二、三角有理式的不定积分

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ 作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

代入即可.

三、无理根式的不定积分

1. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 作 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 化为有理函数的不定积分.

要求 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ （$a>0$ 时 $b^2-4ac\neq 0$；$a<0$ 时 $b^2-4ac>0$）

由于 $ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]^2$

记 $u=x+\frac{b}{2a}$，$k^2=\left|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$

再作三角代换即可.

第九章 定积分

§1. 定积分的概念

定义：设 $[a,b]$ 上依次有 $n-1$ 个点，依次为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

它们把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，构成 $[a,b]$ 的一个分割，记为

$$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$$

小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，并记

$$\|T\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$$

称为分割 T 的模.

定义：设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数. 对于 $[a,b]$ 上的任何一个分割 T，$T=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$，任取 $\xi_i\in\Delta_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称此式为函数 f 在 $[a,b]$ 上的一个积分和（黎曼和）

显然，积分和既与分割 T 有关，又与所选点集 $\{\xi_i\}$ 有关.

定义：设 f 是 $[a,b]$ 上的一个函数，J 是一个确定的实数. 若对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使 $[a,b]$ 的任何分割 T，任何 $\{\xi_i\}$，只要 $\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right|\le\varepsilon$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上是可积或黎曼可积，数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分，记为

$$J=\int_a^b f(x)dx$$

"可积性"是函数的又一个分析学性质，稍后会进行研究.

§4. 定积分的性质

1° 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 kf 也可积 （k 为常数）

2° 若 f,g 可积，则 $f\pm g$ 也可积

3° 若 f,g 可积，则 $f\cdot g$ 也可积.

4° f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall c\in(a,b)$，$f$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积.

此时有
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^a f(x)dx$$

5° 设 f 为 $[a,b]$ 上的可积函数，若 $f(x)\geq 0$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(推论) 积分不等式性：设 f,g 为 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $f(x)\leq g(x)$，则
$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$$

6° 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 也可积，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

二、积分中值定理

定理：(积分第一中值定理) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得
$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a)$$

推广.

若 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

§2. 牛顿-莱布尼茨公式 (把定积分和不定积分联系起来)

定理：若 f 在 $[a,b]$ 上连续且存在原函数 F，则 f 在 $[a,b]$ 上可积，且
$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

证明：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-(F(b)-F(a))\right|<\varepsilon$

(下面证存在 δ)

对于任一分割 $T=\{a=x_0,\cdots,x_n=b\}$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 用 Lagrange 中值定理.
$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=F'(\eta_i)\Rightarrow F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\eta_i)\Delta x_i$$

则 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i$

因为f在$[a,b]$上连续，从而f在$[a,b]$上一致连续。
从而对上述$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x', x''\in[a,b]$且$|x'-x''|<\delta$时，
有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/(b-a)$ （ε的任意性）
于是当$\Delta x_i\leq\|T\|<\delta$时，任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，必有$|\xi_i-\eta_i|<\delta$，
从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-(F(b)-F(a))\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f(\eta_i))\Delta x_i\right|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon$$

从而f在$[a,b]$上可积，且(1)成立。

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$ 有时候可以用定积分趋于求极限。

（记$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，$\frac{i}{n}=x$）$\Rightarrow$ 化成 $\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2$

§3. 可积条件 ☆

一、可积的必要条件

Th1. 若f在$[a,b]$上可积，则f必有界。

证明：（反证法）设f在$[a,b]$上无界。
$\forall M>0$，总$\exists x'\in[a,b]$使$|f(x')|>M$。
由于f在$[a,b]$上可积，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\|T\|<\delta$时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon，也即\ J-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<J+\varepsilon$$

直接取$M=\frac{J+\varepsilon}{\Delta x_i}$，由于$\xi_i$的任意性，必可取到$\xi_i$使$|f(\xi_i)|>(J+\varepsilon)/\Delta x_i$

注意：有界不是可积的充分条件，例如狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

因为任意分割T，$\xi_i\in\mathbb{Q}$，和$\xi_i\notin\mathbb{Q}$极限不相等。

二、可积的充要条件

设$T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$为对$[a,b]$的任一分割，由于$f$在$[a,b]$上有界，
则f在Δx_i中有上/下确界。
记$M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$，$i=1,2,\cdots,n$。
记达布上和$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$和达布下和$s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$

