

Relativité Générale

Fascicule de TD

Brahim Lamine

brahim.lamine@irap.omp.eu



« *Le bonheur c'est de chercher* » JULES RENARD

Ouvrages de référence

Pour la relativité restreinte

- « Relativité Restreinte - des particules à l'astrophysique », E.ourgoulhon (édition CNRS - EDP sciences, 2010)

Bande dessinée

- Les aventures d'Anselme Luturlu, une BD très pédagogique et très amusante, regroupent 3 BD en rapport avec ce cours :
 - « Tout est relatif » (pour la relativité restreinte)
 - « Le Geometricon » (courbure de l'espace)
 - « Le trou noir »

Ces BD sont disponibles sur le site de « Savoirs sans Frontières » (tout en bas de page) :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/free_downloads.htm#français

Quelques applications smartphone développées par LIGO

- « Pocket Black Hole », pour simuler la déformation de rayons lumineux par un trou noir.
- « Stretch and squash », sur le fonctionnement d'un détecteur d'ondes gravitationnelles.

Ouvrage introductif

- « Relativité Générale », A. Barrau et J. Grain (Dunod, 2011)

Ouvrages intermédiaires

- « Relativité générale », M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby (De Boeck, 2010).
- « Gravity, an introduction to Einstein's General Relativity », J.B. Hartle (Pearson, 2014).

Ouvrages avancés

- « Gravitation and cosmology », S. Weinberg (Wiley, 1972)
- « Spacetime and geometry », S.M. Carroll (Addison Wesley, 2004)

Thématiques des séances de TD

- Planche d'entraînement p.1
- TD0 : théorie métrique de Newton p.4
- TD1 : géodésiques et transport parallèle p.6
- TD2 : mouvements dans le système solaire p.8
- TD3 : plongeon dans un trou noir p.10
- Sujet du Bureau d'Étude (BE) p.12
- Corrigé de la planche d'entraînement p.16
- Corrigé du TD0 p.21
- Corrigé du TD1 p.26
- Corrigé du TD2 p.31
- Corrigé du TD3 p.36

Formalisme indiciel et calcul tensoriel

Exercice 1 : Espace Euclidien

On se propose dans cet exercice de revenir sur quelques manipulations tensorielles dans l'espace Euclidien à trois dimensions. On utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. On prend un système de coordonnées cartésiennes x^i ($i = 1, 2, 3$) dans lequel la métrique Euclidienne s'écrit :

$$\eta_{ij} = \eta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas simple, il est habituel de ne pas distinguer entre les indices covariants et contravariants et de tous les écrire en bas (car $A_i \equiv \eta_{ij}A^j = A^i$). Dans ce contexte, on définit le tenseur de Kronecker (ou symbole de Kronecker) :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et le tenseur totalement antisymétrique (ou de Levi-Civita) :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Quelques propriétés du tenseur ϵ_{ijk}

1. Montrer que $c_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$ est équivalent à $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
2. Montrer que :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad \text{et} \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \quad (1)$$

3. Montrer que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (2)$$

Obtenir enfin les identités (2) par *contraction* sur l'identité (4). Vérifier que cette identité est équivalente à la formule habituelle du double produit vectoriel.

4. Si $M = m_{ij}$ est une matrice 3×3 , exprimer le déterminant de M à l'aide du tenseur ϵ_{ijk} .

Application : formules d'analyse vectorielle

5. Écrire, en notation indicielle, les opérateurs gradient, divergence, rotationnel, laplacien scalaire, laplacien vectoriel et *a-scalaire-gradient*. On pourra noter ∂_i l'opérateur différentiel $\partial/\partial x_i$.
6. Que valent $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f)$ et $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{a})$?
7. Exprimer $\mathbf{div}(f\mathbf{a})$ puis $\mathbf{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
8. Calculer $\mathbf{rot}(f\mathbf{a})$ puis $\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ et enfin $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{a})$.
9. Etablir l'expression de $\mathbf{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. On pourra partir de l'expression de $\mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b}$ et de $\mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a}$.

Autres systèmes de coordonnées

Coordonnées sphériques

On considère les coordonnées sphériques $x'^i = (r, \theta, \varphi)$. Noter que l'on doit désormais distinguer les indices covariants de contravariants car $x'_i \equiv g'_{ij} x'^j \neq x'^i$.

10. Que valent les composantes g'_{ij} de la métrique dans cette base ? On pourra partir de l'expression de l'invariant ds^2 .

Coordonnées cylindriques

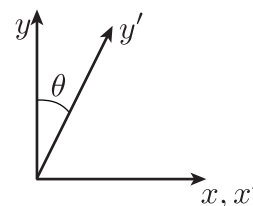
On considère maintenant les coordonnées cylindriques $x'^i = (r, \theta, z)$.

11. Que valent les composantes g'_{ij} de la métrique dans cette base ?
12. APPLICATION : on considère une hélice de pas a . En utilisant la métrique précédente, calculer la longueur d'un tour d'hélice.

Coordonnées non orthogonales

On considère enfin un système de coordonnées (x', y') non orthogonal tel que représenté sur la figure ci-contre (la base (\vec{e}'_x, \vec{e}'_y) reste néanmoins normée).

13. Exprimer les coordonnées (x', y') en fonction de (x, y) et de θ . AIDE : mettre un point M et exprimer ses coordonnées (x'_M, y'_M) en fonction de (x_M, y_M) . Vous noterez que $x'_M \neq x_M$.
14. Calculer la métrique g'_{ij} dans les coordonnées (x', y') en fonction de θ .
15. Montrer que la coordonnée contravariante $x^1 = x$ dans les coordonnées (x, y) correspond à la composante covariante x'_1 dans les coordonnées (x', y') .



