MATEMATIKA DISKRIT

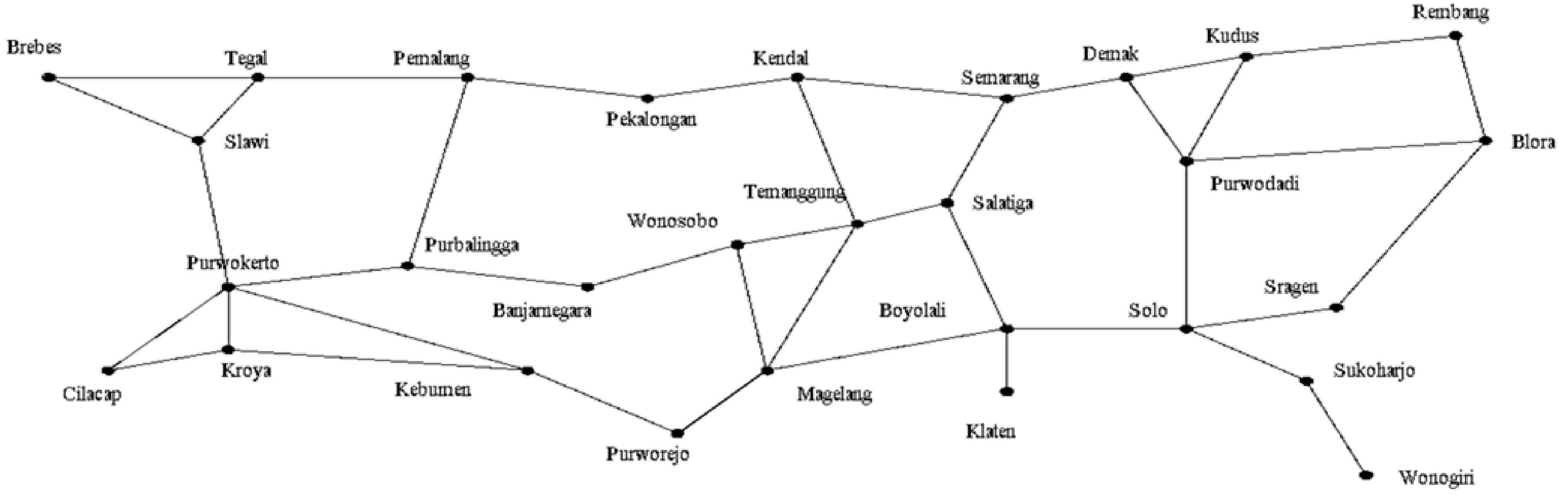
Teori Graf

Pertemuan 8

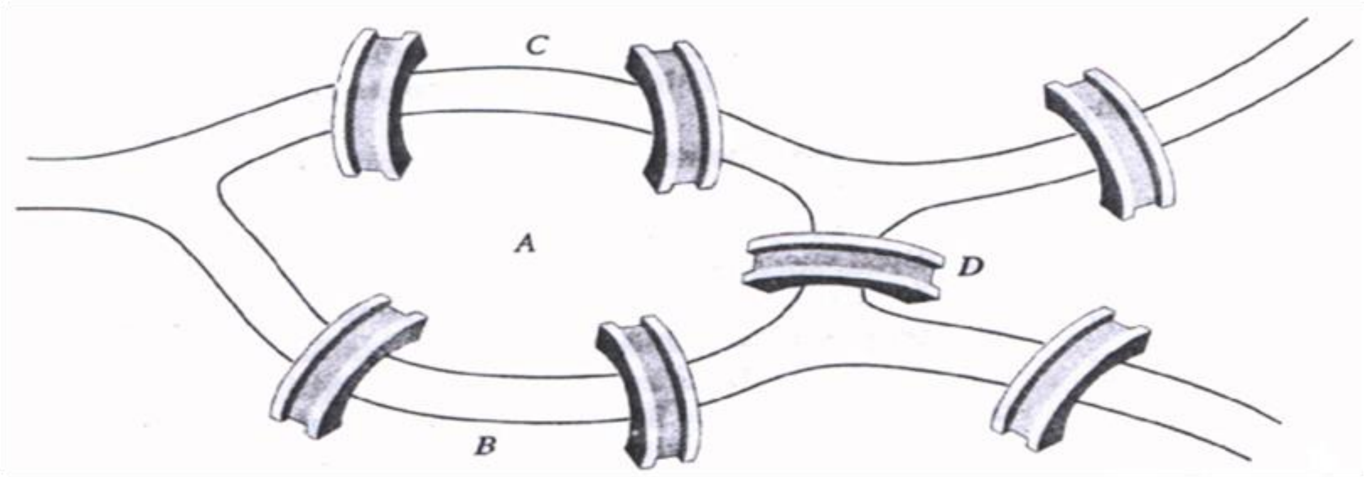
Program Studi Informatika Kelas A dan B
Universitas Teknologi Yogyakarta

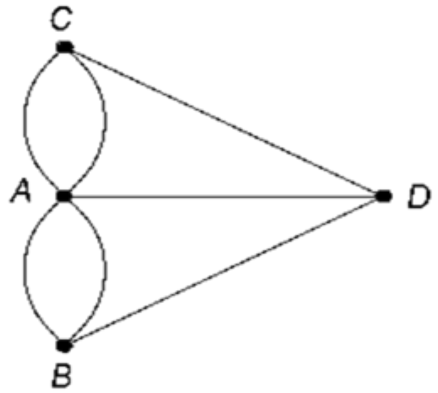
Pendahuluan

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



- Sejarah Graf: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)





Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:
  Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan
  Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan
- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

Definisi Graf

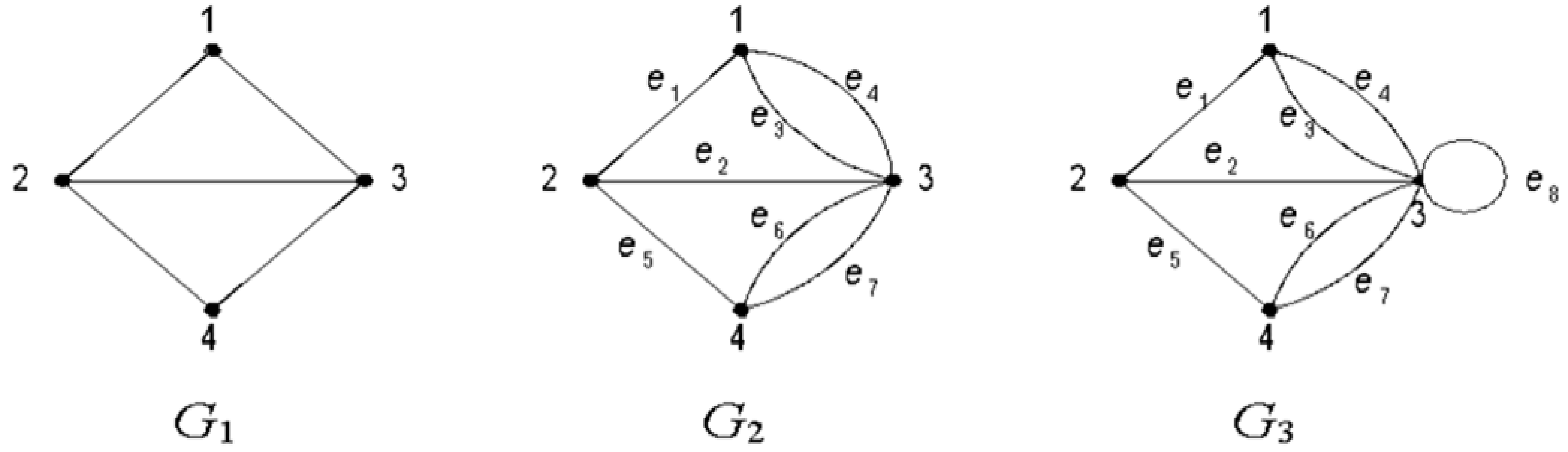
Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

$= \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$= \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 2, G_1 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \} \qquad E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

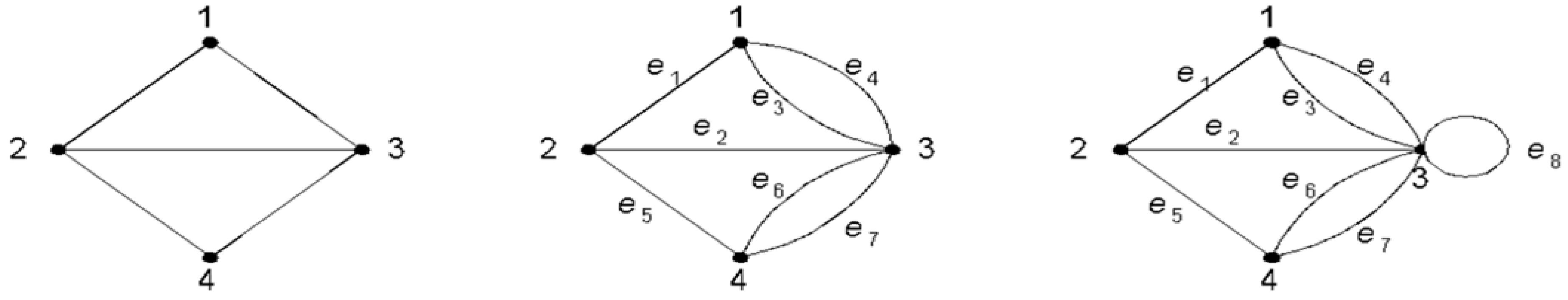
G_2 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$$
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$$

G_3 adalah graf dengan

$$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$
$$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$$
$$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$



G_1 G_2 G_3

Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada G_2, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

- Pada G_3, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

JENIS-JENIS GRAF

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. **Graf sederhana** (*simple graph*).

   Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana

2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).

   Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). G_2 dan G_3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

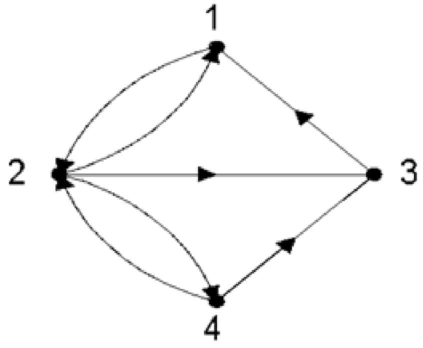
- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

  1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

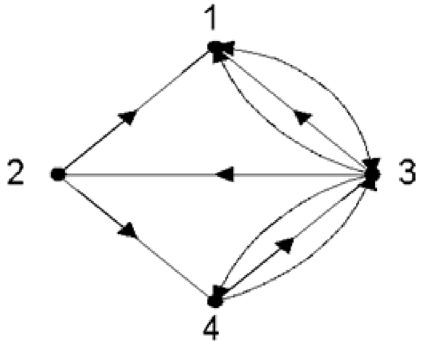
     Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

  2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

     Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



(a) G_4



(b) G_5

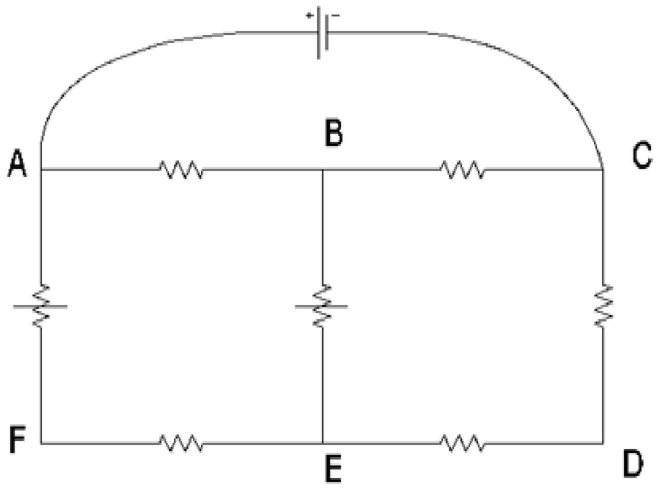
Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

