

Le (grand) théorème de PICARD

Nathan Fournié

« Les mathématiques sont la poésie de la raison. » — Émile Picard, *Discours à l'Académie des Sciences*, 1912.

25 juillet 2025

Le but de ce document est d'énoncer puis de démontrer un magnifique résultat d'analyse complexe : le grand théorème de Picard. La preuve de ce théorème est assez délicate et invoquera deux autres résultats fondamentaux : le théorème de Bloch et celui de Schottky.

Afin de bien saisir la puissance du théorème de Picard, rappelons un résultat classique sur les fonctions holomorphes :

Proposition 1 (Weierstrass-Casorati). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus \{z_0\}$ du plan complexe avec $z_0 \in \Omega$. Si z_0 est une singularité essentielle, alors pour tout $r > 0$ tel que le disque épointé $D(z_0, r)$ soit inclus dans Ω on a que l'image $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ est dense dans \mathbb{C}*

PREUVE. Supposons par l'absurde qu'il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \in \Omega$ et tel que $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ ne soit pas dense dans \mathbb{C} . Alors, il existe un $\omega \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$: $|f(z) - \omega| > \varepsilon$.

On peut alors considérer la fonction $g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - \omega}$. cette fonction est holomorphe et bornée au voisinage de z_0 , donc elle est prolongeable holomorphiquement en z_0 .

- Si $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est holomorphe en z_0 : impossible.

- Si $g(z_0) = 0$, alors z_0 est un pôle de $\frac{1}{g}$ donc de f : impossible. □

Si ce résultat témoigne déjà de la complexité des fonctions holomorphes au voisinage d'une singularité, le grand théorème de Picard en dit beaucoup plus :

THÉORÈME 1 (Picard). *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Si f a une singularité essentielle en z_0 , alors il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$\mathbb{C} \setminus \{\omega\} \subset f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\}).$$

De plus, tout point de $\mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ est atteint une infinité de fois, à une exception près encore une fois.

On peut dans un premier temps remarquer que la seconde assertion du théorème résulte du simple fait que la première est valable pour tout $r > 0$. Afin de le voir, fixons un $r_0 > 0$ et supposons la première partie du théorème vraie, alors $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \subset f(D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\})$. Maintenant,

s'il existe un point $z \in f(D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\})$ atteint seulement un nombre fini de fois, on peut trouver un r assez petit tel que $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ évite z , de là, z ne dépend plus que de f et est donc unique. En effet s'il existe un second point z' atteint un nombre fini de fois alors on peut de la même façon trouver un r tel que $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ évite z et z' mais le théorème nous dit que l'image évite au plus un point donc $z = z'$.

Attaquons-nous à présent au théorème de Bloch qui nous sera essentiel pour démontrer celui de Schottky

THÉORÈME 2 (Bloch). *Il existe une constante $b > 0$ telle que pour toute fonction f holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} vérifiant : $|f'(0)| = 1$, l'image $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon b .*

On va avoir besoin d'un lemme technique qui règle le cas des fonctions bornées :

Lemme : Soit $D = D(a, r)$ un disque de centre a et de rayon r de \mathbb{C} . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée par $M > 0$. Si $f(a) = 0$ et $|f'(a)| \neq 0$ alors :

$$D\left(0, \frac{r^2 |f'(a)|^2}{4M}\right) \subset f(D).$$

PREUVE. On pose $g(z) = \frac{f(a+rz)}{rf'(a)}$ de sorte que g soit holomorphe sur \mathbb{D} , $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ et $|g| \leq \frac{M}{r|f'(a)|} := M'$. Il suffit alors de montrer que $g(\mathbb{D})$ contienne le disque $D(0, \frac{1}{4M'})$.

Soit $w \in \mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})$, la fonction $z \mapsto 1 - \frac{g(z)}{w}$ ne s'annule pas sur \mathbb{D} , on peut alors trouver une détermination de sa racine que l'on note h de sorte que $h^2(z) = 1 - \frac{g(z)}{w}$.

