Poutre contrainte

December 12, 2019

Loïc Le Marrec, Université de Rennes 1.

1 Introduction

On rappelle ici quelques équations fondamentales de la poutre.

- **Modèle de flexion de Timoshenko**
  Les relations d'équilibres

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{2}$$

Les lois de comportement associées

$$N = GA\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \theta\right) \tag{3}$$

$$M = EI\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{4}$$

- **Modèle de flexion d'Euler-Bernoulli**
  Les relations d'équilibres

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N = 0 \tag{6}$$

La loi de comportement du moment

$$M = EI\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{7}$$

La condition cinématique

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \theta \tag{8}$$

- **Modèle en tension-compression** (en l'absence de densité linéique de force)
  Relation d'équilibre et loi de comportent

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad P = EA\frac{\partial w}{\partial x} \tag{9}$$

On rappelle les fonctions hyperboliques

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

On rappelle que

$$\int_0^L \Big(\sin(kx)\Big)^2 \mathrm{d}x = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{\sin(2kL)}{2kL}\right)$$

On considèrera toujours une poutre droite à section circulaire, de longueur L (suivant $\mathbf{e_x}$) et rayon R. Elle est parfaitement homogène. Le moment quadratique est donc de la forme

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R \Big(r\cos(\varphi)\Big)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \pi\frac{R^4}{4}$$

1. Expliquez les différences majeures entre les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ;
2. Donnez la signification de u, θ et w ;
3. Donnez la significaiton de P, f et N.

2 Parois latérales rigides

On suppose que la poutre en entourée d'une paroi rigide, si bien que

$$u(x,t) = 0, \qquad \forall x \in [0, L], \qquad \forall t$$

On considère un modèle de flexion de Timoshenko.

1. Exprimez en fonction de θ et de ses dérivées, les grandeurs suivantes M, N et f.

2. Montrez que θ doit satisfaire une équation aux dérivées partielles homogène.

3. On pose $\theta(x,t) = \Phi(x)T(t)$. Montrez que $\Phi(x)$ et $T(t)$ doivent satisfaire chacune une équation différentielle ordinaire homogène, liée par un paramètre réel que l'on nommera $-\omega^2$.

4. On considère une base modale $\{\Phi_n, \omega_n\}$ où chaque mode est solution de

$$\frac{E}{\rho}\Phi_n'' + (\omega_n^2 - \frac{GA}{\rho I})\Phi_n = 0$$

   Montrez pour quelles conditions aux limites les modes sont orthogonaux.

5. Donnez l'expression générale des modes Φ sous forme de fonction trigonométrique ou hyperbolique pour les deux cas suivants :

$$\text{Basse fréquence : } 0 < \omega_n^2 < \omega_C^2 \qquad \text{Haute fréquence : } \omega_C^2 < \omega_n^2 \qquad \text{où} \quad \omega_C = \sqrt{\frac{GA}{\rho I}}.$$

6. On impose les conditions aux limites suivantes :

$$\theta(0,t) = 0, \qquad M(L,t) = 0 \qquad \forall t\ .$$

   Montrez que le régime basse fréquence n'est pas possible. Exprimez la forme des modes propres et les nombres d'ondes k_n pour le régime haute fréquence.

7. On impose les conditions initiales suivantes (Ω_0 est une constante réelle arbitraire homogène à une vitesse angulaire $[rad/s]$) :

$$\theta(x,0) = 0, \qquad \dot{\theta}(x,0) = \Omega_0\, L\delta(x-L) \qquad \forall x$$

   En déduire la forme générale de $\theta(x,t)$

8. En déduire l'expression de $f(x,t)$. Conclusion : quelles sont les parties usées suite à la vibration d'une poutre encastrée sur une support rigide ?

