数学分析

一、实数及性质

§1 实数

有理数： 整数、有限小数、无限循环小数.
$p/q \quad (p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0)$

当 $x>0$，$x=a_0.a_1\cdots a_n$ 时，记 $x=a_0.a_1\cdots(a_n-1)999\cdots$
若 $x<0$，先把 $-x$ 表示成无限小数，再加负号.
eg. $1.67=1.669999\cdots$ $\qquad -24.36=-24.35999\cdots$
$-8=-7.999\cdots$ $\qquad$ 规定 $0=0.000\cdots00\cdots$
从而任何有理数都可表示成无限小数.
不可以把 $1.67=1.67000\cdots$（末零不算小数位）

定义1、给定两个非负实数，$x=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$，$y=b_0.b_1\cdots b_n\cdots$
① 若 $a_k=b_k$ $\quad k=0,1,\cdots$，则 $x=y$
② 若 $a_0>b_0$，则 $x>y$.
若 $a_k=b_k\ (k=0,1,\cdots,l)$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则 $x>y$.
若 x,y 为负实数，则，比较 $-y$ 和 $-x$ 即可

定义2、有非负实数 $x=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$
称 $x_n=a_0.a_1\cdots a_n$ 为 x 的 n 位不足近似.
称 $\overline{x_n}=x_n+1/10^n$ 为 x 的 n 位过剩近似.
} 都是有理数.
eg. $x=1.314567$，$x_3=1.314$，$\overline{x_3}=1.315$

命题：设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$，$y=b_0.b_1b_2\cdots$，则 $x>y$ 的等价条件是存在 n，使 $x_n>\overline{y_n}$

例1. $x,y\in\mathbb{R}$. 证 $\exists r\in\mathbb{Q}$, s.t. $x<r<y$. （实数的稠密性）
证：若 $x<y$.
则 $\exists n$, s.t. $\overline{x_n}<y_n$，且 $\overline{x_n}, y_n\in\mathbb{Q}$
取 $r=(\overline{x_n}+y_n)/2$
则 $x\le\overline{x_n}<r<y_n\le y$ 成立.

将全体实数构成集合称为 $\mathbb{R}$ ，$\mathbb{R}=\{x\mid x 为实数\}$
1° $\mathbb{R}$ 对 $+$、$-$、$\times$、$\div$ 都封闭.
2° $\mathbb{R}$ 有序，$\forall a,b\in\mathbb{R}$，必有 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 其一成立.
3° $\mathbb{R}$ 有 Archimedes 性：$\forall a,b\in\mathbb{R}$，若 $b>a>0$，则 $\exists n\in\mathbb{Z}_+$，使 $na>b$
4° $\mathbb{R}$ 有稠密性.

例2. $a,b\in\mathbb{R}$，证：$\forall\varepsilon>0$，有 $a<b+\varepsilon$，则 $a\le b$
证：设 $a>b$.
ε 取 $a-b$，$a=b+\varepsilon$，与"$\forall\varepsilon>0, a<b+\varepsilon$"矛盾.
从而不成立.
于是 $a\le b$.

二、绝对值与不等式

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

1° 三角不等式：$|a|-|b| \leq |a\pm b| \leq |a|+|b|$

2° $|ab|=|a||b|$

3° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

证：$-|a|\leq a\leq |a|$

$-|b|\leq b\leq |b|$

$\Rightarrow -(|a|+|b|)\leq a+b\leq |a|+|b|$

$\Rightarrow |a+b|\leq |a|+|b|$

把 b 换成 $-b$ $\Rightarrow |a-b|\leq |a|+|b|$

从而 $|a\pm b|\leq |a|+|b|$

进而 $|a|=|a-b+b|\leq |a-b|+|b|$

$\Rightarrow |a|-|b|\leq |a-b|$

$\Rightarrow |a|-|b|\leq |a+b|$

于是 $|a|-|b|\leq |a\pm b|\leq |a|+|b|$

§2、数集、确界原理

一、邻域

设 $a\in\mathbb{R}$，$\delta>0$，$\{x \mid |x-a|<\delta\}=U(a;\delta)$（或 $U(a)$）

称为点 a 的 δ 邻域.

$U^\circ(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ a 的空心 δ 邻域.

$U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$ a 的 δ 右邻域

$U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$ a 的 δ 左邻域

（默认包含中心）

∞ 邻域 $U(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$

$+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x\mid x>M\}$，$-\infty$ 邻域 $U(-\infty)=\{x\mid x<-M\}$

二、有界集、确界原理.

定义：设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的一个数集，若存在 M，s.t. $\forall s\in S$，有 $s<M$，则称 M 为 S 的一个上界.

