DÉVELOPPEMENT
Théorème de Riezs-Fischer

Nathan Fournié

Références : Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*, ellipse (2eme ed.), p.10

THÉORÈME: RIESZ-FISCHER

Soit (E, Ω, m) un espace mesuré munit d'une mesure positive m.
Pour tout $p \geqslant 1$, l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.

Démonstration

Commençons par le cas où $p = \infty$ et rappelons que dans ce cas :

$$\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 \ , \ m(\{|f| > a\}) = 0\}.$$

Considérons une suite de fonctions (f_n) de $L^\infty(m)$ qui soit de Cauchy. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $r, q > n_k$ on ait :

$$\|f_r - f_q\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}.$$

On peut interpréter ça sur les images des f_n à un ensemble de mesure nulle N près[1] :
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $r, q > n_k$ on ait, pour tout $x \in \Omega \setminus N$:

$$|f_r(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Alors, la suite de points de $\mathbb{K}$ $f_n(x)$ est de Cauchy, or comme $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est complet, on sait qu'elle converge. Posons $f(x)$ sa limite. On veut montrer d'une part que $f \in L^\infty(m)$ et d'autre par que (f_n) converge vers f. D'après 1, en faisant tendre q vers ∞ on trouve que :

$$|f_r(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Donc :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{k} + |f_r(x)| \leqslant \frac{1}{k} + \|f_r\|_\infty.$$

Ce qui montre bien que f est dans $L^\infty(m)$[2]. Enfin, on a pour tout $n > n_k$:

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$$

puisque, pour tout $f \in L^\infty(m)$ on a : $\|f\|_\infty \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)|$. Ce qui termine le cas $p = \infty$ en montrant la convergence de (f_n) au sens de la norme $\|.\|_\infty$.

Regardons à présent le cas où $p \in [1,\infty[$ et considérons de nouveaux (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(m)$. On peut alors trouver une sous-suite de (f_n) vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Posons à présent les fonctions mesurables[3] :

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

Puis, en appliquant l'inégalité triangulaire on trouve que $\|g_k\|_p \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = 1$. Ce qui nous permet, grâce au lemme de Fatou de montrer que la fonction g^p est intégrable contre m puisque :

$$\int_E g^p dm \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k^p dm = \liminf_{k\to\infty} \left\|{}_p^p\right\| \leqslant 1.$$

Ceci montre la convergence absolue presque partout de la série numérique $\sum_{k\geqslant 1} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ Puisque la fonction g^p est finie m.p.p donc g aussi.
C'est donc aussi vraie pour la série $f_{n_1}(x) + \sum_{k\geqslant 1} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$. Notons alors $f(x)$ la somme de cette série quand elle converge et posons $f(x) = 0$ sinon. Enfin, en remarquant que :

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k\geqslant 1}^{k-1} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) = f_{n_k}(x)$$

on voit que la suite $(f_{n_k}(x))$ converge presque partout vers la fonction $f(x)$.
Pour terminer, il faut montrer que f est bien la limite de (f_n) dans $L^p(m)$. La suite est de Cauchy, donc pour $\varepsilon > 0$ on trouve un entier $n > 0$ tel qu'il existe deux entiers $q, r \geqslant n$ tels que :

$$\|f_q - f_r\|_p \leqslant \varepsilon$$

En appliquant le Lemme de Fatou on trouve :

$$\int_E |f - f_r|^p dm \leqslant \liminf_{q\to\infty} \int_E |f_{n_q} - f_r|^p dm \leqslant \varepsilon^p.$$

Donc, $(f - f_r)$ est bien dans $L^p(m)$, donc f aussi et on a : $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$ ce qui termine la preuve.

Dernière compilation le 10 août 2025.

1. En réalité il existe pour chaque k un ensemble négligeable tel qu'on ait le résultat, et N n'est que la réunion dénombrable de tout ces ensembles, donc aussi de mesure nulle.
2. Pour tout f on a toujours $|f| \leqslant \|f\|_\infty$.
3. Car somme finie de fonctions mesurable et limite de suite de fonctions mesurables.