9. Qu'obtient-on si on souhaite refaire cette analyse à partir d'un modèle d'Euler-Bernoulli ?

3 Parois latérales élastiques

On suppose maintenant que les parois sont élastiques, si bien qu'elles exercent sur la structure une densité linéique de force de la forme

$$f(x,t) = -K\,u(x,t)\ , \tag{10}$$

avec un module de rigidité des parois $K > 0$. On posera par la suite $K = \gamma E$ ainsi si $\gamma < 1$ les parois sont moins rigide que la poutre, si $\gamma > 1$ la poutre est plus souple que les parois. On considère cette fois ci le modèle d'Euler-Bernoulli.

1. Exprimez M, N en fonction de u et de ses dérivées.

2. Montrez que $u(x,t)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on spécifierea.

3. On effectue la séparation des variables $u(x,t) = Y(x)T(t)$. Exprimez les équations différentielles satisfaites par Y et T. On introduira à cet effet $-\omega^2$ une constante réelle arbitraire.

4. Justifiez que pour k fixé, les modes spatiaux sont simplement

$$Y(x) = A_1\cos(kx) + A_2\sin(kx) + A_3\cosh(kx) + A_4\sinh(kx)\ ,$$

   où les A_i sont des constantes arbitraires pour l'instant.

5. On impose les conditions aux limites suivantes

$$u(0,t) = 0, \qquad \theta(0,t) = 0, \qquad N(L,t) = 0, \qquad M(L,t) = 0, \qquad \forall t\ .$$

   Exprimez ces conditions aux limites en fonction du Y et de ses dérivées.

6. Expliquez la méthodologie pour trouver les valeurs de k admissibles. Un calcul détaillé (à ne pas faire intégralement) montre que k doit être une racine de

$$2k^6\left(1+\cos(kL)\cosh(kL)\right)=0 \tag{11}$$

et que les amplitudes modales sont (à une amplitude arbitraire près)

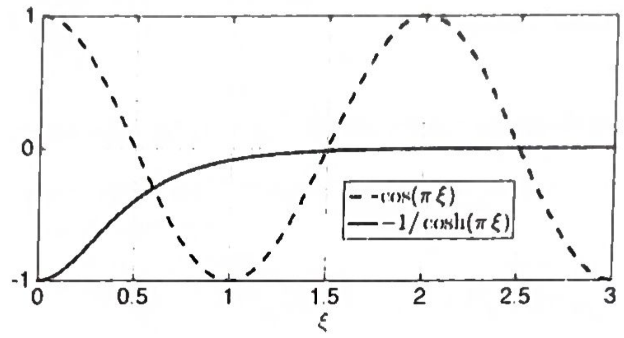
$$Y(x)=\cos(kx)-\cosh(kx)-\frac{\cos(kL)+\cosh(kL)}{\sin(kL)+\sinh(kL)}\Big(\sin(kx)-\sinh(kx)\Big).$$

7. En vous aidant du graphique, donnez une forme assymptotique de k pour $kL>1$.

8. Toujours pour ce régime, donnez une forme simplifiée des modes propres.

9. Pour quelle condition sur γ peut-on supposer

$$\omega^2 \simeq \frac{K}{\rho A}$$



4 Compression, flambement

On considère une compression longitudinale $P<0$ sur une poutre de Timoshenko.

1. Justifiez que les équations en tension-compression (Eq.9) sont inchangées, mais que pour le modèle de Timoshenko l'équation Eq.1 est inchangée alors que Eq.2 devient :

$$\frac{\partial M}{\partial x}+N-P\frac{\partial u}{\partial x}=\rho I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,.$$

2. On considère des parois élastiques (Eq.10). On considère également un problème statique $\frac{\partial}{\partial t}\to 0$. Montrez que P est uniforme en espace. On pose par la suite $P=-P_0$ avec $P_0>0$. Exprimez le système Eq.1 et Eq.2 (le nouveau).

