Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, Demuestre que:

a) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\,\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$

Voy a partir de la parte izquierda de la ecuación

$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = (\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B})$ ·Potencia de operadores

$= (\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{B}+\mathbb{A}) =$ ·Cumple las propiedades de linealidad.

↓ se van a renombrar las variables

$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{B}+\mathbb{A} = \mathbb{D}$

$= (\mathbb{C}\mathbb{D})$

$= \langle x|\mathbb{C}\mathbb{D}|y\rangle$

$= \langle x|\mathbb{C}|y\rangle\langle x|\mathbb{D}|y\rangle$ ·Prop. linealidad.

$= \langle x|\mathbb{A}+\mathbb{B}|y\rangle\langle x|\mathbb{B}+\mathbb{A}|y\rangle$

$= (\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle)\cdot(\langle x|\mathbb{B}|y\rangle\langle x|\mathbb{A}|y\rangle)$

$= \langle x|\mathbb{A}|y\rangle\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}|y\rangle\langle x|\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle$
$\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle\langle x|\mathbb{B}|y\rangle$

$= \langle x|\mathbb{A}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{B}|y\rangle$

Potencia de operadores

$= \langle x|\mathbb{A}^2|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^2|y\rangle$

$= \mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2$

Por hipotesis $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$

$= \mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$

$= \mathbb{A}^2 + 2\,\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$

Escaneado con CamScanner

b) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

Iniciando Por el lado derecho:

$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = (\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B})$

$= \langle x|(\mathbb{A}+\mathbb{B})|y\rangle \cdot \langle x|(\mathbb{A}+\mathbb{B})|y\rangle \cdot \langle x|\mathbb{A}+\mathbb{B}|y\rangle$

$= (\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \underbrace{\langle x|\mathbb{B}|y\rangle)(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle)}_{1}\underbrace{(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle}_{2}$

$=$

① $(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle)(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle)$

$= \langle x|\mathbb{A}|y\rangle\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}|y\rangle\langle x|\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle\langle x|\mathbb{B}|y\rangle$

$= \langle x|\mathbb{A}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{B}|y\rangle$.

$= (\langle x|\mathbb{A}^2|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^2|y\rangle)(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle)$

$= \langle x|\mathbb{A}^2|y\rangle(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle) + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle) + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle$
$(\langle x|\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}|y\rangle) + \langle x|\mathbb{B}^2|y\rangle(\langle x|\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}|y\rangle)$

$= \langle x|\mathbb{A}^2\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}^2\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle$
$+ \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^2\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^2\mathbb{A}|y\rangle$

$= \langle x|\mathbb{A}^3|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}^2\mathbb{B}|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{A}^2|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}\mathbb{B}\mathbb{A}|y\rangle + \langle x|\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}|y\rangle$
$+ \langle x|\mathbb{A}\mathbb{B}^2|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^3|y\rangle + \langle x|\mathbb{B}^2\mathbb{A}|y\rangle$

$= \mathbb{A}^3 + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3 + \mathbb{B}^2\mathbb{A}$.

$= \mathbb{A}^3 + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{B}^3$

$= \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$