显然 $\forall \xi_i \in \Delta_i, i=1,2,\cdots,n$，必有 $s(T) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S(T)$

定理（可积准则）、函数 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，总∃分割 T，使 $S(T)-s(T)<\varepsilon$

设 $\omega_i = M_i - m_i$ 记为 f 在 Δ_i 上的振幅.
则可积准则也可写为：

定理（可积准则）′、函数 f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，∃$T$，s.t. $\sum_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

三、可积函数类.
定理：若 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
证明：因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.
则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $x', x'' \in [a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，
有 $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$
对 $[a,b]$ 所分割满足 $\|T\|<\delta$，在 $\forall \Delta_i$ 有 $\omega_i = M_i - m_i = |f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
从而
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理：若 f 是区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
证明：不失一般性，这里只证明 f 在 $[a,b]$ 上只有一个间断点的情形.
并假设间断点为 b.
$\forall \varepsilon>0$，取 δ' 满足 $0<\delta'<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$，且 $\delta'<(b-a)$. 其中 $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$，$m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$
记 f 在区间 $\Delta'=[b-\delta', b]$ 上的振幅为 ω'
则
$$\omega'\delta' < (M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$
由于 f 在 $[a,b-\delta']$ 上连续，则 f 在 $[a,b-\delta']$ 上可积
必存在某个对 $[a,b-\delta']$ 的分割 T，使 $\sum_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon/2$

从而 $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$，即 f 在 $[a,b]$ 上可积.

定理、若 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.
证明、设 f 为增函数，且 $f(a)<f(b)$
对 $[a,b]$ 的任一分割 T，必可使 f 在每个 Δ_i 上的振幅为
$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$
于是有 $\sum_{T} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{T} \omega_i \|T\| \leq \|T\|\cdot(f(b)-f(a))$

由此，只要取 $\|T\| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，此时有 $\sum_{T} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$
从而 f 在 $[a,b]$ 上可积.

注意：单调函数即使有无限多个间断点，仍不失其可积性.

[可积性总结]

① f在$[a,b]$上连续

②f在$[a,b]$上是有限间断点的有界函数

③ f在$[a,b]$上单调，(即使有无限多个间断点)

$\Rightarrow$ f在$[a,b]$上可积 $\longrightarrow$ f在$[a,b]$上有界

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists$分割T，使$S(T)-s(T)<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists T$，使 $\sum_{T} \omega_i \Delta x_i<\varepsilon$

§5. 微积分学基本定理、定积分计算

一、变限积分

变上限积分 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ，$x\in[a,b]$

上限x　积分变量t

有时写成 $\int_a^x f(x)dx$ 自己要知道二个x是不同的.

变下限积分 $\Psi(x)=\int_x^b f(t)\,dt$

定理：若f在$[a,b]$上可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ 在$[a,b]$上连续.

证明：$\forall x\in[a,b]$，只要 $x+\Delta x\in[a,b]$，

$$\Delta\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx$$
$$=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

因为f在$[a,b]$上可积，则f在$[a,b]$上有界.

设$|f(x)|\le M$，$x\in[a,b]$

当$\Delta x>0$时有

$$|\Delta\Phi(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx\right|\le\int_x^{x+\Delta x}|f(x)|dx\le M\Delta x$$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)=0$

当$\Delta x<0$时，同理也可证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)=0$

从而$\Phi(x)$在点x连续.

定理（微积分学基本定理）若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上处处可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$ （连续函数必有原函数）

（用上述定理推得牛顿-莱布尼茨公式）

例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{1}{x^2}\ln\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\right\}=\lim_{x\to+\infty}\exp\frac{\frac{1}{\int_0^x e^{t^2}dt}\cdot e^{x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{2\int_0^x e^{t^2}dt+2x\cdot e^{x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x+e^{x^2}}{e^{x^2}+e^{x^2}\cdot 2x\cdot x+e^{x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{2x^2+1}{2x^2+2}\right\}=e$$

定理，设 f 在 $[a,b]$ 上可积

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上减，且 $g(x)\ge 0$，则 $\exists\ \xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上增，且 $g(x)\ge 0$，则 $\exists\ \eta\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx.$$