3. Montrez que des modes propres oscillants en espace $(u(x),\theta(x))\equiv(Y(x),\Phi(x))$ existent si les nombres d'ondes k satisfont l'équation de dispersion suivante :

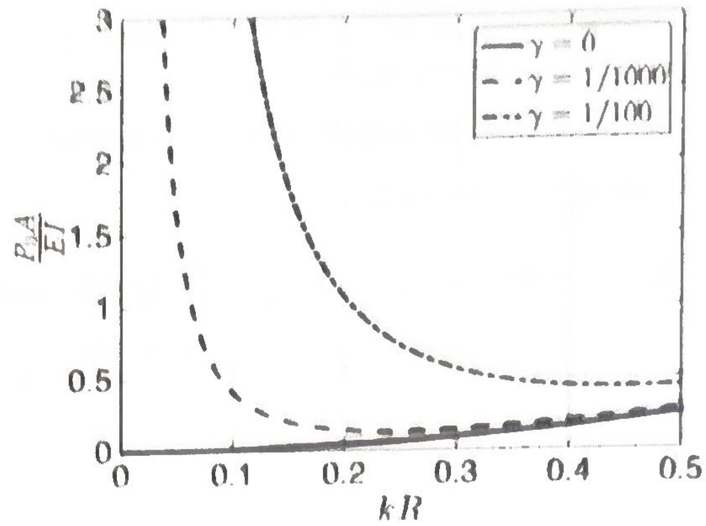
$$P_0=EI\,k^2+K\Big(\frac{EI}{AG}+\frac{1}{k^2}\Big)\,.$$

Ces solutions très particulières sont instables. On parle de flambement (ou flambage).

4. Exprimez cette relation en fonction de kR, E, $\gamma=K/E$ et $g=G/E$.

5. On a toujours $kR=2\pi\frac{R}{\Lambda}\ll 1$ (où Λ est la longueur d'onde) et en général $g=\mathcal{O}(1)$ par contre montrez que deux régimes existent :

$$\gamma\ll(kR)^2,\qquad P_0\simeq EIk^2 \qquad\text{et}\qquad \gamma\gg(kR)^2,\qquad P_0\simeq\frac{K}{k^2}\,.$$



6. Que se passe-t-il si on a $(kR)^2 \gg g$?

7. On suppose que les conditions aux limites sont choisies de sorte que les nombres d'ondes k_n respectant ces conditions aux limites sont tels que :

$$k_n R = \frac{n}{10} \, .$$

En vous aidant de la figure ci-dessus (effectuée pour $g = 1/3$), quel mode flambe en premier ? Discutez.

OYNS Poutre contrainte (corrigé ?)

1 Introduction

1.1 Euler-Bernoulli : 1 seule degré de liberté
néglige terme d'inertie
condition cinématique : section normale à la fibre

1.2 $u(S,t) \rightarrow$ déplacement
$\theta(S,t) \rightarrow$ rotation
$\omega \rightarrow$ mouvement longitudinal

1.3 P : force interne longitudinale [N]
N : transverse [N]
f : densité linéique de force extérieure transverse [N/m]

2 Parois latérales

2.1 (1) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} + f = 0$ $\quad (u(x,t) = 0)$

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial x} + N = \rho I \ddot{\theta}$

(3) $\Leftrightarrow N = GA(0 - \theta)$

$N = -GA\theta$

(4) $\Leftrightarrow M = EI\theta'$

D'où $M = EI\theta'$, $N = -GA\theta$, $f = GA\theta'$

2.2 On injecte dans (2) : $EI\theta'' - GA\theta = \rho I \ddot{\theta}$

2.3 Séparation des variables : $\Theta(x,t) = \phi(x)\,T(t)$

$$EI\phi''T - GA\phi T = \rho I\phi\ddot{T}$$

$$\iff \frac{EI}{\rho I}\frac{\phi''}{\phi} - \frac{GA}{\rho I} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc deux équations différentielles : $\ddot{T} + \omega^2 T = 0$

