Travaux pratiques

Calcul de structures par éléments finis

O. Thomas – A. Grolet

— L'évaluation portera pour 1/4 sur votre participation en séance et 3/4 sur vos rendus.
— Vous devez rendre un compte rendu par binôme d'étudiant, **à la fin de la séance**, au format
NOM_Prenom_groupe.pdf,
et vos fichiers .cae, au format :
NOM_Prenom_groupe_1.cae, *NOM_Prenom_groupe_2.cae*. . . ,
sur savoir :
https ://savoir.ensam.eu/moodle/course/view.php ?id=2044
— Vous pouvez modifier vos rendus **dans un délai de une semaine à partir de la date du TP**.
— La qualité graphique du compte rendu sera évaluée. Vous devez l'écrire comme **un compte rendu d'étude**, destiné à un de vos collègue ingénieur **que vous ne connaissez pas**. Il doit donc comprendre de manière synthétique toutes les informations nécessaires à la compréhension de votre travail.
— Tous les documents nécessaires sont sur :
https ://savoir.ensam.eu/moodle/course/view.php ?id=2044

À la suite de cette séance, vous saurez :
— *créer une géométrie 3D simple dans Abaqus ou en importer une d'un modèle CAO ;*
— *calculer les modes propres de cette structure par la méthode des éléments finis ;*
— *calculer la réponse transitoire (intégration temporelle) et la réponse fréquentielle (FRFs) de cette structure.*

PARTIE I PRISE EN MAIN ET VALIDATION D'UN CALCUL ÉLÉMENTS-FINIS. ANALYSE MODALE D'UNE POUTRE (2H)

On considère une poutre droite de longueur L et de section rectangulaire de cotés $b \times h$. Choisir :
— un matériau ;
— des dimensions, tels que $L > 40h$ et $h \approx b$;
— un couple de conditions aux limites (voir Tab. 1) ;

1. On va mailler cette poutre avec des éléments finis tridimensionnels (hexaèdres ou tétraèdres). En vous fondant sur les modèles classiques de poutre, justifier l'utilisation de fonctions de forme quadratiques (hexaèdres à 20 nœuds ou tetraèdres à 10 nœuds) au lieu de fonctions de formes linéaires (hexaèdres à 8 nœuds ou tetraèdres à 4 nœuds). En théorie, combien d'héxaèdres dans l'épaisseur de la poutre sont suffisants ?
2. En s'inspirerant du tutoriel *tuto_analyse_modale_EF3D.pdf*,
   — créer le modèle dans Abaqus en éléments finis volumiques (géométrie, matériau, conditions aux limites) ;

Condition aux limites	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i > 3$
Libre-libre	0	4.730	7.853	$(2i-1)\pi/2$ (approx.)
Libre-guidée	0	2.365	5.498	$(4i-5)\pi/2$ (approx.)
Libre-articulée	0	3.927	7.069	$(4i-3)\pi/4$ (approx.)
Guidée - guidée	0	3.142	6.283	$(i-1)\pi$ (exact)
Guidée - articulée	1.561	5.712	7.854	$(2i-1)\pi/2$ (exact)
Encastrée-libre	1.875	4.694	7.855	$(2i-1)\pi/2$ (approx.)
Articulée-articulée	3.142	6.283	9.425	$i\pi$ (exact)
Encastrée-articulée	3.927	7.069	10.210	$(4i+1)\pi/4$ (approx.)
Encastrée-guidée	2.365	5.498	8.639	$(4i-1)\pi/4$ (approx.)
Encastrée-encastrée	4.730	7.853	10.996	$(2i+1)\pi/2$ (approx.)

TAB. 1 – Valeurs des β_i pour une poutre en flexion selon plusieurs conditions aux limites

— mailler la poutre avec des hexaèdres à 20 nœuds (fonctions de formes quadratiques), avec environ 2 éléments dans l'épaisseur et 40 dans la longueur ;
— procéder à l'analyse modale de la poutre.

Le compte rendu fera apparaître les 12 premiers modes dans un tableau (3 colonnes, 4 lignes avec des copies d'écran des déformées modales et la fréquence propre en dessous), ainsi que tous les détails de géométrie permettant de définir parfaitement le problème. On qualifiera ces modes par leur famille : "flexion suivant [...]", "traction", "torsion".

