推论. $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \in D$, 使 $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ 不收敛于 0

例1. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in D = (0, +\infty)$. $n = 1, 2, 3, \cdots$. 判别 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛性

解：先求 $f_n(x)$ 收敛于哪个函数. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{e^{nx^2}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0$$

从而 $f(x) = 0$

接下来判断是否一致收敛.

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in D} |f_n(x)| = \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-1/2} = +\infty$. 从而 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$.

第十四章 幂级数

§1. 幂级数

本章讨论形如$\{a_n(x-x_0)^n\}$所产生的函数项级数.

一般形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + \cdots$

下面着重讨论当$x_0=0$时的幂级数. 并研究2个问题 $\begin{cases}\text{在何处收敛?}\\ \text{和函数是什么?}\end{cases}$

一、幂级数的收敛区间

定理、Abel定理、若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=\bar{x}\neq 0$处收敛, 则对$\forall x, |x|<|\bar{x}|$都收敛且绝对收敛; 若在$\bar{x}$处发散, 则$\forall x, |x|>|\bar{x}|$都发散.

证: 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{x}^n$收敛. 故$\exists M>0$使$|a_n\bar{x}^n|<M$

设有$|x|<|\bar{x}|$. 设$r=\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$, 则$|a_nx^n| = \left|a_n\bar{x}^n\cdot\frac{x^n}{\bar{x}^n}\right| = |a_n\bar{x}^n|\cdot r^n < Mr^n$

由于级数$\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$为等比级数 (公比<1) 故收敛.

由比较判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$收敛.

称R为幂级数的收敛半径.

1° 若$R=0$, 则只在$x=0$处收敛

2° 若$R=+\infty$, 则在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

3° 若$0<R<+\infty$, 则在$(-R,+R)$内收敛.

对$\forall |x|>R$发散.

当$x=\pm R$时敛态未知. ⇐单独判断.

所有收敛点的集合称为收敛域 (可能为$(-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R)$, $[-R,R]$)

收敛区间只可能是$(-R,R)$

定理、对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, 若$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$ ⇒ a_n有n次方则用这种方法.

1° 若$0<\rho<+\infty$, 则收敛半径$R=1/\rho$

2° 若$\rho=0$. 则$R=+\infty$

3° 若$\rho=+\infty$, 则$R=0$

⇒ $R=\frac{1}{\rho}$

定理. 若$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$. $R=1/\rho$ (更加常用)

例. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$. 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1=\rho \Rightarrow R=1/\rho=1$.

故收敛半径为1

当$x=1$时, 级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

当$x=-1$时, 级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n$, 由莱布尼茨知收敛.

从而收敛域为$[-1,1]$

例. 级数 $x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1=\rho\Rightarrow R=1/\rho=1$.

收敛半径为 1. 、收敛区间为 $(-1,1)$

当 $x=1$ 时. 级数为 $p=1$ 的 p 级数. 发散.

当 $x=-1$ 时. 由 Leibniz 知收敛.

从而收敛域为 $[-1,1)$

*定理. (Cauchy-Hadamard 定理). 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

设 $\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

【补、数列的上下极限】

动机：数列的极限存在过于苛刻，因此引入一个比"极限存在"更弱的概念

定义、在有界数列$\{x_n\}$中，若存在一个它的子列$\{x_{n_k}\}$使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$$

则称ξ为$\{x_n\}$的一个极限点。

显然"ξ为$\{x_n\}$的极限点"$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，存在$\{x_n\}$中无穷多项属于$U(\xi,\varepsilon)$

证明："$\Rightarrow$"显然成立

"$\Leftarrow$"：取$\varepsilon_1=1$，由于在$\{x_n\}$中有无穷多项属于$U(\xi,1)$，取其中的x_{n_1}，有$|x_{n_1}-\xi|<1$

取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$，取$|x_{n_2}-\xi|<\frac{1}{2}$

……

取$\varepsilon_k=\frac{1}{k}$，取$|x_{n_k}-\xi|<\frac{1}{k}$

得数列$\{x_{n_k}\}$，且$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$

记$E=\{\xi\mid\xi$是$\{x_n\}$的极限点$\}$，则E有界非空，故E的上确界$H=\sup E$和下确界$h=\inf E$存在

定理、E的上下确界均属于E，即$H=\max E$，$h=\min E$

证明：由于$H=\sup E$，故存在$\xi_k\ (k=1,2,\cdots)$使$\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=H$

(取$\varepsilon_k=1/k$)

取$\varepsilon_1=1$，因为ξ_1是$\{x_k\}$的极限点，故$\exists$无穷多$\{x_n\}$中之项$\in U(\xi_1,\varepsilon_1)$

取出并记为x_{n_1}

取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ …… 记为x_{n_2}

……

于是得到$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$，满足$|x_{n_k}-\xi_k|<\varepsilon_k$

从而$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=H$

故H是$\{x_n\}$的极限点，即$H\in E$

同理可证$h\in E$

例、试证：若有界数列$\{x_n\}$不收敛，则必存在2个子列$\{x^{(1)}_{n_k}\}$与$\{x^{(2)}_{n_k}\}$收敛于不同极限

证：由于Bolzano-Weierstrass，有界数列$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x^{(1)}_{n_k}\}$

