CC de Dynamique des Structures

October 26, 2018

Le barème est indicatif, pas de documents, téléphones, calculatrices. Je suis à disposition pour toutes questions. Tous les calculs numériques se feront grossièrement afin de mettre en valeur des ordres de grandeurs (par exemple $\frac{9.81}{8} \sim 1$*).*

1 Problématique

On considère un pont qui sera assimilé à une simple corde tendue. Le pont fait 20 mètres de long. La corde, de 15 millimètres de diamètre, pèse 100 grammes par mètre. On suppose que la corde est parfaitement fixée à ses deux extrémités. Enfin cette structure est soumise à la gravité $g = 9.81\, m.s^{-2}$. La structure est donc légèrement courbée et a une flèche d'un mètre en son milieu. Sur cette corde court une personne (environ 36 km/h et 8 kg).
Quel est le mouvement de la corde ?

$$L = 20\, m, \quad \Delta L = 1\, m, \quad g = 9.81\, m \cdot s^{-2}, \quad m = 8\, kg, \quad \rho A = 0.1\, kg \cdot m^{-1}, \quad v = 10\, m \cdot s^{-1},$$

$$M = \rho A L, \quad V = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}}, \quad t_f = \frac{L}{v}$$

Par convention, les forces et déplacements négatifs sont orientés vers le bas. La structure est parfaitement à l'équilibre avant l'arrivée de la personne.

1. Montrez que le problème est gouverné par l'équation suivante.

$$N_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f - \rho A g = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \text{avec} \qquad f(x,t) = \begin{cases} -mg\, \delta(x - vt) & \text{si } \; 0 \le t \le t_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

   On précisera la signification des principales quantités.
   Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un élement $\mathrm{d}x$ de corde et projeté suivant l'axe vertical implique

$$N(x + \mathrm{d}x) - N(x) + b\, \mathrm{d}x = \rho A\, \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial N}{\partial x} + b = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

   - $N = N_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ est la composante verticale de la force de tension exercée sur un élément orienté suivant $\mathbf{e_x}$ (en *Newton*). Ici N_0 est l'intensité de la tension de la corde, elle est uniforme (ne pépend pas de x).
   - b est la composante verticale de la densité linéïque de force (en *Newton/m*)
   - $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ l'inertie verticale par unité de longueur (en kg/s^2)

   Le terme b possède deux composantes : un poids de la corde par unité de longueur $-\rho g A$ car la gravité est orientée vers le bas et $g > 0$ et un terme qui exprime le poids ponctuel de la personne $P(x_p, t)$. La personne a une vitesse v constante et est située en $x_p = 0$ quand $t = 0$, ainsi $x_p = vt$ si $t \le \frac{L}{v} := t_f$ dans ce cas $P(x_p, t) = -mg\delta(x - x_p) = -mg\delta(x - vt)$. Par contre pour $t \ge t_f$ on a $P(x_p, t) = 0$ car plus personne n'est sur le pont.
   Remarque mg est en *Newton* et $\delta(x)$ est en m^{-1} car

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

   où $\mathrm{d}x$ est en m et 1 n'a pas de dimension physique. Ainsi $-mg\delta(x - vt)$ est en *Newton/m*$\equiv kg/s^2$ comme tous les autres termes de l'équation.

2. Indiquez les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.
   La structure est attachée aux deux extrémités $x = 0$ et $x = L$ donc

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad \forall t$$

2 Etude statique

On considère le problème statique avant l'arrivée de la personne : $f \equiv 0$ dans cette section. On note $u_s(x)$ la solution statique de ce problème.

1. Montrez que
$$u_s(x) = \frac{\rho A g}{N_0}\frac{(x-L)x}{2}$$
On a $f \equiv 0$ et comme le problème est statique $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ l'équation que doit satisfaire $u_s(x)$ est donc
$$N_0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} - \rho A g = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{\rho A g}{N_0} \tag{2}$$
u_s est donc un polynôme du second degré en x de la forme
$$u_s = \frac{\rho A g}{N_0}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2}$$
où x_1 et x_2 sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites. On les a choisi de manière à ce qu'elles correspondent aux racines du polynôme ! Cela aide car ces racines sont précisées par les conditions aux limites $u_s(0) = 0$ et $u_s(L) = 0$ et donc $x_1 = 0$ et $x_2 = L$ on obtient donc
$$u_s(x) = \frac{\rho A g}{N_0}\frac{(x-L)x}{2}$$