3. Calculer les valeurs des fréquences propres de flexion à partir du modèle analytique du cours avec cinématique d'Euler-Bernouilli (diaporama n°6 *slide_06_modele_continu.pdf*). En particulier, la i^{e} fréquence propre (en Hz) est
$$f_i = \frac{\beta_i^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \tag{1}$$
avec β_i défini dans le Tab. 1.
4. Résumer vos résultats dans un tableau avec les fréquences de flexion issues du modèle éléments-finis, celles issues du modèle analytique et le pourcentage d'erreur. **Ce pourcentage devrait être en dessous de 1%** pour un certain nombre de modes.
5. EN analysant vos résultats, estimer combien d'éléments finis il faut prévoir par longueur d'onde pour calculer "correctement" un mode donné, c'est-à-dire avec une erreur de moins de 1% ?
6. si vous avez le temps, comparer ces résultats avec :
   — un calcul avec une seule rangée d'hexaèdres dans l'épaisseur de la poutre, quadratiques, puis linéaires ;
   — la même chose en tetraedres.

   Pour cela **créer (par duplication) un nouveau modèle pour chaque valeur des paramètres, dans la même base de donnée de modèles ("Model Database", un seul fichier .cae)**

PARTIE II ANALYSE VIBRATOIRE D'UN DIAPASON (2H)

On propose dans cette partie d'étudier plusieurs aspects des vibrations d'un diapason (Fig. 1). C'est un outil permettant de produire un son dont la hauteur est fixe, dans le but d'obtenir une note de référence. Il est utilisé par les musiciens pour s'accorder ou par les medecins de l'audition. La hauteur d'une note de musique est directement liée à la fréquence des raies fréquentielles composant le spectre du son. La figure 3 donne la correspondance entre les notes de musiques et les fréquences. Par exemple, le La de

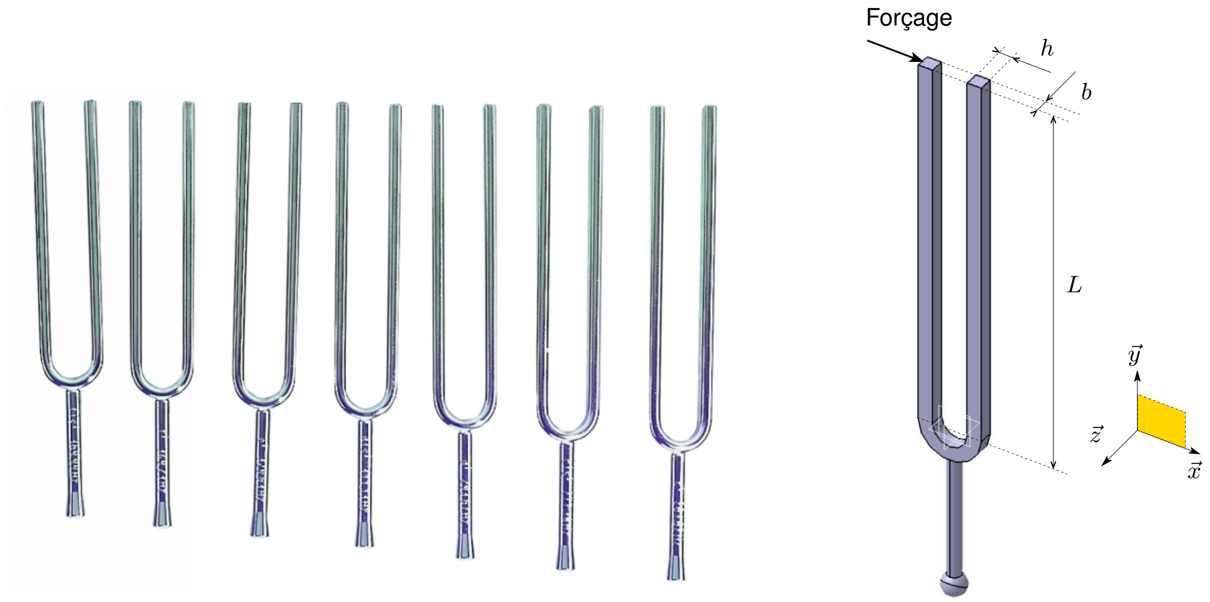

FIG. 1 – *Jeu de diapasons accordés au 1/2 ton et modèle géométrique du diapason étudié.*

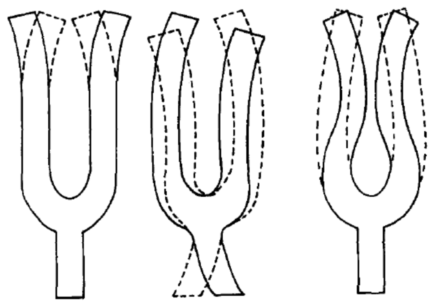

FIG. 2 – *Schéma de trois modes dans le plan d'un diapason (d'après [2]). Mode "fondamental" à gauche et mode "clang" à droite.*

référence est associé à 440 Hz. Le Do immédiatement au dessus, au milieu du clavier de piano, est à 523 Hz. La progression des notes est logarithmique en fréquence, si bien que les deux La une octave au dessus et en dessous sont à 880 Hz et 220 Hz.