二、定积分的换元积分法

定理、若 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续可微，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$

$a\le\varphi(t)\le b$，$t\in[\alpha,\beta]$

则 $$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

三、Taylor 公式的积分型余项

若在 $[a,b]$ 上 $u(x)$，$v(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数，则

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx=\int_a^b u\cdot dv^{(n)}=uv^{(n)}\Big|_a^b-\int_a^b u'v^{(n)}dx$$

$$=uv^{(n)}\Big|_a^b-\int_a^b u'dv^{(n-1)}$$

$$=(uv^{(n)}-u'v^{(n-1)})\Big|_a^b+\int_a^b v^{(n-1)}u''dx$$

$$=\left[uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\cdots+(-1)^n u^{(n)}v\right]_a^b+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}vdx.$$

是推广的分部积分公式.

设f在x_0某邻域$U(x_0)$上有$n+1$阶连续导数，令$x\in U(x_0)$，$u(t)=(x-t)^n$

$v(t)=f(t)$ （是t的函数），$t\in[x_0,x]$ （也可令$t\in[x,x_0]$）

得：$\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

$$=\left[(x-t)^n f^{(n)}(t)+n(x-t)^{n-1}f^{(n-1)}(t)+\cdots+n!f(t)\right]_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}0\cdot f(t)\,dt$$

$$=n!f(x)-n!\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$$

$=n!\,R_n(x)$ 　其中$R_n(x)$即为Taylor公式的n阶余项

则 $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

由第二积分中值定理

$$=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt$$

$$=\frac{-1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,d(x-t)=\frac{-1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

*§6. 可积性理论补叙

基于上和、下和的概念，有

$$m(b-a)\le s(T)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)\le M(b-a)$$

由此得：

性质1：对同一个分割T，相对任何点集$\{\xi_i\}$而言，上和是所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界，

即 $S(T)=\sup\limits_{\{\xi_i\}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，$s(T)=\inf\limits_{\{\xi_i\}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

性质2：设T'为分割T添加了p个新点后的新的分割，则有

$$S(T)\ge S(T')\ge S(T)-(M-m)p\|T\|$$

$$s(T)\le s(T')\le s(T)+(M-m)p\|T\|$$

增加分点后，上和不增，下和不减。

性质3：若T'，T''为两个分割，$T=T'+T''$表示把T'、T''所有分点合并后的分割。（重复分点只取一次）

则有 $S(T)\le S(T')$，$S(T)\le S(T'')$

$s(T)\ge s(T')$，$s(T)\ge s(T'')$

性质4：对任意两个分割T'和T''，总有 $s(T')\le S(T'')$

证明：令$T=T'+T''$

则立刻有 $s(T')\le s(T)\le S(T)\le S(T'')$

由性质4立刻得，对$\forall T$，所有上和$S(T)$存在下界，$s(T)$存在上界.
记
$$s=\sup_T s(T)\quad,\quad S=\inf_T S(T)$$ 通常称S为上积分，s为下积分.

性质5. $m(b-a)\le s\le S\le M(b-a)$

性质6（达布定理）. $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)=S$，$\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)=s$

证明：$\forall\varepsilon>0$，存在某分割T'，使$S(T')<S+\frac{\varepsilon}{2}$ ①
设T'由p个分点组成，则另一个（任意）分割T，$T'+T$至多比T多p个分点.
则 $S(T)-(M-m)p\|T\|\le S(T+T')\le S(T')$
从而 $S(T)\le S(T')+(M-m)p\|T\|$
只要令 $\|T\|<\varepsilon/2(M-m)p$，必有$S(T)\le S(T')+\frac{\varepsilon}{2}$ ②
①+②得 $S(T)-S<\varepsilon$
这就证得 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)=S$