记$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(1)}_{n_k}=a$

由于$\{x_n\}$不收敛，取定$\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists n>N$使$|x_n-a|\geq\varepsilon_0$

于是，取定N_1，$\exists n_1>N_1$使$|x_{n_1}-a|\geq\varepsilon$

取定$N_2=n_1$，有n_2使$|x_{n_2}-a|\geq\varepsilon$

……(重复)

从而得到$\{y_{n_k}\}$，由于其有界，则必有收敛子列$\{x^{(2)}_{n_k}\}$且必不收敛于a

定义、E的最大值 $H=\max E$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的上极限，记为 $H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.
E的最小值 $h=\min E$ 称为下极限. 记为 $h=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

定理、数列 $\{x_n\}$ 有界. 则. $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

定义、在数列 $\{x_n\}$ 中，若存在一个它的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi \quad (-\infty\le\xi\le+\infty)$$

则称 ξ 为 $\{x_n\}$ 的一个极限点.

√上、下极限的运算. 1° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

2° 若 $x_n\ge0$, $y_n\ge0$. 则.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

例. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$ 的收敛域和收敛半径 ← 注意缺项幂级数
何以直接用前面的定理.

解：因为只有偶数项. 则设 $z=x^2$
则 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-3^{2n}}\cdot(z^n)$

则 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n-3^{2n}}{(n+1)-3^{2n+2}}\right|=\frac{1}{9}$ 从而 $R=\frac{1}{\rho}=9$

当 $z=9$ 时、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}$ 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}=-1\ne0$ 故不收敛

即 $x=\pm3$ 时 原级数发散.
故收敛域为 $x\in(-3,3)$

法2. 也可直接用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}/n+1-3^{2n+2}}{x^{2n}/n-3^{2n}}\right|$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left|x^2\cdot\frac{1}{9}\right|$

令 $x^2\cdot\frac{1}{9}<1 \Rightarrow x\in(-3,3)$

二、幂函数的性质.

定理、幂级数的和函数是$(-R,R)$上的连续函数

若幂级数在 $x=-R$上收敛.则和函数在$x=-R$上右连续.

——————— $x=R$ 上收敛 ———— $x=R$ ‥左‥‥

幂级数 $= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$ (A)

逐项求导 $= a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$ (B)

逐项积分 $= a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}+\cdots$ (C)

定理：(A)、(B)、(C) 收敛区间相同，但端点处的敛散性不一定相同.

定理：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间$(-R,R)$上和函数为$f(x)$，则.

1° 若$f(x)$在x可导，且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

2° 若$f(x)$在$[0,x]$上可积，且 $\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$

三、幂级数的运算

若幂级数的和函数是奇(偶)函数，则其级数中只有奇(偶)次项.

定理：设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 收敛半径分别为R_a,R_b.

则 1° $\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n \quad |x|<R_a$

2° $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$. $|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$

3° $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. $|x|<R$.

其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$

例. 几何级数在收敛域$(-1,1)$上有 $f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

在$(-1,1)$上逐项求导

$$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

幂级数求和问题只要朝这里凑即可.

☆ 1° $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots x^n+\cdots$

$\downarrow -x$

2° $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$

$\downarrow x^2$

3° $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots$

$\downarrow \int_0^x$

4° $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的和函数.

解：首先求出收敛域. $\ell=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1 \Rightarrow R=\frac{1}{\ell}=1$

从而收敛区间为 $(-1,1)$

当 $x=\pm1$ 时. 原式 u 级数发散

从而收敛域为 $(-1,1)$

其次. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n \quad ,x\in(-1,1)$

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}=x\cdot g(x). \quad \left(g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}\right)$$

则 $\int_0^x g(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n dx$

$$=x\cdot h(x).\left(\text{其中 } h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}dx\right)$$

则 $\int_0^x h(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$

$f=x\cdot g$

$$=x-x^2+x^3-\cdots+(-1)^{n-1}x^n$$

$\int g=x\cdot h.$

$$=-[1-x+x^2\cdots]+1$$

$\int h=\square$

$$=-\frac{1}{1+x}+1=\frac{x}{1+x}\quad ,x\in(-1,1)$$

从而 $h(x)=\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\quad ,x\in(-1,1)$

$$g(x)=\frac{d}{dx}[x\cdot h(x)]=\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{x}{(1+x)^2}\right]=\frac{(1+x)^2-2(x+1)}{(1+x)^4}$$

$$=\frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$f(x)=x\cdot g(x)=(x-x^2)/(1+x)^3,\quad x\in(-1,1)$

§2. 函数的幂级数展开.

若 f 在 x_0 处有任意阶导数. 则称级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 f 在 x_0 处的 Taylor 级数.

问题、何时 f 的 Taylor 级数收敛于 f?

