例. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

② 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\right)$

证明：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 之前已证.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=e$

故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n>N$ 时

$$e-\varepsilon<(1+\frac{1}{1+n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<e+\varepsilon$$

取 $X=N$，当 $x>X$ 时，令 $n=[x]$，则

$$(1+\frac{1}{1+n})^n<(1+\frac{1}{1+x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

从而

$$e-\varepsilon<(1-\frac{1}{x})^x<e+\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

§5. 无穷小量 & 无穷大量

定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 f 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量

说无穷小量时，必须指出 x 的变化过程.

定义：若函数 g 在 $U^\circ(x_0)$ 上有界，则称 g 为当 $x\to x_0$ 时的有界量

x 变化过程相同.（$x\to x_0$）

任何无穷小量必是有界的.

无穷小量的性质：1° 两个（相同类型的）无穷小量之和、差、积仍是～.

2° 无穷小与有界量乘积仍是无穷小.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)-A$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量

无穷小量的比较（阶：趋于0的快慢）

对无穷小量 $f\to 0,\ g\to 0\quad (x\to x_0)$

1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量

记为 $f(x)=\underbrace{o(g(x))}_{\text{比}g\text{更高阶的函数类(集合)}}\quad (x\to x_0)$

提取的一个元素（"=" 的含义是"属于"）

eg. $x^k=o(1)\quad (x\to 0)$

2° 若存在 $K,L>0$，使在 $U^\circ(x_0)$ 上有 $K\leqslant\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant L$，或

当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=C\neq 0$，则称 f,g 为同阶无穷小量

（后一种情况不一定总适用）

若 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant L,\ x\in U^\circ(x_0)$，则记作 $f(x)=O(g(x))\quad (x\to x_0)$

特别，若 $f(x)$ 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有界，则记为 $f(x)=O(1)\quad (x\to x_0)$

例、 $1-\cos x=O(x)\quad (x\to 0)$

$x(2+\sin\frac{1}{x})=O(x)\quad (x\to 0)$

$\sin(x)=O(1)\quad (x\to\infty)$

若 $f(x)=o(g(x))$

3° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 f 与 g 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量

记作 $f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)$

定理、设函数 $f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)$，则

1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$ （乘）

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)/f(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)/g(x)=B$ （除）

相加/减时一般不用等价无穷小替换

极限有存在的，早点把它拿出去

定义(无穷大量)：设 f 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上有定义，若 $\forall G>0, \exists \delta>0$, s.t. 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$
有 $|f(x)|>G$，则称 f 当 $x\to x_0$ 时有非正常极限 ∞，记作
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ （极限是不存在的）

若为 $f(x)>G$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$；若为 $f(x)<-G$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

例. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

证：$\forall G>0$，只要 $\frac{1}{x^2}>G$，只需 $|x|<1/\sqrt{G}$，只需取 $\delta=1/\sqrt{G}$ 即可

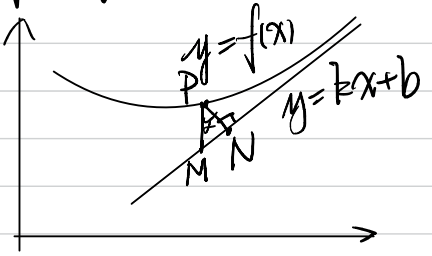
例、证明当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

证明：$\forall G>0$，只要 $a^x>G \Rightarrow x>\log_a G$，从而只要取 $x>M=\log_a G$ 即可

注. 无穷大量不是很大的数，而是具有非正常极限的函数
注. 无穷大量必无界，但无界不一定无穷大. eg. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\sin x$

渐近线：水平、垂直、斜. 水平渐近线不用求，直接求极限即可.

