

# FICHES DE COURS

## PROBABILITÉ

FOURNIÉ NATHAN

---

### TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Théorie de la mesure</b>	<b>2</b>
1.1	Tribu	2
1.2	Classes monotones	2
1.3	Mesures	3
<b>2</b>	<b>Intégration</b>	<b>3</b>
2.1	Construction de l'intégrale et théorèmes d'interversion.	3
2.2	Espace $L^p$	4
<b>3</b>	<b>Mesures de probabilité</b>	<b>5</b>
3.1	Variables aléatoires	5
3.2	Fonctions de répartition	6
3.3	Vecteur aléatoires	6
3.4	espérance	6
3.5	Fonctions caractéristique	8
<b>4</b>	<b>Indépendance</b>	<b>9</b>
4.1	Définitions et premiers résultats	9
4.2	Lemmes de Borel Cantelli	9
<b>5</b>	<b>Notions de convergence</b>	<b>10</b>
5.1	Convergence presque sûre	10
5.2	Convergence en probabilité	10
5.3	Convergence dans $L^p$	10
5.4	Convergence en Loi	11
<b>6</b>	<b>Grands théorèmes</b>	<b>11</b>
6.1	La loi faible des grands nombres	11
6.2	La loi forte des grands nombres	11
6.3	Le théorème central limite	11
<b>7</b>	<b>Récapitulatif des lois usuelles</b>	<b>12</b>
7.1	Bernoulli et Binomiale	12
7.1.1	Epreuve de Bernoulli	12
7.1.2	Loi binomiale	12
7.2	Loi de Poisson	12
7.3	Loi géométrique	12
7.4	Loi uniforme continue	13
7.5	Loi exponentielle	13
7.6	Loi normale	13

---

# 1. THÉORIE DE LA MESURE

## 1.1. Tribu

**DÉFINITION [1.1].** Soit  $\Omega$  un ensemble, un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  sera une tribu<sup>1</sup> si il contient  $\Omega$ , est stable par passage au complémentaire et est stable par réunion dénombrable. Le couple  $(\Omega, A)$  est dit espace mesurable.

**DÉFINITION [1.2].** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , la tribu engendrée par  $A$  est l'intersection de toutes les tribus contenant  $A$ .

**DÉFINITION [1.3].** Pour un espace topologique  $\Omega$ , on appelle tribu borélienne  $\mathcal{B}(\Omega)$  la tribu engendrée par les ouverts.

**PROPOSITION [1.4].** Soit  $(\Omega, A)$  et  $(Y, E)$  deux espaces mesurables et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$  une tribu, alors, pour toute application  $f: \Omega \rightarrow Y$ , l'ensemble

$$f^{-1}(E) := \{f^{-1}(B) \mid B \in E\}$$

est une tribu.

**DÉFINITION [1.5].** Soit  $(\Omega, A)$  et  $(Y, E)$  deux espaces mesurables, une fonction  $f: \Omega \rightarrow Y$  sera dite mesurable si, pour tout  $B \in E$ , on a  $f^{-1}(B) \in A$ . La tribu engendré par  $f$ , que l'on note  $\sigma(f)$  est  $f^{-1}(E)$ . C'est la plus petite tribu qui rend  $f$  mesurable.

**PROPOSITION [1.6].** La composé de deux fonctions mesurables est encore mesurable, comme pour la somme, la différence, le produit, ou encore le maximum et le minimum.

**PROPOSITION [1.7].** Toute fonction continue est mesurable.

**THÉORÈME [1.8].** La limite ponctuelle d'une suite de fonctions mesurables est encore mesurable.

**PROPOSITION [1.9].** Toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. ie, de fonction de la forme :

$$f(w) = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \mathbf{1}_{A_i}(w)$$

pour  $A_i$  des éléments disjoints de la tribu. De plus, si la fonction est positive la suite peut être choisie croissante.

## 1.2. Classes monotones

**DÉFINITION [1.10].** Soit  $\Omega$  un ensemble et  $M \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $M$  est une classe monotone si elle contient  $\Omega$ , est stable par exclusion et réunion monotone croissante.