定理：设 f 在 x_0 具有任意阶导数，那么 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 上等于其 Taylor 级数的和函数 $\Leftrightarrow \forall x,|x-x_0|<r$. 有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$

★ 1° $e^{x}=1+\frac{x^{1}}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$

2° $\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$

3° $\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ $x\in(-\infty,+\infty)$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{4}x^{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}x^{n}+\cdots$ $x\in(-1,1]$

5. $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots$. $x\in(-1,1)$

第十五章 傅立叶级数

§1. Fourier Series

一、三角级数·正交函数系

简谐振动 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

多个简谐进行叠加：$y=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega x+\varphi_n)$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin(n\omega x)\cos\varphi_n+A_n\cos(n\omega x)\sin\varphi_n\right)$$

记 $A_0=\frac{a_0}{2}$，$A_n\sin\varphi_n=a_n$，$A_n\cos\varphi_n=b_n$.

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

定理：三角函数系 $(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上正交

即任何两个不同函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为 0

二、函数展成 Fourier 级数

定理：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (I)$$

其中 $\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$ a_n 中 n 从 0 开始

证明：$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\cdot\pi$$

把 (I) 同乘 $\cos kx$.

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)$$

同时积分 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\cos kx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\cos kx\,dx\right)$

(由正交性) $=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx$

$=a_k\cdot\pi$

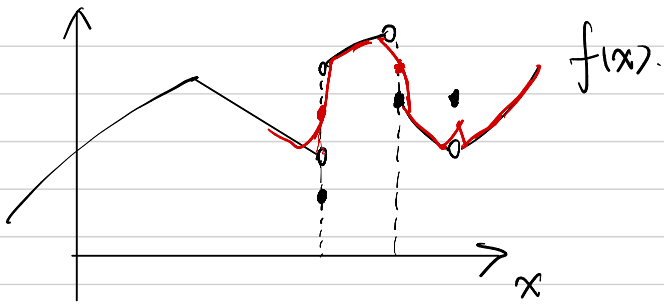
从而 $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$.

同理可得 $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$.

定理.(Fourier Series 收敛定理) 若以2π为周期的函数f在$[-\pi,\pi]$上按段光滑,则在每一点上,$f(x)$的Fourier Series收敛,且收敛于f在x的左右极限的算术平均值.

即
$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中"按段光滑"指的是$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上至多有有限个间断点.



直观地去理解.
如果让你用一条连续曲线
连接$f(x)$上的点,你会怎样做.

推论.若f是以2π为周期的连续函数,且在$[-\pi,\pi]$上按段光滑.
则f的Fourier Series收敛于f.

第十六章 多元函数的极限与连续

§2 二元函数的极限

定义：设 f 是定义在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的一个二元函数，设 P_0 是 D 中的一个聚点，A 为某常数。

←去心，不排边

$\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta > 0$，s.t 当 $P \in U^\circ(P_0, \delta) \cap D$ 时，

都有 $|f(P) - A| < \varepsilon$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$

（动点向定点逼近）

即 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A$

注意："$(x,y) \to (x_0,y_0)$" 与 "$x \to x_0, y \to y_0$" 不同，前者包括各个方向，后者只表示沿坐标轴方向，且意义不明确。

例. 验证 $\lim\limits_{(x,y) \to (2,1)} (x^2 + xy + y^2) = 7$

证明：$|x^2 + xy - y^2 - 7| = |x^2 - 4 + xy - 2 + y^2 - 1|$

$= |(x+2)(x-2) + xy - 2y + 2y - 2 + (y+1)(y-1)|$

$= |(x-2)(x+2+y)| + |(y-1)(y+3)|$

在 $(2,1)$ 取 $\delta = 1$ 的一个方邻域 $\{(x,y) \mid |x-2| < \delta, |y-1| < \delta\}$

$|y+3| = |y-1+4| \leq |y-1| + 4 < 5$

$|x+2+y| = |x-2+y-1+5| \leq |x-2| + |y-1| + 5 < 7$

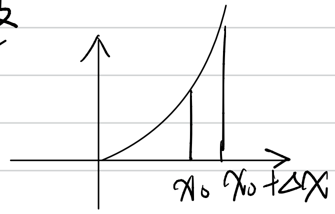
原式 $< 7|x-2| + 5|y-1| < 7(|x-2| + |y-1|) < 14\delta < \varepsilon$

故取 $\delta = \min\{1, \varepsilon/14\}$

第十七章 多元函数微分学

§3. 方向导数及梯度

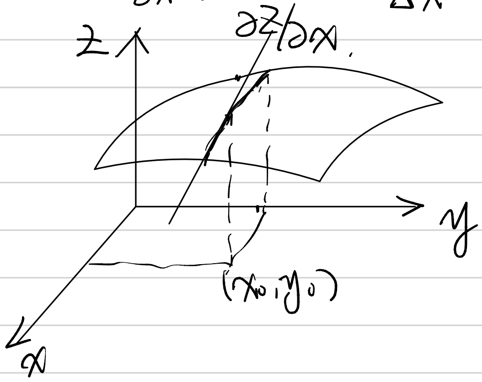
导数 $y=f(x)$. $y=x^2$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

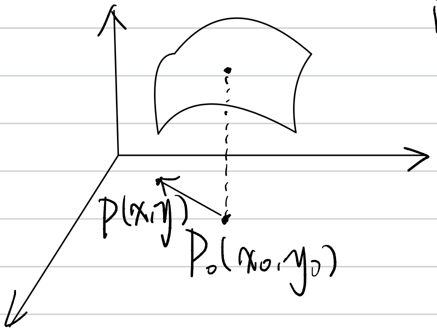
偏导数 $z=f(x,y)$

对x求偏导 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$



什么是方向导数?

