{12}.y_p + m_{13}.z_p$$
$$y_{p'} = \ ...$$
$$z_{p'} = \ ...$$

Nous noterons donc maintenant les points comme des « vecteurs » colonne

Application

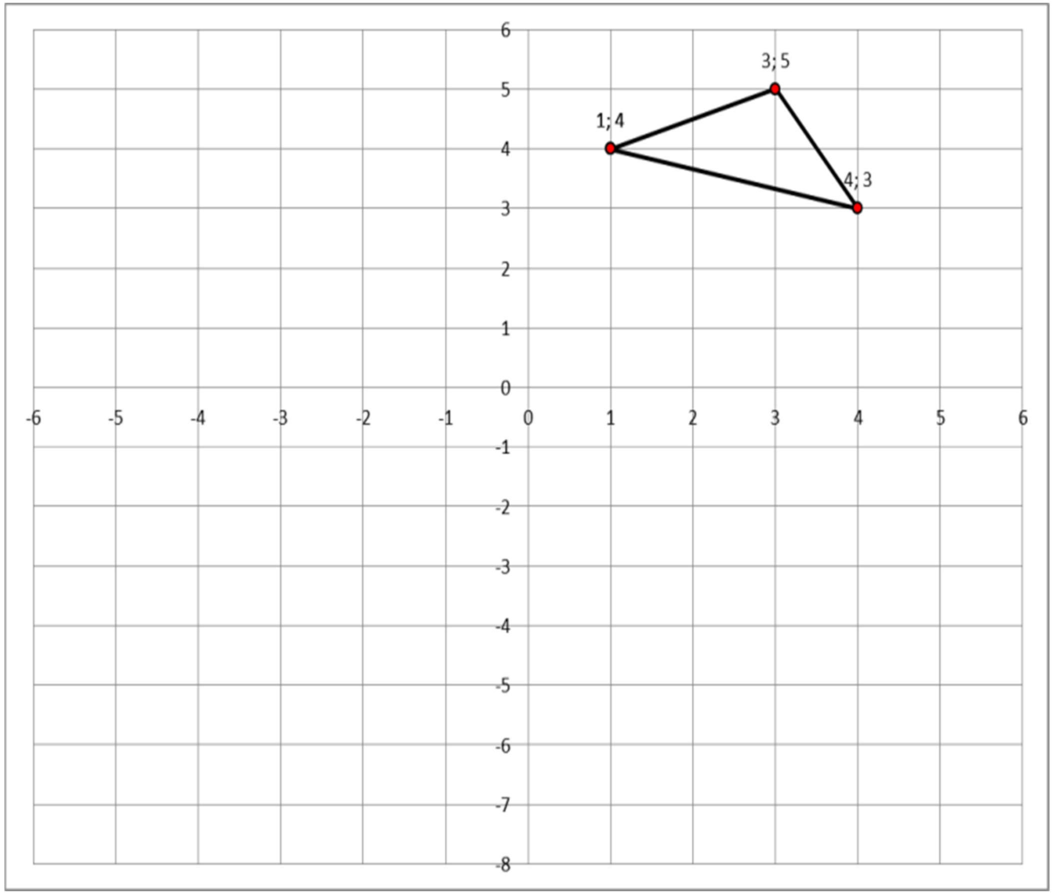
Exercice

Sur le schéma suivant, dessinez la figure obtenue par la transformation de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}866 \end{pmatrix}$$

Même chose, avec la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Translation en espace affine

Pas de translation dans un espace vectoriel

Une translation est caractérisée par des ‘déplacements’ indépendants selon les axes du repère

$T = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$ Appliqué à un point $P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$, on cherche à obtenir :

$$\begin{pmatrix} x_p + T_x \\ y_p + T_y \\ z_p + T_z \end{pmatrix}$$

Pas de représentation matricielle de T dans $\mathbb{R}^3$

Coordonnées homogènes

Issues de la géométrie projective (fin XIXème siècle) : étude des invariants après projection.

Wikipédia : un point possède une famille de coordonnées toutes proportionnelles entre elles

Exemple : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ kt \end{pmatrix}$ sont des représentants de la même famille de coordonnées

Equivalences

Une famille de coordonnées est définie par les 3 premières coordonnées, en considérant que la quatrième est égale à 1.

On confond alors cette famille avec le point 3D.

Exercice A quelle famille appartiennent les points suivants (données en coordonnées homogènes) ?