Exercice 2 : Espace Minkowskien

On se place maintenant dans l'espace de Minkowski muni de la métrique :

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique permet de définir des composantes covariantes à partir de composantes contravariantes :

$$T_{\mu}{}^{\rho\sigma\dots} \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\nu\rho\sigma\dots}$$

1. Montrer que $\eta_{\mu}{}^{\nu} = \eta^{\nu}{}_{\mu} = \text{Id}$. On notera δ_{μ}^{ν} la matrice identité (l'ordre des indices n'étant pas important).
2. En déduire que $\eta^{\mu\nu}$ peut servir à définir des composantes contravariantes à partir de composantes covariantes :

$$T^{\mu\rho\sigma\dots} = \eta^{\mu\nu} T_{\nu}{}^{\rho\sigma\dots}$$

3. Que valent les composantes covariantes du quadrivecteur A dont les composantes covariantes s'écrivent $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$? Expliciter $\partial_\mu A^\mu$ et montrer que $\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu$.
4. On définit le tenseur de Levi-civita par ses composantes contravariantes de la façon suivante

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ est une permutation paire de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ est une permutation impaire de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Montrer qu'il s'agit bien d'un tenseur. Connaissez-vous d'autres tenseurs dont les composantes ne dépendent pas du référentiel?

5. Que valent les composantes covariantes $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$?

TD0 : théorie métrique de Newton

On considère la métrique $g_{\mu\nu}$ suivante :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (1)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et $h_{\mu\nu}(x) \ll 1$ (condition que l'on vérifiera à posteriori). On supposera en outre que la métrique est stationnaire, à savoir que $h_{\mu\nu}(x)$ ne dépend pas de $x^0 = ct$, mais seulement des coordonnées spatiales x^i . On considère le mouvement d'une particule **non relativiste** de masse m dans cette métrique. On notera τ le temps propre de cette particule et $V^i = \frac{dx^i}{dt} = \beta^i c$ sa vitesse coordonnée. On calculera jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(h, \beta^2, h\beta)$.

1. Montrer que nos hypothèses permettent d'écrire la relation suivante entre le temps propre τ et le temps coordonnée t :

$$\frac{d\tau}{dt} \simeq 1 + \frac{1}{2} (h_{00} + 2h_{0i}\beta^i - \beta^2) \quad (2)$$

où $\beta^2 \equiv -\eta_{ij} \frac{V^i V^j}{c^2}$. Quel phénomène se cache derrière le terme en h_{00} dans la parenthèse du membre de droite ? Même question pour le terme en β^2 . Que pouvez-vous dire sur le troisième terme (celui en $h_{0i}\beta^i$) ?

2. En partant de l'équation géodésique, montrer que l'équation du mouvement de la particule s'écrit, à l'ordre recherché :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) = 0 \quad (3)$$

3. En exprimant les symboles de Christoffel Γ_{00}^i et Γ_{0j}^i à l'ordre un en $h_{\mu\nu}$, en déduire l'équation Newtonienne suivante :

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = m \eta^{ij} \partial_j V - m \eta^{ik} \Omega_{jk} \frac{dx^j}{dt} \quad (4)$$

où vous donnerez les expressions explicites des fonctions V et Ω_{jk} .

Gravitation Newtonienne

4. Montrer qu'on retrouve la gravitation de Newton lorsque la seule composante non nulle de $h_{\mu\nu}$ est la composante h_{00} , et que celle-ci doit alors s'écrire

$$h_{00} = -\frac{2GM}{rc^2}$$

5. Vérifier que dans le système solaire on a bien $h_{00} \ll 1$
6. ★ Comparer la métrique Newtonienne à celle de Schwarzschild. En particulier, cette métrique que l'on pourrait qualifier de Newton est-elle une solution des équations d'Einstein ?
7. ★ En utilisant l'équation (2), retrouver l'expression du décalage gravitationnel $\Delta\nu/\nu$ entre les fréquences propres de deux horloges au repos séparées par une altitude $h \ll R$ dans le champ gravitationnel de la Terre de rayon R .

Effets inertiels

Pour cette partie, si les calculs à la main vous semblent trop long, vous pouvez utiliser un logiciel de calcul formel (mathematica, maple, sage etc.).

8. Montrer qu'en l'absence de gravitation, la métrique associée à un système de coordonnées en rotation non relativiste autour de l'axe z à la pulsation ω par rapport à un système de coordonnées Minkowskien s'écrit :

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{c^2} & \frac{\omega y}{c} & -\frac{\omega x}{c} & 0 \\ \frac{\omega y}{c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega x}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

9. Calculer les fonctions V et Ω_{jk} de la question 3. correspondant à cette métrique.
10. En utilisant l'équation (4), montrer que l'équation du mouvement dans cette métrique s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6)$$

Commenter.

11. POUR ALLER PLUS LOIN : retrouver avec l'approche métrique la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault dans le référentiel terrestre. *Indication* : comprendre que le plan d'oscillation du pendule est transporté parallèlement et écrire le transport parallèle du vecteur unitaire perpendiculaire au plan d'oscillation.

TD1 : géodésiques et transport parallèle

Exercice 1 : Équation géodésique et principe variationnel

On considère un chemin $x^\mu(\tau)$, où τ est le temps propre de la particule qui suit ce chemin. On définit la vitesse $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. On considère le Lagrangien suivant, considéré comme une fonction des $2 \times 4 = 8$ variables indépendantes \dot{x}^μ et x^μ

$$L(\dot{x}^\mu, x^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

Le point désigne la dérivée par rapport au temps propre. Ce Lagrangien est la version covariante du Lagrangien d'une particule libre en physique classique $L = \frac{1}{2} mv^2$ (à la masse près, qui ne joue pas de rôle ici). On rappelle que les équations d'Euler-Lagrange qui extrémalisent l'action $S \equiv \int L d\tau$ s'écrivent :

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

1. Montrer que

$$\frac{dv_\rho}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) v^\mu v^\nu$$

Et en déduire ce que l'on peut dire lorsque $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas d'une composante particulière x^α (composante dite « cyclique »).

2. Montrer que les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes à l'équation géodésique

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

Exercice 2 : Géodésique et transport parallèle sur une sphère

On s'intéresse dans cette partie à une sphère de rayon a . On paramètre les points M de la sphère par les coordonnées (θ, φ) des coordonnées sphériques. On travaille donc sur une surface de dimension 2 dans cette exercice (plongé dans un espace tridimensionnel non accessible aux habitants de la sphère).

1. Calculer la métrique g_{ab} ($a, b = 1, 2$) sur la sphère.

AIDE – on peut proposer plusieurs méthodes équivalentes : *i*) partir de l'invariance de l'élément de longueur ds^2 ; *ii*) écrire explicitement la loi de transformation de coordonnées de la métrique de Minkowski vers la métrique g_{ab} ; *iii*) partir de la définition $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$ (entraînez-vous à faire toutes ces méthodes). QUESTION SUBSIDIAIRE – quelle serait la métrique si on avait choisi un système de coordonnées cylindrique ?