Soit $p \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $s : \theta \mapsto h(pe^{i\theta})$ est 2π -périodique et de carré intégrable, on peut donc utiliser l'identité de Parseval :

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right|^2 p^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(pe^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Or, en dérivant en 0 l'égalité $h^2(z) = 1 - \frac{g(z)}{w}$ on trouve que $h'(0) = \frac{1}{2w}$. il vient alors :

$$1 + \frac{p^2}{4|w|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(pe^{i\theta})|^2 d\theta \leq 1 + \frac{M'}{|w|}.$$

Puis en faisant tendre p vers 1, on obtient : $|w| \geq \frac{1}{4M'}$. Donc au final, on vient de montrer que $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus D(0, \frac{1}{4M'})$. Donc $D(0, \frac{1}{4M'}) \subset g(\mathbb{D})$, ce qui termine la preuve. □

On peut à présent démontrer le théorème :

PREUVE. [Bloch] On va dans un premier temps montrer que l'on peut se restreindre au cas des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

Soit f holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} vérifiant : $|f'(0)| = 1$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on pose :

$$f_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon z)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Ainsi, pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $\varepsilon z \in \mathbb{D}$, donc f_ε est bien holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, $f'_\varepsilon(z) = f'(\varepsilon z)$ donc elle vérifie comme f la condition du théorème. Enfin, comme on a l'inclusion : $\varepsilon f_\varepsilon(\overline{\mathbb{D}}) \subset$

$f(\overline{\mathbb{D}})$, si le théorème est vrai pour f_ε , il le sera pour f .

Considérons alors f holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}}$ telle que $|f'(0)| = 1$ et posons $\phi_f(z) = (1 - |z|)|f'(z)|$ pour $z \in \overline{\mathbb{D}}$. On remarque que l'ensemble $\{z \in \overline{\mathbb{D}} \mid \phi_f(z) \geq 1\}$ est un compact puisque il appartient à $\overline{\mathbb{D}}$ et est fermé comme image réciproque de $[1, \infty[$ par ϕ_f qui est continue. On peut alors y trouver un z_0 tel que $|z_0|$ soit maximal. Au vu de l'expression de ϕ_f on a nécessairement que $z_0 \in \mathbb{D}$. De plus, $\phi_f(z_0) = 1$ car si jamais $\phi_f(z_0) > 1$, on pourrait par continuité trouver un z dans un voisinage de z_0 tel que $\phi_f(z) > 1$ et $|z| > |z_0|$ ce qui contredirait la maximalité de z_0 .

Posons $r = |z_0|$ et considérons le disque $D(z_0, \frac{1-r}{2})$. Nous allons montrer que l'image de ce disque par f est contenue dans un disque de rayon 1 centré en $f(z_0)$ pour pouvoir utiliser le lemme.

Soit $z \in D(z_0, \frac{1-r}{2})$. Nous avons alors $|z - z_0| < \frac{1-r}{2}$ puis :

$$|z| \leq |z_0| + |z - z_0| < r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2}.$$

Ainsi, $z \in D(0, \frac{1+r}{2})$. De plus, si $|z| = \frac{1+r}{2}$, on a $\phi(z) = (1 - |z|)|f'(z)| \leq 1$ c'est à dire : $|f'(z)| \leq \frac{2}{1-r}$ et le principe du maximum nous dit que pour tout $z \in D(0, \frac{1+r}{2})$ on a : $|f'(z)| \leq \frac{2}{1-r}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction holomorphe f sur le disque $D(z_0, \frac{1-r}{2})$:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sup_{z \in D(z_0, \frac{1-r}{2})} |f'(z)| |z - z_0|.$$

Mais comme $D(z_0, \frac{1-r}{2}) \subset D(0, \frac{1+r}{2})$, on a : $\sup_{z \in D(z_0, \frac{1-r}{2})} |f'(z)| \leq \frac{2}{1-r}$. Ainsi,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2}{1-r} \cdot \frac{1-r}{2} = 1.$$

D'où l'inclusion :

$$f\left(D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right)\right) \subset D(f(z_0), 1).$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme à la fonction f sur le disque $D(z_0, R)$ avec : $R := \frac{1-r}{2}$ et $M := 1$. et on a :

$$D\left(f(z_0), \frac{|f'(z_0)|^2 R^2}{4M}\right) \subset f(D(z_0, R)) \subset f(\mathbb{D}).$$

Ceci termine la preuve, mais on peut aller un peu plus loin en remarquant que comme : $\phi(z_0) = (1 - |z_0|)|f'(z_0)| = 1$ on a : $|f'(z_0)| = \frac{1}{1-r}$.