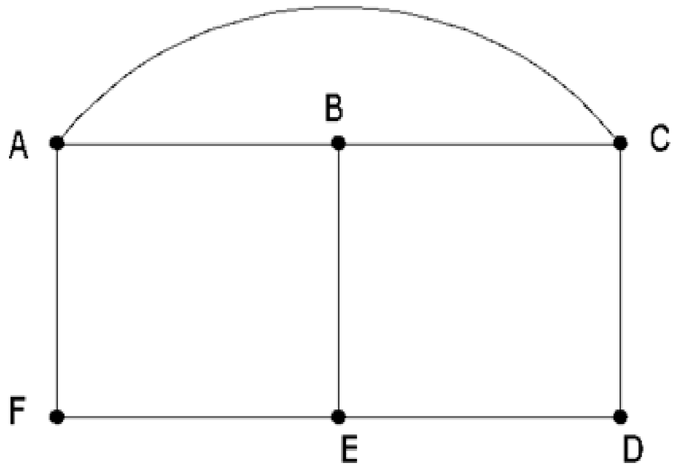
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

CONTOH PENERAPAN GRAF

1. *Rangkaian listrik.*



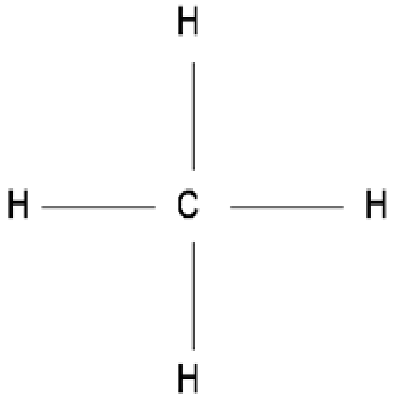
(a)



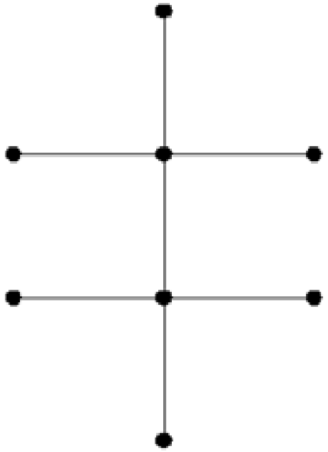
(b)

2. *Isomer senyawa kimia karbon*

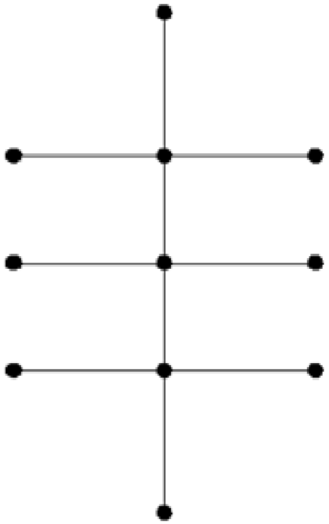
metana (CH_4)



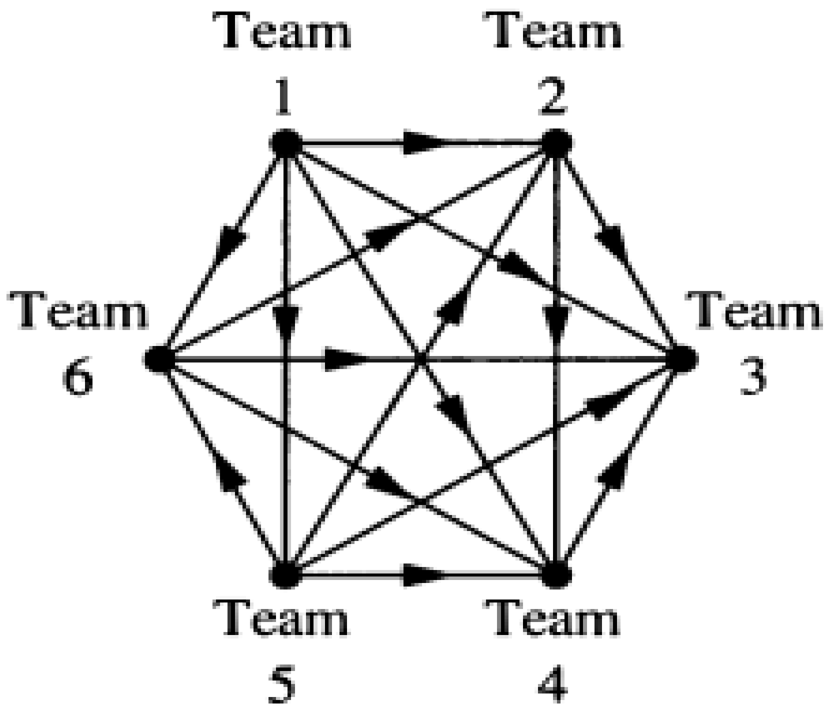
etana (C_2H_6)



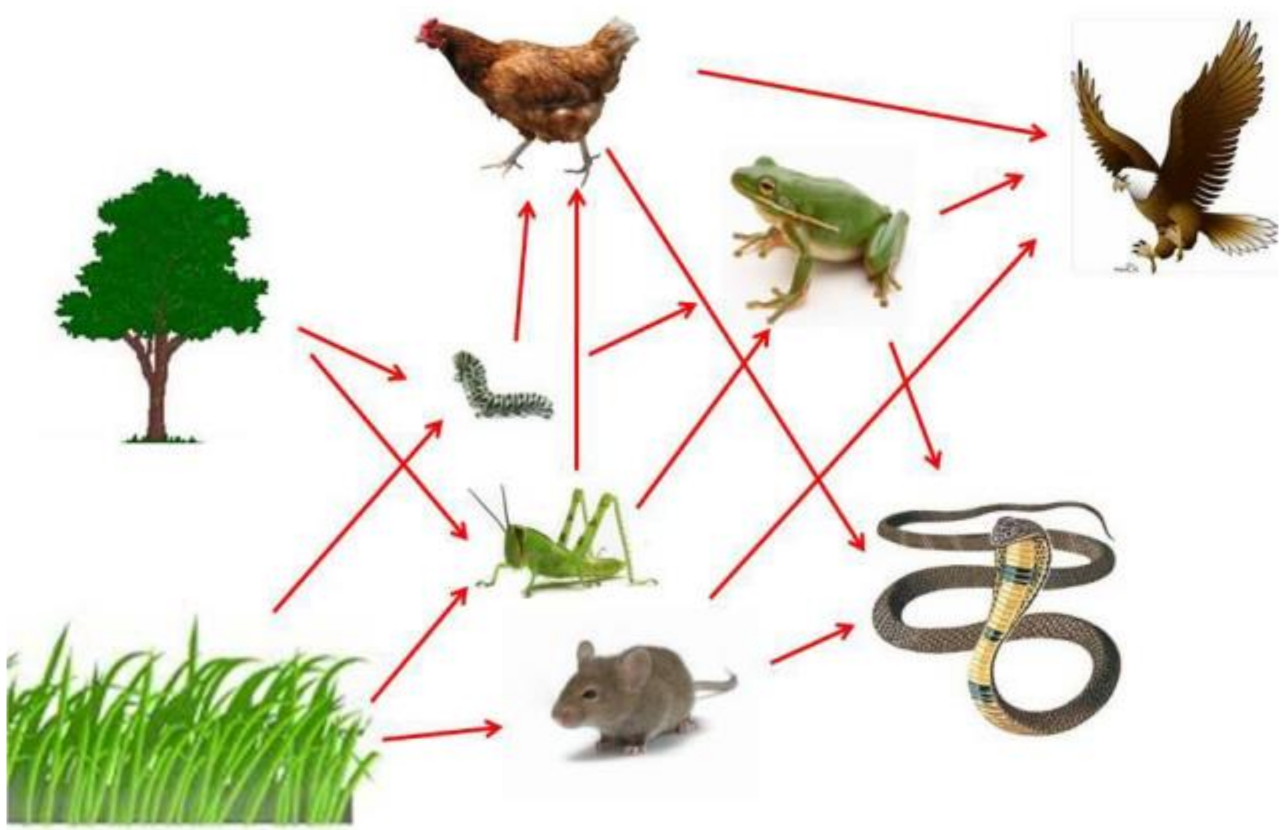
propana (C_3H_8)



3. Round-Robin Tournament

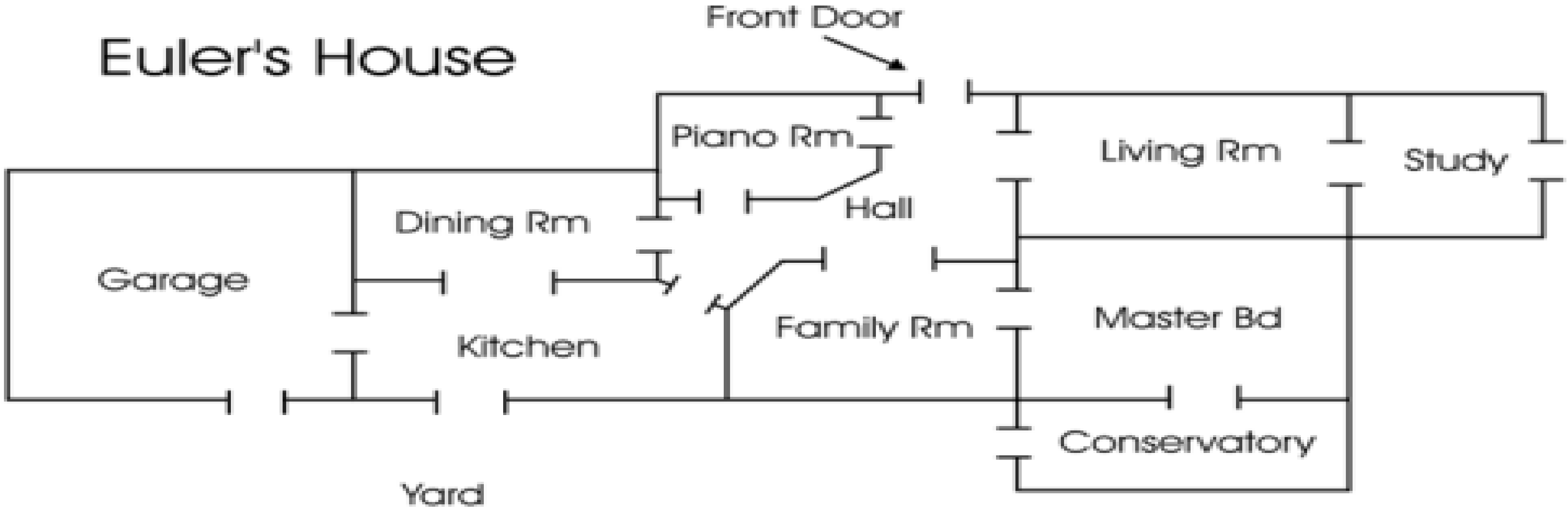


4. Jaring-jaring Makanan



Latihan

Represent the figure below to a graph.



Latihan

Draw graph models, stating the type of graph (from Table 1) used, to represent airline routes where every day there are four flights from Boston to Newark, two flights from Newark to Boston, three flights from Newark to Miami, two flights from Miami to Newark, one flight from Newark to Detroit, two flights from Detroit to Newark, three flights from Newark to Washington, two flights from Washington to Newark, and one flight from Washington to Miami, with

a) an edge between vertices representing cities that have a flight between them (in either direction).

b) an edge between vertices representing cities for each flight that operates between them (in either direction).

c) an edge between vertices representing cities for each flight that operates between them (in either direction), plus a loop for a special sightseeing trip that takes off and lands in Miami.

d) an edge from a vertex representing a city where a flight starts to the vertex representing the city where it ends.