若 $\exists L$，s.t. $\forall s\in S$，有 $s\geq L$，称 L 为 S 的一个下界.

若 S 既有上界，也有下界，则称 S 是有界集，否则称为无界集.

易知，有限区间都是有界集，无限区间都是无界集.

有限个数必是有界集.

上确界：最小的上界
下确界：最大的下界

定义2：设 S 是 $\mathbb{R}$ 中一个数集，若 η 满足：

1° 对 $\forall x\in S$，有 $s\leq\eta$，则 η 是 S 的上界.

2° 对 $\forall\alpha<\eta$，$\exists x_0\in S$，使 $x_0>\alpha$，即 η 是 S 的最小上界.

则称 η 为 S 的上确界，记为

$$\eta=\sup S$$

下确界记为 $\inf S$.

注：上下确界是唯一的.
注：上下确界可能属于 S，也可能不属于 S

例3. 设数集 S 有上确界，证明 $\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S$

证明："$\Rightarrow$" 因为 $\eta=\sup S$.
从而 $\forall x\in S$，有 $x\leq\eta$.
故 $\eta=\max S$

"$\Leftarrow$" ① $\forall x\in S$，有 $x\leq\max S=\eta$，故 η 为上界.
② $\forall\alpha<\eta$，必有 $\eta\in S$，使 $\alpha<\eta$，故 η 为上确界.
从而 $\eta=\sup S\in S$

定理1.1.（确界原理）
设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

例5. 设 A、B 为非空有界数集，$S=A\cup B$.
证明：① $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$
② $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证明：$S=A\cup B$，非空有界，则 S 的上、下确界存在.

① $\forall x\in S$，$x\in A$ 或 $x\in B$ $\Rightarrow x\leq\sup A$ 或 $x\leq\sup B$.
$\Rightarrow x\leq\max\{\sup A,\sup B\}$

从而 $\sup S\leq\max\{\sup A,\sup B\}$

另外，$\forall x\in A$，则 $x\in S$，故 $x\leq\sup S\Rightarrow\sup A\leq\sup S$

同理，$\sup B\leq\sup S$

从而 $\sup S\geq\max\{\sup A,\sup B\}$

于是 $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$

② 同理可证.

若把 $+\infty$，$-\infty$ 也可作为上、下确界.（非正常上、下确界）
把以前的（$\in\mathbb{R}$ 的）称为正常上、下确界.

§3. 函数

定义：2个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，$\forall x\in D$，有唯一 $y\in M$ 与之对应，

则 $f: D\longrightarrow M$

$x\longmapsto y$

D：定义域

$f(D)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}\subset M$，$f(D)$为值域

1° M常用 $\mathbb{R}$ 替代，于是函数的两要素为定义域和对应法则

2° 使式子有意义的定义域称为存在域，若不写，默认是存在域

3° 一个 x 只能对应一个 y：单值对应（单值函数）

a 称为原象、$f(a)$ 称为象

函数的四则运算

给定2个函数 $f, x\in D_1$，$g, x\in D_2$，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\phi$

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$x\in D_1$

$\frac{f(x)}{g(x)}$，$D^*=\{x\mid g(x)\neq 0, x\in D_2\}\cap D_1\neq\phi$

复合函数：设有2个函数 $y=f(u)$，$u\in D$

$u=g(x)$，$x\in E$

记 $E^*=\{x\mid g(x)\in D, x\in E\}\neq\phi$ 若 $E^*=\phi$，则无法复合。

记作 $y=f(g(x))=(f\circ g)(x)$，$x\in E^*$

做题时注意定义域

例：$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in D=[0,+\infty)$，$u=g(x)=1-x^2$，$x\in\mathbb{R}$

复合：$E^*=\{x\mid 1-x^2\in[0,+\infty)\}\cap\mathbb{R}$

$=[0,1]$

反函数：设函数 $y=f(x), x\in D$ 满足对于值域 $f(D)$ 中任何一个 y 值，D 中都有且只有一个 x，使得 $f(x)=y$，称为 f 的反函数

记作：

$f^{-1}: f(D)\to D$

若 f 有反函数，则 f 必是一一映射。

f 与 f^{-1} 互为反函数。　　反函数与原函数关于 $y=x$ 对称。

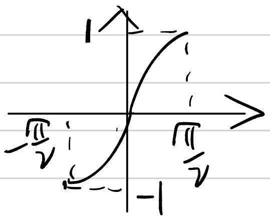
例：$y=ax+b \Rightarrow y=\frac{x-b}{a}$

$y=a^x \Rightarrow y=\log_a x$

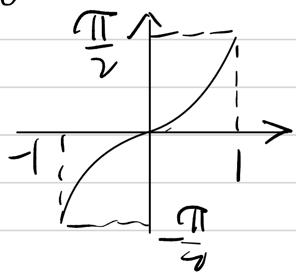
$y=\sin x$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow y=\arcsin x$

