Détermination du plus court chemin

Kang LIU (kang.liu@polytechnique.edu)
Jiabin CHEN (jiabin.chen@polytechnique.edu)

1 Un premier pas expérimental

1.1 T

E est l'ensemble des permutation de 1,2,...,N
Donc, #E=N!
W_x est l'ensemble des voisins de X, soit X=(X_1, X_2,..., X_N)
On peut choisir $X_i \neq X_j$ quelconque et changer leur position. Donc, Y_{n+1}=(X_1,...,X_j,...,X_i,...,X_N)
On a $\binom{n}{2}$ choix de (i, j) et spécialenment, X $\in$ W_x
Donc, #W_x = $\binom{n}{2}$+1=$\frac{n(n+1)}{2}$+1

1.2 S

Voir la question4 de cette partie. Un cas plus générale.

1.3 T

- $\sigma \notin W_x$
  $P(Y_{n+1}=\sigma \mid X_n=x)=0$
- $\sigma \in W_x$ et $\sigma \neq X$
  Donc on peut écrire σ=(X_1,...,X_j,...,X_i,...,X_N)
  On choisit i, j $\in$ 1,...,N indépendamment et uniformément
  d'où on a 2 choix(i, j) et (j, i) entre N^2 choix
  Donc $P(Y_{n+1}=\sigma \mid X_n=x)=\frac{2}{N^2}$
- σ=X
  On a N choix (1,1),(2,2),...,(N, N)entre N^2 choix
  Donc $P(Y_{n+1}=\sigma \mid X_n=x)=\frac{N}{N^2}=\frac{1}{N}$

En conclusion,

$$P(Y_{n+1} = \sigma | X_n = x) = \begin{cases} 0 & \sigma \notin W_x \\ \\ 1/N & \sigma = x \\ 2/N^2 & sinon \end{cases}$$

et on peut vérifier que $\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \binom{n}{2} = 1$

1.4 S

Voir le code complet à la fin de ce rapport.
Ici on cree 40 villes par hazard sur un cercle de rayon 10. Théoriquement si on fait parcourir les villes dans sens horaire, la chemin est inférieur la circonférence 2*pi*10, donc évidemment la plus court chemin déterminé par un bon algorithme est inférieur 2*pi*10.
D'abord, on choisit $1/n$ comme la suite, on fait 10000 fois itérations, mais par le figure on voit qu'il converge vers environ 100 qui est supérieur 2*pi*10 donc ce performance est mauvais.
Ensuite, on choisit $1/log(n)$ comme la suite, on fait également 10000 fois itérations, cette fois par le figure on voit qu'il converge vers environ 62 qui est très proche de 2*pi*10 donc ce performance est meilleur.

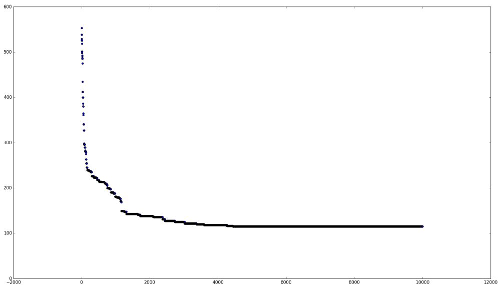

Figure 1: 1/n

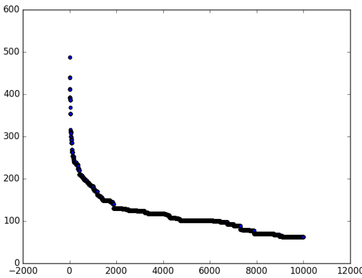

Figure 2: 1/logn

2 Un point théorique

2.1 T

- y $\notin$ W$_x$
  P(X$_{n+1}$=y | X$_n$=x)=0

- y $\in$ W$_x$ et U$_{n+1}$ $>$ exp((f(x)-f(y))/T)
  P(X$_{n+1}$=y | X$_n$=x)=0

- y $\in$ W$_x$ et U$_{n+1}$ $\leq$ exp((f(x)-f(y))/T) et y$\neq$x
  P(X$_{n+1}$=y | X$_n$=x)=P(Y$_{n+1}$=y | X$_n$=x)=2/N^2

