Modelleren en Simuleren

Project – 2025 - 2026

Simuleren van een duikcomputer

Inleiding

De grootste bedreiging voor duikers onder water is decompressieziekte (DCS), ook wel "the bends" genoemd. Deze aandoening ontstaat wanneer een duiker te snel stijgt en de opgeloste stikstof in het lichaam daardoor belletjes vormt in het bloed en weefsels. Dit kan leiden tot klachten variërend van gewrichtspijn en huiduitslag tot ernstige neurologische en cardiovasculaire problemen. Het voorkomen van DCS is daarom één van de belangrijkste aandachtspunten tijdens het duiken.

Om dit risico te beheersen, maken duikers gebruik van een duikcomputer. Dit is een elektronisch instrument dat voortdurend berekent hoeveel stikstof het lichaam tijdens de duik opneemt en weer afbouwt. De duikcomputer houdt daarbij rekening met actuele factoren zoals diepte, duiktijd en stijgsnelheid. Zo kan hij precies aangeven hoelang een duiker veilig onder water kan blijven en wanneer er decompressiestops nodig zijn.

In vergelijking met traditionele duiktabellen, die uitgaan van een gestandaardiseerd profiel, biedt een duikcomputer real-time en persoonlijke informatie. Dit maakt het duiken niet alleen veiliger, maar ook flexibeler en efficiënter. Daarom is de duikcomputer tegenwoordig een onmisbaar hulpmiddel voor zowel recreatieve sportduikers als professionele duikteams.

In dit project gaan we, gebaseerd op de bronnen [1, 2], dieper in op de wiskundige modellen die schuilgaan achter deze duikcomputers en trachten we deze zelf te simuleren. We focussen op de modellen die door John Scott Haldane werden geïntroduceerd aan het begin van de 20e eeuw. Deze modellen vormen nog steeds de basis voor moderne en meer gesofisticeerde decompressiemodellen. Baseer je nooit op de resultaten uit dit project om duikplannen uit te stippelen, maar gebruik hiervoor een effectieve duikcomputer!

Drukverschillen

Wanneer een duiker onder water gaat, verandert de druk waaraan het lichaam wordt blootgesteld. Aan het wateroppervlak is de druk op ons lichaam gelijk aan 1 bar (de luchtdruk). Per 10 meter diepte komt daar ongeveer 1 bar waterdruk bij. Op 20 meter diepte ervaart een duiker dus al 3 bar druk (1 bar lucht + 2 bar water).

Deze drukverschillen hebben een onmiddellijk effect op de lucht die een duiker inademt. Onder een hogere druk zullen deze gassen, hoofdzakelijk zuurstof- en stikstofgas, gemakkelijker opgenomen worden in het bloed en weefsel van een duiker. Hierdoor neemt de druk in de weefsels en het bloed geleidelijk aan toe. Stellen we de inwendige gasdruk (in bar) in een weefsel als functie van de tijd t (in s) voor als $p(t)$ en met p_e de omgevingsdruk (in bar), dan wijzigt de inwendige gasdruk $p(t)$ volgens

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k(p_e(t) - p(t)), \tag{1}$$

waarbij k een positieve constante is, die afhangt van het type weefsel.

Opdracht 1. *Veronderstel dat een duiker zich op een constante diepte bevindt, (p_e is m.a.w. constant). Bepaal de analytische oplossing van* (1) *voor* $p(t)$. *Gebruik de beginvoorwaarde* $p(0) = p_0$.

Ieder weefseltype heeft een zekere halveringstijd τ, i.e. de tijd die nodig is opdat het verschil tussen de omgevingsdruk en de inwendige gasdruk te halveren (bij een constante omgevingsdruk). Haldane veronderstelde dat er vijf verschillende types weefsel in het lichaam aanwezig zijn, met halveringstijden van 5, 10, 20, 40 en 75 minuten. Elk van deze weefseltypes zal bijgevolg een ander verloop van de inwendige druk kennen: $p_5(t), p_{10}(t), \ldots, p_{75}(t)$. In dit project mag je je beperken tot de halveringstijden van 20, 40 en 75 minuten.