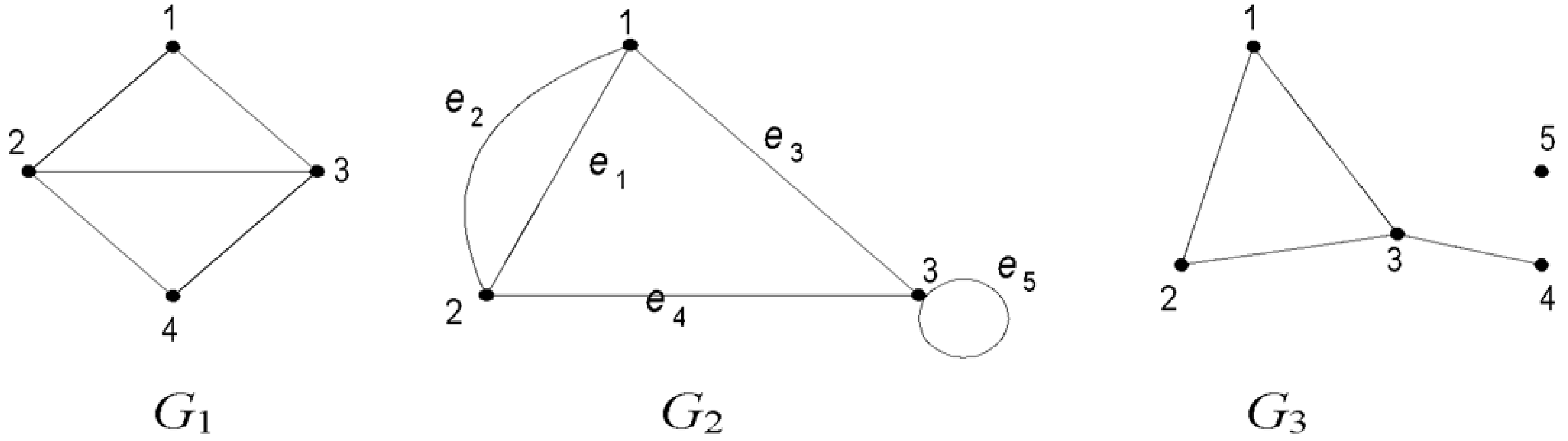
e) an edge for each flight from a vertex representing a city where the flight begins to the vertex representing the city where the flight ends.

TERMINOLOGI GRAF

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf G_1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

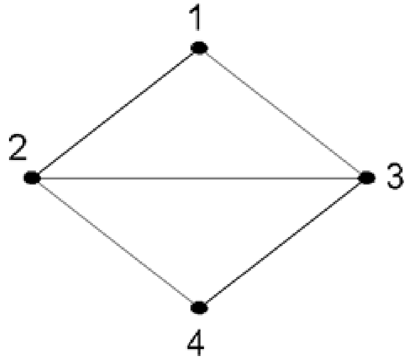


2. Bersisian (*Incidency*)

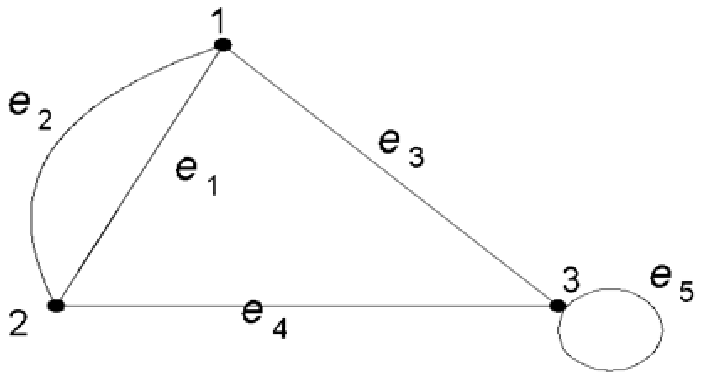
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan simpul v_j , atau
e bersisian dengan simpul v_k

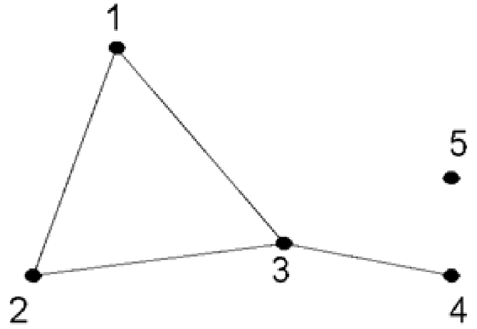
Tinjau graf G_1: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.



G_1



G_2

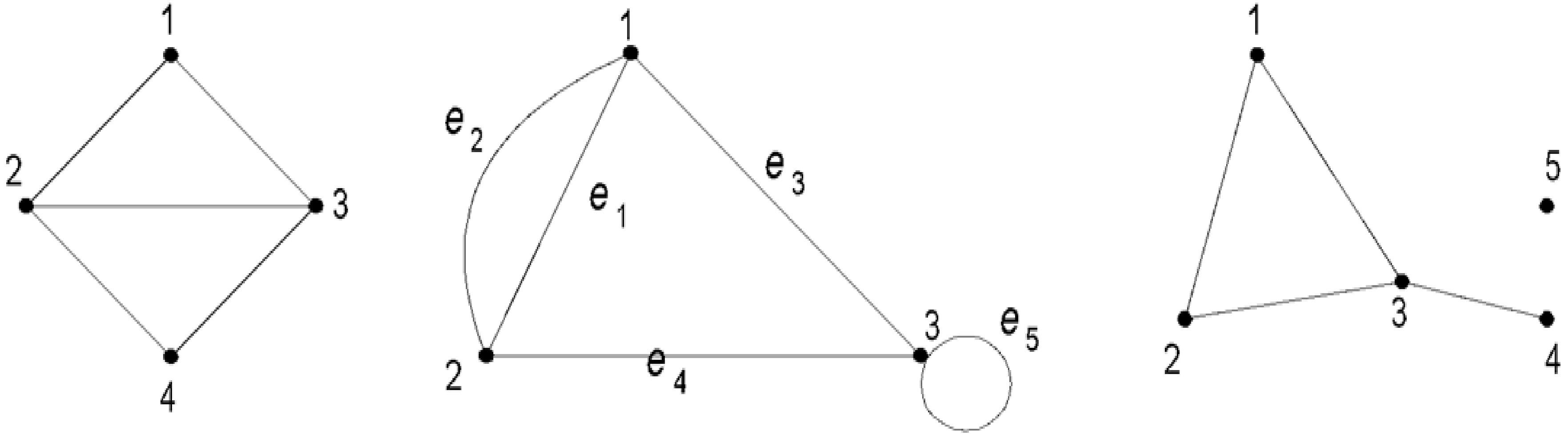


G_3

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.

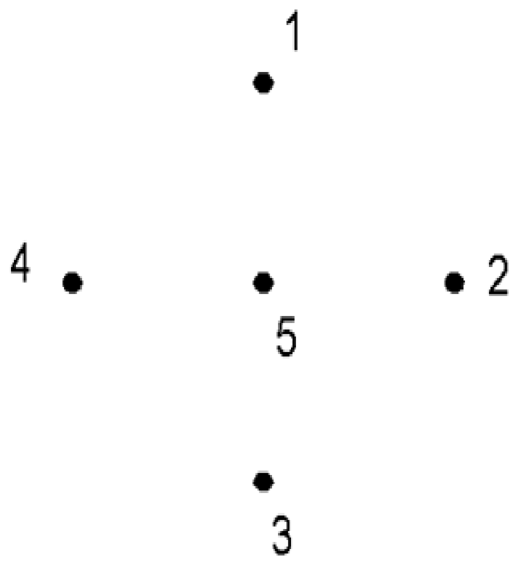


G_1 G_2 G_3

4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).

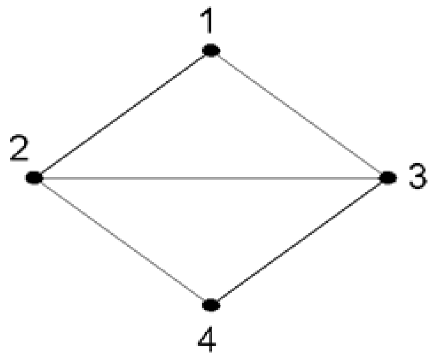
Graf N_5 :



5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

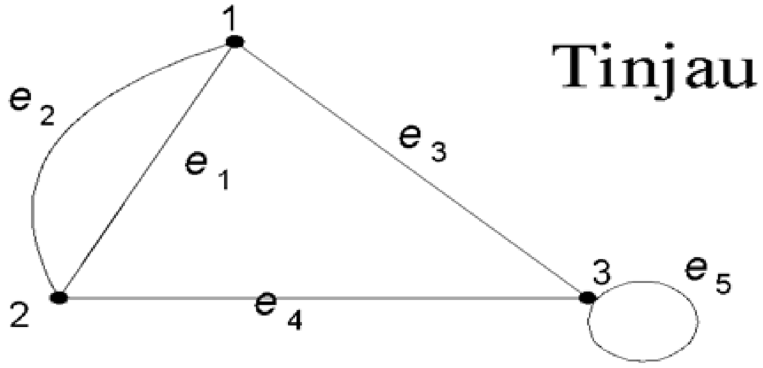
Notasi: $d(v)$



G_1

Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$

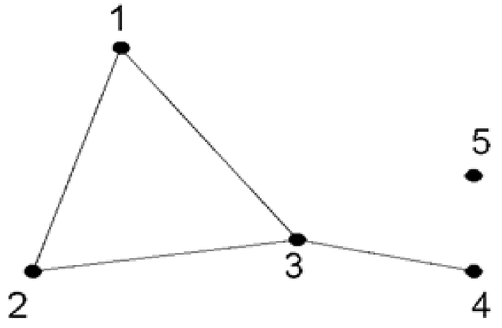
$d(2) = d(3) = 3$



G_2

Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$

$d(2) = 4$



G_3

Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$

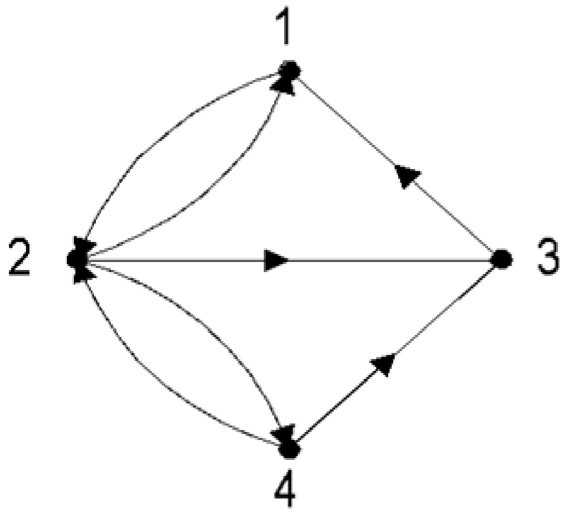
$d(4) = 1$

Pada graf berarah,

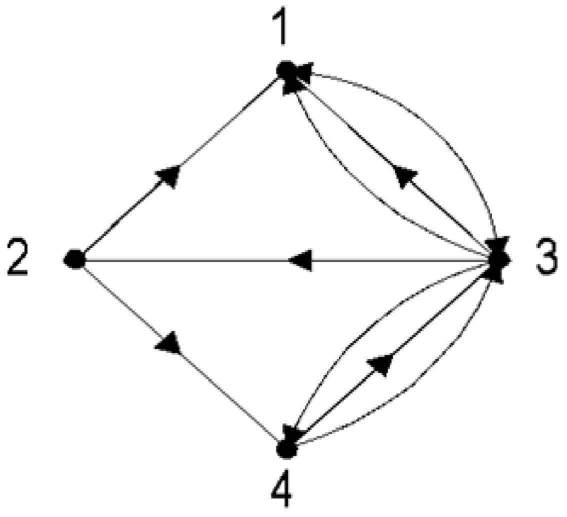
$d_{\text{in}}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree*)
= jumlah busur yang masuk ke simpul v