如何求斜渐近线：



$|PN| = |PM\cdot\cos\alpha|$

$= |f(x)-(kx+b)|\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-kx=\underline{b}$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\underline{k}$

得 $y=kx+b$

理解：当 $x\to+\infty$ 时，把 $f(x)$ 看成一条直线 $y=kx+b$

例. 求 $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线

解：设 $y=kx+b$ 为斜渐近线，则

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} x^2/(x^2+2x-3)=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$

从而斜渐近线为 $y=x-2$

又由于 $f(x)=x^3/(x+3)(x-1)$ 故有垂直渐近线 $x=1, x=-3$

第四章 函数的连续性

§1. 概念

定义：若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 处有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

注意：$f(x)$ 需在 x_0 处有定义

由于是用极限定义的，故可以用 $\varepsilon-\delta$ 描述

记 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

从而 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$

注. $f(x)$ 在 x_0 处有极限 $\Leftarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处连续

$f(x)$ 在 x_0 处连续 意味着 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

定义（左/右连续）：略.

定理：f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ f 左连续且 f 右连续

[间断点及其分类]

定义：不连续的点即为间断点.

- 左右极限都存在 $\Rightarrow$ 第一类间断点
  - 可去间断点：极限存在但不与 $f(x_0)$ 相等
  - 跳跃间断点：左右极限存在但不相等
- 极限至少一侧不存在 $\Rightarrow$ 第二类间断点
  - 振荡间断点
  - 无穷间断点.

[区间上的连续函数]

定义：f 在区间 I 上每点都连续，则称 f 为 I 上的连续函数.

定义：若 f 在区间 I 上有有限个第一类间断点，则称为 f 在 I 分段连续.

§2 连续函数的性质

定理（局部有界性）：若 f 在 x_0 连续，则 f 在 $U(x_0)$ 上有界.

定理（局部保号性）：若 f 在 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$，则 $\forall r>0$，$\exists U(x_0)$ 使 $\forall x\in U(x_0)$ 有 $f(x)>r$

定理（四则运算）：若 f 与 g 在 x_0 连续，则 $f\pm g$，$f\cdot g$，f/g $(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 处连续

定理（复合函数）：若 f 在 x_0 连续，g 在 $f(x_0)$ 处连续，则 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.

定理（最大最小值定理）：若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大/小值.

引理.(有界性定理)：若f在$[a,b]$上连续,则f在$[a,b]$上有界

证明：设f在$[a,b]$上无界

在$[a,b]$上取数列$\{x_n\}$使得$f(x_n)>n$，$n=1,2\cdots$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$

又由于$\{x_n\}$有界，则$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x_n'\}$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$

由于 $a\le x_n'\le b$，必有$a\le x_0\le b$

因为f在$[a,b]$连续，从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$

为间断点$\Rightarrow$矛盾.

由引理和确界原理,存在上确界 $\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)=M$

下面证明一定存在一个点取到M：(反证)

假设$\forall x\in[a,b]$，$f(x)<M$，令$g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$，$x\in[a,b]$

则$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)>0$，则g必有上界.记为G，

从而 $0<g(x)<G$，$x\in[a,b]$

$\Rightarrow f(x)\le M-\frac{1}{G}$

则M不是$f(x)$的上确界，矛盾！

从而必有$\xi\in[a,b]$,使$f(\xi)=M$.

定理：(介值性定理)设f在$[a,b]$上连续，且$f(a)\ne f(b)$，$\forall\mu$介于$f(a)$、$f(b)$之间，则$\exists x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=\mu$.

推论：(根的存在定理)若f在$[a,b]$连续，且$f(a)$,与$f(b)$异号，则至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使$f(x_0)=0$.

[反函数连续性]

定理：若f在$[a,b]$上严格单调且连续，则反函数f^{-1}在其定义域$[f(a),f(b)]$上连续.

证、设f在$[a,b]$上严格增

由于f连续，$\forall\varepsilon>0$，$\forall x_0\in[a,b]$，$\exists x_1<x_0<x_2$，使$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

设 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，则

为使 $|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)|=|x_1-x_2|<\varepsilon$

只要δ取 $\min\{y_0-y_1,y_2-y_0\}$

则必有在$U(y_0,\delta)$中有上式成立

* [一致连续性] → 函数在区间上更强的连续性.