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Application à la translation

On fait apparaître de manière explicite la quatrième coordonnée, égale à 1

Exercice

Déterminez comment est construite la matrice de translation T d'après le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

correction

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation et homothétie affines

Une rotation est caractérisée par :

Un angle α et un axe — Exprimés dans la matrice de rotation

Un centre $C\ (x_c, y_c, z_c)$ — Pas exprimé dans la matrice de rotation

Une homothétie est caractérisée par :

Un facteur k — Exprimé dans la matrice de rotation

Un centre $C\ (x_c, y_c, z_c)$ — Pas exprimé dans la matrice de rotation

Rotation et homothétie affines

Par défaut : le centre est en $(0,0,0)$

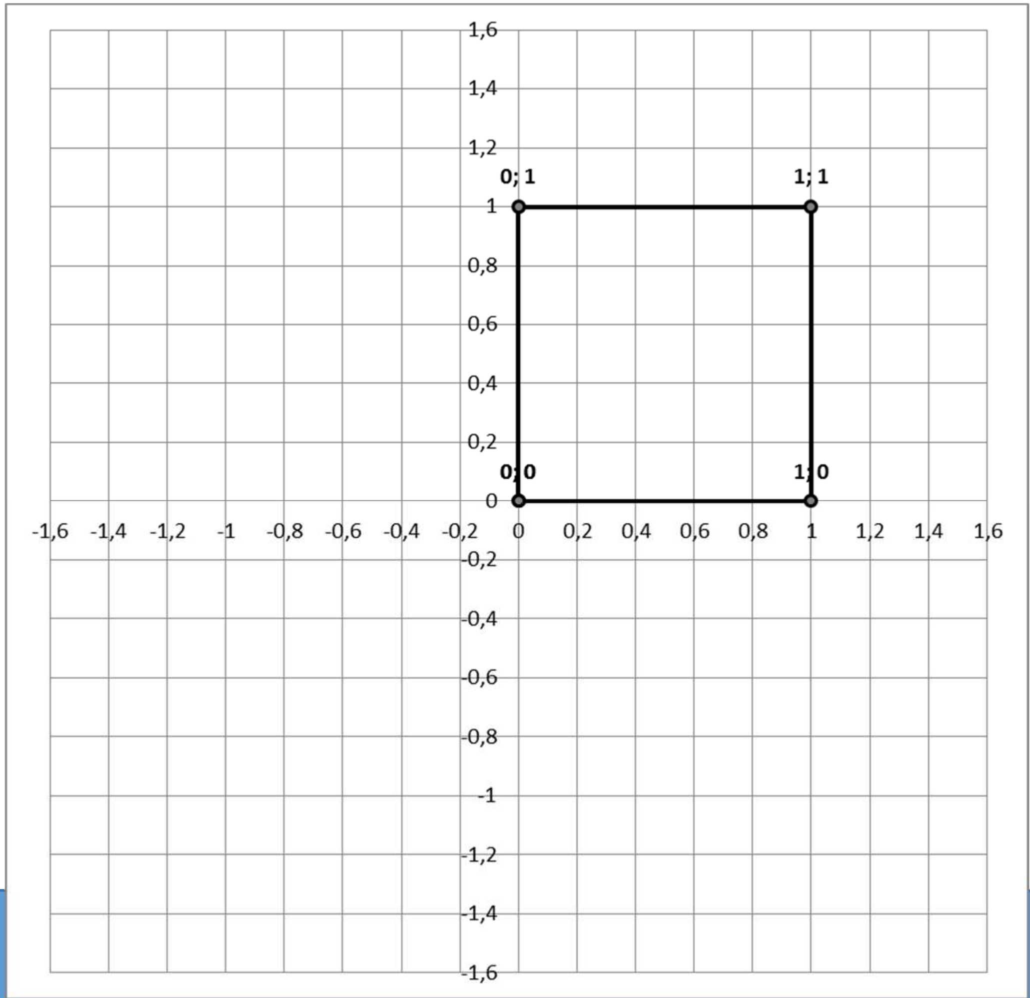
Illustration en 2D : rotation d'angle α de centre $C\ (x_c, y_c)$

3 étapes :

1. Translation T_1 pour 'amener' le centre C à l'origine
2. Rotation (par défaut autour de l'origine)
3. Translation $T_2 = -T_1$ pour 'amener' la figure à sa position initiale

Attention, pour les calculs, on utilisera des coordonnées homogènes, donc 3 coordonnées pour une illustration en 2 dimensions

Jouons un peu (avec des matrices)



Le centre du carré est $C = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice

Ecrivez les matrices correspondant aux translations T_1et $T_2 = T_1^{-1}$

Ecrivez la matrice M pour une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$

efrei PARIS
Ecole d'ingénieurs du numérique

Succession de transformation

3 étapes :

1. Translation T_1 pour 'amener' le centre C à l'origine
2. Rotation (par défaut autour de l'origine)
3. Translation $T_2 = T_1^{-1}$ pour 'amener' la figure à sa position initiale

Exercice

Appliquez les transformations par calcul matriciel, dessinez le résultat

Calculez la matrice $A = T_1.M.T_2$, puis appliquez directement A comme une transformation géométrique. Que constatez-vous ?