设 $z=f(x,y)$



从(x_0,y_0)向任意方向变化方向

设$\rho=P$与P_0之间的距离.

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$$

记为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$, 其中$l$方向为$\overrightarrow{P_0P}$

沿x轴正方向: $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\partial f/\partial x\,|_{P_0}$

沿x轴负方向: $\partial f/\partial l\,|_{P_0}=-\partial f/\partial x\,|_{P_0}$

定理. 若f在P_0处可微,则f沿任何方向的偏导数存在,

且 $f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$是l的方向余弦.

其中, $f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta$ 可写成 $(f_x(P_0),f_y(P_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$ 数量积.

则把$(f_x(P_0),f_y(P_0))$称为f在P_0处的梯度,记为 grad f 或 ∇f

$|\nabla f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2}$ 为梯度的模.

于是方向导数又可写成 $f_l(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\overrightarrow{l_0}=|\nabla f_l(P_0)|\cdot\cos\theta$

其中 $\theta=\langle\nabla f(P_0),\overrightarrow{l_0}\rangle$

$\theta=\frac{1}{2}\pi$ 时，$\cos\theta=0$，则 $f_l(P_0)=0$
$\theta=\frac{3}{2}\pi$ 时，$\cos\theta=0$，则 $f_l(P_0)=0$
$\theta=\pi$ 时，$\cos\theta=-1$，则 $f_l(P_0)=-|\nabla f(P_0)|$

[方向导数的含义]
θ 是 $\nabla f(P_0)$ 方向与取的方向的夹角，由于 P_0 点是固定的，$\nabla f(P_0)$ 是固定的向量
$\nabla f(P_0)$ 是方向导数最大的方向.

§4. Taylor公式与极值问题
[高阶偏导数]
$f(x,y)=z$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

类似可以定义更高阶的偏导数. e.g. $z=f(x,y)$ 有 $2^3=8$ 个三阶偏导数

混合偏导数什么时候相等?
由于 $f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

$f_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

进而 $f_{xy}(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{1}{\Delta y}\left[\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta x}\right]$

$f_{yx}(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{1}{\Delta x}\left[\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)}{\Delta y}\right]$

若要 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$
则必有2个累次极限相等.

定理：若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在且连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$
证明：
令 $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$
$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$
则 $F(\Delta x,\Delta y)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$
由于 f 存在一阶偏导，则 φ 可导，用中值定理
$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$
$=[f_x(x+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x \qquad \theta_1\in(0,1)$
又因为 f_x 对 y 存在一阶偏导数.
从而
$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y. \quad \theta_1,\theta_2\in(0,1)$

从而 $F(\Delta x,\Delta y)=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$. $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$

同理可得

$$F(\Delta x,\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y.\quad \theta_3,\theta_4\in(0,1)$$

联立得 $f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)$

由于 f_{xy} 和 f_{yx} 连续.

从而当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

对于n阶偏导数，若各个偏导数都(存在且连续)，则这些(同阶的)偏导数相等.

今后除特别指出，应假设相应阶数的混合偏导数连续.

[中值定理]

定义：(凸区域)，$\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，$\forall\lambda\in[0,1]$.

有 $P(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D$

中值定理：二元函数 f，凸区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 可微，$\forall P(a,b),Q(a+h,b+k)\in D$

$\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$$

证明：设 $\Phi(t)=f(a+th,b+tk)$，$t\in[0,1]$

$\Phi'(t)=f_x(a+th,b+tk)\cdot h+f_y(a+th,b+tk)\cdot k$

由一元函数的中值定理.

$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)$，$\theta\in(0,1)$

从而 $\Phi(1)-\Phi(0)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k$

即为原式.

泰勒定理：若 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数.

则

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad\theta\in(0,1)\end{aligned}$$

或写成 $o(\rho^n)$

$\rho=\sqrt{h^2+k^2}$

其中 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}\cdot h^i\cdot k^{m-i}$

[极值问题]

设 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，对 $\forall P(x,y)\in U(P_0)$，有 $f(P)\le f(P_0)$

则 P_0 为极大值点.

注：极值点只限于内点.

定理：若 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有偏导数

$P_0(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极值点 $\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

定义：Hesse Matrix

记 $Hf(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$

称为 f 在 P_0 处的 Hesse 矩阵.

定理：若 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 有二阶连续偏导数，且 $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$

当 $Hf(P_0)$ 正定，P_0 为极小值点.

当 $Hf(P_0)$ 负定，P_0 为极大值点.