2. En utilisant la flêche de la structure, déterminez l'expression de N_0 en fonction des autres grandeurs en jeu. Montrez que $N_0 \sim 45\ N$.
Au centre de la corde, la flêche est de $\Delta L = 1\ m$ (vers le bas), soit
$$u_s(\frac{L}{2}) = -\Delta L, \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{\rho A g}{N_0}\frac{L^2}{8} = -\Delta L, \qquad \Longrightarrow \qquad N_0 = \frac{1}{8}\rho A g \frac{L^2}{\Delta L}$$
Avec les applications numériques, on trouve $N_0 = 49.05\ N$

3 Vibrations libres

On considère le problème de vibrations libres : ainsi $f \equiv 0$ et $\rho A g \equiv 0$ dans cette section. On note $u(x,t)$ la solution de ce problème.

1. En imposant une séparation des variables $u(x,t) = Y(x)T(t)$, donnez la forme générale de l'équation temporelle et du mode spatial. Précisez l'équation de dispersion.
Compte tenu des hypothèses le problème qui nous préoccupe est
$$N_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
On effectue une séparation des variables $u(x,t) = Y(x)T(t)$ et l'on introduit les conventions de dérivation $\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f'$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \dot{f}$. Cela donne
$$N_0 Y'' T = \rho A Y \ddot{T}$$
Et en regroupant les termes spatiaux, d'une part et temporels d'autre part, on obtient une expression nécessairement constante et réelle :
$$\frac{N_0}{\rho A}\frac{Y''}{Y} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2$$
ici la constante réelle est $-\omega^2 \in \mathbb{R}$ (cela signifie que ω peut être à priori réelle ou imaginaire pure). L'équation aux dérivées partielles est donc décomposée en deux équations aux dérivées ordinaires, l'une en temps l'autre en espace.

- Regardons celle en temps :
$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$
dont les solutions sont générées par $\left\{e^{+\sqrt{-\omega^2}t}, e^{-\sqrt{-\omega^2}t}\right\}$, c'est à dire une combinaison linaire de ces deux éléments
$$T(t) = ae^{+\sqrt{-\omega^2}t} + be^{-\sqrt{-\omega^2}t}$$
où (a, b) sont des constantes. Comme on souhaite avoir des solutions bornées en temps, il est nécessaire d'avoir $-\omega^2 \leq 0$ soit $\sqrt{-\omega^2} = i\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc de la forme
$$T(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$
où (a, b) sont des constantes d'intégrations. En utilisant la formule d'Euler ($\exp(x) = \cos(x) + i\sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$), on obtient une dépendance trigonométrique de $T(t)$:
$$T(t) = a\sin(\omega t) + b\sin(\omega t)$$
où (a, b) sont des constantes d'intégrations (différentes de celles précédement mentionnées). Elles seront déterminées par les conditions initiales du problème.
- Regardons celle en espace :
$$Y'' + \frac{\rho A}{N_0}\omega^2 Y = 0 \tag{3}$$
Cette équation différentielle, linéaire, à cofficients constants, du second ordre et homogène, a des solutions de la forme $\exp ikx$ ou $k \in \mathbb{C}$ a priori. En injectant cette forme générale dans l'équation on obtient :
$$-k^2 Y + \frac{\rho A}{N_0}\omega^2 Y = 0$$
Ce qui donne après simplification par Y la relation de dispersion
$$k^2 = \frac{\rho A}{N_0}\omega^2$$
Cette équation (pôlynome caractéristique de l'équation différentielle) a deux racines réelles car $\omega \in \mathbb{R}$: k et $-k$ où
$$k = \sqrt{\frac{\rho A}{N_0}}\omega$$
Et muni de cette expression de k on a la forme générale des modes propres :
$$Y(x) = c\cos kx + d\sin kx \tag{4}$$
Là encore, la formule d'Euler a été utilisée a juste titre car $k \in \mathbb{R}$.
Les constantes d'intégrations c et d sont des réels qui seront déterminés par les conditions aux limites. Cependant comme l'équation en espace (Eq.3) est homogène, Y est défini à une constante multiplicative prés. Ainsi ce n'est pas, à proprement parler, les deux constantes qui seront précisées par les conditions aux limites mais plutôt une relation entre ces deux constantes.