定义: 设 f 为定义在 I 上的函数. 若对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对 $\forall x', x'' \in I$,
只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.
则称 f 在 I 上一致连续.

例. prove $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

证明: $\forall \varepsilon>0$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. 为使 $|f(x_1)-f(x_2)|=|a(x_1-x_2)|$
$=|a|\cdot|x_1-x_2|<\varepsilon$
只要 $|x_1-x_2|<\varepsilon/|a|$. 令 $\delta=\varepsilon/|a|=\delta(\varepsilon)$
从而 $f(x)=ax+b$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

例. prove $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续. $|x_1-x_2|<\delta$

证明 $f(x)$ 在 I 上不一致连续 $\Leftrightarrow$ 证明 $\exists \varepsilon_0>0$, 不论取 δ 多么小, 总有 $x_1, x_2\in I$, ✓
使 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0$

证明. 取 $\varepsilon_0=1$, 对 $\forall\, 0<\delta<\frac{1}{2}$
存在 $x_1=\frac{1}{2}\delta$, $x_2=\delta$, 使 $|f(x_1)-f(x_2)|=|\frac{1}{\delta}|>2>\varepsilon_0$
故 $y=\frac{1}{x}$ 不一致连续

例. f 定义于 I 上, 试证 $f(x)$ 在 I 上一致连续 $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n'\}, \{x_n''\}\in I$,
若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$
则 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

证: "$\Rightarrow$": 若 f 在 I 上一致连续, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, 使 $\forall x_1, x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$
有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
由于 $x_n', x_n''\in I$, 从而对上述 δ,
存在 N, $\forall n>N$, 有 $|x_n'-x_n''|<\delta$
有 $|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$
即 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n')-f(x_n'')|=0$

"$\Leftarrow$": (反证). 若 $f(x)$ 在 I 上不一致连续.
则 $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall\delta>0$, $\exists x', x''$ 满足 $|x'-x''|<\delta$
但 $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$
取 $\delta_0=1$, ……
取 $\delta_1=\frac{1}{2}$, ……
……
取 $\delta_n=\frac{1}{n}$, ……
于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))\neq 0$. 矛盾

☆ 定理 (一致连续性定理) 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

第五章 导数和微分

§1. 导数的概念

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，那么 $\varepsilon = \Delta y/\Delta x - f'(x_0)$
为当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量，于是 $\varepsilon = o(\Delta x)$
即 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的有限增量公式.

定理：f 在 x_0 可导 $\Rightarrow$ f 在 x_0 处连续 （连续不一定可导）

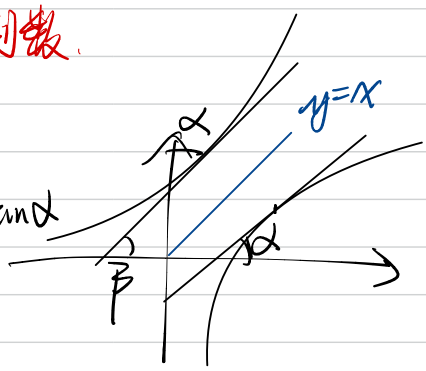
§. 求导法则.

设 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(x)$，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续，严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

原函数和反函数对应点切线斜率互为倒数.

例. $y=2x$ $\quad dy/dx = 2$
$x=\frac{1}{2}y$ $\quad dx/dy = 1/2$



例. 原函数 $y=f(x)$ $\Rightarrow$ $y'=f'(x)=\tan\alpha$
反函数：$y=f^{-1}(x)$
关于 $y=x$ 对称，$f^{-1}(x)=\tan\beta$
由于 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}\pi$
从而 $\tan\alpha = 1/\tan\beta$.

