Méthodes Numériques et Simulation (2) - TP 4

Source et conditions aux limites dépendant du temps.
Coefficient de diffusion variable en espace.

Exercice 1 :

On poursuit les travaux précédents, en prenant en compte les variations en temps des conditions aux limites ainsi que de la source f.

On se place sur $\Omega = \mathcal{D}(O,1)$ (disque centré en $O(0,0)$ de rayon 1). On considère u solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x},t) - D\Delta u(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{x},t) \text{ pour } \mathbf{x}\in\Omega \text{ et } t\in(0,T_f), \\ \partial_n u(\mathbf{x},t) + Ku(\mathbf{x},t) &= KT_{ext}(t) \text{ pour } \mathbf{x}\in\partial\Omega \text{ et } t\in(0,T_f), \\ u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}) = 15 \text{ pour } \mathbf{x}\in\Omega. \end{cases}$$

On se place cette fois sur un intervalle de temps correspondant à plusieurs jours : $T_f = 72\times 3600$, ce qui correspond à $72h$ donc 3 jours. La température T_{ext} est donnée par :

$$T_{ext}(t) = 15 + 5\times\sin(\pi t/(12\times 3600)).$$

(Cette fonction est périodique, oscille entre 10 et 20 avec une période de $2\times 12\times 3600$ *secondes, c'est à dire* $24h$.*)*

Pour la force f, on considère un radiateur dont l'intensité varie avec le temps :

$$f(\mathbf{x},t) = P\times \mathbb{1}_R(\mathbf{x})\times(1-\sin(\pi t/(12\times 3600))).$$

(Ainsi, lorsque la température extérieure est la plus élevée, le radiateur est au plus bas de son intensité. P *correspond à la puissance, on pourra tester les valeurs entre* $P = 0.01$ *et* $P = 0.1$*).*

On considère que la radiateur est localisé en $R = (-0.1, 0.1)\times(0.75, 0.85)$. On fixe K à 1.

- Écrire un code **FreeFem++** pour permettre de simuler cette situation.

  Il faudra utiliser `solve` plutôt que `problem`, car `problem` définit le problème une fois pour toutes, avec des paramètres fixés. La structure sera donc la suivante :

```
... (declarations) ...
...
func f = (x>-0.1)*(x<0.1)*(y>0.75)*(y<0.85);
...
real vmin=15;
real vmax=19;
int nbv=17;
real[int] valeurs(nbv);
for (int i=0; i<nbv;i++){
valeurs[i]=i*(vmax-vmin)/(nbv-1)+vmin;
}
Vh fh;
...
for (real t=0;t<Tf;t+=dt){
uold=uh;
fh=f*(1-sin(pi*t/(3600*12)))*P;
Text=15+5*sin(pi*t/(3600*12));
solve thermic(uh,vh,solver=LU)=int2d(Th)(uh*vh/dt)+...;
plot(uh,wait=false,value=true,grey=false,fill=true,viso=valeurs);
}
```

- Ajouter les lignes suivantes, permettant d'obtenir en fin de code un graphe faisant apparaître l'évolution en temps de la température extérieure, de l'intensité de la source du chauffage, de la température au centre de la pièce et de la température minimale.

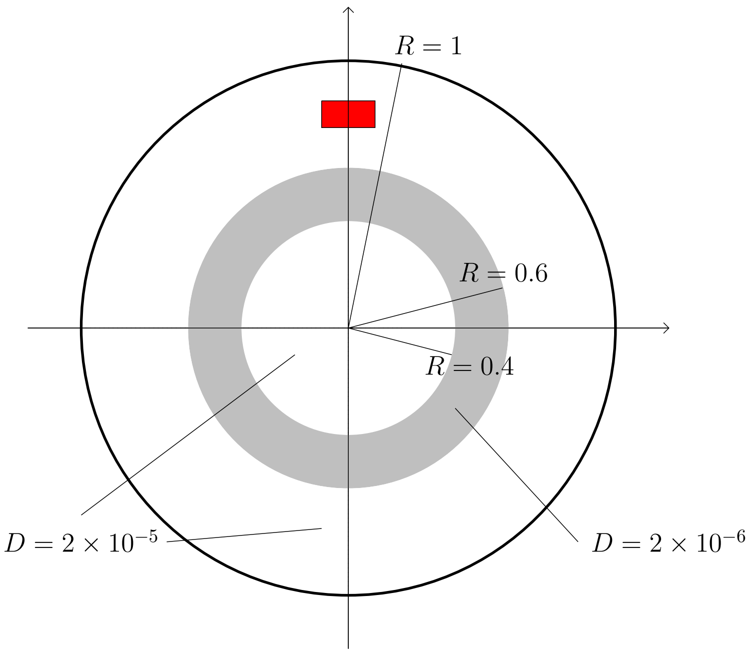
```
...
real [int] xx(Tf/dt), z1(Tf/dt), yy(Tf/dt), zz(Tf/dt),z2(Tf/dt);
int i=0;
for (real t=0;t<Tf;t+=dt){
...
xx[i]=t;
yy[i]=Text;
zz[i]=uh(0.0,0.0);        (à intégrer dans la boucle du code ci-dessus)
z1[i]=fh(0.1,0.9);
z2[i]=uh[].min;
i++;
}
plot([xx, yy], [xx,zz], [xx,z1], [xx,z2],value=true,wait=true);
```