[补：大学常用反函数]

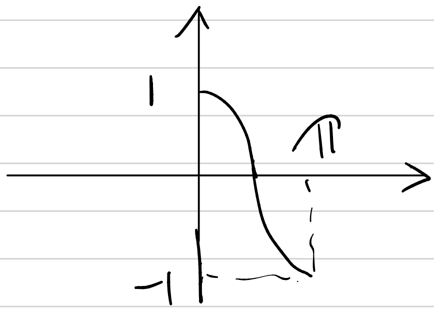
① $y=\sin x,\quad x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow y=\arcsin x.$

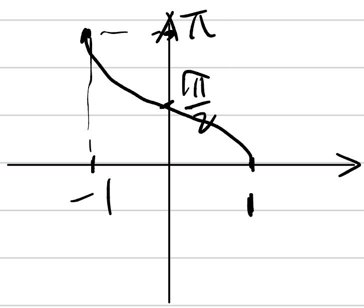


$\Rightarrow$

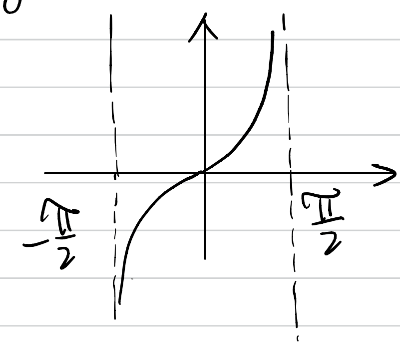


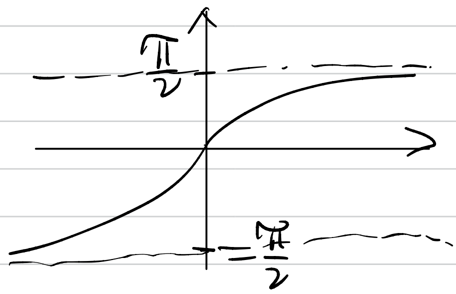
② $y=\cos x,\quad x\in[0,\pi] \Rightarrow y=\arccos x.$



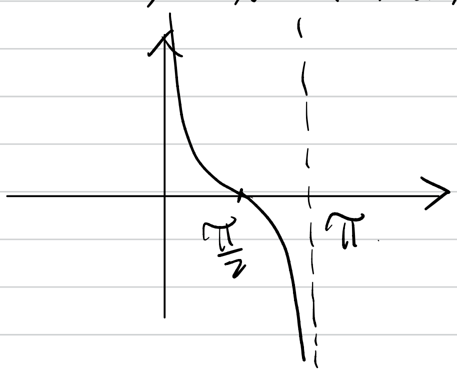


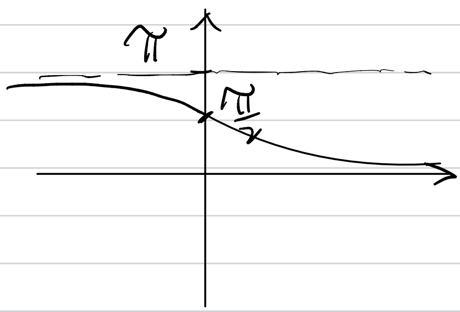
③ $y=\tan x,\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Rightarrow y=\arctan x.$





④ $y=\cot x,\quad x\in(0,\pi) \Rightarrow y=\operatorname{arccot} x.$





定义：给定 $a\in\mathbb{R}$ 且 $a>0, a\neq 1$，设 x 为无理数，规定

$$a^x=\begin{cases}\sup\limits_{r<x}\{a^r\mid r\text{为有理数}\}, & \text{当 } a>1 \text{ 时}\\ \inf\limits_{r<x}\{a^r\mid r\text{为有理数}\}, & \text{当 } 0<a<1 \text{ 时}\end{cases}$$

本质是，找小于 x 的最大有理数。

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的函数称为"初等函数"

§1.4 具有特性的函数

有界函数：对函数 $f(x)$，$x\in D$，若 $\exists M(L)$，使得 $\forall x\in D$ 有 $f(x)\leq M$ ($f(x)\geq L$)，则称 f 为 D 上的有上(下)界函数，$M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上(下)界函数。

$f(x)$ 本质上是一个数集，因此，若 $f(x)$ 有界，则 $f(x)$ 必有确界。
f 的上确界记为 $\sup\limits_{x\in D} f(x)$，下确界记为 $\inf\limits_{x\in D} f(x)$

下确界可以想像成函数的最小值。

例、设 f, g 为 D 上的有界函数，证明：

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\leq\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

