

# Pavages périodiques apériodiques du plan

Matteo Wei et Nathan Boyer

22 décembre 2023

## 1 Introduction

**Définition 1** (Ensemble de Wang). Un ensemble de Wang est un triplet  $(H, V, T)$  où  $H$  et  $V$  sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où  $T \subseteq H^2 * V^2$  est l'ensemble des dominos

**Définition 2** (Pavage). Soit  $X \subseteq \mathbb{Z}^2$  et  $\tau$  un ensemble de Wang

Un pavage de  $X$  par  $\tau$  est une fonction  $f : X \rightarrow T$  avec :

$\forall (x, y) \in X, f(x, y)_e = f(x + 1, y)_w$  et  $f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s$

Un pavage du plan par  $\tau$  est un pavage de  $\mathbb{Z}^2$

On dit que  $\tau$  est périodique s'il existe un pavage du plan périodique par  $\tau$

(càd que  $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0), \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x, y) = f(x + u, y + v)$ )

On dit que  $\tau$  est apériodique s'il existe au moins un pavage du plan par  $\tau$  mais que tous ces pavages ne sont pas périodiques

## 2 Indécidabilité du problème du domino

### 2.1 Le problème du domino

**Définition 3** (Problème du domino). Existe-t-il un algorithme qui, étant donné un ensemble fini de tuiles de Wang, décide s'il existe un pavage du plan avec ces tuiles ?

**Proposition 1.** *La conjecture de Wang implique que le problème du domino est décidable.*

**Lemme 1** (compacité). *Soit  $T$  un ensemble fini de tuiles de Wang. Alors  $T$  pave le plan si, et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  pave un carré de taille  $n \times n$ .*

*Preuve 1* (lemme 1). Le sens direct est trivial. Pour le sens réciproque, supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  pave un carré de taille  $n \times n$ .

On fixe un ensemble dénombrable de variables  $V$  et considère le langage contenant un symbole de constante  $O$ , deux symboles de relations binaires  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$ , ainsi que, pour chaque tuile  $t \in T$ , un symbole de relation unaire aussi noté  $t$ .

On note  $T_{\mathcal{H}}$  l'ensemble des couples de tuiles  $(t, u) \in T^2$  tels que la couleur de droite de  $t$  est la couleur de gauche de  $u$ . De même, on note  $T_{\mathcal{V}}$  l'ensemble des couples de tuiles  $(t, u) \in T^2$  tels que la couleur du haut de  $t$  est la couleur du bas de  $u$ .

On propose l'axiomatisation Th du premier ordre suivante pour les  $T$ -pavages :

$$\forall x \forall y (x \mathcal{H} y \rightarrow \forall z ((x \mathcal{H} z \rightarrow y = z) \wedge (z \mathcal{H} y \rightarrow x = z))) \quad (\varphi_{\mathcal{H}})$$

$$\forall x \forall y (x \mathcal{V} y \rightarrow \forall z ((x \mathcal{V} z \rightarrow y = z) \wedge (z \mathcal{V} y \rightarrow x = z))) \quad (\varphi_{\mathcal{V}})$$

$$\forall x \bigvee_{t \in T} (t(x) \wedge \bigwedge_{u \in T \setminus \{t\}} \neg u(x)) \quad (\psi_{\text{un}})$$

$$\forall x \forall y (x \mathcal{H} y \rightarrow \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{H}}} (t(x) \wedge u(y))) \quad (\psi_{\mathcal{H}})$$

$$\forall y (x \mathcal{V} y \rightarrow \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{V}}} (t(x) \wedge u(y))) \quad (\psi_{\mathcal{V}})$$

Les variables s'incarnent en des positions sur lesquelles les tuiles sont placées. Les formules  $\varphi$ . axiomatisent le réseau entier du plan, et les formules  $\psi$ . correspondent au placement des tuiles sur les cases.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons

$$x_{0,0} = O \wedge \bigwedge_{i=-n}^n \bigwedge_{j=-n}^{n-1} x_{i,j} \mathcal{H} x_{i,j+1} \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n-1} \bigwedge_{j=-n}^n x_{i,j} \mathcal{V} x_{i+1,j} \quad (\theta_n)$$

et notons  $\theta'_n = \exists (x_{i,j})_{-n \leq i,j \leq n} \theta_n$ .