et $\frac{EI}{\rho I}\phi'' + \left(\omega^2 - \frac{GA}{\rho I}\right)\phi = 0$

Soient deux modes n et m. $(*)\ \frac{E}{\rho}\phi_n'' + \left(\omega_n^2 - \frac{GA}{\rho I}\right)\phi_n = 0$

$$\int_0^L (*)_n \cdot \Phi_m \, dx \iff \int_0^L \frac{E}{\rho}\phi_n''\phi_m + \left(\omega_n^2 - \frac{GA}{\rho I}\right)\phi_n\phi_m \, dx = 0$$

$$\iff \int_0^L -\frac{E}{\rho}\phi_n'\phi_m' + \left(\omega_n^2 - \frac{GA}{\rho I}\right)\phi_n\phi_m \, dx + \left[\frac{E}{\rho}\phi_n'\phi_m\right]_0^L = 0$$

$$\int_0^L (*)_m \cdot \Phi_n \, dx \iff \int_0^L -\frac{E}{\rho}\phi_m'\phi_n' + \left(\omega_m^2 - \frac{GA}{\rho I}\right)\phi_m\phi_n \, dx + \left[\frac{E}{\rho}\phi_m'\phi_n\right]_0^L = 0$$

On fait la différence : $\int_0^L (*)_n \phi_m \, dx - \int_0^L (*)_m \phi_n \, dx$

$$\implies (\omega_n^2 - \omega_m^2)\int_0^L \phi_n\phi_m \, dx = \left[\frac{E}{\rho}\phi_m'\phi_n - \frac{E}{\rho}\phi_n'\phi_m\right]_0^L$$

donc $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ pour $n \neq m$ ~ $\phi_n = 0$ soit $\Theta = 0$ aux bords

ou $EI\phi_n' = 0$ soit $M = 0$

On note $\omega_c^2 := \frac{GA}{\rho I}$

2/

2.5 ϕ est solution de $\phi'' + \frac{\ell}{E}(\omega^2-\omega_c^2)\phi = 0$. (**) On cherche des solutions sous la forme $\phi(x) = e^{i\alpha x}$. Comme ϕ est solution de (**), $\left[-\alpha^2 + \frac{\ell}{E}(\omega^2-\omega_c^2)\right]e^{i\alpha x} = 0$, ainsi :

$$\alpha^2 = \frac{\ell}{E}(\omega^2-\omega_c^2).$$

Si $\omega > \omega_c$, alors $\alpha^2 > 0$ et il existe deux solutions possibles.

$$\alpha = \begin{cases} k := \sqrt{\frac{\ell}{E}(\omega^2-\omega_c^2)} \\ -k \end{cases}$$

et donc $\phi(x)$ sera une combinaison linéaire des deux ansatz ainsi obtenus : $\phi(x) = \underline{a}e^{ikx} + \underline{b}e^{-ikx}$, d'où

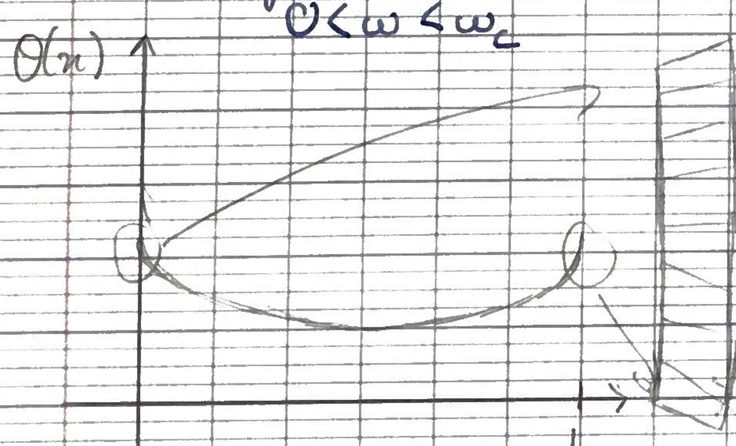
$\phi(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)$, $k = \sqrt{\frac{\ell}{E}(\omega^2-\omega_c^2)}$

