

Pavages périodiques apériodiques du plan

Matteo Wei et Nathan Boyer

22 décembre 2023

1 Introduction

Définition 1. Un ensemble de Wang est un triplet (H, V, T) où H et V sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où $T \subseteq H^2 * V^2$ est l'ensemble des dominos

2 Indécidabilité du problème du domino

2.1 Le problème du domino

Définition 2 (Problème du domino). Existe-t-il un algorithme qui, étant donné un ensemble fini de tuiles de Wang, décide s'il existe un pavage du plan avec ces tuiles ?

Proposition 1. *La conjecture de Wang implique que le problème du domino est décidable.*

Lemme 1 (compacité). *Soit T un ensemble fini de tuiles de Wang. Alors T pave le plan si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.*

Preuve 1 (lemme 1). Le sens direct est trivial. Pour le sens réciproque, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.

On fixe un ensemble dénombrable de variables V et considère le langage contenant un symbole de constante O , deux symboles de relations binaires \mathcal{H} et \mathcal{V} , ainsi que, pour chaque tuile $t \in T$, un symbole de relation unaire aussi noté t .

On note $T_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t, u) \in T^2$ tels que la couleur de droite de t est la couleur de gauche de u . De même, on note $T_{\mathcal{V}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t, u) \in T^2$ tels que la couleur du haut de t est la couleur du bas de u .

On propose l'axiomatisation Th du premier ordre suivante pour les T -pavages :

$$\forall x \forall y (x \mathcal{H} y \rightarrow \forall z ((x \mathcal{H} z \rightarrow y = z) \wedge (z \mathcal{H} y \rightarrow x = z))) \quad (\varphi_{\mathcal{H}})$$

$$\forall x \forall y (x \mathcal{V} y \rightarrow \forall z ((x \mathcal{V} z \rightarrow y = z) \wedge (z \mathcal{V} y \rightarrow x = z))) \quad (\varphi_{\mathcal{V}})$$

$$\forall x \bigvee_{t \in T} (t(x) \wedge \bigwedge_{u \in T \setminus \{t\}} \neg u(x)) \quad (\psi_{\text{un}})$$

$$\forall x \forall y (x \mathcal{H} y \rightarrow \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{H}}} (t(x) \wedge u(y))) \quad (\psi_{\mathcal{H}})$$

$$\forall y (x \mathcal{V} y \rightarrow \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{V}}} (t(x) \wedge u(y))) \quad (\psi_{\mathcal{V}})$$

Les variables s'incarnent en des positions sur lesquelles les tuiles sont placées. Les formules φ . axiomatisent le réseau entier du plan, et les formules ψ . correspondent au placement des tuiles sur les cases.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons

$$x_{0,0} = O \wedge \bigwedge_{i=-n}^n \bigwedge_{j=-n}^{n-1} x_{i,j} \mathcal{H} x_{i,j+1} \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n-1} \bigwedge_{j=-n}^n x_{i,j} \mathcal{V} x_{i+1,j} \quad (\theta_n)$$

et notons $\theta'_n = \exists (x_{i,j})_{-n \leq i,j \leq n} \theta_n$.

L'hypothèse que T pave des carrés de taille arbitrairement grande donne en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Th} \cup \{\theta'_n\}$ admet un modèle (il suffit de prendre un pavage d'un carré C_n de taille $2n+1 \times 2n+1$ et de prendre pour O^{C_n} le centre du carré). On en déduit que $\text{Th} \cup \{\theta'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est finiment consistante, donc consistante par compacité de la logique du premier ordre. Fixons-en donc un modèle \mathfrak{M} , dont on note M l'ensemble sous-jacent.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\varphi_{\mathcal{H}}$ et $\varphi_{\mathcal{V}}$ impliquent que pour $n \in \mathbb{N}$ il n'y a qu'un seul $(a_{i,j}^n)_{-n \leq i,j \leq n} \in M^{(2n+1)^2}$ tel que $\mathfrak{M} \vdash \theta_n \left((a_{i,j})_{-n \leq i,j \leq n} \in M^{(2n+1)^2} \right)$, et de plus que pour $m \geq n$, et $-n \leq i,j \leq n$, on a $a_{i,j}^n = a_{i,j}^m$. Il s'agit en effet de l'unique position i lignes au dessus et j colonnes à droite de $O^{\mathfrak{M}}$; on note donc $a_{i,j}$ cet élément.

On en déduit également que pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathfrak{M} \vdash a_{i,j} \mathcal{H} a_{i,j+1} \wedge a_{i,j} \mathcal{V} a_{i+1,j}$. On déduit alors des trois derniers axiomes de Th que placer à la position $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ l'unique tuile t telle que $\mathfrak{M} \vdash t(a_{i,j})$ donne un T -pavage du plan, ce qui conclut.

Preuve 2 (proposition 1). Supposons que la conjecture de Wang est vrai.

Considérons l'algorithme, étant donné un ensemble fini T de tuiles de Wang, consistant à tester, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, tous les T -coloriages possibles de $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, jusqu'à soit trouver un T -pavage prolongeable en T -pavage périodique du plan, auquel cas on accepte, soit trouver un n tel qu'aucun des T -coloriages de $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ n'est un T -pavage, auquel cas on rejette.

Soit T un ensemble fini de tuiles. Il y a deux cas de figures possibles :

- Soit T ne pave pas le plan, auquel cas le lemme 1 assure que l'algorithme rejette.
- Soit T pave le plan, auquel cas la conjecture de Wang assure qu'il existe un T -pavage périodique, et l'algorithme accepte.

Ainsi, cet algorithme décide le problème du domino.

2.2

3 Pavage apériodique pour 11 tuiles et 4 couleurs

Définition 3 (Transducteur). Un transducteur τ est un automate qui lit une bande d'entrée bifinie et écrit sur une bande de sortie bifinie

On peut voir un pavage comme un transducteur.

En effet, $\forall t = (w, e, s, n) \in T$, on dit qu'il y a une transition de l'état w vers l'état e qui lit n et écrit s

Définition 4 ($w\tau w'$). On dit que $w\tau w'$ si w' est une bande de sortie pour la bande d'entrée w et le transducteur τ

Définition 5 (Run). Une run d'un transducteur τ sur I un intervalle de \mathbb{Z} est une suite de mots bifinis $(w_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I, w_i \tau w_{i+1}$

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle

On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante :

Proposition 2. *Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si $\exists w$ mot bifini, $k \in \mathbb{N}$, avec $w\tau^k w'$*

Définition 6 (Equivalence de 2 ensembles de Wang). On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs

Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation

càd ssi $\forall w, w', w\tau w' \iff w\tau' w'$

Définition 7 (Simulation d'un transducteur). Soit $\tau = (H, V, T)$ un transducteur

Une simulation R est une relation sur H telle que

$uRu' \iff \forall v \in H, a, b \in V$ avec $(u, v, a, b) \in T, \exists v' \in V, (u', v', a, b) \in T$

Une bisimulation est simulation R telle que R^{-1} soit une relation

La relation de bisimilarité (qui est la plus grande bisimulation) est une relation d'équivalence.