例. (1) a^x 求导. 原：$y=a^x \Rightarrow x=\log_a y$.
从而 $(a^x)' = \dfrac{1}{(\log_a y)'} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}\cdot\log_a e} = y\ln a = a^x \ln a$

(2) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \dfrac{1}{(\cos y)'} = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{(\tan y)'} = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

【复合函数求导】
注意：$f'(\varphi(x)) = f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$ 与 $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 会被混淆

[求导公式]

基本初等函数求导公式:

① $C'=0$, ② $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

③ $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$, $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

④ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

⑤ $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

⑥ $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ ★ $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ★

§2. 参变量函数的导数

给定曲线C

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\psi'(t)/\varphi'(t), \quad \cot\alpha=\varphi'(t)/\psi'(t)$$

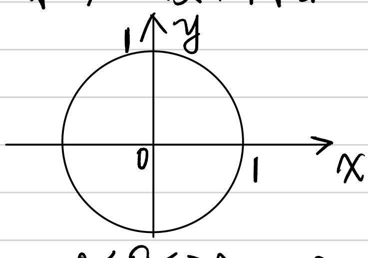
若 $\varphi'^2+\psi'^2\neq 0$，则称曲线C为光滑曲线.

例、求上半椭圆方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $0<t<\pi$

所确定函数 $y=y(x)$ 的导数.

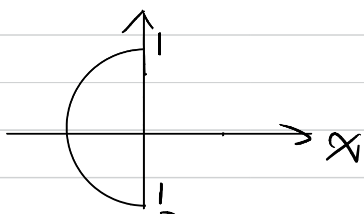
解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$

[常见图形的极坐标]

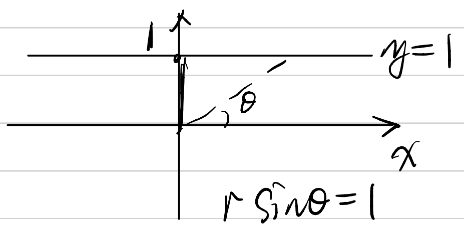


$0\le\theta\le 2\pi$, $r=1$.

$\Rightarrow r=1$



$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$, $r=1$

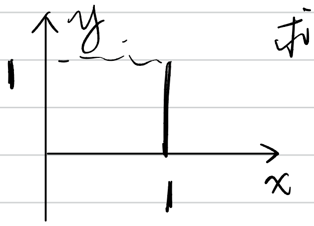


$r\sin\theta=1$

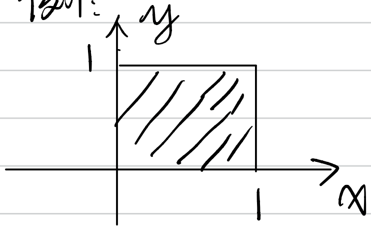
$0<\theta<\pi$

直角坐标和极坐标转换公式

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

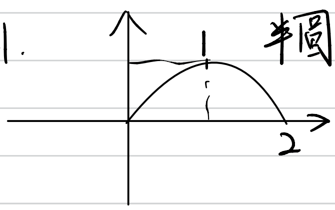
例:  求线段的极坐标.

解: $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. $\begin{cases} x=1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r\cos\theta = 1 \\ 0\le r\sin\theta\le 1 \end{cases} \Rightarrow r=\frac{1}{\cos\theta},\ 0\le\theta\le\frac{1}{4}\pi$

例: 

当 $0\le\theta\le\frac{1}{4}\pi$ 时 $0\le r\le\frac{1}{\cos\theta}$

当 $\frac{1}{4}\pi\le\theta\le\frac{1}{2}\pi$ 时. $0\le r\le\frac{1}{\sin\theta}$

例.  半圆

$(x-1)^2+y^2=1$

代入 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow (r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta=1$

$r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+\cancel{1}+r^2\sin^2\theta=\cancel{1}$

$r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

§5. 微分

正方形 $S=x^2$, $\Rightarrow \Delta S=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$

由此可知: 当 x_0 有微小变化 Δx 时, 引起正方形面积变化 ΔS 可用 $2x_0\Delta x$ 近似, 误差为 $o(\Delta x)$

定义: $\underbrace{\Delta y}_{\text{精确值}}=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

若 Δy 可写成 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 其中A与 Δx 无关(可以与x有关)

则称f在 x_0 处可微. 称 $A\Delta x$ 为线性主部. 并记 $dy|_{x=x_0}=A\Delta x$

函数的微分dy和函数增量 Δy 仅相差一个 $o(\Delta x)$, 但是 Δx 和 dx 严格相等.

