UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Optimisation et recherche opérationnelle (ORO)

CONTRÔLE CONTINU N°1

Durée : 1 heure – Calculatrice autorisée
Fiches de cours autorisées (fiches distribuées + max 4 pages manuscrites)

Exercice 1.

On définit la fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$J(x, y) = (x-1)^2 + (x^2 - y)^2.$$

1. Justifier que J a un unique point qui réalise le minimum global et le calculer.
2. Vérifier que J est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$; calculer son gradient et son hessien en tout point.
3. Montrer que le déterminant de la matrice hessienne peut être négatif. La fonction J est-elle convexe ? Justifier.

Exercice 2.

On considère le disque D d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$, et la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^2$ par $J(x, y) = x - y$. On cherche les extrema relatifs de J sur D.

1. Qu'est-ce qui permet d'affirmer que des extrema existent ? On énoncera un résultat précis.
2. Montrer que ces extrema sont atteints sur le bord du disque pour $x^2 + y^2 = 1$
3. Écrire sous la forme d'un système d'équations la condition nécessaire donnée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, que doit satisfaire tout point qui réalise un extremum relatif sur ce bord.
4. Résoudre le système et donner les points qui réalisent un extremum relatif de J sur E.

Exercice 3.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $J(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - a(2x_1x_2) + 2(x_1 - x_2)$.

1. On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. Écrire J sous la forme d'une fonctionnelle quadratique : $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, en précisant A et b.
2. Déterminer en fonction des valeurs de a si cette fonction admet un minimum en un point unique de $\mathbb{R}^2$, plusieurs minimums ou aucun.
3. Dans le cas où il y a un seul minimum, le déterminer et calculer la valeur de J en ce point.
4. On se place dans le cas $a = 1/2$. Appliquer une itération de l'algorithme du gradient à pas optimal à J en partant de $x^{(0)} = (-1, 1)$.