Ce qui nous permet d'avoir :

$$\frac{|f'(z_0)|^2 R^2}{4} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-r)^2} \left(\frac{1-r}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

On conclut donc que toute fonction vérifiant les conditions du théorème contient un disque de rayon au moins $\frac{1}{16}$ dans son image. \square

Remarque : La borne $\frac{1}{16}$ est loin d'être optimal, il s'agit d'ailleurs d'une question ouverte.

Le théorème suivant va nous permettre d'en savoir plus sur les fonctions holomorphes du disque unité. Sa preuve est assez laborieuse car utilise beaucoup de notations différentes mais l'idée derrière est relativement élémentaire : on utilise une fonction auxiliaire construite à partir du logarithme de f . Cette fonction auxiliaire évite un ensemble dense et discret du plan complexe, ce qui va nous permettre via le théorème de Bloch de trouver une borne.

THÉORÈME 3. Soient $M > 0$ et $r \in]0, 1]$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, si f est une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} évitant 0 et 1 (ie : $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$) et telle que $|f(0)| \leq M$ alors pour tout $z \in D(0, r)$: $|f(z)| \leq C$.

PREUVE. Puisque f est holomorphe sur \mathbb{D} et ne s'annule jamais (car $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$), on peut définir une fonction holomorphe $\log f$ sur \mathbb{D} telle que $\exp(\log f) = f$.

Ce logarithme est défini de manière unique en imposant que $|\Im(\log f(0))| \leq \pi$. On définit alors une fonction holomorphe :

$$h(z) := \frac{1}{2i\pi} \log f(z),$$

qui vérifie $f(z) = e^{2i\pi h(z)}$. Comme $f(z) \notin \{0, 1\}$, on a $h(z) \notin \mathbb{Z}$, ce qui implique que ni $h(z)$ ni $h(z) - 1$ ne s'annulent. On peut donc définir les fonctions holomorphes suivantes :

$$\sqrt{h(z)} := \exp\left(\frac{1}{2} \log h(z)\right), \quad \sqrt{h(z) - 1} := \exp\left(\frac{1}{2} \log(h(z) - 1)\right).$$

On pose :

$$b(z) := \sqrt{h(z)} - \sqrt{h(z) - 1}.$$

Cette fonction est holomorphe et évite les entiers. Pour s'en convaincre, supposons par l'absurde qu'il existe $z \in \mathbb{D}$ tel que :

$$b(z) = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors : $\sqrt{h(z)} - \sqrt{h(z) - 1} = \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$. et $\sqrt{h(z)} + \sqrt{h(z) - 1} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}$. Donc : $\sqrt{h(z)} = \sqrt{n}$, ie : $h(z) = n$ qui est impossible. Donc $b(z) \neq \sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en particulier $b(z) \neq 0$. On peut alors définir :

$$k(z) := \log b(z),$$

On constate que, par un passage à l'exponentielle que :

$$k(z) \notin \{a_{n,m} := \log(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}) + 2i\pi m \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrons que l'ensemble $\{a_{n,m}\}$ est dense au sens suivant : tout disque de rayon 10 dans \mathbb{C} contient au moins un point $a_{n,m}$. Soit $z_0 = x + iy$ un complexe, l'écart entre y et le multiple de 2π le plus proche de lui est au plus π . Pour la partie réelle, on va regarder l'écart entre deux termes successif de la suite $x_n^+ := \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ (le cas x_n^- se fait de la même manière.)

$$x_{n+1}^+ - x_n^+ = \ln\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right).$$

Puis, après un dl on trouve que

$$x_{n+1}^+ - x_n^+ = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin, comme la suite est croissante vers l'infinie, on peut trouver un n tel que :

$$x_n^+ \leq x \leq x_{n+1}^+$$

et l'écart est d'au plus $\frac{1}{2}$, ce qui nous permet de conclure sur la 10-densité de l'ensemble $\{a_{n,m}\}$

Donc, l'image de k ne peut contenir aucun disque de rayon 10. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $k'(z_0) \neq 0$. On considère :

$$\varphi(\zeta) := \frac{k(\zeta) - k(z_0)}{|k'(z_0)|},$$

définie sur $D(z_0, 1 - |z_0|)$, et telle que $|\varphi'(z_0)| = 1$.