2. Utilisez les conditions aux limites. En déduire la forme général des modes, des nombres d'ondes k_n et des pulsations ω_n.
La solution $u(x, t) = Y(x)T(t)$ doit satisfaire les conditions aux limites
$$\begin{array}{ccccc} u(0,t) = 0, & \Rightarrow & Y(0)T(t) = 0, \quad \forall t & \Rightarrow & Y(0) = 0 \\ u(L,t) = 0, & \Rightarrow & Y(L)T(t) = 0, \quad \forall t & \Rightarrow & Y(L) = 0 \end{array}$$
Compte tenu de Eq.4 on obtient réciproquement :
$$\begin{aligned} c &= 0 \\ -ck\sin(kL) + dk\cos(kL) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient $c = 0$ et $k \sin kL = 0$. Comme $k \neq 0$, on a au final un nombre infini et dénombrable de nombre d'onde solutions :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui induit une base modale (définie à une amplitude près : on fixe $d = 1$) :

$$Y_n(x) = \sin(k_n x)$$

Et, compte tenu de la relation de dispersion, un spectre discret

$$\omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} k_n$$

La solution générale de l'équation de vibration homogène est donc de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n(x) T_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(k_n x) \Big(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \Big)$$

où a_n et b_n sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales de $u(x,t)$.
Remarque *et après tout pourquoi ne pas prendre en compte la situation $k = 0$?* Bon, d'accord, si $k = 0$ alors forcément $\omega = 0$ d'après la relation de dispersion. Ainsi $T(t)$ est dans ce cas solution de l'équation en temps $\ddot{T} = 0$ soit $T(t) = a + bt$ où a, b sont des constantes d'intégration. $Y(x)$ est lui solution de l'équation en espace $Y'' = 0$, soit $Y(x) = c + dx$. Hélas, les conditions aux limites imposent $c = d = 0$. Cette solution un peu particulière est appellée mode rigide. Il est nul dans notre cas, mais il existe des problèmes où ce n'est pas vrai.

3. La quantité V est la vitesse des ondes dans les cordes. Evaluez cette grandeur.
On a d'après l'énoncé

$$V = \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} \qquad \Rightarrow \qquad k_n = \frac{\omega_n}{V}$$

On a numériquement $V = 22.14\ m/s$. Ainsi la personne se promenant sur la corde à $v = 10\ m/s = 36\ km/h$ est *subsonique* : $v < V$ la perturbation qu'il induit le précède. Dans le cas *supersonique*, *ie* $v > V$, la personne devance la perturbation (c'est ce qui arrive quand un canard nage à la surface de l'eau : il est supersonique vis-à-vis des ondes de surfaces).

4. Montrez que le mode fondamental est à une fréquence $f_1 = \omega_1/(2\pi)$ de l'ordre de $0.5\, Hz$.
On a donc, compte tenu de tout ce qui a été dit

$$f_1 = \frac{V}{2L} = 0.55\ Hz$$

soit environ deux oscillations par secondes.

5. Justifiez que les modes sont orthogonaux.
On a ici le produit scalaire dans $L^2([0, L])$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

Ainsi l'orthogonalité de deux modes $Y_n(x)$ et $Y_m(x)$ distincts ($n \neq m$) est vérifiée si $\langle Y_n, Y_m \rangle = 0$ soit

$$\int_0^L Y_m(x) Y_n(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

La méthode est fournie par la démonstration de Sturm-Liouville (qui s'étend à des équations différentielles plus complexes). Comme Y_n est solution de Eq.3 avec $\omega = \omega_n$ on a

$$Y_n'' + \frac{\rho A}{N_0} \omega_n^2 Y_n = 0 \tag{5}$$

Multiplions cette relation par $Y_m(x)$ puis intégrons sur le domaine (c'est la projection de la relation précédente sur Y_m) :

$$\int_0^L Y_m Y_n'' \,\mathrm{d}x + \frac{\rho A}{N_0}\omega_n^2 \int_0^L Y_m Y_n \,\mathrm{d}x = 0$$