指出某变量为常数, 务必指出相对哪个变量是常数

定理: 可微 $\Leftrightarrow$ 可导

[高阶微分]

一阶微分： $dy = f'(x)dx$ 其中 x 与 dx 是相互独立的.

二阶微分： $d(dy) = d(f'(x)dx)$

$= (f'(x)dx)'dx$ (对 x 求导，和 dx 无关)

$= f''(x)\,dx\cdot dx$

$= f''(x)\,dx^2$

相应的：n阶微分： $d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n$

第六章 微分中值定理及其应用

§1、拉格朗日定理和函数单调性

罗尔定理：若f满足 1° f在$[a,b]$上连续
2° f在(a,b)上可导
3° $f(a)=f(b)$
则$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

证：设f最大值为M，最小值为m.
若① $M=m$，则$\forall\xi\in(a,b)$ 有 $f'(\xi)=0$
若② $M>m$，则 M与m至少有1个位于(a,b)中
由费马定理，$\exists\xi\in(a,b)$，$f'(\xi)=0$

$f'(\xi)=0$

Lagrange 中值定理：若f满足 1° f在$[a,b]$连续
2° f在(a,b)可导
则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

推论：(导数极限定理)，设f在$U(x_0)$上连续，在$U^\circ(x_0)$内可导，且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在，则$f$在$x_0$可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

适合求分段函数的导数.

§2. 柯西中值定理 & 不定式极限 (L'Hospital)

定理. 若f和g满足 1° $[a,b]$上连续
2° (a,b)上可导
3° $f'(x)$, $g'(x)$不同时为0
4° $g(a)\neq g(b)$

则$\exists\xi\in(a,b)$，使
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}$$

§3. 泰勒公式：用高次多项式逼近函数.

[带皮亚诺余项的泰勒公式]

设 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

$\Rightarrow p_n(x_0)=a_0$

$\Rightarrow p_n'(x_0)=a_1$

$\Rightarrow p_n''(x_0)=2a_2$

$\cdots$

$\Rightarrow p_n^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$

从而 $a_0=p_n(x_0)$，$a_1=p_n'(x_0)$，$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)$，$\cdots$，$a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)$

设f在x_0处n阶可导，如果 $f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}$

则不难得到 $f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$，$k=1,2,\cdots,n$

则称 $T_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为Taylor多项式.

定理：若f在x_0处有n阶导数，则有 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$

若取$x_0=0$，则 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

称为Maclaurin公式.

常用Maclaurin公式

1° $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$

2° $\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^k\dfrac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2k+1})$

3° $\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k})$

4° $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}x^n+o(x^n)$

5° $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$ 想二项展开.

6° $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ 无穷项等比数列求和公式

积分 求原函数 $\Rightarrow \dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$

例. 求 $f=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的Maclaurin展开，则代入 $-\dfrac{x^2}{2}$ 于 e^x 的Maclaurin中即可.

例. 求 $\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 时的Taylor公式：

解：$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x-1)+1}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+o((x-1)^n)$

f在其它地方展开，借助Maclaurin公式.

例. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)-e^{x^2}-\sin x^3+1}{x^3}$

注意. 相加减一般不用等价无穷小替换 $\Rightarrow$ Maclaurin.

