Développement
Théorème de compacité de Riesz

Nathan Fournié

Références : Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*, ellipse (2eme ed.), p.17

Théorème: Théorème de compacité de Riesz

Soit E un espace vectoriel normé, E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est un compact.

Proposition : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, ses parties compactes sont les fermés bornés.

Démonstration

Une partie fermée bornée A de E sont évidemment des compacts en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, toute suite de A est bornée, donc admet une extraction convergente, comme A est fermée, cette extraction converge dans A.

Pour montrer que ce sont les seuls, raisonnons par contraposée et montrons qu'une partie non fermée ou non bornée ne saurait être un compact.
Soit A une partie de E non fermée, alors il existe une suite de A qui converge vers un point l dans $E \setminus A$, donc toute sous-suite converge vers l et A ne peux être compact.
Par suite, prenons A une partie non bornée de E, on peut alors créer la suite (u_n) qui est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_n\| \geqslant n.$$

Cette suite est bien sûr divergente et n'admet aucune sous-suite convergente dans A.

Avant de donner la preuve du théorème, on va avoir besoin d'un lemme connu sous le nom de "lemme de Riesz". Grosso-modo, ce lemme dit que tout sous-espace vectoriel fermé F, différent de E évite le cercle unité sauf un petit bout (voir dessin).

Lemme de Riesz : Soit F un sous-espace vectoriel distinct de E et fermé, alors pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe $x \in E$ tel que :

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(x, F) \geqslant 1 - \alpha.$$

Démonstration

Soit $x \in E \setminus F$, comme F est fermé on a :

$$d := \operatorname{dist}(x, F) > 0.$$

On peut aussi trouver un y dans F tel que :

$$\operatorname{dist}(x, y) \leqslant \frac{d}{1-\alpha} > d.$$

Puisque $1 - \alpha < 1$. On normalise en posant $\tilde{x} := \frac{x-y}{\|x-y\|}$ qui est bien de norme 1. Enfin, pour tout $\tilde{y}$ dans F on a :

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \frac{1}{\|x-y\|} \|(x-y) - \|x-y\| \tilde{y}\| = \frac{\|x-Y\|}{\|x-y\|}$$

où $Y = y + \|x-y\| \tilde{y} \in F$, donc :

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \geqslant \frac{d}{\|x-y\|} \leqslant 1 - \alpha.$$

On peut enfin montrer le théorème :

Démonstration: (Théorème de Riesz)

Si E est de dimension finie, alors le travail a déjà été fait dans la proposition. Prenons alors E un espace vectoriel normé de dimension *infinie* et raisonnons par contraposée.

On va construire une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Soit u_1 un point de E, notons E_1 le sous-espace vectoriel engendré par u_1. E_1 est fermé car de dimension 1, on peut grâce au lemme de Riesz trouver un $u_2 \in E$ de norme 1 tel que :

$$u_2 - u_1 \geqslant \operatorname{dist}(u_2, E_1) \geqslant \alpha$$

pour $\alpha \in]0, 1[$. On pose ensuite E_2 le s.e.v engendré par u_1 et u_2, rebelote, il existe u_3 tel que :

$$\operatorname{dist}(u_1, u_3), \operatorname{dist}(u_2, u_3) \geqslant \operatorname{dist}(u_3, E_2) \geqslant \alpha.$$

On répète le procédé et on obtient ainsi une suite (u_n) telle que, pour tout n : $\|u_n\| = 1$ et pour tout n :

$$\operatorname{dist}(u_n, u_{n+1}) \geqslant \alpha$$

Puisque pour tout n on a : $\operatorname{dist}(u_n, u_{n+1}) \geqslant \operatorname{dist}(u_{n+1}, E_n) \geqslant \alpha$. Enfin, cette suite ne saurait admettre une sous-suite convergente puisque tous ses termes sont séparés d'au moins α, or elle appartient à la boule unité fermée, qui n'est alors pas compact.