

Modélisation en dynamique des structures

année 2025-2026

Loïc Le Marrec

loic.lemarrec@univ-rennes.fr



**Université
de Rennes**

Faculté des Sciences, Département-Mathématiques, IRMAR

15 septembre 2025

Table des matières

1	Modèles de corde	11
1.1	Principes généraux	11
1.1.1	Géométrie	11
1.1.2	Paramétrisation (lagrangienne)	11
1.1.3	Paramétrisation (eulérienne)	12
1.1.4	Cinématique	13
1.1.5	Déformation	13
1.1.6	Efforts internes	13
1.1.7	Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)	14
1.1.8	Modélisation d'une précontrainte (statique)	16
1.2	Modélisation générale de la dynamique	17
1.2.1	Formulation du problème	17
1.2.2	Expression générale de chaque terme	17
1.2.3	Principe Fondamental de la Dynamique	18
1.2.4	Linéarisation	19
1.3	Synthèse	20
1.4	Condition d'existence d'une solution	20
1.4.1	Equations de vibration	20
1.4.2	Conditions aux limites et conditions aux initiales	21
1.5	Conservation de l'énergie	22
1.6	Équations approchées	23
1.6.1	Ordre deux	23
1.6.2	Prise en compte de l'extension	23
1.6.3	Modèle de Kirchhoff-Carrier	23
1.6.4	Hierarchie entre les modèles	24
1.7	Travaux dirigés	25
1.7.1	Abscisse curviligne	25
1.7.2	Adimensionalisation	25
1.7.3	Solutions statiques	25
1.7.4	Solutions particulières	25
1.7.5	Poutre non-homogène	25
1.7.6	Poutre pesante suspendue	26
1.7.7	Corde en coordonnées spatiale	26
2	Analyse modale des cordes	27
2.1	Equations de vibration libre	27
2.1.1	Séparation des variables	28
2.1.2	Solutions en espace	29
2.1.3	Conditions aux limites et modes	30

2.2	Un exemple moins standard : conditions aux limites de <i>Robin</i>	32
2.2.1	Modes rigides	32
2.2.2	Modes oscillants	33
2.2.3	Discussion : reformulation, analyse numérique, régimes de comportement	33
2.3	Produit scalaire et orthogonalité	34
2.3.1	Cordes fixées et cas standards	35
2.3.2	Condition d'orthogonalité de Sturm-Liouville	35
2.4	Travaux dirigés	37
2.4.1	Dimensionnement	37
2.4.2	Conditions de Dirichlet et de Neumann	37
2.4.3	Conditions de Robin	37
2.4.4	Produit scalaire à poids	37
3	Solutions temporelles générales	39
3.1	Solution en temps	39
3.1.1	Solutions rigides en temps	39
3.1.2	Solutions oscillantes en temps	39
3.2	Solutions du problème libre	40
3.2.1	Décomposition modale	40
3.2.2	Conditions initiales	40
3.2.3	Amplitudes modales (<i>cas général</i>)	41
3.2.4	Amplitudes modales (<i>cas orthogonal</i>)	42
3.3	Solutions du problème forcé	42
3.3.1	Solutions statiques	43
3.3.2	Solutions dynamiques	43
3.3.3	Amplitudes et conditions initiales	45
4	Travaux dirigés	47
4.1	Chargement statique	47
4.2	Chargement statique sur un support élastique	47
4.3	Chargement dynamique uniforme	47
4.4	Chargement par une vague	48
4.5	Chargement par une force ponctuelle oscillante	48
4.6	Chargement par une force ponctuelle glissante	48
4.7	Vibrations sympathiques	48
4.8	Corde visqueuse	49
4.9	Forçage cinématique	50
4.10	Forçage dynamique	54
4.11	Choc	55
4.12	Arc	56
4.13	Pendule	56
5	Autres structures scalaires	59
5.1	Membranes	59
5.1.1	Vibrations libres d'une membrane rectangulaire	59
5.1.2	Vibrations libres d'une membrane rectangulaire	61
5.2	Cordes épaisses	62
5.2.1	Solutions oscillantes en temps	63
5.3	Solutions du problème libre	63
5.3.1	Décomposition modale	63

5.3.2	Conditions initiales	64
5.3.3	Amplitudes modales (<i>cas général</i>)	64
5.3.4	Amplitudes modales (<i>cas orthogonal</i>)	65
5.4	Solutions du problème forcé	66
5.4.1	Solutions statiques	66
5.4.2	Solutions dynamiques	67
5.4.3	Amplitudes et conditions initiales	68
6	Travaux dirigés	71
6.1	Chargement statique	71
6.2	Chargement statique sur un support élastique	71
6.3	Chargement dynamique uniforme	71
6.4	Chargement par une vague	72
6.5	Chargement par une force ponctuelle oscillante	72
6.6	Chargement par une force ponctuelle glissante	72
6.7	Vibrations sympathiques	72
6.8	Corde visqueuse	73
6.9	Forçage cinématique	74
6.10	Forçage dynamique	78
6.11	Choc	79
6.12	Arc	80
6.13	Pendule	80
7	Modèle de poutre	83
7.1	Construction du modèle	83
7.1.1	Hypothèses	83
7.1.2	Paramétrisation	83
7.1.3	Rappel sur les rotations	84
7.2	Formulation du problème	85
7.2.1	Cinématique	85
7.2.2	Déformation	85
7.2.3	Contraintes	86
7.2.4	Efforts	86
7.2.5	Equations d'équilibre	87
7.3	Synthèse	88
8	Dynamique de la flexion	91
8.1	Séparation des variables	91
8.2	Modes harmoniques	92
8.2.1	Equation de dispersion	92
8.2.2	Résolution de l'équation de dispersion	93
8.2.3	Formes modales	94
8.3	Modes particuliers	94
8.3.1	Modes statiques	95
8.3.2	Modes de glissement	96
8.4	Formulations intégrales	97
8.4.1	Approche énergétique	97
8.4.2	Orthogonalité des modes propres, condition de Sturm-Liouville	98
8.5	Modes propres	99
8.5.1	Conditions aux limites	99

8.5.2	Fréquences propres et modes propres	100
8.6	Conditions initiales	100
8.7	Domaine d'analyse	101
9	Exemple pour une poutre en appuis simple	103
9.1	Modes sollicités	103
9.1.1	Modes statiques	103
9.1.2	Modes basse fréquence	104
9.1.3	Modes de glissement	104
9.1.4	Modes haute fréquence	105
9.1.5	Modes de flexion et de cisaillement	105
9.2	Conditions initiales	106
9.2.1	Reformulation des conditions initiales	106
9.2.2	Amplitude modale	106
9.2.3	Solutions temporelles	107
10	Code	109
11	Liste d'exercice	119
11.1	Chocs	119
11.2	Fonction erreur	119
11.3	Approche asymptotique	119
11.4	Vibration libre	120
11.5	Vibration forcée	121
12	Modèle d'Euler-Bernoulli	123
12.1	Construction du modèle	123
12.1.1	Hypothèse du modèle	123
12.1.2	Discussion et généralisation	124
12.1.3	Reformulation	124
12.2	Vibrations libres	125
12.2.1	Séparation des variables	125
12.2.2	Modes statiques	125
12.2.3	Modes dynamiques	126
12.2.4	Approche énergétique	127
12.2.5	Orthogonalité des modes propres, condition de Sturm-Liouville	128
12.2.6	Conditions aux limites	129
12.2.7	Conditions initiales	129
12.3	Exemple pour une poutre en appuis simple	130
12.3.1	Modes sollicités	130
12.3.2	Modes statiques	130
12.3.3	Modes dynamique	130
12.3.4	Conditions initiales	131
12.3.5	Comparaison avec le modèle de Timoshenko	131
13	Formulation adimensionnelle	135
13.1	Adimensionnalisation	135
13.1.1	Grandeurs adimensionnelles et grandeurs caractéristiques	135
13.1.2	Adimensionnalisation des variables	136
13.1.3	Equation adimensionnelle	136

13.1.4 Conséquences	137
13.2 Mise en application	137
14 Couplage de structures	141
14.1 Exemple	141
14.2 Vibrations libres	142

Conventions et autres infos

Les vecteurs sont notés en gras \mathbf{u} dans ce manuscrit mais \vec{u} quand on écrit à la main.

On considère dans ce document essentiellement des fonctions $F(S, t)$ dépendant d'une coordonnée spatiale S et d'une coordonnée temporelle t . Dans ce cas, on introduira les notations

$$F' := \frac{\partial F}{\partial S}, \quad \dot{F} := \frac{\partial F}{\partial t}$$

Si $F' = 0$ on dit que F est **homogène** ou **uniforme**, si $\dot{F} = 0$ on dit que F est **constant**.

Les équations importantes sont encadrées. Les mots importants ou nouveaux sont **en gras** quand ils sont mentionnés pour la première fois.

Bibliographie (ne pas hésiter à proposer des références)

- Rakotomanana, L. (2009). *Éléments de dynamique des solides et structures déformables*. EPFL Press.

Chapitre 1

Modèles de corde

L'objectif de ce cours est d'expliquer la construction du modèle de corde.

1.1 Principes généraux

Une corde est une structure matérielle uni-dimensionnelle précontrainte ne résistant qu'en tension/compression. Nous allons voir tout d'abord les éléments fondamentaux qui permettent de construire ce modèle.

1.1.1 Géométrie

On caractérise sa configuration à un instant donné par une courbe \mathcal{C} . En zoomant un peu, on peut interpréter \mathcal{C} comme le lieu des **centres de masse** G des **sections normales** \mathcal{S} successives de la corde. Contrairement à la fibre centrale \mathcal{C} , les sections \mathcal{S} sont supposées indéformables.

A un point matériel G de la corde on associe une densité de masse ρA où ρ est la masse-volumique du matériau qui constitue la corde et A est l'aire de la section \mathcal{S} centrée en G . Notons que ρA est une **densité linéique de masse** (quantité de masse par unité de longueur), mesurée en kg/m .

1.1.2 Paramétrisation (lagrangienne)

La configuration \mathcal{C} dépend du **temps** t . Cette courbe est paramétrée par une **abscisse curviligne matérielle** S . Un point matériel de la corde situé à une abscisse S donnée, restera à cette abscisse quelque soit la déformation de la corde. On peut considérer S comme un **label** du point matériel. En mécanique, on dit aussi que S est une **coordonnée lagrangienne**.

Une corde étant finie, on considère que $S \in [0, L]$ où L sera considéré comme la longueur de la corde à vide (et donc non-tendue comme nous le verrons par la suite). A priori ρA peut dépendre de S quand la corde n'est pas homogène.

Cette structure est placée dans l'espace ambiant \mathbb{E} , euclidien et tri-dimensionnel. Si on fixe un point arbitraire dans cet espace – en général l'origine O d'un repère – alors la position d'un point matériel G de la corde, associé à l'abscisse S , est caractérisée par le vecteur position $\varphi(S, t) := \mathbf{OG}$ que l'on nomme **placement**. L'ensemble des placements, pour $S \in [0, L]$, définit donc une **configuration** de la corde à un instant t , tandis que l'ensemble des placements au cours du temps, pour S fixé, définit la **trajectoire** du point G associé à cette coordonnée S .

On nommera \mathbf{d} la **normale** à la section : le vecteur, unitaire, normal à la section qui est dirigé, par conven-

tion¹, dans le sens des S croissants. Notons que quand la corde n'est pas droite, \mathbf{d} dépend de S et que quand la corde bouge $\mathbf{d}(S, t)$ dépend de S et du temps t . Cependant \mathbf{d} est toujours tangent à la fibre \mathcal{C} .

1.1.3 Paramétrisation (eulérienne)

Un élément matériel de longueur initiale dS possède – dans une configuration donnée – une longueur ds , telle que

$$ds = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| dS$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{si } \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| < 1 & \text{ la corde subit localement une } \mathbf{compression} \\ \text{si } \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| = 1 & \text{ la corde ne subit pas de déformation locale} \\ \text{si } \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| > 1 & \text{ la corde subit localement une } \mathbf{extension} \end{aligned}$$

La **longueur actuelle** de la corde dans une configuration donnée est donc

$$\ell = \int_0^L \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| dS$$

Et l'on peut définir une **abscisse curviligne actuelle**

$$s = \int_0^S \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| dS$$

où $s \in [0, \ell]$ est donc orientée dans le même sens que S . L'abscisse curviligne s est la **coordonnée eulérienne** de la corde.

Application pour la densité linéique de masse

Tout comme la longueur, la densité linéique de masse peut être réactualisée si la structure subit une transformation. Si l'on considère une structure ayant une densité linéique au repos ρA et une densité linéique dans une autre configuration $\tilde{\rho} A$, alors nous avons :

$$\rho A = \tilde{\rho} A (1 + \varepsilon)$$

où ρA est la densité linéique lagrangienne, tandis que $\tilde{\rho} A$ est la densité linéique eulérienne.

La masse totale de la structure est conservée bien sûr. Elle peut être définie en utilisant des grandeurs lagrangienne ou eulérienne :

$$m = \int_0^L \rho A dS = \int_0^\ell \tilde{\rho} A ds$$

En pratique nous n'utiliserons pas vraiment les coordonnées eulériennes.

1. Une convention n'est pas une hypothèse, c'est juste un choix de formulation bien adapté au problème.

1.1.4 Cinématique

La vitesse d'un point matériel situé en S est donné par le vecteur \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}(S, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ce vecteur est toujours tangent à la trajectoire du point G associé à S . Les unités de \mathbf{v} sont en m/s .

Tout comme le vecteur vitesse, il est important d'introduire $\frac{\partial \varphi}{\partial S}$ qui est un vecteur sans dimension. Nous avons vu que la norme de ce vecteur renseigne sur l'état de la configuration.

A chaque instant ce vecteur est toujours tangent à la configuration \mathcal{C} , en S . Dit autrement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} // \mathbf{d}$$

1.1.5 Déformation

Compte tenu des remarques importantes mentionnées précédemment, il est pratique de définir une nouvelle quantité.

Définition 1.1: Déformation

La déformation est le scalaire

$$\varepsilon(S, t) := \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right\| - 1$$

tel que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = (1 + \varepsilon) \mathbf{d}$$

C'est un scalaire sans dimension, et l'on considérera que les déformations admissibles sont telles que $\varepsilon > -1$. En pratique $|\varepsilon| \simeq 10^{-2}$, et l'on peut caractériser ainsi la déformation locale :

Si $\varepsilon < 0$ la corde subit localement une **compression**

Si $\varepsilon = 0$ la corde ne subit pas de déformation locale

Si $\varepsilon > 0$ la corde subit localement une **extension**

1.1.6 Efforts internes

Principe général

Quand une structure est soumise à des efforts extérieurs, elle se déforme mais reste continue (avant de casser en tout cas). Cela est lié aux **efforts internes** ou **efforts de liaison**. On ne considère dans les prochains chapitres que des efforts de liaison de type **force**. Il s'agit de vecteurs, dont les unités sont en Newton ($1 N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$).

Considérons une structure de longueur L dans une configuration déformée. Que signifie $\mathbf{N}(S, t)$ en un point donné de cette structure ?

$\mathbf{N}(S, t)$ est la force qu'exerce la partie "amont" de la structure (le domaine matériel situé en $[S, L]$ sur la partie "aval" (le domaine matériel situé en $[0, S]$). Cette force permet de maintenir la cohésion (continuité) de la structure.

$-\mathbf{N}(S, t)$ est la force qu'exerce la partie "aval" située en $[0, S]$ sur la partie "amont" située en $[S, L]$.

Comme ces contraintes de liaisons s'exercent sur toute la structure, nous avons donc à faire à un champ d'effort de liaison $\mathbf{N}(S, t)$ le long de \mathcal{C} .

Ce choix de signe est intimement lié à l'orientation de la paramétrisation et donc à l'orientation de \mathbf{d} .

Le fait que la force de liaison de la partie amont sur l'aval, soit l'opposé de la force de liaison de la partie aval sur l'amont n'est rien d'autre que l'application de la troisième loi de Newton :

Définition 1.2: Principe d'action-réaction

L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.

Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687

Liens avec les conditions aux limites

Considérons une structure de longueur initiale L , telle que deux forces sont exercées par l'extérieur en ses extrémités : \mathbf{F}_0 en $S = 0$ et \mathbf{F}_L en $S = L$. Le point en $S = 0$ subit donc deux forces \mathbf{F}_0 et $\mathbf{N}(0, t)$ de la part de la partie de la structure située en $S \in]0, L]$. Le point en $S = L$ subit, lui, les forces \mathbf{F}_L mais également les efforts internes liés à la structure situé en "amont" : $-\mathbf{N}(L, t)$. Le Principe d'action-réaction mentionné plus haut impose alors les **conditions de continuités des efforts** :

$$\mathbf{N}(0, t) = -\mathbf{F}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(L, t) = \mathbf{F}_L \quad (1.1)$$

qui permet de faire le lien entre les efforts internes (aux extrémités) et les conditions aux limites imposés par l'extérieur.

Loi de comportement

L'expression des efforts internes dépend du type de matériau et de la structure. La loi qui permet de déterminer les efforts internes en fonctions de la déformation de la structure s'appelle une **loi de comportement**. Pour un modèle de corde la loi de comportement suivante est suffisante :

Définition 1.3: Loi de Hooke

$$\mathbf{N}(S, t) = EA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial S} - \mathbf{d} \right) \quad \text{soit de manière équivalente} \quad \mathbf{N}(S, t) = EA \varepsilon \mathbf{d} \quad (1.2)$$

où A est l'aire de la section et E le **module de Young** en Pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, soit $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$). Le module de Young est propre à chaque matériaux, il caractérise la rigidité en tension/compression du matériau. Le terme EA est souvent appelé **module de rigidité** de la structure. En pratique nous avons ces ordres de grandeurs :

$A \ll L^2$ car la structure est élancée.

$E = 210 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ pour de l'acier par exemple.

$|\varepsilon| \sim 10^{-2}$ car la déformation est modérée (de l'ordre de quelque pourcent).

Remarquons que le premier paramètre est lié à la géométrie, le second au type de matériau qui constitue la structure, le troisième à la déformation qu'elle subit.

Avec cette loi de comportement les efforts internes sont toujours orientés dans la direction \mathbf{d} tangente à la fibre centrale \mathcal{C} . On parle de forces **longitudinales**. Cela signifie qu'une corde est insensible à un pli, à une flexion : elle n'exerce de réaction qu'à une tension/compression.

1.1.7 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Généralité

Il s'agit de la seconde loi de Newton, qui s'exprime ainsi

Définition 1.4: Principe Fondamental de la Dynamique

Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée..

Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687

mais que l'on ne comprend pas très bien.

Pour un point matériel

Appliquons le à un point matériel de masse m , ayant une vitesse \mathbf{v} qui subit de la part de l'extérieur des forces dont la résultante (la somme de toutes les forces extérieures) est \mathbf{F} . Ce principe stipule que

$$\mathbf{F} = \frac{d m \mathbf{v}}{dt}$$

La quantité $m \mathbf{v}$ est la **quantité de mouvement** du point matériel.

Dans notre cas nous avons à faire à un domaine matériel \mathcal{C} , mais ce principe s'appliquant à tout point, on peut considérer une partie infinitésimale de la structure et lui appliquer le PDF. C'est l'idée qui est suivie ci-après.

Expression locale pour un domaine matériel

On considère une structure \mathcal{C} , paramétrée par la coordonnée matérielle $S \in [0, L]$. Cette structure subit plusieurs efforts extérieurs (en général ce sont des données du problème) :

$\mathbf{F}_0(t)$ une force extérieure appliquée en $S = 0$

$\mathbf{F}_L(t)$ une force extérieure appliquée en $S = L$

$\mathbf{b}(S, t)$ une densité linéique de force (force par unité de longueur, en N/m) appliquée le long de la fibre. Cette densité induit donc une force totale sur la structure qui est

$$\int_0^L \mathbf{b}(S, t) dS$$

On considère que le champs $\mathbf{b}(S, t)$ est continu le long de S quelque soit t (même si – nous le verrons plus tard – cette condition peut être relaxée). Par exemple si la structure est soumise à son poids propre $\mathbf{b} = \rho A \mathbf{g}$ où $\|\mathbf{g}\| = 9.81 m/s^2$ est l'accélération de la gravité et \mathbf{e}_x est ici vertical ascendant.

Dans le domaine matériel des efforts de liaisons $\mathbf{N}(S, t)$ sont également impliqués. Ils satisfont les conditions aux limites (1.1).

Considérons un élément matériel infinitésimal de la structure compris entre $S - \frac{dS}{2}$ et $S + \frac{dS}{2}$. Ici dS est donc infinitésimal ce qui permettra de justifier facilement l'approximation suivante

$$\int_{S - \frac{dS}{2}}^{S + \frac{dS}{2}} \mathbf{b}(\xi, t) d\xi \simeq \mathbf{b}(S, t) dS$$

(ce qui correspond à une approximation de l'intégrale par la formule du rectangle et du point milieu). Ainsi, les efforts exercés par l'extérieur à ce sous domaine sont

$-\mathbf{N}(S - \frac{dS}{2}, t)$ induit par la liaison avec la partie "amont" située en $S \in [0, S - \frac{dS}{2}]$

$\mathbf{N}(S + \frac{dS}{2}, t)$ induit par la liaison avec la partie "aval" située en $S \in]S + \frac{dS}{2}, L]$

$\mathbf{b}(S, t) dS$ venant de la densité de force extérieure.

Ce sous-domaine possède une masse $\rho A dS$ (indépendante du temps) et une vitesse moyenne $\mathbf{v}(S, t)$ car, en prolongeant le calcul précédent :

$$\frac{1}{dS} \int_{S-\frac{dS}{2}}^{S+\frac{dS}{2}} \mathbf{v}(\xi, t) d\xi \simeq \mathbf{v}(S, t)$$

Nous avons donc tous les éléments pour appliquer le PFD à ce sous-domaine :

$$\mathbf{N}(S + \frac{dS}{2}, t) - \mathbf{N}(S - \frac{dS}{2}, t) + \mathbf{b}(S, t)dS = \rho A dS \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Nous avons par continuité (en négligeant le termes en $\mathcal{O}(dS^2)$)

$$\mathbf{N}(S + \frac{dS}{2}, t) - \mathbf{N}(S - \frac{dS}{2}, t) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} dS$$

et de plus $\mathbf{v}(S, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Au final, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} dS + \mathbf{b} dS = \rho A dS \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

pour tout domaine infinitésimal de longueur dS . On a donc la possibilité de "simplifier" par dS , pour avoir une expression valable en tout point de \mathcal{C} :

Définition 1.5: Principe Fondamental de la Dynamique, local

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} + \mathbf{b} = \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \forall S \in]0, L[, \forall t \quad (1.3)$$

Expression globale pour un domaine matériel

En intégrant l'expression précédente sur toute la structure, on obtient en utilisant les conditions aux limites (1.1) :

Définition 1.6: Principe Fondamental de la Dynamique, global

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_L + \int_0^L \mathbf{b} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \rho A \mathbf{v} dS \quad (1.4)$$

qui stipule que la somme des forces extérieures appliquées au domaine matériel est égal à la variation au cours du temps de la quantité de mouvement totale de la structure.

Remarquons que dans cette expression globale, les efforts de liaison n'interviennent pas. C'est cohérents avec la seconde loi de Newton car ces efforts de liaison sont des efforts internes et non des efforts exercés par l'extérieur.

1.1.8 Modélisation d'une précontrainte (statique)

On considère une structure à l'équilibre subissant uniquement des efforts en ses extrémités. Un problème à l'équilibre est statique, c'est à dire indépendant du temps.

Comme la structure est à l'équilibre, l'ensemble des points de la structure possède une vitesse nulle $\mathbf{v} = 0$ (ou uniforme et constante, mais, l'on pourra vite constater que si c'est le cas, rien n'est modifié pour autant). Comme il n'y a pas d'efforts en les extrémités alors $\mathbf{b} = 0$. Notons enfin \mathbf{F}_0 et \mathbf{F}_L les forces extérieures

appliquées en $S = 0$ et $S = L$ respectivement. Nous avons donc en utilisant (1.4) : $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_L = 0$. Ainsi les forces aux deux extrémités sont de mêmes intensités et de mêmes directions (mais de sens opposés). Pour éviter toute redondance on notera donc $-\mathbf{F}$ et \mathbf{F} les forces extérieures appliquées en $S = 0$ et $S = L$ respectivement. Définissons la direction $\mathbf{e} := \mathbf{F}/\|\mathbf{F}\|$ de cette force, ainsi que sa norme F , nous aurons $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$.

L'application du PFD (1.3) impose :

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} = 0$$

Ainsi les efforts internes sont uniformes : l'intensité ne dépend pas de S , mais également, ils sont tous colinéaires, orientés suivant une direction \mathbf{d} unique.

Les conditions aux limites (1.1) imposent $\mathbf{N}(S) = \mathbf{F}$ le long de \mathcal{C} . Comme les efforts internes sont orientés suivant la fibre \mathcal{C} , on a donc nécessairement $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ le long de \mathcal{C} . En d'autre terme, la structure est forcément une droite orientée dans la direction imposée par la force extérieure. En ce qui concerne la déformation nous avons en utilisant (1.2) : $EA\varepsilon = F$. La déformation n'est donc pas nécessairement homogène. Elle est homogène uniquement si le module de rigidité EA est le même le long de la fibre.

La notation F est très générique, afin d'éviter toute confusion, nous utiliserons par la suite un autre symbol pour exprimer la précontrainte : N_0 . Nous aurons donc $\mathbf{N} = N_0\mathbf{d}$, avec $N_0 < 0$ pour une pré-compression et $N_0 > 0$ pour une pré-tension.

1.2 Modélisation générale de la dynamique

Nous avons maintenant tout les éléments pour étudier la dynamique de cette structure.

1.2.1 Formulation du problème

Pour simplifier, nous allons considérer ici un problème plan. On suppose que la corde se déplace dans l'espace $(O; \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x)$, où O est une origine fixe dans le repère galiléen et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est une base cartésienne, orthonormée directe, que l'on appellera **base spatiale**. On suppose que la corde tendue est à l'équilibre située le long de \mathbf{e}_z . La corde de longueur matérielle L est de longueur physique $(1 + \varepsilon_0)L$, où $\varepsilon_0 = N_0/(EA)$ est la pré-déformation induite par la pré-tension. La configuration à l'équilibre est donc simplement

$$\varphi_0(S) = (1 + \varepsilon_0)S\mathbf{e}_z$$

Le placement à un instant quelconque est donc $\varphi(S, t)$ et le déplacement est

$$\mathbf{u}(S, t) = \varphi(S, t) - \varphi_0(S)$$

On cherche donc à déterminer les équations qui gouvernent le comportement des **composantes transversales** $u_x(S, t)$ et **longitudinales** $u_z(S, t)$ du déplacement.

1.2.2 Expression générale de chaque terme

Nous avons vu que les quantités impliquées dans le PFD (1.3) étaient associées à la vitesses et aux efforts internes, tandis que la loi de comportement (1.2) impliquait la dérivée spatiale du placement. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ &= \dot{u}_x \mathbf{e}_x + \dot{u}_z \mathbf{e}_z\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial S} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial S} \\ &= u'_x \mathbf{e}_x + (1 + \varepsilon_0 + u'_z) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

On a donc l'expression des efforts internes

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= EA (u'_x \mathbf{e}_x + (1 + \varepsilon_0 + u'_z) \mathbf{e}_z - \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{N}_0 + EA(\mathbf{u}' - \mathbf{d})\end{aligned}$$

Ce qui est assez incroyable car au final :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} &= \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial S} + \frac{\partial EA(\mathbf{u}' - \mathbf{d})}{\partial S} \\ &= (EA(\mathbf{u}' - \mathbf{d}))'\end{aligned}$$

car nous avons vu en section §1.1.8 que \mathbf{N}_0 est uniforme. En d'autre terme... la contribution de la pré-tension *semble* avoir disparue ! A ce stade, donc le PDF s'exprime ainsi

$$\boxed{(EA(\mathbf{u}' - \mathbf{d}))' + \mathbf{b} = \rho A \ddot{\mathbf{u}}}\tag{1.5}$$

Enfin on peut expliciter l'expression de la direction de la structure :

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \frac{1}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial S}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial S} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u'_z)^2}} (u'_x \mathbf{e}_x + (1 + \varepsilon_0 + u'_z) \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathbf{u}' - \mathbf{d} = u'_x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u'_z)^2}}\right) \mathbf{e}_x + \left(u'_z - \frac{1 + \varepsilon_0 + u'_z}{\sqrt{u'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u'_z)^2}}\right) \mathbf{e}_z$$

1.2.3 Principe Fondamental de la Dynamique

Rappelons le PFD sous sa forme vectoriel :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial S} + \mathbf{b} = \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}}\tag{1.6}$$

Nous avons vu que ce dernier s'exprimait également, en fonction du déplacement \mathbf{u} et de la direction de la structure \mathbf{d} , suivant (1.5). Si on décompose le efforts internes $\mathbf{N} = N_x \mathbf{e}_x + N_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_z \mathbf{e}_z$ dans la base cartésienne

$$\boxed{N'_x + b_x = \rho A \ddot{u}_x}\tag{1.7}$$

$$\boxed{N'_z + b_z = \rho A \ddot{u}_z}\tag{1.8}$$

(1.8) gouverne les **vibrations longitudinales** (suivant \mathbf{e}_z) tandis que (1.7) gouverne les **vibrations transverses** (suivant \mathbf{e}_x).

Les équations (1.3) (et donc (1.7) et (1.8)) sont valables pour d'autres structures unidimensionnelles : les cordes, mais aussi les barres, les poutres... nous le verrons plus tard.

Mais quelque soit les expressions que l'on utilise, il semble que l'on a plus d'inconnu que d'équations. En fait, comme \mathbf{d} s'exprime en fonction des composantes de \mathbf{u} , on peut se permettre de projeter (1.5) sur la base cartésienne pour obtenir :

Définition 1.7: Expression géométriquement exactes

$$\left(EAu'_x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u_x'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u_z')^2}} \right) \right)' + b_x = \rho A \ddot{u}_x \quad (1.9)$$

$$\left(EA \left(u'_z - \frac{1 + \varepsilon_0 + u'_z}{\sqrt{u_x'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u_z')^2}} \right) \right)' + b_z = \rho A \ddot{u}_z \quad (1.10)$$

Il s'agit de deux équations aux dérivées partielles non-linéaires et couplées. Elles ont été obtenues sans aucunes approximations ou hypothèses supplémentaires.

Remarque 1. Ces résultats sont présentés en coordonnées cartésienne, dans la base matérielle, les équations obtenues sont complètement différentes.

1.2.4 Linéarisation

Pour de petites déformations on considère que $|u'_z| \ll \varepsilon_0 \ll 1$ et $\sim |u'_x| \ll 1$. On peut alors effectuer un développement limité au premier ordre du terme de gauche pour avoir les équations linéarisées. Ainsi on a par exemple

$$\sqrt{u_x'^2 + (1 + \varepsilon_0 + u_z')^2} = \sqrt{(1 + \varepsilon_0)^2 + 2(1 + \varepsilon_0)u_z' + u_x'^2 + u_z'^2} \sim 1 + \varepsilon_0 + u_z'$$

En procédant de la sorte on obtient

$$\boxed{N_0 u''_x + b_x = \rho A \ddot{u}_x} \quad \text{équation des cordes linéarisée} \quad (1.11)$$

$$\boxed{(EAu'_z)' + b_z = \rho A \ddot{u}_z} \quad \text{équation de vibration longitudinale linéarisée} \quad (1.12)$$

Ces deux équations sont semblables, mais soulignons que la dérivation en espace est située de manière différente dans (1.12) et (1.11). En effet, a priori E et A peuvent ne pas être homogènes le long de la structure !

On observe qu'au premier ordre, les modes de vibrations sont **découplés**.

On retrouve par identification les deux composantes linéarisées de la force \mathbf{N} appliquée à une section \mathcal{S} :

$$\boxed{N_x = N_0 u'_x} \quad \text{force transverse linéarisée} \quad (1.13)$$

$$\boxed{N_z = EAu'_z} \quad \text{force normale linéarisée} \quad (1.14)$$

Ces deux équations peuvent être interprétées comme des lois de comportement linéarisés pour les mouvements normaux et transverses.

Remarque 2 (Influence de la pré-contrainte sur la vibration longitudinale). *Quand on étudie la dynamique longitudinale, le fait que la structure soit précontrainte ne joue aucun rôle, en tout cas dans le cadre d'une étude linéarisée. Ces équations sont donc valables pour $N_0 = 0$ comme pour $N_0 \neq 0$.*

Les quatre équations précédentes sont fondamentales pour ce cours.

1.3 Synthèse

Pour l'instant nous avons ceci dans le cas général

Définition 1.8: Equations de vibration des cordes (3D)

$$\mathbf{N}' + \mathbf{b} = \rho A \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad \text{Principe Fondamental de la Dynamique} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{N} = EA(\boldsymbol{\varphi}' - \mathbf{d}) \quad \text{Loi de comportement} \quad (1.16)$$

$$\boldsymbol{\varphi}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{d} \quad \text{Contrainte cinématique} \quad (1.17)$$

et dans le cas linéarisé et plan :

Définition 1.9: Équations de vibrations transverses de cordes

Soit $u(S, t)$ le déplacement transverse

$$N' + b = \rho A \ddot{u} \quad \text{Principe Fondamental de la Dynamique} \quad (1.18)$$

$$N = N_0 u' \quad \text{Loi de comportement} \quad (1.19)$$

Définition 1.10: Équations de vibrations longitudinales (tension-compression)

Soit $u(S, t)$ le déplacement longitudinal

$$N' + b = \rho A \ddot{u} \quad \text{Principe Fondamental de la Dynamique} \quad (1.20)$$

$$N = EA u' \quad \text{Loi de comportement} \quad (1.21)$$

Où il est important de rappeler que dans les deux définitions précédentes, la force $N(S, t)$ et la densité $b(S, t)$ ne sont pas de même nature.

1.4 Condition d'existence d'une solution

Que ce soit pour le problème présenté dans les définitions (1.9) ou (1.10), il n'est pas encore possible de déterminer une solution, car plusieurs informations complémentaires doivent être fournies pour avoir un problème bien posé. Nous allons présenter les éléments complémentaires en question pour le problème de vibration transverse des cordes.

1.4.1 Equations de vibration

Le problème est donc de trouver $u(S, t)$ solution de

$$N' + b = \rho A \ddot{u} \quad (1.22)$$

$$N = N_0 u'$$

Cette écriture est la plus fondamentale, elle permet de faire apparaître les deux lois importantes du problème (PFD & comportement) et les deux variables $N(S, t)$ et $u(S, t)$ qui servent à décrire la physique en jeu. Bien entendu en injectant la loi de comportement dans le PFD on obtient :

$$N_0 u'' + b = \rho A \ddot{u} \quad (1.23)$$

une équation scalaire qui ne dépend plus que de u . Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, du second ordre en temps et en espace, linéaire en u .

La densité $b(S, t)$ est appelée **terme source**. Si $b \neq 0$ on dit que l'équation est **non-homogène**, on parle de **vibrations forcées**; par contre si $b = 0$ l'équation est **homogène** et il s'agit alors de **vibrations libres**.

A priori cette équation n'est pas à coefficient constant, car il est possible que la corde soit non-homogène : ρA peut dépendre de S . Cependant, sauf mention explicite, nous allons considérer que ρA est uniforme et donc que l'équation est à coefficients constants.

1.4.2 Conditions aux limites et conditions aux initiales

Les équations précédentes gouvernent le comportement local : pour tout $S \in]0, L[$ et tout $t > 0$ donnés. Ces intervalles sont des ouverts : sur les bords de ces domaines, on fixera des expressions spécifiques.

Conditions aux limites

Sur les bords du domaine, en $S = 0$ et $S = L$, on impose des conditions sur l'expression du déplacement ou de sa dérivée spatiale (ou autres) au cours du temps. Quand on impose une valeur à une grandeur au bord on parle de condition de **Dirichlet** alors que l'on parle de condition de **Neumann** quand on impose une valeur à la dérivée. Voici ci dessous un exemple typique

Exemple (I) si la corde est fixée en 0 et libre en L on aura $u(0, t) = 0$ et $N(L, t) = 0$ soit :

$$u(0, t) = 0, \quad u'(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.24)$$

cet exemple sera suivi dans la suite de la présentation afin d'appliquer les règles générales. On parle pour cet exemple d'une corde *encadrée/libre*. Mathématiquement on parle de conditions de type *Dirichlet* – *Neumann*.

Conditions initiales

A l'instant initial $t = 0$, on imposera les expressions de la position et de la vitesse :

$$u(S, 0) = u^0(S), \quad \dot{u}(S, 0) = v^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (1.25)$$

où $u^0(S)$ et $v^0(S)$ sont des profils donnés de position et de vitesse.

En toute logique les conditions initiales et aux limites doivent être **compatibles**. Si ce n'est pas le cas, il faudra faire attention. Ainsi pour l'exemple (I) donné, on doit avoir $u^0(0) = 0$ et $u'_0(L) = 0$ pour que tout se passe correctement.

Problème bien posé

La résolution du problème de vibration (1.22) admet une solution unique si les conditions initiales et aux limites sont spécifiées (et compatibles).

Une structure peut se mettre à vibrer, soit à cause des conditions aux initiales (même si $b = 0$) soit parce qu'elle est forcée (c'est à dire si $b \neq 0$).

1.5 Conservation de l'énergie

Partons de (1.23) multiplions la par \dot{u} , sommions le long de la structure, intégrons par partie quand c'est possible :

$$\begin{aligned} \int_0^L (N_0 u'' + b) \dot{u} \, dS &= \int_0^L \rho A \ddot{u} \dot{u} \, dS \\ \int_0^L N_0 u'' \dot{u} \, dS + \int_0^L b \dot{u} \, dS &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} \dot{u}^2 \rho A \, dS \\ [N_0 u' \dot{u}]_0^L - \int_0^L N_0 u' \dot{u}' \, dS + \int_0^L b \dot{u} \, dS &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} \dot{u}^2 \rho A \, dS \end{aligned}$$

Comme $N = N_0 u'$ on trouve après réarrangement :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L \frac{1}{2} \dot{u}^2 \rho A \, dS + \int_0^L \frac{1}{2} N u' \, dS \right) = [N \dot{u}]_0^L + \int_0^L b \dot{u} \, dS \quad (1.26)$$

On retrouve ici des termes qui ont un sens physique :

Energie cinétique l'énergie cinétique totale de la structure est

$$\mathcal{E}_c(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \dot{u}^2 \, dm \quad (1.27)$$

où $dm = \rho A \, dS$. Ainsi $\frac{1}{2} \dot{u}^2 \rho A$ est la densité linéique d'énergie cinétique.

Energie de déformation l'énergie de déformation totale est l'**énergie élastique** suivante

$$\mathcal{E}_e(t) = \int_0^L \frac{1}{2} N u' \, dS \quad (1.28)$$

Le terme $\frac{1}{2} N u'$ est la densité linéique d'énergie élastique.

Puissance des efforts extérieurs Le long de la structure, la puissance des efforts extérieurs est $\int_0^L b \dot{u} \, dS$. Introduisons $F_0(t)$ et $F_L(t)$: les forces extérieures agissant au niveau des bords, en $S = 0$ et $S = L$ respectivement. On a $N(0, t) = -F_0(t)$ et $N(L, t) = F_L(t)$. Ainsi $[N \dot{u}]_0^L = N(L, t) \dot{u}(L, t) - N(0, t) \dot{u}(0, t) = F_L(t) \dot{u}(L, t) + F_0(t) \dot{u}(0, t)$. Ainsi le terme de droite de (1.26) est la puissance totale exercée par les efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext}(t) = [N \dot{u}]_0^L + \int_0^L b \dot{u} \, dS \quad \mathcal{P}_{ext}(t) = F_0(t) \dot{u}(0, t) + F_L(t) \dot{u}(L, t) + \int_0^L b \dot{u} \, dS$$

Ainsi (1.26) stipule

Définition 1.11: Bilan d'énergie total de la structure

L'évolution de l'énergie totale stockée dans la structure sous forme d'énergie élastique et cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs exercés le long de la structure ou sur ses bords.

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_e) = \mathcal{P}_{ext} \quad (1.29)$$

Si $\mathcal{P}_{ext} = 0$ alors le problème est **conservatif** : l'énergie totale introduite par les conditions initiales est conservée au cours du temps.

1.6 Équations approchées

D'un côté le problème général (donné en Def.1.9 et Def.1.10) est inextricable (il pose même des problèmes d'un point de vue numérique); mais d'un autre côté les problèmes linéarisés sont souvent valables que pour des hypothèses très restrictives. On présente ici d'autres solutions approchées qui permettent d'étendre le domaine de validité. Dans ce cours, seule les approximations linéaires sont véritablement utiles pour la suite... néanmoins les autres modèles montrent la richesse des approches disponibles et permettent de mieux comprendre que pour une structure il existe des modèles, très différents les uns des autres.

1.6.1 Ordre deux

Si l'on souhaite aller plus loin, on peut considérer le développement de Taylor à l'ordre deux en δ . Cela permet de tenir compte de plus grandes déformations. On obtient après calcul :

$$(EAu'_z)' + (EA - N_0)(\frac{1}{2}u_x'^2)' + b_z = \rho A\ddot{u}_z \quad (1.30)$$

$$N_0u''_x + (EA - N_0)(u'_zu'_x)' + b_x = \rho A\ddot{u}_x \quad (1.31)$$

Le système d'équation devient non-linéaire et couplé. On peut remarquer qu'en général $N_0 \ll EA$ et donc $EA - N_0 \sim EA$

1.6.2 Prise en compte de l'extension

On peut construire un modèle plus fin quand la déformation axiale est de moindre intensité que la déformation transverse, c'est à dire que $|u'_z| \ll |u'_x| \ll 1$. Cette approximation est justifiée pour des sollicitations transverses de forte intensité pour lesquelles la corde subit un allongement non négligeable. On procède cette fois-ci en effectuant les substitutions suivantes $u'_x \rightarrow \delta u'_x$ et $u'_z \rightarrow \delta^2 u'_z$ dans le terme de gauche, puis on effectue un développement limité au troisième ordre en δ (supposé petit), enfin on fixe $\delta \rightarrow 1$ après l'opération. On obtient alors :

$$(EAu'_z)' + (EA - N_0)(\frac{1}{2}u_x'^2)' + b_z = \rho A\ddot{u}_z \quad (1.32)$$

$$N_0u''_x + (EA - N_0)(u'_zu'_x + \frac{1}{2}u_x'^3)' + b_x = \rho A\ddot{u}_x \quad (1.33)$$

Cette approximation enrichie le terme de vibrations transverses avec un terme cubique.