On va maintenant montrer que les géodésiques (dont on a vu dans l'exercice 1 qu'il s'agit de chemin de longueur extrême) sont des grands cercles. Pour cela, on considère un point M de la sphère et une géodésique $(\theta(\tau), \varphi(\tau))$ qui passe par M et paramétrée par τ .

2. Montrer que $\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau}$ se conserve le long d'une géodésique (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1).
3. En déduire, sans calcul, que les géodésiques sont des grands cercles.

Dans la suite de cet exercice, on considère un vecteur unitaire λ que l'on désire transporter parallèlement le long d'un chemin \mathcal{C} sur la sphère. Ce chemin est paramétré par un paramètre s et un vecteur tangent t de composantes $t^a(s) = \frac{dx^a}{ds}$.

4. Rappeler l'équation de transport parallèle du vecteur λ le long de \mathcal{C} .

On considère désormais comme chemin un cercle de colatitude $\theta_0 = \text{const}$ (donc un parallèle), paramétré par $s \equiv \varphi$ allant de 0 à 2π , de telle sorte que le chemin soit fermé.

5. Que valent les composantes t^a ?

6. Montrer que

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^\theta = \sin \theta_0 \cos \theta_0 \lambda^\varphi \\ \dot{\lambda}^\varphi = -\cotan \theta_0 \lambda^\theta \end{cases}$$

où le point désigne la dérivée par rapport à $s \equiv \varphi$.

7. En utilisant la normalisation de λ ($g_{ab}\lambda^a\lambda^b = 1$) et en notant β l'angle entre λ et v , montrer que

$$\lambda^\theta = \frac{\sin \beta}{a} \quad , \quad \lambda^\varphi = \frac{\cos \beta}{a \sin \theta_0}$$

8. Montrer ensuite que

$$\dot{\beta} = \cos \theta_0$$

9. En déduire finalement de quel angle Δ a tourné le vecteur λ lorsqu'il revient à sa position initiale après un tour du chemin.

TD2 : mouvements dans le système solaire

On rappelle qu'une solution des équations d'Einstein, pour un astre ponctuel de masse M , est donnée par la métrique de Schwarzschild (en coordonnées sphériques $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1.$$

On considère le mouvement géodésique d'une particule de masse m de vitesse $v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$, où τ désigne le temps propre de la particule, c'est-à-dire $c^2 d\tau^2 = ds^2$. On rappelle une forme équivalente de l'équation géodésique, utile dans la suite :

$$\frac{dv_\rho}{d\tau} = \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu})v^\mu v^\nu \quad (2)$$

1. Rappeler pourquoi $v^2 \equiv g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = c^2$.
2. En déduire que les deux quantités suivantes sont conservées lors du mouvement :

$$E \equiv mc^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (3)$$

$$L \equiv mr^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (4)$$

On notera dans la suite $L = m\ell$ et $E = mc^2 e$.

3. Montrer, à partir de ce qui précède, que le mouvement est plan. Sans perte de généralité, on considérera dans la suite que le mouvement a lieu dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$. Que vaut alors v^θ ?
4. En partant de la relation de la question 1, et en utilisant l'expression de la métrique (1) et les quantités conservées de la question 2, montrer qu'on peut écrire une équation radiale de la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (5)$$

où on donnera les expressions de \mathcal{E} et $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction des quantités conservées de la question 2.

5. Interpréter les trois termes apparaissant dans $V_{\text{eff}}(r)$. Donner une interprétation à \mathcal{E} et donner en particulier sa limite non relativiste.
6. Tracer $V_{\text{eff}}(r)$ pour différentes valeurs de ℓ . Pour cela, commencer par récrire V_{eff} en fonction des deux quantités sans dimension $\rho \equiv \frac{rc^2}{GM}$ et $\xi \equiv \frac{\ell c}{GM}$. Déterminer qualitativement les 4 solutions possibles en fonction des valeurs de ξ et représenter, toujours qualitativement, les trajectoires correspondantes.
7. Déterminer le rayon r_{ISCO} correspondant à l'orbite circulaire stable la plus proche du centre attracteur (ISCO=Innermost Stable Circular Orbit). Faire l'application numérique dans le cas du Soleil.

Application : avance du périhélie de Mercure.

8. Montrer que la trajectoire de Mercure vérifie l'équation polaire suivante :

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2 c} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2 c^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (6)$$

9. En déduire l'équation de Binet généralisée sur la variable $u = 1/r$:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{3GM}{c^2} u^2 = \frac{GM}{\ell^2} \quad (7)$$

10. Mercure possède une orbite de faible excentricité. En déduire que :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\gamma\varphi)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (8)$$

où on donnera l'expression de γ en fonction de la valeur a_p du périhélie, de l'excentricité ε et de la masse du Soleil M .

11. Dessiner l'allure de la trajectoire et comparer au cas Newtonien.

12. En déduire l'avance $\Delta\varphi$ du périhélie de Mercure sur une orbite. Faire l'application numérique et l'exprimer en seconde d'arc par siècle.

DONNÉES POUR MERCURE :

- ★ Périhélie : $a_p = 0,3$ ua (unité astronomique).
- ★ Excentricité : $\varepsilon = 0,2$.
- ★ Période de révolution : $T = 88$ jours.

TD3 : plongeon dans un trou noir

On rappelle la métrique de Schwarzschild (avec $m \equiv GM/c^2$, homogène à une longueur) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

On considère le mouvement radial d'une particule massive dans le champ gravitationnel d'une telle métrique¹.

1. En reprenant les résultats obtenus au TD2, donner l'équation différentielle vérifiée par $r(\tau)$, où τ est le temps propre de la particule.

On considère dans la suite que la particule est lâchée sans vitesse initiale depuis l'infini.

2. En déduire les équations suivantes

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2} \quad (3)$$

Que peut-on dire en particulier de la vitesse radiale de la particule lorsque $r \rightarrow 2m$? Dans la suite, on appellera horizon la longueur $r_S = 2m$, appelée aussi rayon de Schwarzschild.

3. En déduire une équation donnant τ en fonction de r . On prendra qu'à $\tau = 0$, $r = r_0$. Que vaut en particulier τ lorsque $r \rightarrow 2m$? Même question pour $r \rightarrow 0$.
4. On cherche maintenant une équation du mouvement entre les coordonnées r et t . Que vaut dr/dt ?