二、可积的充要条件：
定理（可积第一充要条件）：
f在$[a,b]$上可积 $\Leftrightarrow$ f在$[a,b]$的上积分与下积分相等，即$S=s$
证明：设f在$[a,b]$上可积，$J=\int_a^b f(x)dx$
"$\Rightarrow$" 则$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要$\|T\|<\delta$，则 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$
另一方面，由于$S(T)$与$s(T)$分别为积分和关于点集$\{\xi_i\}$的上下确界，故当$\|T\|<\delta$时有
$$|S(T)-J|\le\varepsilon,\quad |s(T)-J|\le\varepsilon$$
这说明当$\|T\|\to 0$时，$S(T)$与$s(T)$极限都为J，由达布定理知$S=s$
"$\Leftarrow$". 设$S=s=J$，由达布定理得 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to 0}s(T)=J$
则$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\|T\|<\delta$时有
$$J-\varepsilon\le s(T)\le\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)\le J+\varepsilon$$
从而f在$[a,b]$上可积，
且 $\int_a^b f(x)dx=J$

定理（可积第二充要条件）：
f在$[a,b]$上可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，总$\exists T$，使 $S(T)-s(T)<\varepsilon$
即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$，其中$\omega_i=M_i-m_i$

定理（可积第三充要条件）：
f在$[a,b]$上可积 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon,\eta>0$，$\exists T$ s.t. 属于T的所有小区间中，对应于振幅$\omega_{k'}\ge\varepsilon$的小区间$\Delta_{k'}$的总长
$$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\eta.$$

第十章 定积分的应用

§1、平面图形的面积

略

§2、由平行截面面积求体积

略

§3、平面曲线的弧长与曲率

定义、若存在有限极限 $\lim_{\|T\|\to 0} s_T = s$

即 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当对 C 的分割 T，只要 $\|T\|<\delta$，有 $|s_T - s|<\varepsilon$

则称 C 是可求长的，并把 s 定义为 C 的弧长

定义、设平面曲线 C 由以下参数方程表示：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 不同时为 0，则称 C 为一光滑曲线。

且弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

特别地，若在直角系下，$y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 的弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

若在极坐标系下，$r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$

化成参数方程：$x=x(\theta)=r(\theta)\cdot\cos\theta$，$y=y(\theta)=r(\theta)\cdot\sin\theta$

$$\Rightarrow\quad s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$$

例. 求 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$t\in[0,2\pi]$ 的周长

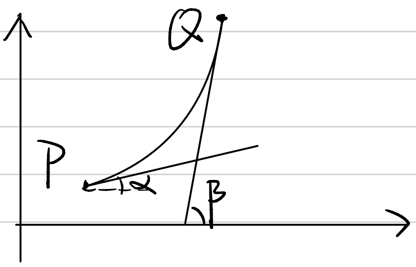
则 $x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t$ $\quad y'(t)=3a\sin^2 t\cos t$

周长为

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt=4\int_0^{\pi/2}3a\sin t\cancel{\cos t\,dt}\,d\sin t$$

$$=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

二、曲率（曲线各点处弯曲的程度）



平均曲率 $\overline{K}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

在 P 点的曲率 $K_P=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$

第十一章 反常积分

两类反常积分：① 积分区间无界
② $f(x)$ 在某处无界.

定义：设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且在 $\forall [a,u]$ 上可积.
如果极限存在.
$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = J$$
则称 J 为 f 在 $[a,+\infty)$ 上的无穷限反常积分.（无穷积分）
记为 $J=\int_a^{+\infty}f(x)dx$

定义. 设 f 定义于 $(a,b]$，在点 a 的任一右邻域无界，但在 $\forall [u,b]\subset(a,b]$ 上可积，
若极限 $J=\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)dx$ 存在，
则称 J 为无界函数的反常积分，记为 $\int_a^b f(x)dx=J$
a 称为 f 的瑕点.

§2. 无穷积分的性质和审敛

定理1：无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists G\geq a$，只要 $u_1,u_2>G$，便有
$$\left|\int_a^{u_2}f(x)dx-\int_a^{u_1}f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

性质1：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛，$k_1,k_2\in\mathbb{R}$，
则
$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^{+\infty}f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx$$

性质2：若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，$a<b$
则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty}f(x)dx$ 敛散性相同.

☆ 性质3. 若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，
则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，并且 $\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛.
若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，但 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛

二、非负函数无穷积分的审敛

定理2、设 f,g 是定义于 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，f,g 在 $\forall[a,u]$ 上可积，且 $f(x)\leq g(x),x\in[a,+\infty)$
则
$$0\leq\underset{①}{\int_a^{+\infty}f(x)dx}\leq\underset{②}{\int_a^{+\infty}g(x)dx}.$$
非负函数比较审敛

若①发散，则②发散
若②收敛，则①收敛.

