SY28/AI34 – TP Kalman

A25

Dans ce TP, nous allons implémenter et tester le *filtre de Kalman* en Matlab/Octave sur deux cas :

- robot au modèle d'évolution et d'observation linéaire
- robot aux modèles non-linéaires

1 Robot Linéaire

Notre premier robot possède une position x, y. Son déplacement peut se modeliser avec un vitesse selon x (vx) et y (vy). On modélisera ces vitesses comme étant constantes, bien qu'elles puissent changer petit à petit.

De plus, notre robot est capable d'observer directement sa position. En résumé, voici les fonctions qui régissent le système *robot*:

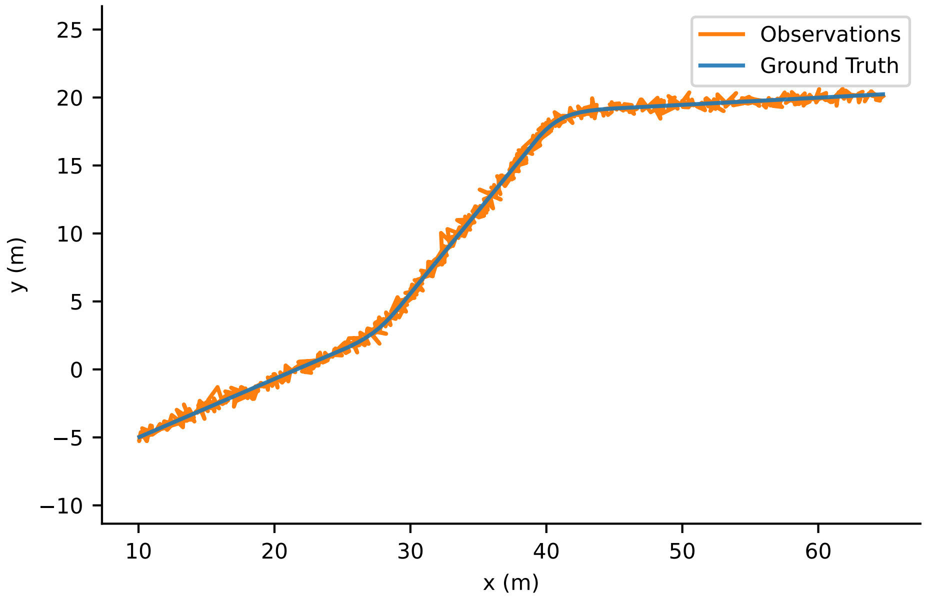
$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dot{x} &= vx \\ \dot{y} &= vy \\ \dot{vx} &= 0 \\ \dot{vy} &= 0 \end{cases}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Les versions stochastiques discrétisées sont donc:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice : Récuperer sur moodle les fichiers `linear.mat` sur Moodle, et étudier ses quatre entrées :

- `dt` : intervalle entre pas de temps utilisé pour générer les données
- `groundtruth` : matrice 4 par T décrivant les valeurs réelles de $\mathbf{x}$ a chaque pas de temps
- `labels`: vecteur 4 décrivant le nom donné à chaque ligne de la vérité terrain
- `obspos` : matrice 2 par T décrivant les positions observées $\mathbf{y}$ a chaque pas de temps



Exercice : Récuperer et compléter le fichier `linear.m`. Régler les *gains* (matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$) afin d'obtenir le meilleur résultat.

2 Robot Non-Linéaire

Notre deuxième robot est décrit par une pose x, y, θ et une vitesse v :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dot{x} & = v \cdot \cos\theta \\ \dot{y} & = v \cdot \sin\theta \\ \dot{\theta} & = 0 \\ \dot{v} & = 0 \end{cases}$$

Le robot observe son état de deux manières :

1. avec un capteur inertiel mesurant son v

$$g_v(\mathbf{x}) = v$$

2. avec des mesures de distance et d'angle à des balises statiques de l'environnement. Une balise i ayant sa position x_i, y_i connue donne les modèles d'observation en distance et en angle suivant

$$g_{\rho_i}(\mathbf{x}) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$
$$g_{\theta_i}(\mathbf{x}) = \theta - atan2(y_i - y, x_i - x)$$

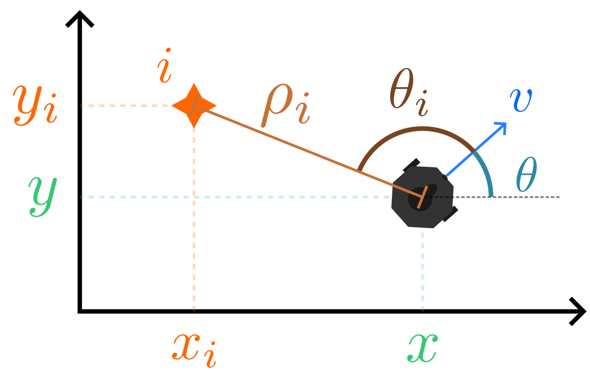


Figure 1: Système et variables

Après linéarisation et discretisation, on obtient alors les matrices suivantes

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta t \cdot v \cdot \sin\theta & \Delta t \cos\theta \\ 0 & 1 & \Delta t \cdot v \cdot \cos\theta & \Delta t \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G}_{\rho_i} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} & \frac{y - y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} -\frac{y_i - y}{(x_i-x)^2 + (y_i-y)^2} & \frac{x_i - x}{(x_i-x)^2 + (y_i-y)^2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Récuperer et édudier le fichier `nonlinear.mat` sur Moodle, qui contient les données suivantes :

- `dt` : intervalle entre pas de temps utilisé pour générer les données
- `groundtruth` : matrice 4 par T décrivant les valeurs réelles de $\mathbf{x}$ a chaque pas de temps
- `labels`: vecteur 4 décrivant le nom donné à chaque ligne de la vérité terrain
- `beacons` : matrice M par 2 décrivant les coordonnées des M amers
- `obsdist` : matrice M par T décrivant les distances mesurées aux M amers à chaque pas de temps

- `obsangl` : matrice M par T décrivant les angles mesurées aux M amers à chaque pas de temps
- `obsvel` : matrice 1 par T décrivant les velocités v mesurées à chaque pas de temps

Exercice : Adapter les modèles et gains de `nonlinear.m` jusqu'à obtenir une solution satisfaisante

3 Annexes

3.1 Détail des linarisations

$atan2$ est une fonction définie comme

$$arctan2(y,x) = \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}(\frac{y}{x}) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \text{indefini} & \text{si } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Ce qui la rend complexe a linéariser. Cependant, deux aspects nous permettent de simplifier le problème:

- Nous sommes dans le cadre d'un CPS, les grandeurs utilisées ne seront donc jamais précisément zéro, ce qui nous permet d'ignorer ces cas
- Dans le cadre d'une linearisation, les trois premiers cas sont équivalents car la dérivation fait disparaitre la constante π

On obtient donc que $arctan2'(y,x) \sim \tan^{-1}{}'(\frac{y}{x})$.

Or $\tan^{-1}{}'(u) = \frac{u'}{1+u^2}$, on a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \tan^{-1}(\frac{y}{x})}{\partial x} = \frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial x} \cdot \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + \cancel{x^2}\frac{y^2}{\cancel{x^2}}} = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \tan^{-1}(\frac{y}{x})}{\partial y} = \frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial y} \cdot \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x^2+y^2)} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$