

DÉVELOPPEMENT

Théorème de compacité de Riesz

Nathan Fournié

*Références : Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle,
ellipse (2eme ed.), p.17*

THÉORÈME : THÉORÈME DE COMPACTITÉ DE RIESZ

Soit E un espace vectoriel normé, E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est un compact.

Proposition : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, ses parties compactes sont les fermés bornés.

Démonstration

Une partie fermée bornée A de E sont évidemment des compacts en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, toute suite de A est bornée, donc admet une extraction convergente, comme A est fermée, cette extraction converge dans A .

Pour montrer que ce sont les seuls, raisonnons par contraposée et montrons qu'une partie non fermée ou non bornée ne saurait être un compact.

Soit A une partie de E non fermée, alors il existe une suite de A qui converge vers un point l dans $E \setminus A$, donc toute sous-suite converge vers l et A ne peut être compact. Par suite, prenons A une partie non bornée de E , on peut alors créer la suite (u_n) qui est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_n\| \geq n.$$

Cette suite est bien sûr divergente et n'admet aucune sous-suite convergente dans A .

Avant de donner la preuve du théorème, on va avoir besoin d'un lemme connu sous le nom de "lemme de Riesz". Grosso-modo, ce lemme dit que tout sous-espace vectoriel fermé F , différent de E évite le cercle unité sauf un petit bout (voir dessin).

Lemme de Riesz : Soit F un sous-espace vectoriel distinct de E et fermé, alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe $x \in E$ tel que :

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \text{dist}(x, F) \geq 1 - \alpha.$$

Démonstration

Soit $x \in E \setminus F$, comme F est fermé on a :

$$d := \text{dist}(x, F) > 0.$$

On peut aussi trouver un y dans F tel que :

$$\text{dist}(x, y) \leq \frac{d}{1 - \alpha} > d.$$

Puisque $1 - \alpha < 1$. On normalise en posant $\tilde{x} := \frac{x-y}{\|x-y\|}$ qui est bien de norme 1. Enfin, pour tout \tilde{y} dans F on a :

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \frac{1}{\|x - y\|} \|(x - y) - \|x - y\| \tilde{y}\| = \frac{\|x - Y\|}{\|x - y\|}$$

où $Y = y + \|x - y\| \tilde{y} \in F$, donc :

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \geq \frac{d}{\|x - y\|} \leq 1 - \alpha.$$

On peut enfin montrer le théorème :

Démonstration: (THÉORÈME DE RIESZ)

Si E est de dimension finie, alors le travail a déjà été fait dans la proposition. Prenons alors E un espace vectoriel normé de dimension *infinie* et raisonnons par contraposée.

On va construire une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Soit u_1 un point de E , notons E_1 le sous-espace vectoriel engendré par u_1 . E_1 est fermé car de dimension 1, on peut grâce au lemme de Riesz trouver un $u_2 \in E$ de norme 1 tel que :

$$u_2 - u_1 \geq \text{dist}(u_2, E_1) \geq \alpha$$

pour $\alpha \in]0, 1[$. On pose ensuite E_2 le s.e.v engendré par u_1 et u_2 , rebelote, il existe u_3 tel que :

$$\text{dist}(u_1, u_3), \text{dist}(u_2, u_3) \geq \text{dist}(u_3, E_2) \geq \alpha.$$

On répète le procédé et on obtient ainsi une suite (u_n) telle que, pour tout n : $\|u_n\| = 1$ et pour tout n :

$$\text{dist}(u_n, u_{n+1}) \geq \alpha$$

Puisque pour tout n on a : $\text{dist}(u_n, u_{n+1}) \geq \text{dist}(u_{n+1}, E_n) \geq \alpha$. Enfin, cette suite ne saurait admettre une sous-suite convergente puisque tous ses termes sont séparés d'au moins α , or elle appartient à la boule unité fermée, qui n'est alors pas compact.