例. 审敛 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$

由于 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|<\left|\frac{1}{1+x^2}\right|$，又 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ 收敛.

故原式绝对收敛.

非负函数

推论1、若 f,g 在 $\forall[a,u]$ 上可积，当 $x\in[a,+\infty)$ 时 $f(x)\geq 0, g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$.

1° 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同敛散.

2° 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛可知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛.

分子小

3° 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散可知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散.

分子大

推论2、设 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上，且 f 在 $\forall[a,u]$ 上可积. 则有： 非负函数

1° 当 $0\leq f(x)\leq\frac{1}{x^p}$，$x\in[a,+\infty)$，且 $p>1$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

2° 当 $f(x)\geq\frac{1}{x^p}$，$x\in[a,+\infty)$，且 $p\leq 1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

推论3、设 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上，且 f 在 $\forall[a,u]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\lambda$

1° 当 $p>1$，$0\leq\lambda<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

2° 当 $p\leq 1$，$0<\lambda\leq+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散. 非负函数

例. (1) 审敛 $\int_1^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx$

解：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^\alpha\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+2}}{e^x}=0$

从而 $\int_1^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛

(2) 审敛 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$

解：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+1}}=1\in[0,+\infty)$

$p=\frac{1}{2}\leq 1$，从而 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 发散.

三、一般函数无穷积分的审敛.

定理3.(狄利克雷判别法)：若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋向于 0，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理4.(Abel判别法)：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

§3、瑕积分的性质与审敛

定理：瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ （瑕点为a）收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，只要 $u_1, u_2 \in (a, a+\delta)$，总有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

性质1、设 f, g 瑕点同为 $x=a$，$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，则当瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b g(x)dx$ 均存在时

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1\int_a^b f(x)dx + k_2\int_a^b g(x)dx.$$

性质2、若 f 的瑕点为 a，则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^c f(x)dx$ 同敛态.

性质3、若 f 的瑕点为 a.

若 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 也收敛 （绝对收敛）

若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散 （条件收敛）

定理（比较原则）f, g 瑕点为 $x=a$，$\forall [u,b] \subset (a,b]$ 可积.

且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$，$x \in (a,b]$.

若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛

若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b g(x)dx$ 也发散

非负函数

推论1、又若 $f(x) \geq 0$，$g(x) > 0$，且 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$

1° 当 $0 < C < +\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态.

2° 当 $C=0$ 时，若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛

3° 当 $C=+\infty$ 时，若 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散

推论2、设 a 为 f 的瑕点.

1° $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{(x-a)^p}$，$0<p<1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛

2° $f(x) \geq \dfrac{1}{(x-a)^p}$，$p \geq 1$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散

推论3、f 在 $[a,b]$ 上非负，如果 $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = \lambda$

1° 当 $0<p<1$，$0 \leq \lambda < +\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛

2° 当 $p \geq 1$，$0 < \lambda \leq +\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散

"$p=1$"和"发散"在一起.

对于一般瑕积分的审敛：

定理（狄利克雷判别法）：$F(u)=\int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上有界，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$，则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理（Abel 判别法）：

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且有界，则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

第十二章 数项级数

级数 = 无穷项的和.

§1. 级数的收敛性

定义：给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项求和的表达式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为常数项无穷级数（或称为数项级数），其中 u_n 称为通项

可以记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，或简单记为 $\sum u_n$.

数项级数的前 n 项和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$，称为第 n 个部分和

定义：若部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S，即 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$；否则称其发散.

级数 = 部分和数列极限.

例. 几何级数 $a+aq+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0)$

$$S_n=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

1° 当 $|q|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$ 收敛.

2° 当 $|q|>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ 发散.

3° 当 $q=1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\infty$ 发散.

4° 当 $q=-1$ 时，$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=-a$，$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=a$，发散.