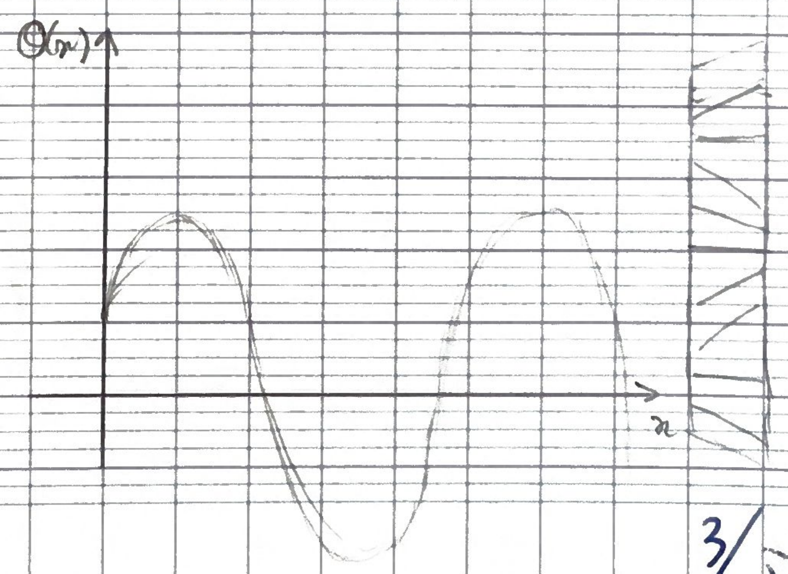
Si $\omega < \omega_c$, alors $\alpha^2 < 0$, $i\alpha = \begin{cases} K := \sqrt{\frac{\ell}{E}(\omega_c^2-\omega^2)} \\ -K \end{cases}$

et $\phi(x) = \underline{a}e^{Kx} + \underline{b}e^{-Kx}$, d'où $\phi(x) = a\cosh(Kx) + b\sinh(Kx)$,

$K = \sqrt{\frac{\ell}{E}(\omega_c^2-\omega^2)}$.

2.6 Basse fréquence $0 < \omega < \omega_c$ Haute fréquence





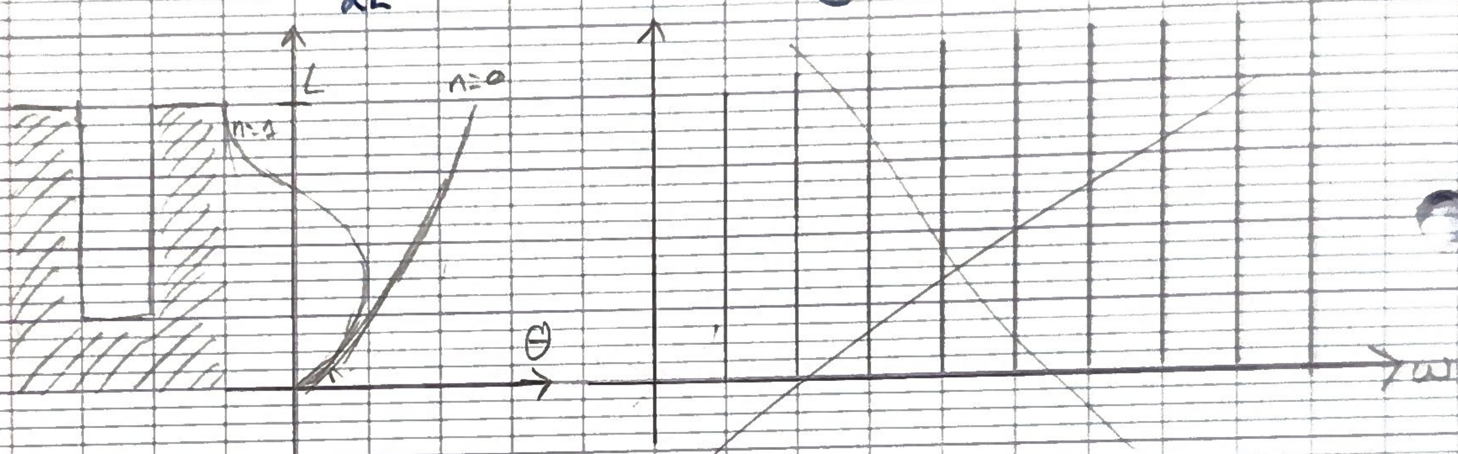
$\begin{cases}\phi(0)=0\\ \phi'(L)=0\end{cases}$. En basse fréquence : $\begin{cases} a=0 \\ bK\cosh(KL)=0\end{cases}$

