Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Master 1 Calcul Scientifique et Modélisation 2022-2023
Méthodes numériques

Contrôle continu n°2 du 27/10/22

NOM : PRÉNOM : diplôme :

Rédigez les réponses directement sur la feuille. Le sujet comporte 5 exercices.
Le résumé de cours et la calculatrice sont autorisés.

Exercice 1.

Pour $n = 0, 1, 2, 3$, déterminer le polynôme de degré $\leq n$ satisfaisant les $n+1$ premières conditions parmi les 4 conditions suivantes :

$$1^o : p(2) = 1\,, \qquad 2^o : p(1) = 0\,, \qquad 3^o : p(0) = -1\,, \qquad 4^o : p'(0) = 0\,.$$

1) $n = 0 : p_0(x) =$

2) $n = 1 : p_1(x) =$

3) $n = 2 : p_2(x) =$

4) $n = 3 : p_3(x) =$

Exercice 2.

Dans les exemples suivants, on considère le polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ interpolant la fonction f aux nœuds $x_0, \ldots, x_n$. Dans chaque cas, précisez si l'énoncé

Quand $n \to \infty$, $p_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$

est vrai ou faux et donnez des raisons pour votre choix.
Indication : Regarder l'erreur d'interpolation $f(x) - p_n(x)$.

1) $f(x) = e^x$; $x_j = j + 1$, $j = 0, \ldots, n$.

2) $f(x) = (x^6+6)^6$; $x_j = 6 + \frac{1}{j+1}$, $j = 0, \ldots, n$.

Exercice 3.

Soit $f(x) = e^x$ et $p_n \in \mathbb{R}_n[x]$ le polynôme interpolant f aux nœuds $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, alors pour tout $x > x_n$ on a $p_n(x) < f(x)$.

Exercice 4.

1) Pour les nœuds $(x_0, \ldots, x_3) = (-1, 0, 1, 2)$ et les valeurs $(y_0, \ldots, y_3) = (0, 1, 2, -3)$, calculer les différences divisées.

2) En utilisant la formule de Newton, déterminer le polynôme $p_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ interpolant les y_j aux points x_j.

Exercice 5. Pour approcher l'intégrale $I = \int_1^3 e^x\,dx$ on utilise la méthode du point milieu avec une subdivision régulière de pas $h = \frac{3-1}{n}$:

$$I \simeq M_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad \text{pour } f(x) = e^x.$$

1) Pour une arithmétique à 7 chiffres significatifs, calculer l'ordre de grandeur du n pour lequel le cumul des erreurs d'arrondis peut être du même ordre que la précision de la méthode (on suppose que l'on calcule chaque $x_{i+\frac{1}{2}}$ en une opération : $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \gamma$ avec $\gamma = \frac{h}{2}$).

2) En déduire l'ordre de grandeur de la meilleure précision que l'on peut obtenir avec cette méthode et cette arithmétique.

3) S'il vous reste du temps, répondre aux mêmes questions pour la méthode de Simpson.