Tensores: Momento de inercia y PIB Colombiano.

Alfaro Rivera, Valentina [2211702]
Perez Rojas, Nathalia Alexandra [2200023]
Ávila Navarro, Cristian Fernando [2190729]
Universidad Industrial de Santander
Escuela de física

11 de febrero de 2022

Índice

Resumen

En el presente artículo se proporcionará un análisis tensorial tanto de un problema relacionado a un sistema de partículas, como de la distribución en diferentes jurisdicciones del PIB colombiano. El estudio se hizo con la función generadora de los primeros tres momentos, siendo estos la masa total, el momento y el tensor de inercia del sistema del primer problema y mediante el momento de orden dos para el segundo problema, con el fin de encontrar que tan relacionados están entre los distintos campos de inversión del PIB. Además se identificó para los tensores de inercia (ver tensor 4 en R^2 y ver tensor 5 en R^3) y el tensor de covarianza (ver tensor 6 en R^4) los autovalores que representan la densidad de dispersión en el momento de inercia y la distribución del PIB respectivamente en dirección a los autovectores de los mismo.

1. Introducción

1.1. Sobre la inercia

La inercia es la resistencia que oponen los cuerpos a modificar su estado de movimiento o de quietud, ya sea para alterar su velocidad, su rumbo o para detenerse; aunque el término también aplica para las modificaciones de su estado físico. De esta manera, un cuerpo o sistema tendrá una mayor inercia en la medida en que requiera de fuerzas de mayor intensidad para modificar su estado de movimiento o para modificar su estado físico. Las “fuerzas inerciales” son fuerzas.

1.1.1. Tensor de inercia

El tensor de inercia es un tensor de orden 2 que puede representarse de forma matricial o en formato de índices así:

$$\vec{I_0} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & -P_{1,2} & -P_{1,3} \\ -P_{2,1} & I_{2,2} & -P_{2,3} \\ -P_{3,1} & -P_{3,2} & I_{3,3} \end{bmatrix} = I_{i,j} = \int d(r^2\delta_{ij} - x_i x_j) \quad i,j = 1,2,3$$

A cada punto del espacio se le asigna un tensor de inercia del sólido calculado en dicho punto y este se asocia al eje de rotación por lo que si se cambia el sistema de referencia (el origen en el plano cartesiano, por ejemplo), entonces, la distancia que separa la masa del eje, cambiará.

Sus elementos dependen de la base vectorial en que se exprese pero cabe resaltar que el tensor no depende del sistema de referencia. Ahora bien, la matriz de inercia es simétrica con coeficientes reales; por tanto, es diagonalizable y sus autovalores son reales. Esto significa que siempre se puede encontrar una base cartesiana tal que en la matriz de inercia los autovalores son los momentos principales de inercia.

1.2. Sobre el PIB en Colombia

El producto interno bruto (PIB), también conocido como producto interior o producto bruto interno (PBI), es una magnitud macroeconómica que expresa el valor monetario de la producción de bienes y servicios de demanda final de un país o región durante un período determinado, normalmente de un año o trimestrales.

El PIB visto desde el enfoque de la producción, es posible desagregarlo por ramas de actividad económica para analizar sus desempeños o aportes al crecimiento económico del país.

2. Metodología

Esta asignación está compuesta por dos partes; la primera en la cual se necesita encontrar los tres primeros momentos de inercia y en la segunda donde se quiere encontrar la matriz de covarianza entre los diferentes porcentajes de inversión del PBI. Para ambos casos, al final del desarrollo se obtienen tensores a los cuales se les calcula los autovalores y sus respectivos autovectores para finalmente hallar la matriz cambio de base desde la que se entregaron los datos hasta la base que forman los autovectores encontrados.

2.1. Sistema discreto de partículas

Con el fin de manipular los datos de masa y posiciones dados de un sistema de partículas y con ayuda de Python como herramienta principal en el desarrollo de la caracterización del sistema, se define la función masa $m(|r_i\rangle)$ como un sencillo *array* [1] así como el conjunto de todas las posiciones $|r_i\rangle$ con $0 \leq i \leq k$ donde $k = 1534$ es la cantidad de partículas que conforman el sistema y por ende la cantidad de datos que conforman el *array* de las masas, m_i, de acuerdo al archivo de datos entregado.