On admet que la solution de l'équation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{ct}{m} = & \frac{2}{3} \left[\left(\frac{r_0}{2m}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{2m}\right)^{3/2} \right] + 4 \left[\left(\frac{r_0}{2m}\right)^{1/2} - \left(\frac{r}{2m}\right)^{1/2} \right] \\ & + 2 \ln \left| \left(\frac{\sqrt{r/(2m)} + 1}{\sqrt{r/(2m)} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{r_0/(2m)} - 1}{\sqrt{r_0/(2m)} + 1} \right) \right| \end{aligned} \quad (4)$$

5. Que vaut t lorsque $r \rightarrow 2m$? Commenter. Tracer qualitativement la trajectoire (ligne d'Univers) dans un diagramme d'espace-temps (ct, r) .

On considère maintenant la trajectoire radiale d'un photon.

6. Quelle est cette fois l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$?
7. Résoudre et déterminer ct en fonction de r (distinguer les cas radial vers l'extérieur et l'intérieur). Tracer sur le même graph que précédemment les cônes de lumières en quelques points de la ligne d'univers de la particule massive. Commenter ce graph, en particulier pour $r < 2m$.

1. Pour ceux qui s'intéressent à ce que verrait l'observateur du ciel autour de lui lors de sa descente dans le trou noir, voir le site <http://www.spacetime-travel.org/expeditions1/expeditions1.html>. Vous verrez qu'étonnamment, passer une certaine distance, vous aurez l'impression d'être dans le trou noir, sans encore avoir franchi son horizon !

On suppose désormais qu'Alice est un observateur en plongeon radial vers $r = 0$, tandis que Bob est fixe à la distance r_B du centre. Alice émet des signaux lumineux à la fréquence propre ν_A , reçue par Bob qui les mesure à la fréquence propre ν_B .

8. Montrer que

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2m}{r_A}}}{1 - \frac{2m}{r_B}} \quad (5)$$

On pourra utiliser deux méthodes.

9. Interpréter à l'aide du résultat précédent et du graph de la question 7. les différents résultats obtenus précédemment dans la limite $r \rightarrow 2m$.

Application : coordonnées de Finkelstein

On introduit le changement de coordonnée temporel suivant :

$$p = ct + r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (6)$$

10. Que peut-on dire de p le long d'une géodésique lumière radiale plongeante ?
11. Exprimer la métrique dans ce nouveau système de coordonnées. Commenter.
12. Que vaut $p(r)$ pour une trajectoire radiale sortante ?

On définit les coordonnées de Finkelstein avancées en posant $ct' = p - r$.

13. Que vaut la métrique dans le système de coordonnées $(ct', r, \theta, \varphi)$? En déduire les équations des lignes d'univers de photon se déplaçant radialement vers l'intérieur puis vers l'extérieur.
14. Représenter ces lignes d'univers (cônes de lumière) dans un diagramme d'espace-temps (ct', r) . Commenter ces cônes, en particulier pour des valeurs de r inférieur à $2m$: peut-on s'échapper d'un horizon des événements, défini par $r = 2m$? Un trou noir est un objet compact ayant un horizon des événements à l'extérieur de sa surface matériel.
15. QUESTION SUBSIDIAIRE : sur quel type d'objet serait-on tombé si on avait construit les coordonnées de Finkelstein à partir des trajectoires radiales sortante ?

BE à rendre pour le 13 janvier 2020

Ce BE ne concerne que les étudiants de l'ISAE.

Consignes

Ce BE peut être réalisé en groupe de 3 étudiants maximum. Il contient des parties analytiques et des parties numériques.

- ★ Les parties analytiques doivent être rendues au format électronique sous la forme d'un fichier pdf.
- ★ Les parties numériques doivent être réalisées en python ou en matlab.
- ★ Les figures doivent être jointes au format png.

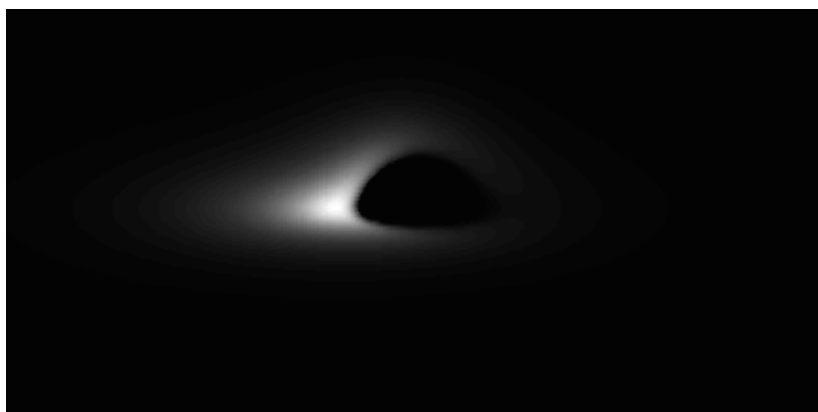
Tous les fichiers doivent être regroupés dans un unique dossier compressé, à envoyer avant le lundi 13 janvier 2020 à

`brahim.lamine@irap.omp.eu`

Introduction

Les étoiles vivent souvent en couple. On parle alors d'étoiles binaires. Lorsqu'une étoile arrive en fin de vie et n'a plus de combustible à brûler, elle implose et, si elle est suffisamment massive, elle forme un trou noir. Si l'autre étoile n'a pas été expulsée au cours de ce violent événement, il en résulte un système binaire constitué d'une étoile classique et d'un trou noir. On parle alors de *binaire X*. En effet, le potentiel gravitationnel du trou noir est suffisamment fort pour *aspirer* la matière de l'étoile compagne (voir les solutions de capture du TD2). Cette matière spirale alors autour du trou noir, et forme ce qu'on appelle un disque d'accrétion. Bien qu'aucune lumière n'est issue du trou noir à proprement parler, les disques d'accrétion sont très lumineux, et émettent essentiellement en rayonnement X.

