

EDP & Méthodes Numériques
*Projet - Jeux à Champ Moyen avec Effets de
Congestion*

Nathan Sanglier¹, Ronan Pécheul¹

¹M2MO, Université Paris Cité



Introduction I

- On considère un grand nombre N de joueurs identiques et un horizon de temps fini T . Chaque joueur est caractérisé par un état X_t^v qu'il peut contrôler via v :

$$dX_t^v = v_t dt + \sigma dW_t.$$

- On suppose que chaque joueur détermine son contrôle de sorte à minimiser un coût qui dépend de son état, son contrôle actuel, et de la distribution des états des joueurs.
- On veut donc trouver une stratégie optimale \hat{v}_t d'un joueur et la distribution associée $\hat{m}(t, \cdot)$ des états optimaux des joueurs.

Introduction II

- Mathématiquement, $\hat{m}(t, \cdot)$ est la densité de $X_t^{\hat{v}}$ et \hat{v} minimise:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f(X_t^\nu, \hat{m}(t, X_t^\nu), v(t, X_t^\nu)) dt + \phi(X_T^\nu) \right],$$

avec $f(x, \mu, \gamma) = \frac{\beta}{\beta-1} (c_0 + c_1 \mu)^{\frac{\alpha}{\beta-1}} |\gamma|^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \tilde{f}_0(\mu) + g(x)$.

- Problème de contrôle optimal avec $\hat{m}(t, x)$ et la fonction valeur $u(t, x)$ du problème solutions des équations KFP et HJB.

Schémas aux Différences Finies I

- Pas de solution explicite aux équations HJB-KFP. Résolution numérique en discrétilisant d'abord le système via des schémas aux différences finies: $u(t_n, x_i) \approx U_i^n$ et $m(t_n, x_i) \approx M_i^n$.
- **HJB discret.** $\forall 0 \leq n < N_T$ et $0 \leq i < N_h$,

$$\begin{cases} -(D_t U_i)^n - \nu(\Delta_h U^n)_i + \tilde{H}([\nabla_h U^n]_i, M_i^{n+1}) = g(x_i) + \tilde{f}_0(M_i^{n+1}), \\ U_{-1}^n = U_0^n, \\ U_{N_h}^n = U_{N_h-1}^n, \\ U_i^{N_T} = \phi(x_i), \end{cases} \quad (1)$$

où \tilde{H} est l'Hamiltonien discret qui satisfait des propriétés nécessaires pour l'unicité de $(U^n)_n$.

Schémas aux Différences Finies II

- KFP discret vectoriel. $\forall 0 \leq n < N_T$,

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(M^{n+1} - M^n) + (\Lambda - A(U^n, \tilde{M}^{n+1}))M^{n+1} = 0, \\ M_{-1}^n = M_0^n, \\ M_{N_h}^n = M_{N_h-1}^n, \\ M^0 = \bar{m}_0(x), \end{cases} \quad (2)$$

où A est la matrice tridiagonale de l'opérateur discret de transport (application linéaire), et Λ est aussi tridiagonale.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cdots & \Lambda_{i-1}^i & 0 \\ \Lambda_i^{i-1} & \Lambda_i^i & \Lambda_i^{i+1} \\ 0 & \Lambda_{i+1}^i & \cdots \end{pmatrix} \quad A(U, \tilde{M}) = \begin{pmatrix} \cdots & \varepsilon_j & 0 \\ -\gamma_{j-1} & \gamma_j - \varepsilon_j & \varepsilon_{j+1} \\ 0 & -\gamma_j & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_i^i = \frac{2\nu}{h^2}$$

$$\Lambda_i^{i+1} = \Lambda_{i+1}^i = -\frac{\nu}{h^2}.$$

$$\gamma_j = \frac{1}{h} \tilde{H}_{p_1}([\nabla_h U]_j, \tilde{M}_j)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \tilde{H}_{p_2}([\nabla_h U]_j, \tilde{M}_j)$$

Unicité et Stabilité des solutions I

- HJB discret: Unicité

On considère M donnée, et on prend U, V deux solutions de l'équation. En considérant $(n_0, i_0) \in \arg \max \delta$ où $\delta = U - V$ et en partant de la différence des équations HJB discrètes :

$$(D_t \delta_i)^n + \nu (\Delta_h \delta^n)_i = \tilde{H}([\nabla_h U^n]_i, M_i^{n+1}) - \tilde{H}([\nabla_h V^n]_i, M_i^{n+1})$$

