

FICHES DE COURS

ANALYSE FONCTIONNELLE

FOURNIÉ NATHAN

TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Espaces Normés | 1 |
| 1.1 | E.V.N | 1 |
| 1.2 | E.V.N des fonctions | 2 |
| 1.3 | Espaces de Banach | 2 |
| 1.4 | Application linéaire. | 3 |
| 1.5 | E.V.N de dimension finie | 3 |
| 2 | Espace de Hilbert | 4 |
| 2.1 | Espaces préhilbertiens | 4 |
| 2.2 | Espace hilbertiens | 5 |
| 2.3 | Bases orthonormées | 6 |
| 3 | Le théorème de Baire, applications | 7 |
| 3.1 | Le théorème de Baire | 7 |
| 3.2 | Le théorème de l'application ouverte. | 7 |

1. ESPACES NORMÉS

1.1. E.V.N

DÉFINITION [1.1]. Soit E un e.v, une *norme* sur E est une application $\|\cdot\|$ telle que :

$$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[$$

vérifiant :

1. Pour tout $x \in E$ on a $\|x\| \geq 0$. Avec égalité s.s.i $x = 0$.
2. Pour tout $x \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. Pour tout $x, y \in E$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Une application vérifiant tout ci-dessus sauf le 1. est dite *semi-norme*.

PROPOSITION [1.2]. L'application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ définie par : $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.

Vient alors la notion de topologie. On s'abstiendra de rappeler les définitions classiques suivantes : boules, ouverts, fermés, voisinages, intérieur et adhérence qui sont valables dans tout espace métrique.

Un e.v.n est un e.v muni d'une norme.

PROPOSITION [1.3]. Soit E un e.v.n, alors les applications $+$ et \cdot suivantes :

$$+ : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \times E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \end{cases}$$

sont continues.

Si E est simplement un espace vectoriel et que ses applications sont continues, alors on dira que E est un espace topologique.

PROPOSITION [1.4]. L'application norme est une application continue.

1.2. E.V.N des fonctions

Soit E un ensemble et $\mathcal{F}(E)$ l'espace des fonctions *bornées* sur E à valeur dans \mathbb{K} . Alors, on définit une norme en posant :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

On l'appelle norme uniforme.

PROPOSITION [1.5]. Soit (E, Ω, λ) un espace mesuré et $p \in \mathbb{N}^*$. L'espace de Lebesgue, que l'on note $\mathcal{L}_{\lambda}^p(E)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E telles que :

$$\int_E |f(t)|^p \lambda(t) < \infty.$$

On définit alors une semi-norme en posant :

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \lambda(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

THÉORÈME [1.6]. Dans le même contexte, on a l'inégalité de Minkowski :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

On note $L_{\lambda}^p(E)$ (ou plus simplement $L^p(E)$) l'espace quotient de $\mathcal{L}_{\lambda}^p(E)$ par la relation d'équivalence "égal λ .p.p" de sorte que la semi-norme devienne une norme.

THÉORÈME [1.7]. Soit $p \geq 1$ et $q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour $f \in L^p(E)$ et $g \in L^q(E)$ on a :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

PROPOSITION [1.8]. Si la mesure considérée est finie, on a la suite d'inclusion suivante :

$$L^p(E) \subset L^{p-1}(E) \subset \dots \subset L^2(E) \subset L^1(E).$$

Si de plus c'est une mesure de proba on a :

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \dots \leq \|f\|_p.$$

1.3. Espaces de Banach

DÉFINITION [1.9]. Un espace normé sera dit de Banach s'il est complet. Autrement dit : si toute suite de Cauchy converge.

THÉORÈME [1.10]. (Riesz-Fisher). L'espace $L^p(E)$ est de Banach.

Démonstration. https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/riesz_fischer.pdf ■

PROPOSITION [1.11]. Si une suite de fonctions (f_n) converge vers f dans $L^p(m)$, alors il existe une sous suite qui converge ponctuellement presque partout. C'est à dire qu'il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $x \in \Omega \setminus N$, $(f_{n_k}(x))$ converge vers $f(x)$.

1.4. Application linéaire.

PROPOSITION [1.12]. Une application linéaire T entre deux espaces normés E et F est continue s.s.i il existe une constante $K \geq 0$ telle que, pour tout $x \in E$:

$$\|T\|_F \leq K \|x\|_E.$$

DÉFINITION [1.13]. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F .

PROPOSITION [1.14]. On définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ en posant :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

que l'on appelle norme opérateur.

PROPOSITION [1.15]. Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

1. Pour tout $x \in E$:

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \|x\|_E.$$

2.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F.$$

PROPOSITION [1.16]. Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi complet.

DÉFINITION [1.17]. Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, on note E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on l'appelle le dual de E . C'est un espace de Banach.

1.5. E.V.N de dimension finie

DÉFINITION [1.18]. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur le même espace E sont dites équivalentes s'il existe $K_1, K_2 > 0$ telles que pour tout $x \in E$:

$$K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1.$$

i.e : $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont isomorphe par l'identité.