Opdracht 2. *Gebruik jouw antwoord uit Opdracht 1 om een expliciete uitdrukking te vinden voor de halveringstijd* τ *in een bepaald weefsel. Toon aan dat de halveringstijd onafhankelijk van* p_0 *of* p_e *is. Druk de oplossing uit Opdracht 1 uit door gebruik te maken van de halveringstijd* τ *i.p.v. de parameter* k.

Een van de bevindingen van Haldane was dat decompressieziekte in een weefseltype enkel zou optreden bij het stijgen wanneer de omgevingsdruk op de nieuwe diepte lager is dan M keer de inwendige gasdruk in dat type weefsel. De waarde voor M die Haldane zelf suggereerde zou iets minder dan $\frac{1}{2}$ zijn. In dit project zullen we met de factor $M = \frac{1}{2.15}$ werken. Vermits bovenstaande regel op elk van de weefseltypes van toepassing is, is het belangrijk om de inwendige gasdruk in elk van de weefseltypes gelijktijdig te beschouwen.

Opdracht 3. *Veronderstel dat een duiker van aan het oppervlak (ogenblikkelijk) daalt tot op een zekere diepte* d, *daar een tijd* T *doorbrengt om vervolgens weer (ogenblikkelijk) aan het oppervlak te komen. Bepaal voor elke diepte* $d \in \{15, 20, 25, 30\}$ *de maximale tijd* T *die een duiker daar kan doorbrengen om zonder gevaar voor DCS terug naar het oppervlak te stijgen. Door welke halveringstijd(en) (20, 40 en 75 minuten) worden de duiktijden beperkt (in deze vereenvoudigde situatie)? Tot welke diepte zou een duiker in principe onbeperkt in tijd mogen duiken?*

Je zou zojuist geconstateerd moeten hebben dat hoe dieper men duikt, hoe korter de maximaal toegstane tijd wordt. Het grootste nadeel bij het gebruik van deze tabellen is dat een duiker zich uit veiligheidsoverweging op de maximaal toegestane duiktijd moet baseren die overeenkomt met de maximale diepte van de duik. Ook indien de duiker slechts beperkte tijd op die diepte is geweest.

Opdracht 4. *Veronderstel dat een duiker zich van op zeeniveau (ogenblikkelijk) naar een diepte van* $25m$ *verplaatst, daar* 15 *minuten terplaatse blijft en vervolgens (ogenblikkelijk) stijgt naar een diepte van* $15m$. *Wanneer mag de duiker zonder gevaar voor DCS naar het oppervlak stijgen? Stemt dit overeen met jouw verwachtingen vanuit de tabel uit Opdracht 3? Is/zijn dezelfde halveringstijd(en) doorslaggevend?*

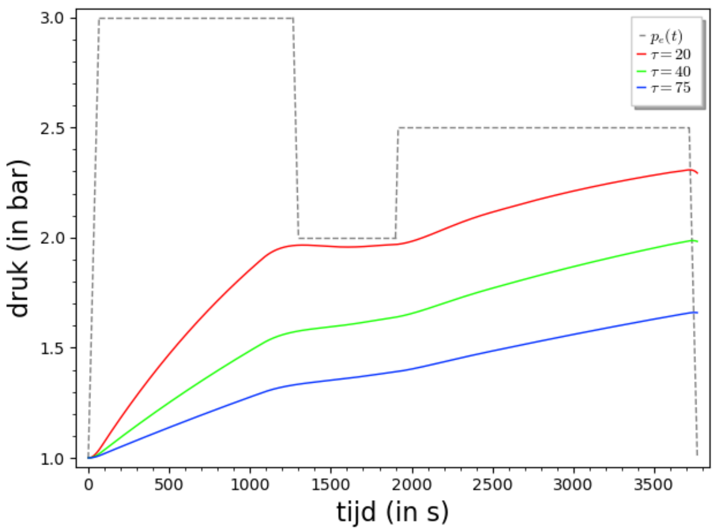
Tot nu toe hebben we telkens verondersteld dat het stijgen en dalen ogenblikkelijk gebeurt. We zullen vanaf nu van deze veronderstelling afstappen.

