Nathalia Alexandra Perez Rojas 2200023 H1

CONVERSATORIO

3) a) Encuentre los polos y los residuos de las siguientes Funciones.

a.1) $\frac{1}{z^4+5z^2+6}$

Polos: (Valores que anulan el denominador)

$F(z) = \frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)}$

¿En que valores $(z^2+2)(z^2+3) = 0$?

$z^2+2=0$ $z^2+3=0$

$z=-\sqrt{2}\,i$ $z=-\sqrt{3}\,i$

$z=\sqrt{2}\,i$ $z=\sqrt{3}\,i$

Polos de orden 1

Residuos: $\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

$z = +\sqrt{3}\,i$ $k=1$

$Res(f, \sqrt{3}i) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to \sqrt{3}i} \left(\cancel{z-\sqrt{3}i} \frac{x^2}{(x+\sqrt{3}i)\cancel{(x-\sqrt{3}i)}(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)} \right)$

$Res(f, \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ $(\sqrt{3}i)^2 - 3$

$Res(f, -\sqrt{3}) = \lim_{z \to -\sqrt{3}i} \frac{x^2}{(x+\sqrt{3}i)(x^2+2)} = \frac{-\sqrt{3}\,i}{2}$

$z = \sqrt{2}\,i$ $k=1$

$Res(f, \sqrt{2}i) = \lim_{z \to \sqrt{2}i} \left(z - \sqrt{2}i \frac{x^2}{(x^2+3)(x-\sqrt{2}i)} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}}$

$Res(f, -\sqrt{2}) = \lim_{z \to -\sqrt{2}i} \left(z+\sqrt{2}i \frac{x^2}{(x^2+3)(x+\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)} \right) = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} \rightarrow \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^2}$$

b.1) Polos:

$z^2-1=0$ $\qquad z_0=1 \qquad z_0=-1 \qquad k=2$

$z^2=1$

$z=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

b.2) Residuos.

$z_0=1 \qquad k=1$

$$\text{Res}(f,1)=\frac{1}{2-1!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z+1)^2\cancel{(z-1)^2}}\right)$$

$$=1\lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{z\to 1}\cdot -\frac{2}{(z+1)^3}=-\frac{2}{2^3}=\frac{-1}{4}$$

$\text{Res}(f,1)=-1/4$

$$\text{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z+1)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(z+1)^2}(z-1)^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)=\frac{-2}{(z-1)^3}=\frac{-2}{(-1-1)^3}=\frac{-2}{-8}=1/4$$

$\text{Res}(f,-1)=1/4$

b) Evalue las integrales mediante el teorema del residuo.

- $\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}}_{I''} dx.$ Está función es analítica en todos los complejos menos en $x=\pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i$

$I=2\pi i\left(a_{-1(z=\sqrt{3}i)}+a_{-1(z=\sqrt{2}i)}\right)$

$I=2\pi i\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$I=\pi\sqrt{3}-\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,sen(x)}{x^2+a^2}\,dx \qquad a \in \mathbb{R}.$$

$x\,sen(x) \rightarrow$ es continua en todos los Reales

$x^2+a^2=0 \rightarrow$ es continua menos en $\{ai\}$

No se cuenta $-ai$ ya que el intervalo trabajado es de $[0,\infty)$

$x^2=-a^2$

$x=\sqrt{-a^2}$

$x=\pm ai$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,sen(x)}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \text{ Residuo} \qquad F(z)=\frac{z\,sen(z)}{z^2+a^2}$$

¿residuo?

$z=ai \qquad k=1$

$$Res(f,ai)=\lim_{z\to ai}\left(\frac{\cancel{(z-ai)}\,z\,sen(z)}{(z+ai)\cancel{(z-ai)}}\right)$$

$$=\lim_{z\to ai}\left(\frac{z\,sen z}{z+ai}\right)$$

Función par.

$$Res(f,ai)=\frac{1}{2}e^{-a}=\frac{1}{2}\cos(-a)+i\,sen(a).$$

$$I=\cancel{2}\pi i\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cos(a)+i\,sen(a)\right)$$

$$I=\pi i\cos(a)-\pi\,sen(a)$$

2) Las coordenadas elípticas:

$$x=\cosh(w)\cos(v) \qquad y=senh(w)\,sen(v).$$

a) Construya una base de vectores unitarios asociadas a esta transformación.

$$\cosh(w)=\frac{e^{w}+e^{-w}}{2} \qquad senh(w)=\frac{e^{w}-e^{-w}}{2}$$

$$\left(\frac{e^{w}}{2}\cos(v)+\frac{e^{-w}}{2}\cos v\right),\left(\frac{e^{w}}{2}sen(v)-\frac{e^{-w}}{2}sen(v)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos(v)\left[e^{w}+e^{-w}\right],\ \frac{1}{2}sen(v)\left[e^{w}-e^{-w}\right]$$

$$x = \frac{1}{2}\cos(v)\begin{bmatrix} e^{w} \\ e^{-w} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{\omega}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(v) \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(v) \end{bmatrix} + e^{-\omega}\begin{bmatrix} 1/2\cos(v) \\ 1/2\operatorname{sen}(v) \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(v)\begin{bmatrix} e^{w} \\ -e^{-w} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2\cos(v)e^{\omega} & 1/2\cos(v)e^{-\omega} \\ 1/2\operatorname{sen}(v)e^{\omega} & 1/2\operatorname{sen}(v)e^{-\omega} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos^2(v)e^{2\omega} + \frac{1}{2}\cos^2(v)e^{-2\omega}} = \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2(v)\left(e^2 + e^{-2\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(v)\sqrt{e^{2\omega} + e^{-2\omega}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cos(v)e^{\omega}}{\frac{1}{2}\cos(v)\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}}} = \frac{e^{\omega}}{\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}}} + \frac{e^{-\omega}}{\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}}}$$

mismo proceso para el seno.

Base de vectores unitarios $= \begin{bmatrix} e^{\omega}/\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}} & e^{-2\omega}/\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}} & 0 \\ e^{\omega}/\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}} & -e^{-\omega}/\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_{ij}$

b) $|a\rangle = 5\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$

$$A_{ij} \cdot |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{e^{2\omega}+e^{-2\omega}}}\begin{bmatrix} e^{\omega} & e^{-\omega} & 0 \\ e^{\omega} & -e^{-\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$