Luego, para poder caracterizar más allá de las masas y posiciones el sistema, se trabaja la función generadora de momentos dada por:

$$\mu_n = \int f(x)(x - \bar{x})^n dx, \tag{1}$$

con la cual se encuentra la masa total del sistema para $n = 0$ siendo f una función escalar tal que $f(|r\rangle) = m$ es la masa de la partícula ubicada en la posición $|r\rangle$ respecto al sistema coordenado cartesiano. Estadísticamente se trata de la función densidad de probabilidad, de la masa que pueda tomar una partícula. Además, se encuentra del sistema su centro de masa respecto a la posición promedio, $|\bar{r}\rangle = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\rangle$ (esto para $n = 1$), y finalmente de μ_2 se obtendrá en tensor momento de inercia del sistema y ya que el tensor se representa por una matriz cuadrada, se pueden encontrar los valores y vectores propios quienes brindan información adicional sobre las partículas.

2.2. PIB Colombiano

Para la solución del segundo punto se buscaron los valores de producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el país desde el 2003 hasta el 2018 [4] en: salud, defensa, educación y ciencia y tecnología (ver tabla 2). Con ellos se creó un código en Python que permite con dichos valores generar 4 diferentes *arrays* [1] y con estos poder encontrar la matriz de covarianza, la matriz de correlación así:

- Si es con el mismo sector

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_j^i - \bar{x}^j)^2 \tag{2}$$

- Si es entre diferentes sectores

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_j^i - \bar{x}^j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \tag{3}$$

Siendo N la cantidad de valores en cada sector, x_i cada valor en los 15 años y $\bar{x}$ el promedio de los valores en los 15 años.

Año	D %	E %	S %	CT %
2003	3,464 %	4,325 %	4,61 %	0,156 %
2004	3,465 %	4,506 %	4,41 %	0,151 %
2005	3,376 %	4,449 %	4,50 %	0,154 %
2006	3,141 %	4,536 %	4,71 %	0,150 %
2007	3,062 %	4,477 %	4,75 %	0,185 %
2008	3,209 %	4,470 %	4,91 %	0,201 %
2009	3,071 %	4,629 %	5,44 %	0,196 %
2010	3,110 %	4,879 %	5,29 %	0,195 %
2011	3,108 %	4,370 %	5,15 %	0,206 %
2012	3,274 %	4,466 %	4,98 %	0,234 %
2013	3,159 %	4,834 %	5,30 %	0,271 %
2014	3,082 %	4,777 %	5,47 %	0,306 %
2015	3,643 %	3,939 %	5,74 %	0,290 %
2016	3,885 %	4,083 %	5,73 %	0,267 %
2017	3,745 %	3,917 %	5,88 %	0,243 %
2018	3,267 %	4,021 %	5,89 %	0,235 %

Tabla 1: Porcentaje en defensa (D), educación (E), salud (S) y ciencia y tecnología (CT).

3. Tratamiento de datos

3.1. Sistema discreto de partículas

Para este apartado, se suministra un volumen amplio de correlaciones entre masas y partículas. Tomando diferentes órdenes del tensor asociado a cada bloque de información, se puede llegar a diferentes valores que representen diversas cantidades físicas.

Si se considera el tensor de orden cero, se tiene:

$$\mu_0 = \sum_{i=0}^{k} m_i = 4627{,}0[kg]$$

y se interpreta como la masa total del sistema. Luego, con

$$\mu_1 = \sum_{i=0}^{k} m_i(|r_i\rangle - |\bar{r}\rangle)$$

se tiene a μ_1/μ_0 como el vector posición del centro de masa del sistema. Adicionalmente, se puede analizar el primer momento del sistema tanto en el plano (μ_1) o directamente en el espacio (μ_1'):

$$\mu_1 = \langle 17773{,}7306, \quad 4850{,}6347\rangle$$
$$\mu_1' = \langle 17773{,}7305, \quad 4850{,}6347, \quad 2036{,}2283\rangle$$