**PROPOSITION [1.11].** Une tribu est une classe monotone

**THÉORÈME [1.12].** (Des classes monotones). Soit  $\mathcal{E}$  une famille de partie de  $\Omega$  stable par intersection finie, alors la tribu engendrée par  $\mathcal{E}$  correspond à la classe monotone engendré par  $\mathcal{E}$ .

---

1. ou une  $\sigma$ -algèbre

### 1.3. Mesures

**DÉFINITION [1.13].** Soit  $(\Omega, \mathcal{B})$  un espace mesurable, une mesure positive et une application :

$$\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

$\sigma$ -additive<sup>2</sup> et telle que  $\mu(\emptyset) = 0$

Une mesure est  $\sigma$ -finie si il existe  $(A_n)$  telle que  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  et  $\mu(A_n) < \infty$ .

Une mesure vérifiant :  $\mu(\Omega) = 1$  est une probabilité. De plus elle est  $\sigma$ -finie.

**PROPOSITION [1.14].** Une mesure est croissante et sous-additive. De plus, si  $(A_n)$  est une suite croissante de mesurables alors :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Si au contraire la suite est décroissante **et que**  $\mu(A_{n_0}) < \infty$  alors :

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**DÉFINITION [1.15].** Un ensemble de mesure nulle est dit négligeable.

## 2. INTÉGRATION

### 2.1. Construction de l'intégrale et théorèmes d'interversions.

On se place sur l'espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ .

**DÉFINITION [2.1].** Soit  $B \in \mathcal{B}$ , la fonction indicatrice  $f(w) = \mathbf{1}_B(w)$  est mesurable, son intégrale est par définition :

$$\int f \, d\mu = \mu(B).$$

Si on est sur  $\mathbb{R}$  muni de la tribu borélienne et que  $B$  est un intervalle, alors l'intégrale de l'indicatrice de  $B$  est la longueur de l'intervalle.

**DÉFINITION [2.2].** Si  $f$  est étagée et positive :

$$f(w) = \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \mathbf{1}_{A_i}(w)$$

avec les  $A_i$  mesurables et disjoints, alors on a par définition :

$$\int f \, d\mu = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mu(A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \int \mathbf{1}_{A_i} d\mu.$$

**DÉFINITION [2.3].** Soit  $f$  mesurable et positive, l'intégrale de  $f$  contre  $\mu$  est défini par :

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu, g \text{ étagée et positive et } g \leq f \right\}.$$

**PROPOSITION [2.4].** L'intégrale ici construite vérifie toute les propriétés que l'on est en droit de demander pour une intégrale.

---

2. Pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  on a :  $\mu(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$ .

**THÉORÈME [2.5].** (De convergence monotone). Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant ponctuellement vers une fonction  $f$ . Alors non seulement  $f$  est mesurable, mais de plus :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

**PROPOSITION [2.6].** Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives, on pose  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ , alors :

$$\int f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

**THÉORÈME [2.7].** (Lemme de Fatou). Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

**DÉFINITION [2.8].** Soit  $f = f^+ - f^-$  une fonction mesurable, on dit qu'elle est intégrable si :

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

On définit par la suite son intégrale comme :

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

**THÉORÈME [2.9].** (De convergence dominée). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables qui converge vers  $f$  et dominée par une fonction  $g$  intégrable :

$$|f_n| \leq g.$$

Alors,  $f$  est intégrable et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

**THÉORÈME [2.10].** (Fubini-Tonelli). Soit  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  un espace produit de deux espaces mesurés. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable pour la mesure produit  $\mu$  alors :

