Montrons que $\forall n \in Z, a_n = au_n + bv_n$

Initialisation:

Soit $n = 0, u_0 = 1, v_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a * u_0 + b * v_0 \\
&= a * 1 + b * 0 \\
&= a
\end{aligned}
$$

$Vrai$

Soit $n = 1, u_1 = 0, v_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a * u_1 + b * v_1 \\
&= a * 0 + b * 1 \\
&= b
\end{aligned}
$$

$Vrai$

Hérédité:

On suppose $a_n = au_n + bv_n$
Montrons que $a_{n+1} = au_{n+1} + bv_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= -q_n a_n + a_{n-1} \\
&= -q_n(au_n + bv_n) + au_{n-1} + bv_{n-1} \\
&= -q_n au_n - q_n bv_n + au_{n-1} + bv_{n-1} \\
\\
&= a(-q_n u_n + u_{n-1}) + b(-q_n v_n + v_{n-1}) \\
&= au_{n+1} + bv_{n+1}
\end{aligned}
$$

$a_n = au_n + bv_n$ est bien récursif