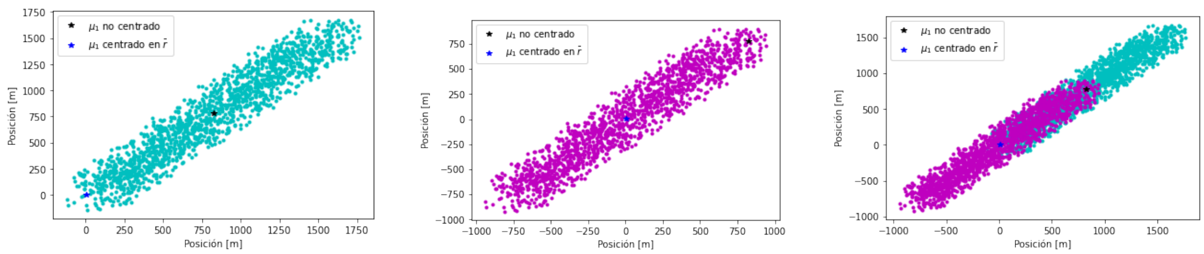

Figura 1: Representación del momento del sistema de partículas.

Finalmente, se reconoce el tensor de inercia del segundo momento de la misma forma que el primer momento; tanto para el sistema únicamente considerando sus primeras dos coordenadas (μ_2) como considerando todas sus coordenadas para la localización en el espacio (μ_2').

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 958603863{,}3765 & 911766544{,}1163 \\ 911766544{,}1163 & 963665233{,}3609 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mu_2' = \begin{bmatrix} 958603863{,}3765 & 911766544{,}1163 & -7134226{,}8564 \\ 911766544{,}1163 & 963665233{,}3609 & -1927462{,}5926 \\ -7134226{,}85640 & -1927462{,}5926 & 101844216{,}7918 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora bien, para encontrar los autovalores con sus autovectores asociados primero se calcula el polinomio característico $det(\mu_2 - \lambda I) = 0$, sabiendo que I es la matriz identidad y que $\lambda \in R$.

$$\lambda^2 - 19,22 \times 10^8\lambda + 9,24 \times 10^{16} = 0$$

De lo anterior se tienen los autovalores:

$$\lambda_1 = 1{,}87 \times 10^9 \quad \wedge \quad \lambda_2 = 4{,}93 \times 10^7$$

Donde para cada uno se tiene el conjunto base de los vectores propios asociados así:

$$H(\lambda_1) = \{(-0{,}7080, \quad -0{,}7061)\}$$
$$H(\lambda_2) = \{(0{,}7061, \quad -0{,}7080)\}$$

Análogamente para el polinomio característico del tensor inercia del sistema en el espacio; $det(\mu_2' - \lambda I) = 0$, se derivan sus autovalores y autovectores tales que son:

$$H(\lambda_1) = H(1{,}87 \times 10^9) = \{(0{,}7061, \quad 0{,}7065, \quad -0{,}0469)\}$$
$$H(\lambda_2) = H(4{,}91 \times 10^9) = \{(0,7080, \quad -0{,}7042, \quad 0{,}0518)\}$$
$$H(\lambda_3) = H(1{,}02 \times 10^9) = \{(-0{,}0036, \quad 0{,}0698, \quad 0{,}9975)\}$$

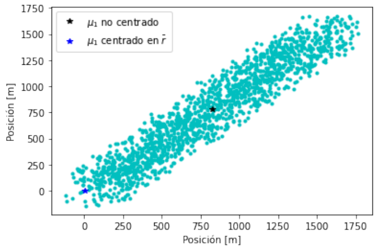

Figura 2: Representación superposición de los autovectores del sistema de partículas.

Para hacer un cambio de base de cartesiana a base de autovectores, primero se toma un vector genérico y se hace la combinación lineal con los autovectores para aplicar la transformación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -0{,}7080 \\ -0{,}7061 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0{,}7061 \\ -0{,}7080 \end{bmatrix}$$

Entonces se pasa a hallar la matriz de transformación, usando los autovectores en el arreglo matricial:

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} -0{,}7080 & 0{,}7061 \\ -0{,}7061 & -0{,}7080 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un operador que va de una base canónica a una primada, convenientemente se utilizará la siguiente relación: $N^{-1} \left| e_i \right\rangle = \left\langle \widetilde{e}_i \right|$. Para hallar la inversa, se empleará la adjunta y el determinante de N. Como el $det(N) \approx 1$, entonces, $Adj(N) = N^T$.