On veut lui appliquer le théorème de Bloch, pour s'y ramener on utilise la fonction :

$$w \mapsto \frac{1}{1 - |z_0|} \frac{k(z_0 - (1 - |z_0|)w) - k(z_0)}{|k'(z_0)|}.$$

L'image de cette fonction contient un disque d'un certain rayon, donc l'image de φ contient un disque d'un rayon que l'on nomme β . Donc l'image de k contient un disque de rayon :

$$\frac{|k'(z_0)|(1 - |z_0|)}{\beta}.$$

En revanche, comme l'image de k ne peut contenir un disque de rayon 10, on obtient :

$$|k'(z)|(1 - |z|) \leq 10\beta.$$

Intégrons le long du segment joignant 0 à z :

$$k(z) - k(0) = \int_0^z k'(t) dt \leq 10\beta \int_0^z \frac{1}{1 - |t|} dt = 10\beta \log \left(\frac{1}{1 - |z|} \right).$$

Donc par le principe du maximum, on a que pour $|z| \leq r$:

$$|k(z)| \leq |k(0)| + 10\beta \log \left(\frac{1}{1 - r} \right).$$

Enfin, par un calcul rapide on obtient une expression de $\log f$ en fonction de k :

$$\left(\frac{\log f}{2i\pi} \right)^{1/2} = \frac{e^k + e^{-k}}{2},$$

Pour conclure, il nous suffit donc de contrôler $|k(0)|$ par une constante dépendant uniquement de M . Supposons d'abord que $|f(0)| \geq \frac{1}{2}$ et rappelons que pour un nombre complexe a non nul quelconque : $\log(a) = \ln(|a|) + i \arg(a)$. La partie imaginaire est déjà contrôlée par π , puis, comme $|f(0)|$ est contrôlé par M et $\frac{1}{2}$, on trouve :

$$|\log f(0)| \leq \pi + \log(\max(2, M)),$$

Il vient alors :

$$\left| \frac{e^{k(0)} + e^{-k(0)}}{2} \right| \leq C_M.$$

Avec C_M une certaine constante qui ne dépend que de M . Donc au final, $|\Re(k(0))|$ est aussi borné par C_M .

Par ailleurs, comme $k = \log b$, on peut choisir la branche du logarithme de sorte que $|\Im(k(0))| \leq \pi$. Ainsi, $|k(0)|$ est bien bornée par une constante qui ne dépend que de M . On a donc démontré le théorème lorsque $\frac{1}{2} \leq |f(0)| \leq M$.

Dans le cas où $|f(0)| \leq \frac{1}{2}$, on considère la fonction :

$$\tilde{f}(z) := 1 - f(z),$$

qui est holomorphe sur \mathbb{D} et vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq |\tilde{f}(0)| \leq M + 1, \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

On applique alors ce qui précède à \tilde{f} en lieu et place de f , ce qui permet de conclure. Cela achève la démonstration du théorème de Schottky. \square

Ceci étant fait, nous sommes désormais en mesure de donner la preuve du grand théorème de Picard.

PREUVE. [Picard] Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction holomorphe sur le disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ avec une singularité essentielle en z_0 . à translations et homothéties près on peut supposer que $z_0 = 0$ et $r = e^{2\pi}$.

Supposons à présent que l'image $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ évite deux points du plan complexe a et b . On peut se ramener aux point 0 et 1 en conjuguant la fonction biholomorphe :

$$\psi : w \mapsto \frac{w - a}{b - a}$$

par f . On suppose donc $a = 0$ et $b = 1$. Il nous reste plus qu'à montrer que 0 n'est pas une singularité essentielle pour que l'on puisse conclure par l'absurde.

