Exercice 1. Sous espaces vectoriels Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels, si oui et si possible, en donner une base:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x| = |y|\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}$
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y + 4z = 0\}$
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y = 4z\}$
6. l'ensemble des suites
7. l'ensemble des suites croissantes
8. l'ensemble des suites nulles à pcr
9. l'ensembles des suites 12-périodiques
10. l'ensemble des suites périodiques
11. l'ensemble des polynomes réels de degré n
12. $\{PQ | Q \in \mathbb{R}[X]\}$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé

Exercice 2. Fonctions indépendantes Montrer que les familles suivantes sont indépendantes:

1. $(1)_{n\in\mathbb{N}}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
2. $cos, sin, exp \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 3. Famille libre Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Montrer que $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$ est une famille libre.

Exercice 4. Applications linéaires Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f : K^2 \to K, \quad (x, y) \mapsto xy$
- $f : K^2 \to K^3, \quad (x, y) \mapsto (x + 1, 2x, 3y)$
- $f : K^3 \to K^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - 2z, y + 2x, 3z - 2y)$
- $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \quad f \mapsto f'$
- $f : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \quad f \mapsto f^{(n)}$, avec $n \in \mathbb{N}$

Exercice 5. Au corps à corps Déterminer toutes les applications linéaires de K dans K.

Exercice 6. L'exercice le plus classique de l'univers Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, x et $u(x)$ sont colinéaires.
Montrer que u est une homothétie.

Exercice 7. Composition nulle Soit E, F, G 3 espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G)$.
Montrer que $g \circ f = 0$ ssi $im\ f \subseteq ker\ g$

Exercice 8. Commutation Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, avec $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que ker f et $im\ f$ stables par g.

Exercice 9. Endomorphismes diagonalisables Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $a \in E$ est un vecteur propre de u si et seulement si $\exists \lambda \in K, u(a) = \lambda a$.

On dit que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

1. Montrer que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x, 3y)$ est diagonalisable.
2. Montrer que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (\lambda y, \lambda x, 0)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est diagonalisable.
3. Montrer que si u est diagonalisable, alors $E = ker\ u \oplus im\ u$.
4. $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \quad P \mapsto P'$ est-il diagonalisable ?