THÉORÈME [1.19]. Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. De plus, tout e.v.n de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

On tire de là plusieurs résultats, dans un e.v.n de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés, tout e.v.n de dimension finie est complet, tout s.e.v de dimension finie d'un e.v.n est fermé, toute application linéaire entre un e.v.n de dimension finie et un e.v.n quelconque est continue.

THÉORÈME [1.20]. (Théorème de Riesz¹) Soit E un e.v.n, s'il possède une boule compacte de rayon non nul alors il est de dimension finie.

Démonstration. <https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/theo%20de%20compacite%20de%20riesz.pdf> ■

De là vient le joli résultat :

COROLLAIRE [1.21]. Dans un e.v.n de dimension *infinie*, les seuls compacts sont d'intérieur vide.

1. Encore !

2. ESPACE DE HILBERT

2.1. Espaces préhilbertiens

DÉFINITION [2.1]. Soit H un espace vectoriel réel, un *produit scalaire* sur H est une forme bilinéaire symétrique définie positive que l'on notera $(\cdot|\cdot)$:

$$(\cdot|\cdot) : \begin{cases} H \times H & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto (x|y) \end{cases}$$

Si H est un espace vectoriel complexe, un produit scalaire sera une forme hermitienne² définie positive. La seule chose qui change et que, pour tout x et tout y dans H on a :

$$(x|y) = \overline{(y|x)}$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(x|\lambda y) = \bar{\lambda}(x|y).$$

DÉFINITION [2.2]. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*.

Exemple : Pour le cas réel, les exemples sont déjà bien connus, pour le cas complexe, il suffit de rajouter la conjugaison sur le second argument :

$$(f|g) = \int_E f \bar{g} dm \quad \text{ou} \quad (x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k.$$

Comme $(x|x)$ est toujours positif, on est en droit de poser³ :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

pour tout $x \in H$.

PROPOSITION [2.3]. Pour tout $x, y \in H$ on a :

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ (Si H est un \mathbb{R} -e.v)
2. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y)$ (Si H est un \mathbb{C} -e.v)

THÉORÈME [2.4]. (Cauchy-Schwarz). Pour tout $x, y \in H$ on a l'inégalité :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Cette inégalité nous permet d'obtenir l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$ et donc de pouvoir dire que c'est bien une norme.

DÉFINITION [2.5]. Deux éléments de H seront dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. On notera $x \perp y$

On retrouve ainsi le théorème de Pythagore avec [2.3].

DÉFINITION [2.6]. Soit A une partie de H , on définit son orthogonal A^\perp par :

$$A^\perp = \{y \in H, y \perp x, \forall x \in A\}.$$

On a directement que, si $B \subset A$ alors $A^\perp \subset B^\perp$, et⁴ $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.

2. On fait ici porter la semi-linéarité à droite, mais c'est tout aussi valable à gauche, c'est une histoire de convention.

3. Pour l'instant, on ne sait pas encore que c'est une norme ! C'est simplement une notation.

4. \overline{A} est la fermeture de A .

2.2. Espace hilbertiens

DÉFINITION [2.7]. Un espace *hilbertien* est un espace préhilbertien complet pour sa norme.

Tout préhilbertien de dimension finie est un hilbertien. Les espaces de la sorte sur le corps réel seront nommés *euclidien*, tandis que ceux sur le corps complexe seront appelé *hermitien*.

DÉFINITION [2.8]. Soit C une partie d'un espace vectoriel, C est dite convexe si, pour tout $x, y \in C$, le segment :

$$[x, y] := \{xt + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}$$

appartient à C

THÉORÈME [2.9]. (de la projection). Soit C une partie convexe, fermée et non vide d'un espace de Hilbert complexe H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, C).$$

On notera $y = P_C(x)$ et on dira que c'est la projection de x sur C . Il vérifie de plus, pour tout $z \in C$:

$$\text{Re}(x - y | z - y) \leq 0.$$

Démonstration. <https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/theo%20de%20la%20projection.pdf> ■

PROPOSITION [2.10]. L'application projection P_C est continue.

THÉORÈME [2.11]. Si C est comme dans le théorème de la projection, et que c'est en plus un s.e.v, alors l'application P_C est linéaire et $P_C(x)$ est l'unique point de C tel que :

$$x - P_C(x) \in C^\perp.$$

THÉORÈME [2.12]. Un sous espace vectoriel fermé F d'un espace de Hilbert H est en somme direct avec son orthogonal :

$$H = F \oplus F^\perp.$$

PROPOSITION [2.13]. Pour tout sous espace vectoriel F d'un espace de Hilbert, on a :

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

PROPOSITION [2.14]. Soit H un espace de Hilbert, un s.e.v F de H est dense dans H si et seulement si :

$$F^\perp = \{0\}.$$

THÉORÈME [2.15]. (Riesz-Fréchet). Soit H un espace de Hilbert, soit $\phi \in H^*$ (une forme linéaire continue). Alors, il existe un unique élément $y \in H$ tel que, pour tout $x \in H$

$$\phi(x) = (x | y).$$

DÉFINITION [2.16]. Soit H un espace de Hilbert, une application linéaire et continue $T : H \rightarrow H$ sera dit *opérateur*.