Exemple en 3D

Exercice

M_x et M_y étant des matrices de rotation autour des axes Ox et Oy, calculez $A = M_x.M_y$et $B = M_y.M_x$

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication de matrices n'est pas

Changements de repère

Objet rendu : maillage, points, facettes dans un espace 3D

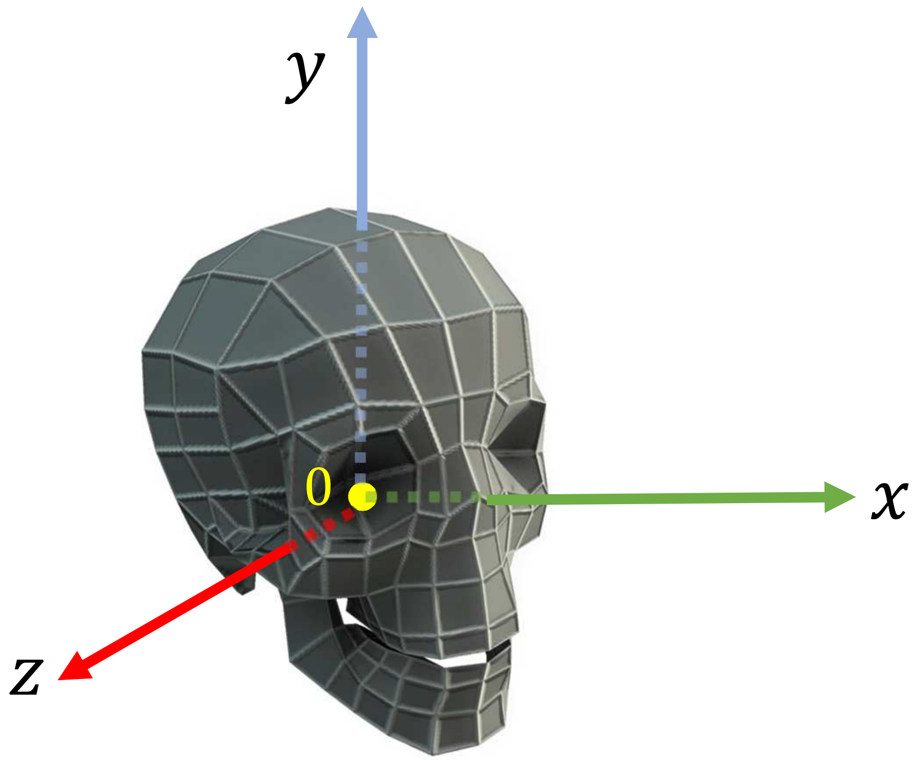
Position

Taille (absolue)