从而，几何级数收敛 $\Leftrightarrow |q|<1$，q 为公比，且级数为 $\frac{a}{1-q}$

任给一个数列 $\{a_n\}$，如果把它看成某一级数的部分和数列，则这个级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\underbrace{a_1}_{u_1}+\underbrace{(a_2-a_1)}_{u_2}+\underbrace{(a_3-a_2)}_{u_3}+\cdots+\underbrace{(a_n-a_{n-1})}_{u_n}+\cdots$$

定理（柯西收敛准则）：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall m, p\in\mathbb{Z}$ 且 $m>N$，有

$$|u_m+u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛}$$

由得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0$，对 $\forall N\in\mathbb{Z}_+$，总存在 $m_0(>N)$ 和 p_0，有

$$|u_{m_0+1}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geq\varepsilon$$

推论：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=0$（必要条件）

例. 证明：调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散

证明：令 $p=m$，有 $|u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}|=\left|\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+p}\right|$

$$>\left|\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|=\frac{1}{2}$$

因此取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N\in\mathbb{Z}_+$，只要 $m=n$，必有 $|u_m+\cdots+u_{m+p}|\geq\varepsilon$

从而调和级数发散.

例. 审敛 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\frac{1}{n})^{n}}{n^{n+\frac{1}{n}}}$

解：先看 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\frac{1}{n})^{n}}{n^{n+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}}=1\neq 0$

从而级数发散

例. 证 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

解：$|u_m+\cdots+u_{m+p}|=|\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}|>|\frac{p}{(m+p)^2}|$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\frac{1}{4\varepsilon}$，当 $m>N$，取 $p=(\sqrt{m+\frac{1}{16\varepsilon^2}}+\frac{1}{8\varepsilon})^2$

此时有 $|u_m+\cdots+u_{m+p}|>|\frac{p}{(m+p)^2}|\geq\varepsilon$

则 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛

另解：由于 $|u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}|=|\frac{1}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}|$

$<|\frac{1}{m(m+1)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}|$

$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}$

$<\frac{1}{m}$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$ 当 $m>N$ 时对任意 $p\in\mathbb{Z}_+$，有

$|u_{m+1}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\frac{1}{N}<\varepsilon$

定理12.2：若级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都收敛，则 $\forall c,d\in\mathbb{R}$，$\sum(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$.

定理12.3：去掉、增加、或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

定理12.4：在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的敛散性，也不改变它的和.

注意：任意拆括号对敛散性改变不确定

例、$0+0+\cdots+0+\cdots$ 收敛.

但 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=1-1+1-1\cdots+1-1\cdots$ 显然发散.

加括号前收敛 ⇒ 加括号后收敛，加括号前发散 ⇐ 加括号后发散.

例. 审敛 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\cdots$ 敛散性

解：加括号，原级数 $=(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1})+(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1})+\cdots$

由于 $\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{n-1}=2\cdot\frac{1}{n-1}$

从而原级数 $=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

§2. 正项级数

一、正项级数的一般判别原则

定理① 正项级数 $\sum u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即 $\forall M>0$, s.t. $\forall S_n<M$

证明：由于 $u_n>0$，S_n 单增，$\{S_n\}$ 单调有界必有极限.

定理②.（比较原则）

设 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 是两个正项级数，如果 $\exists N>0$，对 $\forall n>N$ 有 $u_n\le v_n$

则 1° 若 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛

2° 若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 发散.

推论：设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 为两个正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$

1° 当 $0<l<+\infty$，$\sum u_n$，$\sum v_n$ 敛散性相同.

2° 当 $l=0$，若 $\sum v_n$ 收敛，$\sum u_n$ 收敛.

3° 当 $l=+\infty$，若 $\sum v_n$ 发散，$\sum u_n$ 发散

例. 审敛 $\sum\frac{1}{2^n-n}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=1\in(0,+\infty)$$

从而 $\sum\frac{1}{2^n-n}$ 与 $\sum\frac{1}{2^n}$ 同敛态，由于 $\sum\frac{1}{2^n}$ 收敛，则 $\sum\frac{1}{2^n-n}$ 收敛.

例. 审敛 $\sum\sin\frac{1}{n}$

解：首先，$\forall n\in\mathbb{Z}_+$，$\sin\frac{1}{n}>0$. 从而 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 为正项级数.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\in(0,+\infty)$$

故 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 与 $\sum\frac{1}{n}$ 同敛态，由于 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 发散.

