

# Le problème des dominos de Wang

Matteo Wei et Nathan Boyer

2024

# Table des matières

## Introduction

### Indécidabilité du problème du domino

- Le problème du domino

- Complétude de problèmes de pavage

### Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang apériodique

- Définitions préalables

- Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

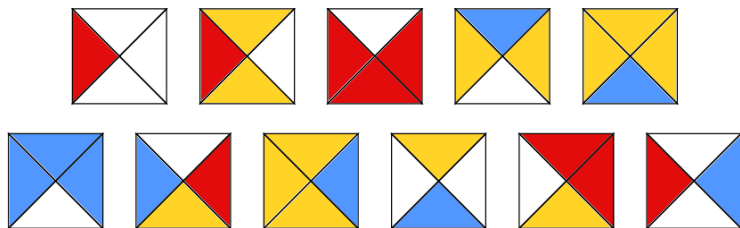
- Tester l'apériodicité

- Un contre-exemple pour 11 tuiles

# Ensemble de Wang

## Definition

Un *ensemble de Wang* est un triplet  $(H, V, T)$  où  $H$  et  $V$  sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où  $T \subseteq H^2 * V^2$  est l'ensemble des dominos. On appellera parfois aussi abusivement ensemble de Wang l'ensemble des dominos  $T$ .



# Pavage

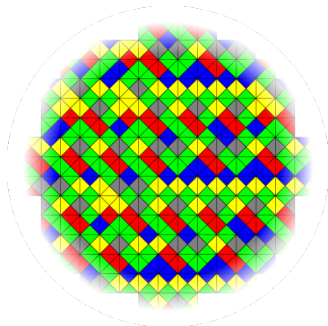
## Definition

Soit  $X \subseteq \mathbb{Z}^2$  et  $\tau$  un ensemble de Wang.

Un pavage de  $X$  par  $\tau$  est une fonction  $f : X \rightarrow T$  avec :

$$\forall (x, y) \in X, f(x, y)_e = f(x + 1, y)_w \wedge f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s.$$

Un pavage du plan par  $\tau$  est un pavage de  $\mathbb{Z}^2$ .



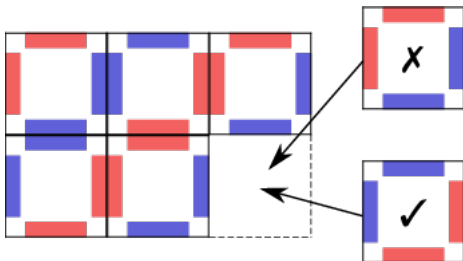
# Pavage périodique et apériodique

## Definition

On dit que  $\tau$  est périodique s'il existe un pavage du plan périodique par  $\tau$  (càd tel que

$$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^{*2}, \forall(x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x, y) = f(x + u, y) = f(x, y + v)).$$

On dit que  $\tau$  est apériodique s'il existe au moins un pavage du plan par  $\tau$  mais que tous ses pavages ne sont pas périodiques.



# Conjecture de Wang

## Conjecture (Wang, 1961)

Un ensemble de Wang qui pave le plan est périodique.

# Table des matières

## Introduction

## Indécidabilité du problème du domino

- Le problème du domino

- Complétude de problèmes de pavage

## Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang apériodique

- Définitions préalables

- Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

- Tester l'apériodicité

- Un contre-exemple pour 11 tuiles

# Le problème du domino

## Problème du domino

Étant donné un ensemble de Wang, est-il possible de paver le plan avec ?



# Le problème du domino

## Problème du domino

Étant donné un ensemble de Wang, est-il possible de paver le plan avec ?

## Proposition

La conjecture de Wang implique que le problème du domino est décidable.

## Lemme (compacité)

Un ensemble de Wang pave le plan si, et seulement si, il pave des carrés arbitrairement grands.

## Lemme (compacité)

Un ensemble de Wang pave le plan si, et seulement si, il pave des carrés arbitrairement grands.

## Preuve de la proposition

Si on suppose la conjecture de Wang, alors étant donné un ensemble de Wang, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

- Soit il ne pave pas le carré  $n \times n$ .
- Soit il le pave d'une manière complétable en un pavage périodique du plan.