Le premier terme se traite naturellement par intégration par partie :

$$\int_0^L Y_m Y_n'' \,\mathrm{d}x = -\int_0^L Y_m' Y_n' \,\mathrm{d}x + \Big[Y_m Y_n'\Big]_0^L$$

Et l'on a au final

$$\int_0^L Y_m' Y_n' \,\mathrm{d}x - \frac{\rho A}{N_0}\omega_n^2 \int_0^L Y_m Y_n \,\mathrm{d}x = \Big[Y_m Y_n'\Big]_0^L \tag{6}$$

On recommence en invertissant m et n... on obtient

$$\int_0^L Y_n' Y_m' \,\mathrm{d}x - \frac{\rho A}{N_0}\omega_m^2 \int_0^L Y_n Y_m \,\mathrm{d}x = \Big[Y_n Y_m'\Big]_0^L \tag{7}$$

En faisant la différence Eq.6−Eq.7 on a après simplification (les premiers termes de gauche sont les mêmes) :

$$\frac{\rho A}{N_0}(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^L Y_m Y_n \,\mathrm{d}x = \Big[Y_m Y_n' - Y_n Y_m'\Big]_0^L$$

or $\omega_n \neq \omega_m$ car $n \neq m$ ainsi l'orthogonalité est vérifiée si

$$\Big[Y_m Y_n' - Y_n Y_m'\Big]_0^L = 0$$

Dans notre cas $Y_n = Y_m = 0$ en $x = 0$ et $x = L$ donc cette condition est bien vérifiée.

4 Vibrations forcées

1. Montrez que l'on peut décomposer la solution $u_g(x,t)$ du problème général sous la forme $u_g(x,t) = u(x,t) + u_s(x)$ où $u(x,t)$ est solution de

$$N_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

On a donc u_g solution de Eq.1 :

$$N_0 \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} + f - \rho A g = \rho A \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}$$

En posant $u_g(x,t) = u(x,t) + u_s(x)$, on a

$$N_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + f - \rho A g = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Les termes violets s'annulant (problème statique Eq.2), on obtient donc la réponse souhaitée.

2. Précisez dans ce cas les conditions initiales et aux limites que doit satisfaire $u(x,t)$. Par la suite on se concentre uniquement sur ce terme de déplacement.
Les conditions aux limites sont imposées sur u_g en $x = 0$ et $x = L$. Soit

$$\begin{aligned} u_g(0,t) = 0, \quad &\Rightarrow \quad u(0,t) + u_s(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(0,t) = 0, \quad \forall t \\ u_g(L,t) = 0, \quad &\Rightarrow \quad u(L,t) + u_s(L) = 0, \quad \Rightarrow \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t \end{aligned}$$

car elles sont déjà satisfaites par $u_s(x)$.

3. Montrez que les coordonnées modales $q_n(t)$ (telles que $u(x,t) = \sum_n Y_n(x) q_n(t)$) sont solutions de

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -2g\frac{m}{M}\sin\left(\frac{v}{V}\omega_n t\right)$$

On cherche donc des solutions du problème Eq.8 sous la forme

$$u(x,t) = \sum_n Y_n(x) q_n(t)$$

la sommation se faisant implicitement sur $\mathbb{N}^*$ dans tout ce qui suit.
Ainsi, les nouvelles inconnues sont les coordonnées généralisées $q_n(t)$. En injectant cette expression générale dans Eq.8 on obtient :

$$N_0 \sum_n Y_n''(x) q_n(t) + f(x,t) = \rho A \sum_n Y_n(x) \ddot{q}_n(t)$$

En projetant cette expression sur le $m^{ième}$-mode $(Y_m(x), \omega_m)$ (la valeur de m étant arbitraire) on obtient

$$N_0 \sum_n q_n(t) \int_0^L Y_m(x) Y_n''(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L f(x,t) Y_m(x)\,\mathrm{d}x = \rho A \sum_n \ddot{q}_n(t) \int_0^L Y_n(x) Y_m(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme (Eq.5)

$$N_0 Y_n'' = -\rho A \omega_n^2 Y_n$$

on a

$$\sum_n \ddot{q}_n(t) \int_0^L Y_n(x) Y_m(x)\,\mathrm{d}x + \sum_n \omega_n^2 q_n(t) \int_0^L Y_m(x) Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\rho A} \int_0^L f(x,t) Y_m(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme les modes sont orthogonaux, on ne somme que des termes nuls sauf quand $n = m$ donc on a qu'un terme dans la somme ce qui donne après réarangement :

$$\ddot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) = \frac{1}{\rho A} \frac{\int_0^L f(x,t) Y_m(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \big(Y_m(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}$$

