Etude comparative Euler-Bernoulli / Timoshenko

December 17, 2024
Loïc Le Marrec, Université de Rennes 1.

1 Introduction

On rappelle ici quelques équations fondamentales de la poutre.

- **Modèle de flexion de Timoshenko**
  Les relations d'équilibres

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} + f &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} && (1)\\
\frac{\partial M}{\partial x} + N &= \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} && (2)
\end{aligned}
$$

  Les lois de comportement associées

$$
\begin{aligned}
N &= GA\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \theta\right) && (3)\\
M &= EI\frac{\partial \theta}{\partial x} && (4)
\end{aligned}
$$

- **Modèle de flexion d'Euler-Bernoulli**
  Les relations d'équilibres

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} + f &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} && (5)\\
\frac{\partial M}{\partial x} + N &= 0 && (6)
\end{aligned}
$$

  La loi de comportement du moment

$$
M = EI\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (7)
$$

  La condition cinématique

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \theta \qquad (8)
$$

1. Expliquez les différences majeures entre les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko ;
2. Donnez la signification de G, E ;
3. Donnez la signification de N, f et M.

On considère une poutre attachée en ses deux extrémités soumise à aucun efforts extérieurs sur $]0, L[$

2 Modèle d'Euler-Bernoulli

1. Montrez que θ, N et M s'expriment en fonction de u et de ses dérivées spatiales (ne pas utiliser Eq.5)
2. A partir de Eq.5 montrez que $u(x,t)$ satisfait une équation différentielle dépendant du temps et de l'espace.
3. Effectuez la séparation des variables $u(x,t) = Y(x)T(t)$. En déduire les équations différentielles ordinaires que doit satisfaire $Y(x)$ et $T(t)$. On introduira une constante $-\omega^2$ dont on précisera la signification.
4. Montrez que les solutions $Y(x)$ sont harmoniques de la forme $Y(x) = e^{ikx}$ où k doit satisfaire la relation de dispersion
$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho A}k^4 \qquad (9)$$
5. Montrez que pour ω fixé, la forme générale de $Y(x)$ est
$$Y(x) = A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx) + A_3 \sinh(kx) + A_4 \cosh(kx)$$
6. On suppose que les conditions aux limites sont
$$u(0,t) = 0, \qquad M(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad M(L,t) = 0, \qquad \forall t$$
Montrez que cela impose des modes propres de la forme
$$Y_n(x) = \sin(k_n x)$$
où k_n s'exprime simplement en fonction de L.
7. En déduire l'expression de ω_n pour chaque mode.

3 Modèle de Timoshenko

1. Effectuez la séparation des variables $u(z,t) = Y(z)T(t)$, $\theta(z,t) = H(z)T(t)$ (même dépdendance temporelle $T(t)$). En déduire les équations différentielles ordinaires que doit satisfaire $Y(x)$ et $T(t)$. On introduira une constante $-\omega^2$ dont on précisera la signification.

2. Montrez que si on cherche des solutions de la forme $Y(z) = a\,e^{ikz}$ $H(z) = b\,e^{ikz}$ alors il faut nécessairement imposer une relation de dispersion entre k et ω :

$$EGIk^4 - (AG + (E+G)Ik^2)\rho\omega^2 + I\rho^2\omega^4 = 0 \qquad (10)$$

3. Analysez brièvement cette relation en précisant en particulier les solutions disponibles pour ω fixé (une courbe est la bienvenue pour appuyer le propos).

4. Montrez que si on cherche des solutions de la forme $Y(z) = e^{ikz}$ alors $H(z) = \Xi(k)e^{ikz}$ avec

$$\Xi(k) = \frac{1}{ik}\left(\frac{\rho}{G}\omega^2 - k^2\right)$$

A une fréquence ω fixée, on associe les racines de la relation de dispersion k_1 et ik_2 (k_1 et k_2 sont supposés réels) si bien que les modes spatiaux sont

$$\begin{aligned} Y(z) &= A_1\cos(k_1z) + A_2\sin(k_1z) + A_3\cosh(k_2z) + A_4\sinh(k_2z)\,, \\ H(z) &= \Xi_1A_1\sin(k_1z) - \Xi_1A_2\cos(k_1z) + \Xi_2A_3\sinh(k_2z) + \Xi_2A_4\cosh(k_2z)\,. \end{aligned}$$

où les A_i sont des constantes arbitraires pour l'instant et

$$\Xi_1 = \frac{1}{k_1}\left(\frac{\rho}{G}\omega^2 - k_1^2\right), \qquad \Xi_2 = \frac{1}{k_2}\left(\frac{\rho}{G}\omega^2 + k_2^2\right)$$

5. On suppose que les conditions aux limites sont

$$u(0,t) = 0, \qquad M(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad M(L,t) = 0, \qquad \forall t$$

Montrez que ces conditions aux limites sont satisfaites si on impose des modes propres de la forme

$$U_n(x) = \sin(k_nx)$$

où k_n s'exprime simplement en fonction de L.

4 Comparaison

On note dorénavant

$$k_n = \frac{1}{r}q_n, \qquad \omega_n = \frac{1}{t_c}w_n \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \qquad t_c = r\sqrt{\frac{\rho}{G}} \qquad g = \frac{E}{G}$$

1. Exprimez les équations de dispersion Eq.9 et Eq.10 en fonction de q_n, w_n et des autres constantes.
2. Quelle est le sens physique de du rapport r/L, calculez le pour une section circulaire, ou rectangulaire (au choix).
3. Pour q_n donné, exprimez explicitement les racines w_n^{EB} et w_n^T de Eq.9 et Eq.10 respectivement.
4. On suppose que $k_n = n\pi/L$ (avec $n = 1, 2, \dots$), montrez que w_n^{EB} et w_n^T s'expriment en fonction d'un coefficient matériel $g = E/G$ et géométrique $\ell = r/L$.
5. Calculez l'erreur relative

$$\frac{(w_n^{EB})^2 - (w_n^T)^2}{(w_n^{EB})^2}\,.$$

en fonction de g et ℓ.

6. Pour $\ell \ll 1$ donnez une approximation de cette erreur en utilisant les développements limités usuels.
7. On considère une poutre 20 fois plus longue qu'épaisse avec $g \simeq 2.5$. Qu'elle est l'erreur relative

$$\frac{(w_n^{EB})^2 - (w_n^T)^2}{(w_n^{EB})^2}$$

pour le $3^{ième}$ mode ?

5 Aide

- Soit $f(x)$ la solution du problème (de Cauchy)

$$f'' + k^2 f = h(x) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} f(0) &= a \\ f'(0) &= b \end{cases}$$

où $h(x)$ est une fonction connue. Alors

$$f(x) = a\cos(kx) + \frac{b}{k}\sin(kx) + \frac{1}{k}\int_0^x h(y)\sin(k(x-y))\,\mathrm{d}y$$

- Trigonométrie

$$\int_0^L \cos^2(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

$$\sin(a-b) - \sin(a+b) = -2\cos(a)\sin(b), \qquad \sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\cos(b)\sin(a)$$

- On a pour une poutre de section circulaire de rayon R

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \qquad I = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r\cos(\theta))^2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

- On a pour une poutre de section rectangulaire de section $b \times h$

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2, \qquad I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x_1)^2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$