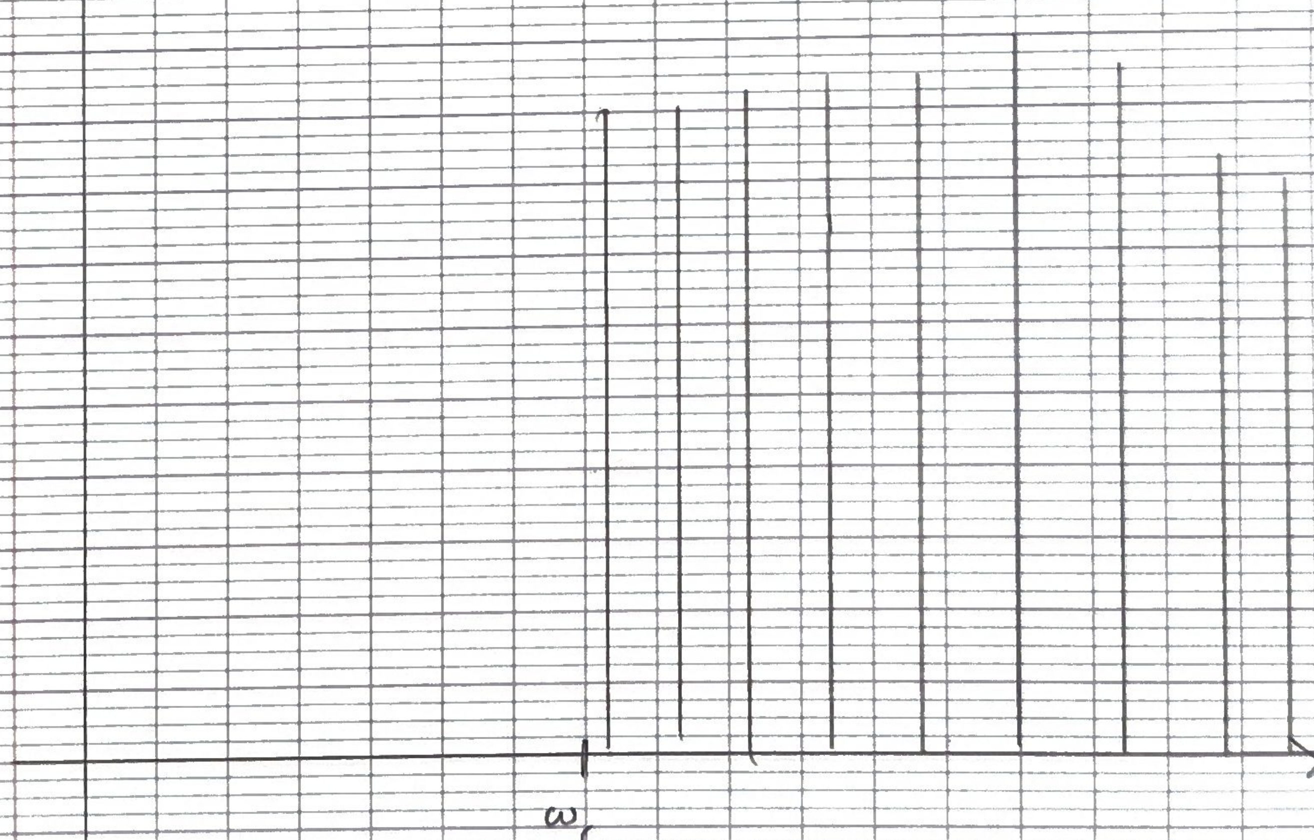
donc $b=0$, donc $b=a=0$. Il n'y a pas de mode BF pour ces conditions aux limites.