Nous savons que

$$\int_0^L \big(Y_m(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

De plus, d'après la définission de f

$$\int_0^L f(x,t) Y_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -mg\displaystyle\int_0^L \delta(x - vt) Y_m(x)\,\mathrm{d}x = -mg Y_m(vt) & \text{si } \ 0 \le t \le t_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Montrez que pour $t \le t_f$ on a

$$q_n(t) = 2g\frac{m}{M}\frac{1}{1 - (\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\Big(\frac{v}{V}\sin(\omega_n t) - \sin\left(\frac{v}{V}\omega_n t\right)\Big)$$

Tant que $t \le t_f$ on a $q_n(t)$ solution de l'équation différentielle non-homogène :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -2\frac{mg}{\rho A L} Y_n(vt) = -2\frac{m}{M} g Y_n(vt)$$

Soit, compte tenu de l'intégrale de Duhamel[1] :

$$q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t -2\frac{m}{M} g Y_n(v\tau) \sin\big(\omega_n (t - \tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

Vu que c'est un peu lourd concentrons nous sur chacun des termes.

[1]avec Édouard Balladur, *Grandeur, déclin et destin de la V^e République*, éd. de l'Observatoire, 2017.

- Tout d'abord le dernier terme et plus précisément

$$\begin{aligned}
\int_0^t Y_n(v\tau)\sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \sin\left(k_n v\tau\right)\sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\big(k_n v\tau-\omega_n(t-\tau)\big)-\cos\big(k_n v\tau+\omega_n(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos\big(\omega_n(\frac{v}{V}+1)\tau-\omega_n t\big)-\cos\big(\omega_n(\frac{v}{V}-1)\tau+\omega_n t\big)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big(\omega_n(\frac{v}{V}+1)\tau-\omega_n t\big)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)}-\frac{\sin\big(\omega_n(\frac{v}{V}-1)\tau+\omega_n t\big)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big(\frac{\sin\big(\omega_n\frac{v}{V}t\big)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)}-\frac{\sin\big(\omega_n\frac{v}{V}t\big)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\Big)-\Big(-\frac{\sin\left(\omega_n t\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)}-\frac{\sin\left(\omega_n t\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2\omega_n}\left(\sin\big(\omega_n\frac{v}{V}t\big)\Big(\frac{1}{\frac{v}{V}+1}-\frac{1}{\frac{v}{V}-1}\Big)+\sin\left(\omega_n t\right)\Big(\frac{1}{\frac{v}{V}+1}+\frac{1}{\frac{v}{V}-1}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2\omega_n}\frac{1}{(\frac{v}{V})^2-1}\Big(-2\sin\big(\omega_n\frac{v}{V}t\big)+2\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t\right)\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\Big(\sin\big(\frac{v}{V}\omega_n t\big)-\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t\right)\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{\omega_n}\int_0^t -2\frac{m}{M}gY_n(v\tau)\sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau = 2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\Big(\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t\right)-\sin\big(\frac{v}{V}\omega_n t\big)\Big)$$

- Ensuite le premier terme. Il faut remarquer qu'en $t=0$ le dernier terme de $q_n(t)$ (Eq.9) est nul. On a donc les conditions initiales en déplacement qui s'écrivent

$$u(x,0)=\sum_n Y_n(x)q_n(0)=\sum_n\Big(a_n\cos\left(\omega_n 0\right)+b_n\frac{1}{\omega_n}\sin\left(\omega_n 0\right)\Big)Y_n(x)$$

Soit $u_0(x)$ la donnée de cette condition initiale : $u(x,0)=u_0(x)$, on a au final :

$$\sum_n a_n Y_n(x)=u_0(x)$$

Cette identité peut être projeté sur un mode. Comme d'habitude, projetons sur le $m^{ième}$-mode $(Y_m(x),\omega_m)$ (la valeur de m étant arbitraire) on obtient

$$\sum_n a_n\int_0^L Y_n(x)Y_m(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^L u_0(x)Y_m(x)\,\mathrm{d}x$$

Et comme les modes sont orthogonaux et de norme

$$\|Y_n\|=\left(\int_0^L\big(Y_n(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{L}{2}}$$

on a finalement

$$a_m=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)Y_m(x)\,\mathrm{d}x$$

qui est parfaitement connu car on connait Y_m et la donnée initiale $u_0(x)$.

