Université de Rennes 1
U.F.R. Mathématiques
Master 1 MF / CSM

2020 - 2021
28 septembre 2020
OPRO

Contrôle de connaissances

Durée : 1 heure – Calculatrice autorisée
Fiches de cours autorisées (fiches distribuées + max 4 pages manuscrites)

Exercice 1.

Soit K un sous-ensemble convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert H. Soient $P_K u$ et $P_K v$ les projections respectives de u et v sur K. Montrer alors que $\|P_K u - P_K v\| \leq \|u - v\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme induite par le produit scalaire de H.

Exercice 2.

Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver le ou les extrema relatifs de la fonction $J(x_1, x_2) = x_1 + (x_2 - 1)^2$ sur l'axe $x_1 = 0$.

Exercice 3.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 3x^6 - 4x^3 y + y^2$.

1. Montrer que le point $(0, 0)$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet un minimum local strict en ce point.
3. En considérant la restriction de f à la courbe d'équation $y = 2x^3$, montrer que f n'admet pourtant pas de minimum relatif en $(0, 0)$.
4. Conclure.

Exercice 4.

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - c x_1 x_2 + 2x_1 - 2x_2$.

1. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles cette fonction admet un minimum en un point unique de $\mathbb{R}^2$.
2. Lorsqu'il existe et est unique, on note x_c le point qui réalise ce minimum. Calculer x_c et $f(x_c)$ en fonction de c.
3. On pose maintenant $c = 1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. Écrire f sous la forme d'une fonctionnelle quadratique : $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, puis appliquer une itération de l'algorithme du gradient à pas optimal à f en partant de $u^{(0)} = (0, 1)$.