Chapitre 3

Partie 1

Exo 1:

$u_n = \dfrac{n}{n+1}$ monotone ? Bornée ?

* Une suite est monotone si elle est uniquement croissante ou décroissante.
On détermine dans lequel des deux cas on se trouve en calculant $u_{n+1} - u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
La suite est croissante (respectivement décroissante) si $u_{n+1} - u_n > 0$ (< 0) ou si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (< 1)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n\,.\,(n+2)}{(n+2)\,.\,(n+1)} = \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Or $n^2 > 0$ et n > 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $n^2 + n + 2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est croissante sur $\mathbb{N}$ donc monotone.

On arrive à la même conclusion en partant de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ donc $u_0 = 0 \leq u_n \leq 1$ et u_n monotone => la suite est majorée par 1 et minorée par 0

Exo 5:

Montrer que la suite $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ avec x > 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
On ne demande pas explicitement de trouver le rang à partir duquel la suite est décroissante, juste de prouver qu'elle l'est.

u_n décroissante => $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$ (lorsque des factorielles sont en jeu, il est plus commode de passer par cette définition que par $u_{n+1} - u_n$)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} - 1 = \frac{x}{n+1} - 1 = \frac{x-n-1}{n+1}$$

La suite est donc décroissante si $\dfrac{x-n-1}{n+1} < 0$

Parce que $n \in \mathbb{N}$, n > 0 donc n+1 > 0. La suite ne peut être décroissante que si $x - n - 1 < 0 \Leftrightarrow n > x - 1.$
Autrement dit, la suite est décroissante pour tout n > N avec N qui vérifie l'équation $N = x - 1$

Partie 2

Exo 1:

$u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ et trouver explicitement un rang à partir duquel $1{,}999 \leq u_n \leq 2.001$

* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2$

* On rappelle que la définition de limite d'une suite :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$
Or $|u_n - l| \leq \epsilon \Leftrightarrow l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$ et on sait que l = 2
On a donc $l - \epsilon = 2 - \epsilon = 1{,}999$ ou de manière équivalente $l + \epsilon = 2 + \epsilon = 2{,}001$
Soit donc $\epsilon = 0{,}001.$

On cherche le rang à partir duquel $|u_n - \epsilon| = \left|\dfrac{2n+1}{n+2} - 2\right| < 0{,}001$

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2n-4}{n+2}\right| = \left|\frac{-3}{n+2}\right|$$

$$\left|\frac{-3}{n+2}\right| \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{10^{-3}} - 2 = 2998$$

$\forall n \geq 2998$, on aura donc $1{,}999 \leq u_n \leq 2.001$

Exo 3:

La suite $u_n = (-1)^n e^n$ admet-elle une limite ? Et la suite $\frac{1}{u_n}$?

On utilise le théorème des gendarmes, comme souvent lorsque la suite à étudier est composée d'un terme de la forme $(-1)^n$, d'un sinus ou d'un cosinus.

* $-e^n \leq u_n \leq +e^n$ Or $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = +\infty$ donc $-\infty \leq u_n \leq +\infty$

La suite u_n ne converge donc pas vers une limite finie, elle diverge.

* $-\frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{u_n} \leq +\frac{1}{e^n}$ Or $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \pm\frac{1}{e^n} = 0$ et donc $0 \leq \frac{1}{u_n} \leq 0$

La suite u_n converge vers une limite finie $l = 0$.

Exo 4:

Déterminer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $v_n = \frac{\cos(n)}{\sin(n) + \ln(n)}$ et $w_n = \frac{n!}{n^n}$

* Quand on est confronté à deux racines carrées de la forme $\sqrt{(a)} \pm \sqrt{(b)}$, on peut les faire disparaitre en faisant appel à l'expression conjuguée $\sqrt{(a)} \mp \sqrt{(b)}$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

* Pour étudier la limite de $v_n = \frac{\cos(n)}{\sin(n) + \ln(n)}$, on sait que $-1 \leq \cos(x) \leq +1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq +1$. On peut donc écrire que $\frac{-1}{-1 + \ln(n)} \leq v_n \leq \frac{1}{1 + \ln(n)}$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{-1 + \ln(n)} = 0$ et pareillement $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \ln(n)} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

* $w_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3...(n-1).n}{n.n.n...n.n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \times \ldots \times \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 0 \times 0 \times \ldots \times 1 = 0$$

Partie 3

Exo 1:

Déterminer la limite de $u_n = 5^n - 4^n$

$$\frac{5^n - 4^n}{5^n} \leq u_n \leq \frac{5^n - 4^n}{4^n}$$

Avec $\dfrac{5^n - 4^n}{5^n} = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ et $\dfrac{5^n - 4^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n - 1$

On remarque ici que $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ est de la forme a^n avec a > 1. On a vu dans la partie 3.1 qu'on a alors $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ d'où $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty - 1 = +\infty$

On a aussi $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ de la forme a^n avec cette fois 0 < a < 1. Dans ce cas, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

Donc $0 \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq +\infty$

On aurait pu se contenter d'écrire que $u_n \leq \dfrac{5^n - 4^n}{4^n}$ et de regarder la limite du terme de droite pour déterminer celle de u_n.