1.6.3 Modèle de Kirchhoff-Carrier

A partir des équations précédentes on peut introduire un modèle très utilisés en acoustique musical : le modèle de Kirchhoff-Carrier². L'idée est de supposer que dans (1.32) les termes d'inertie (accélération longitudinale) et de densité linéique (b_z) sont de moindres intensités que ceux liés à la déformation longitudinale. On a donc dans ce cas homogène et pratiquement quasi-statique

$$(EAu'_z)' + (EA - N_0)(\frac{1}{2}(u_x'^2)') \sim 0 \quad \text{soit} \quad u''_z \sim -\frac{1}{2}(u_x'^2)'$$

où l'on a utilisé que $EA - N_0 \sim EA$ (ce qui est presque toujours vrai en pratique) et que E et A sont homogène (ce qui limite le champs d'application de la théorie mais est souvent vrai finalement). Intégrons la relation trouvée, on obtient

$$u'_z \sim -\frac{1}{2}u_x'^2 + C$$

2. G. R. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik*, 1876; G. F. Carrier, *On the non-linear vibration problem of the elastic string* Quarterly of Applied Mathematics, 1945.

où C est une constante d'intégration. Intégrons la relation trouvée de 0 à L , on obtient :

$$u_z(L) - u_z(0) \sim -\frac{1}{2} \int_0^L u_x'^2 ds + CL$$

Pour une corde dont les extrémités restent à la même distance (*nouvelle hypothèse*), le terme de gauche est nul et donc :

$$C \sim \frac{1}{2L} \int_0^L u_x'^2 ds$$

Soit

$$u_z' \sim -\frac{1}{2} u_x'^2 + \frac{1}{2L} \int_0^L u_x'^2 ds$$

En injectant cette approximation dans (1.33), on obtient après simplification

$$N_0 u_x'' + \frac{EA - N_0}{2L} \left(\int_0^L u_x'^2 ds u_x' \right)' + b_x = \rho A \ddot{u}_x$$

L'intégrale étant une constante et comme $EA - N_0 \sim EA$, on trouve l'équation dite de Kirchhoff-Carrier : modèle

$$\left(N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L u_x'^2 ds \right) u_x'' + b_x = \rho A \ddot{u}_x$$

C'est une équation découplée du problème longitudinal, mais qui en tient compte. Plus étrange encore, l'inconnue u_x apparaît en tant que fonction inconnue de l'équation différentielle mais aussi en tant que coefficient de cette équation (à travers l'intégrale). Enfin, on observe que la structure de cette équation est très proche d'une équation d'onde *classique* mais avec une raideur additionnelle qui dépend de la norme L^2 de la déformation transverse u_x' . Notons que cette norme $\|u_x'\|_2$ dépend du temps. Bref une équation très étrange.

Un point intéressant dans ce modèle est qu'il combine des considérations mathématiques (développement de Taylor) avec des considérations physiques ($EA - N_0 \sim EA$, ou le fait de négliger l'inertie longitudinale). Une formulation plus rapide peut être trouvée dans le cours de C. Touzé.

L'équation de Kirchhoff-Carrier est très utilisée en synthèse sonore, notamment pour les cordes frappées (piano) où pincée (guitare) jouées *fortissimo*.

1.6.4 Hierarchie entre les modèles

On peut dire que l'on a cette hiérarchie

1. Géométriquement exact
2. Avec extension
3. Kirchhoff-Carrier
4. Ordre deux
5. Linéaire

du modèle le plus précis au plus approché.

Tous ces modèles se concentrent sur des non-linéarités géométriques et non sur des non-linéarités matérielles (on a toujours considéré une loi de comportement linéaire). En pratique c'est en effet les non-linéarités géométriques qui apparaissent en premier dans le cadre d'une étude dynamique (ce n'est pas toujours vrai pour des études quasi-statiques). C'est un constat que l'on peu généraliser à toutes les structures.

1.7 Travaux dirigés

1.7.1 Abscisse curviligne

On considère la courbe plane définie par le placement :

$$\varphi(z) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}z\right)\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z.$$

avec $z \in [0, \ell]$ et $a_n > 0$. On souhaite que cette courbe ai une longueur curviligne $(1 + \varepsilon)\ell$.

- Donnez une relation exacte entre a_n et $(1 + \varepsilon)\ell$
- Trouvez une solution approchée dans le cas ou $a_n \ll 1$.

1.7.2 Adimensionalisation

On introduit, les variables addimensionnelles suivante

$$s = \frac{S}{L}, \quad \underline{t} = \frac{t}{\tau} \quad \underline{u}(s, \underline{t}) = \frac{u(S, t)}{L},$$

1. Exprimez $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ puis $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en fonction de $u(S, t)$ et des autres variables du problèmes
2. Donnez une forme adimensionnelle de $N(S, t)$ en utilisant la loi de comportement $N = N_0 u'$. On la notera $\underline{N}(s, \underline{t})$
3. Ecrire le PFD (1.23), en fonction de \underline{u} et de ses dérivées.
4. En déduire une forme adimensionnelle de $b(S, t)$, que l'on exprimera par $\underline{b}(s, \underline{t})$.
5. Déterminez τ (en fonction des autres constantes du problème), de sorte que le PFD s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial s^2} + \underline{b} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \underline{t}^2}, \quad \forall \in [0, 1]$$

Cette adimensionalisation nous informe qu'il n'y a pas de grandeur caractéristique dans l'équation qui gouverne une corde. Toute les vibrations transverses sont similaires, à un zoom temporel et spatial près.

1.7.3 Solutions statiques

De quel type de problème les expressions suivantes sont solutions ?

$$u(S, t) = a \quad u(S, t) = aS + b \quad u(S, t) = at + b \quad u(S, t) = aS(S - L) \quad (1.34)$$

1.7.4 Solutions particulières

Trouvez la forme de $b(S, t)$, telle que u soit de la forme

$$u(S, t) = t \left(e^{S(S-L)} - 1 \right)$$

Quelles sont les conditions aux limites et initiales associées

1.7.5 Poutre non-homogène

On souhaite étudier la déformation statique d'une poutre non-homogène, encastree à une extrémité et ayant un déplacement imposé à l'autre.

$$(EA(S)u'(S))' = 0$$

Fournir la solution générale de la solution en fonction de $A(S)$. Donnez une solution particulière pour satisfaire les conditions aux limites $u(0, t) = 0$ et $u(L, t) = u_L$ dans le cas où $A(S) = \frac{1}{S+\ell}$.

1.7.6 Poutre pesante suspendue

On souhaite étudier la déformation statique d'une poutre non-homogène, encastrée libre, soumise à son propre poids

$$(EA(S)u'(S))' + \rho Ag = 0$$

Résoudre pour $A(S) = A_0$ (constante) et pour $A(S) = A_0 e^{-\frac{S}{\ell}}$, où ℓ est une grandeur caractéristique donnée.

1.7.7 Corde en coordonnées spatiale

Pour une corde de coordonnée matérielle $S \in [0, L]$ ayant subi une pré-déformation ε_0 , la coordonnées spatiale au repos est $z = (1 + \varepsilon_0)S$. La longueur au repos est ainsi $\ell = (1 + \varepsilon_0)L$. Le domaine de variation de z est donc $[0, \ell]$. Il peut être intéressant d'utiliser comme paramétrisation z à la place de S quand on cherche à déterminer la dynamique de cette corde. Dans ce cas, le déplacement recherché est donc $\tilde{u}(z, t)$ tel que $\tilde{u}(z, t) = u(S, t)$ quand $z = (1 + \varepsilon_0)S$

— Montrez que

$$\frac{\partial u(S, t)}{\partial S} = (1 + \varepsilon_0) \frac{\partial \tilde{u}(z, t)}{\partial z}$$

— en déduire l'équation des ondes satisfaite par \tilde{u} en faisant intervenir la densité linéique $\varrho A = \rho A / (1 + \varepsilon_0)$ qui correspond à la densité de masse par unité de longueur spatiale.

Chapitre 2

Analyse modale des cordes

On présente une méthode de résolution des problèmes linéarisés en dynamique des structures. La présentation s'applique à la fois aux équations de vibrations transverses ou longitudinales. Les vibrations transverses seront généralement utilisées comme support de discussion.

2.1 Equations de vibration libre

Cette analyse est basée sur des cas où la structure ne subit pas de chargement extérieur $b = 0$. Sa dynamique est donc générée soit par les conditions aux limites (qui peuvent dépendre du temps) soit par les conditions initiales. L'étude de cette dynamique induite par les conditions aux limites sera présentée en section §5.3. La situation forcée sera elle étudiée en §5.4. Néanmoins ces deux situations exploitent les résultats que nous allons présenter ici.

L'équation (1.23) devient alors

Définition 2.1: Équation de d'Alembert

$$N_0 u'' = \rho A \ddot{u} \quad (2.1)$$

C'est l'**équation de vibration libre**. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en temps et en espace qui est homogène et linéaire.

Cette équation est parfois notée autrement, mais cela est bien sûr équivalent

Définition 2.2: Équation des cordes

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0, \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{N_0}{\rho A} \quad (2.2)$$

en introduisant une variable c , homogène à une vitesse (en m/s), que l'on appelle **célérité**. Notons que c est propre à la structure quel que soit sa sollicitation ou ses conditions aux limites et initiales.

Pour un problème de vibration longitudinale on aboutit à une équation légèrement différente :

$$(EAu')' = \rho A \ddot{u} \quad (2.3)$$

qui ne fait pas nécessairement apparaître une célérité quand la structure n'est plus homogène.

2.1.1 Séparation des variables

On cherche à savoir si il existe des solutions $u(S, t)$ du problème (2.1) à variables séparées. Cette méthode de **séparation des variables** consiste à chercher $u(S, t)$ de la forme

$$u(S, t) = Y(S)T(t), \quad \forall S, t$$

qui serait solution de (2.1). Les fonctions $Y(S)$ et $T(t)$ sont inconnues, mais doivent donc être solutions de (2.1) qui s'exprime alors

$$\frac{N_0}{\rho A} Y'' T = Y \ddot{T}$$

qui peut se reformuler ainsi

$$\frac{N_0}{\rho A} \frac{Y''}{Y} = \frac{\ddot{T}}{T}$$

en tout cas, pour les instants t tels que $T(t) \neq 0$ et les positions S telles que $Y(S) \neq 0$. Pour ces cas très particuliers, on pourra toujours les considérer par passage à la limite car - comme u - les fonctions $Y(S)$ et $T(t)$ sont supposées lisses (au moins C^2).

Dans l'équation précédente le terme de gauche est indépendant du temps t et celui de droite est indépendant de la variable d'espace S ; comme ils sont égaux ces deux termes ne peuvent donc dépendre de l'espace et du temps, ils doivent donc être constant. On notera $-\omega^2$ cette constante réelle :

$$\frac{N_0}{\rho A} \frac{Y''}{Y} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \quad (2.4)$$

La constante ω et en rad/s est est dénommée **pulsation**.

Remarque 3.

- Le choix de la notation $-\omega^2$ pour la constante introduite peut sembler saugrenu. Ce choix est motivé par les simplifications qu'il permet par la suite.
- La constante $-\omega^2$ est réelle mais elle n'est pas forcément négative car ω peut être un nombre imaginaire pur.
- Actuellement, on ne connaît pas ω et en particulier, on ne sais pas encore si cette inconnue aura une valeur unique ou pas.

Cette double égalité (2.4) s'exprime plus rigoureusement sous la forme de deux égalités, couplées par la présence simultanée du même coefficient ω^2 . On obtient alors deux **équations d'Helmholtz** :

Définition 2.3: Équation d'Helmholtz en espace

$$Y'' + \frac{\rho A}{N_0} \omega^2 Y = 0 \quad (2.5)$$

Définition 2.4: Équation d'Helmholtz en temps

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.6)$$

Notons qu'outre les fonctions $Y(s)$ et $T(t)$, le coefficient ω est également inconnu à cette étape. Cette procédure de séparation des variables a pour avantage de transformer une équation aux dérivées partielles en deux équations différentielles ordinaires, l'une en espace, l'autre en temps. Elles ne sont pas indépendantes car la présence du même ω couple les solutions des deux problèmes.

2.1.2 Solutions en espace

On se focalise ici sur la résolution de (2.5).

Solutions rigides en espace

Considérons tout d'abord le cas $\omega = 0$. Cette situation ne doit jamais être négligée, car pour l'instant nous ne devons pas avoir d'a priori sur ω . Dans ce cas particulier, il est nécessaire de revenir à (2.5) qui devient simplement $Y'' = 0$ dont les solutions sont

$$Y(S) = a + bS \quad (2.7)$$

où les constantes d'intégrations a et b sont inconnues actuellement.

Relation de dispersion

Supposons maintenant que $\omega \neq 0$. Alors, le problème (2.5) admet des **formes générales** de la solution du type :

$$Y(S) = e^{ikS}$$

où les expressions de k sont donc à déterminer, a priori dans \mathbb{C} (ainsi la présence de i dans l'exponentielle est arbitraire, mais rendra service aux notations futures).

La constante k est en $1/m$ et est dénommée **nombre d'onde**.

L'amplitude de cette forme générale importe peu car l'équation (2.5) est homogène et linéaire, ainsi toute solution trouvée peut être multipliée par une constante arbitraire et satisfaire encore (2.5). En injectant cette forme générale dans (2.5) on obtient :

$$(-k^2 + \frac{\rho A}{N_0} \omega^2) e^{ikS} = 0$$

or comme $e^\phi \neq 0$ quelque soit $\phi \in \mathbb{C}$, c'est le terme entre parenthèse qui doit s'annuler. On obtient alors une **relation de dispersion**

Définition 2.5: Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\rho A}{N_0} \omega^2 \quad (2.8)$$

Cette relation ne détermine pas les valeurs de k proprement dit. Mais elle permet de définir les expressions de $k(\omega)$ quand ω est connu. Elle dépend fortement du système dynamique étudié. En particulier, pour des problèmes plus riches on n'a pas forcément une proportionnalité de k vis-à-vis de ω . Quand c'est le cas, comme actuellement, on dit que la structure est **harmonique**.

Notons que pour les solutions rigides k n'a pas lieu d'être.

Solutions oscillantes en espace

On considère ici que $\omega \neq 0$. Soit $k_1(\omega)$ et $k_2(\omega)$ les deux racines de la relation de dispersion (dans un cas plus riche on peut avoir plus de deux racines). Par linéarité de (2.5), la **solution générale** de (2.5) est une combinaison linéaire des deux formes générales trouvées, à savoir e^{ik_1S} et e^{ik_2S} . On peut donc écrire cette solution générale ainsi

$$Y(S) = a_1 e^{ik_1S} + a_2 e^{ik_2S} \quad (2.9)$$

Dans notre cas nous avons

$$k_1 = k, \quad k_2 = -k, \quad \text{avec comme convention} \quad k = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}} \omega$$

d'après la relation de dispersion (2.8).

Remarque 4 (Fonction trigonométriques et hyperboliques). *Si θ est complexe, les fonctions trigonométriques sont définies comme suit*

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \forall \theta \in \mathbb{C}$$

Cela permet de généraliser le propos en introduisant les fonctions hyperboliques (cas où $i\theta = x \in \mathbb{R}$)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a donc la généralisation de la formule d'Euler aux nombres complexes

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{C}$$

Compte tenu de cette remarque, d'autres écritures, toutes aussi générales, peuvent être privilégiées :

$$Y(S) = ae^{ikS} + be^{i-kS} \quad (2.10)$$

$$Y(S) = a \cos(kS) + b \frac{\sin(kS)}{k} \quad (2.11)$$

$$Y(S) = a \cos(kS + \phi) \quad (2.12)$$

$$Y(S) = a \sin(kS + \phi) \quad (2.13)$$

Les coefficients a, b et ϕ sont inconnus et ils auront des expressions différentes en fonction des écritures choisies.

Suivant le problème certaines écritures sont plus pratiques que d'autres : les deux premières sont à privilégier, la seconde dans les cas simples, la première dans les cas plus délicats.

Quand la relation de dispersion n'est pas harmonique, il reste préférable d'utiliser (2.9).

2.1.3 Conditions aux limites et modes

Afin de déterminer certaines inconnues du problème, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux limites. La méthode générale est ici présentée dans le cadre de l'exemple (I) §1.4.2. Compte tenu de la séparation des variables, on a donc

$$Y(0)T(t) = 0, \quad Y'(L)T(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Ces expressions permettent d'éliminer $T(t)$ pour avoir des expressions des conditions aux limites qui ne s'expriment qu'en fonction de $Y(S)$ et donc indépendante du temps :

$$Y(0) = 0, \quad Y'(L) = 0$$

On dit dans ce cas que **les conditions aux limites respectent la séparation des variables**. Ce n'est pas toujours le cas : par exemple si $N(L, t) = F(t)$ où $F(t)$ est une force imposée.

La condition en 0 - sur l'amplitude de Y - est une condition de **Dirichlet**, celle en L - sur la dérivée de Y - est une condition de **Neumann**.

Pour les solutions oscillantes ces deux conditions aux limites forment le système d'équation suivant, quand l'on a choisi $Y(S)$ sous la forme proposée par (2.11)

$$a = 0 \quad (2.14)$$

$$-ak \sin(kL) + b \cos(kL) = 0 \quad (2.15)$$

Ce système peut bien sûr se résoudre directement. On obtient $a = 0$ et $b \cos(kL) = 0$. Or comme on cherche des solutions **non-triviales** (identiquement non-nulles) $b \neq 0$. De plus comme $\omega \neq 0$ on a $k \neq 0$ d'après la relation de dispersion. On a donc nécessairement $\cos(kL) = 0$ qui induit une suite **infinie, dénombrable et ordonnée** de solutions possibles pour k , que l'on notera k_n où :

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Notons que b reste indéterminé. Cependant, comme on recherche une solution d'une équation linéaire homogène, toutes les solutions sont définies à un coefficient multiplicatif près. On peut donc donner une valeur arbitraire à b . On prendra $b_n = k_n$ et on a donc les solutions oscillantes suivantes

$$Y_n(S) = \sin(k_n S), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

à chacune est associée une valeur spécifique de ω^2 compte tenu de la relation de dispersion :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} k_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La détermination de $Y_n(S)$ de k_n et de ω_n permet de définir une famille de solutions du problème en espace. La famille de solutions n'est pas encore complète car nous n'avons pas scruté les solutions rigides. Allons y !

Pour les solutions rigides ces deux conditions aux limites imposent directement

$$a = 0, \quad b = 0$$

Bref, la seule solution rigide respectant les conditions aux limites est la solution triviale ; dit autrement il n'y a pas de solution rigide pour le problème (I).

Une base modale a été construite : c'est à dire une famille complète de solutions qui respecte les conditions aux limites et qui est définie à un coefficient multiplicatif près. Nous la noterons de manière concise ou détaillée ainsi respectivement

$$\{Y_n(S), \omega_n\}_n \quad \left\{ Y_n(S) = \sin(k_n S), \omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} k_n, k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (2.16)$$

Ces modes (rigides ou oscillants) sont solutions de

$$Y_n'' + \frac{\rho A}{N_0} \omega_n^2 Y_n = 0 \quad (2.17)$$

Y_n et ω_n sont dénommés $n^{\text{ème}}$ **mode propre** et **pulsation propre** respectivement. En mathématiques, on parle parfois de *fonction propre* et *fréquence propre* réciproquement.

Remarque 5. *Durant tout le déroulé de la méthode, on n'a jamais imposé que ω ou k soient réels. Cela est apparu naturellement à travers la condition $\cos(kL) = 0$. En effet d'un point de vue général $\cos \theta$ ne s'annule que pour certaines valeurs de θ , toutes réelles. Cela a induit la "réalité" de k puis de ω du fait de la relation de dispersion.*

Quelques cas pratiques, pour d'autres conditions aux limites standards

À titre d'exercice on peut vérifier les situations suivantes, où l'on a systématiquement $\omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} k_n$

Corde attachée aux deux extrémités $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$ (*Dirichlet-Dirichlet*)

$$\left\{ Y_n(S) = \sin(k_n S), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (2.18)$$

Corde libre aux deux extrémités $N(0, t) = 0, \quad N(L, t) = 0$ (*Neumann-Neumann*)

$$\left\{ Y_0(S) = 1; \quad Y_n(S) = \cos(k_n S), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (2.19)$$

où $Y_0(S)$ est un mode rigide (avec $a \neq 0, b = 0$) associée à une pulsation $\omega_0 = 0$. Ce mode rigide est défini à une amplitude près (on a choisi $a = 1$).

2.2 Un exemple moins standard : conditions aux limites de Robin

On considère toujours la même corde. Tout ce qui a été dit jusqu'à §2.1.2 (inclus) est donc vérifié (séparation des variables, equation en espace (2.5), relation de dispersion (2.8) etc). Par contre on considère les conditions aux limites suivantes

$$N(0, t) - Ku(0, t) = 0, \quad N(L, t) + Ku(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

où K est une constante positive. Cette situation apparait pour des cordes posées en leurs extrémités sur des ressorts de raideur K (en N/m - Newton par mètres - ce qui correspond à kg/s^2 dans le système d'Unités Internationales). La séparation des variables implique

$$N_0 Y'(0)T(t) - KY(0)T(t) = 0, \quad N_0 Y'(L)T(t) + KY(L)T(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Ces conditions respectent donc la séparation des variables. On dispose de conditions aux limites imposées sur la fonction spatiale uniquement :

$$N_0 Y'(0) - KY(0) = 0, \quad N_0 Y'(L) + KY(L) = 0$$

Ces conditions sous forme de combinaison linéaire de Y et Y' sont appelées **condition de Robin**.

2.2.1 Modes rigides

Sachant que $Y(S) = a + bS$ les conditions aux limites génèrent un système de deux équations linéaires en a et b

$$-Ka + N_0b = 0 \quad (CL_0)$$

$$Ka + (N_0 + KL)b = 0 \quad (CL_L)$$

que l'on peut mettre de manière algébrique :

$$\begin{pmatrix} -K & N_0 \\ K & N_0 + KL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Soit \mathbb{M} la matrice précédente et $X = (a, b)^T$, on a donc un problème de type $\mathbb{M}X = 0$. Il s'agit donc de la recherche d'un vecteur propre de \mathbb{M} associé à une valeur propre nulle. Dit autrement on souhaite que le vecteur X soit dans le noyau de la matrice \mathbb{M} : $X \in \text{Ker}(\mathbb{M})$. Une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une telle solution est que la matrice \mathbb{M} ne soit pas inversible; c'est à dire que $\det(\mathbb{M}) = 0$. Dans cette situation de mode rigide, nous avons $\det(\mathbb{M}) = 2N_0 + KL$ qui ne s'annule jamais (car toutes les variables sont positives) : il n'y a pas de mode rigide.

2.2.2 Modes oscillants

On choisi alors (2.11), *i.e.* $Y(S) = a \cos(kS) + b \sin(kS)/k$, comme écriture de la solution générale de (2.5). Là encore les deux conditions aux limites génèrent un système de deux équations linaires en a et b

$$-Ka + N_0b = 0 \quad (CL_0)$$

$$(-N_0k \sin(kL) + K \cos(kL))a + \left(N_0 \cos(kL) + \frac{K}{k} \sin(kL)\right)b = 0 \quad (CL_L)$$

que l'on peut mettre de manière algébrique :

$$\begin{pmatrix} -K & N_0 \\ (-N_0k \sin(kL) + K \cos(kL)) & (N_0 \cos(kL) + \frac{K}{k} \sin(kL)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \mathbb{M}X = 0 \quad (2.21)$$

Une fois de plus, les solutions non-triviales ne peuvent exister que si $\det(\mathbb{M}) = 0$. Sauf que contrairement à la situation rigide précédente, nous avons plus de liberté sur \mathbb{M} car cette matrice est paramétrée par k , et donc par ω , via la relation de dispersion... et justement k (et a fortiori ω) est encore une inconnue. On peut donc les voir comme des variables encore libres de notre problème. Il devient donc naturel de considérer ce déterminant comme une fonction dépendant de cette variable :

$$\det(\mathbb{M}) =: \mathcal{F}(\omega)$$

La recherche de solutions non-triviales se résume maintenant à chercher les ω qui annulent \mathcal{F} : les **zéros** de la **fonction transcendente** \mathcal{F} .

Pour cet exemple, on trouve

$$\mathcal{F}(\omega) = 2KN_0k \cos(kL) + (K^2 + N_0^2k^2) \sin(kL), \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}} \omega$$

La recherche des racines ω de cette fonction doit se faire numériquement. En tout cas, on trouve, comme dans les cas simples, une suite ordonnées de solutions ω_n et de k_n associés (avec là encore $n \in \mathbb{N}^*$) mais cette fois ci les pulsations ne sont pas explicites. Les ω_n ne sont pas nécessairement régulièrement espacés : il peut y avoir des pulsations propres très proches (cela génère des phénomènes des **battements**) et des domaines où au contraire il n'y a aucune pulsation propre.

Une fois les k_n déterminés il est important de déterminer les vecteurs propres X_n associé à chaque n . Cela est rapide en utilisant (CL_0) qui impose

$$b_n = \frac{K}{N_0} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Le vecteur propres est donc déterminé (à une constante multiplicative près) comme $X_n = (1, \frac{K}{N_0})^T$. Plus important les modes propres sont donc :

$$Y_n(S) = \cos(k_n S) + \frac{K}{N_0} \frac{\sin(k_n S)}{k_n} \quad (2.22)$$

La base modale $\{Y_n(S), \omega_n\}_n$ de la structure est parfaitement déterminée !

2.2.3 Discussion : reformulation, analyse numérique, régimes de comportement

Il est souvent important de reformuler $\mathcal{F}(\omega)$. Par exemple rechercher les racines ω de \mathcal{F} est équivalent à rechercher les racines κ de $\tilde{\mathcal{F}}(\kappa)$ ainsi défini

$$\tilde{\mathcal{F}}(\kappa) = \frac{2\chi\kappa}{\chi^2 + \kappa^2} + \tan(\kappa), \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{KL}{N_0} \quad \text{et} \quad \kappa = kL$$

Une fois les racines κ_n déterminés (numériquement) on en déduit $k_n = \kappa_n/L$ et donc $\omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} k_n$.

Les zéros de $\tilde{\mathcal{F}}$ apparaissent pour les valeurs de κ telles que $\frac{2\chi\kappa}{\chi^2+\kappa^2} = -\tan(\kappa)$. Or à χ donné, $\frac{2\chi\kappa}{\chi^2+\kappa^2}$ est strictement positif pour $\kappa > 0$, de plus $\kappa \rightarrow -\tan(\kappa)$ n'est positive que dans les intervalles $]\frac{(2n+1)\pi}{2}, n\pi[$ et dans ces intervalles la fonction est monotone avec comme image $[0, +\infty]$. Ainsi il existe une seule racine κ_n dans chaque intervalle $]\frac{(2n+1)\pi}{2}, n\pi[$ ([quelques courbes aideraient le discours...](#)). Ces considérations facilitent la recherche de zéros et permet d'accélérer la résolution numérique.

Fondamentalement, le problème ne dépend que d'une variable κ et d'une constante χ qui est une forme de ratio entre la rigidité de la corde (N_0) et du ressort (K). Ces deux quantités sont **adimensionnelles** ce qui simplifie leur comparaison.

Quand $\kappa \ll \chi$ (pour de faibles pulsations) ou pour $\kappa \gg \chi$ (pour de très grandes pulsations) on a $\frac{2\chi\kappa}{\chi^2+\kappa^2} \simeq 0$. Pour ces deux cas nous devons donc résoudre approximativement

$$\tilde{\mathcal{F}}(\kappa) \simeq \tan(\kappa) = 0$$

dont les racines $\kappa_n = n\pi$ sont connues. De plus, si $\kappa \ll \chi$ alors $1 \ll \frac{K}{N_0 k}$ et donc le mode se comporte essentiellement comme un sin d'après (2.22). Par contre si $\kappa \gg \chi$ alors $1 \gg \frac{K}{N_0 k}$ et donc le mode se comporte essentiellement comme un cos. On a donc deux **régimes asymptotiques** :

$n\pi \ll \frac{KL}{N_0}$ régime basse fréquence où la structure se comporte approximativement comme une corde encastree

$$\left\{ Y_n(S) = \sin(k_n S), k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$n\pi \gg \frac{KL}{N_0}$ régime haute fréquence où la structure se comporte approximativement comme une corde libre

$$\left\{ Y_n(S) = \cos(k_n S), k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

L'analyse de ces régimes est d'une grande aide pour le **dimensionnement de structure**. En voici deux exemples

- Ces deux régimes ne font pas appel à la raideur du ressort... mais on choisit les bornes de ces deux régimes en jouant sur le paramètre χ : plusieurs jeux de paramètres (N_0, K, L) fournira le même résultat. Le scientifique a donc à sa disposition plusieurs méthodes disponibles.
- Si au contraire on souhaite être sensible à la présence du ressort il ne faut pas être dans ces deux régimes mais plutôt dans un domaine de pulsation intermédiaire tel que $\kappa \sim \chi$, c'est à dire

$$k_n \sim \frac{K}{N_0}, \quad \text{soit} \quad n \sim \frac{1}{\pi} \frac{KL}{N_0}, \quad \text{soit} \quad \omega_n \sim \frac{KL}{\sqrt{\rho A N_0}}$$

Le scientifique est en mesure de déterminer approximativement, en fonction des paramètres du problème, le mode "n" le plus pertinent et la pulsation ω_n associée.

Cela montre que même si les solutions ne sont pas parfaitement explicites, l'étude analytique permet d'avoir accès à des informations cruciales pour la résolution et l'analyse du système.

2.3 Produit scalaire et orthogonalité

Revenons sur la notion de base modale définie en (2.16). En effet, il est possible de greffer à cette base fonctionnelle la notion de produit scalaire et de norme. Un peu comme pour un espace ambiant Euclidien, qui est un espace vectoriel de dimension 3, réel et muni d'un produit scalaire. Ici nous traitons de fonctions et donc d'espace fonctionnel.

Considérons deux fonctions f et g à valeur réelle, toutes deux solutions de l'équations des ondes (2.5). On introduit le **produit scalaire** de $L^2([0, L])$ et la **norme** associée :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(S)g(S)dS, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Pour notre base $\{Y_n\}$ on a donc, pour deux solutions distinctes, $Y_n(S)$ et $Y_m(S)$ (avec $n \neq m$), les éléments suivants :

$$\langle Y_n, Y_m \rangle = \int_0^L Y_n(S)Y_m(S)dS, \quad \|Y_n\| = \sqrt{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (2.23)$$

2.3.1 Cordes fixées et cas standards

Etudions ces expressions dans le détail. Tout d'abord dans le cadre du problème (I), *i.e.* pour la base (2.16). On a

$$\begin{aligned} \langle Y_n, Y_m \rangle &= \int_0^L \sin(k_n S) \sin(k_m S) dS \\ &= \frac{k_n \cos(k_n L) \sin(k_m L) - k_m \cos(k_m L) \sin(k_n L)}{k_m^2 - k_n^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car, comme $k_n = (2n - 1)\pi/(2L)$, on a $\cos(k_n L) = 0 \forall n$. Par contre si $n = m$, l'expression précédente n'est pas exploitable (de type 0/0), il faut refaire le calcul et on trouve :

$$\|Y_n\|^2 = \int_0^L (Y_n(S))^2 dS = \frac{L}{2} - \frac{\sin(2k_n L)}{4k_n} = \frac{L}{2}$$

On en déduit deux informations importantes

$$\langle Y_n, Y_m \rangle = 0 \quad \text{la base est orthogonale} \quad (2.24)$$

$$\|Y_n\|^2 = \frac{L}{2} \quad \text{la base n'est pas normée} \quad (2.25)$$

On retrouve les mêmes résultats pour une corde fixée aux deux extrémités (voir (2.18)) ou libre aux deux extrémités (voir (2.19)). C'est incroyable !!

2.3.2 Condition d'orthogonalité de Sturm-Liouville

L'orthogonalité de la base est une propriété très importante mais elle n'est pas toujours vérifiée. La méthode de Sturm-Liouville permet de savoir, en fonction des conditions aux limites, si les modes sont orthogonaux sans faire de calculs complexes d'intégration.

Considérons deux modes Y_n et Y_m distincts : $n \neq m$ et surtout $\omega_n \neq \omega_m$. Ces modes sont solutions de (2.17). Focalisons nous sur le mode n dans un premier temps :

$$Y_n'' + k_n^2 Y_n = 0$$

Multiplions cette équation par Y_m , intégrons de 0 à L pour faire apparaître $\int_0^L Y_n Y_m dS$, puis intégrons par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^L (Y_n'' + k_n^2 Y_n) Y_m dS &= 0 \\ \int_0^L Y_n'' Y_m dS + k_n^2 \int_0^L Y_n Y_m dS &= 0 \\ - \int_0^L Y_n' Y_m' dS + [Y_n' Y_m]_0^L + k_n^2 \int_0^L Y_n Y_m dS &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on fait l'opération réciproque (projection sur Y_n de l'équation satisfaite par Y_m) on obtient :

$$- \int_0^L Y_m' Y_n' dS + [Y_m' Y_n]_0^L + k_m^2 \int_0^L Y_m Y_n dS = 0$$

La différence entre les deux équations obtenues donne :

$$(k_m^2 - k_n^2) \int_0^L Y_m Y_n dS = [Y_n' Y_m - Y_m' Y_n]_0^L$$

Or $k_m \neq k_n$, on a donc une condition nécessaire et suffisante pour savoir si $\int_0^L Y_n Y_m dS = 0$, c'est à dire pour que les modes soient orthogonaux. La voici

$$[Y_n' Y_m - Y_m' Y_n]_0^L = 0$$

Cette condition de Sturm-Liouville est conditionnée par les conditions aux limites satisfaites par les modes (ils satisfont les mêmes CL). Il ne faut pas l'apprendre par cœur, par contre il faut savoir refaire la démonstration.

Le calcul de la norme $\|Y_n\|$ doit se faire explicitement, Sturm-Liouville n'aide pas dans ce cas. Si les modes ne sont pas orthogonaux il faut aussi chercher explicitement $\langle Y_n, Y_m \rangle$.

Remarque 6 (Corrolaire). *Si la condition de Sturm-Liouville est vérifiée, on a aussi*

$$\int_0^L Y_m' Y_n' dS = 0$$

Remarque 7 (Mode rigide). *Cette condition s'applique aussi pour le mode rigide, en posant $k_0 = 0$.*

Remarque 8 (Généralisation). *Quand l'équation de vibration est différente, la condition de Sturm-Liouville peut changer mais la méthodologie est la même. Nous y reviendrons.*

2.4 Travaux dirigés

2.4.1 Dimensionnement

On considère la corde d'une guitare, accordée sur le *la* à la fréquence fondamentale $f_1 = 440 \text{ Hz}$. La corde est supposée être fixée aux deux extrémités. On rappelle la relation entre la pulsation ω , la fréquence f et la période d'oscillation τ :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/\tau$$

1. Choisissez les grandeurs A , E , ρ et L réalistes pour une telle corde.
2. En déduire N_0 pour que la corde soit effectivement accordée sur le *la*.
3. Sachant la relation $N_0 = EA\epsilon$ entre la tension N_0 et la déformation ϵ de la corde, déterminez la déformation subie par une telle corde.
4. En général une corde casse si $\epsilon > 5\%$, est-ce le cas ? Si oui, changez vos paramètres !!!

Vous pouvez utiliser ces valeurs de A , E , ρ , N_0 et L pour les autres questions (même si les conditions aux limites changent).

2.4.2 Conditions de Dirichlet et de Neumann

1. Prouvez les résultats de la section *Quelques cas pratiques, pour d'autres conditions aux limites standards*, page 32 dans le cadre d'une corde.
2. Tracez graphiquement les trois premiers modes pour une corde fixée aux deux extrémités puis pour une corde libre aux deux extrémités.

2.4.3 Conditions de Robin

1. Assurez vous d'avoir bien tout compris à l'exercice corrigé §2.2, page 32.
2. Montrez que ces conditions aux limites satisfont les conditions de Sturm-Liouville.

2.4.4 Produit scalaire à poids

On considère une corde, fixe en $S = 0$ et attachée à une masse (ponctuelle) M en $S = L$.

1. Montrez, en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à M , que les conditions aux limites de la corde sont :

$$u(0, t) = 0, \quad M\ddot{u}(L, t) = -N_0 u'(L, t), \quad \forall t$$

2. Montrez que la conservation de l'énergie du système *corde+masse* impose

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}(S, t)^2 + \frac{1}{2} N_0 (u'(S, t))^2 dS + \frac{1}{2} M \dot{u}(L, t)^2 \right) = 0$$

3. Montrez que les conditions aux limites imposent une équation en fréquence de la forme

$$\tan(\kappa_n) = \chi \frac{1}{\kappa_n} \quad \text{avec} \quad \kappa_n = k_n L, \quad \chi = \frac{\rho A L}{M}, \quad k_n = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}} \omega_n$$

et des modes qui sont tout simplement de la forme $Y_n(S) = \sin(k_n L)$

4. Discutez sur les racines ω_n quand $\chi \gg \kappa_n$ et quand $\chi \ll \kappa_n$. Vous appuierez votre discussion d'une ou plusieurs illustrations.

5. Vérifiez que si l'on utilise le produit scalaire "standard" donné en (2.23), les modes ne sont pas orthogonaux. On utilisera pour la démonstration l'expression fournie en §2.3.1 à savoir

$$\int_a^b \sin(k_n S) \sin(k_m S) dS = \left[\frac{k_n \cos(k_n S) \sin(k_m S) - k_m \cos(k_m S) \sin(k_n S)}{k_m^2 - k_n^2} \right]_a^b, \quad k_n \neq k_m$$

$$\int_a^b (\sin(k_n S))^2 dS = \left[\frac{2k_n S - \sin(2k_n S)}{4k_n} \right]_a^b$$

6. Justifiez que la forme bilinéaire suivante est un produit scalaire

$$\ll f, g \gg = \int_0^L f(S)g(S) \rho A dS + M f(L)g(L)$$

7. Montrez que les modes sont orthogonaux au sens de ce nouveau produit scalaire

$$\ll Y_n, Y_m \gg = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

Chapitre 3

Solutions temporelles générales

L'amplitudes des vibrations dépend des conditions initiales et du forçage de la structure. Avant d'aborder ces deux cas étudions en détail les équations d'Helmholtz en temps qui sont apparues consécutivement à la séparation des variables imposées au problème libre.

3.1 Solution en temps

On se focalise ici sur la résolution de (2.6). Compte tenu des résultats trouvés en §2.1.3, nous savons que seules certaines valeur de ω sont disponibles pour respecter les conditions aux limites du problème. Ces solutions ω_n (potentiellement complexes et avec potentiellement un mode rigide $\omega_0 = 0$), sont associés à des modes $\{Y_n(S), \omega_n\}_n$. A chaque mode, il existe donc une relation (2.6), dont les solutions seront indexées également par n : des fonctions temporelles $T_n(t)$ solutions de l'équation en temps :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = 0 \quad (3.1)$$

qui gouverneront donc la dynamique de chaque mode.

3.1.1 Solutions rigides en temps

Si la condition $\omega_0 = 0$ respecte les conditions aux limites, (3.1) devient simplement $\ddot{T}_0 = 0$ dont les solutions sont

$$T_0(t) = a_0 + b_0 t \quad (3.2)$$

où les constantes d'intégrations a_0 et b_0 sont inconnues actuellement.

3.1.2 Solutions oscillantes en temps

On considère ici que $\omega_n \neq 0$, c'est à dire que $n > 0$. Les solutions générales de (3.1) peuvent s'écrire de diverses formes (toutes équivalentes) comme nous l'avons vu pour le problème en espace :

$$T_n(t) = a_n e^{i\omega_n t} + b_n e^{-i\omega_n t} \quad (3.3)$$

$$T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad (3.4)$$

$$T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.5)$$

$$T_n(t) = a_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (3.6)$$

Les coefficients a_n , b_n et ϕ_n sont inconnus, a priori distinct pour chaque n et ils auront des expressions différentes en fonction des écritures choisies. Ils ne sont pas liés à ceux que nous avons rencontré en (2.11), car ceux de l'équation en espace ont été déterminés !

Les fonctions trigonométriques sin et cos sont vues ici comme des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Là encore certaines écritures sont à privilégier en fonction du problème abordé.

3.2 Solutions du problème libre

Pour le problème libre, nous pouvons exploiter la décomposition modale présentée auparavant et déterminer les amplitudes modales induites par les conditions initiales.

3.2.1 Décomposition modale

A ce stade, nous n'avons pas déterminé une solution $u(S, t)$, mais plutôt une infinité de solutions admissibles $u_n(S, t)$, qui respectent les équations différentielles et les conditions aux limites. Ces **solutions modales** peuvent s'exprimer ainsi en toute généralité :

$$u_n(S, t) = Y_n(S)T_n(t) \quad (3.7)$$

où les deux fonctions Y_n (par exemple (2.16)) et T_n (par exemple (5.12)) sont liées dans le sens où elles partagent le même ω_n . Ces solutions modales sont toutes solutions de l'équation de vibrations libres

$$N_0 u_n'' = \rho A \ddot{u}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

Toute composition linéaire des $u_n(S, t)$ est solution également de l'équation de vibration libre (2.1). On a donc une solution $u(S, t)$ qui s'exprime en toute généralité comme

$$u(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(S, t), \quad \text{soit} \quad u(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S)T_n(t) \quad (3.9)$$

Cette écriture est une **superposition modale** ou **décomposition modale**.

Remarque 9. Il est tentant d'écrire cette décomposition sous la forme $\sum_n \alpha_n u_n(S, t)$ mais en fait ce n'est pas pertinent car le poids α_n est redondant avec le fait que l'amplitude de chaque $T_n(t)$ est encore indéterminée.

Remarque 10. La somme dans (5.17) est réalisée pour $n \in \mathbb{N}$: cette écriture tient donc compte des modes rigides, $n = 0$.

Remarque 11 (Force). Notons que l'on a également la force :

$$N(S, t) = N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n'(S, t), \quad \text{soit} \quad N(S, t) = N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n'(S)T_n(t) \quad (3.10)$$

Pour le problème (I), il n'y a pas de modes rigides, nous avons ainsi

$$\begin{aligned} u(S, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(k_n S) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \\ N(S, t) &= N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} k_n \cos(k_n S) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \end{aligned}$$

3.2.2 Conditions initiales

Il reste à déterminer deux coefficients pour chaque mode. Par exemple, si on prend l'expression (5.12), il faut déterminer une infinité de paire (a_n, b_n) . Cette opération est réalisée à partir des conditions initiales (1.25). Ces dernières s'expriment sans difficulté grâce à la décomposition modale :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S)T_n(0) = u^0(S), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S)\dot{T}_n(0) = v^0(S) \quad (3.11)$$

Toujours avec la formulation (5.12), on a $T_n(0) = a_n$ et $\dot{T}_n(0) = b_n$ pour $n > 0$ mais également pour $n = 0$ si on se réfère à (3.2). Les conditions initiales deviennent :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) = u^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (CI_u)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n Y_n(S) = v^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (CI_v)$$

3.2.3 Amplitudes modales (cas général)

On dispose de deux équations, (CI_u) et (CI_v) , mais de deux infinités d'inconnues à déterminer... en algèbre nous serions foutus. Mais ces deux équations ne sont pas algébriques mais fonctionnelles : chaque équation est une égalité entre deux fonctions, égalité qui doit être vraie quelque soit S .

