Le problème des dominos de Wang

Matteo Wei et Nathan Boyer

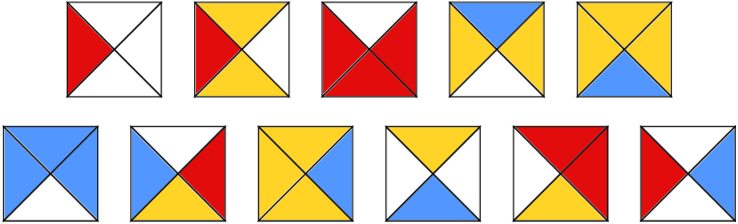
2024

Table des matières

Ensemble de Wang

Definition

Un *ensemble de Wang* est un triplet (H, V, T) où H et V sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où $T \subseteq H^2 * V^2$ est l'ensemble des dominos. On appelera parfois aussi abusivement ensemble de Wang l'ensemble des dominos T.



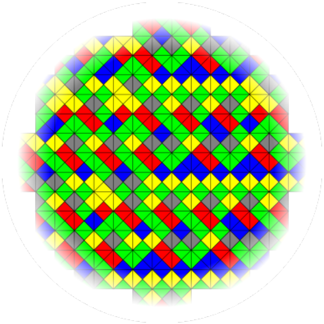
Pavage

Definition

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et τ un ensemble de Wang.
Un pavage de X par τ est une fonction $f : X \to T$ avec:

$$\forall (x, y) \in X, f(x, y)_e = f(x + 1, y)_w \wedge f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s.$$

Un pavage du plan par τ est un pavage de $\mathbb{Z}^2$.



Pavage périodique et apériodique

Definition

On dit que τ est périodique s'il existe un pavage du plan périodique par τ (càd tel que $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^{*2}, \forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, f(x,y) = f(x+u,y) = f(x,y+v)$).
On dit que τ est apériodique s'il existe au moins un pavage du plan par τ mais que tous ses pavages ne sont pas périodiques.

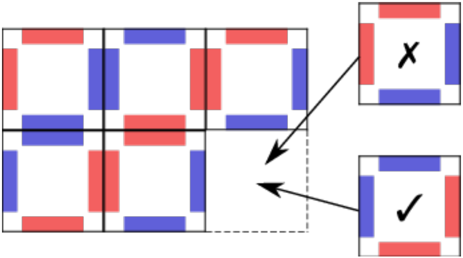


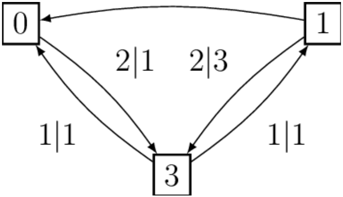
Table des matières

Table des matières

Transducteur

Definition

Un transducteur τ est un automate qui lit une bande d'entrée bifinie et écrit sur une bande de sortie bifinie.

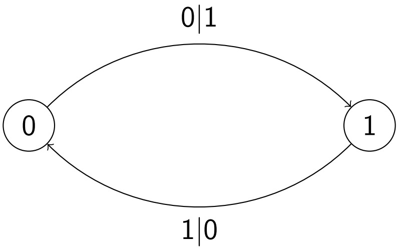


Définition

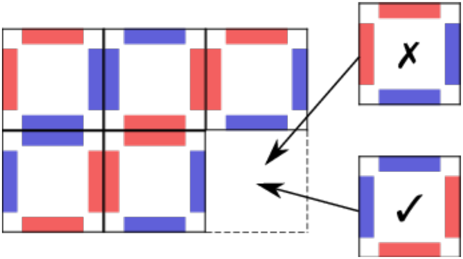
On dit que $w\tau w'$ si w' est une bande de sortie pour la bande d'entrée w et le transducteur τ.

Lien entre dominos et transducteurs

On peut voir un pavage comme un transducteur.
En effet, $\forall t = (w, e, s, n) \in T$, on dit qu'il y a une transition de l'état w vers l'état e qui lit n et écrit s.
Ainsi, l'ensemble de wang vu en Introduction se réécrit



Ensemble de Wang représenté



Reformulation du problème initial

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle.
On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante:

Proposition

Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si $\exists w$ mot bifini , $k \in \mathbb{N}$, avec $w\tau^k w$.

Equivalence entre 2 ensembles de Wang

On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs.
Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation, càd ssi $\forall w, w',\ w\tau w' \iff w\tau' w'$.

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Pour commencer, on va chercher à générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10 (à l'équivalence définie plus tôt près)

Definition

Soit τ un ensemble de Wang. On dit que τ est minimal apériodique si τ est apériodique et qu'aucun sous-ensemble strict de τ n'est apériodique.