证：由于 $\inf\limits_{x\in D} f(x)\leq f(x)$，$\inf\limits_{x\in D} g(x)\leq g(x)$

故 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\leq f(x)+g(x)$

从而 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)$ 是 $f(x)+g(x)$ 的一个下界。

于是 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\leq\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$ 成立。

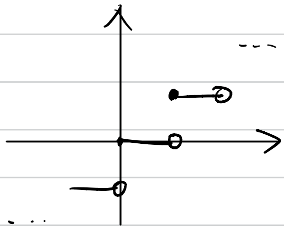
(2) 同理也可证

$$\sup_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} f(x)\geq\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}.$$

单调函数。

$x_1<x_2$，$x_1, x_2\in D$.
增函数 $f(x_1)\leq f(x_2)$
严格增函数 $f(x_1)<f(x_2)$

例. $y=[x]$.



若 $x_1<x_2$

则 $[x_1]\le[x_2]$

$y=[x]$为增函数，但不是严格增的.

定理、若 $f, x\in D$ 在D上严格增(减)，则f必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)的.

证明：(证反函数存在)

$\forall y\in f(D)$，有 $x\in D$，使 $y=f(x)$.

再 $\forall x_1\in D$, $x_1\ne x$,

由于 $x_1\ne x$，且 $f(x)$ 是严格增的，故 $f(x)\ne f(x_1)$

从而只有1个 $x\in D$ 与 y 对应，于是f的反函数存在.

(证 f^{-1} 严格增)

任取 $y_1<y_2$, $y_1,y_2\in f(D)$

由于 f 严格增，故 $\exists x_1,x_2$ 与 y_1,y_2 对应且 $x_1<x_2$

即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

从于 f^{-1} 也是严格增的.

例. 证明 $y=a^x$ $(a>1)$ 在R上严格增，当 $a\in(0,1)$ 时，严格减.

证明：($y=a^x$, $a>1$ 在R上严格增) 已知 $x\in\mathbb{Q}$, $y=a^x$ $(a>1)$ 严格增.

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 且 $x_1<x_2$,

由于R的稠密性，必 $\exists r_1,r_2\in\mathbb{Q}$，使得 $x_1<r_1<r_2<x_2$

于是 $a^{x_1}<a^{r_1}<a^{r_2}\le a^{x_2}$

从而 $a^{x_1}<a^{x_2}$

即 $y=a^x$ $(a>1)$ 在R上严格增.

同理可证 当 $a\in(0,1)$ 时，$y=a^x$ 严格减

奇偶性：定义域D必须关于原点对称

奇±奇=奇、 偶±偶=偶. (前提是定义域取交集关于原点对称)

奇·奇=偶、偶/偶=偶.

……

周期函数、Periodic function

$y=f(x)$, $x\in D$，若 $\exists\sigma>0$, $x\in D$, $x\pm\sigma\in D$，有 $f(x\pm\sigma)=f(x)$

则称 σ 为周期.

易知，若 σ 为周期，则 $n\sigma$ 也是周期，但通常 σ 指的是最小周期.

第二章 数列极限

§2.1 数列极限的概念

$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$　记为 $\{a_n\}$

定义1、设 $\{a_n\}$ 为数列，若对 $\forall \varepsilon>0$，总 $\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$
则称 $\{a_n\}$ 收敛于 a，数 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，
记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 或 $a_n\to a\ (n\to\infty)$

a 是定数（常数）

例. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\left|\frac{1}{n^\alpha}\right|<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$
则 $\exists N=1/\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$
使得 $\forall n>N$，有 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$.
则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$ 成立.

例. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2-3}=3$

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\left|\frac{3n^2-3n^2+9}{n^2-3}\right|=\left|\frac{9}{n^2-3}\right|$

当 $n\geq 2$ 时.
$=\frac{9}{n^2-3}<\varepsilon$. 解得 $n^2>3+9/\varepsilon$

对于 $N=\sqrt{3+9/\varepsilon}$，有 $\forall n>N=\max\{2,\sqrt{3+9/\varepsilon}\}$，有 $|a_n-3|<\varepsilon$.
从而证毕.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$

证明：$\forall\varepsilon>0$，$|q^n-0|=|q^n|$
$\Rightarrow$ 令 $|q|^n<\varepsilon$. 则 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$

$\Rightarrow n>\ln\varepsilon/\ln|q|$
从而 N 取 $\ln\varepsilon/\ln|q|$ 即可.

例. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证明: 若 $a=0$, 则 $\forall n$, $\frac{a^n}{n!}\equiv 0$ 成立

若 $a\neq 0$, 则 $\forall \varepsilon>0$.