由于 $\ln(1-x^2)=-x^2+o(x^3)$

$e^{-x^2}=1+(-x^2)+o(x^3)$

$\sin x^3=x^3+o(x^3)$

代入 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{-x^2}\cancel{-1}+\cancel{x^2}-x^3\cancel{+1}+o(x^3)}{x^3}=-1$

[带 Lagrange 余项的 Taylor 公式]

定理：若 f 在 [a,b] 上存在直至 n 阶的连续导函数，在 (a,b) 上存在 (n+1) 阶导数，

则 $\forall x, x_0 \in [a,b]$，至少存在一个 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

若 $x_0=0$，也可写成带 Lagrange 余项的 Maclaurin 公式，

其中余项为
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

§4. 极值和最值. 略.

§5. 函数的凸性与拐点.

第七章 实数的完备性

§1、关于实数集完备性的基本定理

一、区间套定理

定义1、设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 有如下性质：

$1°$ $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

$2°$ $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

则称 $\{[a_n, b_n]\}$ 为区间套

定理（区间套定理）：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，则在 $\mathbb{R}$ 中存在唯一的一点 ξ，使得 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$

证明：由 $1°$ 知，$\{a_n\}$ 为递增数列且有界，则 $\{a_n\}$ 有极限 ξ，且有 $a_n \le \xi$，$n=1,2\cdots$

同理，$\{b_n\}$ 也有极限，并由 $2°$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，且 $b_n \ge \xi$，$n=1,2\cdots$

从而 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$

（下面证 ξ 唯一）

假设 ξ' 也满足 $\xi' \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$

则 $|\xi' - \xi| \le b_n - a_n$，$n=1,2\cdots$

由 $2°$ 知 $|\xi' - \xi| \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，从而 $\xi = \xi'$

得证.

推论：若 $\xi \in [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$ 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 所确定的点，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使当 $n>N$ 时有 $[a_n, b_n] \subset U(\xi, \varepsilon)$

注、区间套定理一定要求为闭区间，否则不成立.

二、聚点定理 & 有限覆盖定理

定义2 设 S 为数轴上的点集，ξ 为定点（$\xi \notin S$ 或 $\xi \in S$ 均可）．若 ξ 的任何邻域上都有 S 中无穷多个点，则称 ξ 为 S 的一个聚点.

定义2′：对于点集 S，若点 ξ 的任何 ε 邻域上都含有 S 中异于 ξ 的点，即 $U^\circ(\xi,\varepsilon) \cap S \ne \phi$，则称 ξ 为 S 的一个聚点

定义2″：若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\} \subset S$，则其极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ 称为 S 的一个聚点

定理（Weierstrass 聚点定理）：实轴上的任一有界无穷点集 S 至少有一个聚点.

证明：设 S 是 $\mathbb{R}$ 上的任意有界无穷点集，在 S 中任取一个两两不同的点列 $\{x_n\}$，

显然 $\{x_n\}$ 是有界点列.

由于致密性定理，$\{x_n\}$ 必存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$

设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有 $x_0 - \varepsilon < x_{n_k} < x_0 + \varepsilon$

这说明 $U(x_0, \varepsilon)$ 中有无穷个点

即 x_0 是 S 的一个聚点.

定义3、设S为数轴上的点集，H为开区间的集合，若S中的任何一个点都含在H中至少一个开区间中，则称H为S的一个开覆盖，或称H覆盖。
若H中开区间是无限(有限)的，则称H为S的一个无限(有限)开覆盖。

定理（Heine-Borel 有限覆盖定理）、设H为闭区间$[a,b]$的一个(无限)开覆盖，则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

*三、实数完备性定理之间的等价性

1、确界原理
2、单调有界定理
3、区间套定理
4、有限覆盖定理
5、聚点定理 & 致密性定理
6、柯西收敛准则

全部等价.

*§2、上极限 & 下极限

定义、若在数a的任一邻域内含有$\{x_n\}$的无限多项，则称a为$\{x_n\}$的一个聚点.
点列的聚点实质上是其收敛子列的极限.