Por tanto la matriz de la base canónica a la base de autovectores queda:

$$B_c = \begin{bmatrix} -0{,}7080 & -0{,}7061 \\ 0{,}7061 & -0{,}7080 \end{bmatrix}$$

Para el espacio se tiene: $det(N) \approx -1$ y $Adj(N) = -N^T$, entonces la matriz transformación queda:

$$B_c^{'} = \begin{bmatrix} -0{,}7080 & -0{,}7080 & -0{,}0036 \\ 0{,}7065 & -0{,}7042 & 0{,}0698 \\ -0{,}0469 & 0{,}0518 & 0{,}9975 \end{bmatrix}$$

3.2. PBI Colombiano

Usando Python para la creación de un Código que permita encontrar la covarianza y así mismo poner los valores en una matriz. Se definieron los arrays del porcentaje de PBI usados en defensa , salud, educación y ciencia y tecnología (ver tabla 1) en los 15 años transcurridos desde el 2003 hasta el 2018.

Con estos arrays definidos se puede encontrar la media de cada porcentaje y con esto la covarianza con las formulas 2 y 3, tales que son:

$$\%D = 0{,}0331$$

$$\%S = 0{,}0517$$

$$\%E = 0{,}0441$$

$$\%C\&T = 0{,}00215$$

$$\frac{1}{16} \sum_{1}^{N} (x_j^i - \bar{x}^j)^2$$

y

$$\frac{1}{16}\sum_{1}^{N}(x_j^i-\bar{x}^j)(x_{ik}-\bar{x}_k)$$

Los resultados después de realizar todas las operaciones dan la matriz de covarianza y los respectivos valores propios con sus vectores propios son:

$$T_0=\begin{bmatrix} 6{,}2394\times10^{-6} & 3{,}6479\times10^{-6} & -5{,}4420\times10^{-6} & 2{,}7170\times10^{-7}\\ 3{,}6479\times10^{-6} & 2{,}3045\times10^{-5} & -6{,}0274\times10^{-6} & 1{,}8653\times10^{-6}\\ -5{,}4420\times10^{-6} & -6{,}0274\times10^{-6} & 8{,}4457\times10^{-6} & -2{,}7148\times10^{-7}\\ 2{,}7170\times10^{-7} & 1{,}8653\times10^{-6} & 2{,}4219\times10^{-6} & 2{,}421\times10^{-7} \end{bmatrix} \tag{6}$$

- $\lambda_1=2{,}6741\cdot10^{-5}\quad |(\lambda_1)\rangle=(0{,}2576,0{,}6084,0{,}727,-0{,}0443)$
- $\lambda_2=9{,}4150\cdot10^{-6}\quad |(\lambda_2)\rangle=(0{,}8901,-0{,}4400,0{,}0307,-0{,}0894)$
- $\lambda_3=1{,}7689\cdot10^{-6}\quad |(\lambda_3)\rangle=(-0{,}3707,-0{,}6544,0{,}6314,-0{,}0608)$
- $\lambda_4=4{,}7202\cdot10^{-8}\quad |(\lambda_4)\rangle=(0{,}0619,-0{,}0887,0{,}2671,0{,}9931)$

Matriz de correlación:

$$\begin{bmatrix} 264{,}8815 & 71{,}3735 & -233{,}6213 & 499{,}4658\\ 118{,}9646 & 163{,}6072 & -160{,}6256 & 1605{,}5675\\ -264{,}7470 & -106{,}0756 & 239{,}2330 & -430{,}9101\\ 94{,}8462 & 166{,}1563 & -70{,}14513 & 1523{,}9042 \end{bmatrix}$$

Ahora, se halla la matriz base de autovectores y autovalores de acuerdo a la información ya presentada.

$$\begin{bmatrix} 0{,}2576 & 0{,}8901 & -0{,}3707 & 0{,}0619\\ 0{,}6084 & -0{,}4401 & -0{,}6544 & -0{,}0887\\ 0{,}7273 & 0{,}03076 & 0{,}6314 & 0{,}2671\\ -0{,}0443 & -0{,}0894 & -0{,}0608 & 0{,}9931 \end{bmatrix}$$