En haute fréquence : $\begin{cases} a=0 \\ bk\cos(kL)=0\end{cases}$,

d'où $k_nL=\frac{\pi}{2}+n\pi$

donc $k_n=\frac{(2n+1)\pi}{2L}$, $\omega_n=\omega_c^2+\frac{E}{\rho}k_n^2$, $\phi_n=\sin(k_nx)$





2.7 $\begin{cases} \Theta(x,0) = 0 \\ \dot{\Theta}(x,0) = \Omega_0 \, \delta(x-L) \, L \end{cases}$

avec $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + \frac{b_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$

$$\Theta(x,t) = \sum_n \phi_n(x) T_n(t)$$

$\Theta(x,0) = \sum_n \phi_n(x) T_n(0) \Rightarrow \sum_n a_n \phi_n(x) = 0$

$\dot{\Theta}(x,0) = \sum \phi_n(x) \dot{T}_n(0) \Rightarrow \sum_n b_n \phi_n(x) = \Omega_0 L \, \delta(x-L)$

que l'on projette sur un mode m arbitraire

$\sum_n a_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0 \Rightarrow a_n = 0$ (modes $\perp$)

$\sum_n b_n \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \Omega_0 L \int_0^L \phi_m(x) \delta(x-L) \, dx = \Omega_0 L \, \phi_m(L)$

$= \Omega_0 L \sin(k_m L)$

$$\Theta(x,t) = \sum_n \frac{\Omega_0 L \sin(k_n L)}{\|\phi_n\|^2} \sin(\omega_n t) \sin(k_n x)$$

2.8 On a donc $f(x) = GA\Theta'$

d'où : $f(x) = GA \, \Omega_0 L \sum_n \frac{\sin(k_n L)}{\|\phi_n\|^2} k_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t)$

2.9 En imposant les conditions initiales $\Theta(x,0) = 0\ \forall x$ et les conditions aux limites $\Theta(0,t) = 0\ \forall t$:
on obtient que $\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$ $M = 0$ et $N = 0$, ainsi que

$\Theta = \text{cste} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \text{cste} \Rightarrow u$ est linéaire (ou affine) en

espace.

3 Parois latérales élastiques

3.1 On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Theta$, d'où $\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, d'où $M = EI \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

On a aussi $N = -\dfrac{\partial M}{\partial x} = -EI \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

D'où $M = EI u''$ et $N = -EI u^{(3)}$.

3.2 On utilise l'équation (5) : $\dfrac{\partial N}{\partial x} + f = \rho A \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ que l'on

peut réécrire $-EI u^{(4)} - Ku = \rho A \ddot{u}$ $(*)$

3.3 On pose $u(x,t) = Y(x) T(t)$. On a alors

$u'(x,t) = Y'(x) T(t)$ $\quad (*) \Leftrightarrow -EI Y^{(4)} T - KYT = \rho A Y \ddot{T}$ $\forall x, \forall t$

$u''(x,t) = Y''(x) T(t)$ $\quad \Leftrightarrow -EI \dfrac{Y^{(4)}}{Y} T - KT = \rho A \ddot{T}$ $\forall x, \forall t$

$u'''(x,t) = Y'''(x) T(t)$

$u^{(4)}(x,t) = Y^{(4)}(x) T(t)$ $\quad \Leftrightarrow -EI \dfrac{Y^{(4)}}{Y} - K = \rho A \dfrac{\ddot{T}}{T}$ $\forall x, \forall t$