L'hypothèse que  $T$  pave des carrés de taille arbitrairement grande donne en particulier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Th} \cup \{\theta'_n\}$  admet un modèle (il suffit de prendre un pavage d'un carré  $C_n$  de taille  $2n+1 \times 2n+1$  et de prendre pour  $O^{C_n}$  le centre du carré). On en déduit que  $\text{Th} \cup \{\theta'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est finiment consistante, donc consistante par compacité de la logique du premier ordre. Fixons-en donc un modèle  $\mathfrak{M}$ , dont on note  $M$  l'ensemble sous-jacent.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons que  $\varphi_{\mathcal{H}}$  et  $\varphi_{\mathcal{V}}$  impliquent que pour  $n \in \mathbb{N}$  il n'y a qu'un seul  $(a_{i,j}^n)_{-n \leq i,j \leq n} \in M^{(2n+1)^2}$  tel que  $\mathfrak{M} \vdash \theta_n \left( (a_{i,j})_{-n \leq i,j \leq n} \in M^{(2n+1)^2} \right)$ , et de plus que pour  $m \geq n$ , et  $-n \leq i, j \leq n$ , on a  $a_{i,j}^n = a_{i,j}^m$ . Il s'agit en effet de l'unique position  $i$  lignes au dessus et  $j$  colonnes à droite de  $O^{\mathfrak{M}}$ ; on note donc  $a_{i,j}$  cet élément.

On en déduit également que pour tout  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathfrak{M} \vdash a_{i,j} \mathcal{H} a_{i,j+1} \wedge a_{i,j} \mathcal{V} a_{i+1,j}$ . On déduit alors des trois derniers axiomes de Th que placer à la position  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  l'unique tuile  $t$  telle que  $\mathfrak{M} \vdash t(a_{i,j})$  donne un  $T$ -pavage du plan, ce qui conclut.

*Preuve 2* (proposition 1). Supposons que la conjecture de Wang est vrai.

Considérons l'algorithme, étant donné un ensemble fini  $T$  de tuiles de Wang, consistant à tester, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , tous les  $T$ -coloriages possibles de  $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ , jusqu'à soit trouver un  $T$ -pavage prolongeable en  $T$ -pavage périodique du plan, auquel cas on accepte, soit trouver un  $n$  tel qu'aucun des  $T$ -coloriages de  $\llbracket 0, n \rrbracket^2$  n'est un  $T$ -pavage, auquel cas on rejette.

Soit  $T$  un ensemble fini de tuiles. Il y a deux cas de figures possibles :

- Soit  $T$  ne pave pas le plan, auquel cas le lemme 1 assure que l'algorithme rejette.
- Soit  $T$  pave le plan, auquel cas la conjecture de Wang assure qu'il existe un  $T$ -pavage périodique, et l'algorithme accepte.

Ainsi, cet algorithme décide le problème du domino.

## 2.2

### 3 Pavage apériodique pour 11 tuiles et 4 couleurs

On cherche à montrer dans cette partie qu'il n'existe pas d'ensemble de Wang apériodique à 11 dominos ou moins mais qu'il en existe à partir de 11 dominos

#### 3.1 Définitions préalables

**Définition 4** (Transducteur). Un transducteur  $\tau$  est un automate qui lit une bande d'entrée bifinie et écrit sur une bande de sortie bifinie

On peut voir un pavage comme un transducteur.