Con esto en mente, pasamos a hacer la representación en la nueva base (la de autovectores).

$$\begin{bmatrix} -3{,}8583\times10^{-7} & 1{,}0025\times10^{-5} & 9{,}9111\times10^{-7} & 9{,}5566\times10^{-7}\\ 3{,}6256\times10^{-6} & -7{,}5275\times10^{-6} & -1{,}9967\times10^{-6} & -6{,}2925\times10^{-7}\\ -8{,}3802\times10^{-6} & -2{,}0882\times10^{-5} & 1{,}107\times10^{-5} & -1{,}557\times10^{-6}\\ 6{,}9675\times10^{-8} & 3{,}6865\times10^{-7} & 2{,}9811\times10^{-6} & 1{,}3448\times10^{-7} \end{bmatrix}$$

Ahora, resolviendo los sistemas de ecuaciones subyacentes de igualar M'=MT, nos da la matriz de transformación:

$$T=\begin{bmatrix} 1{,}53690 & 5{,}6371 & -0{,}6850 & 0{,}4842\\ 7{,}4717 & 13{,}3336 & -7{,}3152 & 0{,}9666\\ 2{,}5990 & 5{,}4638 & -1{,}6043 & 0{,}4378\\ -84{,}9731 & -162{,}1345 & 85{,}4613 & -11{,}8116 \end{bmatrix}$$

4. Análisis de resultados y conclusiones

4.1. Sistema discreto de partículas

Se comprendió la aplicación física de los momentos 1 y 2 de una función, llegando a entender la relación entre dichas cantidades con la media y la varianza. Resulta evidente verificar que dado el momento definido por la ecuación 1 se interpreta a x como la variable o partícula con su función de densidad de probabilidad, la cual representa la masa que puede llegar a tener la partícula en correspondencia su posición. Entonces se tendrá, para $n = 0$, la masa total del sistema; pues se considera también el conjunto de todas las partículas como un sistema, que por ser discreto, de define y calculan los momentos con un sumatorio de las partículas (caracterizadas por posición y masa) que pueda tomar la variable.

En segunda instancia, se tiene un primer momento, la media estadística, que en otras palabras es el promedio ponderado de las diferentes masas que puede poseer una partícula. Esto explica que μ_2 sea un vector que representa el momento del sistema y que al ser dividido (cada componente) por la masa total del sistema se obtenga la posición del centro de masa.

Cabe resaltar que de la ecuación 1, cuando $\bar{x} = 0$ se dice que el sistema no está centrado pero para esta ocasión se tiene a $\bar{x} = |\bar{r}\rangle$ como la media de todas las posiciones que puede tener una partícula del sistema. Sin embargo, no se puede decir que el sistema esté centrado en media pues se dice que ello ocurre cuando $\bar{x} = \mu_1$ y además, de lo anterior siempre se tiene que el primer momento centrado es cero [5]. En este caso, el momento es centrado en la posición promedio de las partículas del sistema.

De lo anterior y aclarando un poco más lo que representa μ_1 para el sistema de partículas, el $\bar{x}$ vendría siendo la posición respecto a la que se calcula el centro de masa del sistema. Como se puede observar la posición del centro de masa en la figura 1.c) depende respecto a qué .ºrigen"se tome aunque representan lo mismo para el sistema de partículas pues $|r_i = |\bar{r}\rangle + |r_i'\rangle$ con $|r_i'\rangle$ la posición relativa de la partícula respecto al la posición promedio, según Galileo.

Por otro lado se tiene el segundo momento que de acuerdo a la ecuación del momento inercial $M_I = mR^2$ se dice μ_2 como el tensor del momento inercial. Esto es porque las componentes de este tensor dan la medida inercia del sistema respecto a los ejes x, y y z, o sea, I_{xx}, I_{yy} y I_{zz} respectivamente. Singularmente ocurre que por ejemplo para los ejes cruzados $I_{xz} = I_{zx}$ pues xz representa el mismo eje denotado por zx por lo que la inercia respecto a "estos" ejes es la misma, de modo que la matriz que representa el tensor será simétrica.