$d_{\text{out}}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)
= jumlah busur yang keluar dari simpul v

$$d(v) = d_{\text{in}}(v) + d_{\text{out}}(v)$$



G_4



G_5

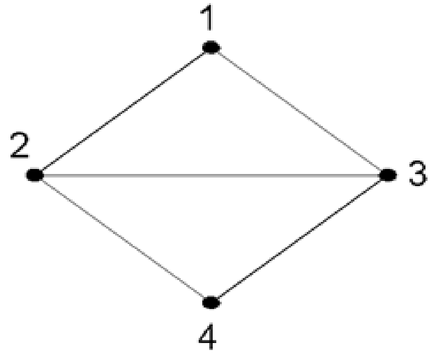
Tinjau graf G_4:

$$d_{\text{in}}(1) = 2;\ d_{\text{out}}(1) = 1$$
$$d_{\text{in}}(2) = 2;\ d_{\text{out}}(2) = 3$$
$$d_{\text{in}}(3) = 2;\ d_{\text{out}}(3) = 1$$
$$d_{\text{in}}(4) = 1;\ d_{\text{out}}(3) = 2$$

Lemma Jabat Tangan

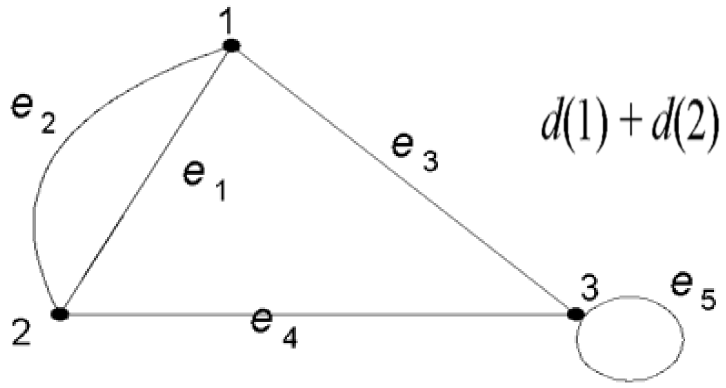
Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



G_1

$$d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$$
$$= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$



G_2

$$d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$$
$$= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$$

- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

  Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

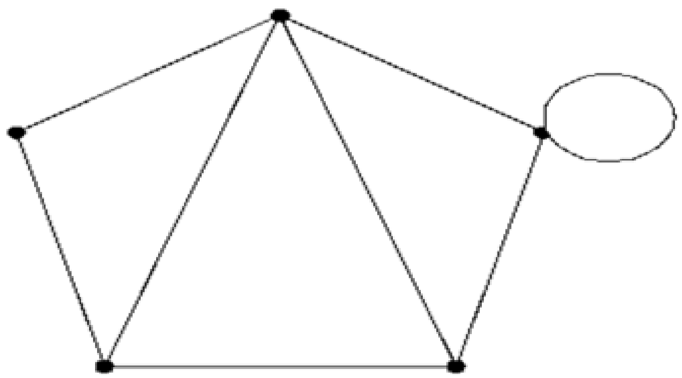
Contoh 2. Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

(a) 2, 3, 1, 1, 2
(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil $(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9)$.

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap $(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16)$.



Latihan

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

  (a) 5, 2, 3, 2, 4

  (b) 4, 4, 3, 2, 3

  (c) 3, 3, 2, 3, 2

  (d) 4, 4, 1, 3, 2

  Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

Latihan

In each of 17–25, either draw a graph with the specified properties or explain why no such graph exists.

17. Graph with five vertices of degrees 1, 2, 3, 3, and 5.

18. Graph with four vertices of degrees 1, 2, 3, and 3.

19. Graph with four vertices of degrees 1, 1, 1, and 4.

20. Graph with four vertices of degrees 1, 2, 3, and 4.

21. Simple graph with four vertices of degrees 1, 2, 3, and 4.

22. Simple graph with five vertices of degrees 2, 3, 3, 3, and 5.

23. Simple graph with five vertices of degrees 1, 1, 1, 2, and 3.

24. Simple graph with six edges and all vertices of degree 3.

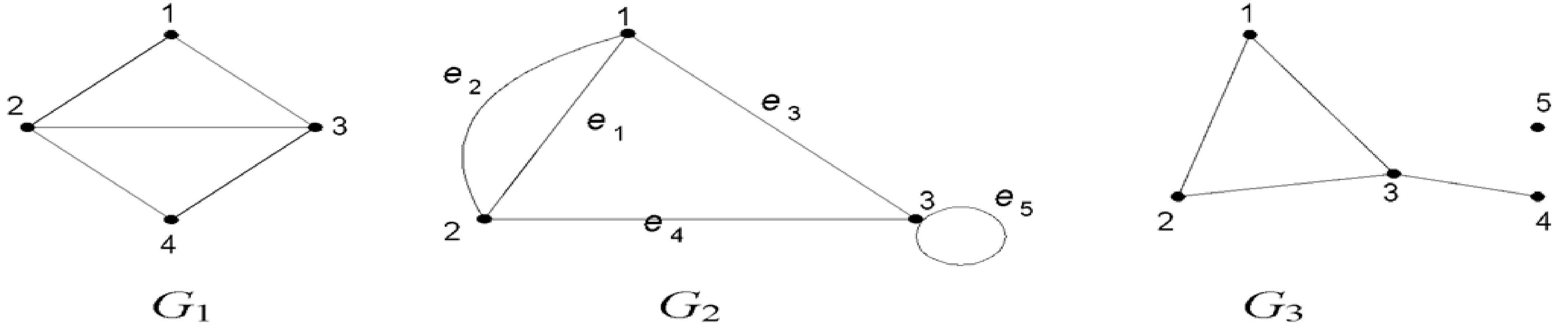
25. Simple graph with nine edges and all vertices of degree 3.

6. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,… , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, … , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut.

Contoh



Pada Graf G1, Lintasan yang mungkin terbentuk adalah (1,2) - (2,4) - (4,3) dengan Panjang lintasan 3.

Pada Graf G2, Lintasan yang mungkin terbentuk adalah e1 – e4 dengan Panjang lintasan 2.

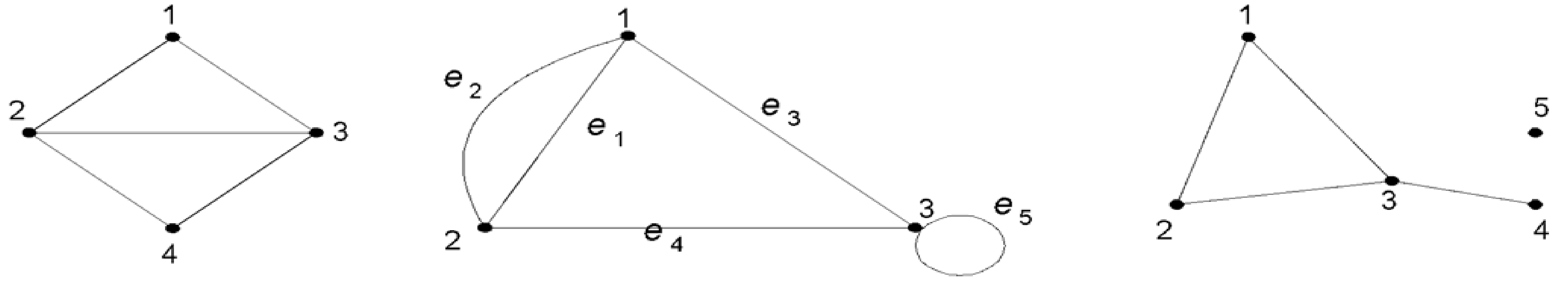
Pada Graf G3, Lintasan yang mungkin terbentuk adalah (1,2) – (2,3) – (3,4) dengan Panjang lintasan 3.

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.



G_1 G_2 G_3

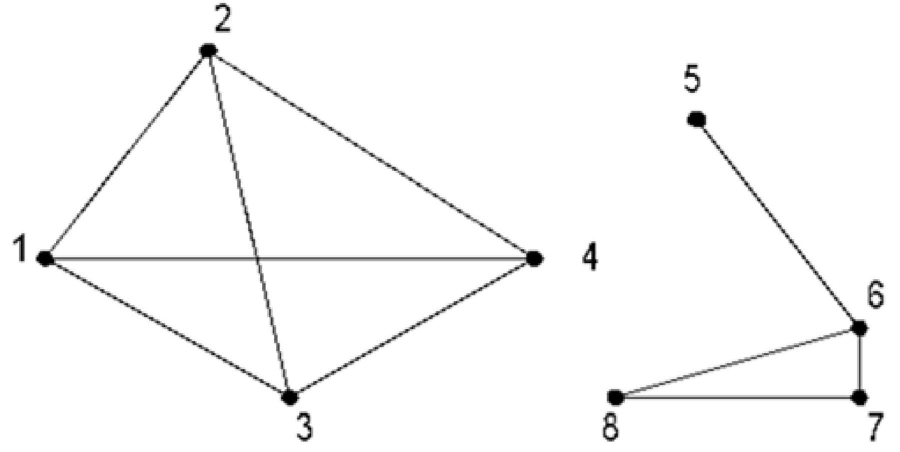
8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh graf tak-terhubung:

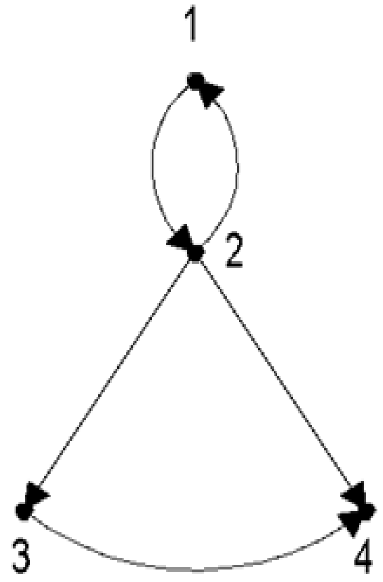


- Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

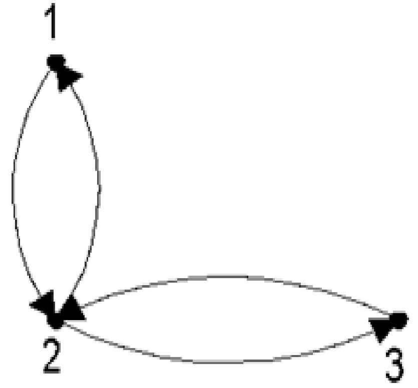
- Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u.

- Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

- Graf berarah *G* disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang *u* dan *v* di *G*, terhubung kuat. Kalau tidak, *G* disebut **graf terhubung lemah**.



graf berarah terhubung lemah



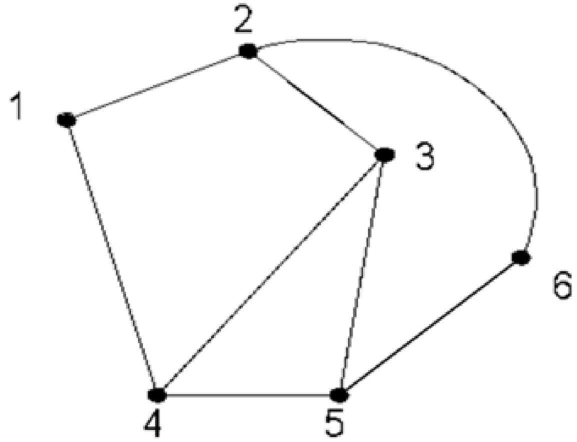
graf berarah terhubung kuat

8. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

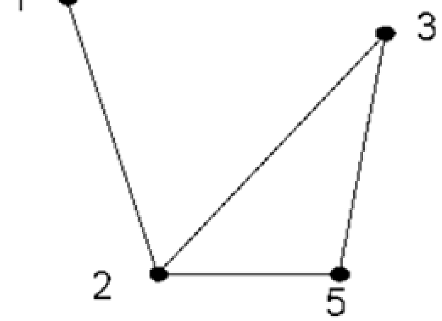
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

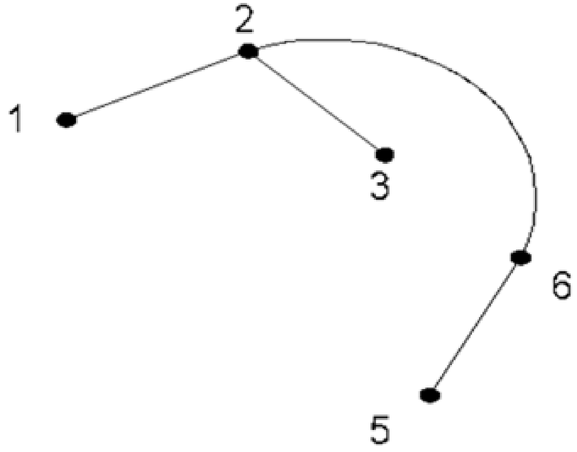
Contoh



(a) Graf G_1



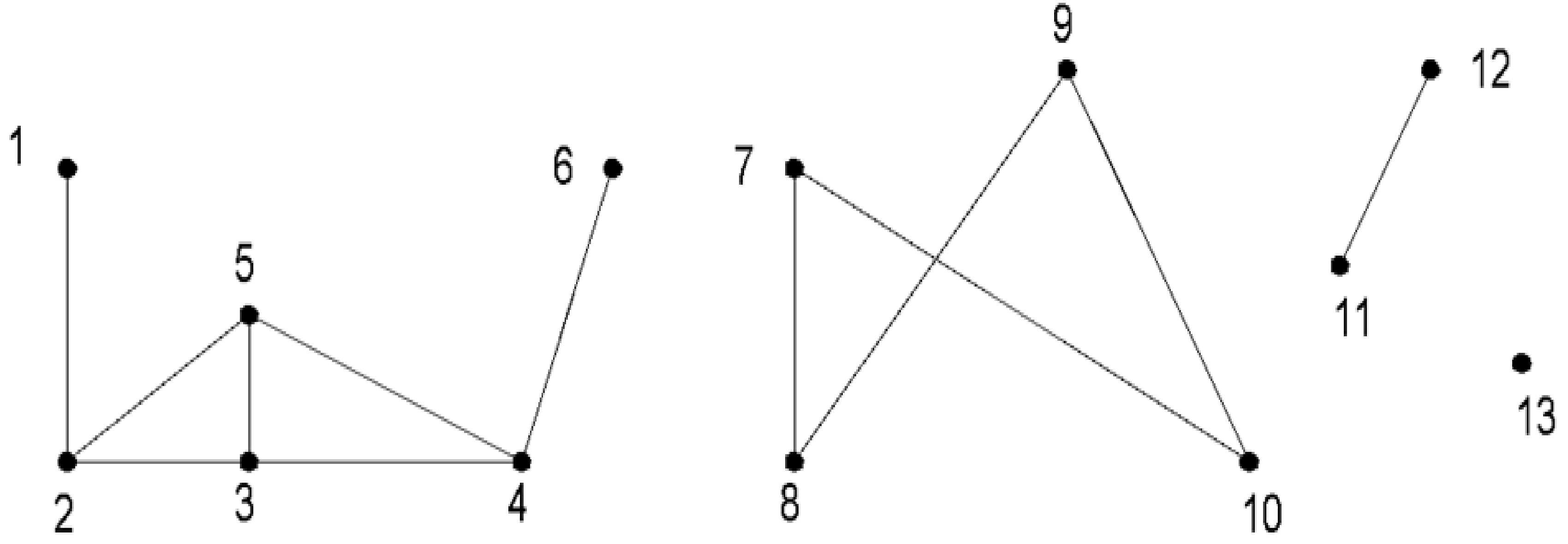
(b) Sebuah upagraf



(c) komplemen dari upagraf (b)

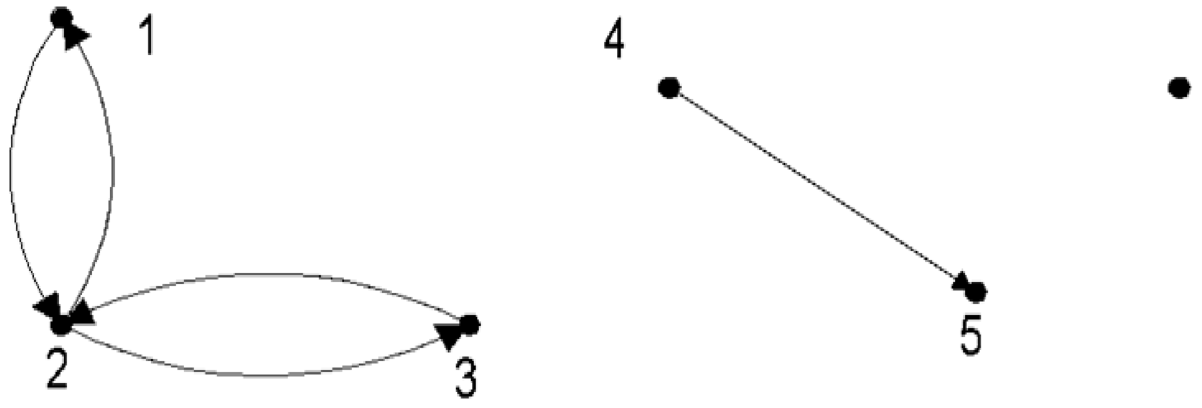
Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G.

Graf G di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



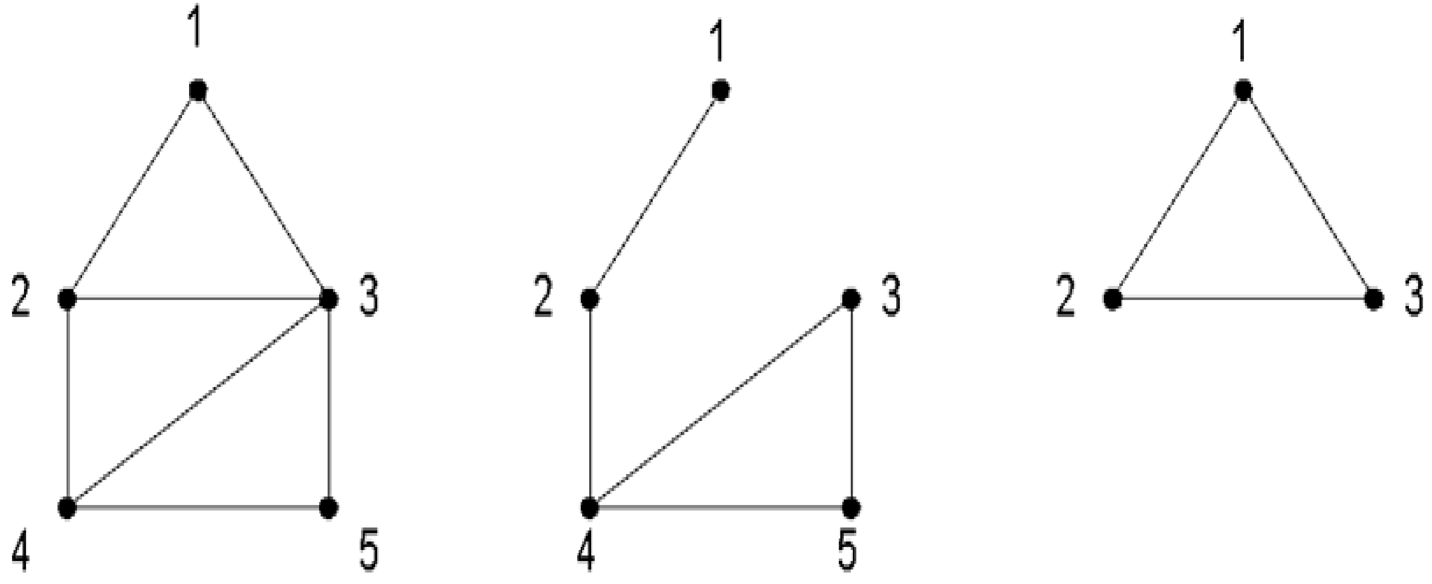
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



9. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



(a) graf G, (b) upagraf rentang dari G, (c) bukan upagraf rentang dari G

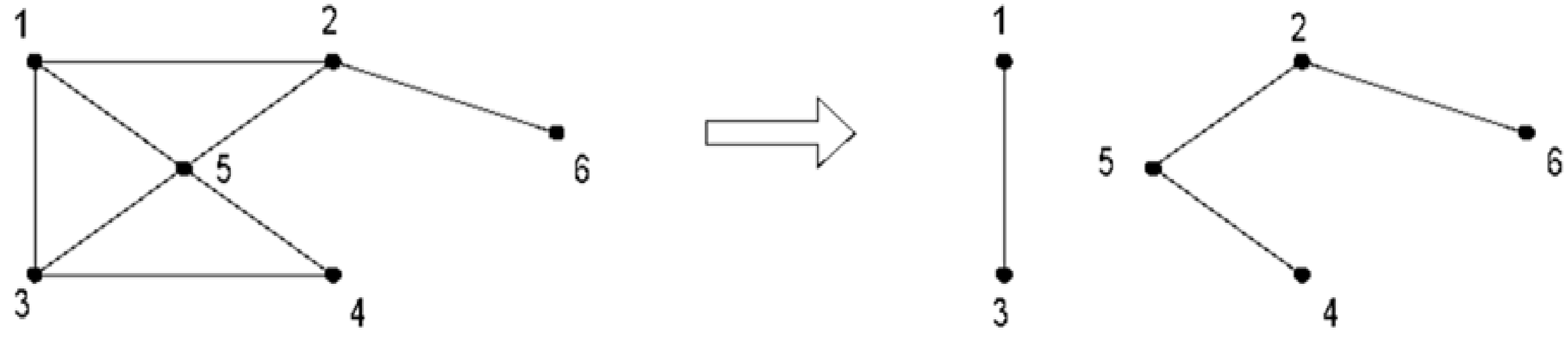
10. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*,

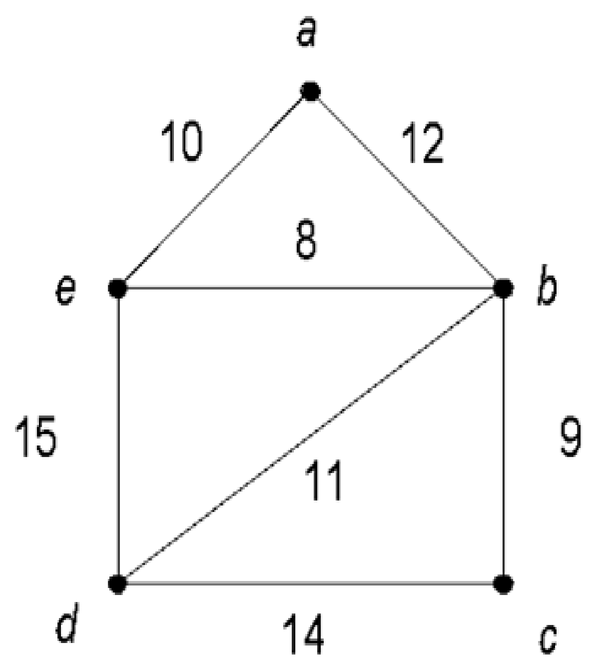
tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

11. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

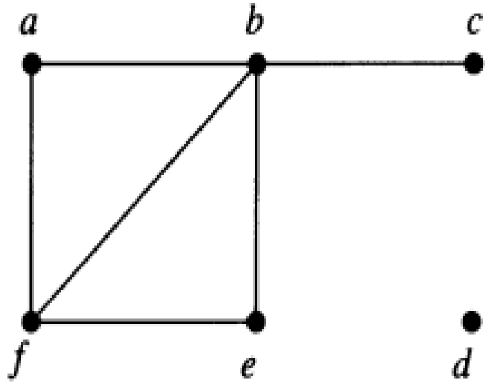
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



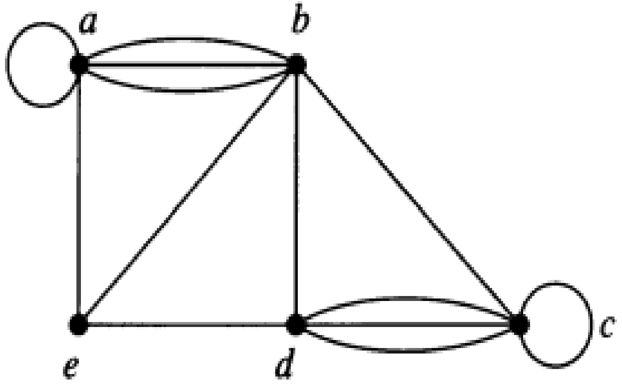
Latihan

In Exercises 1–3 find the number of vertices, the number of edges, and the degree of each vertex in the given undirected graph. Identify all isolated and pendant vertices.

