Exercice 3 :

a) $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{div}\,(u\,v c) = c \cdot (u \nabla v + v \nabla u)$

$u, v : C^1 \; \Omega \to \mathbb{R}^2$

b) $-\Delta u + \partial_x u = f$ sur Ω

$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$* \; a(u,v) = l(v)$

$$\forall v \in H^1_0(\Omega) \quad -\Delta u v + v\,\partial_x u = f v$$

$$\text{donc } -\int_\Omega v\,\Delta u + \int_\Omega v\,\partial_x u = \int_\Omega f v$$

$$-\int_\Omega v\,\Delta u = -\int_{\Gamma'} v\,\partial_m u + \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

$$\int_\Omega v\,\partial_x u = \int_\Omega v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\nabla u = \int_\Omega \operatorname{div}\left(u v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) - \int_\Omega u\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\nabla v$$

$$= \int_\Gamma u v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot m - \int_\Omega u\,\partial_x v$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix}\partial_x u\\ \partial_y u\end{pmatrix}$$

Chercher $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $\forall v \in H^1_0(\Omega)$,

$$a(u,v) = \ell(v)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega u\,\partial_x v \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_\Omega f v$$

* $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert
* $v \to \ell(v)$ est bien linéaire et continue.
* la forme bilinéaire a est continue.

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = (u,u)_{H^1(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega u \times u + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u$$

$$= \int_\Omega u^2 + \int_\Omega (\partial_x u)^2 + \int_\Omega (\partial_y u)^2$$

$$= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_x u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_y u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

* $$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega u\,\partial_x v\right|$$

$$\leq \int_\Omega \left(|\partial_x u\,\partial_x v| + |\partial_y u\,\partial_y v| + |u\,\partial_x v|\right)$$

$$\leq \left(\int_\Omega (\partial_x u)^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\partial_x v)^2\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega (\partial_y u)^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\partial_y v)^2\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (\partial_x v)^2\right)^{1/2}$$

$$= \|\partial_x u\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^2} + \|\partial_y u\|_{L^2}\|\partial_y v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^2}$$

$\leq 3 \times \|u\|_{H^1(\Omega)} \times \|v\|_{H^1(\Omega)}$ donc a est continue.

Coercivité : *indication : montrer que* $\int_\Omega u\,\partial_x u = 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$

pour montrer qu'un nombre est égal à 0, on montre qu'il est égal à son opposé.

On a $\forall u, \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega v\,\partial_x u = -\int_\Omega u\,\partial_x v$$

donc $\int_\Omega u\,\partial_x u = -\int_\Omega u\,\partial_x u$ donc $\int_\Omega u\,\partial_x u = 0$

Donc $a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \nabla u - \int_\Omega u\,\partial_x u = \int_\Omega \nabla u \nabla u$ est bien coercive (cf cours)

Pour cela il faut que a soit symétrique on ne peut pas définir une fonctionnelle qui serait minimisée par cette solution.

Exercice 4 :

$$a(u,v) = \ell(v)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v + c\int_\Omega u\,\partial_x v$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f v$$

Tout fonctionne de la même manière que dans l'exercice 3.