当 $Hf(P_0)$ 不定，P_0 不取极值.

证：用 Taylor 定理.

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\cdot Hf(P_0)\cdot(\Delta x,\Delta y)^T+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$$

其中 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$.

则有 $\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$

$=\frac{1}{2}[\Delta x^2 f_{xx}(P_0)+2\Delta x\Delta y f_{xy}(P_0)+\Delta y^2 f_{yy}(P_0)]$

$=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)Hf(P_0)\cdot(\Delta x,\Delta y)^T$

注意到此为止没有证完，

若 $Hf(P_0)$ 正定，则 $\forall(\Delta x,\Delta y)\ne(0,0)$ 有 $(\Delta x,\Delta y)Hf(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T>0$

记 $Q(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x,\Delta y)Hf(P_0)(\Delta x,\Delta y)^T>0$

因为 $o(\Delta x^2+\Delta y^2)$ 未必大于 0，如果证明右侧式子 $=q(\Delta x^2+\Delta y^2)+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$

其中 q 为常数，则令 $U(P_0)$ 足够小，即可"消除 $o(\Delta x^2+\Delta y^2)$ 的影响

设 $u=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，$v=\dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，则 $u^2+v^2=1$

$Q(\Delta x,\Delta y)/(\Delta x^2+\Delta y^2)=(u,v)Hf(P_0)\cdot(u,v)^T=\Phi(u,v)$

显然 $\Phi(u,v)$ 是连续的，在 $u^2+v^2=1$ 上必有最小值 记为 $2q$，$2q\ge0$

从而 $Q(\Delta x,\Delta y)\ge 2q(\Delta x^2+\Delta y^2)$

从而只要 $U(P_0)$ 充分小，就有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)\ge q(\Delta x^2+\Delta y^2)+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$$
$$=[q+o(1)](\Delta x^2+\Delta y^2)$$
$$\ge 0$$

第十八章 隐函数定理及其应用

§1、隐函数

设 $E \subset \mathbb{R}^2$，函数 $F: E \to \mathbb{R}$，对于方程 $F(x,y)=0$
若存在 $I, J \subset \mathbb{R}$，对 $\forall x \in I$，有唯一的 $y \in J$，使 $(x,y) \in E$，且 $F(x,y)=0$
则其确定了一个定义在 I 上，值域含于 J 的隐函数。

☆ 隐函数存在定理：
若 $F(x,y)$ 满足如下条件
1° F 在以 $P(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续
2° $F(x_0,y_0)=0$
3° F 在 D 内存在连续偏导数 $F_y(x,y)$
4° $F_y(x_0,y_0) \neq 0$
则：$F(x,y)$ 唯一地确定了 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 连续。

隐函数可微性定理：若满足上述 $1^\circ \sim 4^\circ$，且在 D 上还有连续偏导数 $F_x(x,y)$
则 $y=f(x)$ 有连续导函数
且 $f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

§2、隐函数组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} (1) \Rightarrow \begin{cases} u=f(x,y) \\ v=g(x,y) \end{cases}$$

对 x 求偏导：

$$\begin{cases} F_x + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

再对 y 求偏导：

$$\begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0 \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

若要从(2)中解出 u_x, v_x，则必须 $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$
其可记为函数 F, G 关于变量 u, v 的函数行列式（Jacobi 行列式）

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

隐函数组定理：若 1° $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在以 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V \subset \mathbb{R}^4$ 上连续
2° $F(x_0,y_0,u_0,v_0) = G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$
3° 在 V 上，F 与 G 有一阶连续偏导数
4° $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在 P_0 处不为 0
则 1° 确定了 $u=f(x,y)$，$v=g(x,y)$
2° f 与 g 连续

$$3^\circ\quad \partial u/\partial x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \partial v/\partial x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\partial u/\partial x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \partial v/\partial y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

反函数组与坐标变换.

已知 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, 求 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$

记 $F(x,y,u,v) = u-u(x,y)=0 \quad (1)$

$\quad G(x,y,u,v) = v-v(x,y)=0 \quad (2)$

(1),(2)对u求偏导:

$$0 = 1-u_x\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - u_y\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$0 = 0-v_x\cdot\partial x/\partial u - v_y\cdot\partial y/\partial u$$

$$\Leftrightarrow\quad u_x\frac{\partial x}{\partial u}+u_y\frac{\partial y}{\partial u}=1$$
$$v_x\frac{\partial x}{\partial u}+v_y\frac{\partial y}{\partial u}=0$$

Cramer法则: $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & u_y \\ 0 & v_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = v_y \Big/ \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

同理可求 $\partial x/\partial v$, $\partial y/\partial u$, $\partial y/\partial v$

同时. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \partial v/\partial y & -\partial u/\partial y \\ -\partial v/\partial x & \partial u/\partial x \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{J^2}\quad \left(J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)$$

$$= \frac{1}{J}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=1$$

例. $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 求反函数组.