Indépendamment de la taille dans l'image

Orientation

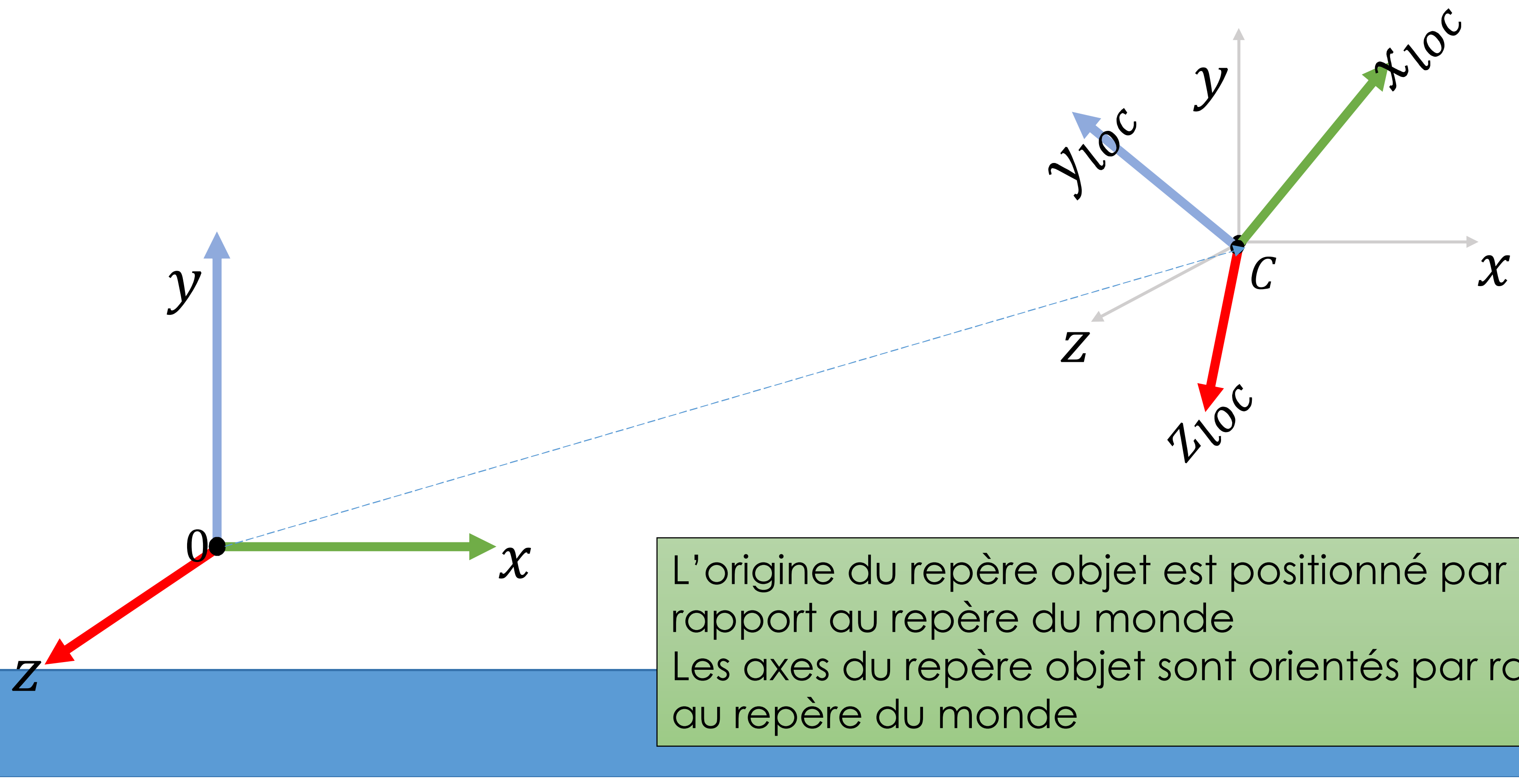
Repère objet local



- Sommets de l'objet définis dans son propre repère
- Position relative
- Taille relative
- Orientation par défaut
- Même orientation que le repère du monde

https://shop.bitgem3d.com

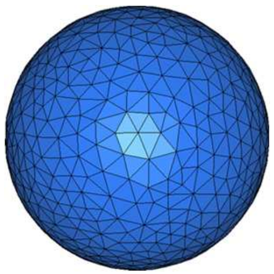
Opérations pour les repères



L'origine du repère objet est positionné par rapport au repère du monde
Les axes du repère objet sont orientés par rapport au repère du monde

Exercice

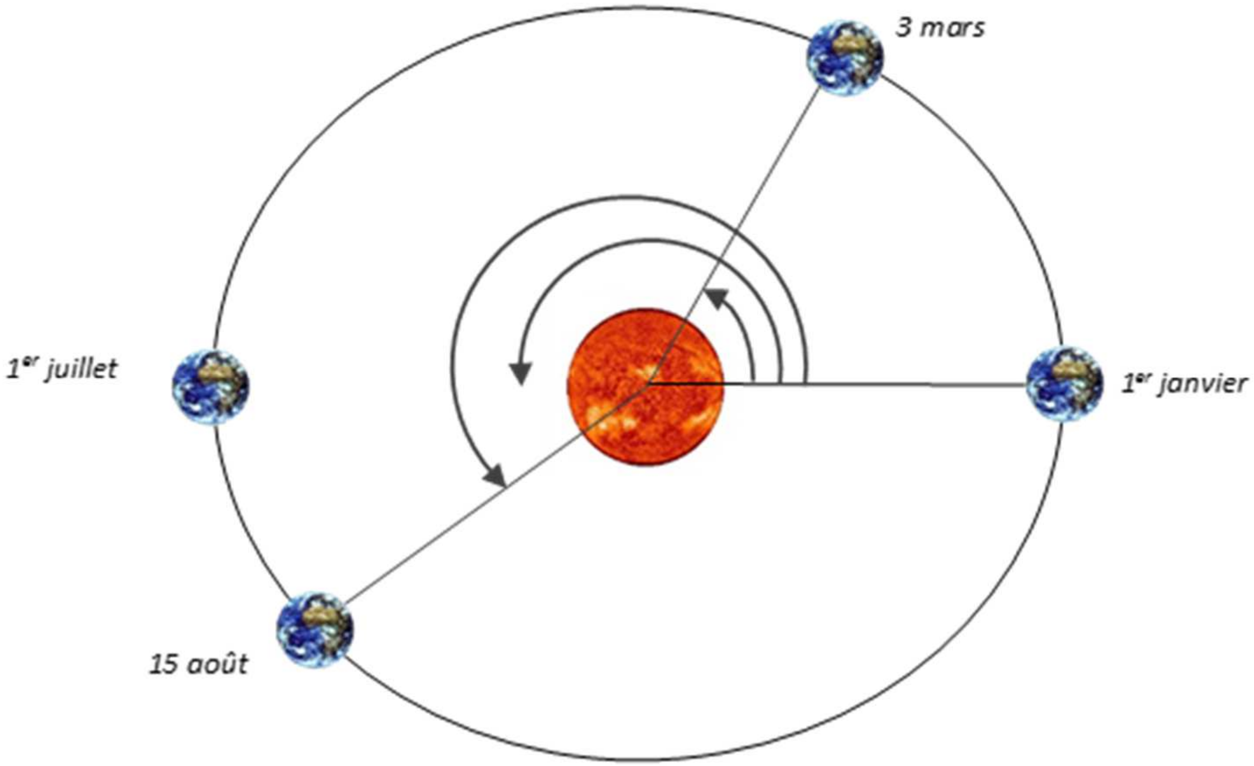
Le but de cet exercice est de proposer des opérateurs de transformation pour réaliser une scène montrant la position de la terre autour du soleil. Le soleil est un objet fixe au centre de la scène $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Objet utilisé pour représenter la Terre et le Soleil