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a||a|\cdots|a||a|}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}$$

取 $k=[a]+1$, 则 记 $K=\frac{|a||a|\cdots|a||a|}{1\cdot 2\cdots(k-1)(k)}$ 假设k项后还有项

原式 $=K\frac{|a|\cdots|a|}{(k+1)\cdots(n)} \le K\frac{|a|}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > K|a|/\varepsilon$

从而, 取 $N=\max\{K|a|/\varepsilon, k\}$

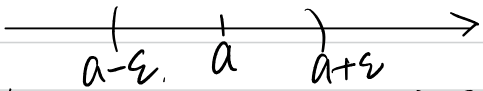
注: 1° ε的任意性, 可以写成 ε^2, $\varepsilon/2$, 等等

只要ε能趋向于0即可

2° N的相应性. $N=N(\varepsilon)$

3° 几何意义:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时 $|a_n-a|<\varepsilon$.



$\exists N$, 使N之后的所有项都在$U(a,\varepsilon)$

落在$U(a,\varepsilon)$中的项是有限项, 而落在$U(a,\varepsilon)$外的项是有限项

定义1'. 任给$\varepsilon>0$, 若在$U(a,\varepsilon)$外$\{a_n\}$中的项至多只有有限多个, 则称数列$\{a_n\}$收敛于a

推论: 若$\exists\varepsilon>0$, 使$\{a_n\}$有无穷项在$U(a,\varepsilon)$之外, 则$\{a_n\}$不以a为极限.

推论: 若$\forall a$, $\exists\varepsilon>0$, 使$U(a,\varepsilon)$外有无穷项, 则$\{a_n\}$没有极限.

例. 证明$\{n^2\}$发散. 证明: $\forall a$, $\exists\varepsilon_0=1$, 使得当n足够大时 其后所有项都在 $a+\varepsilon_0$之外. $\Rightarrow$ $\{n^2\}$没有极限.

例. 证明: $\{(-1)^n\}$发散.

证明: 当$a=1$时, 取$\varepsilon_0=1$, 则邻域为$(0,2)$, 所有奇数项都在$U(1,1)$外.

当$a\neq1$时, 取$\varepsilon_1=\frac{1}{2}|a-1|$, 则$U(a,\frac{1}{2}|a-1|)$外必有无穷多个点.

...

例. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. 作数列 $\{z_n\}$ 为 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_n, y_n$;

证: $\{z_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow a=b$

证明: "$\Leftarrow$". 由于 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} y_n = a$

从而 $\forall \varepsilon>0$, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 外的只有有限项.
则 $\{z_n\}$ 落在 $U(a,\varepsilon)$ 外的也只有有限项
从而 $\{z_n\}$ 收敛.

"$\Rightarrow$": 设 $\lim_{n\to\infty} z_n = A$, $\forall \varepsilon>0$, $\{z_n\}$ 中落在 $U(A,\varepsilon)$ 外的只有有限项,
从而, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 落在 $U(A,\varepsilon)$ 外也只有有限项
从而 $\lim_{n\to\infty} x_n = A = \lim_{n\to\infty} y_n$

例、给定数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是对 $\{a_n\}$ 中改变有限项 而得到的数列,
试证明 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 敛散性相同.

证: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\forall \varepsilon>0$, 落在 $U(A,\varepsilon)$ 外的 $\{a_n\}$ 为有限项.
故从 $\{b_n\}$ 中某项开始, $\{b_n\}$ 中的项都是 $\{a_n\}$ 中的项.
从而落在 $U(A,\varepsilon)$ 外的 $\{b_n\}$ 也有有限个.
即 $\lim_{n\to\infty} b_n = A$
若 $\{a_n\}$ 发散, 且 $\{b_n\}$ 收敛, 把 $\{b_n\}$ 看成原数列, 且 $\{a_n\}$ 也应收敛
与矛盾.
则 二者敛散性相同.

定义2: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

定理2.1: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow \{a_n - a\}$ 是无穷小数列.

定义3: 若数列 $\{a_n\}$ 满足, $\forall M>0$, 总 $\exists N>0$, 使当 $n>N$ 时有 $|a_n|>M$
则称 数列发散于无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \text{ 或 } a_n \to \infty$$

定义4: $\forall M>0$, $\exists N$, $n>N$ 时有 $a_n>M$, 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
$\forall M>0$, $\exists N$, $n>N$ 时有 $a_n<-M$, 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

无穷不一定是无界, 但无穷大的一定是无界的.

§2.2. 收敛数列的性质

Th (唯一性): 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则极限唯一.
设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. $\forall b \neq a$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|a-b|$, 从而在 $U(a,\varepsilon_0)$ 外的是有限项.
则落在 $U(b,\varepsilon_0)$ 中的必为有限项
从而 b 不是极限

Th（有界性）若$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界.

