Pavages périodiques apériodiques du plan

Matteo Wei et Nathan Boyer

22 décembre 2023

1 Introduction

Définition 1 (Ensemble de Wang)**.** Un ensembles de Wang est un triplet (H,V,T) où H et V sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où $T \subseteq H^2 * V^2$ est l'ensemble des dominos

Définition 2 (Pavage)**.** Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et τ un ensemble de Wang
Un pavage de X par τ est une fonction $f : X \to T$ avec :
$\forall (x, y) \in X, f(x, y)_e = f(x + 1, y)_w et f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s$
Un pavage du plan par τ est un pavage de $\mathbb{Z}^2$
On dit que τ est périodique s'il existe un pavage du plan périodique par τ
(càd que $\exists (x, y) \in Z^2 \setminus (0, 0), \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x, y) = f(x + u, y + v)$)
On dit que τ est apériodique s'il existe au moins un pavage du plan par τ mais que tous ces pavages ne sont pas périodiques

2 Indécidabilité du problème du domino

2.1 Le problème du domino

Définition 3 (Problème du domino)**.** Existe-t-il un algorithme qui, étant donné un ensemble fini de tuiles de Wang, décide s'il existe un pavage du plan avec ces tuiles ?

Proposition 1. *La conjecture de Wang implique que le problème du domino est décidable.*

Lemme 1 (compacité)**.** *Soit T un ensemble fini de tuiles de Wang. Alors T pave le plan si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.*

Preuve 1 (lemme 1)*.* Le sens direct est trivial. Pour le sens réciproque, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.
On fixe un ensemble dénombrable de variables V et considère le langage contenant un symbole de constante O, deux symboles de relations binaires $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$, ainsi que, pour chaque tuile $t \in T$, un symbole de relation unaire aussi noté t.

On note $T_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t,u) \in T^2$ tels que la couleur de droite de t est la couleur de gauche de u. De même, on note $T_{\mathcal{V}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t,u) \in T^2$ tels que la couleur du haut de t est la couleur du bas de u.
On propose l'axiomatisation Th du premier ordre suivante pour les T-pavages :

$$\forall x \forall y (x \mathrel{\mathcal{H}} y \to \forall z ((x \mathrel{\mathcal{H}} z \to y = z) \wedge (z \mathrel{\mathcal{H}} y \to x = z))) \tag{$\varphi_{\mathcal{H}}$}$$

$$\forall x \forall y (x \mathrel{\mathcal{V}} y \to \forall z ((x \mathrel{\mathcal{V}} z \to y = z) \wedge (z \mathrel{\mathcal{V}} y \to x = z))) \tag{$\varphi_{\mathcal{V}}$}$$

$$\forall x \bigvee_{t \in T} \Big(t(x) \wedge \bigwedge_{u \in T \setminus \{t\}} \neg u(x) \Big) \tag{ψ_{un}}$$

$$\forall x \forall y \Big(x \mathrel{\mathcal{H}} y \to \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{H}}} (t(x) \wedge u(y)) \Big) \tag{$\psi_{\mathcal{H}}$}$$

$$\forall y \Big(x \mathrel{\mathcal{V}} y \to \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{V}}} (t(x) \wedge u(y)) \Big) \tag{$\psi_{\mathcal{V}}$}$$

Les variables s'incarnent en des positions sur lesquelles les tuiles sont placées. Les formules $\varphi.$ axiomatisent le réseau entier du plan, et les formules $\psi.$ correspondent au placement des tuiles sur les cases.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons

$$x_{0,0} = O \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n} \bigwedge_{j=-n}^{n-1} x_{i,j} \mathrel{\mathcal{H}} x_{i,j+1} \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n-1} \bigwedge_{j=-n}^{n} x_{i,j} \mathrel{\mathcal{V}} x_{i+1,j} \tag{θ_n}$$