定义、有界数列(点列)$\{x_n\}$至少有一个聚点，且存在最大聚点与最小聚点.
⇒有界数列必有上下极限

定义、有界数列$\{x_n\}$的最大聚点$\overline{A}$与最小聚点$\underline{A}$分别称为$\{x_n\}$的上/下极限.
记作

$$\overline{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n \quad , \quad \underline{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

例. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n\frac{n}{n+1}=-1$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sin\frac{n}{4}\pi=1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\sin\frac{n}{4}\pi=-1$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=0$

定理、对任何有界数列$\{x_n\}$有 $\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$.

定理、$\lim_{n\to\infty}x_n=A \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=A$

定理. 设$\{x_n\}$为有界数列

(1) $\overline{A}$为$\{x_n\}$的上极限$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，满足

1° $\exists N>0$，当$n>N$时有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$

2° 存在子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon$，$k=1,2,\cdots$

(2) $\underline{A}$为$\{x_n\}$的下极限$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，满足

1° $\exists N>0$，使当$n>N$时有$x_n>\underline{A}-\varepsilon$

2° 存在子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}<\underline{A}+\varepsilon$，$k=1,2\cdots$

证明：(必要性)

由$\overline{A}$为$\{x_n\}$的聚点，故$\forall \varepsilon>0$，在$U(\overline{A};\varepsilon)$内有$\{x_n\}$中无穷多项，记为$\{x_{n_k}\}$

则有$x_{n_k}>\overline{A}-\varepsilon$，$k=1,2,\cdots$

又因为$\overline{A}$为$\{x_n\}$最大聚点，故在$\overline{A}+\varepsilon$的右边至多只有$\{x_n\}$的有限项，设这些有限项最大下标为N，当$n>N$时有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$

(充分性)

$\forall \varepsilon>0$，由1°，2°知$U(\overline{A};\varepsilon)$中有$\{x_n\}$的无限个项，从而$\overline{A}$为$\{x_n\}$的一个聚点

设$\alpha>\overline{A}$，记$\varepsilon=\frac{1}{2}(\alpha-\overline{A})$，则由1°知在$U(\alpha;\varepsilon)$中至多只有$\{x_n\}$中有限项

从而α不是聚点

从而$\overline{A}$是最大聚点.

定理. 设$\{x_n\}$为有界数列.

(1) $\overline{A}$是$\{x_n\}$上极限$\Leftrightarrow$ $\forall \alpha>\overline{A}$，$\{x_n\}$中大于$\alpha$的项至多有有限项，

$\forall \beta<\overline{A}$，$\{x_n\}$中大于$\beta$的项有无穷多个.

(2) 由名.

定理.(上下极限的保不等式性)

设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为有界数列，满足$\exists N_0>0$，$n>N_0$时有$a_n\leq b_n$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

第八章 不定积分

§1. 概念

函数有原函数的条件？

定理、若 f 在区间 I 上连续，则 f 上存在原函数 F，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in I$
（到 §5 中给出证明）

定义、函数 f 在 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$

Anti-derivative

不定积分本质是一个集合 $\{F+C\}$

则 $\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x)$
$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=f(x)dx$

☆【基本积分表】

1、$\int 0dx=C$　　2. $\int 1dx=x+C$

3、$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$
$(\alpha\neq-1$，且 $x>0)$　　4. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ $(x\neq0)$

5. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$　　6. $\int a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C$

7. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$　　8. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

9. $\int\sec^{2}x\,dx=\tan x+C$　　10. $\int\csc^{2}x\,dx=-\cot x+C$

11. $\int\sec x\cdot\tan x\,dx=\sec x+C$　　12. $\int\csc x\cdot\cot x\,dx=-\csc x+C$

13. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C$　　14. $\int\frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+C$

§2. 分部积分法 & 换元积分法.

定理（换元积分法）. 设 f 在 I 上有定义，$\varphi(t)$ 在 J 上可导，且 $\varphi(J)\subseteq I$

(i) 若不定积分 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 在 I 上存在，则不定积分
$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C$$

(ii) 若 $x=\varphi(t)$ 在 J 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，$x\in I$，且不定积分 $\int f(x)dx$ 在 I 上存在，则当不定积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C$ 在 J 上存在时，在 I 上有
$$\int f(x)dx=G(\varphi^{-1}(x))+C$$
（证明：直接求导即可）

如何使用：凑微分法.

