III-L *Approximation de PI par les Aiguilles de Buffon*

On lance un certain nombre de fois une aiguille sur une feuille cadriée et l'on observe si elle croise des lignes horizontales. On peut également utiliser des stylos sur les lattes d'un parquet.

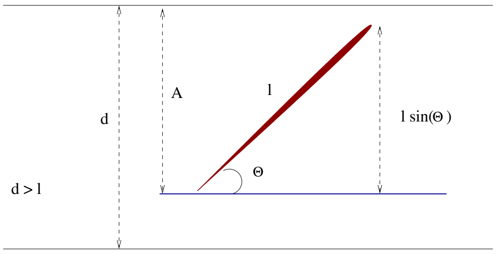


FIGURE 1 – Problème des Aiguilles de Buffon

Si la pointe est supposée fixe, la condition pour que l'aiguille croise une des lignes sera :

$\boxed{A < l\ sin(\theta)}$

La position de l'aiguille relative à la ligne la plus proche est un vecteur aléatoire

$V_{(A\theta)}$ $A \in [0, d]$ et $\theta \in [0, \pi]$

V est distribué <u>uniformément</u> sur $[0, d] \times [0, \pi]$

La <u>fonc. de densité de probabilité</u> (PDF) de V : $\frac{1}{d.\pi}$ $(= \frac{1}{d} \times \frac{1}{\pi})$

➛ N.B. : A et θ sont indépendants (d'où la multiplication).

La probabilité pour que l'aiguille croise une des lignes sera :

$$p = \int_0^{\pi} \int_0^{lsin(\theta)} \frac{1}{d.\pi}\, dA\, d\theta = \frac{2l}{d.\pi} \qquad [1]$$

Détails de la formulation de p précédente :

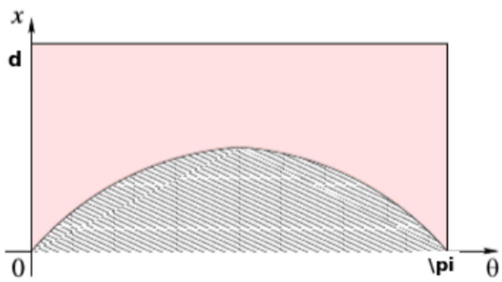
Le nombre de cas possibles pour la position du couple (A, θ) est représenté par l'aire du pavé : $U = [0, d] \times [0, \pi]$

Le nombre de cas où l'aiguille coupe une ligne horizontale est représenté par l'aire du domaine :

$$V = \{(A, \theta) \in [0, d] \times [0, \pi] : A < l\ sin(\theta)\}$$

"L'aiguille coupe une ligne horizontale" avec la probabilité $Pr\_croisement$:

$$Pr\_croisement = \frac{aire(V)}{aire(U)} = \frac{1}{\pi.d} \int_0^{\pi} l.sin(\theta)\, d\theta = \frac{2l}{d.\pi}$$



☞ Mais le problème est que pour estimer π, on a besoin de π (pour les tirages aléatoires) !

III-L-1 Travail à réaliser

Difficulté : **/*****

1. Écrire le code séquentiel d'estimation de π (en utilisant π lui même pour les tirages !)

   ◦ Prévoir une fonction **frequence_hits(n)** qui procède au tirages par Monte Carlo et renvoie $Pr\_croisement = \dfrac{aire(V)}{aire(U)}$ avec n tirages

   ◦ Comme indiqué ci-dessus, la condition de croisement est $A < \ell\ sin(\theta)$ où

   $A \in [0, d]$ uniformément réparti

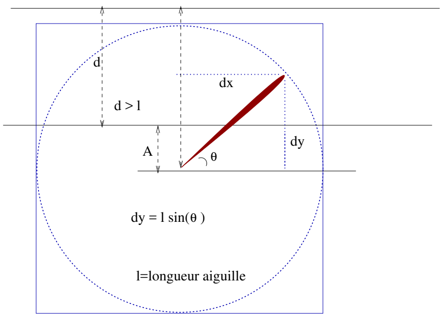
   $\theta \in [0, \pi]$ uniformément réparti (oui, on utilise encore ici π)

   ℓ et d (avec $\ell \leq d$) sont nos paramètres (resp. longueur aiguille et écart lattes parquet)

2. Estimer $\pi = \dfrac{2.n}{Pr\_croisement}.\dfrac{\ell}{d}$

☞ **Nous allons maintenant éviter l'utilisation de** π en faisant des tirages de l'angle θ.
Pour cela, procédez comme suit :

◦ Quand on lance notre aiguille, on imagine un cercle de rayon ℓ dont le centre est la pointe de l'aiguille.
Il nous reste à trouver les coordonnées (dx, dy) de son autre extrémité pour pouvoir obtenir l'angle θ.
(la pointe centre se déplace) de sorte que (dx, dy) soit bien son autre extrémité !