- Pour le terme du milieu il faut étudier les conditions initiales en vitesse. Soit $v_0(x)$ cette vitesse initiale (une donnée du problème)

$$v_0(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_n Y_n(x)\dot{q}_n(0)$$

or on vérifie rapidement que la dérivée temporelle du dernier terme de $q_n(t)$ (Eq.9) est nulle en $t = 0$. C'est également le cas de la dérivée temporelle de $\cos(\omega_n t)$. Ainsi la condition initiale en vitesse impose simplement

$$\sum_n b_n Y_n(x) = v_0(x)$$

On procède comme pour le déplacement initial, pour obtenir :

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x) Y_m(x)\,\mathrm{d}x$$

Regroupons tout ce beau monde

$$q_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x\cos(\omega_n t) + \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} + 2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\left(\frac{v}{V}\sin(\omega_n t) - \sin(\frac{v}{V}\omega_n t)\right)$$

Dans notre cas la corde est initialement au repos : $u_0(x) = 0$ (et donc $u_g(x,0) = u_s(x)$) et $v_0(x) = 0$, cela donne

$$q_n(t) = 2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\left(\frac{v}{V}\sin(\omega_n t) - \sin(\frac{v}{V}\omega_n t)\right) \tag{10}$$

Remarque On observe une oscillation temporelle à la fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ mais aussi une autre à la fréquence $\hat{f}_n = \frac{v}{V}\frac{\omega_n}{2\pi}$ pour chaque solution modale $u_n(x,t) = Y_n(x)q_n(t)$. Ce genre de phénomène entraine plein de subtilités mathématiques. Par exemple si $\frac{v}{V} \in \mathbb{Q}$ alors $\exists(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{v}{V} = \frac{p}{q}$ et donc il existe des pulsations identiques pour deux modes n et m, avec $n \neq m$ mais $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ en effet dans ce cas $\hat{f}_n = f_m$.

5. Montrez que pour $t \geq t_f$ on a

$$q_n(t) = 2g\frac{m}{M}\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\left(\frac{v}{V}\sin(\omega_n t) - \sin(\frac{v}{V}\omega_n t_f)\cos\left(\omega_n(t-t_f)\right) - \frac{v}{V}\cos(\frac{v}{V}\omega_n t_f)\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\right)$$

Il existe deux façons de procéder, pour traiter ce qui se passe en $t \geq t_f$

- Si on regarde l'intégrale de Duhamel (il s'agit d'une convolution du terme source avec la fonction de Green de l'équation différentielle), on observe que l'intégrande est nul quand $t \geq t_f$, donc l'intégrale ne doit être calculée que pour la borne supérieure $t = t_f$:

$$q_n(t) = a_n\cos(\omega_n t) + b_n\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\int_0^{t_f} -2\frac{m}{M}gY_n(v\tau)\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Par contre, attention ! on n'a pas à perturber le terme t situé dans l'intégrande ! On doit donc calculer

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_f} Y_n(v\tau)\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau &= \int_0^{t_f}\sin(k_n v\tau)\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}+1)\tau - \omega_n t\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)} - \frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}-1)\tau + \omega_n t\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\right]_{\tau=0}^{\tau=t_f} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f + t_f - t)\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)} - \frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f - t_f + t)\right)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\right)\dots\right. \\
&\quad \left.\dots - \left(-\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n(\frac{v}{V}+1)} - \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n(\frac{v}{V}-1)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\omega_n}\left(\frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f + t_f - t)\right)}{\frac{v}{V}+1} - \frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f - t_f + t)\right)}{\frac{v}{V}-1}\right)\dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{(\frac{v}{V})^2-1}\frac{v}{V}\sin(\omega_n t)
\end{aligned}$$