Paramètres

L'orbite de la terre étant assimilée à un cercle de rayon $\boldsymbol{r}$, la position de la terre est repérée par un angle $\boldsymbol{\alpha}$ par rapport à sa position au 1er janvier d'une année

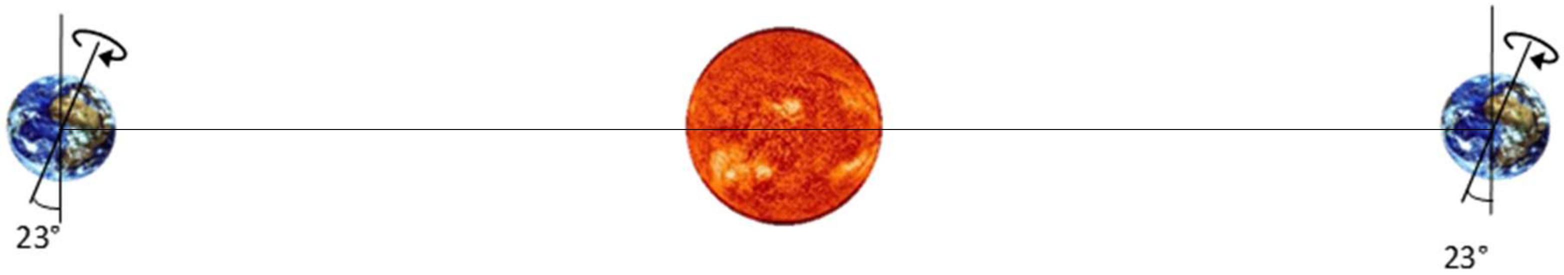


Paramètres (2)

La terre tourne autour de son axe en 24 heures. La rotation de la terre autour de son axe est repérée par un angle $\boldsymbol{\beta}$ par rapport à sa position à minuit (00h00)

Inclinaison de l'axe des pôles

inclinaison de la terre sur le plan de l'écliptique (ce plan est celui de l'orbite de la terre autour du soleil). Cette inclinaison est constante et vaut 23°.



Où est l'été ? Où est l'hiver ?

Question

On considère la scène à un instant t. Quelle sont les transformations à appliquer pour passer à l'instant $t + dt$?

Quel paramètre pourrait-on associer à une rotation de manière à simplifier la séquence de transformations ?

Rotations composées en 3D

Rotations autour des axes du monde

$$R_{\mathbf{x}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_{\mathbf{y}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_{\mathbf{z}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La donnée de 3 angles + une amplitude décrit une rotation

Angles d'Euler, Quaternions

Le corps $\mathbb{H}$ des quaternions

Corps **non commutatif -** quadruplets de réels

Construction similaire à celles des complexes

$$q = (a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$$

Avec :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$jk = i, \quad kj = -i$$

Représentation en géométrie : $q = a + \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a + \vec{v}$

Multiplication de quaternions

Par calcul classique

Exercice : calculer $(1 + i - 2k).(2i - j + k)$

En forme géométrique :

$$(a + \vec{v}).(b + \vec{w}) = (ab - \vec{v}.\vec{w}) + (a\vec{w} + b\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w})$$

Exercice : calculer $(1 + i - 2k).(2i - j + k)$

Inverse, normalisation

Le conjugué $\overline{q}$ d'un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ est $a - bi - cj - dk$

Tout quaternion q non nul a un inverse $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2}\overline{q}$

Si q est de norme 1, son inverse est son conjugué $\overline{q}$

(rappel : $\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$)

Lien avec la rotation 3D

Une rotation d'angle α autour d'une direction $\vec{u}$ est représentée par le quaternion

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + V_{\vec{u}}.\,sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Où $V_{\vec{u}}$ est le vecteur unitaire colinéaire à la direction $\vec{u}$.

Que vaut alors q^{-1} ?

Calcul pour un point

Soit un point $P(x, y, z)$, représenté par le quaternion $p = (0, x, y, z)$.

La rotation représentée par q pour le point P se calcule alors par :

$q.p.q^{-1}$

Si q est unitaire, le calcul est encore plus simple : il devient $q.p.\overline{q}$

Pourquoi des quaternions ?