La méthode consiste à utiliser la structure préhilbertienne de l'espace des solutions de (2.5). Les deux conditions initiales, (CI_u) et (CI_v) , sont projetées le long d'un mode arbitraire, disons le mode Y_m , pour m fixé. On a réciproquement :

$\langle (CI_u), Y_m \rangle$	$\langle (CI_v), Y_m \rangle$
$\int_0^L \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) Y_m(S) dS = \int_0^L u^0(S) Y_m(S) dS$ $\sum_n a_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \langle Y_m, u^0 \rangle$ $\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle a_n = \langle Y_m, u^0 \rangle$	$\int_0^L \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n b_n Y_n(S) Y_m(S) dS = \int_0^L v^0(S) Y_m(S) dS$ $\sum_n \omega_n b_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \langle Y_m, v^0 \rangle$ $\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle (\omega_n b_n) = \langle Y_m, v^0 \rangle$

Introduisons :

$$\mathbb{K}_{nm} = \langle Y_n, Y_m \rangle, \quad U_n^0 = \langle Y_n, u^0 \rangle, \quad V_n^0 = \langle Y_n, v^0 \rangle, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

ainsi que la matrice et les vecteurs ayant les composantes suivantes :

$$\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{nm})_{nm}, \quad U^0 = (\dots, U_n^0, \dots)^T, \quad V^0 = (\dots, V_n^0, \dots)^T$$

$$a = (\dots, a_n, \dots)^T, \quad b = (\dots, b_n, \dots)^T$$

Les relations $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$ étant vérifiées pour tout m , on peut écrire ces relations de manière algébrique avec la matrice infinie \mathbb{K} et les vecteurs infinis U^0 , V^0 , a et b :

$$\mathbb{K}a = U^0, \quad \mathbb{K}b = V^0$$

Si l'on se limite aux n_{max} premiers modes, les matrices et vecteurs sont de dimensions finies $n_{max} \times n_{max}$ et n_{max} respectivement. \mathbb{K} est alors inversible et l'on a

$$a = \mathbb{K}^{-1}U^0, \quad b = \mathbb{K}^{-1}V^0$$

ce qui permet de déterminer les premiers a_n et b_n de manière approchées pour $n \leq n_{max}$. C'est également le cas de $T_n(t)$ compte tenu de (5.12).

Remarque 12 (Numérique versus explicite). *Ce calcul est réalisable numériquement, par contre les composantes de \mathbb{K} , de U^0 et de V^0 , peuvent être calculées explicitement.*

Remarque 13 (Erreur de troncature versus résolution). *Quand n_{max} est faible, on perd de la précision, notamment pour les hautes fréquences et les petites échelles. Par contre si n_{max} est trop important le calcul d'inversion devient couteux et peut même parfois générer des erreurs numériques si la matrice \mathbb{K} est mal conditionnée.*

3.2.4 Amplitudes modales (cas orthogonal)

Si la base $\{Y_n\}$ est orthogonale on a $\langle Y_n, Y_m \rangle = \|Y_n\|^2 \delta_{nm}$, où

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \text{symbole de Kronecker}$$

Dans ce cas là, les sommes suivant n , introduites en $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$, sont des sommes de termes nuls sauf quand $n = m$, où m est fixé. Et donc :

$$\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle a_n = \sum_n \|Y_n\|^2 \delta_{nm} a_n = \|Y_m\|^2 a_m, \quad \sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle b_n = \|Y_m\|^2 b_m$$

Ainsi, on peut avoir explicitement les amplitudes modales, partir de $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$

$$a_n = \frac{\langle Y_n, u^0 \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L u^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS}, \quad b_n = \frac{\langle Y_n, v^0 \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L v^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (3.12)$$

Ainsi, compte tenu de (5.12), la solution temporelle $T_n(t)$ est explicitement déterminée (même pour $n = 0$).

Exemple d'une corde pincée

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Les modes propres sont donc déterminés par (2.18). Ils sont orthogonaux et il n'y a pas de modes rigides. En $t = 0$, la corde est pincée en $\ell \in]0, L[$ et lâchée à cet instant sans vitesse initiale. Les conditions initiales sont donc

$$u^0(S) = \begin{cases} h \frac{S}{\ell}, & 0 \leq S \leq \ell, \\ h \frac{L-S}{L-\ell}, & \ell \leq S \leq L, \end{cases} \quad \text{et} \quad v^0(S) = 0, \quad 0 \leq S \leq L.$$

où h est l'amplitude du déplacement maximal. Pour préserver l'hypothèse des petites perturbation on a $|h| \ll L$. Les constantes d'intégration a_n et b_n sont donc obtenues grâce à (5.20). Après calcul on obtient

$$a_n = \frac{2h}{n\pi} \frac{L}{L-\ell} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \quad b_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

soit

$$u(s, t) = \frac{2h}{L-\ell} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \frac{\sin(k_n S)}{k_n} \cos(\omega_n t) \quad (3.13)$$

$$N(s, t) = N_0 \frac{2h}{L-\ell} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \cos(k_n S) \cos(\omega_n t) \quad (3.14)$$

3.3 Solutions du problème forcé

Il s'agit ici de résoudre le problème forcé (1.22). On part donc de (1.23) que l'on rappelle :

$$N_0 u'' + p = \rho A \ddot{u}$$

où il est très important de rappeler que $p(S, t)$ dépend de l'espace et du temps. Afin d'être rigoureux nous devons décomposer cette densité de force en une composante **statique** $\bar{p}(S)$ et **temporelle** $\tilde{p}(S, t)$:

$$p(S, t) = \bar{p}(S) + \tilde{p}(S, t), \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} \tilde{p}(S, t) dt = 0$$

Ainsi la contribution dynamique est à moyenne nulle sur le domaine temporel $[0, +\infty[$ et la composante statique est la valeur moyenne, en temps, de la force. Introduisons une **composante statique et temporelle du déplacement** :

$$u(S, t) = \bar{u}(S) + \tilde{u}(S, t), \quad (3.15)$$

qui sont définis comme les solutions respectives de

$$\begin{array}{ll} N_0 \bar{u}'' + \bar{p} = 0 & \text{Problème statique} \\ N_0 \tilde{u}'' + \tilde{p} = \rho A \ddot{\tilde{u}} & \text{Problème temporel} \end{array}$$

3.3.1 Solutions statiques

Pour le problème statique, il n'y a pas de difficultés particulières. Il suffit en effet de résoudre

$$\bar{u}''(S) = -\frac{1}{N_0} \bar{p}(S) \quad (3.16)$$

par intégration successive en espace. Les deux constantes d'intégration qui apparaissent sont déterminées en imposant les deux conditions aux limites du problème qui doivent être respectées par \bar{u} en $S = 0$ et L .

3.3.2 Solutions dynamiques

La méthode consiste à chercher des solutions \tilde{u} qui se décomposent sur la base modale $\{Y_n\}_n$. On ne traite ici que le cas où cette base est orthogonale (hilbertienne). En d'autres termes, on cherche une solution \tilde{u} de l'équation temporelle de la forme

$$\tilde{u}(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(t) Y_n(S) \quad (3.17)$$

où $q_n(t)$ sont des **coordonnées généralisées**. Ce sont des fonctions inconnues pour l'instant. Les modes $Y_n(s)$ sont les solutions rigides ($n = 0$) et dynamiques (par exemple (2.16)) du problème homogène (2.1) avec les mêmes conditions aux limites que le problème non-homogène.

En injectant (5.25) dans l'équation de vibration forcé on a :

$$N_0 \sum_n Y_n'' q_n + \tilde{p} = \sum_n Y_n \ddot{q}_n$$

que l'on projette brutalement sur un mode arbitraire Y_m :

$$N_0 \sum_n \int_0^L Y_n''(S) Y_m(S) dS q_n(t) + \int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_m(S) dS = \sum_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS \ddot{q}_n(t)$$

Étudions chaque terme en gardant en tête que les modes sont orthogonaux.

— Pour le premier, nous savons que chaque mode satisfait $Y_n'' = -k_n^2 Y_n$ et donc

$$\sum_n \int_0^L Y_n''(S) Y_m(S) dS = - \sum_n k_n^2 \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = - \sum_n k_n^2 \|Y_n\|^2 \delta_{nm} = -k_m^2 \|Y_m\|^2$$

ce qui inclue le cas rigide en imposant $k_0 \rightarrow 0$.

— Pour le second on introduit juste la notation standard

$$p_m(t) = \int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_m(S) dS = \langle Y_m(S), \tilde{p}(S, t) \rangle$$

qui n'est plus qu'une fonction du temps.

— Pour le dernier, c'est direct compte tenu de l'orthogonalité des modes

$$\sum_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \sum_n \|Y_n\|^2 \delta_{nm} = \|Y_m\|^2$$

On a donc après arrangement, pour tout m :

$$-N_0 k_m^2 \|Y_m\|^2 q_m(t) + p_m(t) = \rho A \|Y_m\|^2 \ddot{q}_m(t)$$

En utilisant la relation de dispersion $N_0 k_m^2 = \rho A \omega_m^2$ on trouve pour tout n :

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t), \quad \text{avec} \quad f_n(t) = \frac{\langle Y_n, \tilde{p} \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (3.18)$$

où $f_n(t)$ est la **force modale normalisée**.

Remarque 14 (Équation de Duhamel). *La solution générale $u(t)$ de l'équation de l'oscillateur forcé :*

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t), \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

est fournie par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau$$

Si les conditions initiales sont $u(0) = u^0$, $\dot{u}(0) = v^0$ alors les constantes d'intégration (a, b) sont déterminées : $a = u^0$ et $b = v^0$. En effet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right) \right) = 0$$

Compte tenu de cette remarque on a la forme générale de $q_n(t)$, pour chaque mode dynamique $n > 0$ (la contribution du mode rigide est présenté juste après) :

$$q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau \quad (3.19)$$

L'équation (5.26) reste vrai pour le mode rigide $n = 0$ quand il est non-nul. Plus précisément elle est, pour ce cas particulier :

$$\ddot{q}_0(t) = f_0(t), \quad \text{avec} \quad f_0(t) = \frac{\langle Y_0, \tilde{p} \rangle}{\|Y_0\|^2} = \frac{\int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_0(S) dS}{\int_0^L (Y_0(S))^2 dS}$$

Dont les solutions sont

$$q_0(t) = a_0 + b_0 t + \int_0^t \int_0^\sigma f_0(\tau) d\tau d\sigma \quad (3.20)$$

Les expressions de (5.27) et (5.28) injectées dans (5.25) permettent de déterminer la forme générale de la solution temporelle $\tilde{u}(S, t)$.

3.3.3 Amplitudes et conditions initiales

On dispose ainsi de la forme générale de $u(S, t) = \bar{u}(S) + \tilde{u}(S, t)$. Mais nous ne connaissons pas encore les amplitudes modales (a_n, b_n) pour tous les $n \in \mathbb{N}$. Ces termes sont bien entendus obtenus à partir des conditions initiales :

$$u(S, 0) = u^0(S), \quad \dot{u}(S, 0) = v^0(S),$$

Compte tenu de la décomposition (5.23) du déplacement, ces conditions initiales s'expriment par

$$\bar{u}(S) + \tilde{u}(S, 0) = u^0(S), \quad \dot{\tilde{u}}(S, 0) = v^0(S),$$

où $\bar{u}(S)$ est parfaitement déterminé par la résolution de (5.24). Ains, les amplitudes modales (a_n, b_n) du déplacement temporelle seront déterminés de sorte à satisfaire :

$$\tilde{u}(S, 0) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \dot{\tilde{u}}(S, 0) = v^0(S),$$

où le terme de droite est connu alors que celui de gauche contient les indéterminés (a_n, b_n) . On peut remarquer que si la position initiale $u^0(S)$ est la position d'équilibre statique $\bar{u}(S)$ alors $\tilde{u}(S, 0) = 0$. Les conditions initiales s'expriment ainsi compte tenu de la décomposition modale (5.25) de la solution temporelle :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) q_n(0) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) \dot{q}_n(0) = v^0(S)$$

On a bien sûr $T_n(0) = a_n$ et $\dot{T}_n(0) = b_n$ (même si $n = 0$). Et donc nous avons à résoudre

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (3.21)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n Y_n(S) = v^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (3.22)$$

qui est un problème similaire à (CI_u) et (CI_v) . La méthodologie de résolution est donc la même. En particulier, quand la base $\{Y_n\}$ est orthogonale, on obtient un résultat similaire à (5.20) pour les modes dynamiques ($n \in \mathbb{N}^*$) et rigides

$$a_n = \frac{\langle Y_n, u^0(S) - \bar{u}(S) \rangle}{\|Y_m\|^2} = \frac{\int_0^L (u^0(S) - \bar{u}(S)) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS}, \quad b_n = \frac{\langle Y_n, v^0 \rangle}{\|Y_m\|^2} = \frac{\int_0^L v^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (3.23)$$

On a complètement résolu le problème.

Chapitre 4

Travaux dirigés

4.1 Chargement statique

On considère une corde fixée aux deux extrémités qui subit un chargement $p(S, t) = -P$ uniforme et constant.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. On suppose qu'à $t = 0$ la corde n'est pas encore chargée : elle est parfaitement au repos $u(S, 0) = 0$, $\dot{u}(S, 0) = 0$. Si bien que $p(S, t)$ n'est vraiment non-nul que pour $t > 0$. En déduire la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. On suppose maintenant que la corde n'est plus chargée. Mais qu'elle possède comme condition initiale $u(S, 0) = \bar{u}(S)$, où $\bar{u}(S)$ est la solution déterminée à la première question. La vitesse initiale est nulle. Déterminez $u(S, t)$. Cette dynamique s'observe quand la neige tombe brutalement (et en $t = 0$!) des fils électriques.

4.2 Chargement statique sur un support élastique

On considère une corde fixée aux deux extrémités par deux ressorts de raideurs K (voir exemple §2.2). Elle subit un chargement $p(S, t) = -P$ uniforme et constant alors qu'elle était tranquillement au repos.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. On suppose qu'à $t = 0$ la corde n'est pas encore chargée et donc $u(S, 0) = 0$, $\dot{u}(S, 0) = 0$. Si bien que $p(S, t)$ n'est vraiment non-nul que pour $t > 0$. En déduire la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. Discutez en fonction des paramètres du modèle.

4.3 Chargement dynamique uniforme

On considère une corde parfaitement fixée aux deux extrémités. Elle subit un chargement uniforme $p(t) = -P + F \sin(\Omega t)$ lié au vent qui génère un décrochage périodique de tourbillons de Von Karman. En $t = 0$ la corde n'a pas de vitesse et sa position est solution du problème statique imposé par $-P$.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. Discutez en fonction des paramètres du modèle, notamment si $\Omega \ll \omega_1$ ou si $\Omega \sim \omega_5$ ou même pire si $\Omega = \omega_5$

4.4 Chargement par une vague

On considère une corde libre aux deux extrémités. Elle subit un chargement uniforme $p(t, S) = F \sin(Vt - S)$ lié au passage d'une onde se propageant dans la direction de la corde à une vitesse V . Des problèmes de ce type arrivent par exemple dans le cas de la banquise soumise à la houle ou des récupérateurs d'énergie. En $t = 0$ la corde n'a pas de vitesse et sa position est au repos.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
2. Discutez en fonction de la célérité $c = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}}$, par exemple si $V \ll c$ ou si $V \gg c$.
3. Est-il possible d'exciter de la sorte un mode particulier, par exemple $n = 4$? Si oui, comment choisir V en fonction des propriétés de la corde.

4.5 Chargement par une force ponctuelle oscillante

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Elle subit un chargement ponctuel $p(t, S) = F \sin(\Omega t) \delta(S - \ell)$ situé en $\ell \in [0, L]$. Des problèmes de ce type arrivent par exemple dans le cas d'un archet qui ahène et glisse successivement sur la corde d'un violon à une période $\tau = 2\pi/\Omega$. En $t = 0$ la corde est au repos.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
2. Discutez en fonction de la position ℓ , par exemple si $\ell = L/2$ ou $\ell = L/5$, ou encore $\ell = L/5 + \epsilon$ où $0 < \epsilon \ll 1$.
3. Discutez en fonction de la fréquence d'excitation Ω , par exemple si $\Omega \sim \omega_3$.
4. Discutez en fonction du lien entre Ω et ℓ , par exemple si $\Omega \sim \omega_3$ avec $\ell = L/3$ ou $\ell = L/6$.

4.6 Chargement par une force ponctuelle glissante

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Elle subit un chargement ponctuel glissant à la vitesse V d'un bout à l'autre de la structure ainsi $p(t, S) = -F\delta(S - Vt)$ pour $0 < t < L/V$ mais ensuite la force continue son chemin : elle quitte la corde et donc $p(t, S) = 0$ pour $t > L/V$. La corde est initialement au repos. Cette situation intervient quand une personne court sur un pont suspendu.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps, pour $t < L/V$.
2. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps, pour $t > L/V$.
3. Etudiez le comportement de la corde en fonction de la position V et des caractéristiques de la corde.

4.7 Vibrations sympathiques

On considère deux cordes (1) et (2) de longueurs respectives L_1 et L_2 . Elles sont parallèles et les déplacements transverses sont notés $u(S, t)$ avec $0 \leq S \leq L_1$ pour (1) et $v(S, t)$ avec $0 \leq S \leq L_2$ pour (2). Elles ont la même tension N_0 . Les équations satisfaites par les deux cordes sont

$$\begin{aligned} N_0 u'' &= \rho A \ddot{u}, & 0 \leq S \leq L_1 \\ N_0 v'' &= \rho A \ddot{v}, & 0 \leq S \leq L_2 \end{aligned}$$

Les deux cordes sont fixées en $s = 0$ et reliées l'une à l'autre par un ressort en l'autre extrémité (voir dessin). On a donc les conditions aux limites et de raccordement suivantes

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & N_0 u'(L_1, t) + K(u(L_1, t) - v(L_2, t)) &= 0, \\ v(0, t) &= 0, & N_0 v'(L_2, t) + K(v(L_2, t) - u(L_1, t)) &= 0 \end{aligned}$$

1. On formule une séparation des variables $u(S, t) = X(S)T(t)$ pour la première et $v(S, t) = Y(S)T(t)$ pour la seconde corde. Montrez qu'alors les équations satisfaites par $X(S)$ et $Y(S)$ sont identiques. Mais surtout, que ces deux équations imposent la même relation de dispersion pour les deux cordes, à savoir $k = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}} \omega$ avec le même k pour les deux cordes !
2. Montrez que les deux premières conditions aux limites imposent les solutions générales en espace

$$X(S) = a \sin(kS), \quad Y(S) = b \sin(kS)$$

où les deux conditions de raccordement imposent

$$\begin{pmatrix} N_0 k \cos(kL_1) + K \sin(kL_1) & -K \sin(kL_2) \\ -K \sin(kL_1) & N_0 k \cos(kL_2) + K \sin(kL_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'équation transcendente et la forme générale des modes propres.
4. Déterminez numériquement les fréquences propres du système et les modes propres associés.
5. A l'instant initial, on pince la première corde, mais la seconde corde est au repos. Déterminer l'évolution des deux cordes au cours du temps. Cela consiste à imposer les conditions initiales suivantes :

$$u(S, 0) = \begin{cases} h \frac{S}{\ell}, & 0 \leq S \leq \ell, \\ h \frac{L_1 - S}{L_1 - \ell}, & \ell \leq S \leq L_1, \end{cases} \quad \dot{u}(S, 0) = 0, \quad v(S, 0) = 0, \quad \dot{v}(S, 0) = 0$$

6. On suppose que $L_2 = \frac{5}{4}L_1$, montrez qu'en fonction de K et de ℓ la seconde corde rentre plus ou moins en vibration.

Ce genre de problème permet de comprendre les phénomènes de vibrations sympathiques pour des instruments tels que la harpe.

4.8 Corde visqueuse

Pour une corde visqueuse la loi de comportement est légèrement différente :

$$N(S, t) = N_0 (u' + 2\nu \dot{u}')$$

où ν est un coefficient positif. La viscosité est donc 2ν . Le coefficient 2 simplifie les calculs par la suite. Par contre l'équation de la dynamique locale est inchangée $N' = \rho A \ddot{u}$. On obtient donc une équation des ondes visqueuses :

$$c^2(u'' + 2\nu \dot{u}'') = \ddot{u}, \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{N_0}{\rho A} \quad (4.1)$$

Montrez que la séparation des variables est encore possible et aboutie à

$$c^2 \frac{Y''}{Y} = -\varpi^2, \quad \frac{\ddot{T}}{T + 2\nu \dot{T}} = -\varpi^2$$

où ϖ^2 est une constante inconnue. L'équation en temps, pour une valeur de ϖ arbitraire, est donc

$$\ddot{T} + 2\varpi^2 \nu \dot{T} + \varpi^2 T = 0$$

On cherche des solutions de la forme $T(t) = e^{i\alpha t}$, si bien que α doit être racine de

$$\alpha^2 - i2\varpi^2 \nu \alpha - \varpi^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \alpha_{\pm} = i\nu\varpi^2 \pm \varpi \sqrt{1 + (\nu\varpi)^2}$$

Les solutions temporelles peuvent donc être mises sous la forme $T(t) = \underline{a}e^{i\alpha t} + \underline{b}e^{i\alpha - t}$ où \underline{a} et \underline{b} sont deux constantes d'intégration. Mais il est plus pratique de choisir une autre (mais équivalente) forme générale :

$$T(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \omega &= \varpi \sqrt{1 + (\nu \varpi)^2}, \\ \frac{1}{\tau} &= \nu \varpi^2 \end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes d'intégration qui seront fixées par des conditions initiales. Pour le problème forcé, on doit utiliser une nouvelle expression de l'intégrale de Duhamel, en effet la solution u de

$$\ddot{u} + 2\nu\varpi^2\dot{u} + \varpi^2u = f(t)$$

est

$$u(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(y) \sin(\omega(t-y)) e^{-\frac{t-y}{\tau}} dy, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \omega &= \varpi \sqrt{1 + (\nu \varpi)^2}, \\ \frac{1}{\tau} &= \nu \varpi^2 \end{aligned}$$

Montrez que pour une corde fixée aux deux extrémités on doit avoir

$$\frac{\varpi}{c} = \frac{n\pi}{L}$$

on notera par la suite $k_n = n\pi/L$ et $\varpi_n^2 = c^2 k_n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les modes propres sont donc simplement

$$Y_n(s) = \sin(k_n s)$$

Montrez que cette base modale est orthogonale.

Déterminez la dimension de ν .

Donnez un sens physique de τ_n et ω_n . Exprimez ces deux constantes en fonction de k_n . La corde est-elle harmonique ?

Pour ν très petit faites un développement limité de ces deux termes. En fixant une condition initiale de votre choix déterminez a_n et b_n .

Donnez les solutions d'un problème forcé de votre choix.

Accompagnez vos calculs de simulations.

4.9 Forçage cinématique

On suppose que l'on force la corde en $s = L$ en imposant **un déplacement** $u_L(t)$ donné. On suppose que la poutre est initialement au repos, on impose donc également $u_L(0) = 0$. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' &= \rho A \ddot{u} \\ N &= T u' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= u_L(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

On cherche une solution générale sous la forme

$$u(s, t) = \bar{u}(s, t) + \underline{u}(s, t) \quad (4.3)$$

où $\bar{u}(s, t)$ est imposé de sorte que $\bar{u}(L, t) = u_L(t) \forall t$. En pratique on prendra

$$\bar{u}(s, t) = \frac{s}{L} u_L(t)$$

Compte tenu de cette expression, la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$ doit maintenant satisfaire un problème un peu différent, que l'on appelle problème relevé, qui est non-homogène mais dont les conditions aux limites

assurent l'orthogonalité du problème homogène.

Injectons donc le changement de variable (6.3) dans le problème général, nous obtenons simplement

$$T \underline{u}'' - \rho A \underline{\ddot{u}} = \rho A \underline{\ddot{\bar{u}}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} CI : & \underline{u}(s, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(s, 0) = -\dot{\bar{u}}(s, 0) \\ CL : & \underline{u}(0, t) = 0, \quad \underline{u}(L, t) = u_L(t) \end{array}$$

car $\bar{u}'' = 0$. On observe que l'accélération imposée en L joue un rôle de terme source pour l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$. On observe également que la vitesse de $u_L(t)$ introduit une vitesse initiale non-nulle pour la variable relevée $\underline{u}(s, t)$. On peut donc poser le problème sous la forme suivante

$$c^2 \underline{u}'' + p = \underline{\ddot{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} CI : & \underline{u}(s, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(s, 0) = v^0(s) \\ CL : & \underline{u}(0, t) = 0, \quad \underline{u}(L, t) = 0 \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} v^0(s) = -\frac{s}{L} \dot{u}_L(0) \\ p(s, t) = -\frac{s}{L} \ddot{u}_L(t) \end{array}$$

Cherchez les solutions du problème relevé en utilisant une analyse modale. Evitez d'expliciter les calculs pour insister sur la méthodologie :

Les conditions aux limites satisfaites par \underline{u} poussent à chercher les solutions sur la base (??) :

$$\underline{u}(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(t)$$

où les inconnus sont maintenant les coordonnées généralisées $q_n(t)$. L'équation différentielle devient

$$c^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n'' q_n + p = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \ddot{q}_n$$

Comme Y_n est solution de $Y_n'' + \omega_n^2/c^2 Y_n = 0$, on a :

$$- \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n^2 Y_n q_n + p = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \ddot{q}_n$$

Soit :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = p$$

Que l'on projette sur un mode m arbitraire pour obtenir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n ds (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = \int_0^L Y_m p ds$$

Mais comme les modes sont orthogonaux, on obtient juste une équation en m , pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\ddot{q}_m + \omega_m^2 q_m = f_m \quad \text{avec} \quad f_m(t) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} p_m(t) \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \|Y_m\|^2 &= \int_0^L Y_m(s) Y_m(s) ds \\ p_m(t) &= \int_0^L Y_m(s) p(s, t) ds \end{array}$$

dont la solution est connue, via l'intégrale de Duhamel

$$q_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau$$

On détermine les coefficients a_m et b_m grâce à la projection des conditions initiales sur les modes propres, ce qui se passe bien car les modes sont orthogonaux. Allons-y :

$\begin{aligned} \underline{u}(s, 0) &= 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(0) &= 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n \, ds \, q_n(0) &= 0 \\ \ Y_m\ ^2 q_m(0) &= 0 \\ \ Y_m\ ^2 a_m &= 0 \end{aligned}$	$\left \right.$	$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}(s, 0) &= v^0(s) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) \dot{q}_n(0) &= v^0(s) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n \, ds \, \dot{q}_n(0) &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \\ \ Y_m\ ^2 \dot{q}_m(0) &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \\ \ Y_m\ ^2 \omega_m b_m &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \end{aligned}$	$\left \right.$	<p>Conditions initiales</p> <p>Décomposition modale</p> <p>Projection modale</p> <p>Orthogonalité</p> <p>car $q_m(0) = a_m$ et $\dot{q}_m(0) = \omega_m b_m$</p>
--	------------------	--	------------------	--

Ainsi, quelque soit m , on a $a_m = 0$ et

$$b_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2 \omega_m} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds$$

Explicitez les calculs

On a comme $k_m L = m\pi$

$\begin{aligned} \ Y_m\ ^2 &= \int_0^L Y_m(s)^2 \, ds \\ &= \int_0^L \sin^2(k_m s) \, ds \\ &= \frac{L}{2} - \frac{\sin(2k_m L)}{4k_m} \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p_m(t) &= \int_0^L Y_m(s) p(s, t) \, ds \\ &= -\ddot{u}_L(t) \int_0^L \frac{s}{L} \sin(k_m s) \, ds \\ &= -L \frac{\sin(k_m L) - k_m L \cos(k_m L)}{(k_m L)^2} \ddot{u}_L(t) \\ &= \frac{\cos(k_m L)}{k_m^m} \ddot{u}_L(t) \\ &= \frac{(-1)^m}{k_m} \ddot{u}_L(t) \end{aligned}$
---	---

$$\int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau = 2 \frac{(-1)^m}{k_m L} \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau$$

$$\begin{aligned} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds &= -\dot{u}_L(0) \int_0^L \frac{s}{L} \sin(k_m s) \, ds \\ &= \frac{(-1)^m}{k_m} \dot{u}_L(0) \end{aligned}$$

Donnez l'expression générale de $q_m(t)$.

Au final en combinant tous ces résultats :

$$\begin{aligned} q_m(t) &= \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \\ &= \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \left(\dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \right) \end{aligned}$$

$$q_m(t) = \frac{2c}{L} \frac{(-1)^m}{\omega_m^2} \left(\dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \right)$$

(4.4)

Remarque :

- On observe que le premier terme dans la parenthèse permet de porter la singularité de l'intégrale quand $t \rightarrow 0$. C'est pour cette raison que l'on considère que l'intégrale de Duhamel est nulle quand $t \rightarrow 0$.
- L'amplitude des modes varie en $\mathcal{O}(m^{-2})$.

Explicitiez le résultat si $u_L(t) = U \sin(\Omega t)$. Que ce passe-t-il si $\Omega \rightarrow \omega_p$ pour une fréquence ω_p donné. On a bien sûr $\dot{u}_L(0) = \Omega U$ et $\ddot{u}_L(\tau) = -\Omega^2 U \sin(\Omega \tau)$. En calculant on observe que

$$\int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau = \Omega^2 \frac{\Omega \sin(\omega_m t) - \omega_m \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} q_m(t) &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m^2} \left(\sin(\omega_m t) + \frac{\Omega^2 \sin(\omega_m t) - \Omega \omega_m \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2} \right) U \\ &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m^2} \left(\frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\omega_m t) - \frac{\Omega \omega_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \right) U \\ &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m} \frac{\omega_m \sin(\omega_m t) - \Omega \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2} U \end{aligned}$$

Etudions $q_p(t)$ si $\Omega = \omega_p + \epsilon$ avec $|\epsilon| \ll 1$. Dans ce cas on a comme termes dominants (approche de l'Hôpital)

$$\frac{\Omega}{\omega_p^2(\omega_p^2 - \Omega^2)} \sim -\frac{1}{2\omega_p \epsilon}, \quad \omega_p \sin(\omega_p t) - \Omega \sin(\Omega t) \sim -\epsilon(\omega_p t \cos(\omega_p t) - \sin(\omega_p t))$$

où la dernière approximation n'est vraie qu'en temps fini : pour $t \ll 1/\epsilon$ si $\epsilon \neq 0$. En combinant ces deux expressions on observe que

$$q_p(t) \sim \frac{c}{L} (-1)^p \left(t \cos(\omega_p t) - \frac{1}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) U$$

Remarque : Si $\Omega = \omega_p + \epsilon$, le forçage cinématique est en résonance avec le mode p on observe :

- Si $\epsilon = 0$ cette approche est aussi valide.
- Quand $\omega_p t$ est grand (ie au bout de quelques périodes d'oscillation) le second terme peut être négligé devant le premier :

$$q_p(t) \sim c \frac{U}{L} (-1)^p \cos(\omega_p t) t$$

- On observe alors que l'amplitude du mode p croît linéairement en temps.
- Le module de cette expression est indépendante de ω_p : il est tout aussi facile de mettre en résonance les basses fréquences que les hautes.
- Physiquement cette expression n'est justifiée que si l'on respecte l'hypothèse des petites perturbations : il faut que $\|q_m\| \ll L$ quelque soit t pour avoir le droit de discuter sur un résultat de ce modèle. On doit donc avoir (en considérant que $\cos(\omega_p t) = \mathcal{O}(1)$) :

$$\frac{U}{L} ct \ll L \quad \text{et si } \epsilon \neq 0 \quad t \ll \frac{1}{\epsilon}$$

On doit accepter ces résultats pour sur un domaine temporel respectant :

$$t \ll \min \left(\frac{1}{|\Omega - \omega_p|}, \frac{L^2}{cU} \right)$$

L'approche est d'autant plus justifiée que la corde est longue et que la sollicitation est faible. Ce travail a permis d'analyser un régime transitoire de la résonance.

4.10 Forçage dynamique

On suppose que l'on force la corde en $s = L$ en imposant une force $F_L(t)$ donnée. On suppose que la poutre est initialement au repos. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' &= \rho A \ddot{u} \\ N &= T u' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & T u'(L, t) &= F_L(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

On cherche une solution générale sous la forme

$$u(s, t) = \bar{u}(s, t) + \underline{u}(s, t) \quad (4.6)$$

où $\bar{u}(s, t)$ est imposé de sorte que $T \bar{u}'(L, t) = F_L(t) \forall t$. En pratique on prendra :

$$\bar{u}(s, t) = \frac{1}{T} s F_L(t)$$

Remarquons que cette expression est bien homogène à un déplacement. Compte tenu de cette expression, la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$ doit maintenant satisfaire un problème un peu différent, que l'on appelle problème relevé, qui est non-homogène mais dont les conditions aux limites assurent l'orthogonalité du problème homogène.

Injectons donc le changement de variable (6.6) dans le problème général, nous obtenons simplement

$$\begin{aligned} T \underline{u}'' - \rho A \ddot{\underline{u}} &= \rho A \ddot{\bar{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad \underline{u}(s, 0) &= -\frac{s}{T} F_L(0), & \dot{\underline{u}}(s, 0) &= -\frac{s}{T} \dot{F}_L(0) \\ CL : \quad \underline{u}(0, t) &= 0, & \underline{u}'(L, t) &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

car $\bar{u}'' = 0$. On observe que l'accélération imposée en L joue un rôle de terme source pour l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$. On observe également que la force initiale intervient sous forme de position et vitesse initiale non-nulle pour la variable relevée $\underline{u}(s, t)$. On peut donc poser le problème sous la forme suivante

$$\begin{aligned} c^2 \underline{u}'' + p &= \ddot{\underline{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad \underline{u}(s, 0) &= u^0(s), & \dot{\underline{u}}(s, 0) &= v^0(s) \\ CL : \quad \underline{u}(0, t) &= 0, & \underline{u}(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} u^0(s) &= -\frac{s}{T} F_L(0) \\ v^0(s) &= -\frac{s}{T} \dot{F}_L(0) \\ p(s, t) &= -\frac{s}{T} \ddot{F}_L(t) \end{aligned} \end{aligned}$$

Cherchez les solutions du problème relevé en utilisant une analyse modale. Evitez d'expliciter les calculs pour insister sur la méthodologie :

Les conditions aux limites satisfaites par \underline{u} poussent à chercher les solutions sur la base (??) qui est également orthogonale. On a abouti sans surprise à

$$q_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau$$

On détermine les coefficients a_m et b_m grâce à la projection des conditions initiales sur les modes propres, ce qui se passe bien car les modes sont orthogonaux. On obtient

$$f_m(t) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) p(s, t) ds \quad a_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) u^0(s) ds \quad b_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2 \omega_m} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) ds$$

Ce qui implique simplement que l'on doit étudier en détail l'intégrale (intégration par partie en se rappelant que $k_m = (2m + 1)\pi/(2L)$).

$$\mathcal{I}_m = \int_0^L Y_m(s) s ds = \frac{1}{k_m^2} (-1)^m$$

et l'on obtient une version synthétique

$$q_m(t) = -\frac{2}{L} \frac{1}{T} \left(F_L(0) \cos(\omega_m t) + \dot{F}_L(0) \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t \ddot{F}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau \right) \mathcal{I}_m$$

$$q_m(t) = -\frac{2c^2}{LT} \frac{(-1)^m}{\omega_m^2} \left(F_L(0) \cos(\omega_m t) + \dot{F}_L(0) \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t \ddot{F}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau \right)$$

4.11 Choc

On suppose que l'on choque la corde en $s = \ell$ en imposant une densité linéique de force $p(s, t) = Q\delta(s - \ell)\delta(t)$ où Q une densité temporelle homogène à une force fois un temps (unité SI Ns). La poutre est initialement au repos et est attachée au deux extrémités. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' + p &= \rho A \ddot{u} \\ N &= T u' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & T u'(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Résoudre le problème explicitement. On va chercher des solutions sous la forme

$$\underline{u}(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(t)$$

en utilisant la base modale (??) on trouve facilement que

$$q_m(t) = \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau$$

où

$$f_m(\tau) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) p(s, t) ds = \frac{2}{L} Q \delta(t) \int_0^L \sin(k_m s) \delta(s - \ell) ds = \frac{2Q}{L} \delta(t) \sin(k_m \ell)$$

Et donc l'intégrale $q_m(t)$ devient

$$q_m(t) = \frac{1}{\omega_m} \frac{2Q}{L} \sin(k_m \ell) \int_0^t \delta(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau = \frac{1}{\omega_m} \frac{2Q}{L} \sin(k_m \ell) \sin(\omega_m t)$$

4.12 Arc

Avec une conditions au limite de type Neuman

Justifiez que si les modes sont orthogonaux on a $\langle Y'_n, Y'_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. Calculez $\|Y'_n\|$.
On considère une corde ayant pour condition initiale

$$N(s, 0) = \begin{cases} \frac{F}{\ell}, & 0 \leq s \leq \ell, \\ -\frac{F}{L-\ell}, & \ell \leq s \leq L, \end{cases} \quad \dot{u}(s, 0) = 0$$

En déduire $N(s, t)$ puis $u(s, t)$ en utilisant de manière judicieuse la notion de projection.
On devrait avoir à peu près la même chose qu'avant (en identifiant correctement F). Discutez.
Expliquez pourquoi le fait d'avoir

$$\int_0^L N(s, 0) ds = 0$$

n'est pas surprenant car il a un sens physique connu depuis plusieurs siècles.
Comment peut-on exprimer $N(s, 0)'$ en exploitant les distributions.

Avec un terme source

On considère une corde subissant une force ponctuelle en $s = \ell$ depuis $t = -\infty$ jusqu'à l'instant initial puis est lâchée ensuite (à vitesse nulle) :

$$\rho A p(s, t) = \begin{cases} F\delta(s - \ell), & -\infty \leq t \leq 0, \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

Pour ce genre de problème (qui n'est pas un problème de Cauchy) l'intégrale de Duhamel à exploiter est la suivante :

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{-\infty}^t p_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau$$

et les termes intégrés à l'infini ont une contribution nulle (en moyenne c'est vrai).

En déduire la solution générale $N(s, t)$, $u(s, t)$ (en posant $a_n = b_n = 0$). Comparez la solution obtenue pour une corde pincée. Expliquez pourquoi la solution est similaire si on choisi correctement l'expression de F en fonction de a . Discutez.

Application numérique

Simulez le comportement de cet arc au cours du temps. Prenez soins de réaliser des simulations cohérentes.

4.13 Pendule

On dispose d'une corde fixe en $s = 0$ mais attachée en $s = L$ à une masse M . On notera dans la suite $\xi = m/M$ où m est la masse totale de la corde.
Justifiez que les conditions aux limites sont

$$u(0, t) = 0, \quad -N(0, t) = M\ddot{u}(0, t),$$

Montez que les modes propres sont associés à des nombres d'ondes solutions de

$$\tan(k_n L) = \xi \frac{1}{k_n L}$$

Mais qu'il y a également un mode rigide.

Utilisez le code pour trouver les zéros de la fonction transcendente permettant de déterminer les nombres d'onde k_n .

Tracez les modes propres.

Discutez en fonction de ξ et de n .

Pour faire valoir l'orthogonalité des modes, c'est plus complexe. Il faut partir de cela :

Considérons le mode $Y_n(s)$ pour n arbitraire, il est solution de

$$Y_n'' + k_n^2 Y_n = 0$$

Considérons un autre mode $Y_m(s)$ pour $m \neq n$ arbitraire. Projetons la relation précédente sur le mode Y_m de cette manière :

$$\int_0^L (Y_n'' + k_n^2 Y_n) k_m^2 Y_m ds$$

Puis en faisant sensiblement comme précédemment, montrez que pour $n \neq m$

$$\int_0^L Y_n' Y_m' ds = 0$$

si les modes satisfont les conditions aux limites requises.

Vérifiez que tout ce passe parfaitement bien même si Y_n est un mode rigide.

Vérifiez (par exemple par le calcul) que l'on n'a pas :

$$\int_0^L Y_n Y_m ds = 0$$

Mais que ce n'est pas grave. On va s'en sortir.

On considère que le pendule est soumis aux conditions initiales $u(s, 0) = u^0(s)$ et $\dot{u}(s, 0) = 0$ avec :

$$u^0(s) = \begin{cases} a \frac{s}{\ell}, & 0 \leq s \leq \ell, \\ a, & \ell \leq s \leq L, \end{cases}$$

En dérivant la condition initiale, montrez que l'on parvient à déterminer les a_n et b_n en utilisant l'orthogonalité mentionnée plus haut.

Déterminez la solution.

Simulez votre travail et discutez.

Chapitre 5

Autres structures scalaires

On étudie d'autres problèmes scalaires de dynamique de structures

5.1 Membranes

Une membrane est une structure bidimensionnelle supportant une pré-tension par unité de longueur n_0 dans son plan. Soit une membrane dans le plan $(O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. L'objectif est d'étudier le déplacement transverse $\mathbf{u}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_z$ dans le cadre des petites perturbations (problème linéarisé). La masse d'un petit élément de surface est $\rho h dx dy$, où ρ est la masse volumique du matériau et h l'épaisseur de la membrane. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à cet élément de surface on aboutit à

$$n_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho h b = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

où $b(x, y, t)$ est une densité de force exercée par l'environnement extérieure. Cette équation est obtenue par projection sur l'axe transverse \mathbf{e}_z .

Cette relation peut se généraliser en introduisant le Laplacien plan Δ :

Définition 5.1: Equations de vibration des membranes (1D)
Dans le domaine Ω de la membrane

$$n_0 \Delta u + \rho h b = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

Les conditions aux limites sont imposées sur les bords $\partial\Omega$ du domaine.

5.1.1 Vibrations libres d'une membrane rectangulaire

On considère une membrane fixée au bord

$$u(x, y, t) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \forall t > 0$$

Pour une membrane rectangulaire de dimension $L_x \times L_y$, les conditions aux limites sont donc

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(L_x, y, t) &= 0, & \forall y \in [0, L_y], & t > 0 \\ u(x, 0, t) &= 0, & u(x, L_y, t) &= 0, & \forall x \in [0, L_x], & t > 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Le choix d'un système de coordonnées cartésienne est pertinent. Car les conditions aux limites s'y prêtent. On cherche des solutions à variables séparées, sous la forme

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (5.3)$$

en injectant cette représentation dans (??) homogène (*i.e.* $b \rightarrow 0$) :

$$\frac{n_0}{\rho h} (X''YT + XY''T) = XY\ddot{T}$$

où la convention suivante est utilisée

$$X' = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial y}$$

ce qui est source de confusion dans certains cas, donc vigilance...