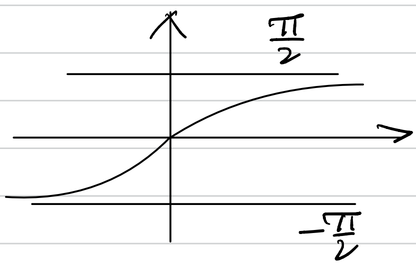
解: 先判断有无反函数. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0$$

故除原点外都有反函数组

在一切点上由其确定的反函数组是

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta=\begin{cases} \arctan y/x, & x>0 \\ \arctan(y/x)+\pi, & x<0 \end{cases}$$



例：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 求反函数组.(r,φ,θ)

解：先看反函数组是否存在.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\theta + r^2\sin^3\varphi\sin^2\theta + r^2\sin\varphi\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta + r^2\sin^3\varphi\cos^2\theta$$

$$= r^2\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi + r^2\sin^3\varphi$$

$$= r^2\cdot\sin\varphi \neq 0$$ 即除去z轴以一切点.

从而反函数组存在（在 $r^2\sin\varphi\neq 0$ 上的一切点）

$\int_c^d f(x,y)\,dy$. 以x为参量的二元函数对y的积分.

第十九章 含参量积分

§1. 含参量正常积分

定理、若 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则函数 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：取 $x\in[a,b]$，对充分小的 Δx，使 $x+\Delta x\in[a,b]$

则 $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$

$$=\int_c^d f(x+\Delta x,y)\,dy-\int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$=\int_c^d [f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]\,dy$$

由于 $f(x,y)$ 在R内连续，故一致连续.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 只要 $|x_1-x_2|<\delta$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$，

则 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

从而当 $|\Delta x|<\delta$ 时，有 $|f(x+\Delta x,y)-f(x,y)|<\varepsilon$

则 $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)<\int_c^d \varepsilon\,dy=\varepsilon(d-c)$

从而 $\varphi(x)$ 在R上连续.

若 $f(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则对 $\forall x_0\in[a,b]$，有

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy$$

矩形区域上的连续函数，其极限运算与积分运算可以交换顺序.

$\int_c^d f(x,y)\,dy$ 是 $\varphi(x)$. 若 $\varphi(x)$ 连续，则 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(\lim_{x\to x_0}x)$

本质上 $\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,dy \underset{\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy\text{连续}}{=} \int_c^d f(x_0,y)\,dy \underset{f(x,y)\text{连续}}{=} \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy$

定理（连续性）设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),\ x\in[a,b]\}$ 上连续，其中 $c(x)$ 与 $d(x)$ 为 $x\in[a,b]$ 上的连续函数.

则 $F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：设 RHS 用换元积分，$y=c(x)+t[d(x)-c(x)]$.（y是t的函数）

$dy=[d(x)-c(x)]\,dt$

从而 $F(x)=\int_0^1 f(x,\ c(x)+t(d(x)-c(x)))\,[d(x)-c(x)]\,dt$

由于被积函数 $f(x,\ c(x)+t(d(x)-c(x)))(d(x)-c(x))$ 在 $[a,b]\times[0,1]$ 上连续

则用了前的定理知.

$F(x)$ 连续.

定理（可微性）若 $f(x,y)$ 与其偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 都在 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续.

则 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ 在R上可微

且 $\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$.

证明：对于 $\forall x\in[a,b]$，$x+\Delta x\in[a,b]$.

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\int_c^d \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\,dy \qquad (1)$$

由于(Lagrange) $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=f_x(x+\theta\Delta x,y)\Delta x+0$

则 $\left|\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|$ $(\theta\in(0,1))$

$=\left|f_x(x+\theta\Delta x,y)-f_x(x,y)\right|<\varepsilon$. （由于偏导数 $f_x(x,y)$ 连续，故一致连续）

从而 $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)\,dy\right|$

$=\left|\int_c^d \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x,y)\,dy\right|$

$=\left|\int_c^d\left[\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right]dy\right|$

$<\int_c^d\left|\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}-f_x(x,y)\right|dy$

$\le\varepsilon(d-c)$

从而 $\frac{d}{dx}\varphi(x)=\int_c^d\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$

$\downarrow$

$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy$

定理（可微性） $F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy$.

若 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 在 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续，

$c(x)$ 和 $d(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上，其值含于 $[p,q]$ 的连续函数.

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微.

且 $F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f_x(x,y)\,dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))\,c'(x)$

回顾：若 $F(x)=\int_a^{g(x)}f(t)\,dt$，则 $F'(x)=f(g(x))g'(x)$

若 $F(x)=\int_{g(x)}^{a}f(t)\,dt$，则 $F'(x)=-f(g(x))g'(x)$

若 $F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)}f(t)\,dt$，则 $F'(x)=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$

证明：记 $F(x)=H(x,c,d)=\int_c^d f(x,y)\,dy$.