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f \, d\mu_1 \, d\mu_2.$$

## 2.2. Espace $L^p$

**DÉFINITION [2.11].** L'espace  $\mathcal{L}^p(\mu)$  est l'espace des fonctions réelles de puissance  $p$ -ième intégrable. L'ensemble  $\mathcal{L}^0$  est simplement l'ensemble des fonctions mesurables. En revanche,  $\mathcal{L}^\infty$  est l'ensemble des fonctions mesurables  $\mu$ -essentiellement bornées. C'est à dire telle qu'il existe une constante  $c > 0$  vérifiant :

$$\mu(\{w : |f(w)| > c\}) = 0.$$

**DÉFINITION [2.12].** Si  $p \in [0, \infty[$ , on pose :

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si  $p = \infty$ , on pose :

$$\|f\|^\infty = \inf \{c > 0 : \mu\{w : |f(w)| > c\} = 0\}.$$

Il faut noter que ce ne sont pas encore des normes car la propriété de définition n'est vérifiée que presque partout.

**THÉORÈME [2.13].** (Inégalité de Holder). Soit  $p$  et  $q$  deux réels conjugués. Soient  $f \in \mathcal{L}^p$  et  $g \in \mathcal{L}^q$ , alors on a  $fg \in \mathcal{L}^1$  et de plus :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**THÉORÈME [2.14].** (Inégalité de Minkowski). Soit  $p \geq 1$ . Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}^p$ , alors  $f+g$  est encore dans  $\mathcal{L}^p$  et :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**DÉFINITION [2.15].**  $L^p$  est la quotient de  $\mathcal{L}^p$  par la relation d'équivalence "être égal presque partout", ce faisant,  $\|\cdot\|_p$  devient une norme.

**THÉORÈME [2.16].** (Riez-Fischer). L'espace  $L^p$  est complet pour tout  $p \geq 1$ .

**THÉORÈME [2.17].** L'espace  $L^2$  est de Hilbert pour le produit scalaire :  $(f|g) = \int fg d\mu$ .

### 3. MESURES DE PROBABILITÉ

#### 3.1. Variables aléatoires

Désormais, l'espace  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  sera un espace *probabilisé*. C'est à dire que la mesure  $P$  est finie et  $P(\Omega) = 1$ . La mesure  $P$  est aussi parfois appelé loi de probabilité. Quand on travaille avec une probabilité, un ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est appelé *événement*. Si  $P(A) = 1$  on dira que l'événement a lieu presque sûrement.

**DÉFINITION [3.1].** Une application mesurable d'un espace probabilisé vers un espace mesurable est une variable aléatoire. Que l'on note souvent  $X$ , par exemple :

$$X: (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Upsilon, \mathcal{E}).$$

**PROPOSITION [3.2].** Une probabilité étant une mesure, elle conserve ses propriétés. De plus, comme c'est une mesure finie, si on a une suite  $(A_n)$  croissante ou décroissante alors :

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

**DÉFINITION [3.3].** La loi d'une variable aléatoire  $X: (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\Upsilon, \mathcal{E})$  est la mesure image de  $X$  sur  $\mathcal{E}$  que l'on note  $P_X$ . Pour rappel, pour tout  $E \in \mathcal{E}$  on a :

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)).$$

On notera  $P_X(E) = P(\{w \in \Omega : X(w) \in E\}) = P\{X \in E\}$ .

**EXEMPLE [3.4].** La masse de Dirac  $\delta_x$  pour  $x \in \Omega$  est une probabilité telle que :

$$\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$$

**DÉFINITION [3.5].** Une loi  $P$  sera dite discrète si c'est une combinaison linéaire et au plus dénombrable de masses de Dirac :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}.$$

Elle ne prend au plus qu'un nombre dénombrable de valeurs.

**DÉFINITION [3.6].** Une loi absolument continue par rapport à une mesure sera dite à densité contre cette mesure.

### 3.2. Fonctions de répartition

**DÉFINITION [3.7].** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de loi  $P_X$ , une fonction de répartition de  $X$  est notée  $F_X$  et est définie par :

$$F_X(t) = P_X([-\infty, t]) = P(\{\omega : X(\omega) \leq t\}) = P\{X \leq t\}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION [3.8].** Une fonction de répartition  $F$  est bornée par 0 et 1, croissante, continue à droite et :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

Réciproquement, si une fonction vérifie tout cela alors c'est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

**PROPOSITION [3.9].** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles, il y a équivalence entre  $F_X = F_Y$  et  $P_X = P_Y$ .