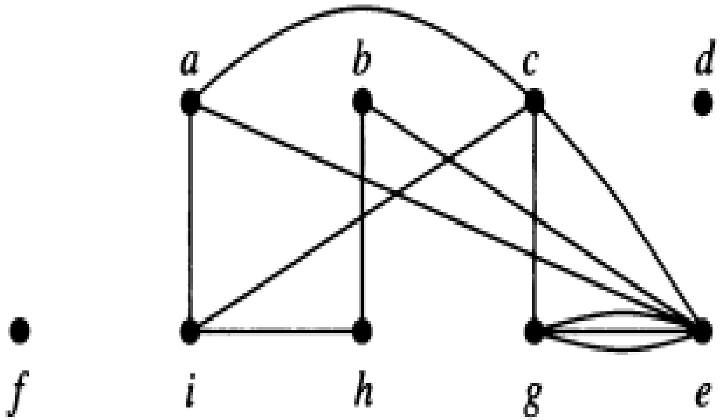
1.



2.



3.



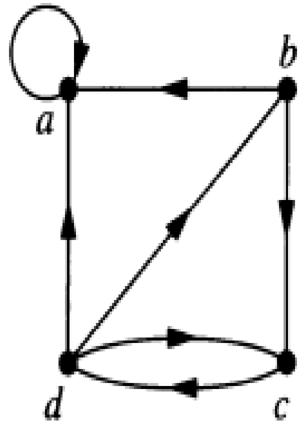
4. Find the sum of the degrees of the vertices of each graph in Exercises 1–3 and verify that it equals twice the number of edges in the graph.

5. Can a simple graph exist with 15 vertices each of degree five?

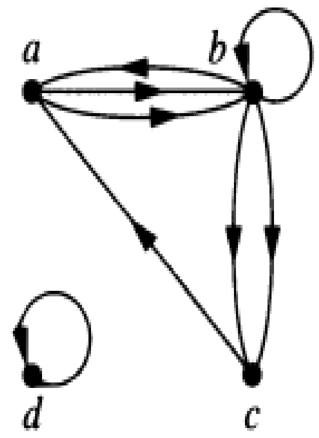
6. Show that the sum, over the set of people at a party, of the number of people a person has shaken hands with, is even. Assume that no one shakes his or her own hand.

In Exercises 7–9 determine the number of vertices and edges and find the in-degree and out-degree of each vertex for the given directed multigraph.

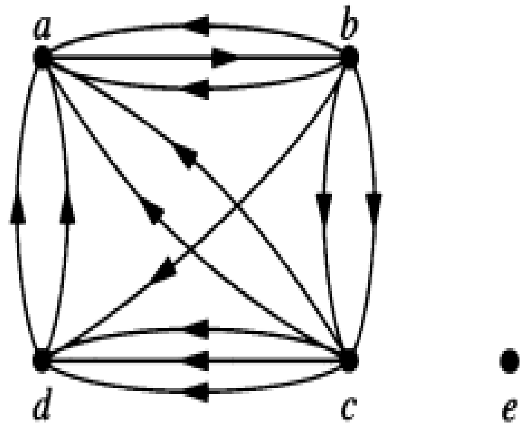
7.



8.



9.

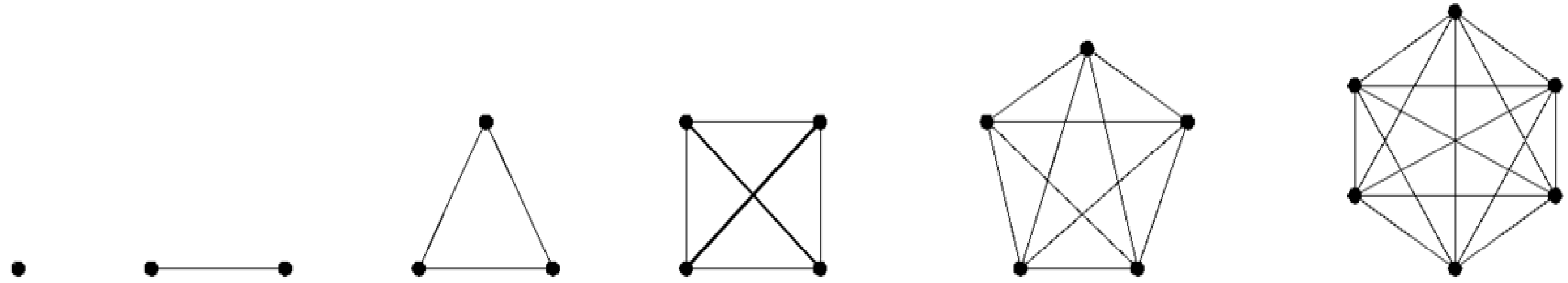


10. For each of the graphs in Exercises 7–9 determine the sum of the in-degrees of the vertices and the sum of the out-degrees of the vertices directly. Show that they are both equal to the number of edges in the graph.

BEBERAPA GRAF KHUSUS

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

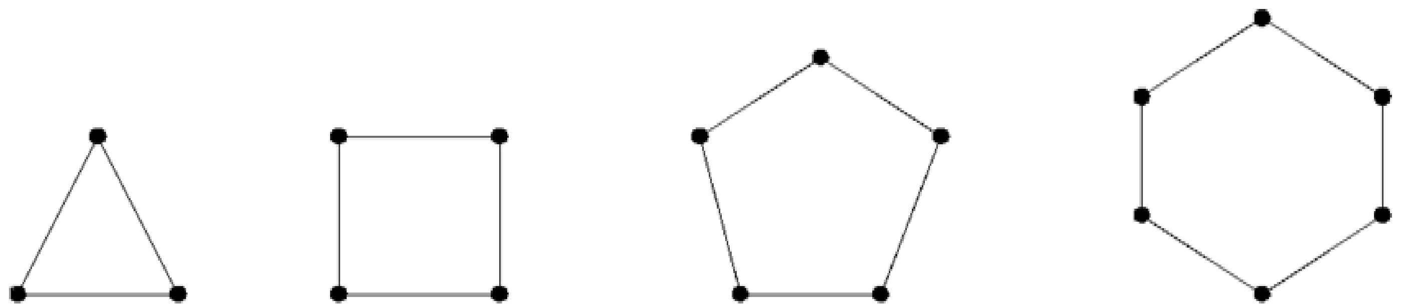
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1)/2$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

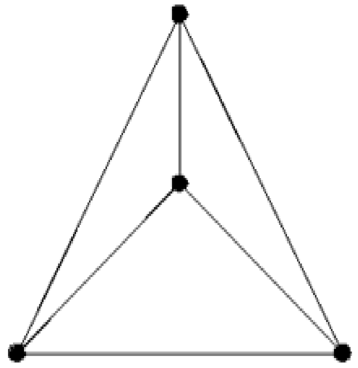
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



c. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



Contoh

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama dan tiap simpul berderajat ≥ 4 ?

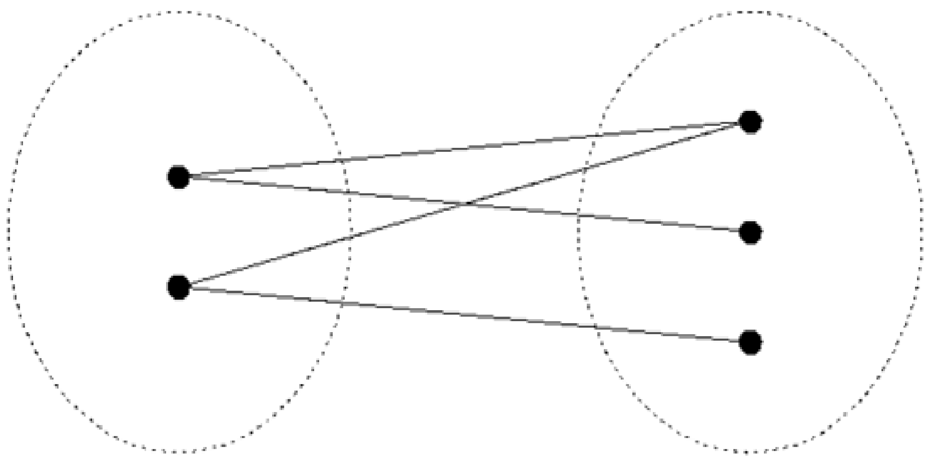
- Tiap simpul berderajat sama -> graf teratur.
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah $e = \frac{nr}{2}$. Jadi, $n = \frac{2e}{r} = \frac{(2)(16)}{r} = \frac{32}{r}$.
- Untuk r = 4, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu $n = \frac{32}{4} = 8$.
- Untuk r yang lain (r > 4 dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):

  $r = 8 -> n = \frac{32}{8} = 4$ -> tidak mungkin membuat graf sederhana.

  $r = 16 -> n = \frac{32}{16} = 2 ->$ tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

d. Graf *Bipartite* (*Bipartite Graph*)

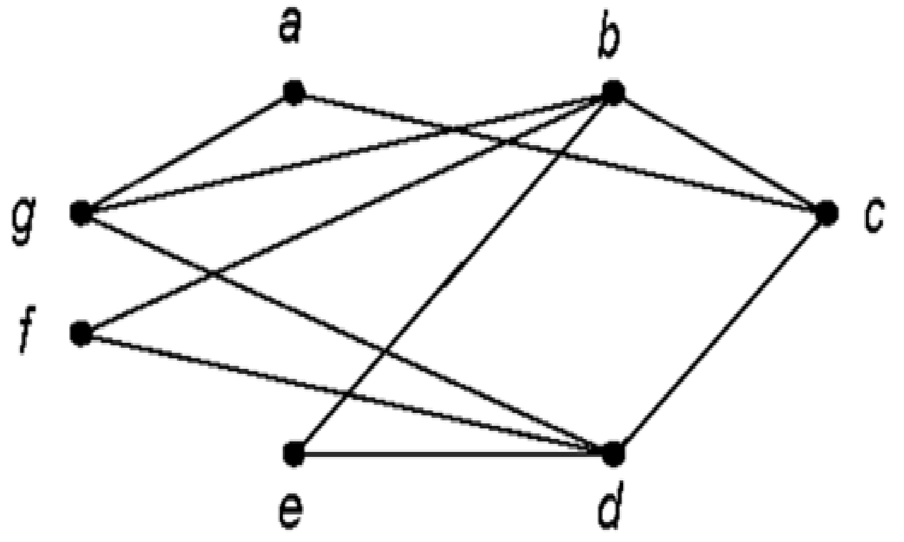
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.