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial d}\cdot\frac{\partial d}{\partial x}$$

$$=\int_c^d f_x(x,y)\,dy+f(x,d(x))\cdot d'(x)-f(x,c(x))\cdot c'(x)$$

定理.(可积性) 若$f(x,y)$在矩形区域$R=[a,b]\times[c,d]$上连续,
则 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 和 $\psi(y)=\int_c^d f(x,y)dx$ 分别在$[a,b]$和$[c,d]$
上可积.
另外,在$f(x,y)$连续时,两个积分相同

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

§2. 含参量反常积分

一、一致收敛性及其判别法

设 $f(x,y)$ 定义在无界区域 $R=\{(x,y): x\in I, c\le y<+\infty\}$

若 $\forall x\in I$，反常积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

都收敛，则它的值是 x 在 I 上取值的函数，记 $\Phi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy,\ x\in I$.

定义、若含参反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 与 $\Phi(x)$ 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists N>c$，使当 $M>N$ 时，对 $\forall x\in I$，有 $\left|\int_c^M f(x,y)-\Phi(x)\right|<\varepsilon$

即 $\left|\int_M^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$，则称反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛于 $\Phi(x)$

或说含参积分在 I 上一致收敛.

定理（Cauchy 一致收敛准则）

$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 在 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>c$，当 $A_1, A_2>M$ 时，对一切 $x\in I$，都有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$

定理：$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 在 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty}\underbrace{\sup\limits_{x\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|}_{F(A)}=0$

判别准则

例. 对 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛，$\delta>0$

解：作 $u=xy$. $\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du \quad (A>0)$.

从而 $Ax>0$、

由于 $\int_{Ax}^{+\infty}\sin u\,du$ 有界，且 $f(u)=\frac{1}{u}$ 单调趋向于 0,

根据 Dirichlet 判别法知. $\int_{Ax}^{+\infty}\sin u/u\,du$. 收敛.

故 $\forall\varepsilon>0, \exists M$，当 $A'>M$ 时有

$\left|\int_{A'}^{+\infty}\sin u/u\,du\right|<\varepsilon$.

取 $A\delta>M$，则当 $A>M/\delta$ 时 对 $\forall x\ge\delta>0$.

有 $\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy\right|<\varepsilon$

从而 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy\right|=0$.

故. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.（$\delta>0$）

当$\delta=0$时，$F(A)=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy\right|$

$$=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right|$$

$$\geq\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}dy\right|=\frac{\pi}{2}\quad(\text{后面证})$$

从而$\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)\neq0$，故当$\delta=0$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

定理、含参反常积分$\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$在I上一致收敛

$\Leftrightarrow$对任一趋于$+\infty$的递增数列$\{A_n\}$（其中$A_1=c$），函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在I上一致收敛。

证明："$\Rightarrow$"：

由于$\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$在I上一致收敛。

故$\forall\varepsilon>0$，必$\exists M>c$，使当$A''>A'>M$时，对$\forall x\in I$，有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$，对$M$，必$\exists N\in\mathbb{Z}_+$，当$m>n>N$时，有$A_m>A_n>M$

从而$|u_n(x)+\cdots+u_m(x)|=\left|\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy+\cdots+\int_{A_m}^{A_{m+1}}f(x,y)dy\right|$

$$=\left|\int_{A_n}^{A_{m+1}}f(x,y)dy\right|<\varepsilon\quad(\text{Cauchy准则})$$

从而"$\Rightarrow$"成立。

"$\Leftarrow$"：（反证法）

若$\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$在I上不一致收敛，则存在某正数$\varepsilon_0>0$，使对$\forall M>c$，存在$A''>A'>M$和$x'\in I$，使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x',y)dy\right|\geq\varepsilon_0$$

现取$M_1=\max\{1,c\}$，$\exists A_2>A_1>M$，$x_1\in I$，使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x_1,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$$

……取$M_n=\max\{n,A_{2(n-1)}\}$，则$\exists A_{2n}>A_{2n-1}>M$，$x_n\in I$使得

$$\left|\int_{A_{2n-1}}^{A_{2n}}f(x_n,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$$

得$\{A_n\}$递增且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$

现看级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,y)dy$$

$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，只要$n>N$，则$\exists x_n\in I_n$使

$$u_{2n}(x_n)=\left|\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}}f(x_n,y)dy\right|\geq\varepsilon_0$$

与级数在I上一致收敛的假设矛盾，故含参反常积分一致收敛。

§3、欧拉积分

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$，$s>0$

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$，$p>0$，$q>0$

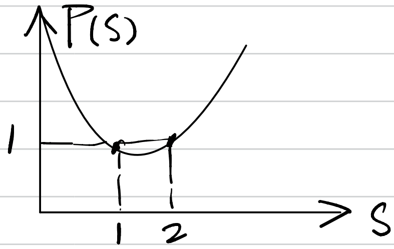
一、

$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$

$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^2\,dx$. $\Rightarrow$ $\Gamma'(s)>0$，且 $\Gamma''(s)>0$，则在 $s>0$ 区间上，

$\cdots$

$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n\,dx$



$\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$，$\Gamma(n+1)=n!$

$\lim\limits_{s\to0^+}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$

$\lim\limits_{s\to0^+}\Gamma(s)=\lim\limits_{s\to0^+}\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}=+\infty$

当 $s\in(-1,0)$ 时，$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)>0}{s<0}<0$.

