Definition[section]

Pavages périodiques apériodiques du plan

Matteo Wei et Nathan Boyer

22 décembre 2023

1 Introduction

2 Indécidabilité du problème du domino

2.1 Le problème du domino

Définition 1 (Problème du domino)**.** Existe-t-il un algorithme qui, étant donné un ensemble fini de tuiles de Wang, décide s'il existe un pavage du plan avec ces tuiles ?

Proposition 1. *La conjecture de Wang implique que le problème du domino est décidable.*

Lemme 1 (compacité)**.** *Soit T un ensemble fini de tuiles de Wang. Alors T pave le plan si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.*

Preuve 1 (?THM? **??**)**.** Le sens direct est trivial. Pour le sens réciproque, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T pave un carré de taille $n \times n$.
On fixe un ensemble dénombrable de variables V et considère le langage contenant un symbole de constante O, deux symboles de relations binaires $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$, ainsi que, pour chaque tuile $t \in T$, un symbole de relation unaire aussi noté t.
On note $T_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t, u) \in T^2$ tels que la couleur de droite de t est la couleur de gauche de u. De même, on note $T_{\mathcal{V}}$ l'ensemble des couples de tuiles $(t, u) \in T^2$ tels que la couleur du haut de t est la couleur du bas de u.
On propose l'axiomatisation Th du premier ordre suivante pour les T-pavages :

$$\forall x \forall y (x \; \mathcal{H} \; y \to \forall z ((x \; \mathcal{H} \; z \to y = z) \wedge (z \; \mathcal{H} \; y \to x = z))) \tag{$\varphi_{\mathcal{H}}$}$$

$$\forall x \forall y (x \; \mathcal{V} \; y \to \forall z ((x \; \mathcal{V} \; z \to y = z) \wedge (z \; \mathcal{V} \; y \to x = z))) \tag{$\varphi_{\mathcal{V}}$}$$

$$\forall x \bigvee_{t \in T} \Big(t(x) \wedge \bigwedge_{u \in T \setminus \{t\}} \neg u(x) \Big) \tag{ψ_{un}}$$

$$\forall x \forall y \Big(x \; \mathcal{H} \; y \to \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{H}}} (t(x) \wedge u(y)) \Big) \tag{$\psi_{\mathcal{H}}$}$$

$$\forall y \Big(x \; \mathcal{V} \; y \to \bigvee_{(t,u) \in T_{\mathcal{V}}} (t(x) \wedge u(y)) \Big) \tag{$\psi_{\mathcal{V}}$}$$

Les variables s'incarnent en des positions sur lesquelles les tuiles sont placées. Les formules $\varphi.$ axiomatisent le réseau entier du plan, et les formules $\psi.$ correspondent au placement des tuiles sur les cases.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons

$$x_{0,0} = O \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n} \bigwedge_{j=-n}^{n-1} x_{i,j} \mathcal{H} x_{i,j+1} \wedge \bigwedge_{i=-n}^{n-1} \bigwedge_{j=-n}^{n} x_{i,j} \mathcal{V} x_{i+1,j} \qquad (\theta_n)$$

et notons $\theta'_n = \exists (x_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \theta_n$.
L'hypothèse que T pave des carrés de taille arbitrairement grande donne en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Th} \cup \{\theta'_n\}$ admet un modèle (il suffit de prendre un pavage d'un carré C_n de taille $2n+1 \times 2n+1$ et de prendre pour O^{C_n} le centre du carré). On en déduit que $\mathrm{Th} \cup \{ \theta'_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est finiment consistante, donc consistante par compacité de la logique du premier ordre. Fixons-en donc un modèle $\mathfrak{M}$, dont on note M l'ensemble sous-jacent.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\varphi_{\mathcal{H}}$ et $\varphi_{\mathcal{V}}$ impliquent que pour $n \in \mathbb{N}$ il n'y a qu'un seul $(a^n_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \in M^{(2n+1)^2}$ tel que $\mathfrak{M} \vdash \theta_n \left((a_{i,j})_{-n \leqslant i,j \leqslant n} \in M^{(2n+1)^2} \right)$, et de plus que pour $m \geqslant n$, et $-n \leqslant i,j \leqslant n$, on a $a^n_{i,j} = a^m_{i,j}$. Il s'agit en effet de l'unique position i lignes au dessus et j colonnes à droite de $O^{\mathfrak{M}}$; on note donc $a_{i,j}$ cet élément.
On en déduit également que pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathfrak{M} \vdash a_{i,j} \mathcal{H} a_{i,j+1} \wedge a_{i,j} \mathcal{V} a_{i+1,j}$. On déduit alors des trois derniers axiomes de Th que placer à la position $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ l'unique tuile t telle que $\mathfrak{M} \vdash t(a_{i,j})$ donne un T-pavage du plan, ce qui conclut.

Preuve 2 (?THM? **??**). Supposons que la conjecture de Wang est vrai.
Considérons l'algorithme, étant donné un ensemble fini T de tuiles de Wang, consistant à tester, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, tous les T-coloriages possibles de $[\![0,n]\!]^2$, jusqu'à soit trouver un T-pavage prolongeable en T-pavage périodique du plan, auquel cas on accepte, soit trouver un n tel qu'aucun des T-coloriages de $[\![0,n]\!]^2$ n'est un T-pavage, auquel cas on rejette.
Soit T un ensemble fini de tuiles. Il y a deux cas de figures possibles :
- Soit T ne pave pas le plan, auquel cas le ?THM? **??** assure que l'algorithme rejette.
- Soit T pave le plan, auquel cas la conjecture de Wang assure qu'il existe un T-pavage périodique, et l'algorithme accepte.

Ainsi, cet algorithme décide le problème du domino.

2.2

3 Pavage apériodique pour 11 tuiles et 4 couleurs

Définition 2 (Transducteur)**.** Un transducteur est un automate qui lit un mot bifini et écrit sur une bande bifinie

On peut voir un pavage comme un transducteur.
En effet, $\forall t \in T$