Après quelques manipulation, nous obtenons

$$\frac{n_0}{\rho h} \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = \frac{\ddot{T}}{T}$$

Ce qui implique, l'existence d'une pulsation ω , telle que

$$\frac{n_0}{\rho h} \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2$$

Soit

$$\frac{n_0}{\rho h} \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = -\omega^2 \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

Le second terme est classique. Pour le second, il est important de noter que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\rho h}{n_0} \omega^2 - \frac{Y''}{Y}$$

Comme le terme de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de y alors, il existe k_x tel que

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2$$

la même opération sur $Y(y)$, implique qu'il existe une constante k_y telle que

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$$

Notons, que k_x et k_y dépendent donc des constantes du problème et de ω : $k_x(\omega)$ et $k_y(\omega)$. On a donc la relation de dispersion suivante

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 = \frac{\rho h}{n_0} \omega^2} \quad (5.4)$$

Les conditions aux limites imposent, pour les modes dynamiques

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{L_x}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5.5)$$

$$k_{ym} = \frac{m\pi}{L_y}, \quad m \in \mathbb{N}^* \quad (5.6)$$

Mais ces solutions ne sont pas indépendantes, la relation de dispersion impose en effet que la pulsation doit être commune à ces deux solutions, nous la noterons ω_{nm} et elle est donc solution de

$$\left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 = \frac{\rho h}{n_0} \omega_{nm}^2$$

Il ne faut pas pour autant oublier les potentiels modes rigides $k_x = 0$ ou modes statiques $\omega = 0$. Les modes propres sont donc les données des deux fonctions $X_n(x)$ et $Y_m(y)$ qui satisfont les conditions aux limites. Dans le cas proposé, les modes propres sont donc déterminés par

$$\left\{ \begin{aligned} X_n(x) &= \sin(k_{xn}x), & Y_m(y) &= \sin(k_{ym}y), & k_{xn} &= \frac{n\pi}{L_x}, & k_{ym} &= \frac{m\pi}{L_y}, & \dots \\ \dots & & (n, m) &\in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; & \omega_{nm}^2 &= \frac{n_0}{\rho h} (k_{xn}^2 + k_{ym}^2) \end{aligned} \right\}$$

Ce qui génère une décomposition modale

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} u_{nm}(x, y) T_{nm}(t) \quad \text{où} \quad u_{nm}(x, y) = X_n(x) Y_m(y) \quad (5.7)$$

Le point important est de s'assurer que $u_{nm}(x, y)$ forme une base orthogonale, au sens de ce produit scalaire

$$\langle f(x, y), g(x, y) \rangle = \int_{\Omega} f(x, y) g(x, y) dx dy$$

Et bien sûr

$$T_{nm}(t) = a_{nm} \cos(\omega_{nm}t) + \frac{b_{nm}}{\omega_{nm}} \sin(\omega_{nm}t)$$

les amplitudes a_{nm} et b_{nm} étant déterminés par les conditions initiales.

5.1.2 Vibrations libres d'une membrane rectangulaire

On considère les mêmes conditions aux limites, mais cette fois, pour une membrane circulaire de rayon a . Plutôt que de paramétrer le domaine en coordonnées cartésiennes, nous allons utiliser des coordonnées polaires : $u(r, \theta, t)$. Dans ce cas, les conditions aux limites sont simplement

$$u(a, \theta, t) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad \forall t > 0$$

Le laplacien (Δ), s'exprime en coordonnées polaires ainsi :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Enfin, la séparation des variables se formule ainsi

$$u(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t)$$

L'équation de vibration est donc

$$n_0 \left(R'' \Theta T + \frac{R'}{r} \Theta T + \frac{R}{r^2} \Theta'' T \right) = \rho h R \Theta \ddot{T}$$

En séparant espace et temps dans un premier temps

$$\frac{n_0}{\rho h} \left(\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \right) = \frac{\ddot{T}}{T}$$

soit

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{\rho h}{n_0} \omega^2 \quad (5.9)$$

La première suggère des solutions oscillantes en temps. La seconde mérite quelque réarrangement :

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \frac{\rho h}{n_0} \omega^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

Il existe donc une constante $n \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -n^2 \quad r^2 R'' + r R' + \left(\frac{\rho h}{n_0} \omega^2 r^2 - n^2 \right) R = 0$$

On introduit

$$k^2 = \frac{\rho h}{n_0} \omega^2$$

pour avoir pour l'équation radiale

$$r^2 R'' + r R' + ((kr)^2 - n^2) R = 0$$

L'équation angulaire a pour solution

$$\Theta(\theta) = a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)$$

L'équation radiale a pour solution

$$R(r) = c J_n(kr) + d Y_n(kr)$$

Où $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce et d'ordre n .

A priori, l'ordre n n'est pas forcément un entier, cela peut même être un nombre complexe ! Mais les conditions de continuité en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ imposent $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$

$$a = a \cos(2n\pi) + b \sin(2n\pi)$$

ce qui nécessite que n est un entier. Pour n fixé arbitrairement, il reste à déterminer les fréquences propres à partir des conditions aux limites. Les modes propres sont donc

$$u_n = R_n(r) \Theta(\theta)$$

La difficulté est de déterminer a et b , cela peut être réalisé en considérant les produits scalaires

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) g(r, \theta) r dr d\theta$$

5.2 Cordes épaisses

Pour des cordes épaisses, de petites tailles, où pour des modes élevés, on utilise parfois le modèle de Fletcher :

Définition 5.2: Modèle de Fletcher

Dans le domaine $[0, L]$ le déplacement transverse $u(S, t)$ de la corde est régi par

$$N_0 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - EI \frac{\partial^4 u}{\partial S^4} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.10)$$

où EI est la rigidité en flexion, E est le module de Young (en Pa) et I est le moment quadratique (en m^4)

Pour une corde de section circulaire de rayon R on a $I = \pi R^4/4$. On a donc introduit un terme correctif, une dérivée d'ordre 4, qui va lisser la solution en espace.

La relation de dispersion est

$$N_0 k^2 E I k^4 = \rho A \omega^2$$

en particulier, la corde n'est plus harmonique. Les solutions en espaces sont

$$Y(S) = a^1 \cos(kS) + a^2 \sin(kS) + a^3 \cosh(kS) + a^4 \sinh(kS)$$

Les conditions aux limites sont plus riches, il faut imposer deux conditions à chaque bord. Par exemple pour ne condition d'encastrement en $S = 0$

$$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0$$

5.2.1 Solutions oscillantes en temps

On considère ici que $\omega_n \neq 0$, c'est à dire que $n > 0$. Les solutions générales de (3.1) peuvent s'écrire de diverses formes (toutes équivalentes) comme nous l'avons vu pour le problème en espace :

$$T_n(t) = a_n e^{i\omega_n t} + b_n e^{-i\omega_n t} \quad (5.11)$$

$$T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad (5.12)$$

$$T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (5.13)$$

$$T_n(t) = a_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (5.14)$$

Les coefficients a_n, b_n et ϕ_n sont inconnus, a priori distinct pour chaque n et ils auront des expressions différentes en fonction des écritures choisies. Ils ne sont pas liés à ceux que nous avons rencontré en (2.11), car ceux de l'équation en espace ont été déterminés !

Les fonctions trigonométriques \sin et \cos sont vues ici comme des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Là encore certaines écritures sont à privilégier en fonction du problème abordé.

5.3 Solutions du problème libre

Pour le problème libre, nous pouvons exploiter la décomposition modale présentées auparavant et déterminer les amplitudes modales induites par les conditions initiales.

5.3.1 Décomposition modale

A ce stade, nous n'avons pas déterminé une solution $u(S, t)$, mais plutôt une infinité de solutions admissibles $u_n(S, t)$, qui respectent les équations différentielles et les conditions aux limites. Ces **solutions modales** peuvent s'exprimer ainsi en toute généralité :

$$u_n(S, t) = Y_n(S) T_n(t) \quad (5.15)$$

où les deux fonctions Y_n (par exemple (2.16)) et T_n (par exemple (5.12)) sont liées dans le sens où elles partagent le même ω_n . Ces solutions modales sont toutes solutions de l'équation de vibrations libres

$$N_0 u_n'' = \rho A \ddot{u}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.16)$$

Toute composition linéaire des $u_n(S, t)$ est solution également de l'équation de vibration libre (2.1). On a donc une solution $u(S, t)$ qui s'exprime en toute généralité comme

$$u(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(S, t), \quad \text{soit} \quad u(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) T_n(t) \quad (5.17)$$

Cette écriture est une **superposition modale** ou **décomposition modale**.

Remarque 15. Il est tentant d'écrire cette décomposition sous la forme $\sum_n \alpha_n u_n(S, t)$ mais en fait ce n'est pas pertinent car le poids α_n est redondant avec le fait que l'amplitude de chaque $T_n(t)$ est encore indéterminée.

Remarque 16. La somme dans (5.17) est réalisée pour $n \in \mathbb{N}$: cette écriture tient donc compte des modes rigides, $n = 0$.

Remarque 17 (Force). Notons que l'on a également la force :

$$N(S, t) = N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n(S, t), \quad \text{soit} \quad N(S, t) = N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}} Y'_n(S) T_n(t) \quad (5.18)$$

Pour le problème (I), il n'y a pas de modes rigides, nous avons ainsi

$$\begin{aligned} u(S, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(k_n S) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \\ N(S, t) &= N_0 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} k_n \cos(k_n S) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \end{aligned}$$

5.3.2 Conditions initiales

Il reste à déterminer deux coefficients pour chaque mode. Par exemple, si on prend l'expression (5.12), il faut déterminer une infinité de paire (a_n, b_n) . Cette opération est réalisée à partir des conditions initiales (1.25). Ces dernières s'expriment sans difficulté grâce à la décomposition modale :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) T_n(0) = u^0(S), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) \dot{T}_n(0) = v^0(S) \quad (5.19)$$

Toujours avec la formulation (5.12), on a $T_n(0) = a_n$ et $\dot{T}_n(0) = b_n$ pour $n > 0$ mais également pour $n = 0$ si on se réfère à (3.2). Les conditions initiales deviennent :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) = u^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (CI_u)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n Y_n(S) = v^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (CI_v)$$

5.3.3 Amplitudes modales (cas général)

On dispose de deux équations, (CI_u) et (CI_v) , mais de deux infinités d'inconnues à déterminer... en algèbre nous serions foutus. Mais ces deux équations ne sont pas algébriques mais fonctionnelles : chaque équation est une égalité entre deux fonctions, égalité qui doit être vraie quelque soit S .

La méthode consiste à utiliser la structure préhilbertienne de l'espace des solutions de (2.5). Les deux conditions initiales, (CI_u) et (CI_v) , sont projetées le long d'un mode arbitraire, disons le mode Y_m , pour m fixé. On a réciproquement :

$\langle (CI_u), Y_m \rangle$	$\langle (CI_v), Y_m \rangle$
$\int_0^L \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) Y_m(S) dS = \int_0^L u^0(S) Y_m(S) dS$ $\sum_n a_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \langle Y_m, u^0 \rangle$ $\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle a_n = \langle Y_m, u^0 \rangle$	$\int_0^L \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n b_n Y_n(S) Y_m(S) dS = \int_0^L v^0(S) Y_m(S) dS$ $\sum_n \omega_n b_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \langle Y_m, v^0 \rangle$ $\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle (\omega_n b_n) = \langle Y_m, v^0 \rangle$

Introduisons :

$$\mathbb{K}_{nm} = \langle Y_n, Y_m \rangle, \quad U_n^0 = \langle Y_n, u^0 \rangle, \quad V_n^0 = \langle Y_n, v^0 \rangle, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

ainsi que la matrice et les vecteurs ayant les composantes suivantes :

$$\mathbb{K} = (\mathbb{K}_{nm})_{nm}, \quad U^0 = (\dots, U_n^0, \dots)^T, \quad V^0 = (\dots, V_n^0, \dots)^T \\ a = (\dots, a_n, \dots)^T, \quad b = (\dots, b_n, \dots)^T$$

Les relations $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$ étant vérifiées pour tout m , on peut écrire ces relations de manière algébrique avec la matrice infinie \mathbb{K} et les vecteurs infinis U^0 , V^0 , a et b :

$$\mathbb{K}a = U^0, \quad \mathbb{K}b = V^0$$

Si l'on se limite aux n_{max} premiers modes, les matrices et vecteurs sont de dimensions finies $n_{max} \times n_{max}$ et n_{max} respectivement. \mathbb{K} est alors inversible et l'on a

$$a = \mathbb{K}^{-1}U^0, \quad b = \mathbb{K}^{-1}V^0$$

ce qui permet de déterminer les premiers a_n et b_n de manière approchées pour $n \leq n_{max}$. C'est également le cas de $T_n(t)$ compte tenu de (5.12).

Remarque 18 (Numérique versus explicite). *Ce calcul est réalisable numériquement, par contre les composantes de \mathbb{K} , de U^0 et de V^0 , peuvent être calculées explicitement.*

Remarque 19 (Erreur de troncature versus résolution). *Quand n_{max} est faible, on perd de la précision, notamment pour les hautes fréquences et les petites échelles. Par contre si n_{max} est trop important le calcul d'inversion devient coûteux et peut même parfois générer des erreurs numériques si la matrice \mathbb{K} est mal conditionnée.*

5.3.4 Amplitudes modales (cas orthogonal)

Si la base $\{Y_n\}$ est orthogonale on a $\langle Y_n, Y_m \rangle = \|Y_n\|^2 \delta_{nm}$, où

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \text{symbole de Kronecker}$$

Dans ce cas là, les sommes suivant n , introduites en $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$, sont des sommes de termes nuls sauf quand $n = m$, où m est fixé. Et donc :

$$\sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle a_n = \sum_n \|Y_n\|^2 \delta_{nm} a_n = \|Y_m\|^2 a_m, \quad \sum_n \langle Y_m, Y_n \rangle b_n = \|Y_m\|^2 b_m$$

Ainsi, on peut avoir explicitement les amplitudes modales, partir de $\langle (CI_u), Y_m \rangle$ et $\langle (CI_v), Y_m \rangle$

$$a_n = \frac{\langle Y_n, u^0 \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L u^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS}, \quad b_n = \frac{\langle Y_n, v^0 \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L v^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (5.20)$$

Ainsi, compte tenu de (5.12), la solution temporelle $T_n(t)$ est explicitement déterminée (même pour $n = 0$).

Exemple d'une corde pincée

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Les modes propres sont donc déterminés par (2.18). Ils sont orthogonaux et il n'y a pas de modes rigides. En $t = 0$, la corde est pincée en $\ell \in]0, L[$ et lâchée à cet instant sans vitesse initiale. Les conditions initiales sont donc

$$u^0(S) = \begin{cases} h \frac{S}{\ell}, & 0 \leq S \leq \ell, \\ h \frac{L-S}{L-\ell}, & \ell \leq S \leq L, \end{cases} \quad \text{et} \quad v^0(S) = 0, \quad 0 \leq S \leq L.$$

où h est l'amplitude du déplacement maximal. Pour préserver l'hypothèse des petites perturbation on a $|h| \ll L$. Les constantes d'intégration a_n et b_n sont donc obtenues grâce à (5.20). Après calcul on obtient

$$a_n = \frac{2h}{n\pi} \frac{L}{L-\ell} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \quad b_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

soit

$$u(s, t) = \frac{2h}{L-\ell} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \frac{\sin(k_n S)}{k_n} \cos(\omega_n t) \quad (5.21)$$

$$N(s, t) = N_0 \frac{2h}{L-\ell} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n \ell} \cos(k_n S) \cos(\omega_n t) \quad (5.22)$$

5.4 Solutions du problème forcé

Il s'agit ici de résoudre le problème forcé (1.22). On part donc de (1.23) que l'on rappelle :

$$N_0 u'' + p = \rho A \ddot{u}$$

où il est très important de rappeler que $p(S, t)$ dépend de l'espace et du temps. Afin d'être rigoureux nous devons décomposer cette densité de force en une composante **statique** $\bar{p}(S)$ et **temporelle** $\tilde{p}(S, t)$:

$$p(S, t) = \bar{p}(S) + \tilde{p}(S, t), \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} \tilde{p}(S, t) dt = 0$$

Ainsi la contribution dynamique est à moyenne nulle sur le domaine temporel $[0, +\infty[$ et la composante statique est la valeur moyenne, en temps, de la force. Introduisons une **composante statique et temporelle du déplacement** :

$$u(S, t) = \bar{u}(S) + \tilde{u}(S, t), \quad (5.23)$$

qui sont définis comme les solutions respectives de

$$\begin{array}{ll} N_0 \bar{u}'' + \bar{p} = 0 & \text{Problème statique} \\ N_0 \tilde{u}'' + \tilde{p} = \rho A \ddot{\tilde{u}} & \text{Problème temporel} \end{array}$$

5.4.1 Solutions statiques

Pour le problème statique, il n'y a pas de difficultés particulières. Il suffit en effet de résoudre

$$\bar{u}''(S) = -\frac{1}{N_0} \bar{p}(S) \quad (5.24)$$

par intégration successive en espace. Les deux constantes d'intégration qui apparaissent sont déterminées en imposant les deux conditions aux limites du problème qui doivent être respectées par \bar{u} en $S = 0$ et L .

5.4.2 Solutions dynamiques

La méthode consiste à chercher des solutions \tilde{u} qui se décomposent sur la base modale $\{Y_n\}_n$. On ne traite ici que le cas où cette base est orthogonale (hilbertienne). En d'autres termes, on cherche une solution \tilde{u} de l'équation temporelle de la forme

$$\tilde{u}(S, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(t) Y_n(S) \quad (5.25)$$

où $q_n(t)$ sont des **coordonnées généralisées**. Ce sont des fonctions inconnues pour l'instant. Les modes $Y_n(s)$ sont les solutions rigides ($n = 0$) et dynamiques (par exemple (2.16)) du problème homogène (2.1) avec les mêmes conditions aux limites que le problème non-homogène.

En injectant (5.25) dans l'équation de vibration forcé on a :

$$N_0 \sum_n Y_n'' q_n + \tilde{p} = \sum_n Y_n \ddot{q}_n$$

que l'on projette brutalement sur un mode arbitraire Y_m :

$$N_0 \sum_n \int_0^L Y_n''(S) Y_m(S) dS q_n(t) + \int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_m(S) dS = \sum_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS \ddot{q}_n(t)$$

Etudions chaque terme en gardant en tête que les modes sont orthogonaux.

— Pour le premier, nous savons que chaque mode satisfait $Y_n'' = -k_n^2 Y_n$ et donc

$$\sum_n \int_0^L Y_n''(S) Y_m(S) dS = - \sum_n k_n^2 \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = - \sum_n k_n^2 \|Y_n\|^2 \delta_{nm} = -k_m^2 \|Y_m\|^2$$

ce qui inclue le cas rigide en imposant $k_0 \rightarrow 0$.

— Pour le second on introduit juste la notation standard

$$p_m(t) = \int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_m(S) dS = \langle Y_m(S), \tilde{p}(S, t) \rangle$$

qui n'est plus qu'une fonction du temps.

— Pour le dernier, c'est direct compte tenu de l'orthogonalité des modes

$$\sum_n \int_0^L Y_n(S) Y_m(S) dS = \sum_n \|Y_n\|^2 \delta_{nm} = \|Y_m\|^2$$

On a donc après arrangement, pour tout m :

$$-N_0 k_m^2 \|Y_m\|^2 q_m(t) + p_m(t) = \rho A \|Y_m\|^2 \ddot{q}_m(t)$$

En utilisant la relation de dispersion $N_0 k_m^2 = \rho A \omega_m^2$ on trouve pour tout n :

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t), \quad \text{avec} \quad f_n(t) = \frac{\langle Y_n, \tilde{p} \rangle}{\|Y_n\|^2} = \frac{\int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (5.26)$$

où $f_n(t)$ est la **force modale normalisée**.

Remarque 20 (Équation de Duhamel). La solution générale $u(t)$ de l'équation de l'oscillateur forcé :

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t), \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

est fournie par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau$$

Si les conditions initiales sont $u(0) = u^0$, $\dot{u}(0) = v^0$ alors les constantes d'intégration (a, b) sont déterminées : $a = u^0$ et $b = v^0$. En effet

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \right) \right) = 0$$

Compte tenu de cette remarque on a la forme générale de $q_n(t)$, pour chaque mode dynamique $n > 0$ (la contribution du mode rigide est présenté juste après) :

$$q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau \quad (5.27)$$

L'équation (5.26) reste vrai pour le mode rigide $n = 0$ quand il est non-nul. Plus précisément elle est, pour ce cas particulier :

$$\ddot{q}_0(t) = f_0(t), \quad \text{avec} \quad f_0(t) = \frac{\langle Y_0, \tilde{p} \rangle}{\|Y_0\|^2} = \frac{\int_0^L \tilde{p}(S, t) Y_0(S) dS}{\int_0^L (Y_0(S))^2 dS}$$

Dont les solutions sont

$$q_0(t) = a_0 + b_0 t + \int_0^t \int_0^\sigma f_0(\tau) d\tau d\sigma \quad (5.28)$$

Les expressions de (5.27) et (5.28) injectées dans (5.25) permettent de déterminer la forme générale de la solution temporelle $\tilde{u}(S, t)$.

5.4.3 Amplitudes et conditions initiales

On dispose ainsi de la forme générale de $u(S, t) = \bar{u}(S) + \tilde{u}(S, t)$. Mais nous ne connaissons pas encore les amplitudes modales (a_n, b_n) pour tous les $n \in \mathbb{N}$. Ces termes sont bien entendus obtenus à partir des conditions initiales :

$$u(S, 0) = u^0(S), \quad \dot{u}(S, 0) = v^0(S),$$

Compte tenu de la décomposition (5.23) du déplacement, ces conditions initiales s'expriment par

$$\bar{u}(S) + \tilde{u}(S, 0) = u^0(S), \quad \dot{\tilde{u}}(S, 0) = v^0(S),$$

où $\bar{u}(S)$ est parfaitement déterminé par la résolution de (5.24). Ains, les amplitudes modales (a_n, b_n) du déplacement temporelle seront déterminés de sorte à satisfaire :

$$\tilde{u}(S, 0) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \dot{\tilde{u}}(S, 0) = v^0(S),$$

où le terme de droite est connu alors que celui de gauche contient les indéterminés (a_n, b_n) . On peut remarquer que si la position initiale $u^0(S)$ est la position d'équilibre statique $\bar{u}(S)$ alors $\tilde{u}(S, 0) = 0$. Les conditions initiales s'expriment ainsi compte tenu de la décomposition modale (5.25) de la solution temporelle :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) q_n(0) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n(S) \dot{q}_n(0) = v^0(S)$$

On a bien sûr $T_n(0) = a_n$ et $\dot{T}_n(0) = b_n$ (même si $n = 0$). Et donc nous avons à résoudre

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Y_n(S) = u^0(S) - \bar{u}(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (5.29)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n Y_n(S) = v^0(S), \quad \forall S \in [0, L] \quad (5.30)$$

qui est un problème similaire à (CI_u) et (CI_v) . La méthodologie de résolution est donc la même. En particulier, quand la base $\{Y_n\}$ est orthogonale, on obtient un résultat similaire à (5.20) pour les modes dynamiques ($n \in \mathbb{N}^*$) et rigides

$$a_n = \frac{\langle Y_n, u^0(S) - \bar{u}(S) \rangle}{\|Y_m\|^2} = \frac{\int_0^L (u^0(S) - \bar{u}(S)) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS}, \quad b_n = \frac{\langle Y_n, v^0 \rangle}{\|Y_m\|^2} = \frac{\int_0^L v^0(S) Y_n(S) dS}{\int_0^L (Y_n(S))^2 dS} \quad (5.31)$$

On a complètement résolu le problème.

Chapitre 6

Travaux dirigés

6.1 Chargement statique

On considère une corde fixée aux deux extrémités qui subit un chargement $p(S, t) = -P$ uniforme et constant.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. On suppose qu'à $t = 0$ la corde n'est pas encore chargée : elle est parfaitement au repos $u(S, 0) = 0$, $\dot{u}(S, 0) = 0$. Si bien que $p(S, t)$ n'est vraiment non-nul que pour $t > 0$. En déduire la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. On suppose maintenant que la corde n'est plus chargée. Mais qu'elle possède comme condition initiale $u(S, 0) = \bar{u}(S)$, où $\bar{u}(S)$ est la solution déterminée à la première question. La vitesse initiale est nulle. Déterminez $u(S, t)$. Cette dynamique s'observe quand la neige tombe brutalement (et en $t = 0$!) des fils électriques.

6.2 Chargement statique sur un support élastique

On considère une corde fixée aux deux extrémités par deux ressorts de raideurs K (voir exemple §2.2). Elle subit un chargement $p(S, t) = -P$ uniforme et constant alors qu'elle était tranquillement au repos.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. On suppose qu'à $t = 0$ la corde n'est pas encore chargée et donc $u(S, 0) = 0$, $\dot{u}(S, 0) = 0$. Si bien que $p(S, t)$ n'est vraiment non-nul que pour $t > 0$. En déduire la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. Discutez en fonction des paramètres du modèle.

6.3 Chargement dynamique uniforme

On considère une corde parfaitement fixée aux deux extrémités. Elle subit un chargement uniforme $p(t) = -P + F \sin(\Omega t)$ lié au vent qui génère un décrochage périodique de tourbillons de Von Karman. En $t = 0$ la corde n'a pas de vitesse et sa position est solution du problème statique imposé par $-P$.

1. Déterminer la déformée statique $\bar{u}(S)$ de cette corde.
2. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
3. Discutez en fonction des paramètres du modèle, notamment si $\Omega \ll \omega_1$ ou si $\Omega \sim \omega_5$ ou même pire si $\Omega = \omega_5$

6.4 Chargement par une vague

On considère une corde libre aux deux extrémités. Elle subit un chargement uniforme $p(t, S) = F \sin(Vt - S)$ lié au passage d'une onde se propageant dans la direction de la corde à une vitesse V . Des problèmes de ce type arrivent par exemple dans le cas de la banquise soumise à la houle ou des récupérateurs d'énergie. En $t = 0$ la corde n'a pas de vitesse et sa position est au repos.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
2. Discutez en fonction de la célérité $c = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}}$, par exemple si $V \ll c$ ou si $V \gg c$.
3. Est-il possible d'exciter de la sorte un mode particulier, par exemple $n = 4$? Si oui, comment choisir V en fonction des propriétés de la corde.

6.5 Chargement par une force ponctuelle oscillante

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Elle subit un chargement ponctuel $p(t, S) = F \sin(\Omega t) \delta(S - \ell)$ situé en $\ell \in [0, L]$. Des problèmes de ce type arrivent par exemple dans le cas d'un archet qui ahène et glisse successivement sur la corde d'un violon à une période $\tau = 2\pi/\Omega$. En $t = 0$ la corde est au repos.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps.
2. Discutez en fonction de la position ℓ , par exemple si $\ell = L/2$ ou $\ell = L/5$, ou encore $\ell = L/5 + \epsilon$ où $0 < \epsilon \ll 1$.
3. Discutez en fonction de la fréquence d'excitation Ω , par exemple si $\Omega \sim \omega_3$.
4. Discutez en fonction du lien entre Ω et ℓ , par exemple si $\Omega \sim \omega_3$ avec $\ell = L/3$ ou $\ell = L/6$.

6.6 Chargement par une force ponctuelle glissante

On considère une corde fixe aux deux extrémités. Elle subit un chargement ponctuel glissant à la vitesse V d'un bout à l'autre de la structure ainsi $p(t, S) = -F\delta(S - Vt)$ pour $0 < t < L/V$ mais ensuite la force continue son chemin : elle quitte la corde et donc $p(t, S) = 0$ pour $t > L/V$. La corde est initialement au repos. Cette situation intervient quand une personne court sur un pont suspendu.

1. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps, pour $t < L/V$.
2. Déterminer la solution générale $u(S, t)$ au cours du temps, pour $t > L/V$.
3. Etudiez le comportement de la corde en fonction de la position V et des caractéristiques de la corde.

6.7 Vibrations sympathiques

On considère deux cordes (1) et (2) de longueurs respectives L_1 et L_2 . Elles sont parallèles et les déplacements transverses sont notés $u(S, t)$ avec $0 \leq S \leq L_1$ pour (1) et $v(S, t)$ avec $0 \leq S \leq L_2$ pour (2). Elles ont la même tension N_0 . Les équations satisfaites par les deux cordes sont

$$\begin{aligned} N_0 u'' &= \rho A \ddot{u}, & 0 \leq S \leq L_1 \\ N_0 v'' &= \rho A \ddot{v}, & 0 \leq S \leq L_2 \end{aligned}$$

Les deux cordes sont fixées en $s = 0$ et reliées l'une à l'autre par un ressort en l'autre extrémité (voir dessin). On a donc les conditions aux limites et de raccordement suivantes

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & N_0 u'(L_1, t) + K(u(L_1, t) - v(L_2, t)) &= 0, \\ v(0, t) &= 0, & N_0 v'(L_2, t) + K(v(L_2, t) - u(L_1, t)) &= 0 \end{aligned}$$

1. On formule une séparation des variables $u(S, t) = X(S)T(t)$ pour la première et $v(S, t) = Y(S)T(t)$ pour la seconde corde. Montrez qu'alors les équations satisfaites par $X(S)$ et $Y(S)$ sont identiques. Mais surtout, que ces deux équations imposent la même relation de dispersion pour les deux cordes, à savoir $k = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}} \omega$ avec le même k pour les deux cordes !
2. Montrez que les deux premières conditions aux limites imposent les solutions générales en espace

$$X(S) = a \sin(kS), \quad Y(S) = b \sin(kS)$$

où les deux conditions de raccordement imposent

$$\begin{pmatrix} N_0 k \cos(kL_1) + K \sin(kL_1) & -K \sin(kL_2) \\ -K \sin(kL_1) & N_0 k \cos(kL_2) + K \sin(kL_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'équation transcendente et la forme générale des modes propres.
4. Déterminez numériquement les fréquences propres du système et les modes propres associés.
5. A l'instant initial, on pince la première corde, mais la seconde corde est au repos. Déterminer l'évolution des deux cordes au cours du temps. Cela consiste à imposer les conditions initiales suivantes :

$$u(S, 0) = \begin{cases} h \frac{S}{\ell}, & 0 \leq S \leq \ell, \\ h \frac{L_1 - S}{L_1 - \ell}, & \ell \leq S \leq L_1, \end{cases} \quad \dot{u}(S, 0) = 0, \quad v(S, 0) = 0, \quad \dot{v}(S, 0) = 0$$

6. On suppose que $L_2 = \frac{5}{4}L_1$, montrez qu'en fonction de K et de ℓ la seconde corde rentre plus ou moins en vibration.

Ce genre de problème permet de comprendre les phénomènes de vibrations sympathiques pour des instruments tels que la harpe.

6.8 Corde visqueuse

Pour une corde visqueuse la loi de comportement est légèrement différente :

$$N(S, t) = N_0 (u' + 2\nu \dot{u}')$$

où ν est un coefficient positif. La viscosité est donc 2ν . Le coefficient 2 simplifie les calculs par la suite. Par contre l'équation de la dynamique locale est inchangée $N' = \rho A \ddot{u}$. On obtient donc une équation des ondes visqueuses :

$$c^2(u'' + 2\nu \dot{u}'') = \ddot{u}, \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{N_0}{\rho A} \quad (6.1)$$

Montrez que la séparation des variables est encore possible et aboutie à

$$c^2 \frac{Y''}{Y} = -\varpi^2, \quad \frac{\ddot{T}}{T + 2\nu \dot{T}} = -\varpi^2$$

où ϖ^2 est une constante inconnue. L'équation en temps, pour une valeur de ϖ arbitraire, est donc

$$\ddot{T} + 2\varpi^2 \nu \dot{T} + \varpi^2 T = 0$$

On cherche des solutions de la forme $T(t) = e^{i\alpha t}$, si bien que α doit être racine de

$$\alpha^2 - i2\varpi^2 \nu \alpha - \varpi^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \alpha_{\pm} = i\nu\varpi^2 \pm \varpi \sqrt{1 + (\nu\varpi)^2}$$

Les solutions temporelles peuvent donc être mises sous la forme $T(t) = \underline{a}e^{i\alpha t} + \underline{b}e^{i\alpha - t}$ où \underline{a} et \underline{b} sont deux constantes d'intégration. Mais il est plus pratique de choisir une autre (mais équivalente) forme générale :

$$T(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \omega &= \varpi \sqrt{1 + (\nu \varpi)^2}, \\ \frac{1}{\tau} &= \nu \varpi^2 \end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes d'intégration qui seront fixées par des conditions initiales. Pour le problème forcé, on doit utiliser une nouvelle expression de l'intégrale de Duhamel, en effet la solution u de

$$\ddot{u} + 2\nu\varpi^2\dot{u} + \varpi^2u = f(t)$$

est

$$u(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(y) \sin(\omega(t-y)) e^{-\frac{t-y}{\tau}} dy, \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \omega &= \varpi \sqrt{1 + (\nu \varpi)^2}, \\ \frac{1}{\tau} &= \nu \varpi^2 \end{aligned}$$

Montrez que pour une corde fixée aux deux extrémités on doit avoir

$$\frac{\varpi}{c} = \frac{n\pi}{L}$$

on notera par la suite $k_n = n\pi/L$ et $\varpi_n^2 = c^2 k_n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les modes propres sont donc simplement

$$Y_n(s) = \sin(k_n s)$$

Montrez que cette base modale est orthogonale.

Déterminez la dimension de ν .

Donnez un sens physique de τ_n et ω_n . Exprimez ces deux constantes en fonction de k_n . La corde est-elle harmonique ?

Pour ν très petit faites un développement limité de ces deux termes. En fixant une condition initiale de votre choix déterminez a_n et b_n .

Donnez les solutions d'un problème forcé de votre choix.

Accompagnez vos calculs de simulations.

6.9 Forçage cinématique

On suppose que l'on force la corde en $s = L$ en imposant **un déplacement** $u_L(t)$ donné. On suppose que la poutre est initialement au repos, on impose donc également $u_L(0) = 0$. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' &= \rho A \ddot{u} \\ N &= T u' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= u_L(t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

On cherche une solution générale sous la forme

$$u(s, t) = \bar{u}(s, t) + \underline{u}(s, t) \quad (6.3)$$

où $\bar{u}(s, t)$ est imposé de sorte que $\bar{u}(L, t) = u_L(t) \forall t$. En pratique on prendra

$$\bar{u}(s, t) = \frac{s}{L} u_L(t)$$

Compte tenu de cette expression, la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$ doit maintenant satisfaire un problème un peu différent, que l'on appelle problème relevé, qui est non-homogène mais dont les conditions aux limites

assurent l'orthogonalité du problème homogène.

Injectons donc le changement de variable (6.3) dans le problème général, nous obtenons simplement

$$T \underline{u}'' - \rho A \underline{\ddot{u}} = \rho A \underline{\ddot{\bar{u}}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} CI : & \underline{u}(s, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(s, 0) = -\dot{\bar{u}}(s, 0) \\ CL : & \underline{u}(0, t) = 0, \quad \underline{u}(L, t) = u_L(t) \end{array}$$

car $\bar{u}'' = 0$. On observe que l'accélération imposée en L joue un rôle de terme source pour l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$. On observe également que la vitesse de $u_L(t)$ introduit une vitesse initiale non-nulle pour la variable relevée $\underline{u}(s, t)$. On peut donc poser le problème sous la forme suivante

$$c^2 \underline{u}'' + p = \underline{\ddot{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} CI : & \underline{u}(s, 0) = 0, \quad \underline{\dot{u}}(s, 0) = v^0(s) \\ CL : & \underline{u}(0, t) = 0, \quad \underline{u}(L, t) = 0 \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} v^0(s) = -\frac{s}{L} \dot{u}_L(0) \\ p(s, t) = -\frac{s}{L} \ddot{u}_L(t) \end{array}$$

Cherchez les solutions du problème relevé en utilisant une analyse modale. Evitez d'expliciter les calculs pour insister sur la méthodologie :

Les conditions aux limites satisfaites par \underline{u} poussent à chercher les solutions sur la base (??) :

$$\underline{u}(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(t)$$

où les inconnus sont maintenant les coordonnées généralisées $q_n(t)$. L'équation différentielle devient

$$c^2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n'' q_n + p = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \ddot{q}_n$$

Comme Y_n est solution de $Y_n'' + \omega_n^2/c^2 Y_n = 0$, on a :

$$- \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n^2 Y_n q_n + p = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \ddot{q}_n$$

Soit :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = p$$

Que l'on projette sur un mode m arbitraire pour obtenir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n ds (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = \int_0^L Y_m p ds$$

Mais comme les modes sont orthogonaux, on obtient juste une équation en m , pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\ddot{q}_m + \omega_m^2 q_m = f_m \quad \text{avec} \quad f_m(t) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} p_m(t) \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \|Y_m\|^2 &= \int_0^L Y_m(s) Y_m(s) ds \\ p_m(t) &= \int_0^L Y_m(s) p(s, t) ds \end{array}$$

dont la solution est connue, via l'intégrale de Duhamel

$$q_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau$$

On détermine les coefficients a_m et b_m grâce à la projection des conditions initiales sur les modes propres, ce qui se passe bien car les modes sont orthogonaux. Allons-y :

$\begin{aligned} \underline{u}(s, 0) &= 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(0) &= 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n \, ds \, q_n(0) &= 0 \\ \ Y_m\ ^2 q_m(0) &= 0 \\ \ Y_m\ ^2 a_m &= 0 \end{aligned}$	$\left \right.$	$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}(s, 0) &= v^0(s) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) \dot{q}_n(0) &= v^0(s) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_0^L Y_m Y_n \, ds \, \dot{q}_n(0) &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \\ \ Y_m\ ^2 \dot{q}_m(0) &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \\ \ Y_m\ ^2 \omega_m b_m &= \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds \end{aligned}$	$\left \right.$	<p>Conditions initiales</p> <p>Décomposition modale</p> <p>Projection modale</p> <p>Orthogonalité</p> <p>car $q_m(0) = a_m$ et $\dot{q}_m(0) = \omega_m b_m$</p>
--	------------------	--	------------------	--

Ainsi, quelque soit m , on a $a_m = 0$ et

$$b_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2 \omega_m} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds$$

Explicitez les calculs

On a comme $k_m L = m\pi$

$\begin{aligned} \ Y_m\ ^2 &= \int_0^L Y_m(s)^2 \, ds \\ &= \int_0^L \sin^2(k_m s) \, ds \\ &= \frac{L}{2} - \frac{\sin(2k_m L)}{4k_m} \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p_m(t) &= \int_0^L Y_m(s) p(s, t) \, ds \\ &= -\ddot{u}_L(t) \int_0^L \frac{s}{L} \sin(k_m s) \, ds \\ &= -L \frac{\sin(k_m L) - k_m L \cos(k_m L)}{(k_m L)^2} \ddot{u}_L(t) \\ &= \frac{\cos(k_m L)}{k_m^m} \ddot{u}_L(t) \\ &= \frac{(-1)^m}{k_m} \ddot{u}_L(t) \end{aligned}$
---	---

$$\int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau = 2 \frac{(-1)^m}{k_m L} \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau$$

$$\begin{aligned} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) \, ds &= -\dot{u}_L(0) \int_0^L \frac{s}{L} \sin(k_m s) \, ds \\ &= \frac{(-1)^m}{k_m} \dot{u}_L(0) \end{aligned}$$

Donnez l'expression générale de $q_m(t)$.

Au final en combinant tous ces résultats :

$$\begin{aligned} q_m(t) &= \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \\ &= \frac{2}{\omega_m} \frac{(-1)^m}{k_m L} \left(\dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \right) \end{aligned}$$

$$q_m(t) = \frac{2c}{L} \frac{(-1)^m}{\omega_m^2} \left(\dot{u}_L(0) \sin(\omega_m t) + \int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \, d\tau \right)$$

(6.4)

Remarque :

- On observe que le premier terme dans la parenthèse permet de porter la singularité de l'intégrale quand $t \rightarrow 0$. C'est pour cette raison que l'on considère que l'intégrale de Duhamel est nulle quand $t \rightarrow 0$.
- L'amplitude des modes varie en $\mathcal{O}(m^{-2})$.

Explicitiez le résultat si $u_L(t) = U \sin(\Omega t)$. Que ce passe-t-il si $\Omega \rightarrow \omega_p$ pour une fréquence ω_p donné. On a bien sûr $\dot{u}_L(0) = \Omega U$ et $\ddot{u}_L(\tau) = -\Omega^2 U \sin(\Omega \tau)$. En calculant on observe que

$$\int_0^t \ddot{u}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau = \Omega^2 \frac{\Omega \sin(\omega_m t) - \omega_m \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} q_m(t) &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m^2} \left(\sin(\omega_m t) + \frac{\Omega^2 \sin(\omega_m t) - \Omega \omega_m \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2} \right) U \\ &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m^2} \left(\frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\omega_m t) - \frac{\Omega \omega_m}{\omega_m^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t) \right) U \\ &= \frac{2c}{L} (-1)^m \frac{\Omega}{\omega_m} \frac{\omega_m \sin(\omega_m t) - \Omega \sin(\Omega t)}{\omega_m^2 - \Omega^2} U \end{aligned}$$

Etudions $q_p(t)$ si $\Omega = \omega_p + \epsilon$ avec $|\epsilon| \ll 1$. Dans ce cas on a comme termes dominants (approche de l'Hôpital)

$$\frac{\Omega}{\omega_p^2(\omega_p^2 - \Omega^2)} \sim -\frac{1}{2\omega_p \epsilon}, \quad \omega_p \sin(\omega_p t) - \Omega \sin(\Omega t) \sim -\epsilon(\omega_p t \cos(\omega_p t) - \sin(\omega_p t))$$

où la dernière approximation n'est vraie qu'en temps fini : pour $t \ll 1/\epsilon$ si $\epsilon \neq 0$. En combinant ces deux expressions on observe que

$$q_p(t) \sim \frac{c}{L} (-1)^p \left(t \cos(\omega_p t) - \frac{1}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) U$$

Remarque : Si $\Omega = \omega_p + \epsilon$, le forçage cinématique est en résonance avec le mode p on observe :

- Si $\epsilon = 0$ cette approche est aussi valide.
- Quand $\omega_p t$ est grand (ie au bout de quelques périodes d'oscillation) le second terme peut être négligé devant le premier :

$$q_p(t) \sim c \frac{U}{L} (-1)^p \cos(\omega_p t) t$$

- On observe alors que l'amplitude du mode p croît linéairement en temps.
- Le module de cette expression est indépendante de ω_p : il est tout aussi facile de mettre en résonance les basses fréquences que les hautes.
- Physiquement cette expression n'est justifiée que si l'on respecte l'hypothèse des petites perturbations : il faut que $\|q_m\| \ll L$ quelque soit t pour avoir le droit de discuter sur un résultat de ce modèle. On doit donc avoir (en considérant que $\cos(\omega_p t) = \mathcal{O}(1)$) :

$$\frac{U}{L} ct \ll L \quad \text{et si } \epsilon \neq 0 \quad t \ll \frac{1}{\epsilon}$$

On doit accepter ces résultats pour sur un domaine temporel respectant :

$$t \ll \min \left(\frac{1}{|\Omega - \omega_p|}, \frac{L^2}{cU} \right)$$

L'approche est d'autant plus justifiée que la corde est longue et que la sollicitation est faible. Ce travail a permis d'analyser un régime transitoire de la résonance.