Donc le problème du domino est décidable.

# Encodage de machines de Turing par des pavages

## Stratégie

Trouver une manière d'encoder une machine de Turing avec un ensemble de Wang, pour ramener le problème du domino au problème de l'arrêt.

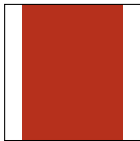
# Encodage de machines de Turing par des pavages

## Stratégie

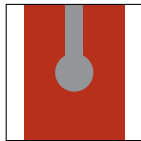
Trouver une manière d'encoder une machine de Turing avec un ensemble de Wang, pour ramener le problème du domino au problème de l'arrêt.

## Idée

Représenter les états de la machine et les lettres avec des contraintes de couleur sur les bords.



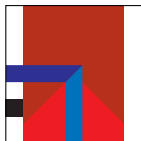
$\text{let}(s)$



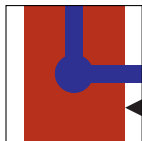
$\text{init}(s)$



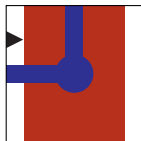
$\text{trans}_{\rightarrow}(\delta_{\rightarrow})$



$\text{trans}_{\leftarrow}(\delta_{\leftarrow})$



$\text{head}_{\leftarrow}(q, s)$



$\text{head}_{\rightarrow}(q, s)$

## Problèmes

- ▶ On n'impose pas la présence d'une tête de lecture.
- ▶ On n'impose pas l'unicité d'une tête de lecture.
- ▶ On n'impose pas la présence d'un état initial.
- ▶ On ne contrôle pas le mot de départ.

# Le problème du domino fixé

## Définition

Le problème du domino fixé est celui de décider, étant donné un ensemble de Wang  $T$  et un domino  $t$  de l'ensemble, s'il existe un  $T$ -pavage de  $\mathbb{N}^2$  avec  $t$  en  $(0,0)$ .

## Proposition (compacité)

C'est le cas si, et seulement si, il existe des  $T$ -pavages de carrés arbitrairement grands avec  $t$  au coin sud-ouest.



## Proposition

Le problème du domino fixé n'est pas décidable.

## Proposition

Le problème du domino fixé n'est pas décidable.

## Preuve

Étant donné une machine de Turing, on construit un ensemble de Wang qui simule les calculs de la machine sur le mot vide, et on se sert de la contrainte de domino fixé pour rajouter l'état initial.



$\text{let}^S(\_)$



$\text{init}$



$\text{let}^W(s)$



$\text{trans}_{\rightarrow}^W(\delta_{\rightarrow})$



$\text{head}_{\leftarrow}^W(q, s)$



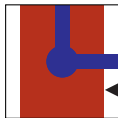
$\text{let}(s)$



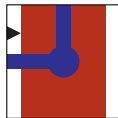
$\text{trans}_{\rightarrow}(\delta_{\rightarrow})$



$\text{trans}_{\leftarrow}(\delta_{\leftarrow})$



$\text{head}_{\leftarrow}(q, s)$



$\text{head}_{\rightarrow}(q, s)$

# Vers le problème du domino

## Proposition

Le problème du domino n'est pas décidable.

# Vers le problème du domino

## Proposition

Le problème du domino n'est pas décidable.

## Idée de la preuve

Construire un ensemble dont tous les pavages font apparaître des carrés vides arbitrairement grands. Le combiner avec l'ensemble de Wang de départ pour paver ces carrés avec l'ensemble de départ, en imposant la tuile sud-ouest.

On déduit alors le résultat de l'indécidabilité du problème du domino fixé.

# Complétude de problèmes de pavage

## Idée

Comme on peut facilement encoder l'exécution d'une machine de Turing avec des ensembles de Wang, il est facile d'obtenir des résultats de complétude pour des problèmes de pavage.

# Complétude de problèmes de pavage

## Idée

Comme on peut facilement encoder l'exécution d'une machine de Turing avec des ensembles de Wang, il est facile d'obtenir des résultats de complétude pour des problèmes de pavage.