3. Remplacer dans votre code l'usage de $sin(\theta)$ de la manière suivante :

   - Prévoir une fonction *sin_theta()* qui procède au tirage d'un couple $(dx, dy) \in [0, \ell] \times [0, \ell]$, un point dans le cercle supposé être centré sur la pointe de l'aiguille.

   ➙ Il faut bien vérifier que (dx, dy) est bien dans le cercle (certains de ces points sont dans le carrée $\ell \times \ell$ et pas dans le cercle.)

   - A l'aide de ces valeurs qui définissent une aiguille lancée, calculer h l'hypoténuse du triangle droit dont les côtes sont dx, dy, h ; on comprend que h est "porté" par l'aiguille sur sa longueur ℓ ($h \leq \ell$) : par abus de notation, les vecteurs $\overrightarrow{h}$ et $\overrightarrow{\ell}$ sont confondus.

   On peut alors calculer $sin(\theta) = \dfrac{dy}{h}$ que l'on notera sin_theta.

4. Générer $A \in [0, d]$, ce qui place l'aiguille sur le parquet !

   ➛ N.B. : on peut penser qu'il aurait fallu tirer (dx, dy) après le tirage aléatoire de A qui définirait les coordonnées de la tête (*tips*) de l'aiguille. Mais on peut aussi bien faire le tirage de (dx, dy) dans un repère avec tête de l'aiguille placée en $(0, 0)$ avant de translater ce repère après le tirage de A (une homothétie).

5. Si on a $A < \ell\ .\ sin\_theta$, on un *hit* de plus.

6. On procède à n itération des étapes (3) à (6) pour obtenir $Pr\_croisement$

☞ N.B. : au lieu du cercle de rayon ℓ, on peut aussi bien utiliser un cercla unitaire (accélère légèrement les calculs) comme ci-après.

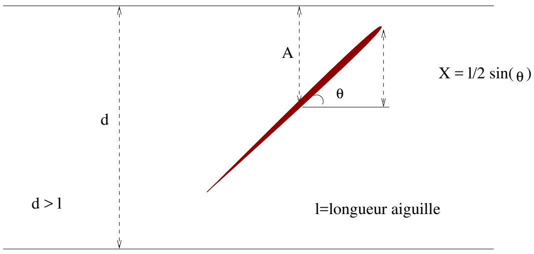
```
def calcul_PI_OK_selon_mes_slides_on_evite_use_of_PI_version_sequentielle() :
    L_lg_needle=10 # cm
    D_dist_parquet= 10 # distance entre 2 lattes du parquet
    Nb_iteration=10**6

    def tirage_dans_un_cercle_unitaire_et_sinus_evite_PI() :
        def tirage_un_point_dans_cercle_unitaire_et_calcul_sinus_theta() :
            while True :
                dx = random.uniform(0,1)
                dy = random.uniform(0,1)
                if dx**2 + dy**2 <= 1 : break
            sinus_theta = dy/(math.sqrt(dx*dx+dy*dy))
            return sinus_theta

        nb_hits=0
        for i in range(Nb_iteration) :
            # Theta=random.uniform(0,180) ne marche pas, il faut PI à la place de 180
            # Mais puisqu'on veut le sinuus(theta), on se passe de theta et on caclcule sinus(theta) à
            # l'ancienne = (cote_opposé / hypothenuse)
            sinus_theta = tirage_un_point_dans_cercle_unitaire_et_calcul_sinus_theta()
            A=random.uniform(0,D_dist_parquet)
            if A <  L_lg_needle * sinus_theta :
                nb_hits+=1

        return nb_hits

    nb_hits=tirage_dans_un_cercle_unitaire_et_sinus_evite_PI()

    print("nb_hits : ",  nb_hits, " sur ", Nb_iteration , " essais")
    Proba=(nb_hits)/Nb_iteration # +1 pour éviter 0

    print("Pi   serait : ", (2*L_lg_needle)/(D_dist_parquet*Proba))

calcul_PI_OK_selon_mes_slides_on_evite_use_of_PI_version_sequentielle()

# Trace :
# nb_hits :  636512  sur  1000000  essais
# Pi   serait :  3.1421245789553067
```

III-L-2 Addendum aux aiguilles de Buffon

Une autre formulation de p précédente :

On repère le point milieu de l'aiguille (facilite la formulation).