Le but de ce projet est de modéliser les images que l'on observerait de ces disques d'accrétion autour d'un trou noir. Dans un univers newtonien, les photons se propagent en ligne droite. Vu avec un certain angle d'inclinaison, un disque ressemble toujours à une ellipse d'autant plus excentrique que l'on observe le disque par la tranche. Cependant, la présence du trou noir modifie significativement l'espace-temps dans son voisinage, et altère la trajectoire des photons. Ceux-ci ne se déplacent plus en ligne droite, et l'image du disque d'accrétion s'en trouve modifiée (voir image ci-dessous). Ce projet permet de décrire ces effets dans une approche numérique.



Les géodésiques

Dans un premier temps, il nous faut étudier les trajectoires des photons (géodésiques de type lumière). On s'intéresse ici à un trou noir de masse M , sans rotation et non chargé. On appelle ce type de trous noirs des trous noirs de *Schwarzschild*. Comme en mécanique newtonienne, les trajectoires sont dans un plan. On les repère en coordonnées polaires (r, θ) . Les géodésiques sont alors décrites par l'équation différentielle non linéaire du premier ordre suivante :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = \frac{1}{b^2}$$

où b désigne le paramètre d'impact à l'infini et $r_s = 2GM/c^2$ est le rayon de Schwarzschild. Cette équation radiale peut se démontrer en reprenant la même démarche que celle qui a été utilisée dans le TD2 pour trouver l'équation radiale d'une géodésique de type temps ($v^2 > 0$ pour la matière, $v^2 = 0$ pour la lumière).

Dans cette partie, on s'intéresse à des photons qui viennent initialement de l'infini ($r_i \rightarrow \infty$, et on choisit l'axe z tel que $\theta_i = 0$).

- ★ Ré-écrire cette équation en utilisant les variables sans dimension : $u = r_s/r$ et $u_c = b_c/b$ avec $b_c = 3\sqrt{3}r_s/2$. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$(\partial u / \partial \theta)^2 + V(u) = 0$$

- ★ Analyser qualitativement cette équation (vous pourrez tracer la fonction $V(u)$), et montrer qu'il y a deux familles de solutions. Pour $b > b_c$, les photons sont déviés par le trou noir et repartent à l'infini. Pour $b < b_c$, les photons tombent sur le trou noir après avoir éventuellement fait plusieurs tours...
- ★ Pour résoudre numériquement cette équation non linéaire, il est plus aisé de travailler avec l'équation dérivée. Montrer que cette équation est :

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u$$

Résoudre numériquement cette équation en fonction du paramètre d'impact, et vérifier votre analyse qualitative.

- ★ Tracer le portrait de phase de l'équation, c'est-à-dire u' en fonction de u , pour une valeur $u_c > 1$ et une valeur $u_c < 1$ (sur le même graph).

Forme du disque d'accrétion

Maintenant que nous connaissons la manière dont se propagent les photons, il est possible d'étudier les images d'un disque d'accrétion autour du trou noir. Pour cela, il faut, pour chaque point du disque suivre la trajectoire des photons jusqu'à ce qu'ils arrivent sur le détecteur d'un observateur. Pour les trous noirs de Schwarzschild, le principe de retour inverse de la lumière est valide. Il est donc aussi possible de partir du plan de l'observateur et de suivre les géodésiques jusqu'à tomber sur le disque à un rayon r_d . Un peu de géométrie en trois dimensions s'impose. Pour simplifier, on supposera que le vecteur unitaire normal au plan du disque d'accrétion est dans le plan $\alpha = \pi/2$. Dans ce cas, les relations de trigonométrie

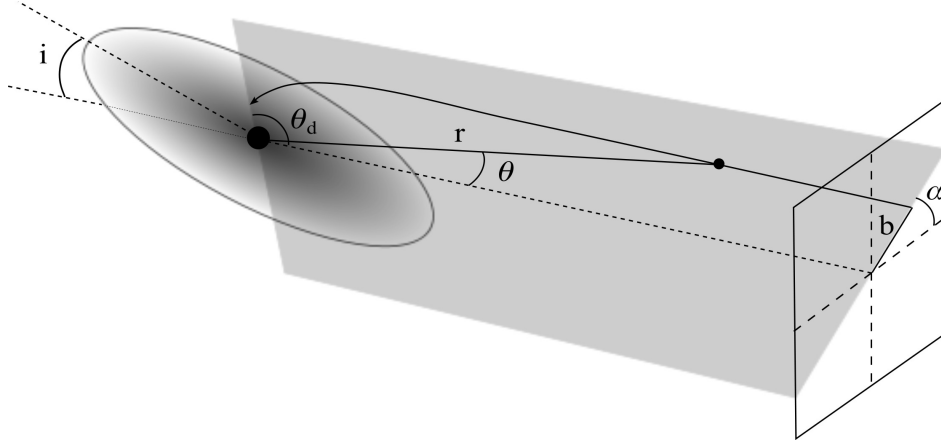


FIGURE 1 –

Dans le plan de la trajectoire du photon, celui-ci est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . L'angle $\theta = 0$ est choisi comme la direction de l'observateur. Un photon quitte le disque avec un rayon r_d et un angle θ_d . Il arrive sur le plan de l'observateur avec un paramètre d'impact b , et est repéré sur ce par un angle α . Le disque est incliné d'un angle i par rapport à la direction d'observation. On suppose pour simplifier que le vecteur normal au plan est dans le plan $\alpha = \pi/2$.

montrent qu'un photon qui arrive sur le plan de l'observateur avec un angle α est parti du disque avec un angle θ_d tel que² :

$$\cos \theta_d = \frac{-\sin \alpha \cos i}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 i}}$$

- ★ Tracer la forme $r_d(b, \alpha) = \text{cte}$ des iso-rayons observés sur le plan de l'observateur, pour différentes inclinaisons du disque d'accrétion.
- ★ Étudier la forme des images primaires (photon n'ayant pas fait un tour du trou noir) et secondaires (photons ayant fait un tour du trou noir).
- ★ Sachant que la trajectoire rectiligne de photons non déviés a pour équation : $r(\theta) = b/\sin \theta$, comparer les iso-rayons obtenus avec les géodésiques exactes et ceux obtenus dans l'approximation Newtonienne (vérifier que les iso-rayons sont de forme elliptique).
- ★ Éventuellement, optimiser le programme afin a) de ne calculer les géodésiques que sur un demi-plan (symétrie gauche/droite), et b) ne calculer les rayons correspondant à toutes les valeurs de α en n'intégrant qu'une seule géodésique par valeur de b .

