

## Analyse et modélisation - Contrôle continu 2

durée 2H. Documents papier autorisés. Smartphone et ordinateurs non autorisés.

**Exercice 1.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $p$ , et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $q$ .

- 1) On suppose qu'il existe  $f \in \mathcal{L}(V)$  tel que  $\text{Ker}(f) = F$ ,  $\text{Im}(f) = G$ . Montrer que  $p + q = n$ .
- 2) On suppose que  $p + q = n$ . Soit  $\{u_1, \dots, u_p\}$  une base de  $F$ , que l'on complète en  $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$  pour obtenir une base de  $V$ , et soit  $\{v_1, \dots, v_q\}$  une base de  $G$ , que l'on complète en  $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_q, v_{q+1}, \dots, v_n\}$  pour obtenir une base de  $V$ . Enfin soit  $f \in \mathcal{L}(V)$  définie par :

$$f(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \leq p, \\ v_{i-p}, & \text{si } i \in \{p+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

- 2.i) Écrire la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .
- 2.ii) Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
- 3) Dédire de ce qui précède qu'il existe  $f \in \mathcal{L}(V)$  tel que  $\text{Ker}(f) = F$ ,  $\text{Im}(f) = G$  si et seulement  $p + q = n$ .

**Exercice 2.** Calculer

$$\int_{\gamma} f dl$$

dans les cas suivants :

- a)  $\gamma$  est la ligne brisée constituée du segment de droite qui joint les points  $A = (1, 0)$  et  $B = (2, 1)$ , puis le segment de droite qui joint  $B$  à  $C = (0, 3)$ , et

$$f(x, y) = x - y,$$

- b)  $\gamma$  est l'arc de cercle de centre l'origine et qui joint les points  $A = (1, 0)$  et  $D = (-1, 0)$ , et

$$f(x, y) = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

**Exercice 3.** Soit  $\Gamma$  l'ellipse définie par l'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

et  $\omega$  la 1-forme donnée par

$$\omega = ydx - xdy.$$

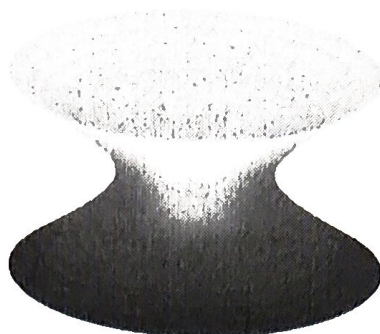
- a) Est-ce que la forme  $\omega$  est exacte ?
- b) Déterminer des équations paramétriques de  $\Gamma$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , de manière à orienter  $\Gamma$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- c) Calculer

$$\int_{\Gamma} \omega.$$

**Exercice 4.** On considère le sablier  $S$  paramétré par

$$\begin{cases} x = \cosh(v) \cos(u), \\ y = \cosh(v) \sin(u), \\ z = \sinh(v). \end{cases}$$

où  $u \in [0, 2\pi]$  et  $v \in ]-1, 1[$ .



1) Déterminer une fonction  $F = F(x, y, z)$  telle que le sablier puisse être paramétré par l'équation

$$F(x, y, z) = 1.$$

2) Montrer que tous les points  $M$  du sablier  $S$  sont lisses.

3) Soit  $M_0 \in S$ . Déterminer la normale sortante et le plan tangent à  $S$  au point  $M_0$ .

4) Calculer l'aire du sablier, *i.e.*

$$A(S) = \iint_S dS.$$