Développement
Théorème de la projection

Nathan Fournié

Références : Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*, ellipse (2eme ed.), p.10

Théorème: de la projection

Soit C une partie convexe, fermée et non vide d'un espace de Hilbert complexe H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :

$$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C).$$

On notera $y = P_C(x)$ et on dira que c'est la projection de x sur C. Il vérifie de plus, pour tout $z \in C$:

$$\mathrm{Re}(x - y|z - y) \leqslant 0.$$

Démonstration

Notons $d = \mathrm{dist}(x, C)$, par définition :

$$d = \inf_{z\in c} \|x - z\|.$$

On peut alors considérer une suite (y_n) de points de C telle que :

$$d_n := \|x - y_n\| \longrightarrow d.$$

Pour montrer l'existence, il nous suffit de montrer que la suite (y_n) converge dans C. Comme H est de Hilbert, il est complet, donc C aussi. De plus, C est fermé, il nous suffit donc de montrer que la suite est de Cauchy. Soit p et q deux entiers non nuls, on a :

$$\|c_p - c_q\|^2 = \|(c_p - x) - (c_q - x)\|^2,$$

par l'identité du parallélogramme[1] :

$$\begin{aligned}
\|c_p - c_q\|^2 &= 2(\|c_p - x\|^2 + \|c_q - x\|^2) - \|(c_p - x) + (c_q - x)\|^2 \\
&= 2(d_p^2 + d_q^2) - \|(c_p - x) + (c_q - x)\|^2. \\
&= 2(d_p^2 + d_q^2) - 4\left\|\frac{c_p + c_q}{2} - x\right\|^2 \\
&\leqslant 2(d_p^2 + d_q^2) - 4d^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

On justifie la dernière égalité par la convexité de C, en effet $\dfrac{c_p + c_q}{2}$ appartient bien à C puisque c'est le milieu du segment $[c_p, c_q]$. Ceci termine l'existence.

Pour l'unicité, prenons $y_1, y_2 \in C$ qui vérifient

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \mathrm{dist}(x, C) := d,$$

par l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{aligned}
\|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 \\
&= 2(d^2 + d^2) - \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 . \\
&= 4d^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \\
&\leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0
\end{aligned}$$

Qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

Pour finir, nous devons montrer la caractérisation du projeté. Notons $y = P_c(x)$, on va utiliser la convexité de C, soit $z \in C$, pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$[y, z] = (1 - t)y + tz \in C,$$

Ce qui nous permet d'écrire ;

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 = \|(x - y) + t(y - z)\|^2 \geqslant \|x - y\|^2$$

or,

$$\|(x - y) + t(y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2 \|y - z\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x - y|y - z).$$

Donc,

$$t^2 \|y - z\|^2 + 2t\mathrm{Re}(x - y|y - z) \geqslant 0.$$

Par suite, en prenant t non nul on peut diviser par t et obtenir[2] :

$$t \|y - z\|^2 + 2\mathrm{Re}(x - y|y - z) \leqslant 0$$

Puis, en faisant tendre t vers 0 on obtient :

$$2\mathrm{Re}(x - y|y - z) \leqslant 0.$$

Un sens vient d'être fait, pour l'autre, prenons $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$:

$$2\mathrm{Re}(x - y|y - z) \leqslant 0.$$

Pour tout $z \in C$, on a :

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\| + \|y - z\|^2 + 2\mathrm{Re}(x - y|y - z).$$

Et enfin, en utilisant l'homogénéité réelle du produit scalaire :

$$\|x - y\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\| + \|y - z\|^2 - 2\mathrm{Re}(x - y|z - y) \geqslant \|x - y\|^2 .$$

Donc $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C)$ et on conclut par unicité du projeté.

2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
2. $|t| \leqslant 1$!

Dernière compilation le 15 août 2025.