**PROPOSITION [3.10].** Une fonction de répartition a au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.

**PROPOSITION [3.11].** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle de loi à densité, alors sa fonction de répartition s'écrit :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) d\mu(x)$$

avec  $f = \frac{dP_X}{d\mu}$  la densité de la loi. Ainsi, on obtient une méthode pour trouver la densité d'une loi qu'on sait absolument continue, on peut calculer sa fonction de répartition et la dériver  $\mu$  - p.p. Attention, si  $F$  est seulement  $C^1$  par morceaux alors il faut rajouter à la dérivée les points de discontinuité  $P_X(a_i)\delta_{a_i}(x)$ .

### 3.3. Vecteur aléatoires

**DÉFINITION [3.12].** Un vecteur aléatoire est une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}^d$  muni de sa tribu borélienne.

**DÉFINITION [3.13].** La fonction de répartition de  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire est :

$$F_X(t) = P\{X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d\}$$

avec  $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ .

**DÉFINITION [3.14].** La loi de la variable aléatoire  $X_i$  est la  $i$ -ème loi marginale de  $X$  et :

$$F_{X_i}(t_i) = \lim_{t_j \neq i \rightarrow \infty} F_X(t).$$

**PROPOSITION [3.15].** La fonction de répartition d'un vecteur aléatoire caractérise sa loi.

### 3.4. espérance

**DÉFINITION [3.16].** Soit  $X$  une v.a réelle, si  $X$  est intégrable on appelle espérance la quantité :

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

Si  $E(X) = 0$  la variable aléatoire  $X$  sera dite centrée.

**THÉORÈME [3.17].** (de transport). Soit  $X$  un vecteur aléatoire et  $f$  une fonction borélienne de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ , si  $f$  est intégrable alors :

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X)(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dP_X(x).$$

En particulier, si  $X$  est une variable aléatoire réelle et intégrable alors :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

**PROPOSITION [3.18].** Pour  $X$  un vecteur aléatoire et  $A$  un borélien on a :

$$E(\mathbf{1}_A(X)) = P\{X \in A\}.$$

On a une nouvelle méthode pour trouver la loi d'une variable aléatoire. Si  $X$  est une v.a réelle que l'on sait intégrable alors on peut exprimer l'espérance de  $f(X)$  pour  $f$  intégrable :

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X) dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x)$$

et il suffit alors de poser  $P_x = \mu$ .

**THÉORÈME [3.19].** (Inégalité de Jensen). Soit  $f$  une fonction convexe de  $\mathbb{R}$  et  $X$  une v.a réelle. Si  $X$  et  $f(X)$  sont intégrables alors :

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

**THÉORÈME [3.20].** (Inégalité de Holder). Soit  $p$  et  $q$  deux réels conjugués et  $X \in \mathcal{L}^p$ ,  $Y \in \mathcal{L}^q$ , alors :

$$E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{\frac{1}{p}} E(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

**DÉFINITION [3.21].** Soit  $X$  une v.a réelle de carré intégrable, la variance de  $X$  est la quantité :

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**PROPOSITION [3.22].** Soit  $X$  une v.a réelle et positive de fonction de répartition  $F_X$ , pour tout  $0 < p < \infty$  il vient :

$$E(X^p) = p \int_0^{\infty} t^{p-1} P\{X > t\} dt = p \int_0^{\infty} t^{p-1} (1 - F(t)) dt.$$

**THÉORÈME [3.23].** (Inégalité de Markov). Soit  $X$  une v.a intégrable et soit  $t$  un réel positif, alors :

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(|X|)}{t}.$$

Si de plus  $X$  est dans  $L^p$ , alors :

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{E(|X|^p)}{t^p}.$$

**THÉORÈME [3.24].** (Inégalité de Tchebitchev). Pour  $X$  une v.a dans  $L^2$  et  $t > 0$  on a :

$$P\{|X - E(X)| \geq t\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}.$$

### 3.5. Fonctions caractéristique

**DÉFINITION [3.25].** Soit  $X$  un vecteur aléatoire, on appelle fonction caractéristique de  $X$  la fonction complexe :

$$\varphi_X(t) = E(e^{i(t|X)}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t|x)} dP_X(x).$$

Avec  $(t|x) = (t_1x_1, \dots, t_dx_d)$  le produit scalaire usuel.