On obtient :

$$\tilde{H}([\nabla_h U^n]_i, M_i^{n+1}) \leq \tilde{H}([\nabla_h V^n]_i, M_i^{n+1})$$

qui, par monotonie et avec $\delta_{i_0}^{n_0} = \max \delta$, donne que $0 \leq D\delta^{n_0} \leq 0$ en i_0 et $i_0 - 1$. On en déduit que δ^{n_0} est constant, et donc que $D_t \delta^{n_0} = 0$ i.e. $\{(i, n); n_0 \leq n\} \subset \arg \max \delta$. Enfin, $0 = \delta_0^{N_h} = \max \delta$, qui par symétrie donne $\delta = 0$.

Unicité et Stabilité des solutions II

• KFP discret: Positivité

On pose $B_n = I_n + \Delta t(\Lambda - A(U^n, \tilde{M}^{n+1}))$ telles que $B_n M^{n+1} = M^n$.

On souhaite montrer que $M^n \geq 0 \Rightarrow M^{n+1} \geq 0$. Notons que B_n^T est une M -Matrice:

- * $\forall i, B_{i,i}^n = 1 + \Delta t\left(\frac{2\nu}{h^2} - \gamma_i + \varepsilon_i\right) > 0$
- * $\forall i < j, B_{i,j}^n = \Delta t\left(-\frac{\nu}{h^2} - \varepsilon_j \mathbf{1}_{j=i+1}\right) < 0$
- * $\forall i > j, B_{i,j}^n = \Delta t\left(-\frac{\nu}{h^2} + \gamma_j \mathbf{1}_{j=i-1}\right) < 0$
- * $\sum_{i=0}^{N_h-1} B_{i,j}^n = 1 + \Delta t \left[\left(\frac{\nu}{h^2} + \varepsilon_0\right) \mathbf{1}_{j=0} + \left(\frac{\nu}{h^2} - \gamma_{N_h-1}\right) \mathbf{1}_{j=N_h-1} \right] > 0$

Ainsi, B_n^T est inversible avec $(B_n^T)^{-1} \geq 0$. Ainsi, B_n est aussi inversible avec $B_n^{-1} \geq 0$. D'où :

$$M^{n+1} = B_n^{-1} M^n \geq 0$$

On conclue sur $M_0 \geq 0 \Rightarrow M \geq 0$ par récurrence.

Unicité et Stabilité des solutions III

- KFP discret: Conservation de la masse

En posant $\sum M^n = \sum_i M_i^n$ la masse totale, on obtient :

$$(D_t \sum M)^n - \nu \sum_{i=0}^{N_h-1} (\Delta_h M^{n+1})_i - \sum_{i=0}^{N_h-1} \mathcal{T}_i(U^n, M^{n+1}, \tilde{M}^{n+1}) = 0$$

Par télescopage: $\sum_i (\Delta_h M^{n+1})_i = \sum_i \mathcal{T}_i(U^n, M^{n+1}, \tilde{M}^{n+1}) = 0$
Donc $\sum M^n = \sum M^{n+1}$.

- KFP discret: Unicité

On considère U, \tilde{M} fixées, on prend M, \hat{M} solutions de l'équation. On obtient une équation KFP discrète similaire sur $\delta = M - \hat{M}$:

$$(D_t \delta_i)^n - \nu (\Delta_h \delta^{n+1})_i - \mathcal{T}_i(U^n, \delta^{n+1}, \tilde{M}^{n+1}) = 0$$

Et comme $\delta^0 = 0$, $\delta^n \geq 0$ et $\sum \delta^n = \sum \delta^0 = 0$. D'où $\delta = 0$.