- y=x
  On définit

$$\alpha(x) = \{y|y \in W_x etU_{n+1} > exp((f(x) - f(y))/T\}$$

donc,

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = y|X_n = x) \\ = \; & P(Y_{n+1} = x|X_n = x) + P(Y_{n+1} \in \alpha(x)|X_n = x) \\ = \; & \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\#\alpha(x) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x) = \begin{cases} \frac{y}{N^2} & y \in W_x \setminus \{\alpha(x) \cup \{x\}\} \\ \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\#\alpha(x) & y = x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et on peut vérifier que

$$\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\#\alpha(x) + \frac{2}{N^2}[\binom{n}{2} - \#\alpha(x)] = 1$$

2.2 T

Nous n'avons pas réussi à obtenir cet égalité. Donc on admet pour la question suivant.

2.3 T

$\nu_0 = \mu_T$
Supposons que $\nu_n = \mu_T$
alors $\nu_{n+1} = \mu_T$ (selon 2.2)
par récurrence, $\forall n \in N, \nu_n = \mu_T$

2.4 T

2.4.1

$\#E = N!$
Donc E est l'ensemble fini,
donc, $\{f(x) \mid x \in E\}$ est l'ensemble fini.
On définit $A = \{|f(x) - F|; x \in E\}$ est l'ensemble fini.
D'où, on peut trouver $\delta = min_{a \in A, a \neq 0}\ a$
Lorsque $0 < \varepsilon < \delta$
$\forall x \in E$ t.q. $f(x) > F$,
On a $f(x) \geq F + \delta > F + \varepsilon$, selon la définition de δ
donc, $\{x \in E \mid f(x) > F\} \subseteq \{x \in E \mid f(x) > F + \varepsilon\}$
et inversement,$\{x \in E \mid f(x) > F + \varepsilon\} \subseteq \{x \in E \mid f(x) > F\}$ est claire
donc,$\{x \in E \mid f(x) > F\} = \{x \in E \mid f(x) > F + \varepsilon\}$

2.4.2

$\mu_T(x) = \frac{exp(-f(x)/T)}{\sum_{y \in E} exp(-f(y)/T)}$
donc,

$$\begin{aligned}
& \mu_T(\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}) \\
= & \frac{\sum_{\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}} exp(-f(x)/T)}{\sum_{y \in E} exp(-f(y)/T)} \\
\leq & \frac{\sum_{\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}} exp(-f(x)/T)}{exp(-F/T)} \\
= & \sum_{\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}} exp(-\frac{f(x) - F}{T}) \\
\leq & N!\ exp(-\frac{\varepsilon}{T})
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{T \to 0^+} \mu_T\left(\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}\right) \leq \lim_{T \to 0^+} N! exp(-\frac{\varepsilon}{T}) \to 0$$

D'où,

$$\lim_{T \to 0^+} \mu_T\left(\{x \in E; f(x) > F + \varepsilon\}\right) = 0$$

2.5 T

Selon 2.4.1, $\exists\ \varepsilon$ t.q.

$$
\begin{aligned}
& \{x \in E \mid f(x) > F\} \\
= \;& \{x \in E \mid f(x) > F + \varepsilon\} \\
\Rightarrow \;& P\left(f(X_n) > F\right) = P\left(f(X_n) > F + \varepsilon\right)
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
& P\left(f(X_n) > F + \varepsilon\right) \\
= \;& \nu_{n(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\})} \\
= \;& \nu_{n(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\})} - \mu_{T_n}\left(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\}\right) \\
+ \;& \mu_{T_n}\left(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\}\right) \\
\leq \;& \sum_{x \in E} \left|\nu_n(x) - \mu_{T_n(x)}\right| + \mu_{T_n}(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\})
\end{aligned}
$$

lorsque $n \to \infty$

$$\sum_{x \in E} \left|\nu_n(x) - \mu_{T_n(x)}\right| \to 0$$

$$T_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{T_n}\left(\{x \in E : f(x) > F + \varepsilon\}\right) \quad \to 0(selon 2.4.2)$$

Donc, $\lim_{n \to \infty} P(f(x_n) > F + \varepsilon) = 0$
En conclusion, $\lim_{n \to \infty} P(f(x_n) > F) = 0$

3 Résolution du problème du Voyageur de commerce

3.1 S

Voir 3.2 le cas plus générale.

