Université de Rennes
Département de Mathématiques

M1 CSM - M1 SNS - M1 MF, 2025-2026
Optimisation et Recherche Opérationnelle

TRAVAUX PRATIQUES

2. Méthode du gradient à pas optimal

On s'intéresse au problème : trouver $u^* \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$J(u^*) = \min_{u \in \mathbf{R}^n} J(u),$$

où J est une fonctionnelle continûment différentiable sur $\mathbf{R}^n$.
Une méthode numérique pour résoudre ce problème est la méthode du gradient à pas optimal. Cet algorithme s'écrit:

- On part de u_0, a priori arbitraire.

- À l'étape k, connaissant u_k, on calcule u_{k+1} par

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k \nabla J(u_k)$$

où $\alpha_k \in \mathbf{R}$ réalise le minimum $\min\limits_{\alpha} J(u_k - \alpha \nabla J(u_k))$.

- On arrête l'algorithme lorsqu'un test de convergence est vérifié, ou lorsque le nombre maximum d'itérations est dépassé.

Pour mettre en œuvre la méthode du gradient à pas optimal, on créera les fichiers Matlab suivants :

- `J.m` définira la fonctionnelle J pour les exemples considérés. Tous les exemples seront programmés au travers d'une seule fonction qui utilisera une variable globale `numex` pour distinguer les différents exemples proposés.

- `GJ.m` contiendra l'expression du gradient de la fonctionnelle J en fonction du paramètre `numex`.

- `Gradopt.m` qui contiendra le programme principal mettant en œuvre la méthode du gradient à pas optimal. Ce programme prendra en compte le fait que la fonctionnelle est quadratique ou non, ainsi que la précision souhaitée et le nombre d'itérations maximal autorisé.

On utilisera pour test d'arrêt la condition suivante :

$$\|\nabla J(u_k)\| \leq \tau \qquad \text{avec} \;\; \tau = 10^{-6}.$$

Méthode du gradient à pas optimal pour une fonctionnelle quadratique elliptique

Dans le cas d'une fonctionnelle quadratique elliptique

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) + c$$

on peut calculer facilement le paramètre α_k. On a

$$\alpha_k = \frac{\|w_k\|^2}{(Aw_k, w_k)} \qquad \text{avec} \;\; w_k = Au_k - b = \nabla J(u_k).$$

On utilisera pour cela la fonction `AJ.m` qui à u associe Au.

1 - Écrire un programme Matlab mettant en œuvre la méthode du gradient à pas optimal pour une fonctionnelle quadratique elliptique.

Récupérer les deux fichiers `visiso.m` et `visiter.m` sur l'espace Moodle dédié à ce module.

Ces fichiers contiennent des fonctions permettant l'affichage graphique des lignes de niveau (`visiso.m`) et des caractéristiques de la méthode du gradient à pas optimal : suite des points (u_k) et directions de descente (`visiter.m`). Incorporer l'appel de ces fonctions graphiques au programme.

2- Résoudre par la méthode du gradient à pas optimal les problèmes suivants :

$$(\mathcal{P}_1) \; : \; \min \;\; -2x_1x_2 - 2x_2 + x_1^2 + 2x_2^2,$$

en prenant $u_0 = (0, 0)$ (le minimum est atteint en $u^* = (1, 1)$).

$$(\mathcal{P}_2) \; : \; \min \;\; -2x_1x_2 - 4x_1 + x_1^2 + 2x_2^2,$$

en prenant $u_0 = (0, 0)$ (le minimum est atteint en $u^* = (4, 2)$).

$$(\mathcal{P}_3) \; : \; \min \;\; 5x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 7x_1x_2 + 2x_1 + x_2.$$

en prenant $u_0 = (0, 0)$ (le minimum est atteint en $u^* = (-3, 4)$).

À quelle matrice A correspond chacun de ces exemples ? Observer que deux directions de descente successives sont orthogonales. Justifier cette propriété.

Incidence du conditionnement de la matrice A

3 - Quel est le conditionnement de la matrice A (commande Matlab `cond`) de chacun des exemples précédents.

On souhaite illustrer le résultat suivant ([J.C. Culioli, *Introduction à l'optimisation*, Ellipse 1994.]) :

Si $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) + c$, avec A symétrique définie positive, la méthode du gradient à pas optimal converge vers l'unique optimum $u^* = A^{-1}b$.

De plus

$$\|u_k - u^*\|_A \leq \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^k \|u_0 - u^*\|_A$$

où r est le conditionnement de A relativement à la norme euclidienne.

Tracer sur un même graphique les courbes donnant $\log \|u_k - u^*\|_A$ en fonction de k pour les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_3)$. On pourra y superposer les courbes donnant le logarithme de $(\frac{r-1}{r+1})^k \|u_0 - u^*\|_A$. Commenter le graphique obtenu.

Méthode du gradient à pas optimal pour une fonctionnelle quelconque

4 - Écrire un programme Matlab mettant en œuvre la méthode du gradient à pas optimal dans le cas général. On utilisera la fonction Matlab `fminbnd` pour effectuer la recherche du paramètre α_k.

5 - Résoudre les problèmes suivants (on affichera la suite des points (u_k) et les directions de descente successives):

$$(\mathcal{P}_4) \ : \ \min \quad c(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - a x_1 + a x_2)^2 + (1 - b x_1 - b x_2)^2$$

où $a = 4, b = 4$ et $c = 10$. On prendra $u_0 = (-1, 2)$.

$$(\mathcal{P}_5) \ : \ \min \quad x_1^2 - x_2^2,$$

en prenant $u_0 = (1, 0)$, puis $u_0 = (1, 1)$.

$$(\mathcal{P}_6) \ : \ \min \ (x_1 - 1)^2 + p(x_1^2 - x_2)^2,$$

en prenant $p = 10$ et $u_0 = (0, 1)$ (le minimum global est atteint en $u^* = (1, 1)$).

Pour ces problèmes, on pourra aussi tester d'autres valeurs de u_0 que celles proposées.

Le problème $(\mathcal{P}_6)$ est un problème test classique. Les lignes de niveau de la fonctionnelle forment une vallée très étroite en forme de banane conduisant au minimum (cette fonction est appelée "Rosenbrock banana"). Seule une méthode efficace permet de trouver le minimum en un temps raisonnable et en évitant les difficultés numériques dues au mauvais conditionnement du Hessien.

6 - Étudier la convergence de la méthode du gradient à pas optimal (tracer la courbe donnant $\log \|u_k - u^*\|$ en fonction de k pour différents exemples).

Travail à rendre

Il est demandé de rendre un rapport à l'enseignant, au format pdf via l'espace Moodle dédié à ce module. Ce rapport doit expliquer les observations réalisées dans ce TP. Hors annexes, il n'excèdera pas 2 pages et ne contiendra ni graphe ni script Matlab. Il y sera joint, au plus, les annexes suivantes :

- le graphique demandé en question 3,
- les graphiques affichant les points (u_k) et les directions de descente successives pour les deux problèmes $(\mathcal{P}_4)$ et $(\mathcal{P}_5)$ dans le cadre de la question 5,
- la courbe donnant $\log \|u_k - u^*\|$ en fonction de k pour le problème $(\mathcal{P}_6)$ dans le cadre de la question 6, avec $u_0 = (0, 1)$.