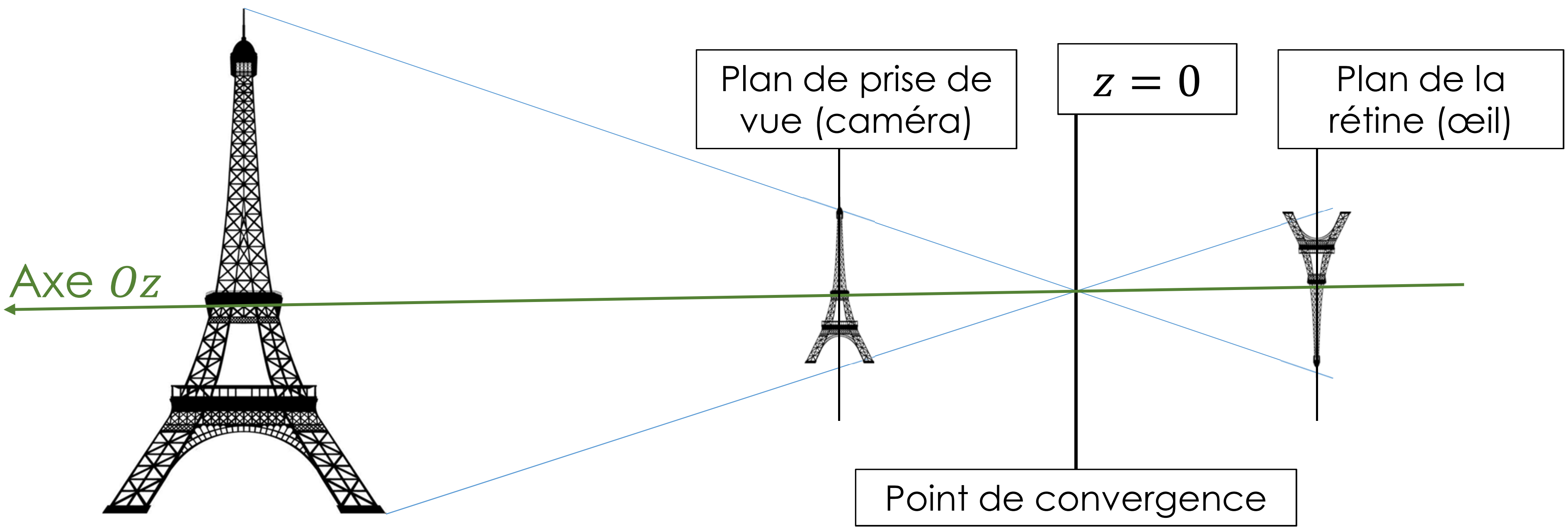
4 valeurs au lieu d'une matrice (9 valeurs)

Stabilité numérique

Evite le gimbal lock (verrouillage de cardan)