二、比式判别法 & 根式判别法

定理.（达朗贝尔判别法 或比式判别法）

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\exists N_0\in\mathbb{Z}_+$ 及常数 $q\in(0,1)$

1° 若对 $\forall n>N_0$，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$ 则 $\sum u_n$ 收敛

2° 若对 $\forall n>N_0$，有 $u_{n+1}/u_n\ge1$，则 $\sum u_n$ 发散

为什么原定理"=1"可判断，但推论无"=1"？
因为推论是极限形式的"=1"
而原定理是真的"=1"

推论：（比式判别法的极限形式）

想象成公比

若 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$

1° 若 $q<1$，则 $\sum u_n$ 收敛

2° 若 $q>1$，（或 $q=+\infty$）则 $\sum u_n$ 发散.

注意：$q=1$ 时，比式判别法失效 ← 例如：对 $\sum\frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$.

对 $\sum\frac{1}{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=1$.

但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例、审敛 $\sum nx^{n-1}$ $(x>0)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot x=x$$

若 $x=1$，原级数 $=\sum n$ 发散

若 $0<x<1$，原级数收敛

若 $x>1$，原级数发散

另外，$\sum nx^{n-1}$ 可以求和 $(x\in(0,1))$：

设 $A(x)=\sum nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$

则 $\int_0^x A(x)dx=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x}$

从而 $A(x)=\frac{1\cancel{-x}\cancel{+x}}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

定理（柯西判别法，或根式判别法）设 $\sum u_n$ 为正项级数，$\exists N_0\in\mathbb{R}_+$，及 $l\in\mathbb{R}$

1° 若 $\forall n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\le l<1$，则 $\sum u_n$ 收敛

2° 若 $\forall n>N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$，则 $\sum u_n$ 发散

推论（根式判别法的极限形式）：

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$

1° 当 $l<1$ 时，$\sum u_n$ 收敛

2° 当 $l>1$ 时，$\sum u_n$ 发散

3° 当 $l=1$ 时，无法判断，本法失效

例. 审敛 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

解：首先 $u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}>0$，故 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 为正项级数

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1$

从而 $\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛

例. 审敛 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

解：$u_n=(n!)^2/(2n)!>0$ 故 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 为正项级数

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}\quad\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$

从而 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛

例. 审敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$　解：为正项级数

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$

故收敛

三、积分判别法 (只有微分里有)

定理：若 f 是 $[1,+\infty)$ 上的一个非负减函数，那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛态.

例. 对 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 审敛

解：当 $p>0$ 时 $f(x)=\frac{1}{x^p}$ 是 $[1,+\infty)$ 上的非负减函数.

从而 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} x^{-p}dx$.

若 $p=1$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = +\infty$ 发散.

若 $p>1$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p}(0-1)$ 收敛.

若 $p<1$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty} = +\infty$ 发散.

从而 p 级数 $\sum\frac{1}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，而在 $0<p\le 1$ 时发散

例. 审敛 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

解：当 $p>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数

由于 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)^p}dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^p}d\ln x$.

为 p 级数.

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，而在 $0<p\le 1$ 时发散.

§3. 一般项级数 ← 比"正项级数"复杂得多，因此只研究某些特殊类型.

一、交错级数

定义：各项的正负符号相间的级数. $u_1-u_2+u_3-\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots$

定理：(莱布尼茨判别法) 若交错级数满足：

1° $\{u_n\}$ 单调递减 $(u_n>0)$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

则交错级数收敛.

二、绝对收敛

若对一般项级数 $\sum u_n$ 的各项取绝对值 $\sum|u_n|$ 收敛，则称 $\sum u_n$ 绝对收敛

定理：绝对收敛 ⇒ 收敛.

用正项级数的方法判断即可.

{全体收敛级数} = {绝对收敛级数} + {条件收敛级数}

绝对收敛级数的2个重要性质.

1° 绝对收敛级数重排后也绝对收敛，且极限相同

注：条件收敛级数重排后敛态未知.

2° 若 $\sum u_n$ 收敛，a 为常数，则 $a\sum u_n=\sum a u_n$

由此可以扩广到级数与有限项的乘积，即

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k u_n$$

现在讨论何时可以把它推广到无穷级数乘积上去？

定理（柯西定理）、若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都绝对收敛，则 $\sum_{i,j}^{\infty} u_i v_j$ 也绝对收敛，且为 $\sum u_n \cdot \sum v_n$.