例1. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}d(-\cos x) = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x$

$= -\ln|\cos x| + C$

例2. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

例3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d(\frac{x}{a}) = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

例4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad (a\neq 0)$

$= \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}dx = \int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})\cdot\frac{1}{2a}dx$

$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C$

$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

例5. $\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}d\sin x$

$= \int \frac{1}{1-\sin^2 x}d\sin x = \int \frac{1}{1-t^2}dt = \int \frac{1}{2}(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t})dt$

$= \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C$

或者：$\int \sec x\,dt = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx$

$= \int \frac{d(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x} = \ln|\sec x+\tan x| + C$

第二换元积分.

例6. $\int \frac{du}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}$

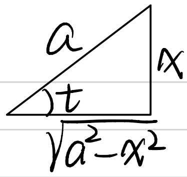
令 $u=x^6 \Rightarrow$ 原式 $= \int \frac{6x^5dx}{x^3+x^2} = \int \frac{6x^3}{x+1}dx$

$= 6\int \frac{x^2(x+1)-x(x+1)+(x+1)-1}{x+1}dx$

$= 6\int (x^2-x+1-\frac{1}{x+1})dx = 2x^3-3x^2+6x-6\ln|x+1| + C$

$= 2\sqrt{u} - 3\sqrt[3]{u} + 6\sqrt[6]{u} - 6\ln|\sqrt[6]{u}+1| + C$

例7、$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$



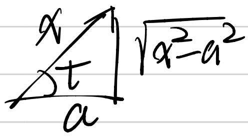
令 $x=a\sin t$，$|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$

则 原式 $=\int a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C = \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+C$

$=\frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2})+C$

例8. 求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$



令 $x=a\sec t$，$0<t<\frac{\pi}{2}$

则 原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t}}\,a\sec t\cdot\tan t\,dt$

$=\int\sec t\cdot dt$

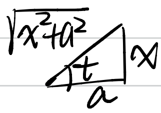
$=\ln|\sec t+\tan t|+C$

$=\ln|\frac{x}{a}+\sqrt{x^2-a^2}/a|+C$

例9. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$

令 $x=a\tan t$，$t\in(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$

代入得 $\int\frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\,dt = \frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt = \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$



$=\frac{1}{2a^3}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$

$=\frac{1}{2a^3}(\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{x^2+a^2})+C$

分部积分法：$\int uv'\,dx = uv-\int vu'\,dx$ 或 $\int u\,dv = uv-\int v\,du$.

例. $\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x-\int\sin x\,dx = x\sin x+\cos x+C$

例 $\int\arctan x\,dx = x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

例. $\int x^3\ln x\,dx = \int\frac{1}{4}\ln x\,dx^4 = \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$

§3、有理函数和可化为有理函数的积分

一、有理函数：$R(x)$：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

若 $n>m$（假分式）$\Rightarrow$ 凑（多项式除法）

若 $n\le m$（真分式）若 $n=m$ $\Rightarrow$ 凑.

分母为2次，分子为0次.

例. $\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=-\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=-\ln|x-1|+\ln|x-2|+C$

例：$\int\frac{1}{x^2-2x+4}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+3}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}d\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$

例. $\int\frac{1}{(x+1)^2-16}dx=\int\frac{1}{(x+1+4)(x+1-4)}dx=\cdots\cdots$

如果分母为2次，分子为1次

例. $\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{x+2-2}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+2}d(x^2+2x+2)-\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|-\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx+C$ 化为上一情形.

其它类型.

例. $\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$

设 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+A+C}{(1+2x)(1+x^2)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+2B=0\\B+2C=0\\A+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{4}{5}\\B=-\frac{2}{5}\\C=1/5\end{cases}$

可以考虑取特殊值(x)，快速找到A,B,C,⋯