Résolution des Équations Discrètes

- Itérations de point fixe pour séparer la résolution numérique de HJB discret et KFP discret. On introduit un paramètre de relaxation $\theta = 0.02$ pour la stabilité numérique.
 - Init $\mathcal{U}^{(0)} = (\phi(x))_{0 \leq n \leq N_T}$ et $\mathcal{M}^{(0)} = (\bar{m}_0(x))_{0 \leq n \leq N_T}$.
 - Tant que $\|(\mathcal{U}^{(k+1)}, \mathcal{M}^{(k+1)}) - (\mathcal{U}^{(k)}, \mathcal{M}^{(k)})\| \geq 2 \cdot 10^{-5}$:
 - * $\hat{\mathcal{U}}^{(k+1)} = \text{HJB solver}(\mathcal{M}^{(k)})$,
 - * $\hat{\mathcal{M}}^{(k+1)} = \text{KFP solver}(\hat{\mathcal{U}}^{(k+1)}, \mathcal{M}^{(k)})$.
 - * $(\mathcal{U}^{(k+1)}, \mathcal{M}^{(k+1)}) = \theta(\hat{\mathcal{U}}^{(k+1)}, \hat{\mathcal{M}}^{(k+1)}) + (1 - \theta)(\mathcal{U}^{(k)}, \mathcal{M}^{(k)})$.

- A l'itération n on a un système non-linéaire d'inconnue U^n :

$$\mathcal{F}(U^n, U^{n+1}, M^{n+1}) = (\mathcal{F}_i(U^n, U^{n+1}, M^{n+1}))_{0 \leq i < N_h} = 0 \in \mathbb{R}^{N_h},$$

que l'on résout via la méthode de Newton. En particulier, la matrice Jacobienne de $U \mapsto \mathcal{F}(U, U^{n+1}, M^{n+1})$ contient la matrice de l'opérateur discret de transport:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\Delta t} I_{N_h} + \Lambda - A(U, M^{n+1})^T.$$

- HJB discret (1) se résout backward.

→ Init $\hat{U}^{N_T, (k+1)} = \phi(x)$.

→ Pour itération de temps n décroissante:

* $\hat{U}^{n, (k+1)} = \text{Newton} \left(U^{n+1} = \hat{U}^{n+1, (k+1)}, M^{n+1} = M^{n+1, (k)} \right).$

- En prenant \tilde{M}^{n+1} comme M^{n+1} de l'itération de point fixe précédente, KFP discret vectoriel (2) est un schéma implicite.
- On résout donc forward.
 - Init $\hat{M}^{0,(k+1)} = \bar{m}_0(x)$.
 - Pour itération de temps n croissante:
 - * $\hat{M}^{n+1,(k+1)} = B^{-1} \hat{M}^{n,(k+1)}$, où
 $B = I_{N_h} + \Delta t \left[\Lambda - A \left(\hat{U}^{n,(k+1)}, M^{n+1,(k)} \right) \right]$.

Résultats

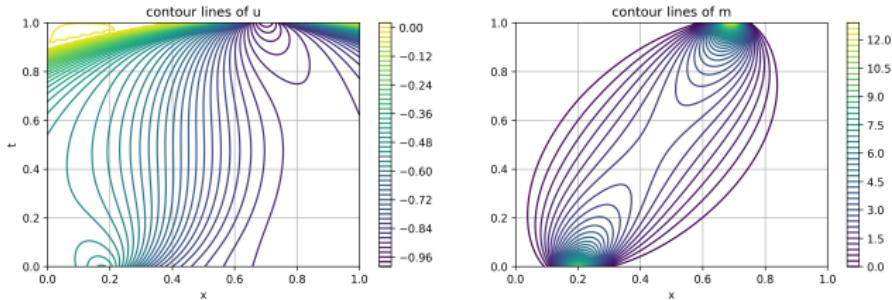


Figure 1: Set (a). $\beta = 2$, $c_0 = 0.1$, $c_1 = 1$, $\alpha = 0.5$, $\sigma = 0.02$.

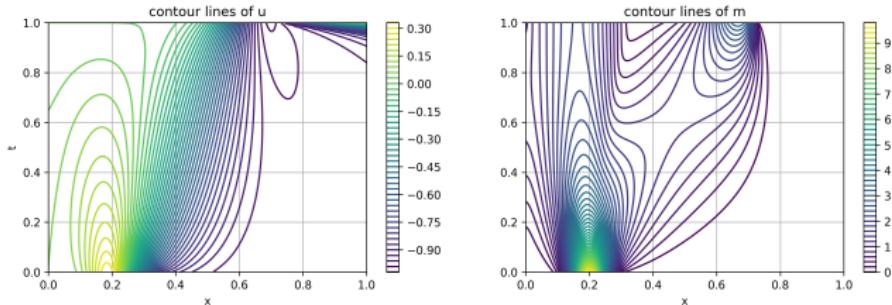


Figure 2: Set (b). $\beta = 2$, $c_0 = 0.1$, $c_1 = 5$, $\alpha = 1$, $\sigma = 0.02$.