收敛必有界，但有界未必收敛
无穷大必无界，但无界未必无穷大

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 则取$\varepsilon=1$

$\exists N$，使$n>N$时，有$|a_n-a|<1$，即$a-1<a_n<a+1$
则可以取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-1|,|a+1|\}$
则$\forall n$，有$|a_n|\le M$，从而$\{a_n\}$有界.

Th（保号性）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$，则$\forall a'\in(0,a)$，$\exists N$，使$n>N$时有$a_n>a'$

证明：设$a>0$，取$\varepsilon=a-a'$，$\exists N$，使$n>N$时$|a_n-a|<\varepsilon$
$\Rightarrow -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$
$\Rightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$
因为$a_n>a-\varepsilon$，则成立.

想why.

高数中讲的是$a'=0$的特殊情况.

从而$a_n>a'$
证毕.

推论：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ 且 $a<b$，则$\exists N$，当$n>N$时有$a_n<b_n$

证明：由于$a<\frac{1}{2}(a+b)<b$，由于保号性.
则$\exists N_1$，使$n>N_1$时有 $a_n<\frac{1}{2}(a+b)$
$\exists N_2$，使$n>N_2$时有 $b_n>\frac{1}{2}(a+b)$
从而，取$N=\max\{N_1,N_2\}$
当$n>N$时有 $a_n<b_n$.

Th（保不等式性）设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均收敛，若$\exists N_0$，使$n>N$时有$a_n\le b_n$.
则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\le\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，$\forall\varepsilon>0$，
$\exists N_1$，当$n>N_1$时 $a_n>a-\varepsilon$
$\exists N_2$，当$n>N_2$时，$b_n<b+\varepsilon$
从而当$n\ge\max\{N_1,N_2,N_0\}$时，有 $a-\varepsilon<a_n\le b_n<b+\varepsilon$
从而 $a<b+2\varepsilon$.
由于ε的任意性，则 $a\le b$

(Chapter 1. §1. 例2)

例、设$a_n\ge0$，证明、若$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证明：因为$a_n\ge0$，则$a\ge0$
① 若$a=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $n>N$时 $-\varepsilon^2<a_n<\varepsilon^2$
则 $\sqrt{a_n}<\varepsilon$，则 $|\sqrt{a_n}|<\varepsilon$
从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$ 成立

② 若 $a>0$.

$\forall \varepsilon>0$，令 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\left|\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|$

$$\leq \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$$

则 $|a_n-a|<\sqrt{a}\cdot\varepsilon$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，故上式成立.

故成立.

Th（迫敛性）、设收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 以 a 为极限，$\{c_n\}$ 满足，存在 N_0，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\leq c_n\leq b_n$.

则 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$

证明：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N_1$，使 $n>N_1$ 时有 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$

$\exists N_2$，使 $n>N_2$ 时有 $a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$.

此时 $a-\varepsilon<a_n\leq c_n\leq b_n<a+\varepsilon$

即 $a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$

根本不好用XD

例：求 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 极限.

解：设 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n$　$(h_n>0)$

故 $n=(1+h_n)^n>\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$

从而 $1>\dfrac{n-1}{2}h_n^2 \Rightarrow h_n^2<\dfrac{2}{n-1}$

$0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$　由于迫敛性．$\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$

$1\leq 1+h_n\leq 1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$．由于迫敛性，$\lim\limits_{n\to\infty} 1+h_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

例、证．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，令 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n!}<\varepsilon^n$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!}=0$．（之前证过）

$\exists N$．使 $n>N$ 时．有 $\dfrac{(\frac{1}{\varepsilon})^n}{n!}<1$　故证毕.

四则运算：若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均收敛，则$\{a_n \pm b_n\}$、$\{a_n \cdot b_n\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

若$b_n \neq 0$且$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$$

注意：只有极限存在时，才可以作四则运算。

例. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$ $(m \leq k, a_m \neq 0, b_m \neq 0)$

$$= \begin{cases} a_m / b_m, & (m = k) \\ 0 & (m < k) \end{cases}$$

例. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n + 1}$，其中$a \neq -1$.

若 $a = 1$，则 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1} = 1$

若 $|a| < 1$，则 原式 $= 0$

若 $|a| > 1$，

原式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a^n}} = 1$

例、求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 解：原式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$

定义：设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为正整数列N_+的无限子集，且$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ 称为$\{a_n\}$的一个子列，记为$\{a_{n_k}\}$

由定义易知，总有 $n_k \geq k$

定理2.8、数列$\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$的任何子列都收敛（且收敛到同一个值）

常用于证明"发散"：① 找到一个子列发散 $\Rightarrow$ 原数列发散

② 有2个子列收敛，但极限不等 $\Rightarrow$ 原数列发散.