6.10 Forçage dynamique

On suppose que l'on force la corde en $s = L$ en imposant une force $F_L(t)$ donnée. On suppose que la poutre est initialement au repos. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' &= \rho A \ddot{u} \\ N &= T u' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & T u'(L, t) &= F_L(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

On cherche une solution générale sous la forme

$$u(s, t) = \bar{u}(s, t) + \underline{u}(s, t) \quad (6.6)$$

où $\bar{u}(s, t)$ est imposé de sorte que $T \bar{u}'(L, t) = F_L(t) \forall t$. En pratique on prendra :

$$\bar{u}(s, t) = \frac{1}{T} s F_L(t)$$

Remarquons que cette expression est bien homogène à un déplacement. Compte tenu de cette expression, la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$ doit maintenant satisfaire un problème un peu différent, que l'on appelle problème relevé, qui est non-homogène mais dont les conditions aux limites assurent l'orthogonalité du problème homogène.

Injectons donc le changement de variable (6.6) dans le problème général, nous obtenons simplement

$$\begin{aligned} T \underline{u}'' - \rho A \ddot{\underline{u}} &= \rho A \ddot{\bar{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad \underline{u}(s, 0) &= -\frac{s}{T} F_L(0), & \dot{\underline{u}}(s, 0) &= -\frac{s}{T} \dot{F}_L(0) \\ CL : \quad \underline{u}(0, t) &= 0, & \underline{u}'(L, t) &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

car $\bar{u}'' = 0$. On observe que l'accélération imposée en L joue un rôle de terme source pour l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle inconnue $\underline{u}(s, t)$. On observe également que la force initiale intervient sous forme de position et vitesse initiale non-nulle pour la variable relevée $\underline{u}(s, t)$. On peut donc poser le problème sous la forme suivante

$$\begin{aligned} c^2 \underline{u}'' + p &= \ddot{\underline{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad \underline{u}(s, 0) &= u^0(s), & \dot{\underline{u}}(s, 0) &= v^0(s) \\ CL : \quad \underline{u}(0, t) &= 0, & \underline{u}(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} u^0(s) &= -\frac{s}{T} F_L(0) \\ v^0(s) &= -\frac{s}{T} \dot{F}_L(0) \\ p(s, t) &= -\frac{s}{T} \ddot{F}_L(t) \end{aligned} \end{aligned}$$

Cherchez les solutions du problème relevé en utilisant une analyse modale. Evitez d'expliciter les calculs pour insister sur la méthodologie :

Les conditions aux limites satisfaites par \underline{u} poussent à chercher les solutions sur la base (??) qui est également orthogonale. On a abouti sans surprise à

$$q_m(t) = a_m \cos(\omega_m t) + b_m \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau$$

On détermine les coefficients a_m et b_m grâce à la projection des conditions initiales sur les modes propres, ce qui se passe bien car les modes sont orthogonaux. On obtient

$$f_m(t) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) p(s, t) ds \quad a_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) u^0(s) ds \quad b_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2 \omega_m} \int_0^L Y_m(s) v^0(s) ds$$

Ce qui implique simplement que l'on doit étudier en détail l'intégrale (intégration par partie en se rappelant que $k_m = (2m + 1)\pi/(2L)$).

$$\mathcal{I}_m = \int_0^L Y_m(s) s ds = \frac{1}{k_m^2} (-1)^m$$

et l'on obtient une version synthétique

$$q_m(t) = -\frac{2}{L} \frac{1}{T} \left(F_L(0) \cos(\omega_m t) + \dot{F}_L(0) \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t \ddot{F}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \mathrm{d}\tau \right) \mathcal{I}_m$$

$$q_m(t) = -\frac{2c^2}{LT} \frac{(-1)^m}{\omega_m^2} \left(F_L(0) \cos(\omega_m t) + \dot{F}_L(0) \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \frac{1}{\omega_m} \int_0^t \ddot{F}_L(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \mathrm{d}\tau \right)$$

6.11 Choc

On suppose que l'on choque la corde en $s = \ell$ en imposant une densité linéique de force $p(s, t) = Q\delta(s - \ell)\delta(t)$ où Q une densité temporelle homogène à une force fois un temps (unité SI Ns). La poutre est initialement au repos et est attachée au deux extrémités. Le champ de déplacement est donc solution du problème

$$\begin{aligned} N' + p &= \rho A \ddot{u} \\ N &= Tu' \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} CI : \quad u(s, 0) &= 0, & \dot{u}(s, 0) &= 0 \\ CL : \quad u(0, t) &= 0, & Tu'(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Résoudre le problème explicitement. On va chercher des solutions sous la forme

$$\underline{u}(s, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(s) q_n(t)$$

en utilisant la base modale (??) on trouve facilement que

$$q_m(t) = \frac{1}{\omega_m} \int_0^t f_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \mathrm{d}\tau$$

où

$$f_m(\tau) = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L Y_m(s) p(s, t) \mathrm{d}s = \frac{2}{L} Q \delta(t) \int_0^L \sin(k_m s) \delta(s - \ell) \mathrm{d}s = \frac{2Q}{L} \delta(t) \sin(k_m \ell)$$

Et donc l'intégrale $q_m(t)$ devient

$$q_m(t) = \frac{1}{\omega_m} \frac{2Q}{L} \sin(k_m \ell) \int_0^t \delta(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega_m} \frac{2Q}{L} \sin(k_m \ell) \sin(\omega_m t)$$

6.12 Arc

Avec une conditions au limite de type Neuman

Justifiez que si les modes sont orthogonaux on a $\langle Y'_n, Y'_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. Calculez $\|Y'_n\|$.
On considère une corde ayant pour condition initiale

$$N(s, 0) = \begin{cases} \frac{F}{\ell}, & 0 \leq s \leq \ell, \\ -\frac{F}{L-\ell}, & \ell \leq s \leq L, \end{cases} \quad \dot{u}(s, 0) = 0$$

En déduire $N(s, t)$ puis $u(s, t)$ en utilisant de manière judicieuse la notion de projection.
On devrait avoir à peu près la même chose qu'avant (en identifiant correctement F). Discutez.
Expliquez pourquoi le fait d'avoir

$$\int_0^L N(s, 0) ds = 0$$

n'est pas surprenant car il a un sens physique connu depuis plusieurs siècles.
Comment peut-on exprimer $N(s, 0)'$ en exploitant les distributions.

Avec un terme source

On considère une corde subissant une force ponctuelle en $s = \ell$ depuis $t = -\infty$ jusqu'à l'instant initial puis est lâchée ensuite (à vitesse nulle) :

$$\rho A p(s, t) = \begin{cases} F \delta(s - \ell), & -\infty \leq t \leq 0, \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

Pour ce genre de problème (qui n'est pas un problème de Cauchy) l'intégrale de Duhamel à exploiter est la suivante :

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{-\infty}^t p_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau$$

et les termes intégrés à l'infini ont une contribution nulle (en moyenne c'est vrai).

En déduire la solution générale $N(s, t)$, $u(s, t)$ (en posant $a_n = b_n = 0$). Comparez la solution obtenue pour une corde pincée. Expliquez pourquoi la solution est similaire si on choisi correctement l'expression de F en fonction de a . Discutez.

Application numérique

Simulez le comportement de cet arc au cours du temps. Prenez soins de réaliser des simulations cohérentes.

6.13 Pendule

On dispose d'une corde fixe en $s = 0$ mais attachée en $s = L$ à une masse M . On notera dans la suite $\xi = m/M$ où m est la masse totale de la corde.
Justifiez que les conditions aux limites sont

$$u(0, t) = 0, \quad -N(0, t) = M \ddot{u}(0, t),$$

Montez que les modes propres sont associés à des nombres d'ondes solutions de

$$\tan(k_n L) = \xi \frac{1}{k_n L}$$

Mais qu'il y a également un mode rigide.

Utilisez le code pour trouver les zéros de la fonction transcendente permettant de déterminer les nombres d'onde k_n .

Tracez les modes propres.

Discutez en fonction de ξ et de n .

Pour faire valoir l'orthogonalité des modes, c'est plus complexe. Il faut partir de cela :

Considérons le mode $Y_n(s)$ pour n arbitraire, il est solution de

$$Y_n'' + k_n^2 Y_n = 0$$

Considérons un autre mode $Y_m(s)$ pour $m \neq n$ arbitraire. Projetons la relation précédente sur le mode Y_m de cette manière :

$$\int_0^L (Y_n'' + k_n^2 Y_n) k_m^2 Y_m ds$$

Puis en faisant sensiblement comme précédemment, montrez que pour $n \neq m$

$$\int_0^L Y_n' Y_m' ds = 0$$

si les modes satisfont les conditions aux limites requises.

Vérifiez que tout ce passe parfaitement bien même si Y_n est un mode rigide.

Vérifiez (par exemple par le calcul) que l'on n'a pas :

$$\int_0^L Y_n Y_m ds = 0$$

Mais que ce n'est pas grave. On va s'en sortir.

On considère que le pendule est soumis aux conditions initiales $u(s, 0) = u^0(s)$ et $\dot{u}(s, 0) = 0$ avec :

$$u^0(s) = \begin{cases} a \frac{s}{\ell}, & 0 \leq s \leq \ell, \\ a, & \ell \leq s \leq L, \end{cases}$$

En dérivant la condition initiale, montrez que l'on parvient à déterminer les a_n et b_n en utilisant l'orthogonalité mentionnée plus haut.

Déterminez la solution.

Simulez votre travail et discutez.

Chapitre 7

Modèle de poutre

7.1 Construction du modèle

7.1.1 Hypothèses

Une poutre est un solide déformable qui est engendré par des surfaces \mathcal{S} que l'on appelle **section droite**. Les centres de gravité G de chacune de ces sections constituent une courbe appelée **fibre moyenne** paramétrée par l'**abscisse curviligne** s , on a donc $G(s)$ et $\mathcal{S}(s)$.

Dans un modèle de poutre on considère donc comme hypothèse :

- La dimension caractéristique de la section est petite par rapport à la longueur de la poutre. Une poutre est une **structure élancée**. Soit ϱ la dimension caractéristique de la section et L la longueur de la poutre. On a

$$\varrho \ll L$$

Pour $\varrho < L/20$ on parle de poutre très élancée, mais le modèle peut fournir de bonnes approximations même pour $\varrho \sim L/10$.

- **Les sections sont rigides**. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que la poutre est élancée (et que le matériau n'est pas incompressible).

Sauf mention contraire, durant cet exposé on supposera également :

- L'étude se fera dans le cadre des petites perturbations : petits déplacements et petites déformations.
- La poutre est droite au repos.
- La poutre est homogène (matériau homogène et section invariante le long de la fibre moyenne).

7.1.2 Paramétrisation

Une poutre est donc définie par une cinématique particulière : il n'y a pas de restriction sur le déplacement de la fibre moyenne, mais les sections droites sont considérées comme des corps rigides. Ces dernières ne peuvent donc subir comme transformations que des translations et des rotations.

Afin de modéliser ce comportement on va étudier une section en particulier dans un repère galiléen centré en O . La position de son centre de masse est spécifié par le vecteur position $\mathbf{OG} = \varphi(s, t)$. Pour mieux appréhender l'orientation de la section on attache à cette dernière un trièdre rigide $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ constituant une base orthonormée directe de l'espace. Cette base est appelée **base des directeurs**. Cette base est donc mobile $\mathbf{d}_i(s, t)$ car l'orientation des sections n'est pas uniforme et dépend du temps. On choisit arbitrairement que \mathbf{d}_3 est normal à la section et ainsi $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ sont colinéaire à \mathcal{S} et forme une base des éléments de la section.

On considère qu'au repos la fibre est orientée suivant \mathbf{e}_3 et que plus généralement $\mathbf{d}_i(s, 0) = \mathbf{e}_i$. Notons que dans ce cas $\varphi(s, 0) = s \mathbf{e}_3$ (à une translation rigide près).

Muni de ces outils on a quelques remarques :

— Le vecteur unitaire tangent à la fibre moyenne est

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$$

— La base $\{\mathbf{d}_i\}$ est reliée à la base cartésienne $\{\mathbf{e}_i\}$ par une matrice de rotation $\mathbf{R}(s, t)$ (satisfaisant donc $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ et $\det(\mathbf{R}) = +1$)

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad (7.1)$$

— Tout point P de la section a pour coordonnée locale (ξ_1, ξ_2) dans le repère local $(G; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ de \mathcal{S} . Soit, quelque soit s et t :

$$\mathbf{GP} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2$$

Notons que ξ_1 et ξ_2 sont constant durant la transformation.

— Comme G est le centre de masse de la section on a

$$\int_S \mathbf{GP} \rho dA = 0, \quad \int_S \xi_1 \rho dA = 0, \quad \int_S \xi_2 \rho dA = 0 \quad (7.2)$$

— La donnée de (ξ_1, ξ_2, s) permet de déterminer sans aucune ambiguïté de la position d'un point de la structure. On dispose ici d'un **système de coordonnées matérielles**.

7.1.3 Rappel sur les rotations

Une matrice de rotation \mathbf{R} est une matrice orthogonale $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ (c'est à dire $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) de déterminant $+1$.

Les matrices de rotation pour une rotation d'un angle θ_i autour de \mathbf{e}_i sont pour $i = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour une petite rotation, nous avons au premier ordre simplement :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 & 0 \\ \theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin de conserver un caractère général on peut considérer une matrice de rotation quelconque \mathbf{R} associée à une rotation d'un angle θ autour du vecteur $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ unitaire, alors d'un point de vue général nous avons (formule de Rodrigues) :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin(\theta) \mathbf{Q} + (1 - \cos(\theta)) \mathbf{Q}^2 \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une petite rotation nous avons simplement :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \theta \mathbf{Q}.$$

Notons que compte tenu de la structure de \mathbf{Q} (qui est anti-symétrique, ie $\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}$), pour n'importe quel vecteur \mathbf{v} :

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}$$

ce qui se vérifie aisément. Ainsi on observe que pour une petite rotation le vecteur rotation $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$ (dont la norme fournit l'amplitude de la rotation et la direction l'axe de rotation) apparaît très naturellement :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} \quad (7.3)$$

7.2 Formulation du problème

7.2.1 Cinématique

Considérons donc un point P . Sa **position** est définie par le vecteur position $\mathbf{OP} = \mathbf{OG} + \mathbf{GP}$

$$\mathbf{OP}(s, t) = \varphi(s, t) + \mathbf{GP}(s, t)$$

avec $\mathbf{GP}(s, t)$ défini par une petite rotation \mathbf{R} conformément à (7.1) :

$$\mathbf{GP}(s, t) = \xi_1 \mathbf{d}_1(s, t) + \xi_2 \mathbf{d}_2(s, t) = \xi_1 \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{R} \cdot (\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{GP}(0)$$

Le déplacement du point P est donc :

$$\mathbf{OP}(s, t) - \mathbf{OP}(s, 0) = \varphi(s, t) - \varphi(s, 0) + (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{GP}(0)$$

En notant $\mathbf{u}(s, t) = \varphi(s, t) - \varphi(s, 0)$ le déplacement du centre de masse, $\mathbf{u}_P(s, t)$ le déplacement du point P et en utilisant la relation (7.3) pour les petites rotations, on obtient le **déplacement** du point P :

$$\mathbf{u}_P(\xi_1, \xi_2, s, t) = \mathbf{u}(s, t) + \boldsymbol{\theta}(s, t) \wedge \mathbf{GP}(0), \quad \mathbf{GP}(0) = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 \quad (7.4)$$

notons que $\mathbf{GP}(0)$ ne dépend ni du temps ni de l'abscisse curviligne. La **vitesse** du point P est donc tout simplement

$$\mathbf{v}_P(\xi_1, \xi_2, s, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} \wedge \mathbf{GP}(0),$$

où l'on retrouve la vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ du centre de masse et la vitesse angulaire $\dot{\boldsymbol{\theta}}(s, t)$ d'une section.

7.2.2 Déformation

Le tenseur des déformations dans l'hypothèse des petites déformation est, en un point P donné :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_P + (\nabla \mathbf{u}_P)^T), \quad \text{avec} \quad \nabla \mathbf{u}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{P1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_{P1}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_{P1}}{\partial s} \\ \frac{\partial u_{P2}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_{P2}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_{P2}}{\partial s} \\ \frac{\partial u_{P3}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_{P3}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_{P3}}{\partial s} \end{pmatrix}$$

Ici \mathbf{u}_P et ses composantes dans la base $\{\mathbf{d}_i\}$ sont explicitement définis par (7.4) :

$$\mathbf{u}_P = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{d}_i + \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i \mathbf{d}_i \right) \wedge (\xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2) \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} u_{P1} &= u_1 - \theta_3 \xi_2 \\ u_{P2} &= u_2 + \theta_3 \xi_1 \\ u_{P3} &= u_3 + \theta_1 \xi_2 - \theta_2 \xi_1 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\nabla \mathbf{u}_P = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & u'_1 - \theta'_3 \xi_2 \\ \theta_3 & 0 & u'_2 + \theta'_3 \xi_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & u'_3 + \theta'_1 \xi_2 - \theta'_2 \xi_1 \end{pmatrix}$$

Ce qui détermine la déformation, qui est un tenseur symétrique et anti-plan :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & u'_1 - \theta_2 - \theta'_3 \xi_2 \\ 0 & 0 & u'_2 + \theta_1 + \theta'_3 \xi_1 \\ u'_1 - \theta_2 + \theta'_3 \xi_2 & u'_2 + \theta_1 + \theta'_3 \xi_1 & 2(u'_3 + \theta'_1 \xi_2 - \theta'_2 \xi_1) \end{pmatrix}$$

7.2.3 Contraintes

On suppose que le matériau est élastique avec une loi de comportement de type Hooke :

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\varepsilon) \mathbb{I} \right)$$

Ce qui nous permet de déterminer le champ de contrainte en tout point du domaine matériel. Gardons en tête que ces tenseurs de déformation et de contraintes sont explicités dans la base $\{\mathbf{d}_i\}$ attaché à une section. Ainsi si l'on veut redescendre sur le modèle de poutre, les contraintes qui sont les plus importantes sont celles associées à une facette orientée suivant \mathbf{d}_3 : c'est le vecteur contrainte appliqué sur une portion de la section S . On a donc

$$\sigma(\mathbf{d}_3) = \begin{pmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} (u'_1 - \theta_2 - \theta'_3 \xi_2) \\ \frac{E}{2(1+\nu)} (u'_2 + \theta_1 + \theta'_3 \xi_1) \\ \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} (u'_3 + \theta'_1 \xi_2 - \theta'_2 \xi_1) \end{pmatrix}$$

On trouve ici le **module de cisaillement** $G = E/(2(1+\nu))$ et on peut considérer $(1-\nu)/((1-2\nu)(1+\nu)) \sim 1$ en dehors des cas presque incompressibles ($\nu \sim 1/2$). On notera donc :

$$\sigma(\mathbf{d}_3) = \begin{pmatrix} G(u'_1 - \theta_2 - \theta'_3 \xi_2) \\ G(u'_2 + \theta_1 + \theta'_3 \xi_1) \\ E(u'_3 + \theta'_1 \xi_2 - \theta'_2 \xi_1) \end{pmatrix}$$

en gardant en tête que E n'est pas tout à fait le module Young (même si c'est comme cela qu'on va l'appeler). Le modèle de poutre n'est pas adapté pour une structure constituée d'un matériau incompressible : l'hypothèse de section rigide est trop contraignante.

7.2.4 Efforts

Les efforts exercés sur une section orientée suivant \mathbf{d}_3 sont obtenus par intégration. On a une force résultante \mathbf{N} et un moment \mathbf{M} évalué en G et :

$$\mathbf{N} = \int_S \sigma(\mathbf{d}_3) dS \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{GP} \wedge \sigma(\mathbf{d}_3) dS$$

Les composantes ont un rôle bien particulier dans cette base :

$\mathbf{N} = N_1 \mathbf{d}_2 + N_2 \mathbf{d}_2 + N_3 \mathbf{d}_3$	avec	N_1, N_2 N_3	Efforts tranchants (cisaillement), Effort normal, longitudinal (compression-traction),
$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{d}_2 + M_2 \mathbf{d}_2 + M_3 \mathbf{d}_3$		M_1, M_2 M_3	Moments fléchissants (flexion), Moment de torsion

Pour calculer la force résultante, on utilise (7.2) (en supposant que la masse volumique est homogène sur la section) pour avoir directement :

$$N_1 = GA(u'_1 - \theta_2), \quad N_2 = GA(u'_2 + \theta_1), \quad N_3 = EA u'_3 \quad (7.5)$$

où A est l'aire de la section

$$A = \int_S dS$$

Pour calculer le moment résultant c'est plus fastidieux, observant que $\mathbf{GP} = \xi_1 \mathbf{d}_1 + \xi_2 \mathbf{d}_2$ on a

$$M_1 = EI_1 \theta'_1 + EI_{12} \theta'_2, \quad M_2 = EI_{12} \theta'_1 + EI_2 \theta'_2, \quad M_3 = GI_3 \theta'_3$$

où l'on a introduit les **moments quadratiques** (ça ressemble à des moments d'inerties, mais ils sont purement géométriques, la masse n'intervient pas) :

$$I_1 = \int_S \xi_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S \xi_1^2 dS, \quad I_{12} = - \int_S \xi_1 \xi_2 dS, \quad I_3 = I_1 + I_2$$

Les termes I_{12} peuvent être facilement supprimés, en effet observant que le tenseur des moments quadratiques de la section :

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

est symétrique et réelle dans une base arbitraire $\{\mathbf{d}_i\}$, il existe une forcément une base particulière dans laquelle elle est diagonale. Nous n'avons pour l'instant pas vraiment spécifié l'orientation de \mathbf{d}_1 et \mathbf{d}_2 , on va dorénavant choisir ces directeurs de sorte qu'ils diagonalisent le tenseur des moments quadratiques. On obtient dans ce cas :

$$M_1 = EI_1 \theta'_1, \quad M_2 = EI_2 \theta'_2, \quad M_3 = GI_3 \theta'_3 \quad (7.6)$$

Les relations (7.5) et (7.6) sont les **lois de comportement** de la poutre. On observe que toutes les quantités u_i et θ_i dépendent de s et du temps t . La géométrie de la section intervient via A et I_1 et I_2 . Le matériau intervient via les modules de Young E et de cisaillement G .

7.2.5 Equations d'équilibre

Nous allons établir les équations d'équilibre locale satisfaites par une portion de poutre. On procède comme d'habitude en se focalisant sur un élément infinitésimal de poutre de longueur ds et d'aire A et de masse $dm = \rho A ds$, subissant une densité linéique de chargement extérieur \mathbf{p} quasiment constant sur cette portion. On peut si on veut rajouter une densité linéique de moment \mathbf{m} , même si en pratique c'est assez rare.

La conservation de la quantité de mouvement implique

$$-\mathbf{N}(s) + \mathbf{N}(s + ds) + \mathbf{p} ds = dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (7.7)$$

En observant :

$$\mathbf{N}(s + ds) = \mathbf{N}(s) + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} ds + \mathcal{O}(ds^2) \quad (7.8)$$

on obtient au premier ordre :

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} ds + \mathbf{p} ds = \rho A ds \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Cette équation pouvant être généralisée, on obtient l'équation locale :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} + \mathbf{p} = \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}} \quad (7.9)$$

Le théorème du moment cinétique évalué en O implique

$$\begin{aligned} & -\mathbf{M}(s) + \mathbf{M}(s + ds) + \mathbf{m} ds \dots \\ & -\mathbf{OG}(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{OG}(s + ds) \wedge \mathbf{N}(s + ds) \dots \\ & + \mathbf{OG}(s) \wedge \mathbf{p} ds = \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Comme dans le cas précédent nous avons au premier ordre :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{OG}(s+ds) &= \mathbf{OG}(s) + \frac{\partial \mathbf{OG}}{\partial s} ds \\
 \mathbf{M}(s+ds) &= \mathbf{M}(s) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} ds \\
 -\mathbf{OG}(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{OG}(s+ds) \wedge \mathbf{N}(s+ds) &= \mathbf{OG}(s) \wedge \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathbf{OG}}{\partial s} ds \wedge \mathbf{N}(s)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Le premier théorème de Koenig donne :

$$\sigma_0 = \sigma_G + \mathbf{OG} \wedge (dm \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_G}{\partial t} + \mathbf{OG} \wedge (dm \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2})$$

Comme la section est rigide, on a pour une section de densité massique uniforme, le moment cinétique évalué au centre de masse en fonction du moment d'inertie $\rho \mathbb{I}$ de la section :

$$\sigma_G = \rho \mathbb{I} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ainsi, le Théorème du Moment Cinétique au premier ordre en ds s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{OG}}{\partial s} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{m} + \mathbf{OG} \wedge \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} + \mathbf{p} \right) = \rho \mathbb{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mathbf{OG} \wedge \left(\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right)$$

Compte tenu 7.9 nous avons enfin l'équation d'équilibre en rotation :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \mathbf{N} + \mathbf{m} = \rho \mathbb{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{7.12}$$

Le vecteur $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ est le vecteur tangent à la fibre \mathcal{C} . Elle est tout à fait générale comme 7.9.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations on peut écrire :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{N} + \mathbf{m} = \rho \mathbb{I} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}} \tag{7.13}$$

sans introduire d'erreur supplémentaire. Attention on n'a pas pour autant fait l'hypothèse $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathbf{d}_3$ qui signifierai que la section est toujours perpendiculaire à la fibre, ce qui est faux.

7.3 Synthèse

On dispose donc de 6 lois de comportement (7.5) et (7.6) et de deux équations vectorielles (7.9) et (7.13). Le problème réside en la résolution de 12 inconnus $N_i(s, t)$, $M_i(s, t)$, $u_i(s, t)$ et $\theta_i(s, t)$.

Pour y voir plus clair, il est important de projeter dans un premier temps (7.9) et (7.13) sur la base des directeurs. On obtient réciproquement

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial s} + p_1 &= \rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} & \frac{\partial M_1}{\partial s} - N_2 + m_1 &= \rho I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial N_2}{\partial s} + p_2 &= \rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} & \frac{\partial M_2}{\partial s} + N_1 + m_2 &= \rho I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial N_3}{\partial s} + p_3 &= \rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} & \frac{\partial M_3}{\partial s} + m_3 &= \rho I_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 } \tag{7.14}$$

où tous les termes quadratiques (de type θ_i^2 , ou $N_i\theta_j$ par exemple) ont été négligés. On a donc ici une expression linéarisée, nous aurions pu avoir une version plus complexe. Nous y reviendrons. En incluant les lois de comportement que l'on rappelle dans cette synthèse

$$\boxed{\begin{array}{ll} N_1 = GA(u'_1 - \theta_2) & M_1 = EI_1\theta'_1 \\ N_2 = GA(u'_2 + \theta_1) & M_2 = EI_2\theta'_2 \\ N_3 = EAu'_3 & M_3 = GI_3\theta'_3 \end{array}} \quad (7.15)$$

on obtient :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial s}(GA(u'_1 - \theta_2)) + p_1 = \rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} & \frac{\partial}{\partial s}(EI_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial s}) - GA(u'_2 + \theta_1) + m_1 = \rho I_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial s}(GA(u'_2 + \theta_1)) + p_2 = \rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} & \frac{\partial}{\partial s}(EI_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial s}) + GA(u'_1 - \theta_2) + m_2 = \rho I_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 EAu_3}{\partial s^2} + p_3 = \rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} & \frac{\partial}{\partial s}(GI_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial s}) + m_3 = \rho I_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} \end{array}$$

On observe que les six equations ne sont pas toutes couplées entre elles et peuvent être organisées comme suit (pour rendre la présentation plus élégante on suppose que les propriétés matérielles et géométriques sont homogènes) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} GA(u'_1 - \theta_2)' + p_1 = \rho A \ddot{u}_1 & \\ EI_2 \theta_2'' + GA(u'_1 - \theta_2) + m_2 = \rho I_2 \ddot{\theta}_2 & \text{Flexion dans le plan } (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3) \\ GA(u'_2 + \theta_1)' + p_2 = \rho A \ddot{u}_2 & \\ EI_1 \theta_1'' - GA(u'_2 + \theta_1) + m_1 = \rho I_1 \ddot{\theta}_1 & \text{Flexion dans le plan } (\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \\ EAu_3'' + p_3 = \rho A \ddot{u}_3 & \text{Tension-compression suivant } \mathbf{d}_3 \\ GI_3 \theta_3'' + m_3 = \rho I_3 \ddot{\theta}_3 & \text{Torsion-rotation autour de } \mathbf{d}_3 \end{array}} \quad (7.16)$$

Le problème est donc partiellement découplé.

On retrouve les équations en tension-compression que l'on avait déjà vu. Par contre la flexion relie ici le mouvement transversal à la rotation de la section et est modélisée sans pré-contrainte : ce n'est pas un modèle de corde.

Chapitre 8

Dynamique de la flexion

On se concentre ici sur le problème de flexion libre. On prendra comme cas d'étude la flexion dans le plan ($\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3$). En l'absence de densité linéique de chargement, et pour une poutre droite et homogène nous avons

$$\begin{aligned} GA(u' - \theta)' &= \rho A \ddot{u} & N &= GA(u' - \theta) \\ EI\theta'' + GA(u' - \theta) &= \rho I \ddot{\theta} & M &= EI\theta' \end{aligned} \quad \text{avec les lois de comportements} \quad (8.1)$$

où les indices ont été supprimés pour alléger l'écriture. Les deux équations de gauche sont les **équations d'équilibre dynamiques en translation** (en haut) **et en rotation** (en bas).

Notons que si l'on considère la flexion dans le plan ($\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$) et si l'on supprime les indices on trouve une expression très proche de (8.1) mais avec des inversion de signe. Cela ne change pas grand chose à la suite. Dans les livres les deux conventions sont existant.

8.1 Séparation des variables

On cherche des solutions à variables séparées

$$u(s, t) = Y(s)T(t) \quad \theta(s, t) = H(s)T(t) \quad (8.2)$$

notons que les deux inconnus sont synchrones : avec la même fonction $T(t)$.

Le problème de vibration libre peut donc se formuler ainsi

$$\frac{GA}{\rho A} \frac{Y'' - H'}{Y} = \frac{\ddot{T}}{T} \quad (8.3)$$

$$\frac{EA}{\rho A} \frac{H''}{H} + \frac{GA^2}{\rho AI} \frac{Y' - H}{H} = \frac{\ddot{T}}{T} \quad (8.4)$$

Chaque membre est réel, les membres de gauche ne dépendent que de l'espace et ceux de droite que du temps, ils sont donc tous les deux égaux à une constante réelle que l'on notera $-\omega^2$ (positive, nulle ou négative). On a donc cette fois trois équations différentielles couplées par cette variable ω^2

$$\frac{G}{\rho} \frac{Y'' - H'}{Y} = -\omega^2 \quad \frac{E}{\rho} \frac{H''}{H} + \frac{GA}{\rho I} \frac{Y' - H}{H} = -\omega^2 \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \quad (8.5)$$

où ω^2 est pour l'instant une variable réelle quelconque.

Conséquence sur la variable temporelle La dépendance temporelle est donc solution de

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

et est de forme générale $T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ si $\omega \neq 0$ et $T(t) = a + b t$ si $\omega = 0$. Les constantes d'intégration, a et b , dépendant des conditions initiales.

Conséquence sur la relation entre la rotation et la déflexion Nous avons donc

$$H' = Y'' + \omega^2 \frac{\rho}{G} Y$$

En intégrant, nous avons la relation :

$$H = Y' + \frac{\rho}{G} \omega^2 \int Y \, ds \quad (8.6)$$

les modes de rotations et de déflexions ne sont pas du tout indépendants.

8.2 Modes harmoniques

On cherche ici les modes sous forme harmoniques. Si l'on utilise (8.6) il est possible d'obtenir une équation en $Y(s)$. Cette équation différentielle est homogène, fait appel à des dérivées quatrièmes et à coefficient constant, dont les solutions générales sont a priori de la forme $Y(s) = U e^{iks}$. Il en est donc de même pour $H(s) = \Theta e^{iks}$.

Remarquons que l'introduction de i est facultatif par contre cela est justifié uniquement si $k \neq 0$ (nous y reviendrons en sec.8.3).

8.2.1 Equation de dispersion

Afin de déterminer les relations entre k et ω , nous recherchons des solutions modales de la forme :

$$Y(s) = U e^{iks} \quad H(s) = \Theta e^{iks}$$

En calculant chacune des dérivées de nos variables, nous pouvons les insérer dans les équations en espace (8.5), ce qui nous conduit au système d'équations suivant :

$$GA (-k^2 U - ik\Theta) = -\omega^2 \rho A U \quad (8.7)$$

$$-k^2 EI \Theta + GA (ikU - \Theta) = -\omega^2 \rho I \Theta \quad (8.8)$$

qui s'exprime de manière algébrique :

$$\begin{pmatrix} \rho A \omega^2 - GA k^2 & -ikGA \\ ikGA & \rho I \omega^2 - EI k^2 - GA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

Remarquons que la matrice est hermitienne. Il existe un couple $(U, \Theta) \neq (0, 0)$ si et seulement si le déterminant de ce système est nul. Après réarrangement on obtient **l'équation de dispersion** :

$$\boxed{\left(\frac{EI}{\rho A} \right) k^4 + \left(\frac{\rho I}{GA} \right) \omega^4 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G} \right) \omega^2 k^2 - \omega^2 = 0} \quad (8.10)$$

8.2.2 Résolution de l'équation de dispersion

Posons

$$K = k^2 \quad ; \quad W := \omega^2$$

L'équation de dispersion devient un simple polynôme de degré deux en K :

$$\left(\frac{EI}{\rho A}\right) K^2 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G}\right) WK + \left(\frac{\rho I}{GA}\right) W^2 - W = 0 \quad (8.11)$$

dont le discriminant est

$$\Delta = \frac{I}{A} W \left(\frac{4E}{\rho} + \left(\frac{E}{G} - 1\right)^2 \frac{I}{A} W \right)$$

il est positif si W est positif. On a donc les deux racines réelles a priori :

$$\begin{aligned} K^+ &= \frac{\rho}{2EG} \left((E+G)W + \sqrt{W \left(\frac{4AEG^2}{\rho I} + (E-G)^2 W \right)} \right) \\ K^- &= \frac{\rho}{2EG} \left((E+G)W - \sqrt{W \left(\frac{4AEG^2}{\rho I} + (E-G)^2 W \right)} \right) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Toujours en postulant que $W > 0$, K^+ est forcément positive et K^- peut être positive ou négative. La relation de K^\pm en fonction W est présenté en Fig.8.1.

$K^- = 0$ implique (il suffit de regarder le polynôme) $W = GA/(\rho I)$. Nous déduisons la **fréquence de coupure** au delà de laquelle $K^- > 0$:

$$K^- > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega > \omega_c = \sqrt{\frac{GA}{\rho I}} \quad (8.13)$$

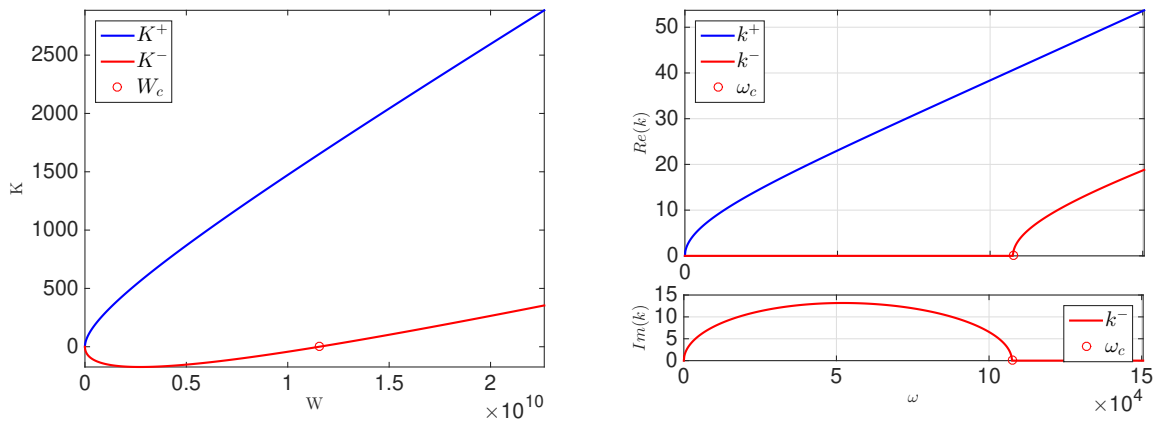


FIGURE 8.1 – Courbe de dispersion de la poutre en flexion. Les grandeurs sont fournies pour une poutre en aluminium de section carré de $h = 0.1 \text{ m}$ de côté ($A = h^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$, $I = h^4/12 = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $E = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $G = 26 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). A gauche la courbe est représentée dans le plan (W, K) , à droite dans le plan (ω, k) . Il y'a deux branches : la branche bleue est parfois appelée **branche de flexion**, la courbe rouge est appelée **branche de cisaillement**.

8.2.3 Formes modales

Il existe donc deux racines pour K : K^+ et K^- donc 4 pour k : $k^+ = \sqrt{K^+}$ et $-k^+$, $k^- = \sqrt{K^-}$ enfin $-k^-$. A priori la forme général des modes de déflexion $Y(s)$ est donc :

$$Y(s) = c_1 e^{-ik^+ s} + c_2 e^{ik^+ s} + c_3 e^{-ik^- s} + c_4 e^{ik^- s}$$

Pour les modes propres nous avons compte tenu de (8.6)

$$H(s) = \left(ik^+ + \frac{\rho}{G} \frac{\omega^2}{ik^+} \right) \left(-c_1 e^{-ik^+ s} + c_2 e^{ik^+ s} \right) + \left(ik^- + \frac{\rho}{G} \frac{\omega^2}{ik^-} \right) \left(-c_3 e^{-ik^- s} + c_4 e^{ik^- s} \right)$$

L'important est de bien comprendre la méthode ; ensuite le jeu des écriture dépend de l'utilisateur. Si l'on souhaite faire apparaître des fonctions trigonométriques (avec éventuellement des arguments imaginaires purs) les modes $Y(s)$ deviennent :

$$Y(s) = c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sin(k^- s) + c_4 \cos(k^- s)$$

Quand K^- est négatif $\sqrt{K^-}$ est imaginaire pur, on peut donc définir dans ce cas : $k^- := \sqrt{-K^-}$ qui est réel est le fonction trigonométrique associée deviennent hyperbolique. La forme des modes $Y(s)$ est donc en fonction du domaine fréquentiel associé :

BF : $0 < \omega < \omega_c$	$Y(s) = c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sinh(k^- s) + c_4 \cosh(k^- s)$	$k^- := \sqrt{-K^-}$
HF : $\omega_c < \omega$	$Y(s) = c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sin(k^- s) + c_4 \cos(k^- s)$	$k^- := \sqrt{K^-}$

La forme générale de $Y(s)$ étant définie, on peut déterminer l'expression de $H(s)$ grace à (8.6) :

BF :	$H(s) = (k^+ - \frac{\rho\omega^2}{Gk^+}) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + (k^- + \frac{\rho\omega^2}{Gk^-}) (c_3 \cosh(k^- s) + c_4 \sinh(k^- s))$
HF :	$H(s) = (k^+ - \frac{\rho\omega^2}{Gk^+}) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + (k^- - \frac{\rho\omega^2}{Gk^-}) (c_3 \cos(k^- s) - c_4 \sin(k^- s))$

Le choix des écritures importe peu. Globalement il faut juste être précis sur les conventions choisies qui peuvent dépendre des auteurs, livres et codes. En pratique les modes principaux sont essentiellement basse fréquence. On privilégie donc les écritures trigonométrique-hyperboliques basse fréquences pour représenter des résultats. Par contre pour coder il est bien plus naturel d'exploiter les formulations génériques :

$$\begin{aligned} Y(s) &= c_1 e^{-ik^+ s} + c_2 e^{ik^+ s} + c_3 e^{-ik^- s} + c_4 e^{ik^- s} \\ H(s) &= \left(ik^+ + \frac{\rho}{G} \frac{\omega^2}{ik^+} \right) \left(-c_1 e^{-ik^+ s} + c_2 e^{ik^+ s} \right) + \left(ik^- + \frac{\rho}{G} \frac{\omega^2}{ik^-} \right) \left(-c_3 e^{-ik^- s} + c_4 e^{ik^- s} \right) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Dans tous les cas, les constantes c_i seront déterminés par les conditions aux limites.

8.3 Modes particuliers

L'étude de la relation de dispersion (8.10) fait apparaître des cas particuliers très importants qui doivent être traités à part. Il s'agit des situations où $k = 0$ ou $\omega = 0$ en effet dans ces cas particuliers les fonctions $e^{i\omega t}$ utilisées pour les fonctions temporelles ne sont plus valables, de même que les formulations e^{iks} pour les modes spatiaux. Chaque fois que la courbe de dispersion croise l'axe des k ou l'axe de ω nous devons être en alerte !

