17 | 01 | 22 — MÉTODOS MATEMÁTICOS

## CAPÍTULO 3.3: aplicaciones en física: esfuerzos, inercia y energía libre

**3.3.5. Ejercicio 8:** suponga un sistema de coordenadas generalizadas $(q^1, q^2, q^3)$ del que se puede considerar la transformación:

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto T(x,y,z) = (x+y,\ x-y,\ 2z) = (q^1, q^2, q^3)$$

(1, 1, 0)

**a).** Comprobar que el sistema $(q^1, q^2, q^3)$ conforma un sistema de coordenadas ortogonales.

$$\rightarrow\ T(\hat{i}) = T(1,0,0) = (1,1,0) = \hat{p}$$
$$T(\hat{j}) = T(0,1,0) = (1,-1,0) = \hat{q}$$
$$T(\hat{k}) = T(0,0,1) = (0,0,2) = \hat{r}$$

$$\rightarrow\ \left.\begin{aligned} \hat{p}\cdot\hat{q} &= (1,1,0)\cdot(1,-1,0) = 0 \\ \hat{p}\cdot\hat{r} &= (1,1,0)\cdot(0,0,2) = 0 \\ \hat{q}\cdot\hat{r} &= (1,-1,0)\cdot(0,0,2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

cuando el producto punto entre los vectores $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ sobre los ejes coordenados del nuevo sistema coordenado es 0, se dice que es un sistema coordenado ortogonal.

**b).** Encontrar la base del nuevo sistema coordenado.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ |q\rangle = q^{j'}|u_{j'}\rangle \quad \text{con} \quad \left.\begin{aligned} |u_{1'}\rangle &= (1,1,0) \\ |u_{2'}\rangle &= (1,-1,0) \\ |u_{3'}\rangle &= (0,0,2) \end{aligned}\right\} \text{vectores de la base}$$

**c).** Encuentre el tensor métrico.

$$T_M = \begin{bmatrix} \langle u_{1'}, u_{1'}\rangle & \langle u_{1'}, u_{2'}\rangle & \langle u_{1'}, u_{3'}\rangle \\ \langle u_{2'}, u_{1'}\rangle & \langle u_{2'}, u_{2'}\rangle & \langle u_{2'}, u_{3'}\rangle \\ \langle u_{3'}, u_{1'}\rangle & \langle u_{3'}, u_{2'}\rangle & \langle u_{3'}, u_{3'}\rangle \end{bmatrix}$$

$$T_M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ ; matriz diagonal por ser un sistema ortogonal.

**d).** Encuentre/exprese en el nuevo sistema coordenado, los siguiente vectores:

- $A = 2\hat{j} = (0, 2, 0)$
  $\rightarrow T(0,2,0) = (2, -2, 0) = A'$
- $B = \hat{i} + 2\hat{j} = (1, 2, 0)$
  $\rightarrow T(1,2,0) = (3, -1, 0) = B'$
- $C = \hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k} = (1, 7, 3)$
  $\rightarrow T(1,7,3) = (8, -6, 6) = C'$

Nota: me ayudo de la transformación del inicio para obtener los nuevos vectores en el otro sistema $(q^1, q^2, q^3)$

**e).** Encuentre en el nuevo sistema, las expresiones para las siguientes relaciones vectoriales:

Para lo siguiente suponga tres vectores del nuevo sistema coordenado:

$$A = (a^1, a^2, a^3) = (X_a + Y_a,\ X_a - Y_a,\ 2Z_a)$$
$$B = (b^1, b^2, b^3) = (X_b + Y_b,\ X_b - Y_b,\ 2Z_b)$$
$$C = (c^1, c^2, c^3) = (X_c + Y_c,\ X_c - Y_c,\ 2Z_c)$$

$$\rightarrow A \cdot C = a_i c^i = a^1c^1 + a^2c^2 + a^3c^3$$
$$= (X_a + Y_a)(X_c + Y_c) + (X_a - Y_a)(X_c - Y_c) + 4Z_aZ_c$$
$$= X_aX_c + Y_aX_c + Y_aY_c + X_aX_c - Y_aX_c - X_aY_c + Y_aY_c + 4Z_aZ_c$$
$$= 2X_aY_c + 2Y_aY_c + 4Z_aZ_c$$

$$\rightarrow A \times B = \varepsilon_{ijk} a^i b^j = \langle a^2b^3 - a^3b^2,\ a^3b^1 - a^1b^3,\ a^1b^2 - a^2b^1 \rangle$$
$$= \langle (X_a - Y_a)(2Z_b) - (2Z_a)(X_b - Y_b),$$
$$(2Z_a)(X_b + Y_b) - (X_a + Y_a)(2Z_b),$$
$$(X_a + Y_a)(X_b - Y_b) - (X_a - Y_a)(X_b + Y_b) \rangle$$
$$= \langle 2X_aZ_b - 2Z_bY_a - 2Z_aX_b + 2Z_aY_b,$$
$$2X_bZ_a + 2Z_aY_b - 2Z_bX_a - 2Y_aZ_b,$$
$$X_aX_b + Y_aX_b - X_aY_b - Y_aY_b - X_aX_b - X_aY_b + Y_aX_b + Y_aY_b \rangle$$
$$= 2\langle Z_b(X_a - Y_a) - Z_a(X_b - Y_b),\ Z_a(X_b + Y_b) - Z_b(X_a + Y_a),\ Y_aX_b - X_aY_b \rangle$$

1). considere:

$$R_j^i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

encuentre las expresiones en el nuevo sistema coordenado.

→ matriz transformación o matriz cambio de base

$$|P\rangle = a^j|\hat{e}_j\rangle = a^1|\hat{e}_1\rangle + a^2|\hat{e}_2\rangle + a^3|\hat{e}_3\rangle$$
$$= a^{j'}|q_j\rangle = a^{1'}|q_1\rangle + a^{2'}|q_2\rangle + a^{3'}|q_3\rangle$$
$$= a^{1'}(|\hat{e}_1\rangle + |\hat{e}_2\rangle) + a^{2'}(|\hat{e}_1\rangle - |\hat{e}_2\rangle) + a^{3'}(2|\hat{e}_3\rangle)$$
$$= (a^{1'} + a^{2'})|\hat{e}_1\rangle + (a^{1'} - a^{2'})|\hat{e}_2\rangle + 2a^{3'}|\hat{e}_3\rangle$$

$$\rightarrow a^1 = a^{1'} + a^{2'} \rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} a^{k'} \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$a^2 = a^{1'} - a^{2'}$$
$$a^3 = 2a^{3'}$$

ahora, la inversa:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$$

por calmatrix

finalmente con las matrices cambio de base se tiene:

$$R_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} R_j^i$$

$$\rightarrow R_{1'}^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}} R_j^i$$

$$= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} R_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} R_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} R_3^1\right) +$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} R_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} R_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} R_3^3\right)$$

$$= 1/2(1 \cdot R_1^1 + 1 \cdot R_2^1 + 0 \cdot R_3^1) + 1/2(1 \cdot R_1^2 + 1 \cdot R_2^2 + 0 \cdot R_3^2) + 0$$
$$= (1/4 + 1/2) + (1 + 5/4) = 1/2$$

análogamente para el resto de elementos de $R_{j'}^{i'}$ se tiene:

$$R_{j}^{i} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 3 \\ 9/2 & -1/2 & 6 \\ 23/4 & -9/4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 9/2 \\ -3/2 & 0 & -3/2 \\ 23/8 & -9/8 & 9/2 \end{bmatrix}$$

Escaneado con CamScanner