Université de Rennes **M1 CSM - M1 SNS - M1 MF, 2025-2026**
Département de Mathématiques **Optimisation et Recherche Opérationnelle**

TRAVAUX PRATIQUES

1. Minimisation à une variable

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que f est unimodale sur cet intervalle si elle admet un minimum en un point $x^* \in [a, b]$ vérifiant que f est strictement décroissante sur $[a, x^*[$ et strictement croissante sur $]x^*, b]$.

C'est par exemple le cas lorsque f est strictement convexe sur $[a, b]$, mais ici f n'a besoin ni d'être convexe, ni d'être dérivable, ni même d'être continue.

Fonctions test
Écrire une fonction Matlab `function f = fonc(num,x)` qui calcule :

- si `num = 1`, $f(x) = (x-1)^2$,
- si `num = 2`, $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2, & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - x/2, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0.5 + (x-2)^2, & \text{si } x > 2, \end{cases}$
- si `num = 3`, $f(x) = |x-1|(1.1 - \sin 6x)$,
- si `num = 4`, $f(x) = x^2$,
- si `num = 5`, $f(x) = (x-3)^2$.

Visualiser le graphe de chacune de ces fonctions pour $x \in [0, 3]$. La fonction Matlab sera écrite de sorte que, si `x` est un vecteur, le résultat `f` soit aussi un vecteur.

Méthode de dichotomie
Le but est la recherche de $x^* = \operatorname{argmin}(f)$ qui réalise le minimum de f sur $[a, b]$ (en supposant f unimodale).

Démarrage. On calcule $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et on prend $\alpha = a, \beta = b$.

Étape k. On suppose que $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et $f(\gamma)$ sont connus, et que f atteint son minimum sur $[\alpha, \beta]$.
On calcule $f\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$, puis

- si $f\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right) < f(\gamma)$, on prend $\alpha = \alpha,\ \beta = \gamma$,
- sinon si $f\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) < f(\gamma)$, on prend $\alpha = \gamma,\ \beta = \beta$,
- sinon on prend $\alpha = \dfrac{\alpha+\gamma}{2},\ \beta = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

On recommence l'étape k jusqu'à ce que $|\beta - \alpha| \leq 2\varepsilon$. On considère alors que le minimum de f est atteint pour $x^* = \operatorname{argmin}\big(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)\big)$ avec une erreur sur $x^* \leq \varepsilon$.

a) Justifier cet algorithme (lorsque f est unimodale).

b) Écrire une fonction Matlab

```
function [xs,neval]=dichoto(fonction,num,a,b,tol)
```

qui met en œuvre la méthode décrite précédemment pour une `fonction` donnée sur l'intervalle $[a, b]$ avec la tolérance `tol` $= \varepsilon$. La fonction renvoie `xs` $= x^*$ et le nombre `neval` d'évaluations de la fonction nécessaires pour obtenir ce résultat.

Nota : Dans le cas de l'utilisation de Matlab, dans l'appel de la fonction `dichoto`, `fonction` sera remplacé par un pointeur de fonction qui fait référence au nom du fichier contenant la fonction test. Si ce fichier s'appelle `fonc.m`, et que la fonction contenue s'appelle donc `fonc`, l'appel sera alors

```
[xs,neval]=dichoto(@fonc,num,a,b,tol);
```

et dans la fonction `dichoto`, le calcul de $y = f(x)$ pour la fonction test numéro `num` et où x peut désigner un vecteur, s'effectuera par l'instruction `y=fonction(num,x);` .

c) Tester votre programme sur chacune des fonctions données, sur l'intervalle $[0,3]$. Représenter le nombre d'évaluations de la fonction f nécessaires en fonction du logarithme de la tolérance. On prendra $\varepsilon = 10^{-k}$ pour $k = [5 : 0.5 : 10]$. Commenter.

Méthode de la section dorée

Le but est le même que dans la méthode de dichotomie. On se donne $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[, \ \delta = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}$.

Démarrage. On calcule $\alpha = a + \gamma(b-a), \ \beta = a + (1-\gamma)(b-a), \ f_1 = f(\alpha), \ f_2 = f(\beta)$.

Étape k.
- Si $f_1 \leq f_2$, on prend $a = a, \ b = \beta, \ \beta = \alpha, \ \alpha = a + \delta(\beta - a), \ f_2 = f_1, f_1 = f(\alpha)$,
- sinon on prend $a = \alpha, \ b = b, \ \alpha = \beta, \ \beta = b + \delta(\alpha - b), \ f_1 = f_2, \ f_2 = f(\beta)$.

On arrête dès que $\max(|\beta - a|, |b - \alpha|) \leq \varepsilon$.

Vous verrez en TD qu'il existe une valeur γ^* de γ telle que l'ensemble des $\{a, \alpha, \beta, b\}$ reste homothétique au cours des étapes. $\gamma^* = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et alors $\dfrac{1}{1-\gamma^*} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, le nombre d'or.

a) Écrire une fonction Matlab

```
function [xs,neval]=secdor(fonction,num,a,b,tol,gamma)
```

qui met en œuvre la méthode de la section dorée.

b) Comparer pour $a = 0$, $b = 3$, $\varepsilon = 10^{-5}$, le nombre d'évaluations de f nécessaires pour chacune des fonctions test :

- en utilisant `secdor` avec $\gamma = 0.25$,
- en utilisant `secdor` avec $\gamma = \gamma^*$,
- en utilisant la méthode de dichotomie.

Conclusion ?

Travail à rendre

Il est demandé de rendre un rapport à l'enseignant, au format pdf via l'espace Moodle dédié à ce module. Ce rapport doit répondre aux questions du TP. Hors annexes, il n'excèdera pas 2 pages et ne contiendra ni graphe ni script Matlab. Il y sera joint, au plus, les annexes suivantes :

- le graphe des fonctions test pour `num = 2` et `3`,
- le script Matlab de la fonction `secdor`,
- pour deux fonctions test différentes de votre choix, la courbe représentant le nombre d'évaluations de la fonction f nécessaires en fonction du logarithme de la tolérance dans le cadre de la méthode de dichotomie, question c).