第十三章 函数列 & 函数项级数.

§1、一致收敛性

一、函数列及其一致收敛性.

设 $f_1, \cdots, f_n, \cdots$ 是定义在同一数集 E 上的函数，则称其为一个函数列.

记为 $\{f_n\}$ 或 $f_n, n=1,2,3,\cdots$

若取 $x_0 \in E$，代入 x_0. 得数列 $f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots$ （或 $\{f_n(x_0)\}$）

若 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛，则称 $\{f_n\}$ 在 x_0 处收敛，称 x_0 为 $\{f_n\}$ 的收敛点.

否则称 x_0 为发散点.

若 $\{f_n\}$ 在 $D \subset E$ 中每个点都收敛，则称 $\{f_n\}$ 在 D 上收敛。此时 $\forall x \in D$，都有 $\{f_n\}$ 的一个极限值与之对应. 这个对应法则所确定的函数称为 $\{f_n\}$ 的极限函数，记为 f，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

与x有关的

$N = N(x, \varepsilon)$

用 ε-N 定义：$\forall$ 固定的 $x \in D$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{Z}_+$，当 $n > N$ 时，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

使 $\{f_n\}$ 收敛的全体点的集合，称为 $\{f_n\}$ 的收敛域.

例1. 设 $f_n(x) = x^n$，$x \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \cdots$. 证 $\{f_n\}$ 收敛域为 $(-1, 1]$

且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

解：$\forall \varepsilon > 0$ (wlg $\varepsilon < 1$)，当 $0 < |x| < 1$ 时

要使 $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \ln\varepsilon$

只要 $N > \ln\varepsilon / \ln|x|$，当 $n > N$ 时，有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

当 $x = 0$ 时，$\forall n$ 都有 $|f_n(0) - 0| = 0 < \varepsilon$

当 $x = 1$ 时. $\forall n$ 都有 $|f_n(1) - 1| = 0 < \varepsilon$

当 $|x| > 1$ 时，则有 $|x|^n \to \infty$ $(n \to \infty)$

当 $x = -1$ 时. 对应数列为 $-1, 1, \cdots, -1, 1, \cdots$ 发散.

从而 $f_n(x) = x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1]$

例2. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$，$n = 1, 2, \cdots$ $x \in \mathbb{R}$

对 $\forall x \in \mathbb{R}$，都有 $|\sin nx / n| \le |1/n|$

故对 $\forall \varepsilon > 0$，只要 $n > N = 1/\varepsilon$，就有 $|f_n(x)| < \varepsilon$.

从而 $\{\sin nx / n\}$ 收敛域

定义：设函数列$\{f_n\}$和极限函数f都定义在D上，若对$\forall \varepsilon>0$，总存在$N>0$，当$n>N$时，对$\forall x\in D$有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

则称$\{f_n\}$在D上一致收敛于f，记作

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad (n\to\infty)\quad x\in D$$

注意：一致收敛和收敛定义区别在于：

一致收敛：$N=N(\varepsilon)$　　收敛：$N=N(\varepsilon,x)$

从而，$\{f_n\}$一致收敛 $\Rightarrow$ 收敛.

例. $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\frac{1}{\varepsilon}$，当$n>N$时，有$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|<\varepsilon$，从而$\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$一致收敛

例. $\{x^n\}$收敛于$f(x)=0$ $(|x|<1)$，问是否一致收敛

令$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$. $\forall N>0$. 取$n>N+1$时，取$x'=(1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\in(0,1)$

则有$|x'^n-0|=|1-\frac{1}{n}|\geq\frac{1}{2}$

从而$\{x^n\}$在$|x|<1$上不一致收敛

定理.（函数列一致收敛的Cauchy准则）

$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n,m>N$时，$\forall x\in D$，有$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

定理.

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$

先取定n，求上确界，然后令$n\to\infty$.

证明："$\Rightarrow$" 由于$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$

则$\forall\varepsilon>0$，$\exists$不依赖于x的N.

当$n>N$时，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，$x\in D$

则$\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$

由极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

"$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\forall x\in D$，$|f_n(x)-f(x)|\leq\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

故$f_n(x)\rightrightarrows f_n(x)$.