## Définition (problèmes TILING)

Soit  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tel que  $w \geq \text{id}_{\mathbb{N}}$ . Le problème de décision  $\text{TILING}(h, w)$ , consiste, étant donné un ensemble de Wang  $T$ , quatre couleurs  $N, S, E$  et  $W$ , et une suite de couleurs de longueur  $n$ , consiste à décider s'il existe un  $T$ -pavage d'un carré de taille  $w(n) \times h(n)$  avec les contraintes supplémentaires que les bords nord, est et ouest soient des couleurs correspondantes et que le bord sud commence par la suite de couleurs donnée, puis continue avec la couleur  $S$ .

On note  $\text{TILING}(*, w)$ , le même problème, où l'on enlève les contraintes de hauteur.

## Proposition

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $\text{TILING}(\exp_k, \exp_k)$  est  $k\text{NEXPTIME}$ -complet.

## Proposition

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $\text{TILING}(*, \exp_k)$  est  $k\text{EXPSPACE}$ -complet.



## Proposition

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $\text{TILING}(\exp_k, \exp_k)$  est  $k\text{NEXPTIME}$ -complet.

## Proposition

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $\text{TILING}(*, \exp_k)$  est  $k\text{EXPSPACE}$ -complet.

## Preuve

Dans les deux cas, on vérifie qu'un pavage est solution avec les bonnes contraintes (on a besoin de stocker qu'un seul rang).

Dans l'autre sens, étant donné un problème dans la classe de complexité, on construit l'ensemble de Wang correspondant à une machine de Turing qui le décide, et on simule les calculs en imposant la suite de couleurs en entrée.



Figure – On impose le gris comme couleur nord, le blanc pour le trois autres bords (aussi la couleur du symbole blanc)

## Corollaire

$\text{TILING}(\text{id}_{\mathbb{N}}, \text{id}_{\mathbb{N}})$  est NP-complet, et  $\text{TILING}(*, \text{id}_{\mathbb{N}})$  est PSPACE-complet.

## Corollaire

$\text{TILING}(\text{id}_{\mathbb{N}}, \text{id}_{\mathbb{N}})$  est NP-complet, et  $\text{TILING}(*, \text{id}_{\mathbb{N}})$  est PSPACE-complet.

## Preuve

Cas  $k = 0$ .

# Table des matières

## Introduction

## Indécidabilité du problème du domino

Le problème du domino

Complétude de problèmes de pavage

## Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang apériodique

Définitions préalables

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

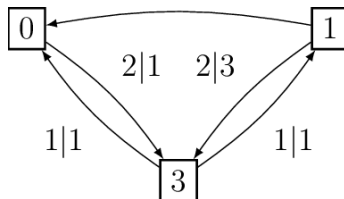
Tester l'apériodicité

Un contre-exemple pour 11 tuiles

# Transducteur

## Definition

Un transducteur  $\tau$  est un automate qui lit une bande d'entrée bfinie et écrit sur une bande de sortie bfinie.



## Définition

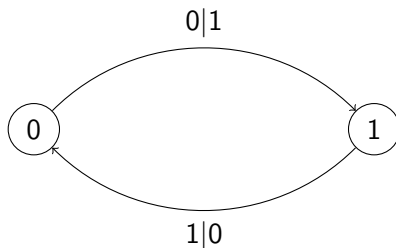
On dit que  $w\tau w'$  si  $w'$  est une bande de sortie pour la bande d'entrée  $w$  et le transducteur  $\tau$ .

# Lien entre dominos et transducteurs

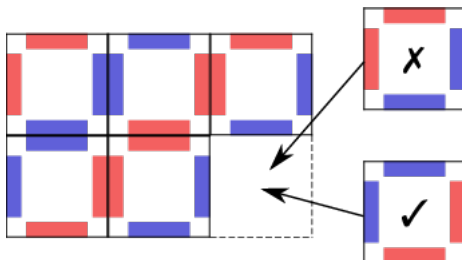
On peut voir un pavage comme un transducteur.

En effet,  $\forall t = (w, e, s, n) \in T$ , on dit qu'il y a une transition de l'état  $w$  vers l'état  $e$  qui lit  $n$  et écrit  $s$ .

Ainsi, l'ensemble de wang vu en Introduction se réécrit



# Ensemble de Wang représenté





# Reformulation du problème initial

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle.