On utilise le diapason en le tenant entre le pouce et l'index et en le soumettant à un choc à l'extrémité de l'une de ses branches, suivant la direction $\vec{x}$ de la Fig. 1. On peut montrer que les vibrations de ce diapason produisent une onde acoustique quasiment sinusoïdale, à la fréquence de son mode de vibration dit "fondamental", représenté sur la Fig. 2 [2, 3, 1]. Il arrivent qu'on entendent aussi une composante plus aiguë dans le son, liée aux oscillations de son mode "clang" (Fig. 2). Celles-ci sont en général amorties rapidement. En revanche, on n'entend pas les fréquences des autres modes du spectre.

L'accord d'un diapason à une fréquence donnée se fait en ajustant la longueur L des branches.

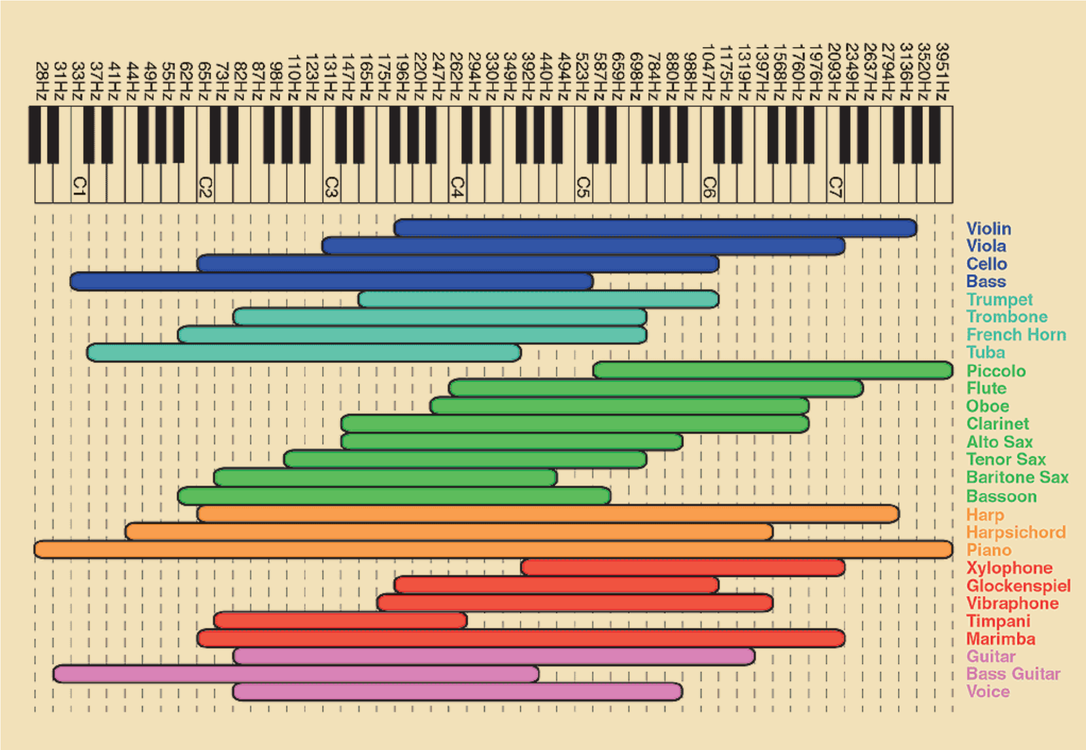

FIG. 3 – *Tessiture des instruments de musique et fréquence des notes associées*

1 Analyse modale

Un modèle CATIA V5 du diapason, avec la longueur L en paramètre [1], est disponible, ainsi que quelques fichiers .stp pour différentes longueurs L. On fera un calcul avec un diapason en acier.