3.2 S

En comparant P1 et P2, on prend la suite $1/log(n)$ pour tous les deux, on voit que P_2 converge beaucoup plus vite que $P1$. P2 a besoin de seulement environ 2100 fois pour bien converger tandis que P1 a besoin de environ 8000 fois.

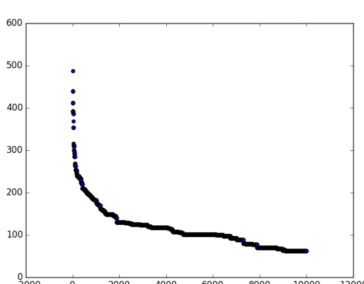

Figure 3: P1-1/logn

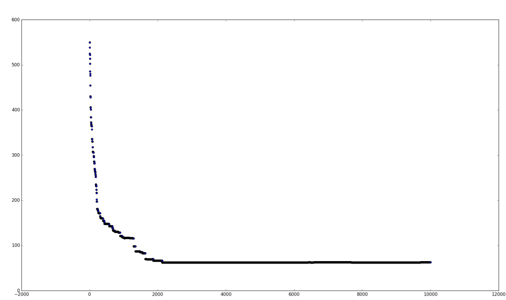

Figure 4: P2-1/logn

3.3 S

Comparer τ_n dans le cas $1/n$ et le cas $1/log(n)$ de la figure P2.
Même si $constant/n$ décoît plus vite que $constant/log(n)$, mais dans le deuxième cas la résolution converge plus vite que le premier.
P2-1/logn a besoin de environ 2000 fois pour bien converger et P2-1/n a besoin de environ 2800 fois.

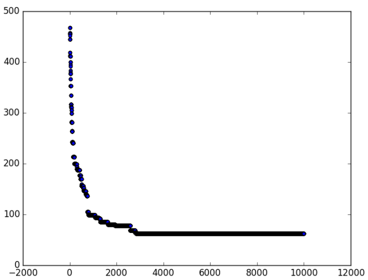

Figure 5: P2-1/n

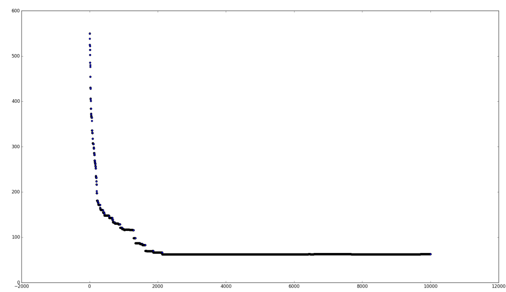

Figure 6: P2-1/logn

4 Conclusion

Dans la figure P2, par la suite $1/log(n)$, on fait 10000 fois itérations et à la fin d'animation, on voit que la plus court chemin ressemble la circonference. Donc lorsque le nombre des villes qui se trouvent sur la cercle plus grand, la plus court chemin va converger vers la circonférence.

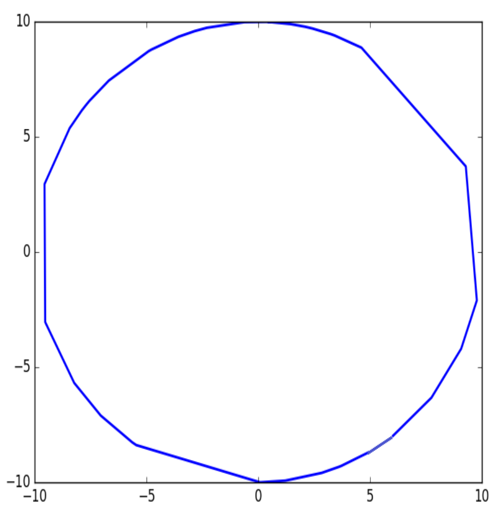

Figure 7: Resultat