

Le but de cette séance est de bien comprendre les différentes méthodes de raisonnement.

Dans chacun des 6 premiers exercices, si on choisit la bonne méthode, l'exercice devient assez facile (même si d'autres méthodes sont aussi possibles mais généralement plus pénibles), il faudra donc bien réfléchir à quelle méthode utiliser.

Le 7ème exercice est un petit problème qui testera différentes méthodes de raisonnement.

L'exercice 8 est un petit exercice d'informatique très classique mais qui peut être assez dur à trouver par soi-même, et il est plus un challenge amusant qu'un exercice qu'il est essentiel de savoir faire.

Exercice 1. Somme des nombres impairs Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$

Exercice 2. Borne inférieure Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1$

Exercice 3. Infinité des nombres premiers Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers

Exercice 4. Caractérisation des fonctions croissantes On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Montrer que f est strictement croissante si et seulement si $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$

Exercice 5. Décomposition en fonctions paires et impaires Montrer que toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Exercice 6. Divisibilité par 8 Montrer que pour tout p premier $\neq 2$, 8 divise $p^2 - 1$

Exercice 7. Fonction bornées On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$

1. Écrire avec des quantificateurs l'assertion "f n'est pas bornée".
2. Donner un exemple de fonction bornée et un exemple de fonction qui ne l'est pas.
(On le démontrera dans les deux cas).
3. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$
(Note: On a échangé les 2 quantificateurs)
4. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq f(x) \leq b$
5. Montrer que f est bornée si et seulement si $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, a \leq f(x) - f(y) \leq b$

Exercice 8. Problème de l'arrêt Montrer qu'il n'existe pas de programme qui lit le code d'un autre programme (qui peut aussi être lui-même) et détermine si il s'arrête ou non (avec 100% de succès).