V_1 V_2

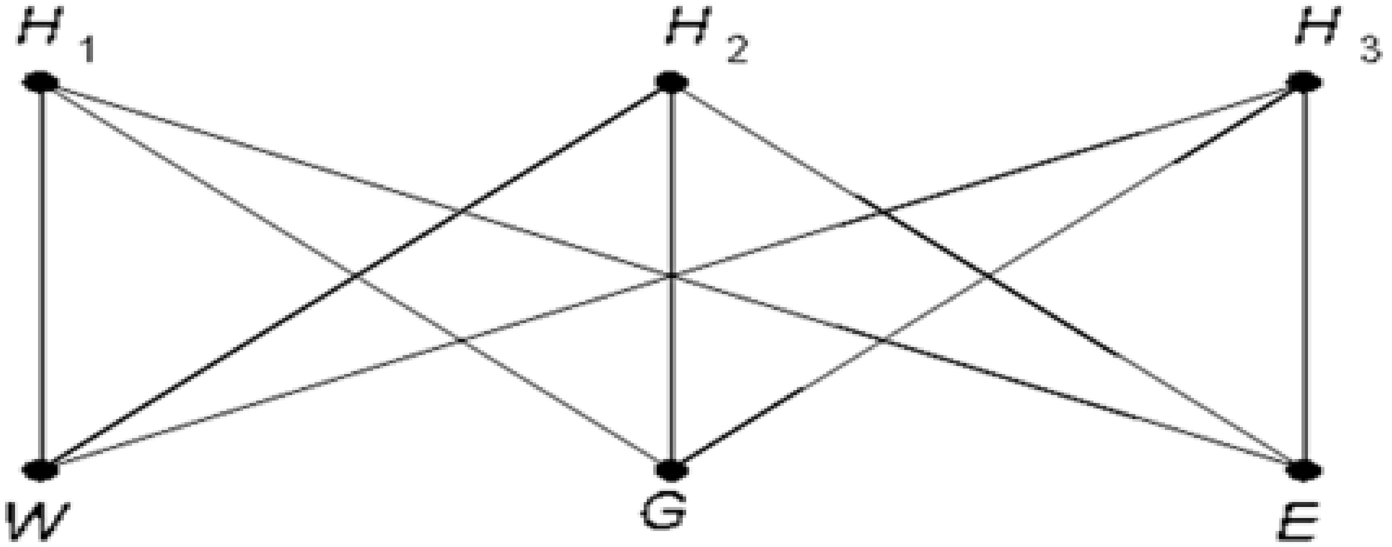
Contoh

Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$



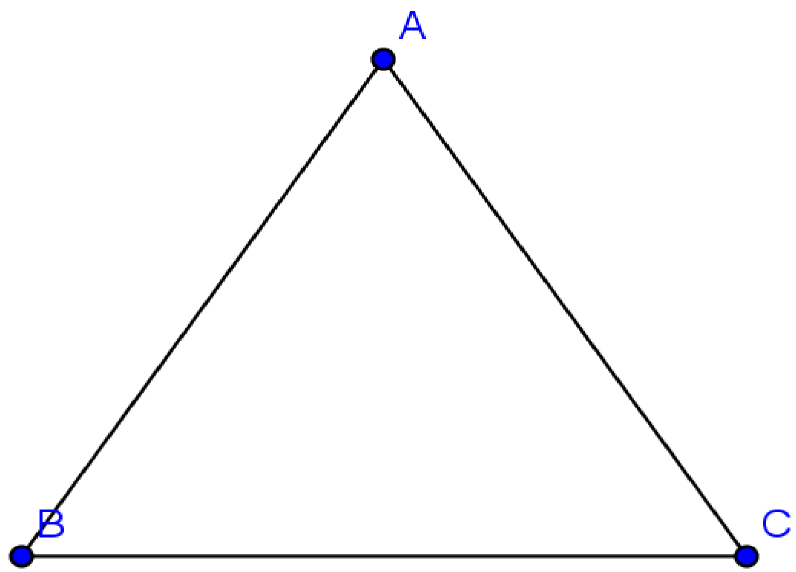
G

Contoh Graf Bipartite



graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$),

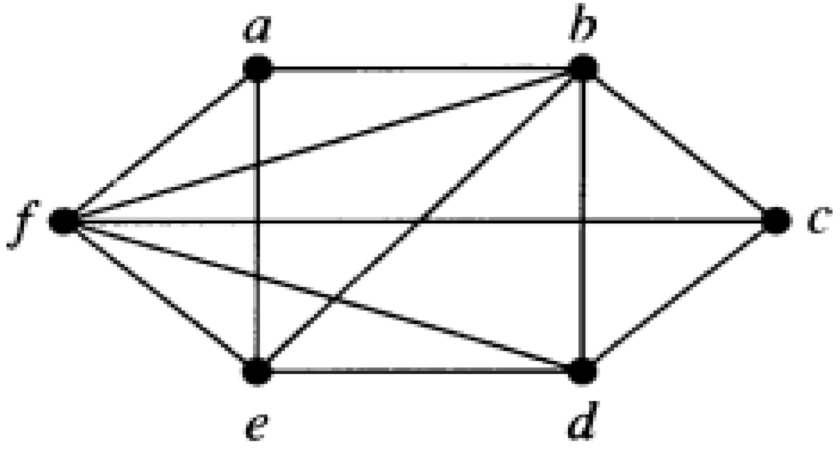
Contoh Graf Bukan Bipartite



K_3 is not bipartite. To verify this, note that if we divide the vertex set of K_3 into two disjoint sets, one of the two sets must contain two vertices. If the graph were bipartite, these two vertices could not be connected by an edge, but in K_3 each vertex is connected to every other vertex by an edge. ◀

Latihan

Apakah Graf H merupakan graf Bipartite?

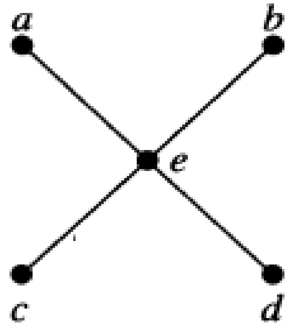


H

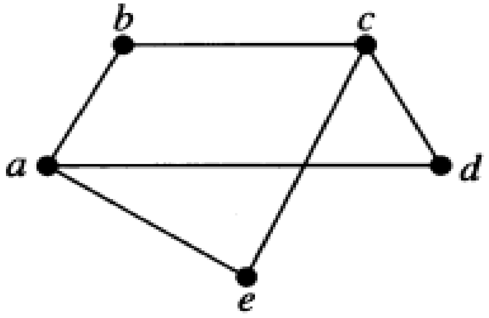
Latihan

In Exercises 21–25 determine whether the graph is bipartite.

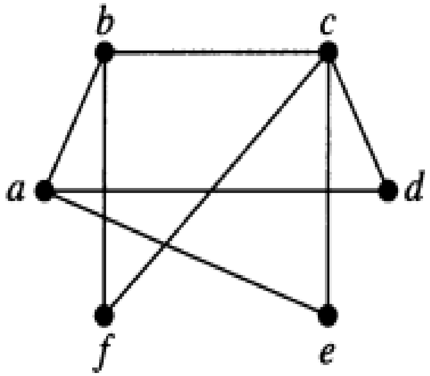
21.



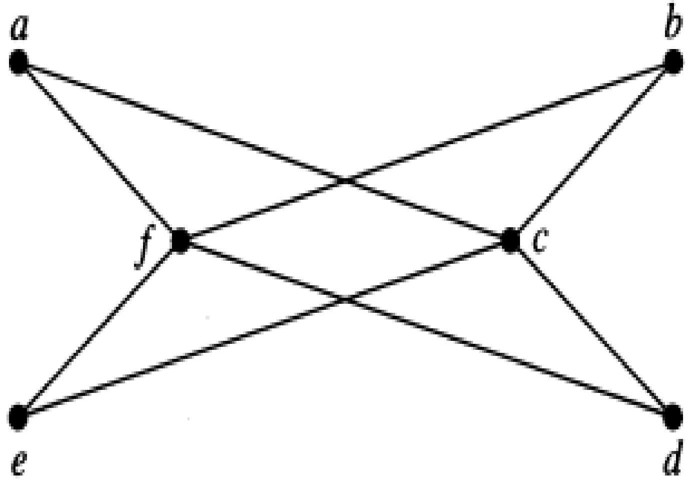
22.



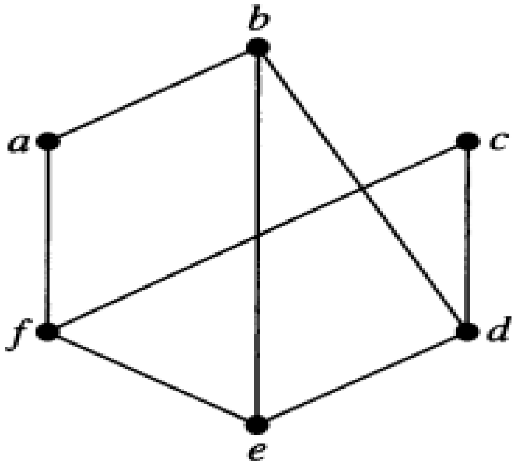
23.



24.



25.



REPRESENTASI GRAF

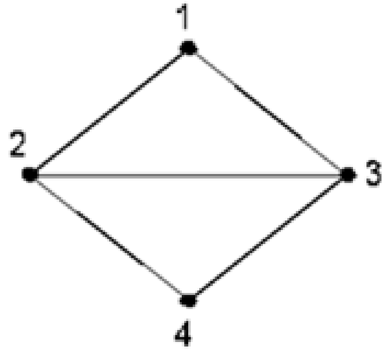
1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

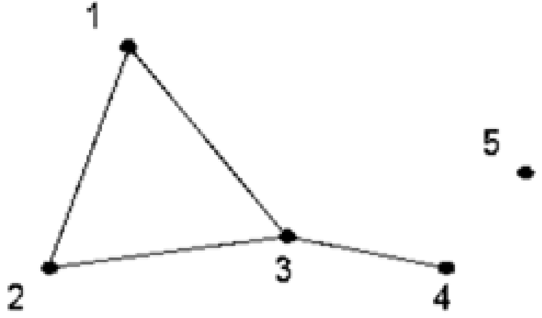
Contoh

Buatlah Matriks Adjacency yang merepresentasikan graf-graf berikut !



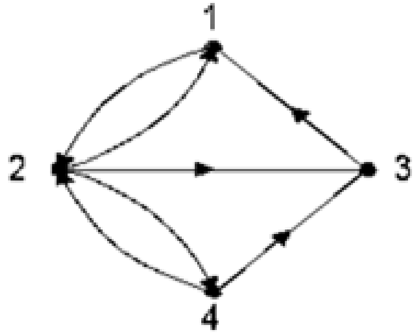
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

(a)



$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

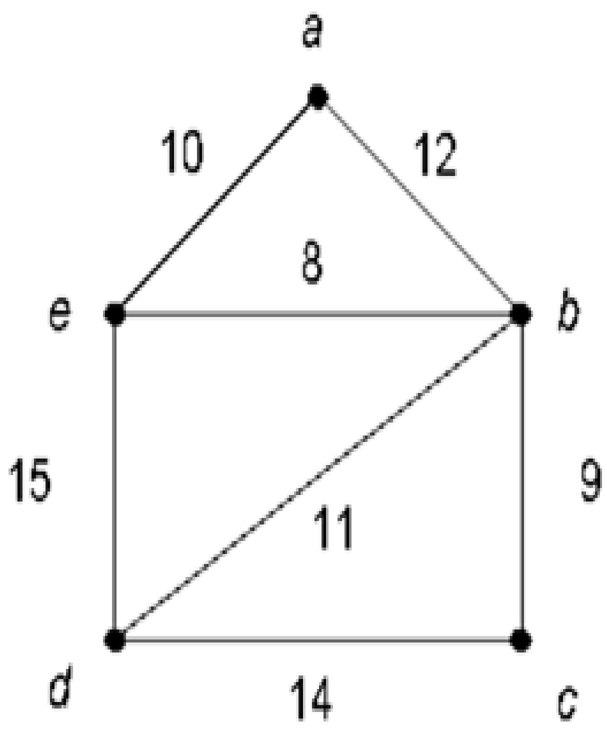
(b)



$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

(c)

Contoh Matriks Adjasensi Untuk Graf Berlabel



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Derajat tiap simpul i:

(a) Untuk graf tak-berarah

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Contoh

Diberikan matriks Adjasensi dari suatu matriks :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)

a. $d(v_1) = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 0 + 1 + 1 + 0 = 2$

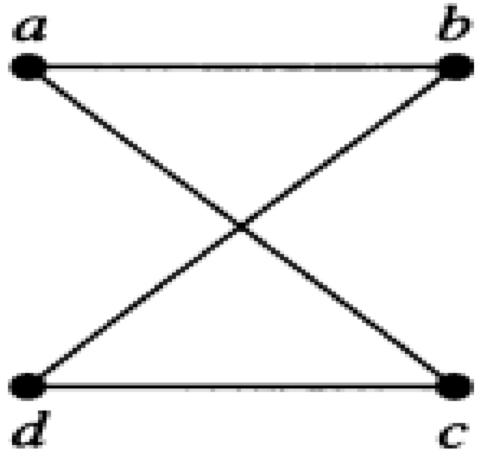
b. $d(v_4) = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + a_{45} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1$

c. $d(v_3) = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

Contoh

Draw a graph with the adjacency matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



with respect to the ordering of vertices a, b, c, d.