Checks

- ✓ La solution numérique $(M^n)_n$ de KFP discret est toujours positive et on a conservation de la masse.
- ✓ La méthode de Newton converge en moins de 15 itérations.
- ✓ Les itérations de point fixe convergent rapidement ($\sim 2\text{mn}$ avec l'utilisation de `scipy.sparse`).

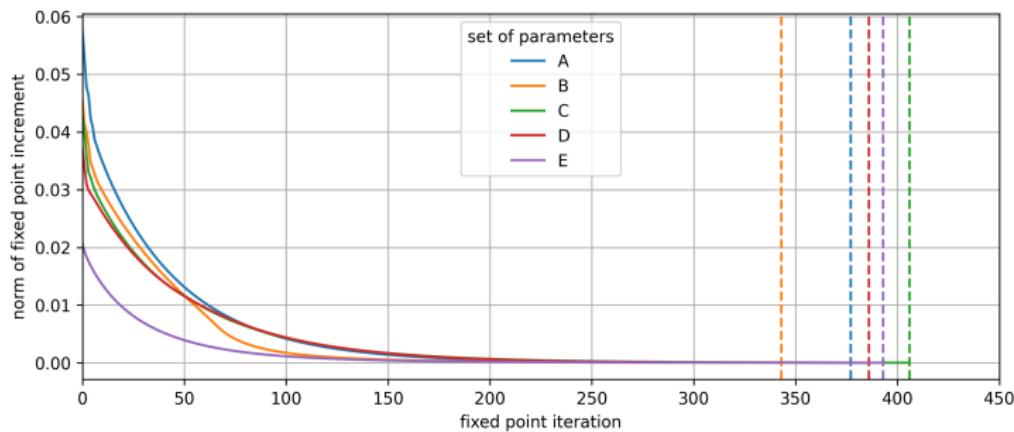


Figure 3: Convergence itérations de point fixe.

Contrôle à Champ Moyen

- On s'intéresse à un autre type d'équilibre asymptotique, où les agents utilisent le même contrôle feedback.
- En utilisant les mêmes idées que précédemment, l'équation HJB discret (1) est changée:

$$\begin{aligned} & - (D_t U_i)^n - \nu (\Delta_h U^n)_i + \left(1 - \frac{c_1 \alpha M_i^{n+1}}{c_0 + c_1 M_i^{n+1}} \right) \tilde{H}([\nabla_h U^n]_i, M_i^{n+1}) \\ & = g(x_i) + \tilde{f}_0(M_i^{n+1}) + M_i^{n+1} \tilde{f}'_0(M_i^{n+1}) \end{aligned}$$

- La fonction \mathcal{F} et la matrice Jacobienne associée dans la méthode de Newton doivent donc être modifiées.

Résultats

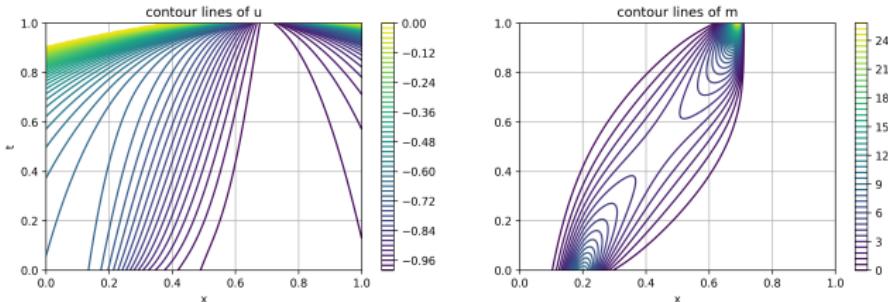


Figure 4: Problème de jeu à champ moyen.