当 $s\in(-2,-1)$ 时，$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)<0}{s<0}>0$

二、B函数　　　　$B(p,q)=\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^q\cdot dx$.

1° B在 $p>0$，$q>0$ 内连续

2° 对称性 $B(p,q)=B(q,p)$

3° 递推公式：

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$$

从而 $B(p,q)=\dfrac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)$

三、Γ与B关系.

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}B(m,n-1)=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)\cdots(m+1)}B(m,1)$$

$$=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

$$=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

[审敛主题]

一、一般项级数 $\sum a_n b_n$

1° Dirichlet 判别法：若 ① $\{a_n\}$ 单减且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② $\sum b_n$ 部分和数列有界

则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

2° Abel 判别法：若 ① $\{a_n\}$ 单调有界数列

② $\sum b_n$ 收敛

则 $\sum a_n b_n$ 收敛.

[核心].

Dirichlet：(单调+趋0)×部分和有界.

Abel：(单调+有界)×收敛.

二、一致收敛性

描述函数列的极限性质.

$\{f_n\}$ 在区间D上一致收敛于 f $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\sup_x |f_n(x)-f(x)|=0$

函数项级数的审敛 $\sum u_n(x)v_n(x)$，$x\in I$

1° M判别法：$\sum u_n(x)$ 定义于 $x\in D$ 上，$\sum M_n$ 为收敛的正项级数

若对 $\forall x\in D$，有 $|u_n(x)|\le M_n$，$n=1,2,\cdots$

则 $\sum u_n(x)$ 收敛.

2° Dirichlet 判别法：

若① 设 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $U_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_n(x)$

在 I 上一致有界.

② 对于 $\forall x\in I$，$\{v_n(x)\}$ 单调

③ 在 I 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0$ $(n\to+\infty)$

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

3° Abel 判别法：

若 ① $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

② 对于 $\forall x\in I$，$\{v_n(x)\}$ 单调.

③ $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界.

(即 $\exists M>0$，对 $\forall x\in I$，$\forall n\in\mathbb{Z}_+$，有 $|v_n(x)|\le M$).

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

三、含参反常积分.

想像成"无限项"(特别稠密的)函数项级数审敛

因为积分是无限项列项求和.

1° M判别法：

设有函数 $g(y)$ 使 $|f(x,y)|\le g(y)$，$(x,y)\in I\times[c,+\infty)$

若 $\int_c^{+\infty} g(y)dy$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 收敛.

2° Dirichlet 判别法.

若① 对 $\forall x\in I$，$g(x,y)$ 为 y 的单调函数

② 当 $y\to+\infty$ 时，对参数 x，$g(x,y)\rightrightarrows 0$

③ 对 $\forall N>c$，$\int_c^N f(x,y)dy$ 对参量 x 在 I 上一致有界.

即 $\exists M>0$，对 $\forall x$，$\forall N$ 有 $\left|\int_c^N f(x,y)dy\right|\le M$.

则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛.

3° Abel 判别法：

若① $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛.

② 对 $\forall x\in I$，$g(x,y)$ 为 y 的单调函数

③ 对参数x，$g(x,y)$在I上一致有界.
则$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dy$在$I$上一致收敛.

第二十三章 向量函数微分学

§1、n维欧式空间与向量函数

一、n维欧氏空间

n维向量空间：所有n个有序实数组的全体（称为向量）、$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

定义了向量内积的n维空间称为n维欧氏空间、记为$\mathbb{R}^n$

利用内积定义模：

$$\|x\|=(x^Tx)^{1/2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

性质：1° $\|x\|\geq 0$，$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

2° $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，$\alpha\in\mathbb{R}$

3° $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

4° $\|x^Ty\|\leq\|x\|\,\|y\|$　Cauchy-Schwatz不等式.

$\mathbb{R}^n$中任意两点距离记为 $\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$

二、向量函数

$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}\subset\mathbb{R}^{n\times m}$.

定义、若$X\subset\mathbb{R}^n$，$Y\subset\mathbb{R}^m$．f是$X\times Y$的一个子集，对于每一个$x\in X$，都有唯一的一个$y\in Y$，使$(x,y)\in f$，则称f为由X到Y的向量函数.

$$f: X\to Y$$
$$x\mapsto y$$

一般地，当$f_1,\cdots,f_m$为f的各分量函数时，可写为

$$f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1,\cdots,x_n)\end{bmatrix}\quad 或\ f=\begin{bmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{bmatrix}$$

从而

$$f+g=\begin{bmatrix}f_1+g_1\\ \vdots\\ f_m+g_m\end{bmatrix}\qquad \alpha f=\begin{bmatrix}\alpha f_1\\ \vdots\\ \alpha f_m\end{bmatrix}$$

同理：复合函数为 $h\circ f$：$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{X}}\xrightarrow{f}\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{Y}}\xrightarrow{g}\underset{\mathbb{R}^r}{\underset{\cap}{Z}}$

$$h\circ f=\begin{bmatrix}h_1\circ f\\ \vdots\\ h_r\circ f\end{bmatrix}$$

三、向量函数的极限与连续.