Contoh

Use an adjacency matrix to represent the pseudograph shown in Figure 5.

Solution: The adjacency matrix using the ordering of vertices a, b, c, d is

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

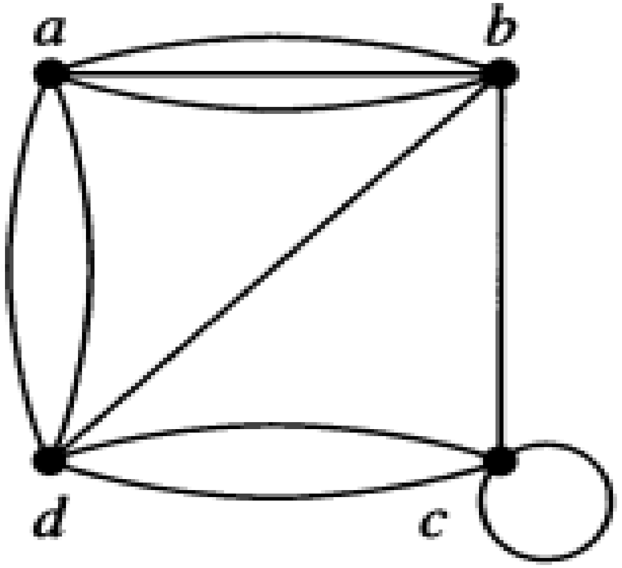


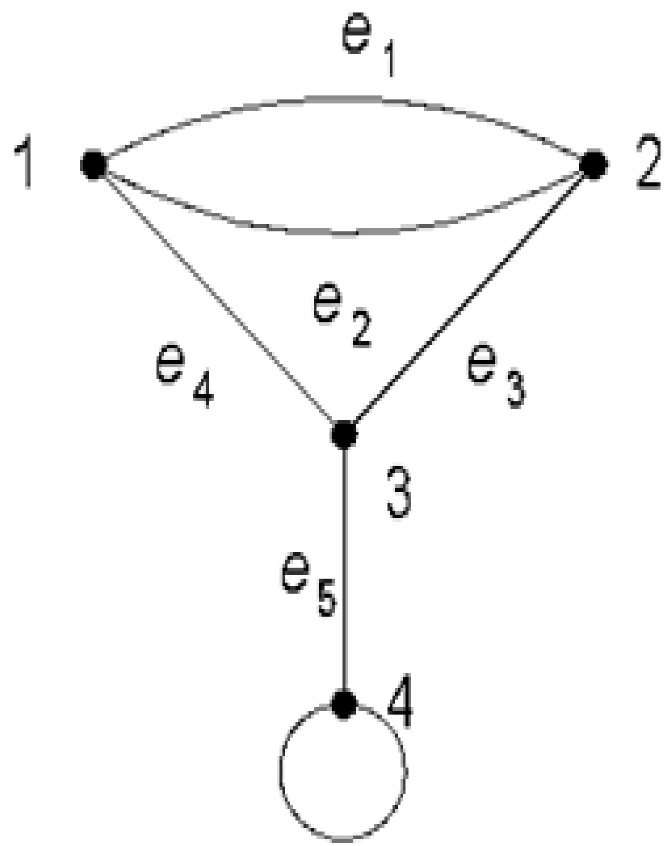
FIGURE 5

2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

Contoh Matriks Insidensi



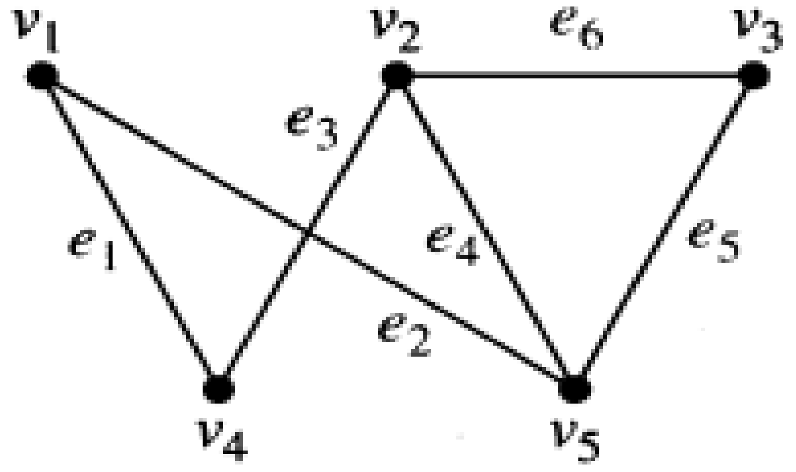
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Contoh

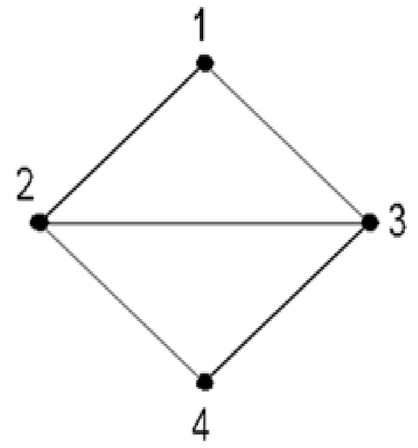
Represent the graph shown in Figure 6 with an incidence matrix.

Solution: The incidence matrix is

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

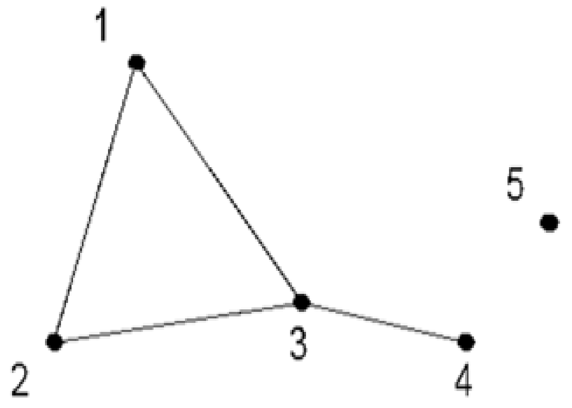


3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



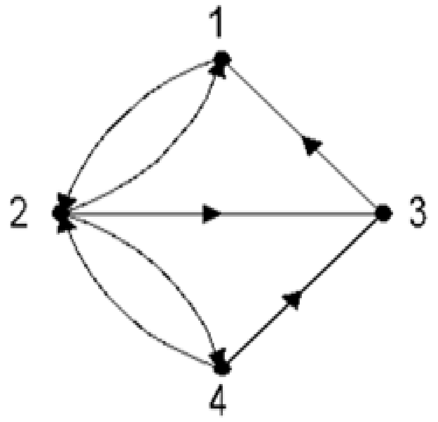
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)



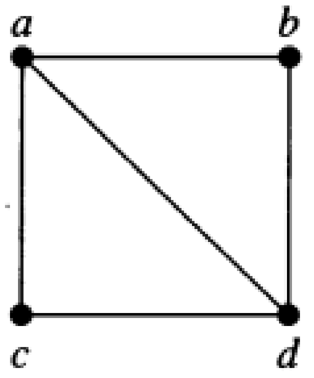
Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

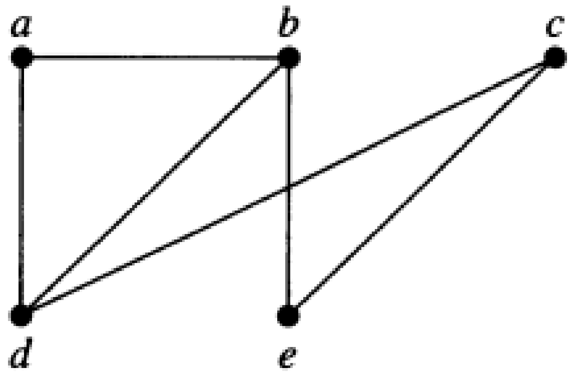
Latihan

In Exercises 1–4 use an adjacency list to represent the given graph.

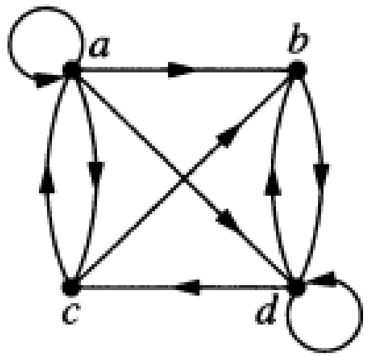
1.



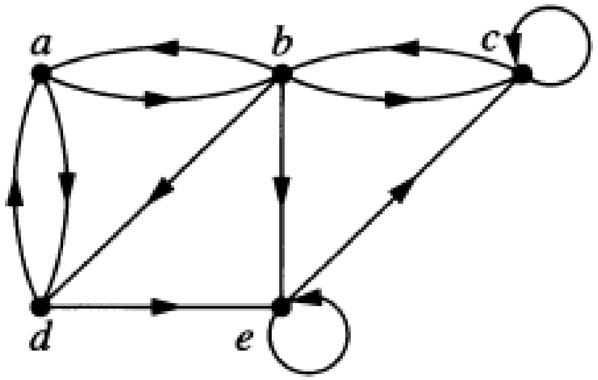
2.



3.



4.



5. Represent the graph in Exercise 1 with an adjacency matrix.

6. Represent the graph in Exercise 2 with an adjacency matrix.

7. Represent the graph in Exercise 3 with an adjacency matrix.

8. Represent the graph in Exercise 4 with an adjacency matrix.

26. Use an incidence matrix to represent the graphs in Exercises 1 and 2.

In Exercises 10–12 draw a graph with the given adjacency matrix.

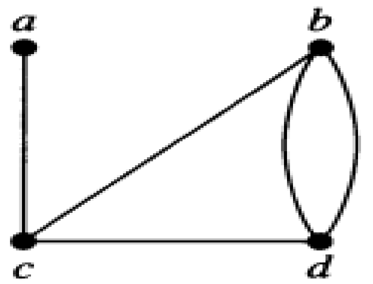
10. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

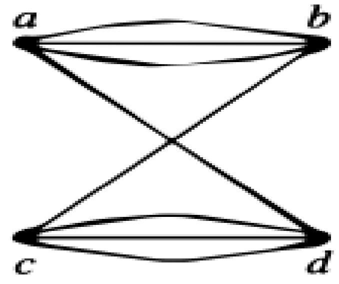
12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

In Exercises 13–15 represent the given graph using an adjacency matrix.

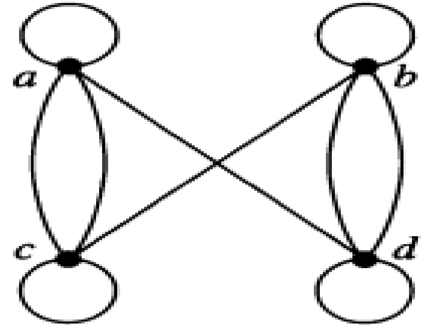
13.



14.



15.



27. Use an incidence matrix to represent the graphs in Exercises 13–15.