Université de Rennes 1 Master 1 Calcul Scientifique et Modélisation 2022-2023
UFR Mathématiques Méthodes numériques

Contrôle continu n°3 du 24/11/2022

Le résumé de cours et la calculatrice sont autorisés.

Exercice 1. On considère une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R};\mathbb{R})$, un point $y \in \mathbb{R}$ et un réel $h > 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique polynôme q de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$q(y) = \varphi(y),\ q(y+2h) = \varphi(y+2h) \text{ et } q'(y+2h) = \varphi'(y+2h).$$

2) Trouver deux réels α et β tels que la formule d'intégation numérique suivante, approchant $\int_y^{y+3h} \varphi(x)\,dx$, soit exacte pour tous les polynômes de $\mathbb{P}_2$.

$$Q_y(\varphi) = \alpha h\varphi(y) + \beta h\varphi(y+2h).$$

3) On pose $E_y(\varphi) = \int_y^{y+3h} \varphi(x)\,dx - Q_y(\varphi)$. Montrer que l'on a

$$|E_y(\varphi)| \leq \frac{3h^4}{8} \max_{x\in[y,y+3h]} \left|\varphi^{(3)}(x)\right|.$$

4) On considère dans cette question l'intégration numérique de la fonction φ sur un intervalle $[a,b]$ par la méthode composée basée sur l'inégration élémentaire construite précédemment. Plus précisément, on se donne un entier n et on construit les $n+1$ points de l'intervalle $[a,b]$: $x_j = a + 3jh$, pour $j = 0,\cdots,n$ avec $h = \frac{b-a}{3n}$. Pour approcher $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, on définit alors

$$I_n(\varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} Q_{x_j}(\varphi).$$

Déduire de la question précédente une majoration de l'erreur d'intégration commise par cette méthode composée et l'ordre de convergence lorsque n tend vers l'infini.