Probabilitat

Esdeveniments

Donat un fenomen aleatori, denotem per Ω el conjunt de tots els seus possibles resultats. Ω és el que anomenem l'espai mostral del fenomen aleatori.

> Un *esdeveniment* és qualsevol subconjunt de l'espai Ω.

- L'*esdeveniment nul*, denotat per $\emptyset$, és aquell que mai succeeix.

Exemple: Tirada de dos daus

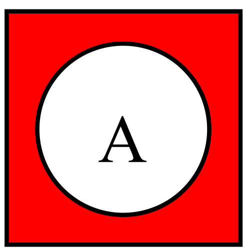
- Quin esdeveniment és E_1?
- Quin esdeveniment és E_2?

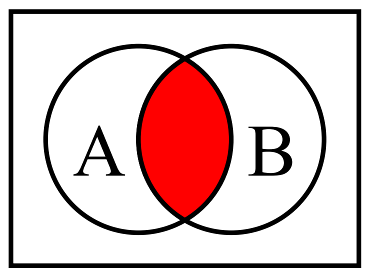
$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccccc} & E_1 & & & E_2 & \end{array} \\ \Omega = & \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right. \end{array}$$

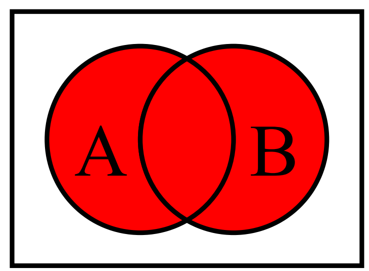
Operacions amb esdeveniments

Si denotem per A i B dos possibles esdeveniments, definim

- el complementari d'un esdeveniment A, denotat per $\neg A$, com qualsevol possible esdeveniment que no inclogui A.[1]
- la intersecció de dos esdeveniments A i B, denotat per $A \cap B$, com tots els esdeveniments que fan que l'esdeveniment A i B succeeixin simultàniament.[2]
- la unió de dos esdeveniments A i B, denotat per $A \cup B$, com l'esdeveniment que fa que succeeixi l'esdeveniment A o el B o els dos.[3]







Exemples d'esdeveniments

Si A és l'esdeveniment "plou" i B és l'esdeveniment "el terra es mulla", tindríem que:

- $\neg A$ seria l'esdeveniment "no plou",
- $A \cap B$ seria l'esdeveniment "plou i el terra es mulla" i
- $A \cup B$ seria l'esdeveniment "plou o el terra es mulla".

Si D_i és l'esdeveniment "surt el número i en llançar un dau de 6 cares", tindríem que:

- $\neg D_1$ seria l'esdeveniment "no ha sortit l'ú",
- $D_1 \cup D_3 \cup D_5$ seria l'esdeveniment "ha sortit un nombre senar",
- $\neg D_1 \cap \neg D_3 \cap \neg D_5$ seria l'esdeveniment "ha sortit un nombre parell".

Exemple: Tirada de dos daus

…seguim amb l’exemple de la tirada de dos daus.

- Què és $E_1 \cup E_2$?

- Què és $\neg E_1$?

- Què és $E_1 \cap \neg E_2$?

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & E_1 & & & E_2 & \end{array} \\
\boldsymbol{\Omega} = & \left\{ \begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array} \right.
\end{array}$$

Probabilitat

- La **probabilitat d'un esdeveniment** és una quantitat que mesura quant gran és un esdeveniment dins un espai mostral.
- La probabilitat d'un esdeveniment E la denotem com $P(E)$.

Axiomes de probabilitat

Per la probabilitat, fixem que aquesta serà

- **No negativa**. Per qualsevol esdeveniment E, $P(E) \geq 0$.
- **Additiva**. Si $E_1, E_2, E_3, \ldots$ són esdeveniments disjunts, aleshores

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots$$

- **Normalitzada**. $P(\Omega) = 1$.