1. Procéder à l'analyse modale du diapason de $L = 75$ mm encastrée au bâti par la petite boule. Faire figurer dans le rapport les 10 premiers modes (déformée modale et fréquence propres) dans un tableau. Classer ces modes en :
   — le mode "fondamental" et le mode "clang", qui vibrent dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ avec les tiges en opposition de phase. On les identifiera à partir de la Fig. 2 ;
   — des modes dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$ avec tiges en phase ;
   — des modes hors plan $(\vec{x}, \vec{y})$ avec tiges en phase ;
   — des modes hors plan $(\vec{x}, \vec{y})$ avec tiges en opposition de phase.
2. Procéder à l'analyse modale du diapason de $L = 75$ mm en conditions libres. Combien de modes de solide rigide sont obtenus ? Faire figurer dans le rapport les 10 premiers modes classés de la même manière que précédemment (sans les modes de solide rigide).
3. En considérant la géométrie des déformées modales, la direction des efforts au moment du choc et le caractère amortissant des doigts de l'opérateur, expliquer l'acoustique du diapason décrite en préambule.
4. Estimer les fréquences du mode fondamental f_0 et du mode "clang" f_c de ce diapason avec un modèle analytique de poutre encastrée - libre. La section des tiges du modèle CATIA est un

1. Dans le fichier .CATPart fourni, la longueur est définie en paramètre dans l'arbre de construction. Pour que celui-ci apparaisse, il faut modifier les options "Outils" → "Options" à deux endroits : 1/ "Général" puis "Paramètres et mesures" puis dans l'onglet "Connaissance", cocher "avec valeur" et "avec formule". 2/ "Infrastructure" puis "Infrastructure Part" puis dans l'onglet "Affichage", activer au niveau "affichage dans l'arbre" l'option "Paramètres".

carré de côté $h = b = 3.5$ mm. Préciser les dimensions de la poutre utilisée pour le calcul. En observant les déformées modales du système, interpréter la validité de cette estimation. Quelle est la dépendance des ces fréquences en fonction de L et quel est leur rapport ?

5. On cherche à déterminer la longueur L_{440} des tiges pour accorder le diapason à 440 Hz. En s'inspirant du document *tuto_analyse_parametrique.pdf*, faire l'analyse modale des diapason de $L = 60$ mm et $L = 90$ mm. Tracer f_0 en fonction de L et à partir d'une régression logarithmique, trouver α et K tels que :
$$f_0 = \frac{K}{L^\alpha}. \tag{2}$$
Comparer cette loi à celle obtenue à la question précédente et interpréter ce résultat.
6. Déduire de la loi (2) une estimation de L_{440} pour obtenir $f_0 = 440$ Hz. Prendre garde à utiliser suffisamment de chiffres significatifs pour K et α (4 ou 5) dans excel. Vérifier cette estimation avec une nouvelle analyse modale (utiliser le modèle CATIA).
7. Si vous êtes bien avancé, estimer de nouvelles valeurs de K et α, et ainsi une nouvelle valeurs de L_{440}, en utilisant les trois points les plus proches du résultat.

2 Réponse temporelle à un choc (points bonus)

On s'inspirera du tutoriel *tuto_analyse_transitoire.pdf.*

1. Calculer l'évolution temporelle du champ de déplacement du diapason soumis à un échelon de force de 1 N imposé à l'une de ses extrémités. On fera le calcul sur un temps $T = 2T_0$ où T_0 est la période propre du mode fondamental. La période d'échantillonnage (temps entre deux échantillons) sera fixé à $T_c/10$ avec T_c la période du mode "clang".
2. Tracer :
   — le déplacement et la vitesse suivant $\vec{y}$ de chacune des extrémités des branches.
   — la différence de déplacement et de vitesse suivant $\vec{y}$ entre les extrémités des branches.
   — le déplacement et la vitesse suivant $\vec{y}$ de chacune des branches au niveau d'un nœud du mode "clang".

   On fera un export des courbes et le tracé dans excel.
3. Interpréter les courbes en fonction de la valeur des fréquences des modes et de leur déformée modale.
4. S'il vous reste du temps, refaire le calcul en imposant la force au niveau d'une nœud du mode clang. Interpréter les résultats obtenus.

3 Réponse fréquentielle (points bonus)

On s'inspirera du tutoriel *tuto_analyse_frequentielle.pdf.*

1. Calculer les fonctions de réponse en fréquence (FRFs) du système pour une excitation ponctuelle à l'extrémité de l'une des branches du diapason, suivant $\vec{y}$.
2. Tracer le module des FRFs, en dB, au point d'excitation et pour un point sur un nœud du mode "clang".
3. Interpréter ces courbes en fonction des fréquences et des géométries de déformées modales.

Références

[1] R. Lehoucq and É. Kierlik. Le diapason. *Dossier Pour la Science*, pages 31–32, July 2001.

[2] T. D. Rossing, D. A. Russell, and D. E. Brown. On the acoustics of tuning forks. *American Journal of Physics*, 60(7) :620–626, 1992.

[3] D. A. Russel. On the sound field radiated by a tuning fork. *American Journal of Physics*, 68(12) :1139–1145.