Luminosité du disque d'accrétion

Le disque émet un rayonnement de corps noir dont le flux (énergie/temps/surface/angle solide) vaut : $F = \sigma T^4$ (où σ est la constante de Stephan, et T la température efficace du milieu). Le disque étant plus chaud dans les parties internes, il émet un rayonnement plus intense. Le flux émis par unité de surface du disque à une distance r du trou noir est :

$$\frac{F_{\text{emis}}(x)}{F_0} = \frac{x^{-5/2}}{x - 3/2} \left[\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{8}} \ln \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3/2} \sqrt{2} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{3/2} \sqrt{2} + 1} \right) \right]$$

2. Convincez-vous que cette relation est vraie en Newton comme en RG, et n'a donc aucun rapport avec la déviation de la lumière (ce qui explique que cette relation ne fasse pas intervenir les propriétés du trou noir).

avec $F_0 = \frac{3}{4} \frac{\dot{m} c^2}{4\pi r_s^2}$ et $x = r/r_s$.

★ Tracer $\frac{F_{\text{emis}}(x)}{F_0}$.

Cette luminosité n'est pas directement celle observée car l'intensité lumineuse est elle aussi modifiée par les effets de relativité. Ces effets sont représentés par le *redshift* z des photons émis. Dans le cas Newtonien simple d'une source qui s'éloigne de l'observateur à une vitesse v non relativiste, on peut récrire ce redshift comme un effet Doppler de telle sorte que $z \approx v/c$. Ici, la situation est plus complexe et un photon émis à une distance $x = r/r_s$ du centre du disque, arrivant sur le détecteur avec un paramètre d'impact b , et un angle α , possède un redshift de :

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - 3/(2x)}} \left[1 + \left(\frac{3}{2x} \right)^{3/2} \frac{b}{b_c} \cos i \cos \alpha \right]$$

- ★ Justifier que, loin du trou noir ($r \gg r_s$), la vitesse de rotation du disque est $v \approx (2r/r_s)^{-1/2}c$. Vérifier analytiquement que pour $\alpha = 0$ et $i = 0$, on retrouve que le redshift vaut $|z| \approx v/c$.
- ★ Tracer la carte (b, α) des redshifts correspondant aux photons émis depuis un disque en rotation s'étendant de $r_{\min} = 3r_s$ à un r_{\max} donné. Justifier brièvement pourquoi on considère $r_{\min} = 3r_s$.

Sous plusieurs effets³, le flux lumineux émis à une certaine position du disque et possédant un redshift z est modifié de la manière suivante :

$$F_{\text{obs}} = \frac{F_{\text{emis}}}{(1 + z)^4}$$

Pour la partie qui s'éloigne de l'observateur $z > 0$ et le flux est atténué. Pour la partie qui se rapproche de l'observateur $z < 0$ et le flux est amplifié.

- ★ À partir de ces formules, tracer l'image réelle $F_{\text{obs}}(b, \alpha)$ que l'observateur observerait pour un disque d'accrétion s'étendant de $r_{\min} = 3r_s$ à un r_{\max} donné. Vous considérerez plusieurs inclinaisons i de ce disque.
- ★ Justifier, qualitativement, que l'approche adoptée permet de rendre compte de l'image formée par une lentille convergente sur un détecteur. Quelle relation relie alors le paramètre b à la dimension physique dans le plan focal ?

Références

- Luminet J-P., 1979, A&A 75, p. 228-235
- Fukue J., 2003, PASJ 55, p.155-159
- Kato S. et al. 2008, Kyoto University Press ISBN 978-4-87698-740-5, "Black Hole accretion disks"

3. a) L'énergie des photons est diminuée d'un facteur $1 + z$ (redshift gravitationnel). b) Le temps propre de l'observateur dilaté d'un facteur $1 + z$ par rapport au temps de la source, ce qui diminue l'intensité de ce même facteur. c) L'angle solide dans lequel est émis le rayonnement est plus grand d'un facteur $(1 + z)^2$ dans le référentiel de l'observateur, ce qui réduit encore l'émission de ce même facteur.

Correction feuille d'entraînement

Exercice 1 : Espace Euclidien

Quelques propriétés du tenseur ϵ_{ijk}

1. On a
$$c_1 = \epsilon_{1jk} a_j b_k = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

De même
$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad \text{et} \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Donc
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

2.
$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = \sum_{\sigma} s(\sigma)^2 = \text{Card}(\sigma(3)) = 3! = 6$$

où $s(\sigma)$ est la signature de la permutation σ . $s(\sigma) = +1$ si la permutation présente un nombre pair d'inversion (et donc il s'agit d'une permutation cyclique), et $s(\sigma) = -1$ dans le cas contraire. On somme sur toutes les permutations σ à 3 éléments.

Ensuite,
$$k \neq l \Rightarrow \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 0$$

Donc $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} \propto \delta_{kl}$. Il reste à déterminer la constante, en prenant par exemple $k = l = 3$; il reste alors deux termes non nuls, qui sont $(i, j) = (1, 2)$ ou $(i, j) = (2, 1)$.

Donc
$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

3. La contraction est non nulle pour $i \neq j, k$ et $i \neq l, m$. Il y a deux cas :

i) $j = l$ et $k = m$, donc $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = +1$ et cette contribution doit être proportionnelle à $\delta_{jl} \delta_{km}$.

ii) $j = m$ et $k = l$, donc $\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikj} = -1$ et cette contribution doit être proportionnelle à $\delta_{jm} \delta_{kl}$.

Donc
$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Si on contracte $j = l$, on a

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = \delta_{jj} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{jk} = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}$$

Si en plus $k = m$, on retrouve

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$$

Le double produit vectoriel s'écrit

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m$$

donc
$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = a_m c_m b_i - c_i a_l b_l$$

C'est-à-dire
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

4. On a
$$\text{Tr } \mathbf{M} = m_{ii}$$

Et
$$\text{Det } \mathbf{M} = \sum_{\sigma} s(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} m_{3\sigma(3)} = \epsilon_{ijk} m_{1i} m_{2j} m_{3k}$$

Application : formules d'analyse vectorielle

$$5. \quad (\mathbf{grad} f)_i = \partial_i f \quad , \quad \text{div } \mathbf{a} = \partial_i a_i \quad , \quad (\mathbf{rot} \mathbf{a})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k \quad , \quad \Delta f = \partial_i \partial_i f$$

$$(\Delta \mathbf{a})_i = \partial_j \partial_j a_i \quad , \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) b_i = a_j \partial_j b_i$$

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, on enlèvera l'indice i sur les vecteurs, de telle sorte qu'on écrira $a_i = \mathbf{a}$.