La matriz como tal que se obtiene, representa de igual forma la varianza como se explicó en un principio por ser el segundo momento, esto es: una medida del grado de dispersión de los diferentes valores de masa puede tener la partícula respecto a la posición en la que se encuentre. Los elementos diagonales son del mismo tipo de sumas de cuadrados que aparecen en la varianza univariante y los elementos fuera de la diagonal se corresponden con sumas de productos, lo que precisa ser un resultado interesante por ser un primer acercamiento al análisis multivariable de la varianza.

Finalmente se ilustra en la figura 2 los vectores en la dirección de los ejes principales del momento inercial del sistema. Se dice de estos, que si el sistema rota sobre estos ejes, la orientación del sistema no cambiará su dirección. Además, se puede notar la relevancia de sus direcciones pues representan también, al ser multiplicados (cada componente) por su respectivo autovalor, la máxima varianza de las masas de las partículas.

4.2. PIB Cercamiento al Colombiano

En Colombia se puede ver que en los años desde el 2003 hasta el 2018 la inversión en los diferentes sectores ha sido desigual, esto se puede evidenciar en la matriz de covarianza, ya que los valores propios de esta matriz brindan información sobre esto. El sector con menor porcentaje de inversión fue en ciencia y tecnología y el sector con mayor inversión fue la salud; además, realizando el análisis respectivo a la matriz de covarianza (ver la matriz 6) se puede identificar que el 69 % de inversiones a lo largo de los años ha tenido una covarianza positiva, lo que significa que han ido aumentado todos los años de manera proporcional, a diferencia del 31 % de los datos que no están relacionados, lo que significa que a pesar que en un sector aumentaron el presupuesto en cierta medida, en comparación con el otro no es significativo.

En este caso los vectores propios apuntan hacia el sector en donde mas inversión hubo en esos 15 años. un ejemplo es la siguiente figura (3), que muestra un vector propio en las inversiones en defensa, educación y salud, el cual tiene a aumentar en dirección del sector defensa y educación.

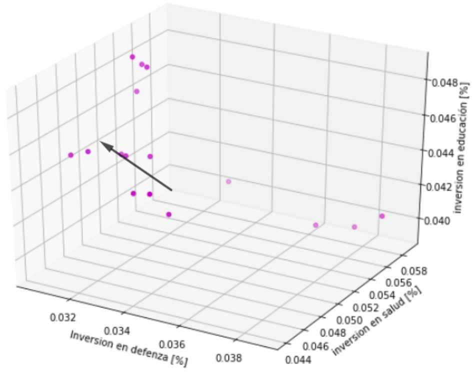

Figura 3: Representación del Vector propio en una gráfica de porcentajes de: inversión en salud, educación y defensa.

5. Bibliografías

Referencias

[1] "Vector (informática) - Wikipedia, la enciclopedia libre.". https://es.wikipedia.org/wiki/Vector_(inform%C3%A1tica)

[2] Universidad de sevilla.(27 de Abril de 2018) *Tensor de inercia (M.R.)* Departamento de fisica aplicada iii http://laplace.us.es/wiki/index.php/Tensor_de_inercia_(M.R.)#Tensor_de_Inercia

[3] Perez N, Alfaro, V, Avila C. (2022) Asignación 3 https://github.com/NathaliaAPR/Repositorio-tareas/blob/d82886fdf1b57aa6e7280f110513472da278ca06/CODIGO/ASIGNACI%C3%93N_3.ipynb

[4] Banco de la Republica.(2019) *Producto interno bruto PIB* https://www.banrep.gov.co/es/glosario/producto-interno-bruto-pib

[5] Sanchez, P(1983).caso contiguo, *Métodos Estadísticos Aplicados* pp(155), pg 38. Textos docents. https://books.google.com.co/books?id=pV0VprbVJC4C&pg=PT38&dq=momento+centrado+variable+aleatoria&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwjuqcaWlJf1AhXwRTABHczzCxoQ6AF6BAgCEAI#v=onepage&q=momento%20centrado%20variable%20aleatoria&f=false

[6] Coluccio E. (2021).*Inercia.*Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires. https://concepto.de/inercia/#ixzz7KXho68q0