Exercice 1. Nature de suites Nature d'une suite = convergente ou divergente

1. Peut-on déterminer la nature de la somme de deux suites si l'on connaît la nature des deux suites.
2. Même question pour le produit

Exercice 2. Valeurs entières Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est-elle aussi ?

Exercice 3. Somme des inverses au carré $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
2. En déduire que S_n converge.

Exercice 4. Un peu d'IA Soit $i \in \mathbb{R}, \gamma > 0, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-i)^2$.
On va chercher à minimiser f (càd trouver i) avec de la descente de gradient.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente telle que $x_0 = 0, x_{n+1} = x_n - \gamma f'(x_n)$.

1. Caractériser les γ pour lesquels $|f'(x_n)|$ est strictement décroissante.
2. Montrer que dans ces cas là, $x_n \to i$.

Indication : Pour la question 2, on pourra utiliser Bolzano-Weierstrass.
Pour aller plus loin: Faites de même pour minimiser n'importe quel polynôme du second degré qui admet un minimum.

Cela correspond à ce que fait grosso modo un réseau de neurones , mais avec une entrée dans $\mathbb{R}^N$ avec N très grand (au minimum plusieurs milliers généralement), et avec des techniques de descente de gradient plus avancées. Le γ correspond ici au learning rate, qu'on veut grand pour apprendre vite, mais pas trop grand pour toujours assurer la convergence (on peut même voir ici que le prendre trop grand peut ralentir la convergence sans la briser).

Exercice 5. Critère spécial des séries alternées Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que $(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication : On pourra utiliser que si S_{2n} et S_{2n+1} convergent vers l, alors $S_n \to l$.

Exercice 6. Suites non bornées Soit $C > 0$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non bornée. Montrer que $\exists p, q, |u_p - u_q| > C$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles non bornées. Montrer que $\exists p, q, |u_p - u_q| > C$ et $|v_p - v_q| > C$.
3. Montrer que le résultat correspondant pour trois suites est faux.

TDs disponibles sur `https://nathan-boyer.vercel.app/tutorat`