定理：$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$ （取全了）

§2.3 数列极限存在条件

定理2.9. 在 $\mathbb{R}$ 中，单调有界数列必有极限.

证明：不妨设 $\{a_n\}$ 为单调增的，且有界.

故 $\{a_n\}$ 必有上确界，记为 $a=\sup\limits_{n}\{a_n\}$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists a_n$，s.t $a-\varepsilon<a_n$.

则 $|a-a_n|<\varepsilon$

由于 a_n 递增，则取 $N=n$，$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N=n$ s.t $|a_n-a|<0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\sup\limits_{n}\{a_n\}$

例1. $a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots\frac{1}{n^\alpha}$，$\alpha>1$，证 $\{a_n\}$ 收敛.

解. 显然 a_n 为单调增列.

当 $n\geq 2$ 时.

$$a_{2n}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}=\left[1+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right]+\left[\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]$$

$$\leq\left[1+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right]+\left[\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2^\alpha\cdot n^\alpha}\right]$$

$$<\left[1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n)^\alpha}\right]+\left[\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2^\alpha n^\alpha}\right]$$

$$=1+2\left[\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2^\alpha n^\alpha}\right]=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\left[\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right]$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\cdot a_n$$

从而 $a_{2n}<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}a_n$

由于 $\{a_n\}$ 增 $\Rightarrow$ $a_n<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}a_n\Rightarrow a_n<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$

从而 $\{a_n\}$ 有界 $\Rightarrow\{a_n\}$ 收敛.

例2、$\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}$ 收敛.

解：易知 $\{a_n\}$ 递增，有上界为2. $\Rightarrow$ 则收敛.

$a_{n+1}^2=2+a_n$

$a^2=2+a\Rightarrow a=2.\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

例3. 设 S 为有界数集，若 $\sup S=a\notin S$，则 $\exists\{x_n\}$ 严格增，$\{x_n\}\subset S$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

证明：因为 $\sup S=a$，$\forall\varepsilon>0,\exists x\in S$，$x>a-\varepsilon$

由为 $a\notin S$，则 $x<a$.

取 $\varepsilon_1=1$，$\exists x_1\in S$，使 $x_1>a-\varepsilon_1$

$x_1<a$　　从而 $a-\varepsilon_1<x_1<a$

再取 $\varepsilon_2=\min\{a-x_1,\frac{1}{2}\}$　会得到 $a-\varepsilon_2<x_2<a$

则存在 $x_2>a-\varepsilon_2\geq x_1$　需要 $x_2>x_1\Rightarrow$ 只要 $a-\varepsilon_2>x_1$

即可、即 $\varepsilon_2<a-x_1$

则此任意，取 $\varepsilon_n=\min\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\}$，则存在 $x_n\in S$ 使
$a_n-\varepsilon_n<x_n<a$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在，求值。

证明：$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2(\frac{1}{n})^2+\cdots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{1}{n})^k+\cdots(\frac{1}{n})^n$$

$$=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$<2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

（多了一项）

$$=a_{n+1}$$

从而 $a_n<a_{n+1}$，即 $\{a_n\}$ 是严格增的。

由上式：

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$$=2+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

$$=2+1-\frac{1}{n}=3-\frac{1}{n}<3$$

从而 $\{a_n\}$ 有界。

得 $\{a_n\}$ 收敛。并记 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.718281828459\cdots\cdots$

例，任何数列都存在单调子列（略）

定理 2.10.（致密性定理）任何有界数列必有收敛子列。（用上一条证）

定理 2.11.（Cauchy 收敛准则）、

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n,m>N$ 时，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

好处是，证明 $\{a_n\}$ 收敛时不再需要知道 a

证明："$\Rightarrow$"

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n,m>N$ 时有

$$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2},\ |a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $|a_n-a_m|=|(a_n-A)+(a_m-A)|$

$<|a_n-A|+|a_m-A|<\varepsilon$，成立。

"$\Leftarrow$"

（先证 $\{a_n\}$ 有界）取 $\varepsilon_0=1$，$\exists N_0$，$\forall n>N_0$ 有 $|a_n-a_{N_0+1}|<1$

取 $M=\max\{|a_1|,\cdots,|a_{N_0}|,|a_{N_0+1}|+1\}$

此时 $|a_n|\leq M$，即 $\{a_n\}$ 有界。

由致密性，则$\{a_n\}$必有收敛子列 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\xi$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，$n,m>N$时有

$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

取$a_m=a_{n_k}$，当k充分大时，有$n_k>N$，并令$k\to\infty$，得 $|a_n-\xi|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

即$\{a_n\}$收敛.