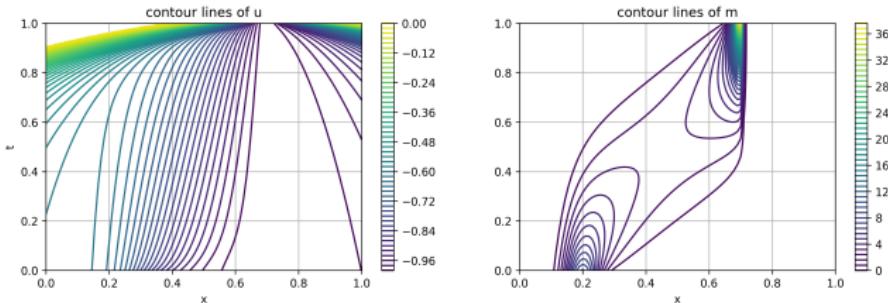


Figure 5: Problème de contrôle à champ moyen. $N_h = 101$.

Analyse de la convergence I

- Problèmes de convergence avec $N_h = 201$!

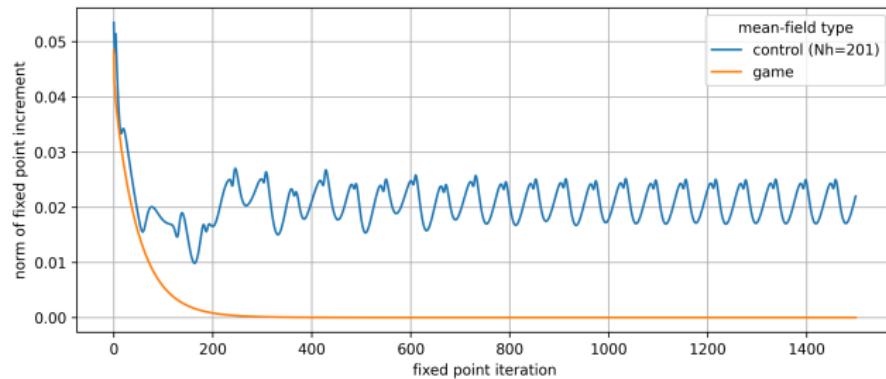


Figure 6: Convergence itérations de point fixe.

Analyse de la convergence II

- Un maillage spatial plus large ($N_h = 101$) résout l'instabilité.
- Le nombre d'itération de point fixe est légèrement plus élevé.

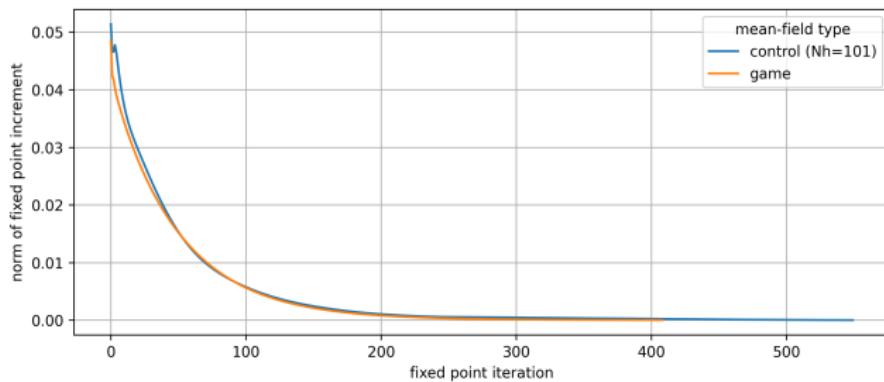


Figure 7: Convergence itérations de point fixe.

Merci de votre attention!
Des questions?

Annexes

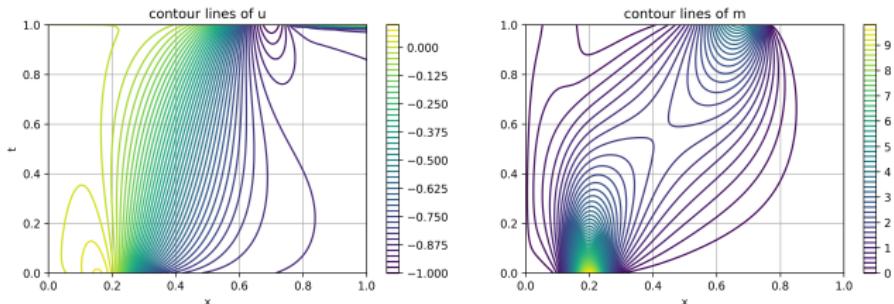


Figure 8: Set (c). $\beta = 2$, $c_0 = 0.01$, $c_1 = 2$, $\alpha = 1.2$, $\sigma = 0.1$.