6. Commençons par noter que la contraction d'un tenseur symétrique $S_{ij} = S_{ji}$ avec un tenseur antisymétrique $A_{ij} = -A_{ji}$ donne nécessairement zéro.

$$\text{En effet,} \quad S_{ij} A_{ij} = -S_{ji} A_{ji} = -S_{ij} A_{ij} \quad \Rightarrow \quad 2S_{ij} A_{ij} = 0$$

La deuxième égalité correspond à un changement de nom des indices ($i \longleftrightarrow j$).

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f = 0}$$

car on contracte ϵ_{ijk} , qui est antisymétrique sur jk avec $\partial_j \partial_k$, qui est symétrique sur jk .

$$\text{De même} \quad \boxed{\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j a_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j a_k = 0}$$

$$7. \quad \text{div}(f \mathbf{a}) = \partial_i (f a_i) = a_i \partial_i f + f \partial_i a_i$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\text{div}(f \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} f + f \text{div } \mathbf{a}}$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} a_j b_k) = \epsilon_{ijk} a_j \partial_i b_k + \epsilon_{ijk} b_k \partial_i a_j = a_j \epsilon_{jki} \partial_i b_k + b_k \epsilon_{kij} \partial_i a_j$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a}}$$

$$8. \quad \mathbf{rot}(f \mathbf{a}) = \epsilon_{ijk} \partial_j (f a_k) = \epsilon_{ijk} f \partial_j a_k + \epsilon_{ijk} a_k \partial_j f$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\mathbf{rot}(f \mathbf{a}) = f \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{grad} f \times \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} a_l b_m) = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j (a_l b_m) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (b_m \partial_j a_l + a_l \partial_j b_m)$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{div } \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div } \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l a_m) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l a_m$$

$$\text{C'est-à-dire} \quad \boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{a}) = \mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}}$$

$$9. \quad \mathbf{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \partial_i (a_j b_j) = a_j \partial_i b_j + b_j \partial_i a_j$$

$$\text{Or} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} \partial_l b_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j \partial_l b_m = a_j \partial_i b_j - a_j \partial_j b_i$$

$$\text{De même} \quad \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} = b_j \partial_i a_j - b_j \partial_j a_i$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\mathbf{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b}}$$

Autres systèmes de coordonnées

Coordonnées sphériques

10. On a $x^1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x^3 = r \cos \theta$

On part de la conservation de l'invariant

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Après quelques calculs simples, on voit que

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Donc

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

AUTRE MÉTHODE : on pourrait également partir de la loi de transformation du tenseur η_{ij} :

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \eta_{kl}$$

Coordonnées cylindriques

11. On a $x^1 = r \cos \theta$, $x^2 = r \sin \theta$, $x^3 = z$

Cette fois, l'invariant s'écrit $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$

Donc

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. On paramètre la courbe par $r(\theta) = r_0$ et $z(\theta) = \frac{a}{2\pi} \theta$ pour θ allant de 0 à 2π . La longueur L de la courbe s'écrit

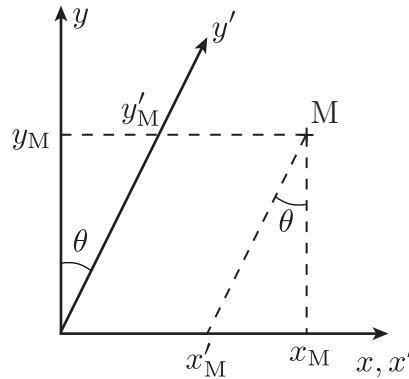
$$L = \int ds = \int \sqrt{dx^i dx'^j g'_{ij}} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_0^2 d\theta^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} d\theta^2} = \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Donc

$$L = \sqrt{a^2 + (2\pi r_0)^2}$$

Notons qu'on peut retrouver ce résultat simple en déroulant le cylindre et en utilisant le théorème de Pythagore.

Coordonnées non orthogonales



13. Les relations géométriques permettent d'écrire

$$y'_M = \frac{y_M}{\cos \theta} \quad , \quad x_M - x'_M = y_M \tan \theta$$

Donc

$$x' = x - y \tan \theta \quad , \quad y' = \frac{y}{\cos \theta}$$

14. En renversant les équations précédentes, on a

$$x = x' + y' \sin \theta \quad , \quad y = y' \cos \theta \quad , \quad z = z'$$

Donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx' + dy' \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta dy'^2 + dz'^2$

Ce qui donne

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Raisonnons sur notre point M :

Par définition, $(x'_1)_M = g'_{1\mu} x'^\mu_M = g'_{11} x'^1_M + g'_{12} x'^2_M = x'^1_M + \tan^2 \theta y'_M$

C'est-à-dire

$$(x'_1)_M = x^1_M \equiv x_M$$

Ainsi, la composante covariante x'_1 peut s'assimiler à la projection normale de M sur l'axe des x , alors que la projection selon y' donne la composante contravariante.

REMARQUE : on peut aussi le voir de la façon suivante

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) A^\nu = \vec{e}_\mu \cdot (\vec{e}_\nu A^\nu) = \vec{e}_\mu \cdot \vec{A}$$

Donc A^μ sont les « vraies » composantes tandis que A_μ sont des projections.

Exercice 2 : Espace Minkowskien

1. $\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu}$

On voit qu'il apparaît le produit matriciel, qui fait bien la matrice identité. On note δ^ν_μ les composante de cette matrice. De même,

$$\eta^\nu_\mu = \eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \delta^\nu_\mu$$

2. Partons de

$$T_{\mu}^{\rho\sigma\ldots} \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\nu\rho\sigma\ldots}$$

Et contractons à gauche et à droite par $\eta^{\alpha\mu}$, ce qui donne

$$\eta^{\alpha\mu} T_{\mu}^{\rho\sigma\ldots} = \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\nu} T^{\nu\rho\sigma\ldots} = \delta_{\nu}^{\alpha} T^{\nu\rho\sigma\ldots} = T^{\alpha\rho\sigma\ldots}$$

Ainsi,

$$\boxed{T^{\alpha\rho\sigma\ldots} = \eta^{\alpha\mu} T_{\mu}^{\rho\sigma\ldots}}$$

3.

$$\boxed{A_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} A^{\nu} = (A^0, -\mathbf{A})}$$

$$\boxed{\partial_{\mu} A^{\mu} \equiv \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A}}$$

$$\partial^{\mu} A_{\mu} \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\nu} (\eta^{\mu\nu} A_{\mu})$$

Or,

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu} = \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\rho} A^{\rho} = \delta_{\rho}^{\nu} A^{\rho} = A^{\nu}$$

d'après la question précédente.