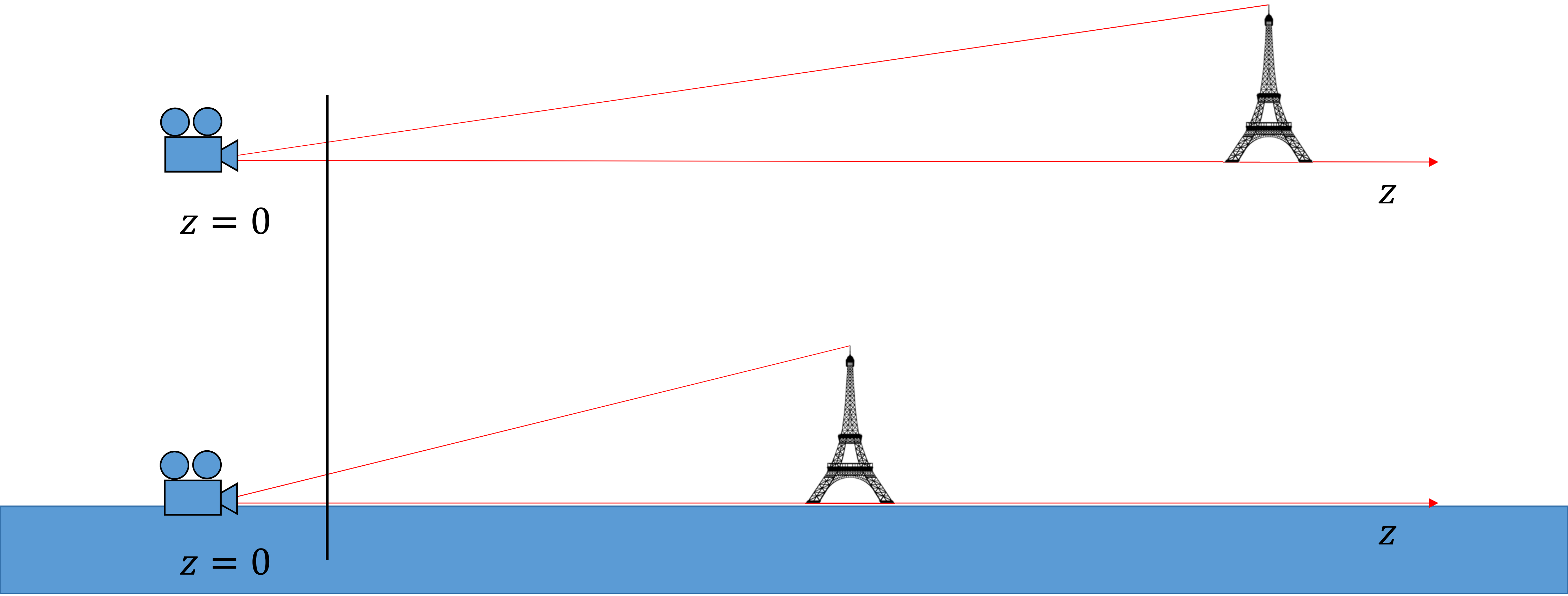
Passage 3D/2D

Attention à la définition de l'axe de profondeur pour la projection !



Perspective, projections

Plus un objet est loin, plus il paraît petit



Plusieurs types de perspective

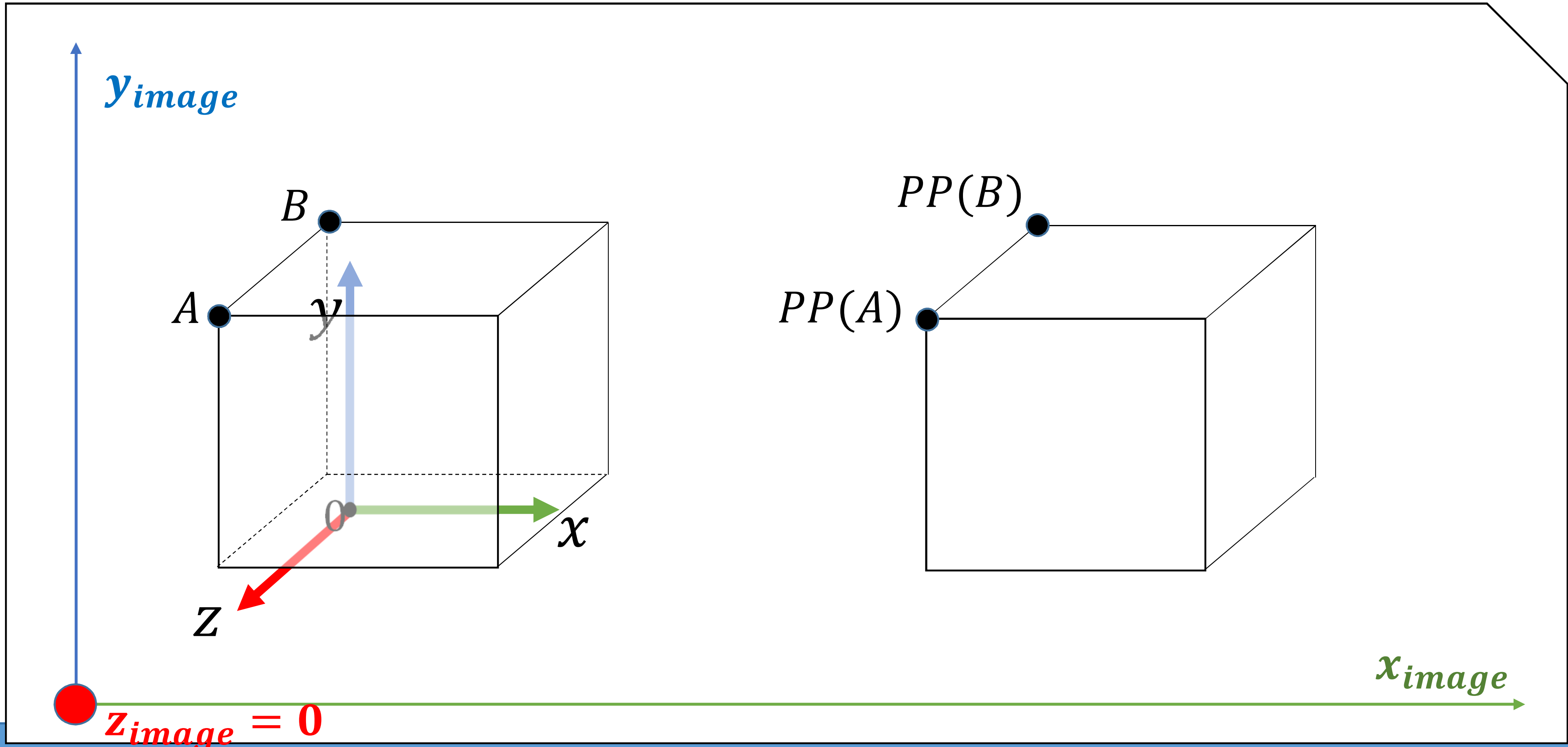
Axonométrique ou parallèle : dessin technique

Cotation (mesures), adapté au processus de production

Conservation des distances, du **parallélisme**, du volume apparent.