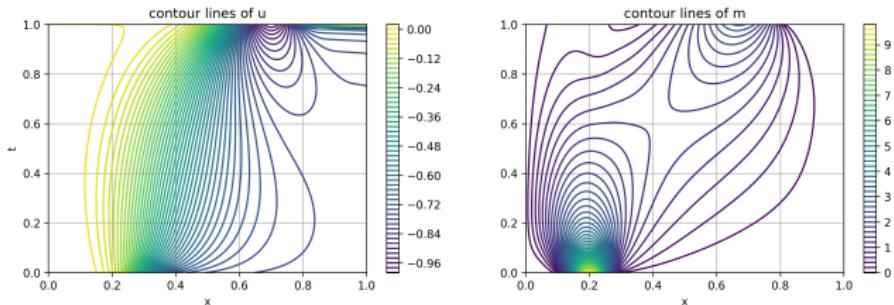


Figure 9: Set (d). $\beta = 2$, $c_0 = 0.01$, $c_1 = 2$, $\alpha = 1.5$, $\sigma = 0.2$.

Annexes

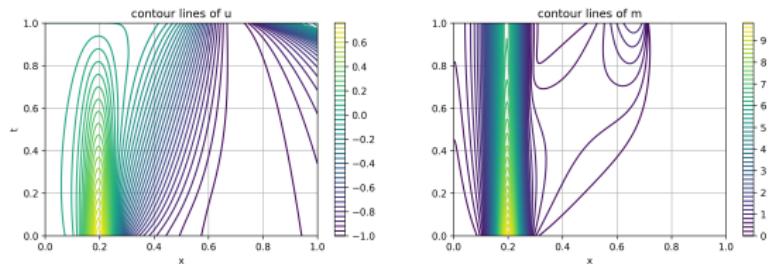


Figure 10: Set (e). $\beta = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $\alpha = 2$, $\sigma = 0.002$.

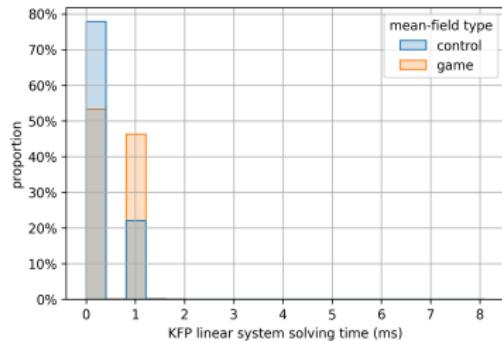


Figure 11: Temps de résolution système linéaire KFP discret.

Annexes

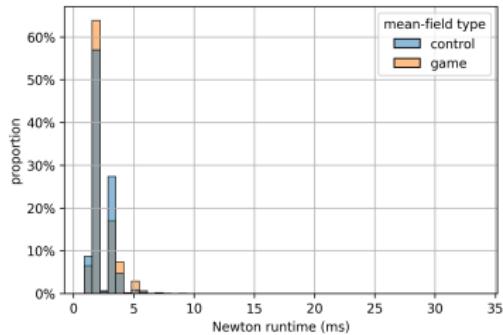


Figure 12: Temps de résolution Newton HJB discret.

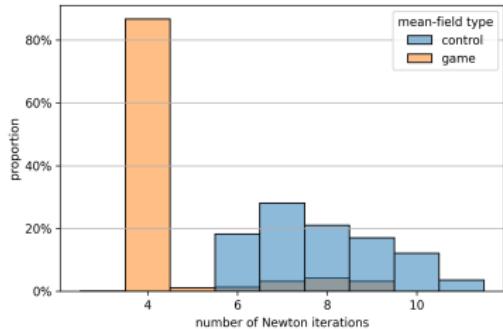


Figure 13: Nombre d'itérations Newton HJB discret.