4.1.3 Remarques sur la régularité de la solution

Rappel : la solution du problème est dans $H_0^1(\Omega)$, donc dans $H^1(\Omega)$ (comme en dimension 1)

On avait vu qu'un élément de H^1 admet un représentant continu, ce qui est faux en dimension 2.

Nous allons en dire un peu plus sur la régularité de la solution.

Théorème : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que Ω (et donc son bord Γ) est de classe $\mathcal{C}^{m+2}$

On suppose de plus que $f \in H^m(\Omega)$.

Alors la solution u est dans $H^{m+2}(\Omega)$, de plus $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \times \|f\|_{H^m(\Omega)}$ où la constante C ne dépend que de Ω.

Théorème : Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ouvert borné de classe $\mathcal{C}^m$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $m > \frac{d}{2} + k$, on a $H^m(\Omega) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$

Remarque : pour $d=1$, $k=0$ et $m=1$ on retrouve le fait que $H^1 \subset \mathcal{C}^0$ en dimension 1.

et ceci ne fonctionne pas pour $d=2$, $k=0$ et $m=1$.

L'inégalité étant vraie pour $m=2$, $k=0$ et $d=2$ ou 3, on en déduit que :

$$H^2(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ pour } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^d \ (d=2 \text{ ou } 3) \text{ de classe } \mathcal{C}^2$$

Ces deux théorèmes permettent de montrer que si Ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, alors la solution u est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4.2 Mise en place d'une méthode d'éléments finis

4.2.1 Principe & Maillage

Le principe va être le même qu'en dimension 1 : définir un sous espace $V_h \subset V \in H_0^1(\Omega)$ avec V_h de dimension finie, et chercher $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ $\forall v_h \in V_h$

Le théorème de Lax Milgram assurera l'existence et l'unicité d'une solution $u_h \in V_h$ à ce problème, et on pourra majorer l'erreur $u - u_h$ en utilisant le lemme de Céa.

Il faut juste préciser comment définir V_h et donc décrire les maillages utilisables.

Définition : Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ouvert connexe borné. On appelle "maillage triangulaire conforme" (ou "triangulation conforme") de $\bar{\Omega}$ un ensemble FINI noté
$$T_h = \{K_1, \dots, K_m\}$$ de triangles K_i tels que :

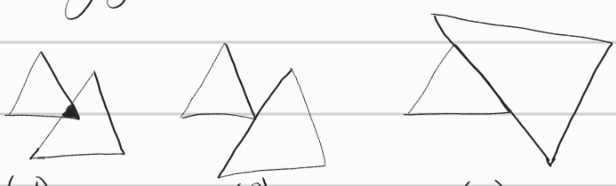
* K_i, K_i est un triangle non dégénéré (c'est à dire un "vrai triangle", les sommets ne sont pas alignés, son aire est >0).

* $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \quad (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m)$

* $\forall i \neq j$, $K_i \cap K_j$ est
  - soit vide,
  - soit réduite à un point, ce point doit alors être un sommet de K_i et de K_j
  - soit réduite à un segment qui doit alors être un côté entier de chacun des deux triangles.

On appelle "sommets" ou "noeuds" du maillage les sommets de chacun des triangles

Exemple de configurations interdites :



(1) (2) (3)

Si on rencontre le cas (1), on ne parle plus de triangulation.
Si on rencontre les situations (2) et/ou (3), on parle toujours de triangulation (ou maillage triangulaire) mais on précise "NON CONFORME"

Remarque : en toute rigueur, ceci n'est possible que si $\bar{\Omega}$ est un polygone (si son bord est une réunion finie de segments) éventuellement avec un nombre finis de "TROUS", eux-mêmes polygonaux.

Si Ω a des bords courbes, il faut approcher Ω par Ω_h polygonal et mailler Ω_h. Par abus de langage, on dira parfois qu'un maillage de Ω_h est un maillage de Ω.

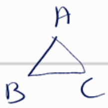
On note $V_h = \{ v_h \in H_0^1(\Omega_h)$ tel que v_h soit continue sur $\overline{\Omega_h}$ et tel que $\forall i = 1, \dots, m$, $v_{|K_i} \in P_1 = \mathbb{R}_1[x,y] \}$

Ici, $\mathbb{R}_1[x,y] = \{ f$ tel que $\exists\, a, b, c$ tel que $f(x,y) = a + bx + cy \}$ ensemble des polynomes de degré TOTAL ≤ 1.

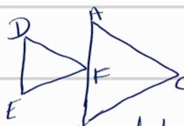
<u>Remarque</u> : V_h est un sous-espace de $H_0^1(\Omega_h)$ mais pas de $H_0^1(\Omega)$ (sauf bien sûr si $\Omega = \Omega_h$ était un polygône).

<u>Propriété</u> : un élément $v_h \in V_h$ est exactement déterminé par ses valeurs sur les sommets de la triangulation.

En d'autres termes, en notant $S_1, \dots, S_p$ les sommets intérieurs de la triangulation (pas sur le bord $\partial\Omega_h$), $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists!\, v_h \in V_h$ tel que $v(S_i) = a_i \ \forall i = 1, \dots, p$.

En effet, si on considère un triangle  non dégénéré, on peut montrer que $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\exists!\, P \in \mathbb{R}_1[x,y]$ tel que

$$P(A) = \alpha$$
$$P(B) = \beta$$
$$P(C) = \gamma$$

Si on a un triangulation "NON CONFORME", par exemple , la valeur de v_h en F dépend forcément des valeurs en A, B et C car les valeurs de v_h en A, B et C déterminent l'élément de $\mathbb{R}_1[x,y]$ coïncident avec v_h sur le triangle ABC, et donc déterminent la valeur de $v_h(F)$ car $F \in ABC$.

4.2.2 Recherche pratique de la solution approchée

<u>Propriété</u> : $\forall S_i$ sommet intérieur de T_h, $\exists!\, \varphi_i \in V_h$ tel que $\varphi_i(S_i) = 1$ et $\varphi_i(S) = 0 \ \forall S$ sommet de T_h différent de S_i.

<u>Preuve</u> : c'est une conséquence de la propriété précédente.

Propriété : $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ forme une base de V_h

En effet, $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists ! \, v_h \in V_h$ tel que $v_h(S_i) = a_i$

Il est clair que $v_h = a_1 \varphi_1 + \dots + a_p \varphi_p$ où $v_h(P_i) = a_i$, et que cette décomposition est unique.

V_h est donc un espace vectoriel de dimension p, où p est le nombre de sommets de $\mathcal{T}_h$ intérieurs à Ω_h