et notons $\theta'_n = \exists (x_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \theta_n$.
L'hypothèse que T pave des carrés de taille arbitrairement grande donne en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Th} \cup \{\theta'_n\}$ admet un modèle (il suffit de prendre un pavage d'un carré C_n de taille $2n+1 \times 2n+1$ et de prendre pour O^{C_n} le centre du carré). On en déduit que $\mathrm{Th} \cup \{\, \theta'_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ est finiment consistante, donc consistante par compacité de la logique du premier ordre. Fixons-en donc un modèle $\mathfrak{M}$, dont on note M l'ensemble sous-jacent.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\varphi_{\mathcal{H}}$ et $\varphi_{\mathcal{V}}$ impliquent que pour $n \in \mathbb{N}$ il n'y a qu'un seul $(a^n_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \in M^{(2n+1)^2}$ tel que $\mathfrak{M} \vdash \theta_n \Big((a_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \in M^{(2n+1)^2} \Big)$, et de plus que pour $m \geqslant n$, et $-n \leqslant i,j \leqslant n$, on a $a^n_{i,j} = a^m_{i,j}$. Il s'agit en effet de l'unique position i lignes au dessus et j colonnes à droite de $O^{\mathfrak{M}}$; on note donc $a_{i,j}$ cet élément.
On en déduit également que pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathfrak{M} \vdash a_{i,j} \mathrel{\mathcal{H}} a_{i,j+1} \wedge a_{i,j} \mathrel{\mathcal{V}} a_{i+1,j}$. On déduit alors des trois derniers axiomes de Th que placer à la position $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ l'unique tuile t telle que $\mathfrak{M} \vdash t(a_{i,j})$ donne un T-pavage du plan, ce qui conclut.

Preuve 2 (proposition 1). Supposons que la conjecture de Wang est vrai.
Considérons l'algorithme, étant donné un ensemble fini T de tuiles de Wang, consistant à tester, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, tous les T-coloriages possibles de $[\![0,n]\!]^2$, jusqu'à soit trouver un T-pavage prolongeable en T-pavage périodique du plan, auquel cas on accepte, soit trouver un n tel qu'aucun des T-coloriages de $[\![0,n]\!]^2$ n'est un T-pavage, auquel cas on rejette.
Soit T un ensemble fini de tuiles. Il y a deux cas de figures possibles :

— Soit T ne pave pas le plan, auquel cas le lemme 1 assure que l'algorithme rejette.
— Soit T pave le plan, auquel cas la conjecture de Wang assure qu'il existe un T-pavage périodique, et l'algorithme accepte.

Ainsi, cet algorithme décide le problème du domino.

2.2

3 Pavage apériodique pour 11 tuiles et 4 couleurs

Définition 4 (Transducteur)**.** Un transducteur τ est un automate qui lit une bande d'entrée bifinie et écrit sur une bande de sortie bifinie

On peut voir un pavage comme un transducteur.
En effet, $\forall t = (w, e, s, n) \in T$, on dit qu'il y a une transition de l'état w vers l'état e qui lit n et écrit s

Définition 5 ($w\tau w'$)**.** On dit que $w\tau w'$ si w' est une bande de sortie pour la bande d'entrée w et le transducteur τ

Définition 6 (Run)**.** Une run d'un transducteur τ sur I un intervalle de $\mathbb{Z}$ est une suite de mots bifinis $(w_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, w_i \tau w_{i+1}$

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle
On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante :

Proposition 2. *Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si* $\exists w$ *mot bifini* $, k \in \mathbb{N},$ *avec* $w\tau^k w'$

Définition 7 (Equivalence de 2 ensembles de Wang)**.** On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs
Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation
càd ssi $\forall w, w',\ w\tau w' \iff w\tau' w'$

Définition 8 (Simulation d'un transducteur)**.** Soit $\tau = (H, V, T)$ un transducteur
Une simulation R est une relation sur H telle que
$uRu' \iff \forall v \in H, a, b \in V$ avec $(u, v, a, b) \in T, \exists v' \in V, (u', v', a, b) \in T$
Une bisimulation est simulation R telle que R^{-1} soit une relation
La relation de bisimilarité (qui est la plus grande bisimulation) est une relation d'équivalence.