$\dot{u}(x,t) = Y(x) \dot{T}(t)$

$\ddot{u}(x,t) = Y(x) \ddot{T}(t)$ $\quad \Leftrightarrow -\dfrac{EI}{\rho A} \dfrac{Y^{(4)}}{Y} - \dfrac{K}{\rho A} = \dfrac{\ddot{T}}{T}$ $\forall x, \forall t$

D'où $-\dfrac{EI}{\rho A} \dfrac{Y^{(4)}}{Y} - K = -\omega^2$ et $\dfrac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2$, d'où :

$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$ et $-EI Y^{(4)} - KY + \rho A \omega^2 Y = 0$

d'où $\ddot{T}+\omega^2 T = 0$ et $Y^{(4)} + Y\left(\frac{K}{EI} - \frac{\rho A}{EI}\omega^2\right) = 0$

3.4 On cherche à résoudre $Y^{(4)} + YC = 0$. On pose $Y = e^{iks}$
$Y' = ike^{iks}$, $Y'' = -k^2 e^{iks}$, $Y^{(3)} = -ik^3 e^{iks}$, $Y^{(4)} = k^4 e^{iks}$
d'où $k^4 e^{iks} + Ce^{iks} = 0 \iff (k^4+C)e^{iks} = 0 \iff k^4 = -C$.

On a donc $k^4 = \frac{\rho A}{EI}\omega^2 - \frac{K}{EI}$ qui a 4 solutions

distinctes : k, $-k$, ik et $-ik$ pour $k = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}\omega^2 - \frac{K}{EI}}$

On peut donc réécrire $Y(x) = A_1\cos(kx) + A_2\sin(kx) + A_3\cosh(kx) + A_4\sinh(kx)$

3.5 $u(0,t) = 0, \forall t \iff Y(0)T(t) = 0, \forall t \iff Y(0) = 0$
$\Theta(0,t) = 0, \forall t \iff \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \forall t \iff Y'(0) = 0$

$M(L,t) = 0, \forall t \iff EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0, \forall t \iff Y''(L) = 0$

$N(L,t) = 0, \forall t \iff -EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L,t) = 0, \forall t \iff Y'''(L) = 0$

3.6 Enfin de déterminer les k admissibles, on calcule les trois dérivées de Y, puis on applique les conditions aux limites pour obtenir un système d'équations en fonction de A_1, A_2, A_3, A_4, k que l'on peut mettre sous forme matricielle $\mathbb{M} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0$. Pour déterminer les k admissibles non triviaux, on résout l'équation $\det(\mathbb{M}) = 0$ car la matrice $\mathbb{M}$ doit être non inversible.

3.7 Pour k non nul, l'équation 11 donne : $\cos(kL) = -\frac{1}{\cosh(kL)}$

Grâce au graphique, on identifie $kL = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$

3.8 Si $kL = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\cos(kL) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \forall n$

$\sin(kL) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ pour n pair

ou $\sin(kL) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ pour n impair

alors $Y(x) = \cos(kx) - \cosh(kx) - \dfrac{\cosh(kL)}{1 + \sinh(kL)}\left(\sin(kx) - \sinh(kx)\right)$ n pair

et $Y(x) = \cos(kx) - \cosh(kx) - \dfrac{\cosh(kL)}{-1 + \sinh(kL)}\left(\sin(kx) - \sinh(kx)\right)$ n impair

3.9 On a $k = \sqrt{\dfrac{\rho A}{EI}\omega^2 - \dfrac{K}{EI}}$

$k = 0 \iff \rho A \omega^2 = K \iff \omega^2 = \dfrac{K}{\rho A}$

$\iff \rho A \omega^2 = \gamma E$

$\iff \gamma = \dfrac{\rho A \omega^2}{E}$