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle alors :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x).$$

**PROPOSITION [3.26].** Soit  $X$  une v.a réelle. Les assertions suivantes sont vraies :

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$ .
2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ .
3. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$ .

**THÉORÈME [3.27].** La fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire.

**PROPOSITION [3.28].** Soit  $X$  une v.a réelles à densité  $f$ , alors :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

C'est à dire que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire absolument continue est la transformée de Fourier de sa densité.

**THÉORÈME [3.29].** Soit  $X$  une v.a à densité, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_X(t) = 0.$$

**THÉORÈME [3.30].** (d'inversion). Soit  $X$  une v.a réelle. Si sa fonction caractéristique est intégrable sur  $\mathbb{R}$  alors  $X$  admet une densité  $f$  et :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

**DÉFINITION [3.31].** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeur dans  $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ . Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{itx_k} P\{X = x_k\}.$$

**THÉORÈME [3.32].** (récupération de la loi). Soit  $X$  une v.a discrète. Pour tout  $n$  entier :

$$P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(t) e^{-int} dt.$$

**PROPOSITION [3.33].** Soit  $X_1, X_2$  deux v.a indépendantes de fonctions caractéristiques  $\varphi_1, \varphi_2$ . Alors, la fonction caractéristique de  $X := X_1 + X_2$  est :

$$\varphi_X = \varphi_1 \varphi_2.$$

**THÉORÈME [3.34].** (de continuité de Paul Lévy). Soit  $(X_n)$  une suite de v.a réelles et  $X$  une autre v.a réelle. il y a équivalence entre :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

et :

$$\varphi_n \xrightarrow{\text{simpl.}} \varphi.$$



## 4. INDÉPENDANCE

Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  un espace probabilisé.

### 4.1. Définitions et premiers résultats

**DÉFINITION [4.1].** Deux événements  $A$  et  $B$  sont dit indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Une famille d'événements  $(A_i)_{i \in I}$  est mutuellement indépendante si pour tout  $J \subset I$  fini on a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

**DÉFINITION [4.2].** Une famille de variable aléatoires  $(X_i)_{i \in I}$  avec  $X_i : (\Omega, \mathcal{B}, P) \rightarrow (\Upsilon, \mathcal{E})$  est mutuellement indépendante si pour tout  $J \subset I$  fini, et pour tout  $E_j \in \mathcal{E}$  on a :

$$P\{X_j \in E_j, j \in J\} = P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in E_j\}\right) = \prod_{j \in J} P\{X_j \in E_j\}.$$

**PROPOSITION [4.3].** La loi d'un vecteur aléatoire composé de v.a indépendantes réelles est égal au produit des lois marginales. Réciproquement, si la loi d'un vecteur aléatoire est égal au produit des lois des marginales, alors les variables aléatoires coordonnées sont indépendantes.

**PROPOSITION [4.4].** Le résultat précédent est aussi valable si on raisonne non pas avec les lois mais avec les fonctions caractéristiques.

**PROPOSITION [4.5].** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a réelles et intégrables indépendantes. Alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

On dira aussi que les v.a sont non corrélées.