Algunes propietats de la probabilitat

Per qualssevol esdeveniments A i B, tenim que:

- La seva probabilitat és un nombre entre 0 i 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

- Denotant per $P(\neg A)$ la probabilitat que no passi, tenim que

$$P(\neg A) = 1 - P(A).$$

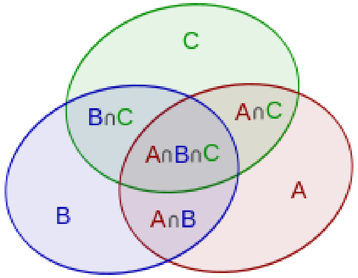
- Principi d'inclusió-exclusió

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

El principi d'inclusió-exclusió

- Per tres esdeveniments A, B i C, tenim

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

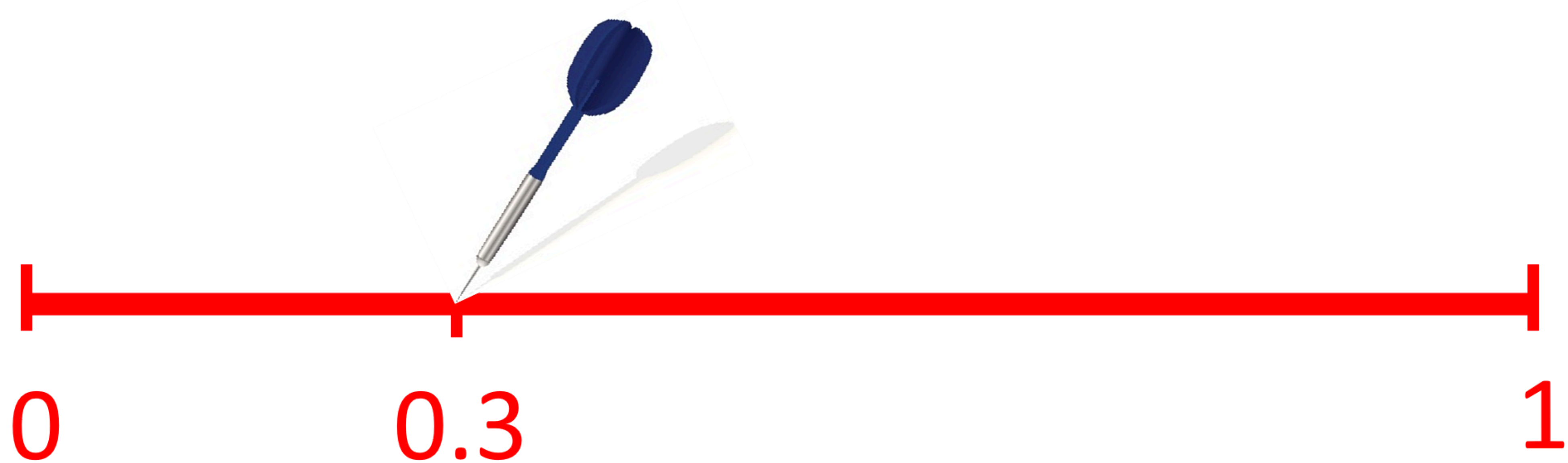


- Per d esdeveniments $A_1, \ldots, A_d$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{d} A_i\right) = \sum_{i=1}^{d} P(A_i) - \sum_{i,j:i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k:i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots (-1)^{d-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_d)$$

Activitat: càlcul de probabilitat

Es tira un dard que pot caure amb la mateixa probabilitat a qualsevol lloc de l'interval [0,1]. Quina és la probabilitat que el dard caigui al punt 0.3?



