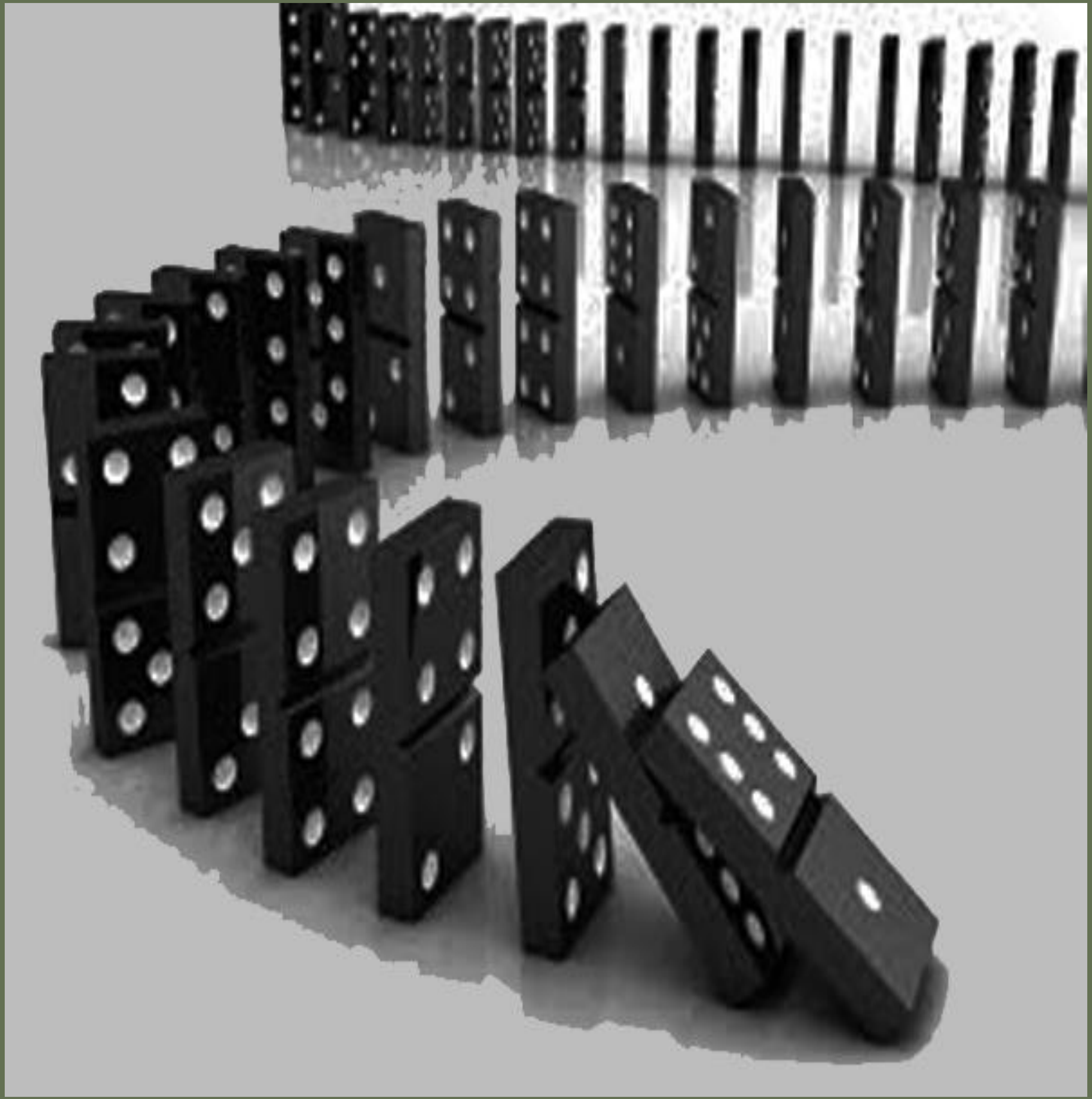
Induksi Matematika

Oleh

Sulistyo Dwi Sancoko,S.Si.,M.Sc.