Pour le grand terme dans la parenthèse on observe que

$$\omega_n\frac{v}{V}t_f = k_n v\frac{L}{v} = n\pi$$

Or $\sin(\theta+n\pi)=(-1)^n\sin(\theta)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Ce terme entre parenthèse est donc

$$\frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f+t_f-t)\right)}{\frac{v}{V}+1}-\frac{\sin\left(\omega_n(\frac{v}{V}t_f-t_f+t)\right)}{\frac{v}{V}-1} \quad = \quad 2(-1)^n\frac{v}{V}\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)$$

Ainsi

$$\int_0^{t_f} Y_n(v\tau)\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n}\Big(\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t\right)-(-1)^n\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\Big)$$

et donc

$$q_n(t)=a_n\cos\left(\omega_n t\right)+b_n\frac{1}{\omega_n}\sin\left(\omega_n t\right)+2\frac{m}{M}g\frac{1}{\omega_n^2}\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\Big(\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t\right)-(-1)^n\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\Big)$$

C'est le résultat attendu car les conditions intiales imposent $a_n=0$ et $b_n=0$

$$q_n(t)=2\frac{m}{M}g\frac{1}{\omega_n^2}\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{v}{V}\Big(\sin\left(\omega_n t\right)-(-1)^n\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\Big)$$

- Une autre méthode consiste à considérer le problème de Cauchy défini pour $t>t_f$ avec des conditions initiales (en $t=t_f$) définie à partir de Eq.10. En effet comme après t_f il n'y a plus de terme source $q_n(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\ddot{q}+\omega_n^2 q_n=0,\qquad\text{pour } t>t_f$$

et donc

$$q_n(t)=q_n(t_f)\cos\left(\omega_n(t-t_f)\right)+\dot{q}_n(t_f)\frac{1}{\omega_n}\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)$$

A l'instant t_f on a

$$q_n(t_f)=2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\left(\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t_f\right)-\sin\left(\frac{v}{V}\omega_n t_f\right)\right)$$

Or $\sin\left(\frac{v}{V}\omega_n t_f\right)=\sin\left(n\pi\right)=0$. Soit

$$q_n(t_f)=2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\frac{v}{V}\sin\left(\omega_n t_f\right)$$

Calculons maintenant la dérivée temporelle à l'instant t_f : $\dot{q}(t_f)$ à partir de Eq.10

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=t_f}=2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{v}{V}\cos\left(\omega_n t_f\right)-\frac{v}{V}\cos\left(\frac{v}{V}\omega_n t_f\right)\right)=2\frac{m}{M}g\frac{\frac{v}{V}}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n}\left(\cos\left(\omega_n t_f\right)-\cos\left(\frac{v}{V}\omega_n t_f\right)\right)$$

or $\cos\left(\frac{v}{V}\omega_n t_f\right)=(-1)^n$ donc

$$\dot{q}(t_f)=2\frac{m}{M}g\frac{\frac{v}{V}}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n}\left(\cos\left(\omega_n t_f\right)-(-1)^n\right)$$

On obtient donc

$$q_n(t)=2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\frac{v}{V}\left(\sin\left(\omega_n t_f\right)\cos\left(\omega_n(t-t_f)\right)+\left(\cos\left(\omega_n t_f\right)-(-1)^n\right)\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\right)$$

Or

$$\sin\left(\omega_n t_f\right)\cos\left(\omega_n(t-t_f)\right)+\cos\left(\omega_n t_f\right)\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)=\sin(\omega_n t_f+\omega_n(t-t_f))=\sin(\omega_n t)$$

Et donc

$$q_n(t)=2\frac{m}{M}g\frac{1}{1-(\frac{v}{V})^2}\frac{1}{\omega_n^2}\frac{v}{V}\left(\sin\left(\omega_n t\right)-(-1)^n\sin\left(\omega_n(t-t_f)\right)\right)$$

5 Aide

- Soit $f(x)$ la solution du problème (de Cauchy)

$$f'' + k^2 f = h(x) \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & a \\ f'(0) & = & b \end{array} \right.$$

où $h(x)$ est une fonction connue. Alors

$$f(x) = a\cos(kx) + \frac{b}{k}\sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^x h(y)\sin\big(k(x-y)\big)\,\mathrm{d}y$$

- Trigonométrie

$$\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

$$\sin(a-b) - \sin(a+b) = -2\cos(a)\sin(b), \qquad \sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\cos(b)\sin(a)$$