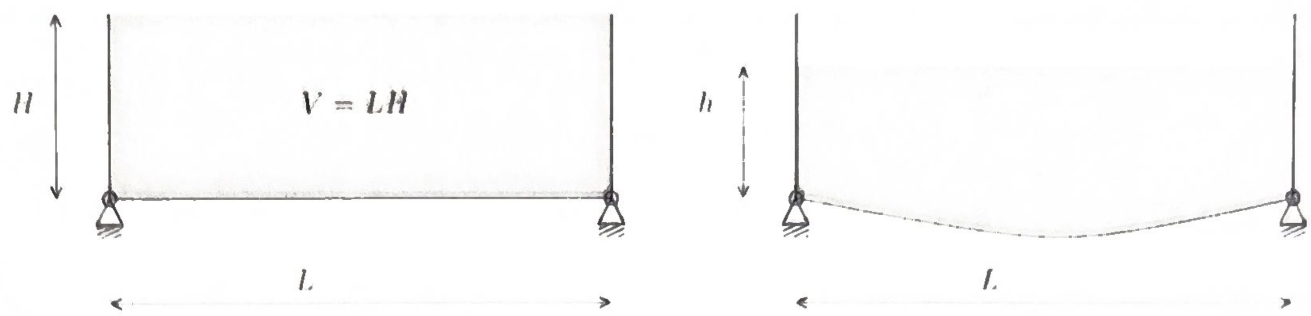
Dynamique des Structures - Contrôle Continu
22 octobre 2024

Durée : 1 heure

Explicitez vos calculs, justifiez vos raisonnements

1 Chargement statique par un fluide



La figure ci-dessus, illustre dans un cas 2D la déflection d'une structure tendue suite à un chargement par un fluide. A gauche, on observe la configuration initiale, à droite la configuration déformée à l'équilibre. Justifiez, de manière détaillée, que $u(S)$, la déformée (statique) de la structure, est solution de

$$N_0 u'' - \rho A g - \varrho_e g(h - u) = 0$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9.8 m/s^2$), ϱ_e est la densité de l'eau (en kg/m^2).
Comme

$$V = hL - \int_0^L u \,\mathrm{d}S$$

le déplacement est solution de

$$N_0 u'' - \rho A g - \varrho_e g \left(\frac{V}{L} + \frac{1}{L} \int_0^L u \,\mathrm{d}S - u \right) = 0$$

Déterminez la solution $u(S)$ pour ce problème statique.

2 Dimensionnement

Une corde en acier de $1 m$, et de $2 mm$ de diamètre à pour fréquence fondamentale $440\,Hz$ quand elle est fixée aux deux extrémités. Quelle est sa tension, sachant que pour ce métal $E = 910 \cdot 10^9\,Pa$ et $\rho = 7800 kg/m^3$.

3 Structure sur un appuis élastique

Si une corde est en interaction avec un support élastique, alors en chaque point de la corde, il existe une *réaction* qui s'occopose au déplacement. L'équation classique

$$N_0 u'' + b = \rho A \ddot{u}$$

reste valable, mais avec $b = -Ku$ ($K > 0$). On se propose donc d'étudier le problème associé à l'équation suivante

$$N_0 u'' - K u = \rho A \ddot{u}$$

3.1 Etude statique

Dans le cas statique, on suppose que l'on impose les conditions aux limites

$$u(0) = u(L) = \frac{L}{10}$$

Montrez que la solution déformée s'exprime naturellement à partir des fonctions cosh et sinh

3.2 Etude dynamique

On souhaite étudier le problème dynamique, pour des conditions aux limites :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \forall t$$

Etudiez la relation de dispersion. Puis déterminez les modes propres et montrez qu'ils sont orthogonaux. Enfin, déterminez la solution générale, pour des conditions initiales de la forme

$$u(S,t) = 0, \qquad \dot{u}(S,0) = V^0\delta(S - \frac{L}{3})$$

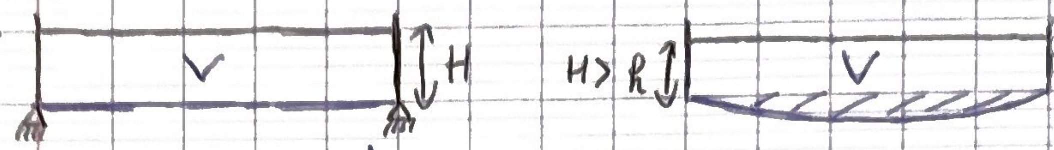
4 Aide

4.1 Fonction hyperboliques

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh' x = \sinh x \qquad \sinh' x = \cosh x$$

DYNS Éléments de correction CC 1 - Exo 1



$$V = hL - \int_0^L u \, dS$$

$$\begin{cases} V = hL - \int_0^L u \, dS & (4) \\ N_0 u'' - \rho g A - \rho_e g (h - u) = 0 & (1) \\ u(0) = 0 & (2) \\ u(L) = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) $u'' + k^2 u - B = 0$ où $k^2 = \dfrac{\rho_e g}{N_0}$ déterminé
(oscillateur)

$$B = \frac{\rho g A}{N_0} - \frac{\rho_e g h}{N_0}$$

Les solutions de (1) sont $u(S) = \dfrac{B}{k^2} + a\cos(kS) + b\sin(kS)$

Les CL imposent (2) $\dfrac{B}{k^2} + a = 0$

(3) $\dfrac{B}{k^2} + a\cos(kL) + b\sin(kL)$

$a = -\dfrac{B}{k^2}$, $b = -\dfrac{B}{k^2}\left(\dfrac{1-\cos(kL)}{\sin(kL)}\right)$, on a donc

$$u(S) = \frac{B}{k^2}\left(1 - \cos(kS) + \frac{\cos(kL) - 1}{\sin(kL)} \sin(kS)\right)$$

$$\int_0^L u(S)\, d(S) = \frac{B}{k^2}\left(L - \frac{\sin(kL)}{k} - \frac{\cos(kL)-1}{\sin(kL)} \, \frac{\cos(kL)-1}{k}\right)$$