Exo 2:

Pour quelle valeur de a $\lim_{n\to\infty} v_n = 3$ avec $v_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$?

$v_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ (voir 3.2)

On cherche la valeur de a quand v_n converge vers 3, il faut donc que la limite de a^{n+1} existe. D'après le point 3.1 du cours, a^{n+1} converge uniquement si -1 < a < 1, et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1-0}{1-a} = 3 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{3} = 2/3$$

Exo 3:

Calculer la limite de $u_n = \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n}{2^n}$

$$u_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k}{2^n} = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1 - 2^{n+1}}{2^n} = -\frac{1}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2^n} = -\frac{1}{2^n} + 2$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2^n} + 2 = 0 + 2 = 2$$

Exo 6:

Déterminer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec $u_n = \ln(1 + \dfrac{1}{2}) \times \ln(1 + \dfrac{1}{3}) \times \ldots \times \ln(1 + \dfrac{1}{n})$. Que peut-on en déduire ?

$$^{*}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(1+\frac{1}{2}) \times \ln(1+\frac{1}{3}) \times \ldots \times \ln(1+\frac{1}{n}) \times \ln(1+\frac{1}{n+1})}{\ln(1+\frac{1}{2}) \times \ln(1+\frac{1}{3}) \times \ldots \times \ln(1+\frac{1}{n})} = \ln(1 + \frac{1}{n+1})$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n+1}) = \ln(1) = 0$$

* En vertu du point 3.3 du cours, on en déduit alors que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Partie 4

Exo 1:

Montre que la suite $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ avec $u_0 = 1$ est croissante et majorée par 2. Que peut-on en conclure ?

Il s'agit ici de solliciter le théorème 2 partie 4.2 selon lequel toute suite croissante et majorée est convergente.

* Montrons que la suite est majorée par 2 => $u_n < 2 \forall n$ par récurrence
Pour n = 0, $u_0 = 1 < 2$
Pour n > 0, on suppose que $u_n < 2$. On doit montrer que si c'est vrai, on a inévitablement $u_{n+1} < 2$. L'idée est de partir de u_n et de construire par étape u_{n+1}

$u_n < 2 \Leftrightarrow u_n + 2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4} = 2$
Or $\sqrt{u_n + 2} = u_{n+1}$ donc on a bien montré que $u_{n+1} < 2$

* De la même manière, on peut montrer que la suite est croissante par récurrence.
On a $u_1 = \sqrt{3} < 1 = u_0$

On suppose que $u_{n-1} < u_n$ est vrai (définition d'une suite croissante, on peut aussi choisir de partir de $u_n < u_{n+1}$ et montrer que ça entraine $u_{n+1} < u_{n+2}$ ...)

$$u_{n-1} < u_n \Leftrightarrow u_{n-1} + 2 < u_n + 2 \Leftrightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} < \sqrt{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

On a bien montré que la suite est croissante.

<u>Exo 4:</u>

Monter que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,.\,(n!)}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

* On se réfère à la définition 7 et au théorème 3 de la partie 4.4. Pour montrer que les suites sont adjacentes, montrons d'abord que l'une est croissante et l'autre décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}) - (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc la suite u_n est croissante

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,.\,(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\,.\,n!} = u_{n+1} - u_n + \frac{n}{n\,.\,(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n\,.\,(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{n-(n+1)^2}{n\,.\,(n+1)(n+1)!} = \frac{n(n+1) + n - (n_1)^2}{n\,.\,(n+1)(n+1)!} = \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n\,.\,(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n\,.\,(n+1)(n+1)!}$$

Avec $n\,.\,(n+1)(n+1)! > 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite v_n est décroissante.

* Pour que les deux suites soient adjacentes, il faut montrer que $u_n < v_n$

Ou de manière équivalente que $v_n - u_n > 0$

$$v_n = u_n = \frac{1}{n\,.\,n!} > 0 \text{ donc on a bien } u_n < v_n$$

* Dernière condition pour que les suites soient adjacentes, il faut que $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,.\,n!} = 0$$

* Les suites sont adjacentes, on en déduit qu'elles convergent toutes les deux vers la même limite.