8.3.1 Modes statiques

Nous observons que la relation de dispersion est satisfaite si $(\omega, k) = (0, 0)$. Dans ce cas $T(t) = a + bt$. En d'autres termes nous étudions des modes rigides : la solution est définie à une translation dans l'espace à vitesse constante. Pour autant il peut y'avoir une déformation (statique) en effet si $\omega = 0$ nous avons

$$GA(Y' - H)' = 0 \quad (8.15)$$

$$EI H'' + GA(Y' - H) = 0 \quad (8.16)$$

La première équation implique que $Y' - H$ et alors la seconde implique que H'' est constant. Soit

$$H(s) = \frac{1}{2}c_1 s^2 + c_2 s + c_3, \quad Y(s) = \frac{1}{6}c_1 s^3 + \frac{1}{2}c_2 s^2 + c_3 s + c_4$$

Exemple pour une force ponctuelle On suppose qu'une force ponctuelle est exercée en ℓ : $p(s) = F\delta(s - \ell)$ sur une poutre en appuis-simple aux deux extrémités. Ainsi $0 < \ell < L$ et F est bien homogène à une force. On doit donc résoudre le problème

$$N' + F\delta(s - \ell) = 0, \quad M' + N = 0$$

Intégrons la première relation entre 0 et s on trouve

$$\begin{aligned} N(s) &= N(0), & si & \quad 0 \leq s < \ell \\ N(s) &= N(0) - F, & si & \quad \ell < s \leq L \end{aligned}$$

La dernière équation évaluée en L stipule $F + N(L) - N(0) = 0$ or $N(L)$ et $-N(0)$ sont les efforts exercés par les liaisons sur la structures ; on a bien *somme des forces égale zéro* ce qui est logique en statique. Il nous faut déterminer $N(0)$, mais soyons patient. Utilisons cette relation dans la seconde équation que l'on intègre entre 0 et s pour $s < \ell$ et entre ℓ et L pour $\ell < s < L$, on trouve

$$\begin{aligned} M(s) &= M(0) - N(0)s, & si & \quad 0 \leq s < \ell \\ M(s) &= M(\ell) - (N(0) - F)s, & si & \quad \ell < s \leq L \end{aligned}$$

Comme $M(0) = 0$ pour un appuis simple :

$$\begin{aligned} M(s) &= -N(0)s, & si & \quad 0 \leq s < \ell \\ M(s) &= M(\ell) - (N(0) - F)(s - \ell), & si & \quad \ell < s \leq L \end{aligned}$$

Le moment en ℓ est continu, soit en comparant les deux expressions : $-N(0)\ell = M(\ell)$ soit pour la partie de droite

$$M(s) = -N(0)s + F(s - \ell)$$

Sachant que le moment est nul en L on doit avoir :

$$-N(0)L + F(L - \ell) = 0, \quad N(0) = \frac{L - \ell}{L}F$$

Revenons à nos moutons ; au final :

$$\begin{aligned} M(s) &= -\frac{L - \ell}{L}sF, & N(s) &= \frac{L - \ell}{L}F & si & \quad 0 \leq s < \ell \\ M(s) &= -\frac{L - s}{L}\ell F, & N(s) &= -\frac{\ell}{L}F & si & \quad \ell < s \leq L \end{aligned}$$

Intégrons les moments pour avoir les angles (lois de comportement); notons que l'intégration de la partie de droite se fait entre ℓ et L :

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta(0) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{L-\ell}{2L} s^2 F \right) & si \quad 0 \leq s < \ell \\ \theta(s) &= \theta(\ell) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{(s-\ell)(2L-s-\ell)}{2L} \ell F \right) & si \quad \ell < s \leq L\end{aligned}$$

La continuité des angles en ℓ impose

$$\theta(0) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{L-\ell}{2L} \ell^2 F \right) = \theta(\ell)$$

Soit

$$\theta(s) = \theta(0) + \frac{1}{EI} \left(\frac{\ell L - s(2L-s)}{2L} \ell F \right) \quad si \quad \ell < s \leq L$$

Pour avoir le déplacement il suffit d'observer que $u' = \theta + N/(GA)$. Là encore il faut écrire cela à droite et à gauche et intégrer sur les portions ainsi précisée. allons y :

$$\begin{aligned}u'(s) &= \theta(0) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{L-\ell}{2L} s^2 F \right) + \frac{L-\ell}{L} \frac{F}{GA} & si \quad 0 \leq s < \ell \\ u'(s)(s) &= \theta(0) + \frac{1}{EI} \left(\frac{\ell L - s(2L-s)}{2L} \ell F \right) - \frac{\ell}{L} \frac{F}{GA} & si \quad \ell < s \leq L\end{aligned}$$

Intégrons donc :

$$\begin{aligned}u(s) &= \theta(0)s + \frac{1}{EI} \left(-\frac{L-\ell}{6L} s^3 F \right) + \frac{L-\ell}{L} \frac{F}{GA} s & si \quad 0 \leq s < \ell \\ u(s) &= u(\ell) + \theta(0)(s-\ell) + \frac{1}{EI} \left(\frac{(s-\ell)(\ell^2 - s(3L-s-\ell))}{6L} \ell F \right) - \frac{\ell}{L} \frac{F}{GA} (s-\ell) & si \quad \ell < s \leq L\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $u(0) = 0$ et que $u(L) = 0$ et la continuité en ℓ on trouve

$$\begin{aligned}u(s) &= F \frac{(L-\ell)s}{L} \left(\frac{1}{GA} - \frac{1}{6EI} (\ell^2 - 2\ell L + s^2) \right) & si \quad 0 \leq s < \ell \\ u(s) &= F \frac{(L-s)\ell}{L} \left(\frac{1}{GA} - \frac{1}{6EI} (\ell^2 - 2sL + s^2) \right) & si \quad \ell < s \leq L\end{aligned}$$

8.3.2 Modes de glissement

Si $\omega = \omega_c (= \sqrt{\frac{GA}{\rho I}}$ défini en (8.13)) on a une racine nulle $k^- = 0$ pour l'équation de dispersion (8.10) cela signifie que l'approche générale n'est pas exploitable. Pour $\omega = \omega_c$ cette équation devient :

$$K \left(K - \frac{A}{I} \left(1 + \frac{G}{E} \right) \right) = 0$$

On a donc une racine $k^- = 0$ et une autre $(k^+)^2 = \frac{A}{I} \left(1 + \frac{G}{E} \right)$. Regardons de plus près les équations différentielles, si $\omega^2 = \omega_c^2$, les deux premières équations de (8.5) sont :

$$\begin{aligned}\frac{G}{\rho} (Y' - H)' &= -\frac{GA}{\rho I} Y \\ \frac{E}{\rho} H'' + \frac{GA}{\rho I} (Y' - H) &= -\frac{GA}{\rho I} H\end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned}H' &= Y'' + \frac{A}{I} Y \\ H'' &= -\frac{GA}{EI} Y'\end{aligned}$$

Ce qui impose

$$Y''' + \frac{A}{I}(1 + \frac{G}{E})Y' = 0$$

Dont la solution est

$$\begin{aligned} Y(s) &= c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \\ H(s) &= (k^+ - \frac{A}{Ik^+}) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + \frac{A}{I} c_3 s + c_4 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad k^+(\omega_c) = \sqrt{\frac{A}{I}(1 + \frac{G}{E})} \quad (8.17)$$

Il existe donc une dépendance spatiale linéaire (et non exponentielle) ici portée par les constantes c_3 et c_4 . La pulsation de ce mode est ω_c . La fonction temporelle est comme pour les autres modes dynamiques $T(t) = a \cos(\omega_c t) + b \sin(\omega_c t)$.

8.4 Formulations intégrales

On reste sur le cas test précédent (8.1).

8.4.1 Approche énergétique

On souhaite faire apparaître une forme de conservation d'énergie comme dans les problèmes précédents (typiquement corde). On part donc du système d'équation différentielle (8.1) que l'on généralise en prenant une densité de chargement.

$$\begin{aligned} N' + p &= \rho A \ddot{u} \\ M' + N + m &= \rho I \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (8.18)$$

et on va multiplier chaque ligne par la variables \dot{u} et $\dot{\theta}$ réciproquement

$$\begin{aligned} N' \dot{u} + p \dot{u} &= \rho A \ddot{u} \dot{u} \\ M' \dot{\theta} + N \dot{\theta} + m \dot{\theta} &= \rho I \ddot{\theta} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (8.19)$$

En sommant directement, on fait apparaître l'énergie cinétique de la section qui possède un terme de translation et de rotation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2 \right) = N' \dot{u} + p \dot{u} + M' \dot{\theta} + N \dot{\theta} + m \dot{\theta}$$

Intégrons le long de la structure pour faire apparaître l'énergie globale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2 \, ds = \int_0^L N' \dot{u} + M' \dot{\theta} + N \dot{\theta} \, ds + \int_0^L p \dot{u} + m \dot{\theta} \, ds$$

Effectuons l'intégration par partie suivante :

$$\int_0^L N' \dot{u} + M' \dot{\theta} \, ds = - \int_0^L N \dot{u}' + M \dot{\theta}' \, ds + [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2 \, ds + \int_0^L N(\dot{u}' - \dot{\theta}) + M \dot{\theta}' \, ds = [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L + \int_0^L p \dot{u} + m \dot{\theta} \, ds$$

En exploitant les lois de comportement

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} G A (u' - \theta)^2 + \frac{1}{2} E I \theta'^2 \, ds = [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L + \int_0^L p \dot{u} + m \dot{\theta} \, ds}$$

Le terme de gauche est la variation temporelle de l'énergie présente dans la structure. Celui de droite indique la puissance des efforts extérieurs. Si il n'y a pas d'effort extérieur, l'énergie totale reste inchangée au cours du temps. Le système est conservatif.

— L'énergie cinétique d'une section est

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2$$

Il s'agit en réalité d'une densité linéique d'énergie cinétique.

— La densité linéique d'énergie de déformation est

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} GA (u' - \theta)^2 + \frac{1}{2} EI \theta'^2$$

Notons que l'on retrouve les variables conjuguées par

$$N = \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial u' - \theta}, \quad M = \frac{\partial \mathcal{E}_d}{\partial \theta'}$$

θ' est la **courbure** et la déformation associée à l'effort tranchant est le **glissement** $u' - \theta$

— Le calcul de $\int_0^L p \dot{u} + m \dot{\theta} \, ds$ doit se faire sur l'ouvert $]0, L[$. Si on introduit des distributions en 0 et L pour $p(s, t)$ et $m(s, t)$ alors il faudra faire le calcul en tenant compte des bords et ne pas introduire de termes $\left[N \dot{u} + M \dot{\theta} \right]_0^L$ (qui seraient redondants).

8.4.2 Orthogonalité des modes propres, condition de Sturm-Liouville

Supposons que nous disposons d'une base de mode propres. C'est à dire d'une liste de fonctions $\{Y_n(s), H_n(s)\}$ paramétrées par ω_n , soit $\{Y_n(s), H_n(s); \omega_n\}_n$. Chaque mode satisfait donc l'équation de vibration libre :

$$\begin{aligned} GA(Y_n'' - H_n') &= -\rho A \omega_n^2 Y_n \\ EI H_n'' + GA(Y_n' - H_n) &= -\rho I \omega_n^2 H_n \end{aligned} \quad (8.20)$$

ainsi que des conditions aux limites (les mêmes quelque soit n).

Nous allons procéder en nous inspirant de la conservation de l'énergie. En effet nous souhaitons avoir une relation d'orthogonalité, mais nous avons un problème vectoriel : comment définir le produit scalaire ? Commençons par multiplier les deux équations par les fonctions respectives du mode m (avec $n \neq m$) :

$$\begin{aligned} GA(Y_n'' - H_n') Y_m &= -\rho A \omega_n^2 Y_n Y_m \\ EI H_n'' H_m + GA(Y_n' - H_n) H_m &= -\rho I \omega_n^2 H_n H_m \end{aligned} \quad (8.21)$$

Sommons puis intégrons, pour obtenir :

$$\int_0^L GA(Y_n'' - H_n') Y_m + EI H_n'' H_m + GA(Y_n' - H_n) H_m \, ds = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m \, ds$$

En effectuant les intégrations par parties usuelles sur les termes de gauche :

$$\int_0^L -GA(Y_n' - H_n) Y_m' - EI H_n' H_m' + GA(Y_n' - H_n) H_m \, ds + [GA(Y_n' - H_n) Y_m + EI H_n' H_m]_0^L = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m \, ds$$

Soit

$$-\int_0^L GA(Y_n' - H_n)(Y_m' - H_m) + EI H_n' H_m' \, ds + [N_n Y_m + M_n H_m]_0^L = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m \, ds$$

où l'on a introduit les efforts $N_n(s)$ et $M_n(s)$ associés au mode n .

Supposons que l'on fasse de même pour le mode m que l'on projette sur le mode n , on obtiendrait au final :

$$-\int_0^L GA(Y'_n - H_n)(Y'_m - H_m) + EI H'_n H'_m ds + [N_n Y_n + M_n H_n]_0^L = -\omega_m^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m ds$$

La différence des deux expressions précédentes permet de simplifier pas mal de terme. On obtient

$$-(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m ds = [N_n Y_m + M_n H_m - N_m Y_n + M_m H_n]_0^L$$

On peut interpréter le terme

$$\langle (Y_n, H_n), (Y_m, H_m) \rangle = \int_0^L \rho A Y_n Y_m + \rho I H_n H_m ds$$

comme un **produit scalaire** pour les espaces de fonction $\{Y_n, H_n\}$ de dimension 2. On observe que le produit scalaire est largement inspiré de l'énergie cinétique. Il fait apparaître deux densités de mesure : $\rho A ds$ et $\rho I ds$ spécifique à chaque fonctions propres. Ce produit scalaire nous servira plus tard pour projeter correctement nos problèmes.

Rappelons que $\omega_n \neq \omega_m$. On observe que les modes sont orthogonaux au sens de ce produit scalaire si la **condition de Sturm-Liouville** suivante est satisfaite :

$$[N_n Y_m + M_n H_m - N_m Y_n + M_m H_n]_0^L = 0$$

Remarque : si on considère que $\omega_n = 0$ ou $\omega_n = \omega_c$ tout ce qui a été raconté ici reste vrai. Les modes statiques et les modes de glissements, sont bien pris en compte dans cette approche et sont orthogonaux aux modes harmoniques. On comprend mieux pourquoi on peut superposer les solutions statiques et dynamiques (cela correspond dans notre approche à sommer les modes statiques et harmoniques).

8.5 Modes propres

Les fonctions propres (par exemple (8.14)) sont définies à 4 constantes c_i près. Pour déterminer ces constantes on doit imposer quatres conditions aux limites : deux en $s = 0$, deux en $s = L$.

8.5.1 Conditions aux limites

On dispose de conditions aux limites classiques suivantes

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} N = 0 \\ M = 0 \end{array} & \text{Conditions dynamiques} \qquad \begin{array}{l} u = 0 \\ \theta = 0 \end{array} & \text{Conditions cinématiques} \end{array}$$

D'après Sturm-Liouville, les couples de conditions suivantes permettent d'avoir des modes orthogonaux

bord libre	bord collé	appuis simple	appuis glissant
$N = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$N = 0$
$M = 0$	$\theta = 0$	$M = 0$	$\theta = 0$

Dans le dernier cas, les deux conditions induisent $u' = 0$.

Notons qu'il existe plein d'autres conditions aux limites qui permettent d'avoir des modes orthogonaux (ressort, masse ajoutée, ...).

Les conditions aux limites de type "encastrée" $u = 0$ et $u' = 0$ ne permettent pas d'avoir des modes orthogonaux !

Hélas, les calculs sont souvent très lourds, on ne dispose de problèmes simples que pour quelques cas

glissant - glissant	simple - simple	simple - glissant
$N(0, t) = 0$	$u(0, t) = 0$	$u(0, t) = 0$
$\theta(0, t) = 0$	$M(0, t) = 0$	$M(0, t) = 0$
$N(L, t) = 0$	$u(L, t) = 0$	$N(L, t) = 0$
$\theta(L, t) = 0$	$M(L, t) = 0$	$\theta(L, t) = 0$

8.5.2 Fréquences propres et modes propres

Prenons une expression générale de $Y(s)$ et $H(s)$ par exemple celles données en (8.14). Les 4 conditions aux limites peuvent se présenter sous forme algébrique

$$\mathbb{M} \cdot c = 0 \quad (8.22)$$

où \mathbb{M} est une matrice 4×4 dont la i^{ieme} ligne correspond à la i^{ieme} équation. Le vecteur est $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$. La matrice \mathbb{M} dépend de k^+ , k^- , ω^2 et des paramètres de la poutre. Cependant comme k^+ et k^- s'expriment en fonction de ω^2 et des paramètres de la poutre, \mathbb{M} dépend intrinsèquement de ω^2 et des paramètres de la poutre.

Fréquences propres : Cette matrice doit être non-inversible et donc on doit satisfaire $\det(\mathbb{M}) = 0$. Ce déterminant est une fonction très compliquée paramétrée par ω^2 et des paramètres de la poutre. On peut exprimer synthétiquement cette fonction comme (on ne met pas en argument les grandeurs de la poutre) :

$$\mathcal{F}(\omega^2) = 0 \quad (8.23)$$

Cette fonction $\mathcal{F}(\omega^2)$ est appelée **équation en fréquence**. En d'autres termes ω^2 est une racine de \mathcal{F} . Il en existe une infinité dénombrable dans \mathbb{R}^+ et nous pouvons donc les ordonner pour définir l'ensemble de racines ω_n : les **pulsations propres** de la structure en flexion.

Numériquement, il est assez facile de chercher les zéros de $\mathcal{F}(\omega^2)$ avec $\omega^2 \in \mathbb{R}^+$. En pratique, comme \mathcal{F} peut avoir des valeurs complexes il faut chercher les zéros de $\|\mathcal{F}(\omega^2)\|$.

Modes propres : Une fois la liste ω_n des fréquences modales obtenue, il faut trouver les **modes propres** associés à chaque pulsation ω_n . Là encore le principe consiste à rechercher les vecteurs c tels que

$$\mathbb{M}_n \cdot c = 0$$

c'est à dire les vecteurs associés au noyau de \mathbb{M}_n où \mathbb{M}_n est \mathbb{M} évalué pour $\omega = \omega_n$, $k^\pm = k^\pm(\omega_n)$.

On peut voir ce vecteur comme le vecteur propre de \mathbb{M}_n associé à la valeur propre nulle. Comme tout vecteur propre, il est défini à une amplitude près. C'est bien le cas pour les modes et cela ne nous surprend pas.

8.6 Conditions initiales

Les **conditions aux initiales** correspondent à la prescription d'une configuration initiale et d'une cinématique initiale. Cela implique que les conditions initiales prescrivent la déflexion et la vitesse de la fibre moyenne mais également l'angle et la vitesse angulaire de la section.

On a donc 4 fonctions spatiales qui décrivent les conditions initiales

$$u(s, 0) = u^0(s), \quad \dot{u}(s, 0) = v^0(s), \quad \theta(s, 0) = \theta^0(s), \quad \dot{\theta}(s, 0) = \Omega^0(s)$$

On considère ici que les conditions aux limites ont permis d'accéder à une base modale orthogonale $\{Y_n, H_n; \omega_n\}_n$. Par convention $n = 0$ correspondra au mode statique. On souhaite donc rechercher des solutions du problème sous la forme

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_n Y_n(s) T_n(t), & \theta(s, t) &= \sum_n H_n(s) T_n(t) \\ \text{avec} \quad T_0(t) &= a_0 + b_0 t \\ T_n(t) &= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) & \text{si } n > 0 \end{aligned}$$

Les quatre conditions initiales s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \sum_n Y_n(s) a_n &= u^0(s) & \sum_n H_n(s) a_n &= \theta^0(s) \\ Y_0(s) b_0 + \sum_{n>0} Y_n(s) \omega_n b_n &= v^0(s) & H_0(s) b_0 + \sum_{n>0} H_n(s) \omega_n b_n &= \Omega^0(s) \end{aligned}$$

Pour effectuer la projection modale, on multiplie les deux termes de la première colonne par $\rho A Y_m(s)$ et ceux de la seconde colonne par $\rho I H_m(s)$, puis on somme les deux termes de la première ligne ensemble et ceux de la seconde ligne ensemble. Enfin on intègre de 0 à L . Comme les modes sont orthogonaux, on abouti à :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\|Y_m, H_m\|^2} \int_0^L \rho A Y_m(s) u^0(s) + \rho I H_m(s) \theta^0(s) ds \\ b_m &= \frac{1}{\|Y_m, H_m\|^2} \frac{1}{\omega_m} \int_0^L \rho A Y_m(s) v^0(s) + \rho I H_m(s) \Omega^0(s) ds \end{aligned} \quad (8.24)$$

où l'on a introduit le carré de la norme du mode m :

$$\|Y_m, H_m\|^2 = \int_0^L \rho A Y_m^2 + \rho I H_m^2 ds \quad (8.25)$$

La méthodologie est donc classique.

On observe que les quatre conditions initiales déterminent que deux paramètres. On peut imposer des conditions initiales en déplacement-vitesse ou en rotation-vitesse de rotation, on aura le même résultat ensuite ? Non, ce n'est qu'une illusion, liée à une analyse trop rapide.

8.7 Domaine d'analyse

Quel domaine d'analyse est à privilégier ? En théorie il faut modéliser les modes les plus énergétiques. Hélas ces derniers peuvent être présents à des fréquences très différentes... et en général on ne le sait que quand on a fini les calculs ... Voici quelques astuces :

- Si la structure n'est mise en vibration que par des conditions initiales, les caractéristiques spatiales de ces conditions initiales donnent beaucoup d'informations :
- si les champs initiaux sont lisses ou varient très peu le long de la structure, alors les conditions initiales sont essentiellement définies par de grandes longueurs caractéristiques de variations. Il faudra donc étudier les modes associés à de grandes longueurs d'onde λ . Or $\lambda = 2\pi/k$, on doit donc considérer des valeurs de k faible. Attention cela peut être associé à des fréquences faibles ou pas (à cause des modes de cisaillement).

- si les champs initiaux varient beaucoup où sont très localisés (pincement, chocs) alors de petites longueurs caractérisent les conditions initiales. Durant la vibration, l'énergie sera donc très présente pour de grandes longueurs d'onde k .
- Si la structure est mise en vibration par une sollicitation extérieure entretenue (densité de force $p(s, t)$ ou de moment $m(s, t)$) alors il faut regarder en détail le spectre de ces sollicitations. Globalement les fréquences de résonnances présentent dans le spectre des sollicitations seront les plus énergétiques.

En pratique cela dépend du problème et de ce que l'on souhaite connaître. Ainsi pour des **problèmes d'ingénierie** il est parfois nécessaire qu'une structure ne vibre pas dans une certaine bande de fréquence (résistance aux tremblement de terre, au roulis d'un bateau...); dans ce cas, il ne sert à rien de simuler les modes propres dont les fréquences propres n'appartiennent pas à cette bande ! Pour des structures très visqueuse, l'expérience montre que la **viscosité** amortie surtout les hautes fréquences, cela signifie qu'il ne sert à rien de simuler un domaine fréquentiel trop importante.

Chapitre 9

Exemple pour une poutre en appuis simple

On considère une poutre de section carré de $h = 0.1 \text{ m}$ de côté ($A = h^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$, $I = h^4/12 = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$) en aluminium ($E = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $G = 26 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) de longueur $L = 1 \text{ m}$. Avec ces grandeurs physique la pulsation de coupure est $\omega_c = 107.5 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ (une fréquence de coupure $f_c = \omega_c/(2\pi) = 17.1 \text{ kHz}$).

Les variables cinématiques $u(s, t)$ et $\theta(s, t)$ et les efforts internes sont liés par des lois de comportements et les équations d'équilibre (8.1).

Elle est en appuis simple au deux extrémités. Cette poutre ne subit pas de chargement extérieur. La vibration est juste liée aux conditions initiales. En l'occurrence la poutre est frappée en $s = L/3$ en $t = 0$.

9.1 Modes sollicités

On a les conditions aux limites suivantes $u(0, t) = 0$, $M(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $M(L, t) = 0$ quelque soit t . Pouvant utiliser la séparation des variables (8.2), les conditions aux limites s'expriment

$$Y(0) = 0, \quad H'(0) = 0, \quad Y(L) = 0, \quad H'(L) = 0$$

ce qui correspond à 4 équations. Mais ces équations dépendent des modes. Nous allons étudier au cas par cas.

9.1.1 Modes statiques

Pour les modes statiques, on a donc :

$$H(s) = \frac{1}{2}c_1s^2 + c_2s + c_3, \quad Y(s) = \frac{1}{6}c_1s^3 + \frac{1}{2}c_2s^2 + c_3s + c_4$$

Les 4 conditions aux limites permettent d'écrire \mathbb{M}

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & L & 1 \\ L & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve simplement, $\mathcal{F} = -L^2$. Cette fonction ne s'annulant jamais, on a pas le choix, il faut que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, pour satisfaire $\mathbb{M} \cdot c = 0$. Il n'y a pas de mode statique pour ces conditions aux limites.

9.1.2 Modes basse fréquence

En basse fréquence $0 < \omega < \omega_c$ on choisi de noter $k^- := \sqrt{-K^-}$ et $k^+ := \sqrt{K^+}$. Suivant ce formalisme les fonctions propres sont donnés en sec-(8.2.3) :

$$\begin{aligned} Y(s) &= c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sinh(k^- s) + c_4 \cosh(k^- s) \\ H(s) &= (k^+ - \frac{\rho\omega^2}{Gk^+}) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + (k^- + \frac{\rho\omega^2}{Gk^-}) (c_3 \cosh(k^- s) + c_4 \sinh(k^- s)) \end{aligned}$$

La matrice des conditions aux limites devient :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2 & 0 & \frac{\rho\omega^2}{G} + (k^-)^2 \\ \sin(k^+ L) & \cos(k^+ L) & \sinh(k^- L) & \cosh(k^- L) \\ (\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2) \sin(k^+ L) & (\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2) \cos(k^+ L) & (\frac{\rho\omega^2}{G} + (k^-)^2) \sinh(k^- L) & (\frac{\rho\omega^2}{G} + (k^-)^2) \cosh(k^- L) \end{pmatrix}$$

Et l'on obtient

$$\mathcal{F}(\omega^2) = -((k^+)^2 + (k^-)^2)^2 \sin(k^+ L) \sinh(k^- L)$$

où k^+ et k^- dépendent bien de ω^2 conformément à (8.12). Dans ce cas il est facile de trouver $k_n^+ = n\pi/L$, avec $n > 0$ et on en déduit la pulsation ω notée ω_n^+ en revenant à la courbe de dispersion. Rappelons que dans un cas général il est préférable de chercher ω^2 dans \mathbb{R} puis d'en déduire les nombres d'ondes k^\pm associés. La procédure est plus systématique et plus rigoureuse.

Pour les modes propres on obtient rarement des solutions explicites. Mais dans le cas simple que nous suivons on a $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ et donc les modes propres sont (en imposant arbitrairement $c_1 = 1$) :

$$Y_n(s) = \sin(k_n^+ s), \quad H_n(s) = (k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+}) \cos(k_n^+ s) \quad \text{avec} \quad k_n^+ = \frac{n\pi}{L}$$

Le carré de la norme du mode (8.25) est :

$$\|Y_n, H_n\|^2 = \rho \frac{L}{2} \left(A + I \left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+} \right)^2 \right)$$

9.1.3 Modes de glissement

Le mode de glissement satisfait-il ces conditions aux limites ? Regardons, si l'on utilise les formulations (8.17) la matrice des conditions aux limites devient :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{A}{I} - (k^+)^2 & \frac{A}{I} & 0 \\ \sin(k^+ L) & \cos(k^+ L) & 1 & 0 \\ (\frac{A}{I} - (k^+)^2) \sin(k^+ L) & (\frac{A}{I} - (k^+)^2) \cos(k^+ L) & \frac{A}{I} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible (la dernière colonne contient que des zéros). Il y'a donc un mode propre de glissement ayant pour coefficients $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ et $c_4 = 1$, soit $Y_n(s) = 0$, $H_n(s) = 1$. Le carré de la norme du mode (8.25) est :

$$\|Y_n, H_n\|^2 = \rho IL$$

9.1.4 Modes haute fréquence

En haute fréquence $\omega > \omega_c$ on choisi de noter $k^- := \sqrt{K^-}$ et $k^+ := \sqrt{K^+}$. Suivant ce formalisme les fonctions propres sont donnés en sec-(8.2.3) :

$$\begin{aligned} Y(s) &= c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sin(k^- s) + c_4 \cos(k^- s) \\ H(s) &= \left(k^+ - \frac{\rho\omega^2}{Gk^+}\right) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + \left(k^- - \frac{\rho\omega^2}{Gk^-}\right) (c_3 \cos(k^- s) + c_4 \sin(k^- s)) \end{aligned}$$

La matrice des conditions aux limites devient :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2 & 0 & \frac{\rho\omega^2}{G} - (k^-)^2 \\ \sin(k^+ L) & \cos(k^+ L) & \sin(k^- L) & \cos(k^- L) \\ \left(\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2\right) \sin(k^+ L) & \left(\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^+)^2\right) \cos(k^+ L) & \left(\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^-)^2\right) \sin(k^- L) & \left(\frac{\rho\omega^2}{G} - (k^-)^2\right) \cos(k^- L) \end{pmatrix}$$

Et l'on obtient

$$\mathcal{F}(\omega^2) = -((k^+)^2 - (k^-)^2)^2 \sin(k^+ L) \sin(k^- L)$$

On retrouve $k^+ = n\pi/L$ avec $n > 0$ ce qui prolonge la famille modale basse fréquence. Par contre on a également $k^- = n\pi/L$ avec $n > 0$ aussi c'est une nouvelle famille modale. Les fréquences ω^+ et ω^- des modes $k_n^+ = n\pi/L$ et $k_n^- = n\pi/L$ sont très différentes. Pour comprendre cela on peut s'inspirer des courbes de dispersion.

Pour les modes propres on retrouve la contrainte $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ et donc $c_1 = 1$ pour le mode associé à $k_n^+ = n\pi/L$

$$Y_n(s) = \sin(k_n^+ s), \quad H_n(s) = \left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+}\right) \cos(k_n^+ s) \quad \text{avec} \quad k_n^+ = \frac{n\pi}{L}$$

Mais pour les modes $k_n^- = \frac{n\pi}{L}$ on obtient $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ et donc $c_3 = 1$ soit

$$Y_n(s) = \sin(k_n^- s), \quad H_n(s) = \left(k_n^- - \frac{\rho(\omega_n^-)^2}{Gk_n^-}\right) \cos(k_n^- s) \quad \text{avec} \quad k_n^- = \frac{n\pi}{L}$$

Le carré de la norme du mode (8.25) est pour les deux cas

$$\|Y_n, H_n\|^2 = \rho \frac{L}{2} \left(A + I \left(k_n^\pm - \frac{\rho(\omega_n^\pm)^2}{Gk_n^\pm} \right)^2 \right)$$

9.1.5 Modes de flexion et de cisaillement

Pour ce problème, on peut réorganiser les modes sous la forme suivante

- Les modes associés à (k^+, ω^+) , c'est à dire à la branche supérieure de la courbe de dispersion sont appelés **modes de flexion**. Ils ont tous la même formulation.
- Les modes associés à (k^-, ω^-) , c'est à dire à la branche inférieure de la courbe de dispersion sont appelés **modes de cisaillement**. Ils ont tous la même formulation.

Cependant cela est vraiment propre à notre exemple, dans un cas général, à une pulsation propre ω_n donnée, il est tout à fait possible que des nombres d'ondes des branches inférieure et supérieure de la courbe de dispersion soient présents dans l'expression des modes propres.

9.2 Conditions initiales

9.2.1 Reformulation des conditions initiales

Montrons que ce choc équivaut à imposer une certaine vitesse initiale en translation. On impose à $t = 0$ une force $\mathbf{p}(s, t) = p(s, t)\mathbf{d}_1$ brusque et localisée en $s = \ell$ ($= L/3$ pour l'exemple) représentée par une distribution de Dirac en espace et en temps :

$$p(s, t) = F_0 \delta(t) \delta(s - \ell) \quad (9.1)$$

La première équation d'équilibre est donc (la seconde est inchangée)

$$N'(s, t) + p(s, t) = \rho A \ddot{u}(s, t)$$

En intégrant cette relation entre $-\epsilon$ et ϵ (ϵ infinimentésimal) nous avons :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} N'(s, t) + p(s, t) dt = \rho A \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \ddot{u}(s, t) dt$$

En considérant que $N(s, t)$ est pratiquement inchangée quand $\epsilon \rightarrow 0$:

$$2\epsilon N'(s, 0) + F_0 \delta(s - \ell) = \rho A (\dot{u}(s, \epsilon) - \dot{u}(s, -\epsilon))$$

Si de plus la structure est au repos pour $t < 0$: $\dot{u}(s, -\epsilon) = 0$ et $2\epsilon N'(s, 0) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. On a donc une condition initiale en vitesse quand $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\dot{u}(s, 0) = \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell) \quad \text{on posera} \quad v^0(s) = \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell)$$

Les conditions initiales sont donc très simples, en effet comme en dehors du choc la structure est au repos :

$$u(s, 0) = 0, \quad \dot{u}(s, 0) = v^0(s), \quad \theta(s, 0) = 0, \quad \dot{\theta}(s, 0) = 0$$

9.2.2 Amplitude modale

D'un point de vue tout à fait général, les amplitudes modales a_n et b_n sont déterminées par (8.24). On a directement $a_n = 0$ pour tous les modes et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\|Y_n, H_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} \int_0^L \rho A Y_n(s) v^0(s) + \rho I H_n(s) \Omega^0(s) ds \\ &= \frac{1}{\|Y_n, H_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} \int_0^L \rho A Y_n(s) \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell) ds \\ &= \frac{Y_n(\ell)}{\|Y_n, H_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} F_0 \end{aligned}$$

Etudions ces expressions au cas par cas. Il n'y a pas de mode statique et compte tenu de son expression, pas de mode de glissement non plus. Par contre il y'a des modes de flexion et de cisaillement. Pour les modes de flexion et de cisaillement nous avons respectivement :

$$b_n^+ = \frac{\sin(k_n^+ \ell)}{\rho \frac{L}{2} \left(A + I \left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+} \right)^2 \right)} \frac{1}{\omega_n^+} F_0, \quad k_n^+ = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (9.2)$$

$$b_n^- = \frac{\sin(k_n^- \ell)}{\rho \frac{L}{2} \left(A + I \left(k_n^- - \frac{\rho(\omega_n^-)^2}{Gk_n^-} \right)^2 \right)} \frac{1}{\omega_n^-} F_0, \quad k_n^- = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (9.3)$$

9.2.3 Solutions temporelles

Les déplacements transverses et rotations sont donc tout simplement obtenus ainsi

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_n b_n^+ \sin(k_n^+ s) \sin(\omega_n^+ t) + b_n^- \sin(k_n^- s) \sin(\omega_n^- t) \\ \theta(s, t) &= \sum_n b_n^+ \left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+}\right) \cos(k_n^+ s) \sin(\omega_n^+ t) + b_n^- \left(k_n^- - \frac{\rho(\omega_n^-)^2}{Gk_n^-}\right) \cos(k_n^- s) \sin(\omega_n^- t) \end{aligned}$$

Pour n donné, dans la suite précédente $k_n^+ = k_n^- = \frac{n\pi}{L}$ on peut donc mettre en facteur les dépendances spatiales :

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) (b_n^+ \sin(\omega_n^+ t) + b_n^- \sin(\omega_n^- t)) \\ \theta(s, t) &= \sum_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) \left(\left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+}\right) b_n^+ \sin(\omega_n^+ t) + \left(k_n^- - \frac{\rho(\omega_n^-)^2}{Gk_n^-}\right) b_n^- \sin(\omega_n^- t) \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne le sentiment que les modes vibrent à deux fréquences propres distinctes. Ceci est souvent trompeur, ce n'est pas toujours le cas. Comme nous l'avons dit, dans un cas général, pour une fréquence propre donnée il peut y'avoir a priori tous les nombres d'ondes présents.

Chapitre 10

Code

MAINExample.m

```
1 clear all; close; clc;
2 %% Geometrie (section carree )
3 h=0.1;      % Epaisseur [m]
4 L=1;        % Longueur [m]
5 A=h^2;      % Aire [m^2]
6 I=h^4/12;   % Moment quadratique [m^4]
7 %% Matériau : Aluminium
8 E=69e9;     % Module de Young [Pa]
9 G=26e9;     % Module de cisaillement [Pa]
10 ro=2700;    % Masse volumique [kg/m^3]
11 %% Condition initiale
12 Y0=@(s) h*sin(1*pi/L*s); % deflection initiale
13 H0=@(s) pi/4*sin(3*pi/L*s); % rotation initiale
14 dY0=@(s) 0; % vitesse initiale
15 dH0=@(s) 0; % vitesse de rotation initiale
16 %% Domaine frequenciel
17 wc=sqrt(G*A/(ro*I)); % frequence de coupure [rad/s]
18 wmax=1.4*wc; % frequence max (definie a partir de wc)
19 nw=1e4; % nbre de freq.(grand pour selectionner tout le monde)
20 w=linspace(0,wmax,nw);
21 dw=w(2)-w(1); % pas frequenciel
22 quelquew=linspace(0,wmax,100); % une autre liste de frequence moins fine
23
24 %% 1 %% Fonction determinant
25 F=@(w) FonctionF(w,A,I,E,G,ro,L);
26 maxF=max(abs(F(w)));
27 AbsF=@(w) abs(FonctionF(w,A,I,E,G,ro,L)).^2./maxF.^2;
28 figure(1); hold on; % partie relle et imaginaire du determinant
29 plot(w,real(F(w)),'b','LineWidth',2);
30 plot(w,imag(F(w)),'r','LineWidth',2);
31 plot(wc,0,'sm','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','m');
32 hh=legend('$\mathrm{Re}(F)$','$\mathrm{Im}(F)$','$\omega_c$');
33 xlabel('$\omega$','FontSize',24,'Interpreter','latex');
34 axis tight; box on;
35 set(gca,'FontSize',20)
36 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northwest')
37 figure(2); hold on; % norme du determinant
38 plot(w,AbsF(w),'b','LineWidth',2);
39 plot([wc wc],[AbsF(wc)/10 max(AbsF(w))],'-m','LineWidth',1);
40 hh=legend('$\|F\|','$\omega_c$');
41 xlabel('$\omega$','FontSize',24,'Interpreter','latex');
42 axis tight; box on;
43 set(gca,'FontSize',20,'YScale','log');
44 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northwest')
```

```

45
46 %% 2 %% Recherche des zeros de F
47 % On regarde quand la courbure a un signe positif
48 % La derivee est estimee par la fonction diff(u)=u(i+1)-u(i)
49 % Attention si size(u)=n alors size(diff(u))=n-1;
50 % La courbure est estimee par la diff(diff(u))
51 % On utilise le signe pour avoir des valeurs simple a manipuler
52 ddF=diff(sign(diff(AbsF(w))));
53 figure(3)
54 % le "nw-2" s'explique par l'adaptation des tailles de vecteurs
55 plot(w(1:nw-2),ddF,'LineWidth',2)
56 xlabel('$\omega$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
57 axis([0,wmax,-2.5,2.5]);box on;
58 set(gca,'FontSize',20)
59
60 %% 3 %% Pulsations propres approchees
61 % La fonction F s'annule quand ddF=2
62 iw=find(ddF==2); % on selectionne donc les indices de ddF=2
63 wn=w(iw); % frequence propres approchees
64 nn=length(wn); % nombre de frequences propres
65 % Puis pour raffiner on utilise fminbnd
66 jw=0;
67 for n=1:nn
68     [x,fval,exitflag]=fminbnd(@(w) log(AbsF(w)),wn(n)-2*dw,wn(n)+2*dw);
69     if exitflag==1 % si ca a marche
70         jw=jw+1; % on incremente
71         wnrafine(jw)=x; % on stocke la bonne valeur de la frequence propre
72     end
73 end
74 wn=wnrafine; % pulsation propre
75 nn=length(wn); % nombre de pulsation propre
76 figure(3);hold on; % Pulsation rafinee
77 stem(wn,ones(1,nn),'LineWidth',2)
78 xlabel('$\omega$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
79 axis([0,wmax,0,2.5]);box on;
80 set(gca,'FontSize',20);
81
82 %% 4 %% Determination des nombre d'ondes associes
83 for n=1:nn
84     W=wn(n)^2;
85     polyK=[E*I/(ro*A); -(I/A)*(1+E/G)*W; (ro*I/(G*A))*W.^2-W];
86     Kpm=roots(polyK);
87     kpn(n)=sqrt(max(Kpm)); %  $k^{+}_{n}$ 
88     kmn(n)=sqrt(min(Kpm)); %  $k^{-}_{n}$ 
89 end
90
91 %% 5 %% Superposition des racines avec les courbes de dispersion
92 for iw=1:length(quelquew)
93     W=quelquew(iw)^2;
94     polyK=[E*I/(ro*A); -(I/A)*(1+E/G)*W; (ro*I/(G*A))*W.^2-W];
95     Kpm=roots(polyK);
96     Kp(iw)=max(Kpm);
97     Km(iw)=min(Kpm);
98     quelqueW(iw)=W;
99 end
100 kp=sqrt(Kp);
101 km=sqrt(Km);
102 figure(4);hold on; % affichage de (W,K)
103 plot(quelqueW,Kp,'b','LineWidth',2);
104 plot(quelqueW,Km,'r','LineWidth',2);
105 plot(wn.^2,kpn.^2,'ob','MarkerSize',8);

```

```

106 plot(wn.^2,kmn.^2,'or','MarkerSize',8);
107 plot(wc^2,0,'sm','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','m');
108 hh=legend('$K^{+}$','$K^{-}$','$K^{+}_{n}$','$K^{-}_{n}$','$W_c$');
109 xlabel('W','FontSize',16,'Interpreter','latex');
110 ylabel('K','FontSize',16,'Interpreter','latex');
111 axis tight;box on;
112 set(gca,'FontSize',20)
113 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northwest')
114 figure(5); % affichage de (w,k)
115 subplot(2,1,1);hold on; %-- partie reelle
116 plot(quelquew,real(kp),'b','LineWidth',2);
117 plot(quelquew,real(km),'r','LineWidth',2);
118 plot(wn,real(kpn),'ob','MarkerSize',8);
119 plot(wn,real(kmn),'or','MarkerSize',8);
120 plot(wc,0,'sm','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','m');
121 hh=legend('$K^{+}$','$K^{-}$','$K^{+}_{n}$','$K^{-}_{n}$','$\omega_c$');
122 ylabel('$Re(k)$','FontSize',16,'Interpreter','latex');
123 axis tight;box on;
124 set(gca,'FontSize',20)
125 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northwest')
126 subplot(2,1,2);hold on; %-- partie imaginaire
127 plot(quelquew,imag(km),'r','LineWidth',2);
128 plot(wn,imag(kmn),'or','MarkerSize',8);
129 plot(wc,0,'sm','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','m');
130 hh=legend('$K^{-}$','$K^{-}_{n}$','$\omega_c$');
131 xlabel('$\omega$','FontSize',16,'Interpreter','latex');
132 ylabel('$Im(k)$','FontSize',16,'Interpreter','latex');
133 axis tight;box on;
134 set(gca,'FontSize',20)
135 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northeast')
136
137 %% 6 %% Determination des modes propres associes
138 for n=1:nn
139     M=MatriceM(wn(n)^2,kpn(n),kmn(n),A,I,E,G,ro,L);
140     [V,D]=eig(M);
141     % cherche la valeur propre de plus faible module (nulle theoriquement)
142     [~,j]=min(abs(diag(D)));
143     % Cela correspond a l'indice 'j'
144     % choisir le vecteur propre : j-ieme colonne de V
145     % les colonnes de C contiennent les (c1,c2,c3,c4) du n-ieme vecteur propre
146     C(:,n)=V(:,j);
147 end
148
149 %% 7 %% Grandeur spatiale
150 % La plus petite longueur d'onde lambda=2*pi/k est definie a partir du plus
151 % grand nombre d'onde
152 % On impose un pas en espace de lambda_min/10
153 dx=2*pi/max(max(kpn),max(kmn))/10;
154 s=0:dx:L; % definition de l'abscisse curviligne
155
156 %% 8 %% Carre de la norme de chaque mode
157 for n=1:nn
158     Y=@(s) C(1,n)*sin(kpn(n)*s)+ C(2,n)*cos(kpn(n)*s)+ ...
159             C(3,n)*sin(kmn(n)*s)+ C(4,n)*cos(kmn(n)*s);
160     H=@(s) (kpn(n)-ro*wn(n)^2/(G*kpn(n)))*(C(1,n)*cos(kpn(n)*s)- C(2,n)*sin(kpn(n)*s)
161             )+ ...
162             (kmn(n)-ro*wn(n)^2/(G*kmn(n)))*(C(3,n)*cos(kmn(n)*s)- C(4,n)*sin(kmn(n)*s)
163             );
164     CarreNorme(n)= sum(ro*A*Y(s).^2+ro*I*H(s).^2)*dx;
165 end