Opdracht 5. *Veronderstel dat een duiker aan een constante snelheid* r *(in m/s) daalt, zodat* $p_e(t) = p_{e,0} + r\frac{t}{10}$. *Bepaal ook in dit geval de analytische oplossing van* (1) *voor* $p(t)$. *Gebruik wederom de beginvoorwaarde* $p(0) = p_0$. *Wat verandert er (aan het probleem en de oplossing) indien men stijgt aan een snelheid* r*?*

Tenzij anders gespecifieerd mag je vanaf hier veronderstellen dat een duiker in onze simulaties stijgt en daalt aan een snelheid $r = 18m/min$.

Opdracht 6. *We wijzigen het scenario uit Opdracht 3 op de volgende manier: Een duiker daalt vanaf het oppervlak aan een snelheid* r *tot op diepte* d, *blijft daar gedurende een tijd* T *en stijgt vervolgens opnieuw naar het oppervlak aan dezelfde snelheid* r. *Bepaal analoog als in Opdracht 3 voor iedere diepte* d *de maximale tijd* T *die een duiker op de gegeven diepte kan doorbrengen om zonder gevaar voor DCS het oppervlak te bereiken. Geef ook de totale tijd van de duik weer. Wat is volgens dit scenario de maximale diepte* d *die men kan bereiken?*

Opdracht 7. *Een duiker wil tijdens een duik 20 minuten op een diepte van* 20m *zwemmen, 10 minuten op een diepte van* 10m *en 30 minuten op een diepte van* 15m. *Hij start en eindigt de duik aan het oppervlak. In welke volgorde gaat de duiker best naar elk van deze dieptes om terug aan het oppervlak te komen met de laagst mogelijke maximale*[1] *inwendige gasdruk? Geef hierbij ook grafisch het verloop van de duik en de inwendige gasdrukken in elk van de weefseltypes weer, bijvoorbeeld zoals in Figuur 1.*
Is het mogelijk om op een veilige manier het oppervlak te bereiken, dus zonder gevaar voor DCS? Zou de volgorde anders kunnen zijn mochten de respectievelijke tijdsduren wijzigen?



Figuur 1: Voorbeeldverloop bij opdracht 7

Decompressiestops

Wanneer de no-stoptime tijdens een duik wordt overschreden, zal een duiker niet rechtstreeks naar het oppervlak mogen terugkeren. Om DCS te voorkomen, zal de duiker decompressiestops moeten uitvoeren om het opgenomen stikstokgas geleidelijk aan weer uit het lichaam te laten. In dit project mag je veronderstellen dat de eerste decompressiestop op een diepte van 15m wordt gehouden. Daarna volgen stops op dieptes van 12m, 9m, 6m en 3m. Een stop eindigt pas wanneer elk van de weefseltypes toelaat om verder te stijgen tot aan de volgende stop. Uiteraard wordt een stop enkel gehouden indien deze werkelijk nodig is alvorens verder te kunnen stijgen. Dit hangt af van de M-waarde, $M = 1/2.15$, de omgevingsdruk op de volgende stop en de inwendige gasdruk in elk van de weefseltypes.

Opdracht 8. *Als de eerste stop op een diepte van 15m wordt gehouden, tot welke diepte kan er daarvoor dan in theorie lange tijd*[2] *veilig gedoken worden?*

Opdracht 9. *Veronderstel dat een duiker zich reeds lange tijd*[2] *op 30m diepte bevindt, bepaal dan de duur van elk van de decompressiestops. Geef overzichtelijk weer voor elke diepte hoe lang daar gestopt dient te worden. Wat is de bepalende factor in deze decompressie?*

Opdracht 10. *Veronderstel een duik met diepteverloop $d(t)$ voor een uur (met t in min). Simuleer hoe*

[1] Met maximaal wordt hier gedoeld op het maximum over de verschillende weefseltypes.
[2] Lees: voldoende lange tijd zodat op deze constante diepte in elk weefseltype geldt dat $p = p_e$.

men na deze 60 minuten met decompressiestops terug naar het oppervlak kan keren.

$$d(t) = \begin{cases} t\exp\left(\frac{t-25}{50}\right), & als \quad 0 \leq t \leq 25 \\ 25 + 3\sin\left(\pi\sqrt{t-25}\right) + 3\sqrt{t-25} & als \quad 25 < t \leq 50 \\ 30 + 10\exp(50-t) & als \quad 50 < t \leq 60 \end{cases}$$

Geef zowel de decompressiestops op iedere diepte overzichtelijk weer als een grafiek met het verloop van de volledige duik en de bijhorende inwendige druk in ieder weefseltype.