Exercice 2 :

On rappelle que l'équation de la chaleur $\partial_t u(\mathbf{x},t) - D\Delta u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t)$ est obtenue dans le cas où le coefficient de diffusion thermique D est constant en espace.
Les lois de Fick conduisent en fait à l'équation

$$\partial_t u(\mathbf{x},t) - \nabla\cdot(D\nabla u)(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t).$$

Écrire un code **FreeFem++** correspondant à la situation suivante :



On notera que la fonction D décrite sur la figure ci-dessus peut être définie ainsi :

$$D(\mathbf{x}) = 2\times 10^{-5} + (2\times 10^{-6} - 2\times 10^{-5})\mathbb{1}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})$$

où $\mathcal{C}$ est la couronne représentée en gris.

Comme d'habitude, il faudra commencer par écrire sur papier la formulation variationnelle du problème, il faudra utiliser une intégration par parties sur le terme :

$$\int_\Omega -v(\mathbf{x},t)\nabla\cdot(D\nabla u)(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}.$$

Dans un premier temps, on fixera T_{ext} (condition sur le bord) à 15 et T_0 (condition initiale) à 15 dans tout le domaine, avec pour paramètre d'isolation $K = 1$.

Dans un second temps, on imposera comme à l'exercice 1 l'intensité du chauffage et la température extérieure variables (avec les mêmes formules pour l'évolution qu'à l'exercice 1).

Exercice 3 :

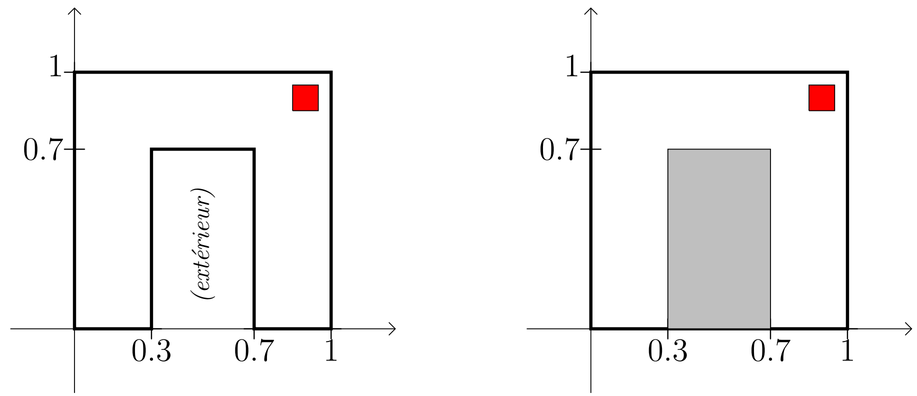
Reprendre le code de l'exercice 1 (D constant), en mettant en place un thermostat "coupant" le chauffage (c'est à dire imposant $f = 0$ dans tout le domaine) lorsque la température est supérieure à 19 degrés au centre de la pièce, et rallumant le chauffage "à fond" ($f = P$ dans le radiateur) dans le cas contraire.

Exercice 4 :

Améliorer le principe de ce thermostat, de sorte qu'il "anticipe" le passage au dessus ou au dessous des 19 degrés au centre de la pièce.
(Question relativement "libre" : imaginer une stratégie permettant de savoir, en observant l'évolution de la température au centre de la pièce sur les deux derniers pas de temps, si cette température va franchir - dans un sens ou dans l'autre - la barre des 19 degrés).

Exercice 5 :

Comparer les codes corresondant aux deux situations suivantes :



Avec température initiale uniforme de 15 degrés, condition aux limites de Dirichlet (15 degrés également) sur toutes les parois représentées, coefficient de diffusion de 2×10^{-5} dans les zones représentées en blanc et 2×10^{-7} dans la zone grise.