En effet,  $\forall t = (w, e, s, n) \in T$ , on dit qu'il y a une transition de l'état  $w$  vers l'état  $e$  qui lit  $n$  et écrit  $s$

**Définition 5** ( $w\tau w'$ ). On dit que  $w\tau w'$  si  $w'$  est une bande de sortie pour la bande d'entrée  $w$  et le transducteur  $\tau$

**Définition 6** (Run). Une run d'un transducteur  $\tau$  sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{Z}$  est une suite de mots bifinis  $(w_i)_{i \in I}$  telle que  $\forall i \in I, w_i \tau w_{i+1}$

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle

On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante :

**Proposition 2.** *Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si  $\exists w$  mot bifini,  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $w\tau^k w'$*

**Définition 7** (Equivalence de 2 ensembles de Wang). On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs

Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation

càd ssi  $\forall w, w', w\tau w' \iff w\tau' w'$

**Définition 8** (Simulation d'un transducteur). Soit  $\tau = (H, V, T)$  un transducteur

Une simulation  $R$  est une relation sur  $H$  telle que

$uRu' \iff \forall v \in H, a, b \in V$  avec  $(u, v, a, b) \in T, \exists v' \in V, (u', v', a, b) \in T$

Une bisimulation est simulation  $R$  telle que  $R^{-1}$  soit une relation

La relation de bisimilarité (qui est la plus grande bisimulation) est une relation d'équivalence.

### 3.2 Générer tous les ensembles de Wang de cardinal moins de 10

Soit  $\tau$  un ensemble de Wang. On dit que  $\tau$  est minimal apériodique si  $\tau$  est apériodique et qu'aucun sous-ensemble strict de  $\tau$  n'est apériodique.

Dans toute cette partie, on va s'intéresser au graphe orienté  $G = (V, E)$  lié au transducteur de  $\tau$ .

On a alors les résultats suivants :

- Lemma 1.* — Soit  $u, v \in V$  avec  $uv \in E$  mais pas de chemin de  $v$  vers  $u$ , alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal
- Si  $G$  a une composante fortement connexe qui est un cycle, alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal
  - Si  $G$  n'a qu'un sommet, alors  $\tau$  n'est pas apériodique
  - Si  $|E| - |V| \leq 2$ , alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal

*Démonstration.* Pour le premier point,  $(uv)$  correspond à un domino  $t$  qui ne peut apparaître qu'une fois par colonne, donc, si  $\tau$  pave le plan, alors  $\tau \setminus \{t\}$  aussi, d'où le résultat.

Pour le deuxième point, supposons qu'il existe une telle composante. Cela veut donc dire qu'il existe  $S \subseteq T$  tel qu'à chaque fois qu'un des dominos apparaît, la ligne entière est périodique

Si  $T$  est apériodique, on ne peut pas avoir un pavage où les dominos de  $S$  apparaissent dans deux rangées différentes, car on pourrait en déduire un pavage périodique.

En conséquence, les tuiles de  $S$  apparaissent dans au plus une ligne, et en utilisant le même argument que précédemment, nous déduisons que  $T \setminus S$  pave le plan.

Pour le troisième point, si  $G$  n'a qu'un sommet mais que  $\tau$  pave le plan, alors on peut construire un pavage du plan tel que chaque colonne est la même.

La preuve du dernier point est très longue (plus de 15 pages) et ne sera donc pas détaillée ici.

□

On peut également supposer que  $G$  ne contient pas de sommet isolé.

On génère alors tous les graphes avec au plus 10 arêtes et vérifiant ces propriétés par ordinateur et on trouve qu'il en existe 77809.

### 3.3 Tester l'apériodicité

On veut maintenant tester l'apériodicité de ces différents transducteurs.

Cependant, on sait qu'un transducteur  $\tau$  n'est pas apériodique si :

- $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\nexists w, w'$  avec  $w\tau^k w'$  ( $\tau$  ne pave pas le plan)
- $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\exists w$  avec  $w\tau^k w$  ( $\tau$  est périodique)

L'algorithme est alors évident : Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $\tau^k$