**PROPOSITION [4.6].** (Inégalité de Bienaymé). Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables deux à deux non corrélées, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\text{Var}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var}(X_i).$$

**THÉORÈME [4.7].** (Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev). Pour  $X_1, \dots, X_n$  des variables deux à deux non corrélées, on a l'inégalité suivante pour tout  $t > 0$  :

$$P\left\{\left|\sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - E(X_i))\right| \geq t\right\} \leq \frac{1}{t^2} \sum_{1 \leq i \leq n} \text{Var}(X_i).$$

Si les variables sont de plus identiquement distribuées (de même loi), alors le résultat est :

$$P\left\{\left|\sum_{1 \leq i \leq n} (X_i - E(X_i))\right| \geq t\sqrt{n}\right\} \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{t^2}.$$

### 4.2. Lemmes de Borel Cantelli

**THÉORÈME [4.8].** (Lemme de Borel-Cantelli I). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements, si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$  converge alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) = P(\limsup A_n) = P(\{A_n \text{ a lieu une infinité de fois}\}) = 0$$

**THÉORÈME [4.9].** (Lemme de Borel-Cantelli II). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements indépendants, si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$  diverge alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) = P(\limsup A_n) = P(\{A_n \text{ a lieu une infinité de fois}\}) = 1$$

## 5. NOTIONS DE CONVERGENCE

### 5.1. Convergence presque sûre

**DÉFINITION [5.1].** Une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)$  converge presque sûrement vers une autre v.a  $X$  si :

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Cette condition est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{m \rightarrow \infty} P(\sup_{n \geq m} |X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

**PROPOSITION [5.2].** (Lemme de Borel-Cantelli). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles. Si pour tout  $\varepsilon > 0$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$  converge, alors  $(X_n)$  converge presque sûrement vers  $X$ .

Si de plus les  $(X_n)$  sont mutuellement indépendantes, alors il y a équivalence entre la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n| \geq \varepsilon)$  et la convergence presque sûre de  $(X_n)$  vers 0.

**PROPOSITION [5.3].** La convergence presque sûre est stable par les opérations usuelles.

### 5.2. Convergence en probabilité

**DÉFINITION [5.4].** Une suite de v.a réelles  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0.$$

**PROPOSITION [5.5].** La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

**PROPOSITION [5.6].** La convergence en probabilité est stable par les opérations algébriques et par la composition avec une fonction continue.

**PROPOSITION [5.7].** L'espace  $L^0$  est complet si on le munit de la distance qui métrise la convergence en probabilité :

$$d(X, Y) = E(\min(|X - Y|, 1)).$$

**THÉORÈME [5.8].** (Critère de Cauchy). Soit  $(X_n)$  une suite de v.a réelles. Si elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : P\{|X_n - X_{n_0}| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon$$

i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : d(X_n, X_{n_0}) \leq \varepsilon.$$

Alors,  $X_n$  converge en probabilité.

### 5.3. Convergence dans $L^p$

**DÉFINITION [5.9].** Une suite de variables aléatoires réelles dans  $L^p$  converge vers  $X$  dans  $L^p$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_p = 0$$

**PROPOSITION [5.10].** La convergence dans  $L^p$  implique la convergence presque sûre, donc aussi en probabilité.

#### 5.4. Convergence en Loi

**DÉFINITION [5.11].** On dit que la suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  si, pour toute fonction continue bornée  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(X_n) dP = \int f(X) dP.$$

**PROPOSITION [5.12].** Une suite de variables aléatoire réelles  $(X_n)$  converge vers  $X$  en loi si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION [5.13].** Une suite de variables aléatoire réelles  $(X_n)$  converge vers  $X$  en loi si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t).$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION [5.14].** La convergence en loi est impliqué par toute les autres forme de convergence.

### 6. GRANDS THÉORÈMES

#### 6.1. La loi faible des grands nombres

**THÉORÈME [6.1].** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Si les  $X_i$  sont intégrables, alors :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{proba}} E(X_1).$$

#### 6.2. La loi forte des grands nombres

**THÉORÈME [6.2].** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Alors, les  $X_i$  sont intégrables si et seulement si :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} E(X_1).$$

#### 6.3. Le théorème central limite

**THÉORÈME [6.3].** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

Si les  $X_i$  sont de carré intégrable, alors :

$$\frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} N$$

où  $N$  est une v.a qui suit la loi normale :  $\mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$ .