例. $a_n=\frac{b_1}{10}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}$，求证$a_n$满足Cauchy收敛条件，从而收敛.

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使$n,m>N$时有（设$n>m$）

$$|a_n-a_m|=\frac{b_{m+1}}{10^{m+1}}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}<9\cdot\frac{1}{10^{m+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n-m-1}}\right)$$

$$<\frac{9}{10^{m+1}}<\frac{1}{10^m}<\frac{1}{m}$$

令$N=\frac{1}{\varepsilon}$即可

第三章 函数极限

§3.1 函数极限的概念

定义：设 f 定义在 $[a,+\infty)$，若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$.

例. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. 证明：$\forall \varepsilon>0$，取 $M>0$. 当 $|x|>M$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

则 M 可以取 $1/\varepsilon$，当 $|x|>M$ 时有 $|f(x)-0|<\varepsilon$

例. 证 $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ 证明：$\forall\varepsilon>0$，取 $M>0$，当 $x<-M$ 时.

令 $\left|\arctan x+\frac{1}{2}\pi\right|<\varepsilon$

即 $-\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arctan x<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$

由于 $\arctan x\in(\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$，则 $-\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arctan x$ 必成立.

设 $\varepsilon<\frac{1}{2}\pi$，从而 $x<\tan(\varepsilon-\frac{1}{2}\pi)$

此时只需取 $M=\tan(\frac{1}{2}\pi-\varepsilon)>0$ 即可

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x<x<\tan x$.

当 $x>0$ 时，有 $x>\sin x$.

定义：当 $x\to x_0$ 时的极限

设 $f(x)$ 定义在点 x_0 的某个空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$ 的函数，A 为定数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta<\delta'$，使当 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$.

例. 证 $\lim_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x_0^2}$ $(|x_0|<1)$

解：$|x|\le 1$. $|x_0|<1$.

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x_0^2}\right|=\frac{|x_0^2-x^2|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x_0^2}}\le\frac{|x_0+x||x_0-x|}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$\le\frac{2|x-x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}}$$ 则不妨取 $\delta=\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon$

结合定义域，得 $\delta=\min\left\{\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon,|x_0+1|,|x_0-1|\right\}$

定义：单侧极限.

$f(x)$是在 $U^\circ_+(x_0,\delta')$上有定义，若A为定数，若对$\forall \varepsilon>0$，存在$\delta<\delta'$，使当$x_0<x<x_0+\delta$时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

§2. 函数极限的性质.

定理3.2（唯一性），若$\lim f(x)$存在，则唯一

定理3.3（局部有界性）：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$f$在$x_0$的某空心邻域$U^\circ(x_0)$内有界.

定理3.5.（局部保号）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，$\forall r$，$0<r<A$，$\exists U^\circ(x_0)$
使当$x\in U^\circ(x_0)$时，$f(x)>r>0$

定理.（保不等式性）：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$存在，若$\exists U^\circ(x_0)$，使
$f(x)\leq g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

定理（迫敛性）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\exists U^\circ(x_0)$使$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$
则$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$

四则运算：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}$

解：由于 $\dfrac{(x^k-1)}{x-1}=\dfrac{(x-1)(1+x+\cdots+x^{k-1})}{x-1}=1+x+\cdots+x^{k-1}$

原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1} (1+x) + (1+x+x^2) + \cdots + (1+x+\cdots+x^{n-1})$$
$$= 1+2+\cdots+n$$
$$= (1+n)n/2$$

§3. 函数极限存在条件：从函数值的变化趋势来判断极限存在性.

Th.（Heine定理）：f 在 $U^\circ(x_0,\delta')$ 上有定义，若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在

$\Leftrightarrow$ 任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等.

Heine Theorem 可简述为 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 (n\to\infty)$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

实用：若可找到一个 $x_n \to x_0$，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

或. 找到 2个数列 $\{x_n'\}, \{x_n''\}$，但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n'')$，则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

例、证 $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ 不存在.

设 $x_n' = \frac{1}{n\pi}$，$x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n' = 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n'' = 0$

则 $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{x_n'}) = 0$，$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{x_n''}) = 1$，不等

从而 $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ 不存在.

Th.（Cauchy准则）. 设函数 f 在 $U^\circ(x_0,\delta')$ 上有定义，则
$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0,\delta')$，s.t. $\forall x', x'' \in U^\circ(x_0,\delta)$
有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

§4. 两个重要极限

① $\lim_{x\to 0} \sin x / x = 1$

证明：由于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x < \tan x$，$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$
取倒数得 $\cos x < \sin x / x < 1$
由迫敛性得 $\lim_{x\to 0^+} \sin x / x = 1$.
同理可证
$\lim_{x\to 0^-} \sin x / x = 1$.