PROPOSITION [2.17]. Pour tout opérateur T , il existe T^* un autre opérateur tel que, pour tout $x, y \in H$:

$$(Tx | y) = (x | T^*y).$$

T^* sera appelé opérateur adjoint de T et on a de plus : $\|T\| = \|T^*\|$.

2.3. Bases orthonormées

PROPOSITION [2.18]. Un espace vectoriel normé E est séparable⁵ s.s.i il existe une partie S de E dénombrable et telle que $\text{Vect}(S)$ soit dense dans E .

DÉFINITION [2.19]. Soit H un espace préhilbertien de dimension infinie. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H , si elle vérifie :

1. Pour tout $i \in I$: $\|u_i\| = 1$
 2. Pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$: $u_i \perp u_j$
- elle sera dite orthonormée.

PROPOSITION [2.20]. Soit (u_1, \dots, u_n) une famille orthonormée finie, alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |u_k|^2.$$

En particulier, cette famille est libre.

THÉORÈME [2.21]. (Inégalité de Bessel). Soit H un espace préhilbertien, soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée dans H . Alors, pour tout $x \in H$ on a :

$$\sum_{i \in I} |(x|u_i)|^2 := \sup_{J \subset I, J \text{ finie}} \sum_{i \in J} |(x|u_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

DÉFINITION [2.22]. Une famille orthonormée dénombrable (u_n) d'un espace préhilbertien H est dit être une *base orthonormée* (ou hilbertienne) si $\text{vect}((u_n)) = H$.

THÉORÈME [2.23]. Soit H un espace préhilbertien muni d'une base hilbertienne (u_n) , alors, pour tout $x \in H$ on a :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n (x|u_n).$$

PROPOSITION [2.24]. (Formules de Parseval⁶). Soit H préhilbertien et (u_n) une base orthonormée de H . Pour tout $x, y \in H$ on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|u_n)|^2$$

et :

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|u_n) \overline{(y|u_n)}.$$

PROPOSITION [2.25]. Soit H de Hilbert, séparable et muni d'une base orthonormée (u_n) , alors H est isomorphe à l_2 ⁷ par $f : x \rightarrow ((x|u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. C'est à dire que cette application conserve le produit scalaire : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.

THÉORÈME [2.26]. Tout espace de Hilbert séparable admet une base orthonormée.

THÉORÈME [2.27]. Tous les espaces de Hilbert séparables de dimensions infinies sont isomorphes entre-eux.⁸

5. i.e : il existe $S \in E$ tq : S dénombrable et $\overline{S} = E$.

6. Le nice !

7. l'espace des suites de carré sommable muni du produit scalaire : $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

8. Et donc à l_2 .

3. LE THÉORÈME DE BAIRE, APPLICATIONS

3.1. Le théorème de Baire

THÉORÈME [3.1]. (Baire I). Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

THÉORÈME [3.2]. (Baire II). Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une famille d'ouverts denses est dense.

Démonstration. <https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/baire%20et%20banach-steinhaus.pdf> ■

THÉORÈME [3.3]. (De Banach-Steinhaus). Soit E et F deux espaces de Banach. Soit (T_i) une famille d'application linéaires continues de E vers F . Si les T_i vérifient, pour tout $x \in E$:

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty.$$

Alors :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

En gros, si pour chaque x il existe une constante C_x telle que $\|T_i(x)\|_F \leq C_x \|x\|_E$, alors il existe une borne uniforme C telle que $\|T_i(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout x .

Démonstration. <https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/baire%20et%20banach-steinhaus.pdf> ■

Ce résultat s'interprète sur les suites d'applications d'un espace de Banach :

PROPOSITION [3.4]. Soit $(T_n : E \rightarrow F)$ une suite d'applications linéaires telle que pour tout $x \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x).$$

Alors, on a : $\sup \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$. De plus, la limite T est linéaire et continue. Enfin,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

3.2. Le théorème de l'application ouverte.

THÉORÈME [3.5]. (De l'application ouverte). Soit E et F deux espaces de Banach, et T une application linéaire continue surjective de E vers F , alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

T est donc une application ouverte.

Démonstration. <https://nathanfournie.github.io/documents/d%C3%A9veloppements/theo%20de%20l'app%20ouverte.pdf> ■

PROPOSITION [3.6]. Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue surjective entre eux. Alors, pour tout $y \in F$ il existe un $x \in E$ tel qu'on ait :

$$y = T(x) \text{ et } \|x\| \leq \frac{1}{c} \|y\|.$$

THÉORÈME [3.7]. (des isomorphismes de Banach). Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue bijective entre eux. Alors, l'application T^{-1} est continue, donc T est un isomorphisme.

THÉORÈME [3.8]. (du graphe fermé). Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire, si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Pour rappel, le graphe de T est l'ensemble :

$$G_T := \{(x, T(x)) ; x \in E\}.$$