```

```

165 %% 9 %% Projection modale des conditions initiales
166 % Calcul des an et bn en fonctions des conditions initiales
167 for n=1:nn
168     Y=@(s) C(1,n)*sin(kpn(n)*s)+ C(2,n)*cos(kpn(n)*s)+ ...
169             C(3,n)*sin(kmn(n)*s)+ C(4,n)*cos(kmn(n)*s);
170     H=@(s) (kpn(n)-ro*wn(n)^2/(G*kpn(n)))*(C(1,n)*cos(kpn(n)*s)- C(2,n)*sin(kpn(n)*s)
171             )+ ...
172             (kmn(n)-ro*wn(n)^2/(G*kmn(n)))*(C(3,n)*cos(kmn(n)*s)- C(4,n)*sin(kmn(n)*s)
173             );
174     a(n) = sum(ro*A*Y(s).*Y0(s)+ro*I*H(s).*H0(s))*dx / CarreNorme(n);
175     b(n) = sum(ro*A*Y(s).*dY0(s)+ro*I*H(s).*dH0(s))*dx / CarreNorme(n) / wn(n);
176 end
177
178 %% 10 %% Spectre
179 % la densite spectrale de puissance est definie ainsi
180 Ener=abs(a).^2+abs(b).^2;
181 figure(6);hold on;
182 stem(wn,Ener,'LineWidth',2)
183 plot([wc wc],[min(Ener) max(Ener)],'-m','LineWidth',1);
184 xlabel('$\omega$', 'FontSize',24, 'Interpreter','latex');
185 axis([0,wmax,0,1.5*max(Ener)]);box on;grid on;
186 set(gca,'FontSize',20,'YScale','log');
187 set(hh,'FontSize',20,'Interpreter','latex','Location','northwest');
188
189 %% 11 %% Visualisation d'un mode
190 % choix du mode
191 N=1;
192 % Deflection et angle (on suppose t=0, donc b=0)
193 Y=@(s) a(N)*(C(1,N)*sin(kpn(N)*s)+ C(2,N)*cos(kpn(N)*s)+ ...
194          C(3,N)*sin(kmn(N)*s)+ C(4,N)*cos(kmn(N)*s));
195 H=@(s) a(N)*((kpn(N)-ro*wn(N)^2/(G*kpn(N)))*(C(1,N)*cos(kpn(N)*s)- C(2,N)*sin(kpn(N)*s)
196          )+ ...
197          (kmn(N)-ro*wn(N)^2/(G*kmn(N)))*(C(3,N)*cos(kmn(N)*s)- C(4,N)*sin(kmn(N)*s)
198          ));
199 for is=1:length(s);
200     % Matrice de rotation
201     R=[cos(H(s(is))) sin(H(s(is)))-sin(H(s(is))) cos(H(s(is)))];
202     % Position du directeur d1 (au repos c'est l'axe vertical)
203     % (on lui donne une longueur h/2 pour représenter la section)
204     d1(:,is)=R*[0;h/2];
205 end
206 figure(7);hold on;
207 pY=plot(s,real(Y(s)),'k');
208 qH1=quiver(s,real(Y(s)),+real(d1(1,:)),+real(d1(2,:)),0,'LineWidth',2);
209 qH2=quiver(s,real(Y(s)),-real(d1(1,:)),-real(d1(2,:)),0,'LineWidth',2);
210 qH1.ShowArrowHead = 'off';qH1.Color = pY.Color;
211 qH2.ShowArrowHead = 'off';qH2.Color = pY.Color;
212 axis equal;axis off;
213
214 %% 12 %% Sauvegarde dans le dossier parent
215 save(' ../ FrequencePropre.mat','wn','kpn','kmn','C','CarreNorme','a','b');

```

FonctionF.m

```

1 function F=FonctionF(w,A,I,E,G,ro,L)
2
3 for i=1:length(w(:))
4     % Calcul des nombres d'ondes
5     W=w(i).^2;
6     polyK=[E*I/(ro*A); -(I/A)*(1+E/G)*W; (ro*I/(G*A))*W.^2-W];
7     Kpm=roots(polyK);

```



```

8      kp=sqrt(Kpm(1));
9      km=sqrt(Kpm(2));
10     % Calcul de la matrice M
11     M=MatriceM(W,kp,km,A,I,E,G,ro,L);
12     % Calcul de F
13     F(i)=det(M);
14 end

```

MatriceM.m

```

1 function M=MatriceM(W,kp,km,A,I,E,G,ro,L)
2 m11=0;
3 m12=1;
4 m13=0;
5 m14=1;
6 m21=0;
7 m22=ro*W/G-kp^2;
8 m23=0;
9 m24=ro*W/G-km^2;
10 m31=sin(kp*L);
11 m32=cos(kp*L);
12 m33=sin(km*L);
13 m34=cos(km*L);
14 m41=(ro*W/G-kp^2)*sin(kp*L);
15 m42=(ro*W/G-kp^2)*cos(kp*L);
16 m43=(ro*W/G-km^2)*sin(km*L);
17 m44=(ro*W/G-km^2)*cos(km*L);
18 M=[ m11,m12,m13,m14;...
19     m21,m22,m23,m24;...
20     m31,m32,m33,m34;...
21     m41,m42,m43,m44];

```

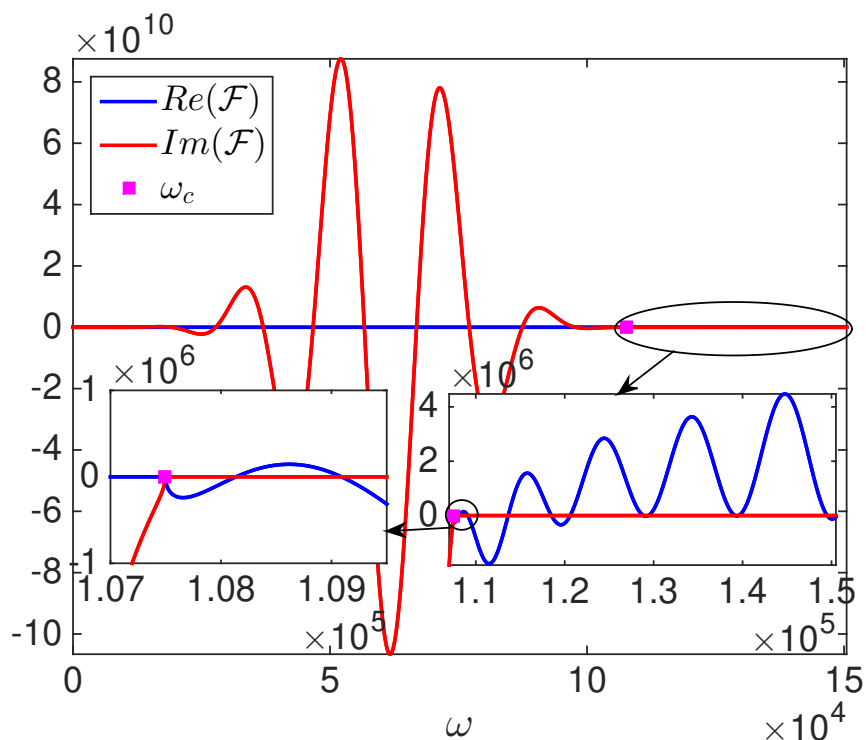


FIGURE 10.1 – Partie réelle et imaginaire du déterminant $\mathcal{F}(\omega)$ de la matrice \mathbb{M} , avec différents zooms.

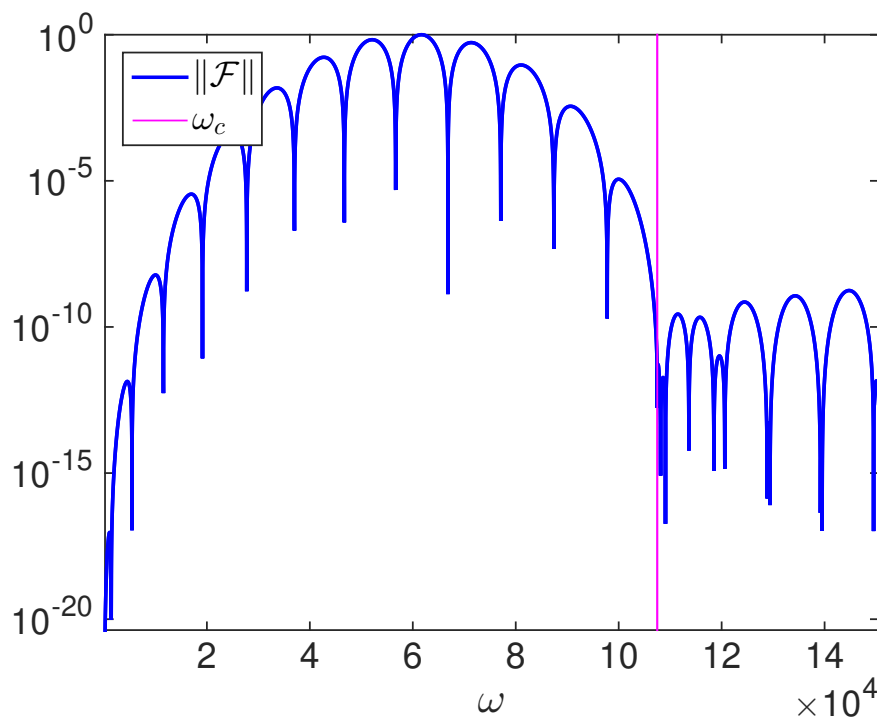


FIGURE 10.2 – Module de $\mathcal{F}(\omega)$ au carré normalisé en échelle verticale logarithmique.

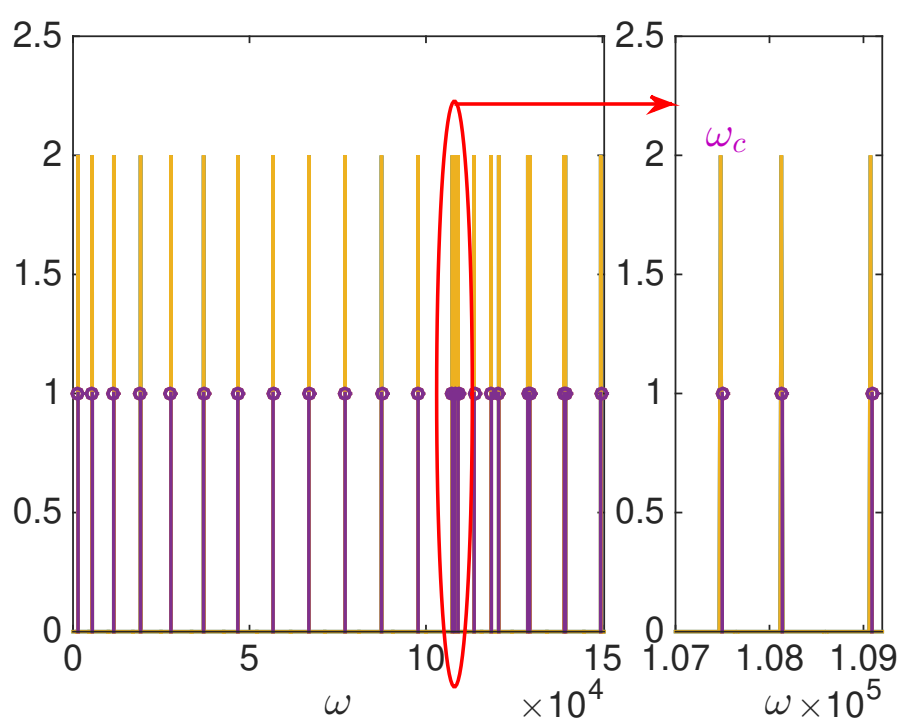


FIGURE 10.3 – Les valeurs du vecteur ddF en orange ainsi que l'ensemble des modes propres ω_n obtenus après optimisation en violet. A gauche un zoom où l'on voit bien la présence de la fréquence de coupure ω_c et de deux modes très très proches (voir les Fig.10.1).

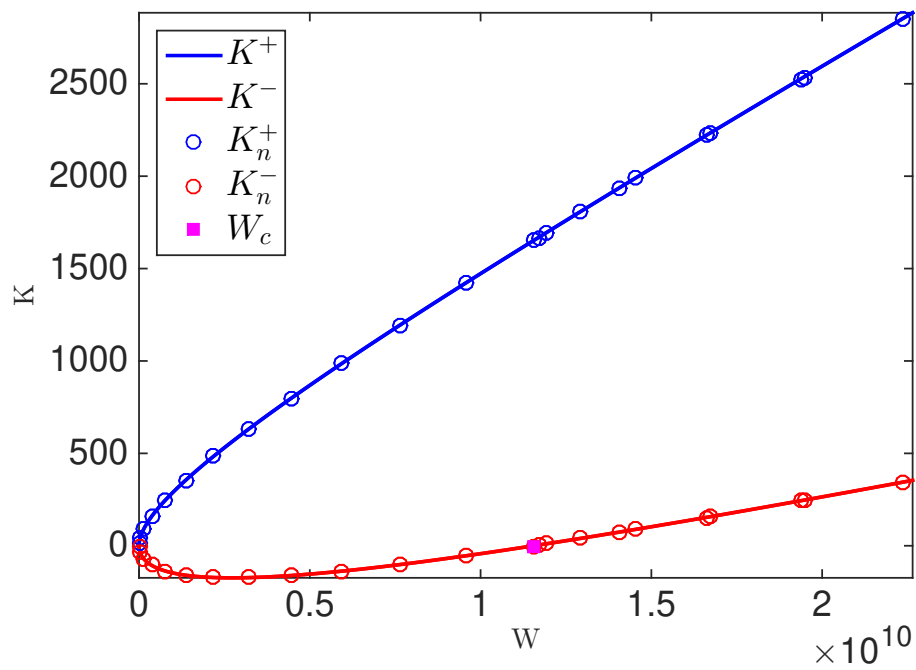


FIGURE 10.4 – Courbe de dispersion dans le plan (W, K) . En bleu la branche de flexion et en rouge celle de cisaillement. Les ronds correspondent aux points associés aux pulsations propres ω_n^2 : on a donc les points $(\omega_n^2, (k_n^+)^2)$ et $(\omega_n^2, (k_n^-)^2)$ pour chaque mode.

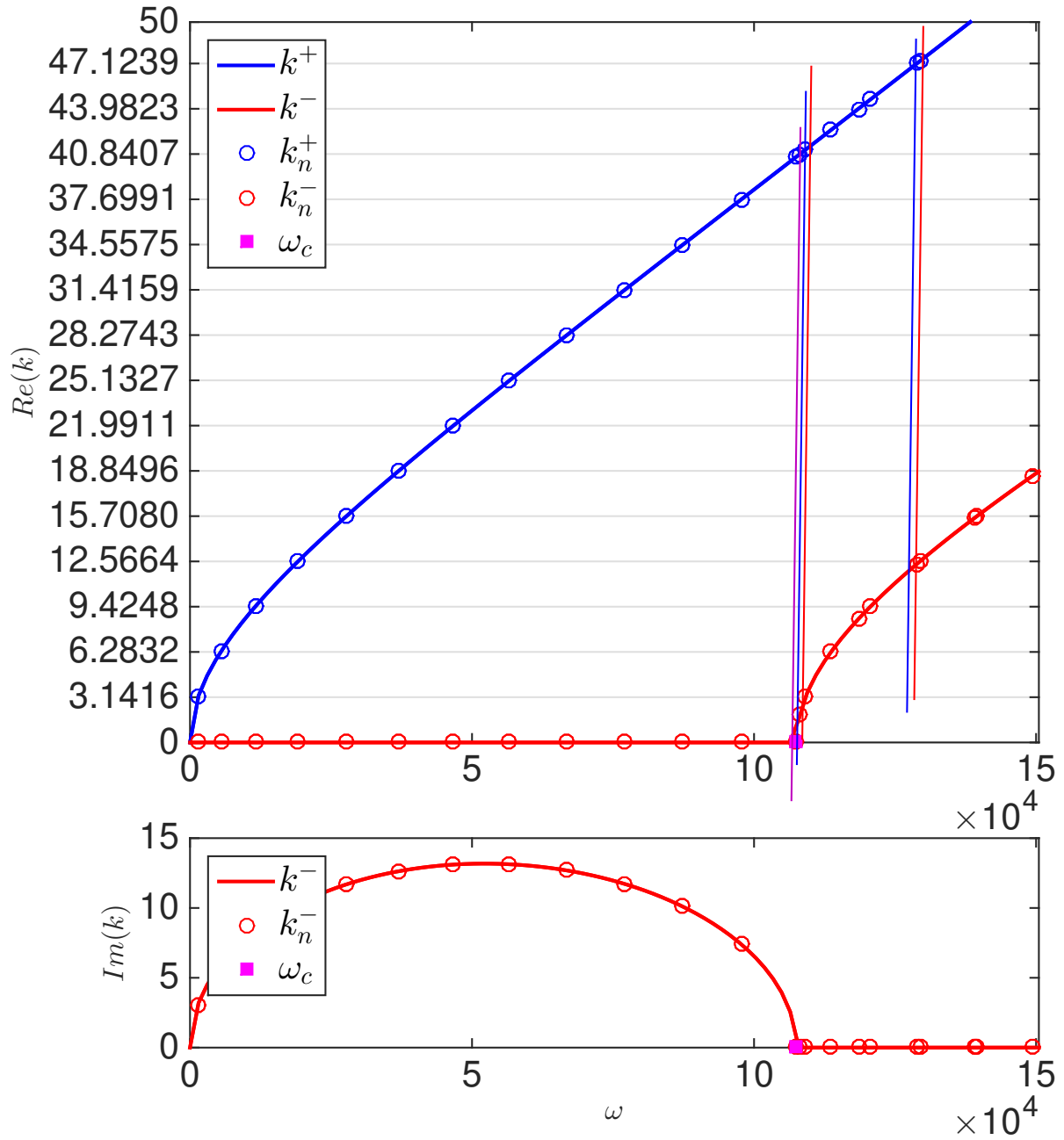


FIGURE 10.5 – Courbe de dispersion dans le plan (ω, k) . En bleu la branche de flexion en rouge celle de cisaillement. Les ronds correspondent aux points associés aux pulsations propres ω_n : on a donc les points (ω_n, k_n^+) et (ω_n, k_n^-) pour chaque mode. On observe que les points ont comme valeur verticale $n\pi/L$ ($L = 1$ ici) pour une des deux branches. Ceci permet de mieux comprendre l'éventuelle proximité de certaines fréquences propres.

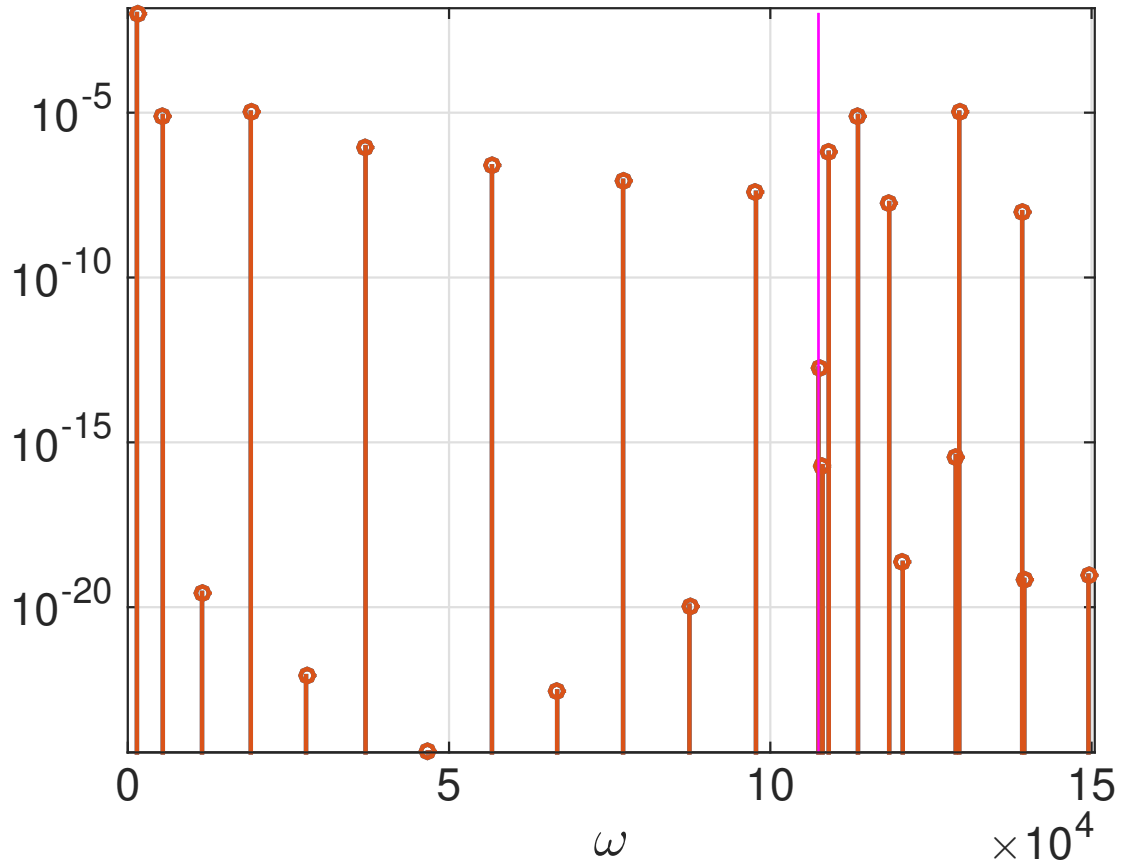


FIGURE 10.6 – Spectre $\|a_n\|^2 + \|b_n\|^2$ pour chaque ω_n .

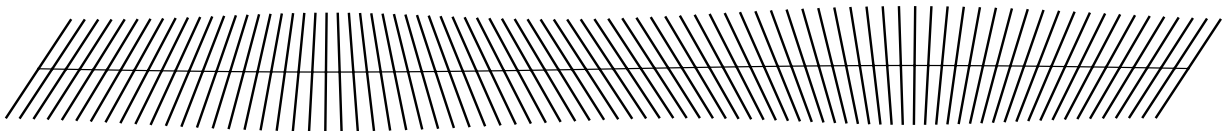


FIGURE 10.7 – Mode $n = 16$ à échelle réelle. On observe la fibre centrale (de longueur L) et les sections (de hauteur h). Ce mode est un mode de cisaillement : peu de déflexion et beaucoup de rotation.

Chapitre 11

Liste d'exercice

11.1 Chocs

Si l'on étudie en détail le code on observe qu'il n'est pas adapté pour traiter un choc. En effet on ne peut pas simuler un Dirac spatial ou temporel. Afin de contourner ce problème on peut introduire une série de Fourier du Dirac à savoir :

$$\delta(s - \ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta s} \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{n\pi}{L}\ell\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right)$$

où Δs est la discrétisation spatiale.

1. Intégrez ces formulations dans le code proposé afin que des chocs puisse être pris en compte dans les conditions initiales. On justifiera le choix de N dans l'implémentation numérique.
2. Traitez la condition initiale

$$u(s, 0) = 0, \quad \theta(s, 0) = 0, \quad \dot{u}(s, 0) = 0, \quad \dot{\theta}(s, 0) = \Omega_0 \delta(s - \ell),$$

11.2 Fonction erreur

En théorie le teme énergétique suivant

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} G A (u' - \theta)^2 + \frac{1}{2} E I \theta'^2 \, ds$$

doit être constant au cours du temps.

1. A partir du code fourni, vérifiez si cela est vrai pour les solutions numériques. Implémentez les solutions théoriques vérifiez si cela est vrai également.
2. En fait cette fonction temporelle $\mathcal{E}(t)$ est une estimation de l'erreur de la méthode numérique. Etudiez l'influence de n . Etudiez l'influence

11.3 Approche asymptotique

On observe sur les courbes de dispersion (ω, k) que les relations de dispersions sont pratiquement des droites pour $k \gg 1$ et $\omega \gg 1$. Montrez que cela peut s'interpréter en négligeant certains termes de la

relation de dispersion

$$\left(\frac{EI}{\rho A}\right) K^2 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G}\right) WK + \left(\frac{\rho I}{GA}\right) W^2 - W = 0$$

1. En déduire des expressions simplifiées des relations de dispersion, des modes.
2. Coder les solutions du problèmes résolus dans l'exemple numérique. Comparer les solutions approchées par rapport aux solutions exactes.

11.4 Vibration libre

1. Formuler et coder la dépendance temporelles de grandeurs $u(s, t)$, $\theta(s, t)$, $N(s, t)$, $M(s, t)$. Bien choisir le pas temporel. Visualiser au cours du temps le comportement de la poutre (faire des affichages succesif ou un film). Représenter au cours du temps l'évolution de la force agissant en $s = 0$ et $s = L$ sur les points de fixation de la structure.
2. Toujours avec les mêmes conditions aux limites, choisir comme conditions initiales la configuration statique pour une structure subissant
 - (a) une densité de force uniforme $p = g\rho A$.
 - (b) une force ponctuelle $p = F_0\delta(s - \ell)$.
 Il faudra donc résoudre tout d'abord le problème statique.

3. Reformuler le problème en imposant les conditions au limite suivantes (collée-libre) :

$$u(0, t) = 0, \quad \theta(0, t) = 0, \quad N(L, t) = 0, \quad M(L, t) = 0$$

Pour ces conditions initiales, choisir comme conditions initiales la configuration statique pour une structure subissant une force F_0 en L .

4. Reformuler le problème en imposant les conditions au limite suivantes (collée-glissant) :

$$u(0, t) = 0, \quad \theta(0, t) = 0, \quad N(L, t) = 0, \quad \theta(L, t) = 0$$

Pour ces conditions initiales, choisir comme conditions initiales la configuration statique pour une structure subissant une force F_0 en L .

5. Comparer les résultats de 4-(3) et 4-(4).
6. Construire un algorithme permettant de définir arbitrairement les 4 conditions aux limites et qui permet de construire génériquement la matrice \mathbb{M} .
7. Montrez que les résultats sont très dégradés si on se limite aux premières fréquences (typiquement $\omega_{max} < \omega_c$). Etudiez l'erreur \mathcal{E} en fonction de ω_{max} .
8. L'approche théorique a mené au résultat suivant

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) (b_n^+ \sin(\omega_n^+ t) + b_n^- \sin(\omega_n^- t)) \\ \theta(s, t) &= \sum_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) \left(\left(k_n^+ - \frac{\rho(\omega_n^+)^2}{Gk_n^+}\right) b_n^+ \sin(\omega_n^+ t) + \left(k_n^- - \frac{\rho(\omega_n^-)^2}{Gk_n^-}\right) b_n^- \sin(\omega_n^- t) \right) \end{aligned}$$

en effet les b_n^\pm sont généraux si on part de l'idée que la position initiale est la position au repos. Codez ce résultat en choisissant un n_{max} et en calculant pour chaque n compris entre 1 et n_{max} les termes de flexion et de cisaillement. Etudiez l'influence de n_{max} en étudiant $\mathcal{E}(t)$ en fonction de n_{max} . Comparez ces résultats aux résultats obtenus numériquement en prenant plutôt ω compris entre 0 et ω_{max} . On pourra utiliser l'erreur $\mathcal{E}(t)$. Etudiez l'erreur en fonction de n_{max} .

11.5 Vibration forcée

Le problème forcé

$$\begin{aligned} GA(u' - \theta)' + p &= \rho A \ddot{u} \\ EI\theta'' + GA(u' - \theta) + m &= \rho I \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (11.1)$$

avec $p(s, t)$ et $m(s, t)$ arbitraire. On ne traitera que les cas où les modes sont orthogonaux (conditions aux limites simple-simple typiquement) et on ne traitera que des conditions initiales nulles.

1. Ecrire théoriquement la méthode permettant de traiter le problème.
2. Résoudre numériquement le problème. Visualiser les solutions au cours du temps (comme 4-(1)).
3. Traiter théoriquement (et simuler numériquement) un des chargement chargements suivant

Excitation résonante	$p(s, t) = F_0 \sin(\Omega t) \delta(s - \ell)$	$m(s, t) = 0$
Voiture sur un pont	$p(s, t) = F_0 \delta(s - Vt)$	$m(s, t) = 0$
Doigt sur un verre	$p(s, t) = 0$	$m(s, t) = M_0(1 - \cos(\Omega t)) \delta(s - Vt)$

où Ω et V sont une pulsation et une vitesse et $0 < \ell < L$.

4. Pour un des cas de 5-(3) montrez l'influence des paramètres V , Ω , ℓ . On s'appuiera sur les études théoriques pour choisir au mieux ces paramètres pour exciter un mode en particulier. Afficher ce qui se passe au cours du temps quand $\Omega \rightarrow \omega_m^+$ pour un m donné (pas trop élevé).

Chapitre 12

Modèle d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli est un modèle de flexion plane de poutre. C'est le modèle historique (vers 1750) alors que les travaux de Timoshenko datent de 1920.

Il est moins riche que le modèle de Timoshenko mais est plus facile à manipuler. Ceci explique pourquoi il est encore majoritairement documenté dans les livres de cours.

Il est plus adapté à des structures très élancées $\varrho < L/50$. En pratique, il fournit de moins bons résultats en statique mais dans bien des cas cela suffit pour faire un dimensionnement rapide du problème. Par contre en dynamique, il est beaucoup moins bon que le modèle de Timoshenko et il vaut mieux se méfier des résultats obtenus.

12.1 Construction du modèle

12.1.1 Hypothèse du modèle

Les sections restent rigides et comme d'habitude toutes les quantités physiques dépendent de l'abscisse curviligne s et du temps t . Nous allons nous intéresser ici à la flexion dans le plan $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_3)$ suivant l'hypothèse des petites perturbations. Le problème est basé sur le système d'équations suivant :

Équations fondamentales			
$N' + p = \rho A \ddot{u}$	Equation d'équilibre en translation	(12.1)	
$M' + N = 0$	Equation d'équilibre en rotation	(12.2)	
$M = EI\theta'$	Loi de comportement	(12.3)	
$u' = \theta$	Hypothèse cinématique	(12.4)	

L'équilibre en translation (12.1) et la loi de comportement en flexion (12.3) sont inchangées.

Dans l'équation d'équilibre en rotation (12.2) on observe $\rho I \ddot{\theta}$ disparaît (par rapport au modèle de Timoshenko) :

⇒ **le terme d'inertie en rotation est négligé.**

La loi de comportement de la force N a disparu :

⇒ **il n'y a pas de loi de comportement pour l'effort tranchant.**

On voit apparaître une hypothèse cinématique $u' = \theta$. Or u' est la pente de la fibre centrale \mathcal{C} . Pour des

petites transformations cette pente est égale à l'angle α de la tangente à \mathcal{C} ($u' = \tan(\alpha) \simeq \alpha$). Ainsi $u' = \theta$ signifie que la section \mathcal{S} qui était initialement normale à la fibre reste normale à la fibre après transformation :

\Rightarrow **les sections restent normales à la fibre moyenne.**

12.1.2 Discussion et généralisation

Statique/dynamique Quand on compare ce modèle au modèle de Timoshenko on a donc une hypothèse cinématique $u' = \theta$ et une hypothèse dynamique $\rho I \ddot{\theta} \rightarrow 0$. Or pour un problème statique l'hypothèse dynamique est vraie !! On comprend pourquoi ce modèle fonctionne mieux en statique (une seule hypothèse en pratique) qu'en dynamique (deux hypothèses).

Densité linéique de moment Bien que cela n'ait pas été souligné, cette présentation néglige aussi la densité linéique de moment. Ce n'est pas une hypothèse du modèle mais juste un choix permettant de ne pas trop compliquer la formulation du problème.

Flexion dans l'autre plan On peut bien sûr trouver des équations écrites dans le plan ($\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$), dans ce cas $N \equiv N_2$, $u \equiv u_2$, $M \equiv M_1$, $\theta \equiv \theta_1$ enfin $I \equiv I_1$, mais plus important il y'a des changements de signes (que l'on retrouve en (7.14), (7.15), (7.16)), qui sont parfois cause de confusion quand l'on passe d'un livre à un autre. Les équations (12.1), (12.2), (12.3), (12.4) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} N' + p &= \rho A \ddot{u} & M &= EI \theta' \\ M' - N &= 0 & u' &= -\theta \end{aligned}$$

Grande déformation En maintenant l'hypothèse de section restant normale et en continuant à négliger l'inertie en rotation il est possible d'étendre le modèle d'Euler-Bernoulli à de grandes déformations et de grands déplacements (c'est ce qu'avait fait Euler d'ailleurs dès le début...). Néanmoins on comprend que l'hypothèse cinématique est d'autant plus questionnable en grande transformation.

12.1.3 Reformulation

En étudiant les équations fondamentales on peut reformuler le problème. Tout d'abord, on observe que (12.4) permet de définir θ en fonction de u . En injectant cette information dans (12.3) on obtient

$$M = EI u'' \quad (12.5)$$

De plus l'équation (12.2) permet de déterminer M en fonction de N en effet $N = -M''$. Ainsi à partir de la relation (12.5) on obtient $N = -EI u''''$ ce qui peut être injecté dans l'équation d'équilibre en translation (12.1) :

$$-EI u'''' + p = \rho A \ddot{u}$$

On a donc la possibilité de reformuler le problème sous cette forme

Reformulation			
$-EI u'''' + p = \rho A \ddot{u}$	Equation différentielle en u	(12.6)	
$N = -EI u''''$	Définition de N	(12.7)	
$M = EI u''$	Définition de M	(12.8)	
$\theta = u'$	Définition de θ	(12.9)	

Cette formulation ne doit pas être apprise par coeur car elle n'a pas de sens physique réel. Il est vraiment préférable de connaître ÉQUATIONS FONDAMENTALES et de savoir ensuite retrouver REFORMULATION. L'équation (12.7) **n'est pas une loi de comportement** c'est une relation qui découle de l'hypothèse cinématique et de l'équation d'équilibre en rotation.

Cette formulation permet de parfaitement découpler le problème. On dispose d'une seule équation différentielle en u , scalaire, d'ordre 4 en espace et 2 en temps. Une fois que cette inconnue est déterminée, les autres grandeurs *dérivent* directement de u .

12.2 Vibrations libres

On considère donc $p = 0$ pour se concentrer sur l'équation de vibration libre

$$-EIu'''' = \rho A \ddot{u} \quad (12.10)$$

En d'autre terme seule la variable $u(s, t)$ nous préoccupe.

12.2.1 Séparation des variables

On cherche des solutions à variables séparées

$$u(s, t) = Y(s)T(t) \quad (12.11)$$

Le problème de vibration libre peut donc se formuler ainsi

$$-\frac{EI}{\rho A} \frac{Y''''}{Y} = \frac{\ddot{T}}{T} \quad \Rightarrow \quad -\frac{EI}{\rho A} \frac{Y''''}{Y} = -\omega^2 \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \quad (12.12)$$

Car chaque membre de l'équation de gauche est réel et dépend d'une variable distincte, ils sont donc tous les deux égaux à une constante réelle que l'on notera $-\omega^2$ (positive, nulle ou négative). On a ici deux équations différentielles couplées par $-\omega^2$ qui est pour l'instant une variable réelle quelconque.

Conséquence sur la variable temporelle La dépendance temporelle est donc solution de

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

et est de forme générale $T(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ si $\omega \neq 0$ et $T(t) = a + bt$ si $\omega = 0$. Les constantes d'intégration, a et b , dépendant des conditions initiales.

Conséquence sur la déflexion Nous avons donc

$$\boxed{Y'''' - \omega^2 \frac{\rho A}{EI} Y = 0} \quad (12.13)$$

12.2.2 Modes statiques

Si $\omega = 0$, on a naturellement $\ddot{T} = 0$ et donc $T(t) = a + bt$. Mais en ce qui concerne les modes de déplacement, nous avons $Y'''' = 0$ soit

$$Y(s) = \frac{1}{6}c_1 s^3 + \frac{1}{2}c_2 s^2 + c_3 s + c_4$$

Les constantes étant déterminés par les conditions aux limites et les conditions initiales. Remarquons que dans ce cas, les variables dérivées θ , M et N sont fournies par (12.9), (12.8), (12.7). En utilisant la séparation des variables $\theta(s, t) = H(s)T(t)$, $N(s, t) = N(s)T(t)$, et $M(s, t) = M(s)T(t)$, on a :

$$H(s) = \frac{1}{2}c_1 s^2 + c_2 s + c_3, \quad M(s) = c_1 s + c_2, \quad N(s) = c_1$$

L'effort tranchant est uniforme, le moment varie linéairement le long de la structure.

12.2.3 Modes dynamiques

On suppose dorénavant que $\omega \neq 0$, l'équation (12.13) admet des solutions de la forme $Y(s) = e^{iks}$ (on n'est pas obligé de mettre le i , c'est juste une habitude pratique).

Relation de dispersion En injectant cette forme générale dans (12.13), on obtient :

$$\left(k^4 - \omega^2 \frac{\rho A}{EI}\right) e^{iks} = 0$$

ce qui introduit le polynôme caractéristique de l'équation, c'est à dire **l'équation de dispersion d'Euler-Bernoulli** :

$$k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (12.14)$$

Cette courbe de dispersion est représentée dans le plan (ω^2, k^2) et (ω, k) conjointement avec les courbes de

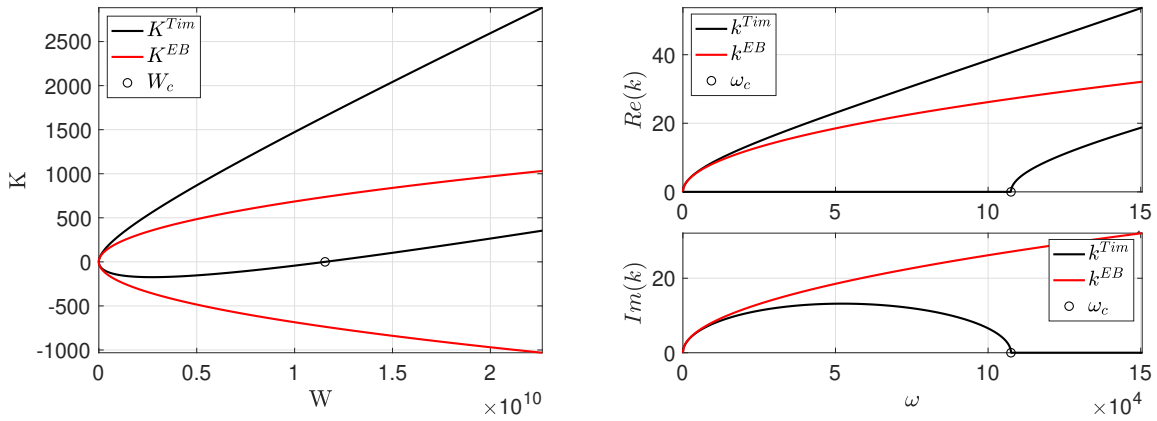


FIGURE 12.1 – Courbe de dispersion de la poutre en flexion. En noir le modèle de Timoshenko et rouge le modèle d'Euler-Bernoulli. Les grandeurs sont fournies pour une poutre en aluminium de section carré de $h = 0.1 \text{ m}$ de côté ($A = h^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$, $I = h^4/12 = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $E = 69 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $G = 26 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). A gauche la courbe est représentée dans le plan (W, K) , à droite dans le plan (ω, k) .

dispersion du modèle de Timoshenko (voir Fig.8.1). On observe que les deux modèles sont très différents. Ils fournissent des résultats similaires pour $\omega \ll \omega_c$ c'est à dire pour de faibles fréquences. Par contre si l'on raisonne en terme de longueur d'onde, on observe que même pour $k \ll 1$ les modèles se distinguent : le modèle d'Euler-Bernoulli ne fait apparaître qu'une fréquence de résonance (de flexion), tandis que celui de Timoshenko fait apparaître une résonance basse fréquence en flexion et une plus haute fréquence en cisaillement.