Probabilitat condicionada

Probabilitat condicionada

Definim la *probabilitat condicionada d'un esdeveniment* com

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple. Durant la setmana tenim el següent menú de postres,

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge
Fruita	Iogurt	Pastís	Fruita	Iogurt	Pastís	Fruita

- Quina és la probabilitat que un dia qualsevol mengem fruita? $P(\text{"Fruita"})$ = 3/7
- …i si estem al cap de setmana? $P(\text{"Fruita"}|\text{"Cap de setmana"})$ = 1/2 ← (1/7)/(2/7)
- Un dia estem menjant fruita. Quina és la probabilitat que sigui cap de setmana? $P(\text{"Cap de setmana"}|\text{"Fruita"})$ = 1/3 ← (1/7)/(3/7)

Encadenament de probabilitats

Per dos esdeveniments A i B sempre es complirà

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \quad [\,\text{També: } P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)].$$

Això es pot generalitzar al següent resultat.

Encadenament de probabilitats condicionades

Si per d esdeveniments tenim $P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_d) > 0$, aleshores

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_d) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) \times \cdots \times P(E_d|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{d-1})$$

Independència d'esdeveniments

Diem que dos esdeveniments són independents si

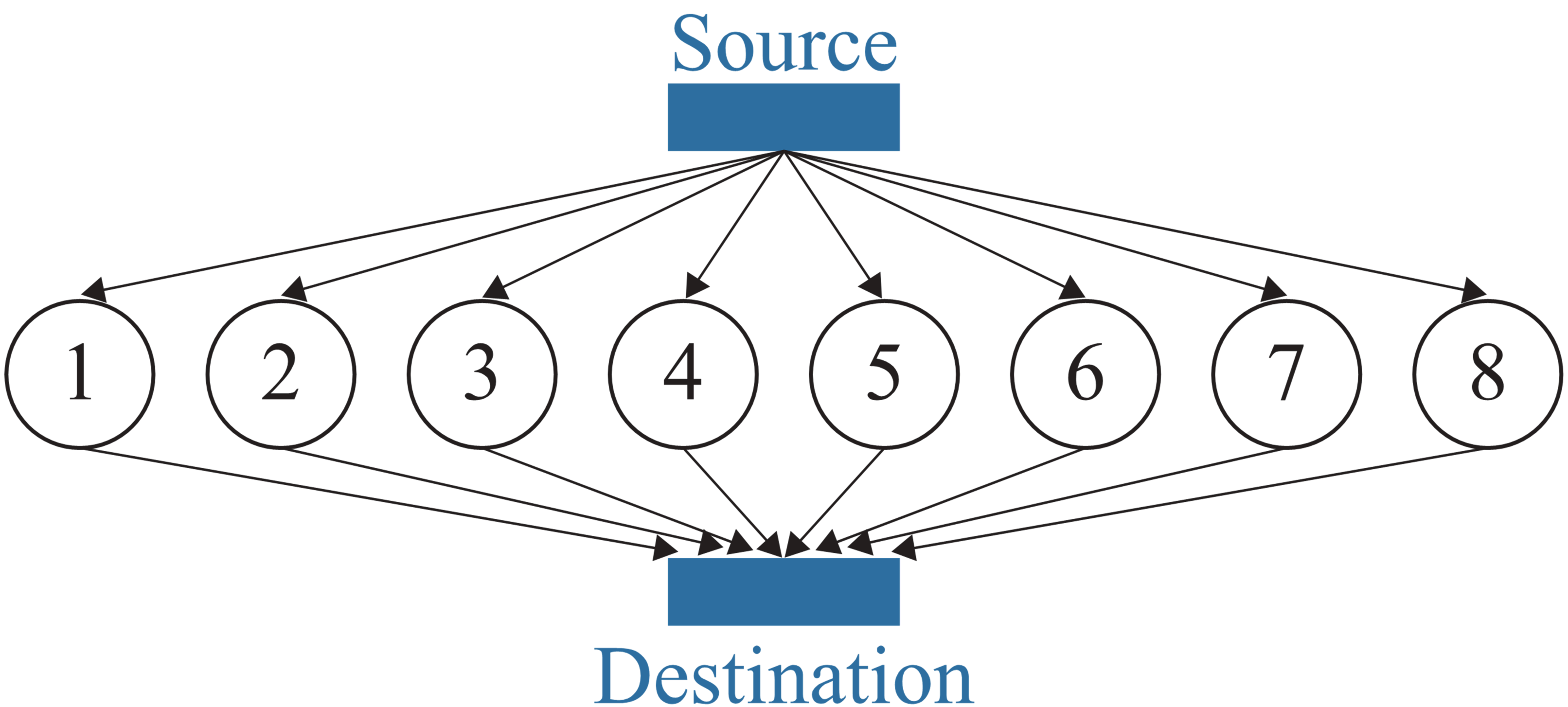
$$P(A) = P(A|B).$$

Això fa que també puguem caracteritzar la independència d'esdeveniments com,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Activitat: Funcionament d'una xarxa

Es vol enviar un paquet a través d'una xarxa. Cada una de les 16 arestes de la xarxa funciona **independentment** amb probabilitat p.