Comme dans le cas précédent, $\Theta \in [0, \pi]$ mais $A \in [0, d]$ représente la distance entre le milieu et la ligne horizontale (le plus proche).



• Cette fois, au lieu d'une double intégrale, nous utilisons une probabilité conditionnelle.

Dans un lancer donné, supposons $\Theta = \theta$ un angle particulier.

➙ L'aiguille croisera une ligne horizontale si la distance A est plus petite que $X = \dfrac{l.sin(\theta)}{2}$ par rapport à une des 2 lignes horizontales limitrophes.

Soit E l'événement : "l'aiguille croise une ligne". On a :

$$P(E|\Theta = \theta) = \frac{\frac{l.sin(\theta)}{2}}{d} + \frac{\frac{l.sin(\theta)}{2}}{d} = \frac{l.sin(\theta)}{d}$$

➙ Chaque $\dfrac{l.sin(\theta)}{2}$ est la proba pour une des 2 lignes horizontales,

➙ la division par d permet de normaliser (nécessaire dans le cas d'une probabilité).

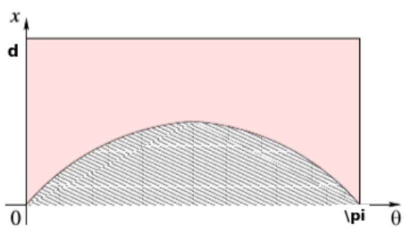
On a alors la formulation de probabilité "totale" : $P(E) = \displaystyle\int_0^\pi P(E|\Theta = \theta)\ f_\Theta(\theta)\ d\theta$

où f_Θ est la proba de $\theta = 1/\pi$

La probabilité de E est la loi de probabilité totale (équivalente à la double intégrale sur θ et A).

On a $$P(E) = \int_0^\pi \frac{l.sin(\theta)}{d} \frac{1}{\pi}\ d\theta \ = \frac{1}{\pi d} \int_0^\pi sin(\theta)\ d\theta = \frac{2.l}{\pi d}$$

Pour estimer $P(E)$ par la méthode Monte Carlo, on pourrait procéder à un tirage aléatoire dans le rectangle $[0, \pi] \times [0, d]$ du rectangle de côtés $d \times \pi$ (lire $a = d$) :



III-L-3 Estimation Laplacienne de pi

Laplace (pour s'amuser !) a calculé une approximation de la valeur de π par ce résultat.

Soit M la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'aiguille a croisé une ligne ($E(M)$ l'espérence de M) :

→ Probabilité de croiser une ligne = $\dfrac{E(M)}{n}$ [2]

Les expressions [1] (vue ci-dessus) et [2] représentent la même probabilité : $\dfrac{E(M)}{n} = \dfrac{2l}{d\pi}$ d'où :

$\boxed{\pi = \dfrac{n}{E(M)} \cdot \dfrac{2l}{d}}$ qui est un estimateur statistique de la valeur de π.

Estimation de π :

Si on lance l'aiguille n fois, elle touchera une ligne m fois.

➛ Dans $\pi = \dfrac{2.l.n}{E(M).d}$ on peut remplacer la variable aléatoire M par m pour obtenir une estimation de π : $\hat{\pi} \approx \dfrac{2.l.n}{m.d}$

En 1864, pendant sa convalescence, un certain Capitaine Fox a fait des tests et obtenu le tableau suivant :

n	**m**	**l** (cm)	**d** (cm)	**Plateau**	**estimation** (π)
500	236	7.5	10	stationnaire	3.1780
530	253	7.5	10	tournant	3.1423
590	939	12.5	5*	tournant	3.1416

Deux résultats importants à tirer de cette expérience :

(1) La première ligne du tableau : résultats pauvre

- Fox a fait tourner le plateau (son assise ?) entre les essais
- Cette action (confirmée par les résultats) élimine le **biais** de sa position (dans le tirages).
- Il est important d'éliminer le biais dans l'implantation de la méthode MCL. Le biais vient souvent des générateurs de nombres aléatoires utilisés (équivalent à la position du lanceur dans ces lancers).

(2) Dans ses expériences, Fox a aussi utilisé le cas $d < l$ (dernière ligne du tableau).

- L'aiguille a pu croiser plusieurs lignes (le cas * du tableau : n=590, m=939).
- Cette technique est aujourd'hui appelée la technique de **réduction de variance**.