## 7. RÉCAPITULATIF DES LOIS USUELLES

### 7.1. Bernoulli et Binomiale

#### 7.1.1 Epreuve de Bernoulli

**DÉFINITION [7.1].** Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli si elle est à valeur dans  $\{0, 1\}$  et qu'il existe un paramètre  $p \in [0, 1]$  tel que :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On note  $\mathcal{B}(1, p)$  cette loi.

**PROPOSITION [7.2].** L'espérance d'une loi de Bernoulli est  $p$ , la variance est  $p(1-p)$ . La fonction caractéristique est  $t \mapsto 1 - p + pe^{it}$ .

#### 7.1.2 Loi binomiale

**DÉFINITION [7.3].** Une variable aléatoire  $X$ , à valeur entières suit une loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p \in [0, 1]$  si pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note  $\mathcal{B}(n, p)$  cette loi.

**PROPOSITION [7.4].** L'espérance d'une loi binomiale est  $np$ , la variance est  $np(1-p)$ . La fonction caractéristique est  $t \mapsto (1 - p + pe^{it})^n$ .

**PROPOSITION [7.5].** Soit  $X, Y$  deux v.a de loi binomiale respective :  $\mathcal{B}(n, p)$  et  $\mathcal{B}(m, p)$ , alors  $X + Y$  est de loi binomiale  $\mathcal{B}(n + m, p)$ .

### 7.2. Loi de Poisson

**DÉFINITION [7.6].** Une variable aléatoire à valeurs entières  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si pour tout  $k$  entier :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note  $\mathcal{P}(\lambda)$  cette loi.

**PROPOSITION [7.7].** L'espérance d'une loi de Poisson est  $\lambda$ , tout comme la variance. La fonction caractéristique est  $t \mapsto \exp(\lambda(e^{it} - 1))$ .

**PROPOSITION [7.8].** Si  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors :

$$\frac{X_\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

### 7.3. Loi géométrique

Elle représente une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. Elle modélise un temps d'attente.

**DÉFINITION [7.9].** Une variable aléatoire à valeurs entières suit une loi géométrique de paramètre  $p$  si pour tout  $k$  entier on a :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

**PROPOSITION [7.10].** L'espérance d'une loi géométrique est  $\frac{p}{1-p}$ , la variance est  $\frac{p}{(1-p)^2}$ . Sa fonction caractéristique est  $t \mapsto \frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$ .

#### 7.4. Loi uniforme continue

**DÉFINITION [7.11].** Une variable aléatoire  $X$  à valeur réelles suit une loi uniforme continue sur l'intervalle  $[a, b]$  si sa densité contre Lebesgue est :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

On la note  $\mathcal{U}_{[a,b]}$ .

**PROPOSITION [7.12].** L'espérance d'une loi uniforme continue est :  $\frac{a+b}{2}$ , la variance est  $\frac{(b-a)^2}{12}$ . La fonction caractéristique est :  $t \mapsto e^{ita} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$ .

#### 7.5. Loi exponentielle

**DÉFINITION [7.13].** Une variable aléatoire  $X$  à valeur réelles suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  si elle admet pour densité contre Lebesgue :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x).$$

On la note  $\mathcal{E}(\alpha)$ .

**PROPOSITION [7.14].** L'espérance d'une loi géométrique est  $\frac{1}{\alpha}$ , la variance est  $\frac{1}{\alpha^2}$ . Sa fonction caractéristique est  $t \mapsto \frac{1}{1 - \frac{it}{\alpha}}$ .

#### 7.6. Loi normale

**DÉFINITION [7.15].** Une variable aléatoire  $X$  à valeur réelles suit une loi exponentielle de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$  si elle admet pour densité contre Lebesgue :

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On la note  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

Si elle est centrée réduite ( $\mathcal{N}(0, 1)$ ) alors :

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**PROPOSITION [7.16].** La loi normale est d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . Sa fonction caractéristique est  $t \mapsto e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ .