**Exercice 1. Formules de Taylor** Montrer les inégalités suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

**Exercice 2. Groupes ?** Les ensembles suivants sont-ils des groupes ? Si oui, dire si ils sont abéliens ou non.

1. L'ensemble $\{a, \ldots, z\}^*$ des chaines de caractère utilisant les chaines minuscules (y compris la chaîne vide), muni de la concaténation.
2. $\mathbb{U}$ muni de la multiplication.
3. $\mathbb{R}$ muni du max.
4. Les fonctions bijectives de $E$ dans $E$ (avec $E$ un ensemble) muni de la composition.
5. $P(E)$ avec $E$ un ensemble muni de la différence symétrique ($A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$).

**Exercice 3. Groupe d'éléments d'ordre 2** Soit $G$ un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = 1$.
Montrer que $G$ est abélien.

**Exercice 4. Anneaux et sous anneaux** Dans tout cet exercice, $A$ est un anneau, dire si $B$ est un sous anneau de $A$ ou non.

1. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$
2. $A = \mathbb{R}, B = \{\frac{k}{10^n} | k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres décimaux.
3. $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, B =$ les suites convergeant vers 0.
4. $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, B =$ les suites convergentes.
5. $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, B =$ les fonctions paires.
6. $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, B =$ les fonctions impaires.

**Exercice 5. Périodes d'une fonction** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On définit $Per(f) = \{T \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

1. Montrer que $Per(f)$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$.
2. Soit $G$ un sous groupe de $\mathbb{R}$, construire $f$ telle que $Per(f) = G$.

**Exercice 6. Isomorphisme entre $\mathbb{R}$ additif et $\mathbb{R}$ multiplicatif**

1. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^{+*}, *)$
2. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}^*, *)$

**Exercice 7. Endomorphisme d'anneaux** Montrer que tout morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ est l'identité.

**Exercice 8. Groupe sans sous groupe** Soit $G$ un groupe non trivial dont les seuls sous groupes sont $\{1\}$ et $G$.

1. Montrer que $G$ est fini.
2. Montrer que $G$ est cyclique.
3. Montrer que $G$ est d'ordre premier.