(4) $\displaystyle\int_0^L u(S)\, dS = hL - V$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^2}\left(\frac{\rho g A}{N_0} - \frac{\rho_e g h}{N_0}\right)\left(L - \frac{\sin^2(kL) - (\cos(kL)-1)^2}{k\sin(kL)}\right) = hL - V$$

$\Rightarrow h$ déterminé

Résumé : corde soumise à son poids : polynôme
corde sous l'action d'un fluide : fct trigo

Dimensionnement

Compte tenu de l'énoncé :

$k_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1$ fondamentale, $k_n^2 = \frac{\rho A}{N_0}\omega_n^2$, $\omega_n = 2\pi f_n$

$$\rightarrow N_0 = \frac{\rho A}{k_1^2}\omega_1^2 = \frac{L^2 \rho A}{\pi^2}(2\pi f)^2 = L\rho A \times 4 f^2 = L\rho \times \pi r^2 \times 4 f^2$$

Modèle élastique (exercice 3)

Pb statique

$$N_0 u'' - Ku = 0$$

$$u'' - \frac{K}{N_0} u = 0 \text{ avec } \frac{K}{N_0} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u(s) = e^{\lambda s} \\ u''(s) = \lambda^2 e^{\lambda s} \end{array}\right\} \left(\lambda^2 - \frac{K}{N_0}\right) e^{\lambda s} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{K}{N_0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(s) = e^{iks} \\ u''(s) = -k^2 e^{iks} \end{array}\right\} \left(-k^2 - \frac{K}{N_0}\right) e^{iks} = 0 \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\frac{K}{N_0}}$$

$$u(s) = a e^{ks} + b e^{-ks} \quad \text{avec } k = \sqrt{\frac{K}{N_0}}$$

$u(0) = -\frac{L}{10}$, $u(L) = -\frac{L}{10}$ (normal, on a "tiré" sur la corde, pas dans l'énoncé pour éviter −)

$$\begin{cases} a + b = -\frac{L}{10} \\ ae^{kL} + be^{kL} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - \frac{L}{10} \\ a\left(e^{kL} - e^{-kL}\right) = -\frac{L}{10} + \frac{L}{10}e^{-kL} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \, 2\sinh(kL) = -\frac{L}{10} e^{-\frac{kL}{2}} \left(e^{\frac{kL}{2}} - e^{-\frac{kL}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{L}{10} e^{-\frac{kL}{2}} \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{\sin(kL)}$$

d'où $u(S) = a\,2\cosh(kS) - \frac{L}{10} e^{-kS}$

Pb dynamique $\frac{N_0}{\rho A} u'' - \frac{K}{\rho A} u = \ddot{u}$

Séparation des variables : $\begin{cases} \frac{N_0}{\rho A} Y'' - \frac{K}{\rho A} Y + \omega^2 Y = 0 \\ \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \end{cases}$

Eq en espace : $Y'' + \left(\frac{\rho A}{N_0}\omega^2 - \frac{K}{N_0}\right) Y = 0$. On cherche des solutions sous la forme $Y(S) = e^{ikS}$:

$\frac{\rho A}{N_0}\omega - \frac{K}{N_0} = k^2$ relation de dispersion

(CL) : $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ avec $Y(S) = ae^{ikS} + be^{-ikS}$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{ikL} + be^{-ikL} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a \\ 2a\sin(kL) = 0 \end{cases}$

donc $k_n = \frac{n\pi}{L}$ $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = \sqrt{\frac{N_0 k_n^2}{\rho A} + \frac{K}{\rho A}}$

$\int \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) = 0$ si $n \neq m$ → orthogonaux

$u(S,t) = \sum_n u_n(S,t)$ où $u_n(S,t) = Y_n(S)\,T_n(t)$

$u_n(S,t) = \sin(k_n S)\left(a_n \cos(\omega_n t) + \frac{b_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)$

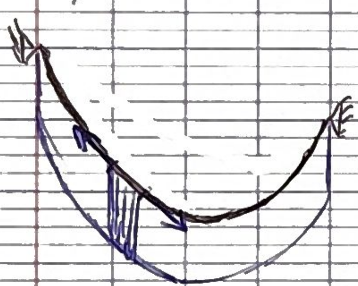
$$a_n = \frac{\langle u^0(s), Y_n(s)\rangle}{\langle Y_n, Y_n\rangle} = 0 \; ; \; b_n = \frac{\langle v^0(s), Y_n(s)\rangle}{\langle Y_n, Y_n\rangle}$$

fin cc

Devoir maison

photo tableau

Equation de la chaînette → déformation nulle en traction



dessin tableau

Voûte → déformation nulle en compression

On utilise une chaînette pour dimensionner la voûte

dessins tableau