On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante :

## Proposition

Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si  $\exists w$  mot bifini ,  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $w\tau^k w$ .

## Equivalence entre 2 ensembles de Wang

On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs.

Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation, c-à-d ssi  $\forall w, w', w\tau w' \iff w\tau' w'$ .

# Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Pour commencer, on va chercher à générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10 (à l'équivalence définie plus tôt près)

## Definition

Soit  $\tau$  un ensemble de Wang. On dit que  $\tau$  est minimal apériodique si  $\tau$  est apériodique et qu'aucun sous-ensemble strict de  $\tau$  n'est apériodique.

# Quelques propriétés sur les transducteurs apériodiques

On s'intéresse ici au graphe orienté  $G = (V, E)$  lié au transducteur de  $\tau$ .

On a alors les résultats suivants :

- ▶ Soit  $u, v \in V$  avec  $uv \in E$  mais pas de chemin de  $v$  vers  $u$ , alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal.
- ▶ Si  $G$  a une composante fortement connexe qui est un cycle, alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal.
- ▶ Si  $G$  n'a qu'un sommet, alors  $\tau$  n'est pas apériodique.
- ▶ Si  $|E| - |V| \leq 2$ , alors  $\tau$  n'est pas apériodique minimal.

# Schémas de preuve

Pour le premier point,  $(uv)$  correspond à un domino  $t$  qui ne peut apparaître qu'une fois par colonne, donc, si  $\tau$  pave le plan, alors  $\tau \setminus \{t\}$  aussi, d'où le résultat.

Pour le deuxième point, supposons qu'il existe une telle composante. Cela veut donc dire qu'il existe  $S \subseteq T$  tel qu'à chaque fois qu'un des dominos apparaît, la ligne entière est périodique. Si  $T$  est apériodique, on ne peut pas avoir un pavage où les dominos de  $S$  apparaissent dans deux rangées différentes, car on pourrait en déduire un pavage périodique. En conséquence, les tuiles de  $S$  apparaissent dans au plus une ligne, et en utilisant le même argument que précédemment, nous déduisons que  $T \setminus S$  pave le plan.

# Schémas de preuve

Pour le troisième point, si  $G$  n'a qu'un sommet mais que  $\tau$  pave le plan, alors on peut construire un pavage du plan tel que chaque colonne est la même.

La preuve du dernier point est très longue (plus de 15 pages) et ne sera donc pas détaillée ici.

# Génération de transducteurs

On génère alors tous les transducteurs d'au plus 10 arêtes ne vérifiant aucune de ces conditions (et qui n'ont pas de sommet isolé).

On trouve alors qu'il en existe 77809.

# Critères d'apériodicité

On veut maintenant tester l'apériodicité de ces différents transducteurs.

Cependant, on sait qu'un transducteur  $\tau$  n'est pas apériodique si :

- ▶  $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\nexists w, w'$  avec  $w\tau^k w'$  ( $\tau$  ne pave pas le plan).
- ▶  $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\exists w$  avec  $w\tau^k w$  ( $\tau$  est périodique).

# Algorithme pour tester l'apériodicité

L'algorithme est alors évident : Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $\tau^k$  et tester si il y a un des 2 cas précédents, jusqu'à ce que l'ordinateur ne dispose plus d'assez de mémoire (en effet, comme on l'a vu plus haut, ce problème est indécidable). Dans ce cas, on doit alors étudier le cas à la main.

On rajoute cependant une petite optimisation, qui est d'enlever les puits et sources des graphes à chaque étape pour les simplifier (les puits et les sources ne pouvant pas servir à grand chose quand on veut créer une suite bifinie).

## Résultat

A l'exception d'un cas (qui dût être vérifié à la main), tous les cas furent résolus par l'ordinateur, et ainsi le résultat recherché fut prouvé.



# Un contre-exemple pour 11 tuiles

En appliquant le même algorithme pour 11 tuiles, on peut regarder les cas indécidés par l'ordinateur et les étudier.

Un cas en particulier a alors été exhibé et démontré comme apériodique, prouvant qu'il existe des ensembles de Wang apériodiques à 11 dominos.