On sait déjà que l'image $f(D(0, r) \setminus \{0\})$ est dense dans \mathbb{C} , il existe donc une suite $(z_n)_n$ de points de $D(0, r)$ qui converge vers 0. De plus, $(|f(z_n)|)_n$ ne peut diverger vers ∞ car sinon 0 serait un pôle, il existe donc une constante $M > 0$ telle que $|f(z_n)| < M$ pour tout n . On peut également supposer, à extraction près, que la suite $(|z_n|)$ est strictement décroissante et bornée par 1.

Soit n un entier naturel, on pose :

$$g_n(w) = f(z_n e^{2i\pi w}).$$

Les g_n sont holomorphes sur le disque \mathbb{D} et de plus : $|g_n(0)| < M$ pour tout n . Le théorème de Schottky nous assure de l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$|g_n(w)| = |f(z_n e^{2i\pi w})| \leq C$$

pour tout w tels que $|w| \leq \frac{1}{2}$. Maintenant, si $|w| = |z_n|$, on a alors : $w = z_n e^{2i\pi t}$ pour un certain $t \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En appliquant le principe du maximum, on trouve que pour tout z tel que $|z_{n+1}| \leq |z| \leq |z_n|$ on a $|f(z)| \leq C$. De là, il vient que la fonction f est bornée dans le disque épointé $D(0, z_1) \setminus \{0\}$, donc par le critère de Riemann, 0 est une singularité effaçable : absurde par hypothèse. \square

Ce théorème a une version plus faible mais plus utilisée en pratique connue sous le nom de petit théorème de Picard. Si sa preuve ne nécessite pas le grand, le travail que l'on vient de faire va nous permettre d'aller plus vite.

THÉORÈME 4 (Petit théorème de Picard). *Toute fonction entière non constante prend toutes les valeurs de \mathbb{C} sauf au plus une.*

PREUVE. De deux choses l'une, soit f est un polynôme et c'est réglé, soit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \neq \infty$. Dans ce cas là, posons :

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

définie sur \mathbb{C}^* . Cette fonction a une singularité en 0 qui ne peut pas clairement être un pôle. Ce n'est pas non plus une singularité effaçable puisque sinon il existerait un l tel que $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = l$ donc : $\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) = l$ et par Liouville f serait constante. C'est donc une singularité essentielle : le grand théorème de Picard s'applique et termine la preuve. \square

Pour finir, notons que les théorèmes de Picard (surtout le grand) ne brillent pas par leurs nombres d'applications époustouflantes. On peut néanmoins en donner deux rapides et jolies.

Application 1 : Soit f une fonction entière, alors soit $f \circ f$ admet un point fixe, soit c'est une translation.

Solution : Supposons $f \circ f$ sans point fixes et montrons que f est une translation. On a en particulier f sans point fixes. Posons alors la fonction entière :

$$g(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}.$$

On remarque aussitôt que g ne peut s'annuler car sinon on aurait $f(f(z)) - z = 0$ et pour les mêmes raisons, g ne peut valoir 1. Alors, par le petit théorème de Picard, comme g évite deux valeurs, elle est constante. Nommons c sa valeur. On a :

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z).$$

En dérivant cette égalité on obtient :

$$f'(z)f'(f(z)) - 1 = cf'(z) - c.$$

En faisant le calcul on remarque que f' évite 0 et c , donc encore une fois par le petit théorème de Picard, f' est constante et alors f est de la forme :

$$f(z) = az + b$$

pour a et b des complexes. Il reste à montrer que $a = 1$ mais comme f est sans point fixes le résultat vient directement.

Application 2 : Soit f une fonction entière et périodique, alors f admet un point fixe.

Solution :

Notons T la période de f et supposons que f est n'a pas de point fixe, posons alors :

$$g(z) = f(z) - z.$$

Cette fonction est entière et évite 0. Elle évite aussi T car sinon il existerait un z tel que :

$$f(z) - z - T = 0$$

mais par périodicité de f :

$$f(z + T) - (z - T) = g(z + T) = 0.$$

Donc, par le petit théorème de Picard, g est constante, donc f est une translation : impossible puisqu'elle est périodique.