Fonctions propres Les racines k de cette équation de dispersion, à ω fixé, sont :

$$k, \quad -k, \quad ik, \quad -ik, \quad \text{en notant} \quad k = \left(\frac{\rho A}{EI}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega}$$

La fonction spatiale générale est donc obtenue par combinaison de ces fonctions harmoniques, avec la définition de k précédemment donnée :

$$Y(s) = c_1 e^{-iks} + c_2 e^{iks} + c_3 e^{-ks} + c_4 e^{ks}$$

En utilisant les formules d'Euler, il est vraiment plus agréable de noter cela sous la forme

$$Y(s) = c_1 \sin(ks) + c_2 \cos(ks) + c_3 \sinh(ks) + c_4 \cosh(ks)$$

et les variables dérivées peuvent être obtenues naturellement. En utilisant la séparation des variables $\theta(s, t) = H(s)T(t)$, $N(s, t) = N(s)T(t)$, et $M(s, t) = M(s)T(t)$ on a d'après (12.9), (12.8), (12.7) :

$$H(s) = k(c_1 \cos(ks) - c_2 \sin(ks) + c_3 \cosh(ks) + c_4 \sinh(ks)) \quad (12.15)$$

$$M(s) = k^2(-c_1 \sin(ks) - c_2 \cos(ks) + c_3 \sinh(ks) + c_4 \cosh(ks)) \quad (12.16)$$

$$N(s) = k^3(-c_1 \cos(ks) + c_2 \sin(ks) + c_3 \cosh(ks) + c_4 \sinh(ks)) \quad (12.17)$$

Modes propres Pour connaître les fréquences propres et les modes de résonance il faut introduire les conditions aux limites. Comme la forme générale des solutions introduit 4 inconnues c_i il est nécessaire d'introduire 4 conditions aux limites, 2 en $s = 0$ et 2 en $s = L$. Le raisonnement est tout à fait similaire à ce qui a été présenté en (8.5.2). Les conditions aux limites cinématiques (en u ou θ) ou en chargement (en N ou M) sont tout d'abord exprimées en considérant la séparation des variables ($H(s)$, $N(s)$ et $M(s)$ présentés au dessus). Les quatre conditions aux limites sont ensuite formulées en fonctions de c_i sous la forme

$$\mathbb{M} \cdot c = 0$$

où le vecteur est $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ et \mathbb{M} dépend de ω^2 est des propriétés de la poutres. Les racines ω_n de l'équation $\mathcal{F}(\omega) = 0$ avec $\mathcal{F}(\omega) = \det(\mathbb{M})$ fournissent les pulsations propres. Les modes propres sont obtenus en trouvant les c_i tel que c est le vecteur propre de \mathbb{M}_n associé à la valeur propre nulle.

Dans le modèle d'Euler-Bernoulli les conditions aux limites doivent être ajustées (entre autre à cause de l'hypothèse cinématique) ceci nécessite de revenir aux conditions de Sturm-Liouville (sec-8.4.2). De plus le produit scalaire doit lui même être ajusté, cela nécessite de revenir à l'approche énergétique que nous avons déjà mentionné pour le modèle de Timoshenko (sec-8.4.1).

12.2.4 Approche énergétique

Cette fois-ci on ne part pas de l'équation différentielle scalaire (12.6) (ce qui introduit des erreurs de raisonnement), mais bien des deux relations d'équilibre (12.1) et (12.2) :

$$\begin{aligned} N' + p &= \rho A \ddot{u} \\ M' + N &= 0 \end{aligned} \quad (12.18)$$

et on va multiplier chaque ligne par la variables \dot{u} et $\dot{\theta}$ réciproquement

$$\begin{aligned} N' \dot{u} + p \dot{u} &= \rho A \ddot{u} \dot{u} \\ M' \dot{\theta} + N \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (12.19)$$

En sommant directement, on fait apparaître l'énergie cinétique de la section **qui ne possède qu'un possède qu'un terme de translation** :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 \right) = N' \dot{u} + p \dot{u} + M' \dot{\theta} + N \dot{\theta}$$

Intégrons le long de la structure pour faire apparaître l'énergie globale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 ds = \int_0^L N' \dot{u} + M' \dot{\theta} + N \dot{\theta} ds + \int_0^L p \dot{u} ds$$

Effectuons l'intégration par partie suivante :

$$\int_0^L N' \dot{u} + M' \dot{\theta} \, ds = - \int_0^L N \dot{u}' + M \dot{\theta}' \, ds + [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L$$

On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 \, ds + \int_0^L \textcolor{red}{N}(\dot{u}' - \dot{\theta}) + M \dot{\theta}' \, ds = [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L + \int_0^L p \dot{u} + m \dot{\theta} \, ds$$

Mais $u' = \theta$ donc le terme rouge disparaît (dans le cas de Timoshenko on avait utilisé les lois de comportement en cisaillement). En utilisant la loi de comportement en flexion qui reste valable, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 + \frac{1}{2} EI \theta'^2 \, ds = [N \dot{u} + M \dot{\theta}]_0^L + \int_0^L p \dot{u} \, ds}$$

Comme pour Timoshenko, le terme de gauche est la variation temporelle de l'énergie présente dans la structure et celui de droite indique la puissance des efforts extérieurs. On retrouve

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} \rho A \dot{u}^2 && \text{L'énergie cinétique} \\ \mathcal{E}_d &= \frac{1}{2} EI \theta'^2 && \text{L'énergie de déformation} \end{aligned}$$

12.2.5 Orthogonalité des modes propres, condition de Sturm-Liouville

Supposons que nous disposons d'une base de mode propres. C'est à dire d'une liste de fonctions $\{Y_n(s)\}$ paramétrées par ω_n , soit $\{Y_n(s); \omega_n\}_n$. Chaque mode satisfait donc l'équation de vibration libre. Pour chaque mode, nous disposons de des variables dérivées que nous noterons donc H_n, M_n, N_n (toujours grâce à (12.9), (12.8), (12.7)). Contrairement au problème de Timoshenko, nous écrivons les équations d'équilibres en fonctions de Y_n et des variables dérivées.

$$\begin{aligned} N'_n &= -\rho A \omega_n^2 Y_n \\ M'_n + N_n &= 0 \end{aligned} \tag{12.20}$$

ainsi que des conditions aux limites (les mêmes quelque soit n).

Là encore, nous avons un problème vectoriel. Commençons par multiplier les deux équations par les fonctions respectives du mode m (avec $n \neq m$) :

$$\begin{aligned} N'_n Y_m &= -\rho A \omega_n^2 Y_n Y_m \\ M'_n H_m + N_n H_m &= 0 \end{aligned} \tag{12.21}$$

Sommons puis intégrons, pour obtenir :

$$\int_0^L N'_n Y_m + M'_n H_m + N_n H_m \, ds = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m \, ds$$

En effectuant les intégrations par parties usuelles sur les termes de gauche :

$$\int_0^L \textcolor{red}{-N_n Y'_m} - M_n H'_m + \textcolor{red}{N_n H_m} \, ds + [N_n Y_m + M_n H_m]_0^L = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m \, ds$$

Or $Y'_m = H_m$ et donc les deux termes rouges s'annulent, ainsi en utilisant $M_n = EI Y''_n$ (d'après (12.8)) :

$$- \int_0^L EI H'_n H'_m \, ds + [N_n Y_m + M_n H_m]_0^L = -\omega_n^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m \, ds$$

En faisant de même pour le mode m :

$$-\int_0^L EI H_n' H_m' ds + [N_m Y_n + M_m H_n]_0^L = -\omega_m^2 \int_0^L \rho A Y_n Y_m ds$$

La différence des deux expressions précédentes donne

$$-(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \rho A Y_n Y_m ds = [N_n Y_m + M_n H_m - N_m Y_n + M_m H_n]_0^L$$

On peut interpréter le terme

$$\langle Y_n, Y_m \rangle = \int_0^L \rho A Y_n Y_m ds$$

comme un **produit scalaire** pour les espaces de fonction $\{Y_n\}$ de dimension 1. On observe que le produit scalaire très différent du modèle de Timoshenko (qui avait un espace de fonction de dimension 2) et ressemble beaucoup plus au produit scalaire des cordes (norme \mathcal{L}^2 et espace de Hilbert $\mathcal{L}^2([0, L])$). Ce produit scalaire nous servira plus tard pour projeter correctement nos problèmes.

12.2.6 Conditions aux limites

Dans la section précédente, $\omega_n \neq \omega_m$ et les modes sont orthogonaux au sens de ce produit scalaire si la **condition de Sturm-Liouville** suivante est satisfaite :

$$[N_n Y_m + M_n H_m - N_m Y_n + M_m H_n]_0^L = 0$$

On dispose donc des mêmes famille de conditions aux limites permettant d'assurer l'orthogonalité des modes. Elles sont précisées ci-dessous avec les variables usuelles et avec la variable cinématique en dessous :

bord libre	bord collé	appuis simple	appuis glissant
$N = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$N = 0$
$M = 0$	$\theta = 0$	$M = 0$	$\theta = 0$
$u''' = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$u''' = 0$
$u'' = 0$	$u' = 0$	$u'' = 0$	$u' = 0$

On voit que la condition au limite *collée* est équivalente à la condition au *limite encastrée*.

Rappelons qu'il existe plein d'autres conditions aux limites qui permettent d'avoir des modes orthogonaux (ressort, masse ajoutée, ...).

L'avantage du modèle d'Euler-Bernoulli est que les expressions de \mathcal{F} sont beaucoup plus simples et l'on peut donc effectuer pleins de calculs analytiques.

12.2.7 Conditions initiales

La rotation étant imposée par la dérivée du déplacement, les conditions aux initiales se limitent à prescrire la déflexion et la vitesse de la fibre moyenne. On a donc **que 2 fonctions spatiales** qui décrivent les conditions initiales

$$u(s, 0) = u^0(s), \quad \dot{u}(s, 0) = v^0(s),$$

On considère ici que les conditions aux limites ont permis d'accéder à une base modale orthogonale $\{Y_n; \omega_n\}_n$. Par convention $n = 0$ correspondra au mode statique. On recherche des solutions du problème sous la forme

$$u(s, t) = \sum_n Y_n(s) T_n(t), \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} T_0(t) &= a_0 + b_0 t \\ T_n(t) &= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{si } n > 0 \end{aligned}$$

Les deux conditions initiales s'écrivent donc

$$\sum_n Y_n(s) a_n = u^0(s), \quad Y_0(s) b_0 + \sum_{n>0} Y_n(s) \omega_n b_n = v^0(s)$$

Effectuons la projection modale, on multiplie les deux équations par $\rho A Y_m(s)$ puis on intègre de 0 à L . Comme les modes sont orthogonaux, on abouti à :

$$a_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \int_0^L \rho A Y_m(s) u^0(s) ds$$

$$b_0 = \frac{1}{\|Y_0\|^2} \int_0^L \rho A Y_0(s) v^0(s) ds$$

$$b_m = \frac{1}{\|Y_m\|^2} \frac{1}{\omega_m} \int_0^L \rho A Y_m(s) v^0(s) ds, \quad m > 0$$
(12.22)

avec

$$\|Y_m\|^2 = \int_0^L \rho A Y_m^2 ds$$
(12.23)

12.3 Exemple pour une poutre en appuis simple

On reprend l'exemple traité en chap-9. Mais on traite le problème avec le modèle d'Euler-Bernoulli.

12.3.1 Modes sollicités

On a les conditions aux limites suivantes $u(0, t) = 0$, $M(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $M(L, t) = 0$ quelque soit t . Pouvant utiliser la séparation des variables (8.2), les conditions aux limites s'expriment en fonction de $Y(s)$ par

$$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0, \quad Y(L) = 0, \quad Y''(L) = 0$$

12.3.2 Modes statiques

Pour les modes statiques, on a donc :

$$Y(s) = \frac{1}{6} c_1 s^3 + \frac{1}{2} c_2 s^2 + c_3 s + c_4$$

On retrouve la même matrice \mathbb{M} que pour le modèle de Timoshenko et à nouveau $\mathcal{F} = -L^2$. Il n'y a toujours pas de mode statique pour ces conditions aux limites.

12.3.3 Modes dynamique

On a donc ici $\omega^2 > 0$ et

$$k = \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega}$$

Pour décrire les modes nous avons

$$Y(s) = c_1 \sin(ks) + c_2 \cos(ks) + c_3 \sinh(ks) + c_4 \cosh(ks)$$

$$Y''(s) = k^2 (-c_1 \sin(ks) - c_2 \cos(ks) + c_3 \sinh(ks) + c_4 \cosh(ks))$$

La matrice des conditions aux limites devient :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \sin(kL) & \cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix}$$

Et l'on obtient

$$\mathcal{F}(\omega^2) = -4 \sin(kL) \sinh(kL)$$

Soit $k_n = n\pi/L$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on en déduit la pulsation ω_n en revenant à la courbe de dispersion :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

Pour les modes propres on a encore de la chance car on voit tout de suite qu'ils correspondent à $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ et donc les modes propres sont (en imposant arbitrairement $c_1 = 1$) :

$$Y_n(s) = \sin(k_n s), \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Le carré de la norme du mode (8.25) est :

$$\|Y_n\|^2 = \rho A \frac{L}{2}$$

12.3.4 Conditions initiales

On reprend les mêmes conditions initiales que dans chap-9, mais cette fois-ci on ne retient que les conditions et translation (déplacement et vitesse) :

$$\dot{u}(s, 0) = \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell) \quad \text{on posera} \quad v^0(s) = \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell)$$

Amplitude modale Les amplitudes modales a_n et b_n sont déterminées par (12.22). On a directement $a_n = 0$ pour tous les modes et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\|Y_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} \int_0^L \rho A Y_n(s) v^0(s) ds \\ &= \frac{1}{\|Y_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} \int_0^L \rho A Y_n(s) \frac{F_0}{\rho A} \delta(s - \ell) ds \\ &= \frac{Y_n(\ell)}{\|Y_n\|^2} \frac{1}{\omega_n} F_0 \\ &= 2 \frac{\sin(k_n \ell)}{\rho A L} \frac{1}{\omega_n} F_0, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$b_n = 2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{F_0}{\rho A L} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n^2}$$

Solutions temporelles Les déplacements transverses sont donc

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_n b_n \sin(k_n s) \sin(\omega_n t) \\ &= 2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{F_0}{\rho A L} \sum_n \frac{\sin(k_n \ell) \sin(k_n s)}{k_n^2} \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

12.3.5 Comparaison avec le modèle de Timoshenko

Quand l'on compare deux modèles, on peut confronter différents résultats de ces modèles et les conclusions peuvent être différentes chaque fois. On se concentre ici sur quelques éléments de comparaison.

Comparaison des fréquences On va tout d'abord comparer les fréquences propres fournies par Euler-Bernoulli ω_n^{EB} et Timoshenko ω_n^T (on compare bien sûr les fréquences propres en flexion $\omega_n^T \equiv \omega_n^+$). Comme c'est plus simple, on se concentre sur les carrés de ces fréquences. Les nombres d'onde sont les mêmes pour les deux modèles $k_n = n\pi/L$. Pour Euler-Bernoulli nous avons

$$W_n^{EB} = \frac{EI}{\rho A} K_n^2$$

Pour Timoshenko, il faut faire référence à l'équation de dispersion (8.11) :

$$\left(\frac{EI}{\rho A}\right) K_n^2 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G}\right) W_n K_n + \left(\frac{\rho I}{GA}\right) W_n^2 - W_n = 0 \quad (12.24)$$

qui est un polynôme d'ordre deux en W_n pour K_n fixé. La fréquence associée au mode de flexion est la plus faible (regardez les courbes de dispersion (8.1)). Après réarrangement on obtient

$$W_n^T = \frac{1}{2} \frac{GA}{\rho I} \left(\frac{E+G}{G} \frac{IK_n}{A} + 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{E+G}{G} \frac{IK_n}{A}\right)^2 - 4 \frac{E}{G} \left(\frac{IK_n}{A}\right)^2} \right)$$

On a E/G qui est de l'ordre de l'unité, alors que I/A est de l'ordre de ϱ^2 enfin K_n est de l'ordre de $1/L^2$ ainsi $IK_n/A \ll 1$ nécessairement. Cela justifie un développement limité en IK_n/A autour de 0. A l'ordre 3 on obtient :

$$W_n^T = \frac{EI}{\rho A} K_n^2 \left(1 - \frac{E+G}{G} \frac{IK_n}{A}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{IK_n}{A}\right)^4\right)$$

Ce qui implique

$$\frac{W_n^T - W_n^{EB}}{W_n^{EB}} \simeq \frac{E+G}{G} \frac{IK_n}{A} \simeq \mathcal{O}\left(\nu \left(\frac{\varrho}{L}\right)^2 n^2\right)$$

On observe que l'erreur dépend d'un coefficient matériel $(E+G)/G \simeq 2\nu + 3$ (avec le coefficient de Poisson ν , car $2(\nu + 1) = E/G$) et d'un rapport de taille entre L (présent dans K) et ϱ soit du rapport d'élancement.

L'erreur relative entre les pulsations est fournie en Fig.12.2. On observe que pour une poutre moyennement élancée $L = 10h$, l'erreur sur le premier mode est de l'ordre de 2% ce qui est important (l'oreille humaine est sensible au Hz près, une erreur sur le $la 440$ de 2% correspond à un shift en fréquence de 9 Hz ; un shift d'un Hertz c'est une erreur de 0.2%...).

Comparaison des amplitudes modales Si l'on regarde les amplitudes modales, avec le modèle d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko (9.2) nous avons respectivement :

$$b_n^{EB} = 2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{F_0}{\rho AL} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n^2}, \quad b_n^T = \frac{\sin(k_n \ell)}{\rho \frac{L}{2} \left(A + I \left(k_n - \frac{\rho \omega_n^2}{G k_n}\right)^2\right)} \frac{1}{\omega_n} F_0$$

en première approximation, on peut considérer pour le mode de Timoshenko que $\frac{\rho \omega_n^2}{G k_n}$ est négligeable et que

$$\omega_n \simeq \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} k_n \left(1 - \frac{E+G}{2G} \frac{Ik_n^2}{A}\right)$$

pour obtenir après simplification :

$$b_n^T = 2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{F_0}{\rho AL} \frac{\sin(k_n \ell)}{k_n^2} \left(1 + \frac{E-G}{2G} \frac{Ik_n^2}{A}\right)$$

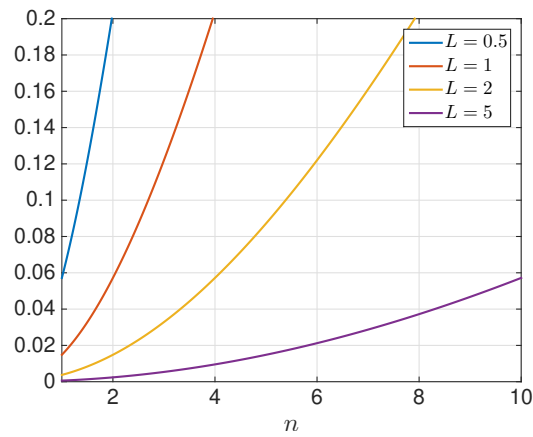


FIGURE 12.2 – Courbe d’erreur relative $\|(\omega_n^{EB} - \omega_n^T)/\omega_n^{EB}\|$ pour différents modes n et différentes longueurs de poutres L . Poutre en appuis simple en aluminium de section carrée de $h = 0.1\text{ m}$ de côté ($A = h^2 = 10^{-2}\text{ m}^2$, $I = h^4/12 = 8.3 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$, $E = 69 \cdot 10^9\text{ Pa}$, $G = 26 \cdot 10^9\text{ Pa}$, $\rho = 2700\text{ kg/m}^3$).

L’erreur relative sur l’amplitude modale est donc proportionnelle à :

$$\frac{E - G}{2G} \frac{Ik_n^2}{A}$$

Ici encore, on observe que le rapport d’élancement conditionnent l’erreur : pour des poutres très élancées pas de soucis en tout cas pour les premiers modes ; en effet, cette erreur relative est une fois de plus quadratique en n .

Chapitre 13

Formulation adimensionnelle

L'étude comparative entre le modèle d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko a fait apparaître des compositions de grandeurs physiques très utiles. De même l'analyse de sensibilité des paramètres que l'on peut aborder dans un problème de caractérisation d'une structure laisse entrevoir que les mesures sont finalement sensibles non-pas aux paramètres physiques mais plutôt à des combinaisons de ces paramètres. L'analyse adimensionnelle que nous introduisons ici permet de systématiser ces approches.

Dans la suite on note \underline{v} les variables physiques et v les variables sans dimension. Par **variables** on parle de \underline{u} , $\underline{\theta}$, \underline{N} et \underline{M} (à ne pas confondre avec les **paramètres** de la poutres) ainsi que le temps \underline{t} et l'espace \underline{s} . L'objectif est ici de formuler le problème classique (8.1)

$$\begin{aligned} GA \frac{\partial}{\partial \underline{s}} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{s}} - \underline{\theta} \right) + \underline{p} &= \rho A \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \underline{t}^2} & \underline{N} &= GA \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{s}} - \underline{\theta} \right) \\ EI \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial \underline{s}^2} + GA \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{s}} - \underline{\theta} \right) + \underline{m} &= \rho I \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial \underline{t}^2} & \underline{M} &= EI \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{s}} \end{aligned} \quad (13.1)$$

qu'avec des variables sans dimension.

13.1 Adimensionnalisation

Le modèle général fait appel à diverses grandeurs indépendantes (9 au total $E, G, \rho, A, I, s, t, u, \theta$) et variables dérivées que nous pouvons classer en fonction de leurs dimensions caractéristiques :

- **Sans dimension** θ , coefficient de Poisson ν ;
- **Spatiales** : $L, s, u [m], A [m^2], I [m^4], k [1/m]$;
- **Temporelles** : $t [s], \omega [rad/s]$;
- **Massiques** : $\rho [kg/m^3]$;
- **Matériaux** : $E, G [Pa \equiv kg\,m/s^2]$.

Mais globalement 3 dimensions sont présentes : le temps, l'espace et la masse.

13.1.1 Grandeurs adimensionnelles et grandeurs caractéristiques

Grandeurs caractéristiques Afin d'avoir des quantité sans dimensions, il nous faut tout d'abord introduire des grandeurs caractéristiques. On introduira le rayon de giration ϱ et la fréquence de coupure de Timoshenko ω_c

$$\varrho = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{GA}{\rho I}}$$

Par construction ϱ à la dimension d'une longueur et ω_c est l'inverse d'un temps. Le tableau suivant donne une liste des gradeurs pour différentes sections (pour la section rectangulaire b est perpendiculaire au plan

de flexion).

section	aire A	moment quadratique I	rayon de giration ϱ
circulaire de rayon R	πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{R}{2}$
carrée de coté h	h^2	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{\sqrt{12}}{h}$
rectangulaire de coté $h \times b$	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$

Grandeur adimensionnelle Comme on a deux paramètres matériaux on peut introduire

$$g = \frac{E}{G}$$

qui est sans dimension. On a $g \simeq 2(\nu + 1)$ et donc $2 \leq g \leq 3$.

13.1.2 Adimensionnalisation des variables

On se concentre d'abord sur le temps puis l'espace ; on peut introduire leur compagnon adimensionnel de la sorte :

$$\begin{array}{ll} \boxed{t = \omega_c \underline{t}} & \text{et donc} \quad \frac{\partial}{\partial \underline{t}} = \omega_c \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial^2}{\partial \underline{t}^2} = \omega_c^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \boxed{s = \frac{s}{\varrho}} & \text{et donc} \quad \frac{\partial}{\partial \underline{s}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial s} \quad \frac{\partial^2}{\partial \underline{s}^2} = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \end{array}$$

Ainsi pour la longueur totale, son compagnon adimensionnel est le rapport d'élancement, que l'on notera ℓ (rappelons que par construction ce nombre est plus grand que 1) :

$$\boxed{\ell = \frac{L}{\varrho}}$$

Pour le déplacement et la rotation nous avons

$$\underline{u} = \varrho u \quad \underline{\theta} = \theta \quad (13.2)$$

13.1.3 Equation adimensionnelle

Injectons toutes ces reformulations dans les système initial :

$$\begin{array}{ll} \frac{GA}{\varrho} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \theta \right) + \underline{p} = \rho A \varrho \omega_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \underline{N} = GA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \theta \right) \\ EI \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + GA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \theta \right) + \underline{m} = \rho I \omega_c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} & \underline{M} = EI \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{array} \quad (13.3)$$

En utilisant les expressions de ϱ et de ω_c on trouve après simplification :

$$\begin{array}{ll} (u' - \theta)' + \frac{\varrho}{GA} \underline{p} = \ddot{u} & \underline{N} = GA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \theta \right) \\ g \theta'' + (u' - \theta) + \frac{1}{GA} \underline{m} = \ddot{\theta} & \underline{M} = EI \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \theta}{\partial s} \end{array} \quad (13.4)$$

où l'on a introduit les conventions pour les dérivées par rapport aux grandeurs adimensionnelles :

$$\frac{\partial v}{\partial s} \equiv v' \quad \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \dot{v}$$

L'adimensionalisation des quantités de chargement intervient naturellement

$$N = \frac{1}{GA} \underline{N}, \quad M = \frac{1}{GA} \frac{1}{\varrho} \underline{M}, \quad p = \frac{1}{GA} \varrho \underline{p}, \quad m = \frac{1}{GA} \underline{m} \quad (13.5)$$

On obtient finalement

Forme adimensionnelle ($0 < s < \ell$)		
$N' + p = \ddot{u}$	$N = u' - \theta$	(13.6)
$M' + N + m = \ddot{\theta}$	$M = g \theta'$	(13.7)

Il est plus simple de manipuler cette expression, quitte à revenir aux grandeurs physiques grâce à (13.5), (13.2),

13.1.4 Conséquences

Mathématiquement et numériquement il est plus aisé de manipuler des variables dimensionnelles. Il est plus facile également de choisir des ordres de grandeurs. Par exemple le déplacement adimensionnel est petit devant 1 car à cause des hypothèse de petites perturbations $|\underline{u}| \ll \varrho$.

Pour l'analyse on observe que l'on passe de 6 paramètres de la poutre (L, ρ, A, I, G, E) à quatre $g, \ell, \varrho, \omega_c$. En d'autres termes il n'y a que 4 paramètres indépendants qui gouvernent la dynamique de la structure. Cette observation est importante pour des problèmes inverses (caractérisation, contrôle non-destructif, imagerie). On observe qu'une étude dynamique ne permet de déterminer que 4 paramètres indépendants. Si on souhaite disposer d'estimation quantitatives, il est donc nécessaire de disposer d'au moins 2 paramètres a priori.

Gradation des variables Les différentes variables $g, \ell, \varrho, \omega_c$ interviennent successivement dans l'étude : g est présent dès les équations différentielles, ℓ apparaît quand il faut écrire les conditions aux limites, ϱ, ω_c quand il faut convertir les fréquences dimensionnelles en fréquences physiques.

13.2 Mise en application

Afin de se familiariser avec tout cela, on peut reprendre le problème de flexion du chap-8. En réécrivant succinctement les différentes étapes, on peut mettre en valeurs les points clés de l'approche adimensionnelle.

La séparation des variables aboutie à

$$Y'' - H' = -\omega^2 Y \quad g H'' + Y' - H = -\omega^2 H \quad \ddot{T} = -\omega^2 T \quad (13.8)$$

où $-\omega^2$ est une variable adimensionnelle réelle pour l'instant inconnue. On a en particulier

$$H = Y' + \omega^2 \int Y \, ds$$

La courbe de dispersion est obtenue en cherchant des solutions de la forme :

$$Y(s) = U e^{iks} \quad H(s) = \Theta e^{iks}$$

où k est un nombre d'onde sans dimension. En injectant ces formes dans les équations en espace on obtient

$$(k^2 - \omega^2)(gk^2 - \omega^2) - \omega^2 = 0 \quad (13.9)$$

Cette courbe est donc paramétrée par uniquement g qui ne varie pas beaucoup (entre 2 et 3). En d'autres termes, d'un point de vue adimensionnel toutes les courbes de dispersion sont à peu près équivalentes (*strictement équivalentes* si le coefficient de Poisson est inchangé). On en représente quelques unes en Fig.13.1.

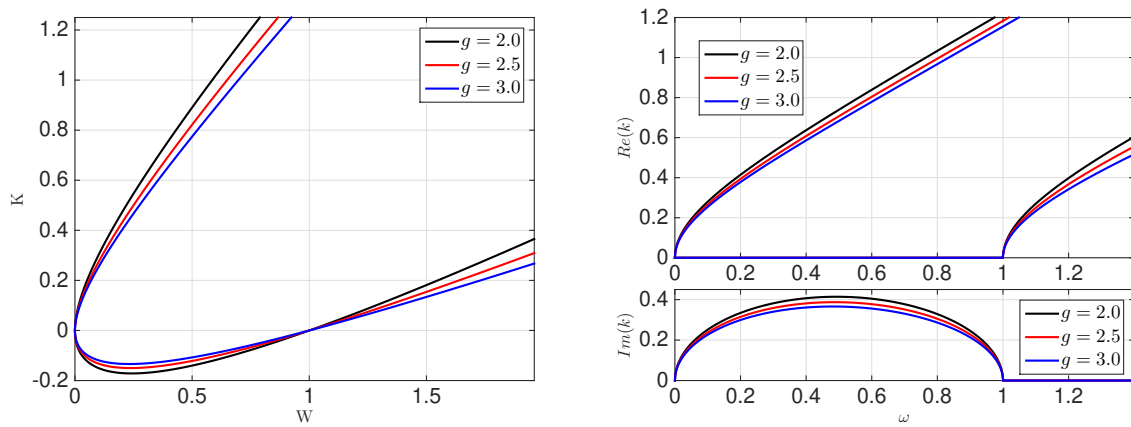


FIGURE 13.1 – Courbe de dispersion adimensionnelle de la poutre en flexion pour différents paramètres g . A gauche dans le plan (W, K) , à droite dans le plan (ω, k) . La fréquence de coupure adimensionnelle est 1.

Le domaine de validité L'hypothèse de section restant rigide implique que les longueurs d'ondes physiques $\underline{\lambda} = 2\pi/\underline{k}$ doivent être grandes devant l'épaisseur de la structure $\underline{\lambda} > h$. Pour une section circulaire de rayon R ou rectangulaire d'épaisseur h , cette contrainte impose $2\pi/\underline{k} > 2R$ et $2\pi/\underline{k} > h$ respectivement. Si l'on revient à des quantités sans dimension $k = \varrho \underline{k}$ on obtient en utilisant les expressions de ϱ de sec-13.1.1 : $k < \frac{\pi}{4} \simeq 1.6$ pour une section circulaire et $k < \frac{2\pi}{\sqrt{12}} \simeq 1.8$ pour une section rectangulaire. Ainsi le domaine représenté en Fig.13.2 semble physiquement justifiable pour n'importe quel type de structures.

Les conditions aux limites Elles interviennent en $s = 0$ et $s = \ell$. Si bien que la matrice \mathbb{M} (8.22), l'équation en fréquence \mathcal{F} (8.23) mais aussi l'amplitude des coefficients c_i de chaque modes, ne dépendent que de g et de ℓ . En particulier les racines ω_n de $\mathcal{F}(\omega^2) = 0$ sont des pulsations propres sans dimension qui ne dépendront que du paramètre matériel g et du rapport d'élancement ℓ .

Conditions initiales et forçages Si les conditions initiales ou les termes de forçages $p(s, t)$ et $m(s, t)$ sont prescrits de manière adimensionnelle on n'introduit pas de nouvelles quantités dans le problème.

Remise à l'échelle Quand on souhaite remettre à l'échelle physique les quantités obtenues on doit introduire ϱ (grandeurs spatiales), ω_c (grandeurs temporelles) et GA (pour les termes de forces et moments). Par exemple la pulsation physique est $\underline{\omega}_n = \omega_c \omega_n$ elle ne dépend donc que de trois grandeurs g , ℓ et ω_c . En

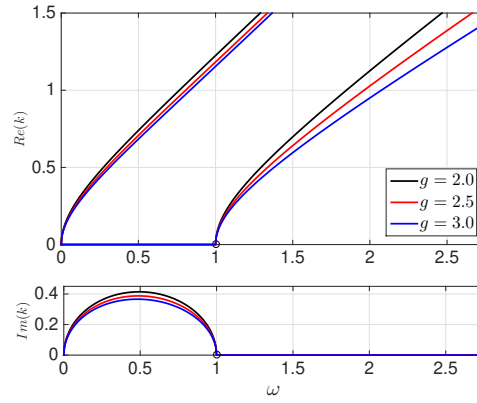


FIGURE 13.2 – Domaine spatio-temporel permettant de respecter *au mieux* le critère de section rigide. Dans ce domaine (ω, k) on est sûr que les longueurs d’ondes sont plus grandes que l’épaisseur de la structure.

raisonnant de la même manière, la longueur d’onde physique $\underline{\lambda} = \varrho \lambda = 2\pi\varrho/k$ ne dépendra que de trois grandeurs g , ℓ et ϱ . Cependant **toutes les variations relatives ne dépendront que des grandeurs g et ℓ** ; par exemple l’écart entre deux pulsations successives :

$$\frac{\underline{\omega}_{n+1} - \underline{\omega}_n}{\underline{\omega}_n} = \frac{\omega_c \omega_{n+1} - \omega_c \omega_n}{\omega_c \omega_n} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\omega_n}$$

Cette approche permet de découpler les paramètres du problème.

Chapitre 14

Couplage de structures

14.1 Exemple

On exploite ici une formulation adimensionnelle. On considère une structure de longueur totale ℓ . Elle est soumise à son propre poids $-p$ (avec p uniforme et constant et positif, ce qui explique le signe $-$). On note S l'abscisse curviligne de cette structure. En $S = 0$ elle est en appui simple, en $S = \ell$ elle est libre, cependant en $S = \ell_1$ (avec $0 < \ell_1 < \ell$) elle est également en appui simple. On doit donc satisfaire les conditions aux limites suivantes

$S = 0$ appui simple	$S = \ell_1$ appui simple	$S = \ell$ libre
$u(0, t) = 0$	$u(\ell_1, t) = 0$	$N(\ell, t) = 0$
$M(0, t) = 0$	$M(\ell_1, t) = 0$	$M(\ell, t) = 0$

Cette structure est donc décomposée en deux sous-éléments :

- Pour la portion de gauche $0 < S < \ell_1$ on étudiera un élément de longueur ℓ_1 , dont les déplacements et les rotations seront notées $u^1(s, t)$ et $\theta^1(s, t)$. L'abscisse curviligne de cette élément sera noté s avec $0 < s < \ell_1$.
- Pour la seconde portion $\ell_1 < S < \ell$, on étudiera un élément de longueur $\ell_2 = \ell - \ell_1$, dont les déplacements et les rotations seront notées $u^2(s, t)$ et $\theta^2(s, t)$. L'abscisse curviligne de cette élément sera également noté s avec $0 < s < \ell_2$.

Les abscisses curvilignes sont donc des **coordonnées locales**.

Ces deux éléments doivent donc être connectés en $S = \ell_1$. Cela peut se faire en notant que les déplacements doivent être nuls en $S = \ell$ mais aussi que la rotation et les moments doivent être continus en $S = \ell$. En formulant ces conditions pour les variables de chaque sous domaines :

$$\begin{aligned}u^1(\ell_1, t) &= 0 \\u^2(0, t) &= 0 \\\theta^1(\ell_1, t) &= \theta^2(0, t) \\M^1(\ell_1, t) &= M^2(0, t)\end{aligned}$$

De plus, les variables de gauches doivent satisfaire deux conditions aux limites en $s = 0$ et celles de droites deux conditions aux limites en $s = \ell_2$ ($S = \ell$). Nous avons vu que décrire la dynamique d'une poutre "classique" il fallait 4 conditions aux limites. Ici on dispose de deux éléments de poutres mais nous avons finalement 4 conditions aux limites plus 4 conditions de raccordement. A priori le problème mérite d'être posé !

14.2 Vibrations libres

Les équations de vibrations libres des deux portions sont

$$\begin{aligned} (u^{1'} - \theta^1)' &= \ddot{u}^1 & (u^{2'} - \theta^2)' &= \ddot{u}^2 \\ g\theta^{1''} + (u^{1'} - \theta^1) &= \ddot{\theta}^1 & g\theta^{2''} + (u^{2'} - \theta^2) &= \ddot{\theta}^2 \end{aligned}$$

La séparation des variables pour chaque portion

$$\begin{aligned} u^1(s, t) &= Y^1(s)T^1(t) & u^2(s, t) &= Y^2(s)T^2(t) \\ \theta^1(s, t) &= H^1(s)T^1(t) & \theta^2(s, t) &= H^2(s)T^2(t) \end{aligned}$$

Cependant cette méthode impose de fait la même pulsation car les variables u et θ sont synchrones de part et d'autre de $S = \ell_1$ du fait des conditions de raccordement. On va donc rechercher des solutions spatiales et temporelles solutions de

$$\begin{aligned} Y^{1''} - H^{1'} &= -\omega^2 Y^1 & Y^{2''} - H^{2'} &= -\omega^2 Y^2 \\ g H^{1''} + Y^{1'} - H^1 &= -\omega^2 H^1 & g H^{2''} + Y^{2'} - H^2 &= -\omega^2 H^2 \\ \ddot{T}^1 &= -\omega^2 T^1 & \ddot{T}^2 &= -\omega^2 T^2 \end{aligned}$$

On cherche donc des solutions harmoniques en espace :

$$\begin{aligned} Y^1(s) &= U^1 e^{ik_1 s} & Y^2(s) &= U^2 e^{ik_2 s} \\ H^1(s) &= \Theta^1 e^{ik_1 s} & H^2(s) &= \Theta^2 e^{ik_2 s} \end{aligned}$$

que l'on injectera dans le système précédent d'équation différentiel en espace. On aboutie donc à :

$$(k_1^2 - \omega^2)(gk_1^2 - \omega^2) - \omega^2 = 0 \quad (k_2^2 - \omega^2)(gk_2^2 - \omega^2) - \omega^2 = 0$$

On observe que, pour ω donné et commun au problème de droite et de gauche, les racines k_1 à gauche et k_2 à droite sont les mêmes. On n'a donc pas de raison de les distinguer, nous noterons ces racines k^+ , $-k^+$, k^- et $-k^-$ comme d'habitude. Pour ω^2 ce sont les racines du polynôme :

$$(k^2 - \omega^2)(gk^2 - \omega^2) - \omega^2 = 0$$

Par contre, il n'y a actuellement aucune raison pour dire que U^1 est semblable à U^2 (idem pour Θ^1 et Θ^2). On va donc se focaliser sur des solutions d'amplitudes distinctes sur les deux portions, mais qui partagent les mêmes pulsations et nombre d'onde. On a donc les formes générales :

$$\begin{aligned} Y^1(s) &= c_1 \sin(k^+ s) + c_2 \cos(k^+ s) + c_3 \sin(k^- s) + c_4 \cos(k^- s) \\ H^1(s) &= (k^+ - \frac{\omega^2}{k^+}) (c_1 \cos(k^+ s) - c_2 \sin(k^+ s)) + (k^- - \frac{\omega^2}{k^-}) (c_3 \cos(k^- s) - c_4 \sin(k^- s)) \\ Y^2(s) &= d_1 \sin(k^+ s) + d_2 \cos(k^+ s) + d_3 \sin(k^- s) + d_4 \cos(k^- s) \\ H^2(s) &= (k^+ - \frac{\omega^2}{k^+}) (d_1 \cos(k^+ s) - d_2 \sin(k^+ s)) + (k^- - \frac{\omega^2}{k^-}) (d_3 \cos(k^- s) - d_4 \sin(k^- s)) \end{aligned}$$

On est sous une forme adimensionnelle ce qui explique l'absence de certains paramètres (en comparaison à (8.14) par exemple). La formulation choisie est en fonction trigonométrique mais k^- est imaginaire pur si $\omega < 1$.

On a 8 constantes d'intégrations à déterminer. Elle vont être déterminées en exprimant les conditions aux limites et de raccordement :

$$\begin{aligned} u^1(0, t) &= 0 & \text{appui simple en } S = 0 \\ M^1(0, t) &= 0 & \text{appui simple en } S = 0 \\ u^1(\ell_1, t) &= 0 & \text{appui en } S = \ell_1 \\ \theta^1(\ell_1, t) &= \theta^2(0, t) & \text{continuité des rotations en } S = \ell_1 \\ M^1(\ell_1, t) &= M^2(0, t) & \text{continuité des moments en } S = \ell_1 \\ u^2(0, t) &= 0 & \text{appui en } S = \ell_1 \\ N^2(\ell_2, t) &= 0 & \text{libre en } S = \ell (= \ell_1 + \ell_2) \\ M^2(\ell_2, t) &= 0 & \text{libre en } S = \ell \end{aligned} \quad (14.1)$$

Ces relations étant valables pour tout temps, on les exprime en fonction des fonctions spatiales

$$\begin{aligned}
 Y^1(0) &= 0 && \text{appuis simple en } S = 0 \\
 H^{1'}(0) &= 0 && \text{appuis simple en } S = 0 \\
 Y^1(\ell_1) &= 0 && \text{appuis en } S = \ell_1 \\
 H^1(\ell_1) - H^2(0) &= 0 && \text{continuité des rotations en } S = \ell_1 \\
 H^{1'}(\ell_1) - H^{2'}(0) &= 0 && \text{continuité des moments en } S = \ell_1 \\
 Y^2(0) &= 0 && \text{appuis en } S = \ell_1 \\
 Y^{2'}(\ell_2) - H^2(\ell_2) &= 0 && \text{libre en } S = \ell \text{ } (= \ell_1 + \ell_2) \\
 H^{2'}(\ell_2) &= 0 && \text{libre en } S = \ell
 \end{aligned}$$

Ce problème s'écrit sous la forme algébrique suivante

$$\mathbb{M} \cdot c = 0 \quad \text{avec} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{M}^{11} & 0 \\ \mathbb{M}^{12} & \mathbb{M}^{21} \\ 0 & \mathbb{M}^{22} \end{pmatrix}$$

Les matrices M^{ii} sont des matrices 3×4 et les matrices \mathbb{M}^{ij} sont des matrices de couplages 2×4 , leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbb{M}^{11} \\ \mathbb{M}^{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 - (k^+)^2 & 0 & \omega^2 - (k^-)^2 \\ \sin(k^+ \ell_1) & \cos(k^+ \ell_1) & \sin(k^- \ell_1) & \cos(k^- \ell_1) \\ \frac{(k^+)^2 - \omega^2}{k^+} \cos(k^+ \ell_1) & \frac{\omega^2 - (k^+)^2}{k^+} \sin(k^+ \ell_1) & \frac{(k^-)^2 - \omega^2}{k^-} \cos(k^- \ell_1) & \frac{\omega^2 - (k^-)^2}{k^-} \sin(k^- \ell_1) \\ (\omega^2 - (k^+)^2) \sin(k^+ \ell_1) & (\omega^2 - (k^+)^2) \cos(k^+ \ell_1) & (\omega^2 - (k^-)^2) \sin(k^- \ell_1) & (\omega^2 - (k^-)^2) \cos(k^- \ell_1) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mathbb{M}^{21} \\ \mathbb{M}^{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 - (k^+)^2}{k^+} & 0 & \frac{\omega^2 - (k^-)^2}{k^-} & 0 \\ 0 & (k^+)^2 - \omega^2 & 0 & (k^-)^2 - \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{\omega^2}{k^+} \cos(k^+ \ell_2) & -\frac{\omega^2}{k^+} \sin(k^+ \ell_2) & \frac{\omega^2}{k^-} \cos(k^- \ell_2) & -\frac{\omega^2}{k^-} \sin(k^- \ell_2) \\ (\omega^2 - (k^+)^2) \sin(k^+ \ell_2) & (\omega^2 - (k^+)^2) \cos(k^+ \ell_2) & (\omega^2 - (k^-)^2) \sin(k^- \ell_2) & (\omega^2 - (k^-)^2) \cos(k^- \ell_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$