« deux droites parallèles apparaissent parallèles »

La projection cavalière

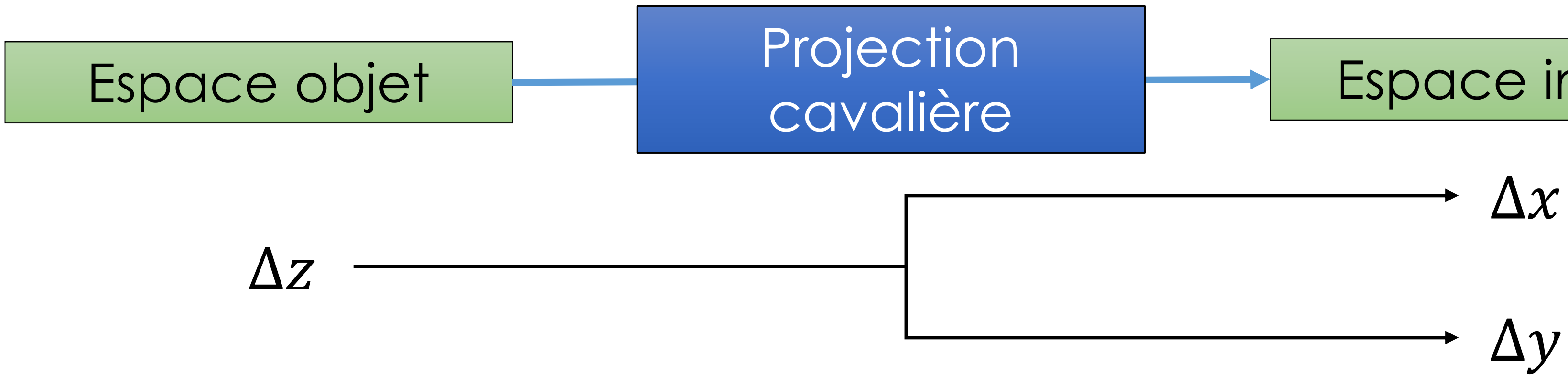


Principe de projection

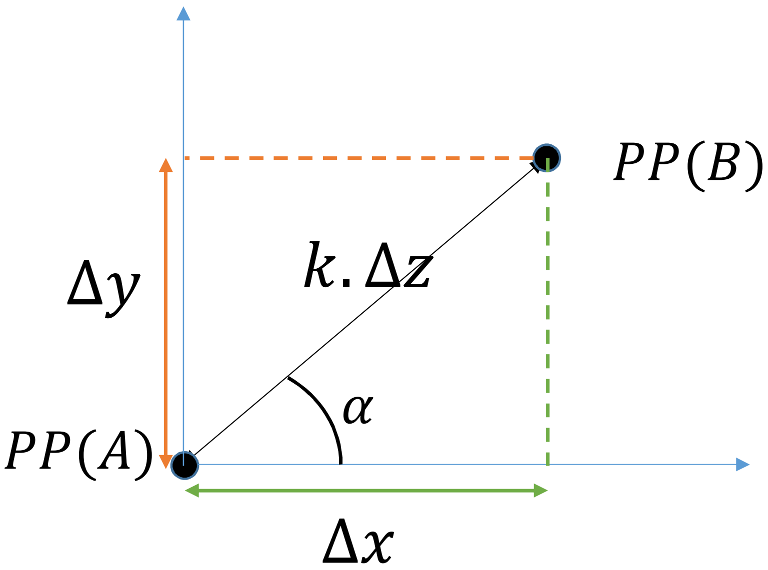
A partir du schéma précédent :

$A\ (x_a, y_a, z_a)$
$B(x_a, y_a, z_a + \Delta z)$

$PP(A)\ \left(x_{pa}, y_{pa}, 0\right)$
$PP(B)\ (x_{pa} + \Delta x, y_{pa} + \Delta y, 0)$



Calcul de la matrice de projection

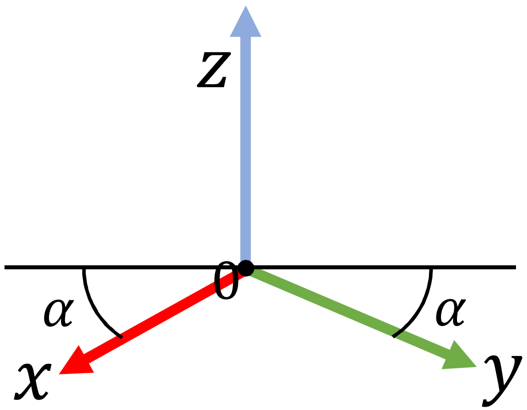


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k.\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & k.\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ {\color{red}0} \end{pmatrix}$$

k et α sont les paramètres de la projection

Orientation variable



$$x_p = k.(y - x).\cos(\alpha)$$
$$y_p = z - k.(y + x).\sin(\alpha)$$
$$z_p = 0$$