

Le problème des dominos de Wang

Matteo Wei et Nathan Boyer

2024

Table des matières

Introduction

Indécidabilité du problème du domino

Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang apériodique

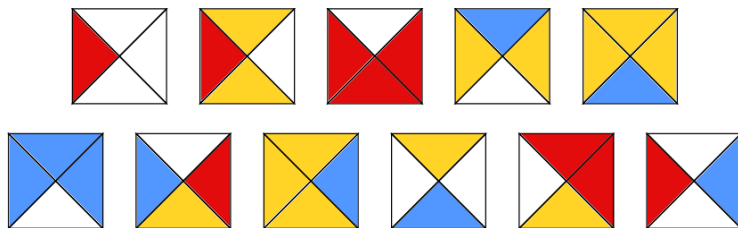
Définitions préalables

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Ensemble de Wang

Definition

Un *ensemble de Wang* est un triplet (H, V, T) où H et V sont respectivement les couleurs horizontales et verticales et où $T \subseteq H^2 * V^2$ est l'ensemble des dominos. On appellera parfois aussi abusivement ensemble de Wang l'ensemble des dominos T .



Pavage

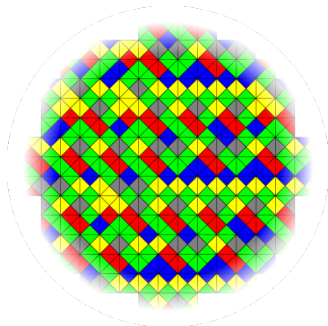
Definition

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ et τ un ensemble de Wang.

Un pavage de X par τ est une fonction $f : X \rightarrow T$ avec:

$$\forall (x, y) \in X, f(x, y)_e = f(x + 1, y)_w \wedge f(x, y)_n = f(x, y + 1)_s.$$

Un pavage du plan par τ est un pavage de \mathbb{Z}^2 .



Pavage périodique et apériodique

Definition

On dit que τ est périodique s'il existe un pavage du plan périodique par τ (càd tel que

$$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^{*2}, \forall(x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x, y) = f(x + u, y) = f(x, y + v)).$$

On dit que τ est apériodique s'il existe au moins un pavage du plan par τ mais que tous ses pavages ne sont pas périodiques.

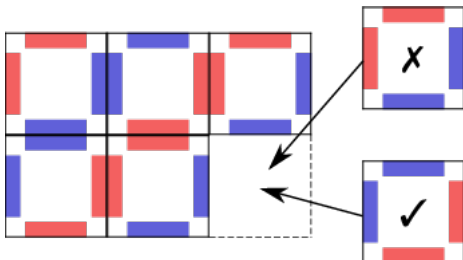


Table des matières

Introduction

Indécidabilité du problème du domino

Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang
apériodique

Définitions préalables

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Table des matières

Introduction

Indécidabilité du problème du domino

Nombre minimal de dominos pour un ensemble de Wang
apériodique

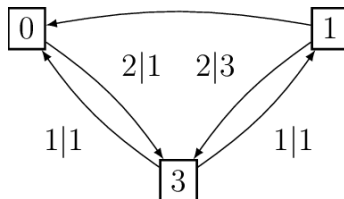
Définitions préalables

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Transducteur

Definition

Un transducteur τ est un automate qui lit une bande d'entrée bfinie et écrit sur une bande de sortie bfinie.



Définition

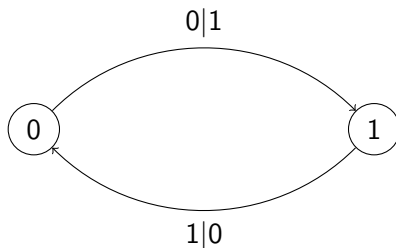
On dit que $w\tau w'$ si w' est une bande de sortie pour la bande d'entrée w et le transducteur τ .

Lien entre dominos et transducteurs

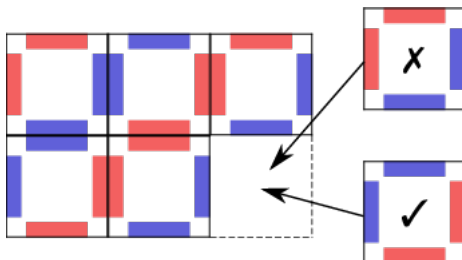
On peut voir un pavage comme un transducteur.

En effet, $\forall t = (w, e, s, n) \in T$, on dit qu'il y a une transition de l'état w vers l'état e qui lit n et écrit s .

Ainsi, l'ensemble de wang vu en Introduction se réécrit



Ensemble de Wang représenté



Reformulation du problème initial

On définit également la composition de 2 transducteurs de manière naturelle.

On peut alors reformuler le problème initial de la façon suivante:

Proposition

Un ensemble de Wang admet un pavage périodique si et seulement si $\exists w$ mot bifini, $k \in \mathbb{N}$, avec $w\tau^k w$.

Equivalence entre 2 ensembles de Wang

On ne s'intéresse plus aux ensembles de Wang que sous le point de vue des transducteurs.

Ainsi, 2 ensembles de Wang sont équivalents ssi leurs transducteurs définissent la même relation, c-à-d ssi $\forall w, w', w\tau w' \iff w\tau' w'$.

Générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10

Pour commencer, on va chercher à générer tous les ensembles de Wang de cardinal au plus 10 (à l'équivalence définie plus tôt près)

Definition

Soit τ un ensemble de Wang. On dit que τ est minimal apériodique si τ est apériodique et qu'aucun sous-ensemble strict de τ n'est apériodique.