Apa yang kalian lihat???

Apa Maknanya?

Sumber: google.com

Pendahuluan

- Metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat adalah **induksi matematik**.
- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Langkah induksi Matematika

Misalkan *p*(*n*) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa *p*(*n*) benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *p*(1) benar
2. Asumsikan untuk $n = k$ maka $p(k)$ benar
3. Untuk $n = k + 1$ maka $p(k + 1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat positif $k \geq 1$,

Contoh 1

Buktikan bahwa untuk $n \geq 1$ berlaku pernyataan berikut

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Penyelesaian

- Langkah Awal, untuk $n = 1$ maka berlaku $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2.1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ (Benar)
- Asumsikan benar untuk $n = k$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

❖ Langkah Induksi, Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $n = k + 1$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (\mathrm{k} + 1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)(2(k+1)+1)}{6} \blacksquare$$

Contoh 2

Buktikan bahwa untuk $n \geq 1$, jumlah n buah bilangan ganjil pertama adalah n^2!

Langkah Induksi Diperumum

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan

2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,

Contoh 3

Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat tak negative n berlaku $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$!

Penyelesaian

- Langkah Awal, untuk $n = 0$ maka berlaku $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1 = 2^0$. (Benar)
- Asumsikan benar untuk $n = k$ sehingga berlaku $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$
- Langkah Induksi, untuk $n = k + 1$, akan ditunjukkan benar bahwa $2^0 + 2^1 + \cdots 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k\right) + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{(k+1)+1} - 1$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap n tak negative berlaku $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Contoh 4

Buktikan bahwa $n! > 2^n$ untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$

Penyelesaian

- Untuk $n = 4$ berlaku $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 2^4 = 16$ (Benar)
- Asumsikan benar untuk $n = k \geq 4$ sehingga $k! > 2^k$
- Langkah induksi, akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$

Diperhatikan bahwa $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ Dan karena untuk $k + 1 \geq 5$, sehingga diperoleh

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 2^k \geq 5 \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Dengan demikian, didapat

$$(k+1)! > 2^{k+1}$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$ berlaku $n! > 2^n$.

Latihan

1. Buktikan bahwa $2^n > n^2$ untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 5$
2. Buktikan bahwa $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, untuk setiap $n \geq 0$.
3. Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Latihan

1.50 Prove: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

1.51 Prove: $1 + 4 + 7 + \cdots + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$

1.52 Prove: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.53 Prove: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

1.54 Prove: $\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

1.55 Prove $7^n - 2^n$ is divisible by 5 for all $n \in \mathbf{N}$

1.56 Prove $n^3 - 4n + 6$ is divisible by 3 for all $n \in \mathbf{N}$

1.57 Use the identity $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ to prove that

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Tugas No 1

Diberikan 3 buah relasi yaitu R_1, R_2 dan R_3 dengan definisi sbb :

- $(a, b) \in R_1$ menyatakan a lebih tinggi daripada b
- $(a, b) \in R_2$ menyatakan a dan b mempunyai tanggal lahir yang sama
- $(a, b) \in R_3$ menyatakan a mempunyai nama pertama yang sama dengan b

Selidiki apakah R_1, R_2 dan R_3 merupakan relasi yang refleksif, simetris, antisimetris atau transitif! Jika memenuhi sifat tertentu, maka buktikan pernyataan saudara. Tetapi, apabila tidak memenuhi sifat tertentu, berikan 1 contoh penyangkalnya!

Tugas No 2

Fungsi Ackermann adalah fungsi rekursif dengan dua buah peubah bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:

a. Jika $m = 0$ maka $A(m, n) = n + 1$

b. Jika $m \neq 0$ tetapi $n = 0$ maka $A(m, n) = A(m - 1, 1)$

c. Jika $m \neq 0$ dan $n \neq 0$ maka $A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$

Tentukan nilai $A(1, 3)$.

Tugas No 3

Buktikan bahwa $2^{2n} - 1$ habis dibagi tiga untuk setiap bilangan $n \geq 1$