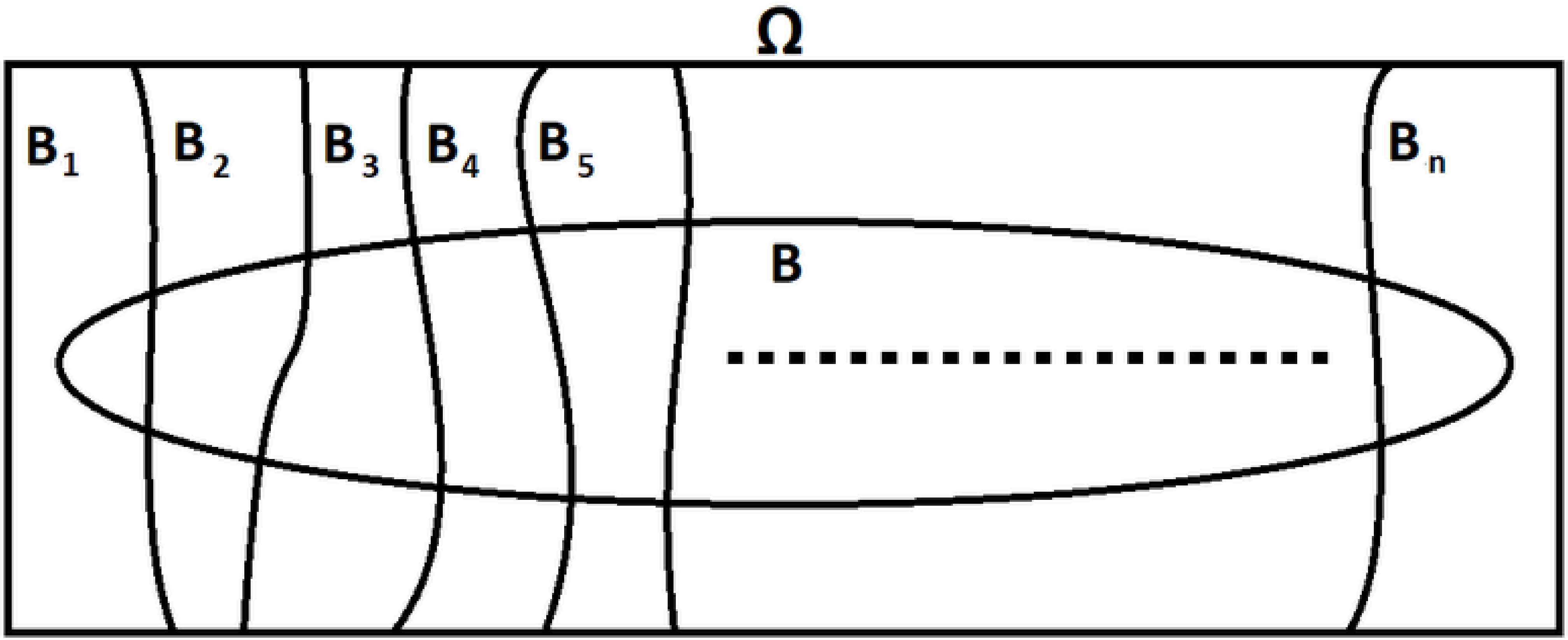


- Quina és la probabilitat que un paquet viatgi a través de la xarxa? [Indicació: un paquet no podrà viatjar per la xarxa si les 8 rutes estan bloquejades.]

La llei de les probabilitats totals

Si $B \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$ i per $i \neq j$ tenim que $B_i \cap B_j = \emptyset$, aleshores

$$P(B) = P(B_1)P(B|B_1) + \cdots + P(B_n)P(B|B_n)$$



El teorema de Bayes

A vegades volem conèixer $P(A|B)$, però l'únic que coneixem és $P(B|A)$. El teorema de Bayes ens permet expressar-ne una a partir de l'altre.

Teorema de Bayes

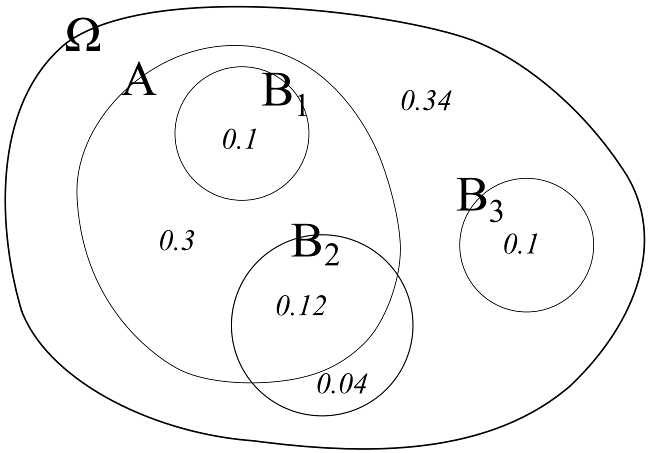
Per dos esdeveniments A i B, si $P(B) > 0$,

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Combinat amb la llei de les probabilitats totals (ja que $B \subseteq A \cup \neg A$), també ho podem escriure com

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\neg A)P(B|\neg A)}$$

Activitat: càlculs de probabilitats



- $P\left(A \setminus \{B_1 \cup B_2\}\right) = 0.3,$
- $P(B_1) = P(B_3) = 0.1,$
- $P(A \cap B_2) = 0.12, P(B_2 \setminus A) = 0.04$ i
- $P(\neg(A \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3)) = 0.34.$

Quin són les probabilitats de

- $P(A)$ i $P(B_2)$
- $P(A \cup B_2)$ i $P(B_1 \cup B_2)$
- $P(B_2|A)$ i $P(A|B_2)$

Activitat: proves diagnòstiques

El metge et diu que té una mala notícia i una bona notícia.

- La dolenta és que has donat positiu d’una malaltia mortal amb un test que té una exactitud del 99% (el test dona una predicció correcta el 99% dels cops).
- La bona és que la malaltia és molt estranya, i aquesta només afecta una entre deu mil persones.

Quina és la probabilitat que tinguis la malaltia?

Activitat: recopilació d’informació

A vegades, les probabilitats són sensibles a com recopilem la informació.

> Una família ha arribat al nostre veïnat, sabem que tenen dos infants, però en desconeixem el sexe. Sense més informació, tenim que la probabilitat que la família tingui un nen és de $\frac{3}{4}$.

- Suposem que després de preguntar si tenen una nena, descobrim que sí. **Quina és la probabilitat que tinguin un nen?**
- Suposem que un dia veiem una nena corrent pel seu jardí. **Quina és la probabilitat que tinguin un nen?**