**Exercice 1. Contre-exemples** Pour chacune des assertions ci-dessous, démontrer qu'elle est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

1. Une suite bornée converge
2. Une suite convergeant vers 0 est de signe constant à partir d'un certain rang (à pcr).
3. Si $u_n \to 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge.
4. Une fonction dérivable $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est lipshitzienne.
5. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en au moins 1 point.
6. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respecte le TVI, alors elle est continue.
7. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f'$ est continue.

**Exercice 2. Continuité au sens de Darboux des dérivées** On dit qu'une fonction $g$ est continue au sens de Darboux si elle respecte le TVI (càd que si $J$ est un intervalle, alors $g[J]$ est un intervalle).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ avec $f'(a)f'(b) < 0$. Montrer $\exists c \in [a, b]$ avec $f'(c) = 0$.
2. Montrer que $f'$ est continue au sens de Darboux.

*Indication :* Pour la première question, on pourra faire une disjonction de cas pour s'aider à mieux visualiser.

**Exercice 3. Fonctions continues dans $\mathbb{Z}$** Montrer qu'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante.

**Exercice 4. Introduction à la topologie** Une partie $U \subseteq \mathbb{R}$ est dite ouverte si $\forall x \in U, \exists \delta > 0, [x - \delta, x + \delta] \subseteq U$.

Une partie $F \subseteq \mathbb{R}$ est dite fermée si $\bar{F} = F$

1. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés : $\emptyset, \mathbb{R}, [0, 1], ]0, 1[, [0, 1[, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}$.
2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer que si $F$ fermé, alors $f^{-1}[F]$ fermé.

   Puis monter que si $U$ ouvert, alors $f^{-1}[U]$ ouvert.
3. Montrer que $X$ est fermé ssi $\mathbb{R} \backslash X$ est ouvert.

**Exercice 5. Points fixes** Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, alors $f$ a (au moins) un point fixe.
2. Montrer que si $[a, b] \subseteq f([a, b])$, alors $f$ a (au moins) un point fixe.

**Exercice 6. Annulation des dérivées** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n$ fois.

Montrer que si $f$ s'annule $n + 1$ fois, alors $f^{(n)}$ s'annule.

*Indication :* Ne pas faire de dessin est ici criminel !

**Exercice 7. Fonctions continues surjectives** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $C^0$ surjective.

Montrer que $f$ prend chaque valeur une infinité de fois.