Analyse et modélisation - Contrôle continu 2

durée 2H. Documents papier autorisés. Smartphone et ordinateurs non autorisés.

Exercice 1. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel de V de dimension p, et G un sous-espace vectoriel de V de dimension q.

1) On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$, $\mathrm{Im}(f) = G$. Montrer que $p + q = n$.

2) On suppose que $p + q = n$. Soit $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ une base de F, que l'on complète en $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ pour obtenir une base de V, et soit $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ une base de G, que l'on complète en $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q, \mathbf{v}_{q+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ pour obtenir une base de V. Enfin soit $f \in \mathcal{L}(V)$ définie par :

$$f(\mathbf{u}_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } \; i \leq p, \\ \mathbf{v}_{i-p}, & \text{si } \; i \in \{p+1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

2.i) Écrire la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

2.ii) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3) Déduire de ce qui précède qu'il existe $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$, $\mathrm{Im}(f) = G$ si et seulement $p + q = n$.

Exercice 2. Calculer

$$\int_\gamma f dl$$

dans les cas suivants :

a) γ est la ligne brisée constituée du segment de droite qui joint les points $A = (1, 0)$ et $B = (2, 1)$, puis le segment de droite qui joint B à $C = (0, 3)$, et

$$f(x, y) = x - y.$$

b) γ est l'arc de cercle de centre l'origine et qui joint les points $A = (1, 0)$ et $D = (-1, 0)$, et

$$f(x, y) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 3. Soit Γ l'ellipse définie par l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

et ω la 1-forme donnée par

$$\omega = ydx - xdy.$$

a) Est-ce que la forme ω est exacte ?

b) Déterminer des équations paramétriques de Γ, $x = x(t)$, $y = y(t)$, de manière à orienter Γ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

c) Calculer

$$\int_\Gamma \omega.$$

Exercice 4. On considère le sablier $\mathcal{S}$ paramétré par

$$\begin{cases} x = \cosh(v)\cos(u), \\ y = \cosh(v)\sin(u), \\ z = \sinh(v). \end{cases}$$

où $u \in [0, 2\pi]$ et $v \in]-1, 1[$.

1) Déterminer une fonction $F = F(x, y, z)$ telle que le sablier puisse être paramétré par l'équation

$$F(x, y, z) = 1.$$

2) Montrer que tous les points M du sablier $\mathcal{S}$ sont lisses.

3) Soit $M_0 \in \mathcal{S}$. Déterminer la normale sortante et le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point M_0.

4) Calculer l'aire du sablier, *i.e.*

$$A(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS.$$