Simulaties en planning

Opdracht 11. *Bepaal zelf een (realistisch) verloop voor een of meerdere duiken, je kan je eventueel baseren op effectieve duiksites. Beperk je (behalve voor de decomressiestops) niet louter tot het stijgen en dalen aan een constante snelheid. Daarnaast kun je rekening houden met een of meerdere van volgende zaken:*

- *Een exacte diepte behouden tijdens het duiken is niet evident. Denk hierbij bv. aan de invloed van stroming, zeeleven, andere duikers, ...*
- *Een andere belangrijke factor die de lengte van een duik bepaalt, is de hoeveelheid zuurstof die een duiker nog heeft. Hoe hoger de omgevingsdruk, hoe sneller zuurstof opgebruikt geraakt.*
- *Wanneer men op eenzelfde dag meerdere duiken uitvoert, kunnen er uiteraard nog significante hoeveelheden stikstofgas van eerdere duiken in het lichaam aanwezig zijn.*
- *Ook tijdens een no-stopduik, een duik waarbij geen decompressiestops vereist zijn, wordt er een safety-stop ingelast (indien men nog over voldoende zuurstof beschikt). Dit is een stop van 3 tot 5 minuten op een diepte van 5m.*

Introduceer gerust nog extra uitdagingen in jouw simulatie. Creativiteit wordt ten zeerste aangemoedigd. Voorzie jouw oplossing van voldoende tekst en uitleg. Probeer al jouw resultaten en bevindingen zo overzichtelijk mogelijk weer te geven.

Richtlijnen

Voor dit project dien je via ufora een Jupyter Notebook-bestand (`*.ipynb`) in, waarin je elk van bovenstaande opdrachten oplost. Dit bestand bevat naast jouw code ook de nodige commentaar in de vorm van Markdown-cellen, alle relevante resultaten en de uitgeschreven antwoorden. Verklaar grondig en onderbouwd jouw bevindingen. Verwijs daarvoor ook naar de nodige grafieken. Zorg voor duidelijke grafieken, je kan daarbij o.a. gebruik maken van legendes, kleuren, markeringen, ...
Iedereen lost dit project *individueel* op. De deadline is **zondag 7 december, 23u59**.

- Los in dit project, tenzij expliciet gevraagd, de differentiaalvergelijkingen numeriek op. Werk daartoe steeds met voldoende punten en/of nauwkeurigheid.
- Houd telkens rekening met de halveringstijden van 20, 40 en 75 minuten.
- Je mag gedurende het hele project gebruikmaken van $M = 1/2.15$ en $r = 18m/min$.
- Wanneer een duiker aan de oppervlakte vertrekt (voor een eerste duik), mag je veronderstellen dat die reeds lang genoeg aan het oppervlak is dat in elk weefseltype de inwendige gasdruk $p_0 = 1$.
- Probeer jouw antwoorden zo duidelijk en overzichtelijk mogelijk weer te geven. Je kan hiervoor verzorgde grafieken gebruiken die de relevante info weergeven. Ook indien dit niet expliciet gevraagd wordt, maar dit een meerwaarde kan zijn voor jouw antwoord en/of interpretatie.

Referenties

[1] STUDIO BLUE PLANET, *Decompression – Neo-Haldane models.*
https://blog.studioblueplanet.net/scuba-diving/decompression-neo-haldane-models-2

[2] WESTBROOK, D. R., *The Mathematics of Scuba diving*, UMAP 1997.
https://staff.ulsu.ru/semushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/1-basmod/5-assignments/group_projects/Group-project-assignments/Scuba%20Diving.pdf