Donc

$$\boxed{\partial^{\mu} A_{\mu} = \partial_{\nu} A^{\nu}}$$

On écrit souvent $\partial_{\mu} = (\partial_0, \nabla)$ et $\partial^{\mu} = (\partial_0, -\nabla)$

4. En relativité restreinte, un objet est un tenseur si il se transforme comme il se doit sous les transformations de Lorentz. Si on note x' et x deux référentiels inertiels et

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

la matrice des transformations de Lorentz, alors par définition

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Si deux des indices μ, ν, ρ, σ sont égaux, on voit que $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. D'autre part, $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$ a les mêmes symétries que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. On doit donc avoir

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Pour déterminer la constante de proportionnalité, il suffit de considérer le cas $(\mu\nu\rho\sigma) = (0123)$, ce qui donne

$$\epsilon'^{0123} = \Lambda^0_{\alpha} \Lambda^1_{\beta} \Lambda^2_{\gamma} \Lambda^3_{\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \text{Det} \Lambda$$

Pour une transformation de Lorentz, $\text{Det} \Lambda = 1$, donc

$$\boxed{\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}$$

Ainsi, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est bien un tenseur (de la relativité restreinte) dont les composantes sont invariantes de Lorentz.

À NOTER : c'est le seul tenseur, avec le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ et le tenseur nul, à posséder des composantes indépendantes du système de coordonnées. En relativité générale, ce ne sera plus un tenseur (mais une densité tensorielle).

5. Les composantes covariantes $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ s'écrivent

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

De la même façon que précédemment, la constante est égale à $\text{Det } \eta = -1$, donc

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}$$

Correction du TD0

1. La définition du temps propre permet d'écrire

$$d\tau^2 = dt^2 \left(g_{00} + 2g_{0i} \frac{dx^i}{cdt} + g_{ij} \frac{dx^i}{cdt} \frac{dx^j}{cdt} \right)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 + h_{00} + 2h_{0i} \frac{dx^i}{cdt} + (\eta_{ij} + h_{ij}) \frac{dx^i}{cdt} \frac{dx^j}{cdt} \right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} h_{00} + h_{0i} \frac{V^i}{c} + \frac{\eta_{ij} V^i V^j}{2c^2}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{d\tau}{dt} \simeq 1 + \frac{1}{2} h_{00} + h_{0i} \beta^i - \frac{1}{2} \beta^2}$$

Le dernier terme est l'effet de dilatation du temps de la relativité restreinte (effet purement inertiel), tandis que les deux termes du milieu sont les corrections gravitationnelles à apporter. Le terme h_{00} est le terme de redshift habituel (effet purement gravitationnel). Enfin, le troisième terme est un effet de type Coriolis car proportionnel à la vitesse (couplage gravito-inertiel).

2. L'équation géodésique s'écrit :

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu v^\rho v^\sigma = 0 \quad , \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

On a $v^0 = c \frac{dt}{d\tau} \simeq c \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} + h_{0i} \beta^i + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \Rightarrow \frac{v^0}{c} = 1 + \mathcal{O}(h)$

et $v^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{v^0}{c} \frac{dx^i}{dt}$

On regarde la composante spatiale de l'équation géodésique (en $\mu = i$) :

$$\frac{v^0}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{v^0}{c} \frac{dx^i}{dt} \right] + \Gamma_{00}^i (v^0)^2 + 2\Gamma_{0j}^i \frac{(v^0)^2}{c} \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^i \left(\frac{v^0}{c} \right)^2 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

Les Christoffel sont d'ordre $\mathcal{O}(h)$. Ainsi, le dernier terme du membre de gauche est d'ordre $\mathcal{O}(h\beta^2)$, donc on le néglige. En négligeant par ailleurs les termes d'ordre $\mathcal{O}\left(\beta \frac{dv^0}{dt}\right) = \mathcal{O}(h\beta^2)$, il reste

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \left(\frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) = 0}$$

3. Les symboles de Christoffel s'écrivent

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = g^{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\sigma\rho} \simeq \eta^{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\sigma\rho}$$

Donc $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{\rho 0} - \partial_\rho h_{00}) = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00}$

Et $\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_0 h_{j\rho} + \partial_j h_{\rho 0} - \partial_\rho h_{0j}) = \frac{1}{2} \eta^{ik} (\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})$

On a ainsi l'équation Newtonienne suivante :

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = m \eta^{ij} \partial_j V - m \eta^{ik} \Omega_{jk} \frac{dx^j}{dt}$$

Avec

$$\boxed{V = \frac{1}{2} c^2 h_{00} \quad , \quad \Omega_{jk} = c(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})}$$

Gravitation Newtonienne

4. Si $h_{0i} = 0$, on reconnaît dans le membre de droite de l'équation précédente $-m \overrightarrow{\text{grad}} V$, donc V doit être égal au potentiel gravitationnel Newtonien $V(r) = -GM/r$, d'où

$$h_{00} = -\frac{2GM}{rc^2}$$

5. AN pour $r = 1 \text{ ua}$

$$h_{00} \simeq 2 \times 10^{-8} \ll 1$$

La différence avec la métrique de Schwarzschild provient du fait que seul le terme en g_{00} est modifié par rapport à Minkowski. En fait, cette métrique n'est pas une solution des équations d'Einstein, il faut également modifier la partie spatiale, comme dans la solution de Schwarzschild. Cependant, dans la limite non relativiste considérée ici, la partie spatiale joue un rôle négligeable.

6. On a $dt_1 = d\tau_1 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00}(r_1) \right)$

Et $dt_2 = d\tau_2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00}(r_2) \right)$

Puisque la métrique est stationnaire, les intervalles de temps coordonnées à l'émission et à la réception sont égaux, $dt_1 = dt_2$ (voir le cours si vous n'êtes pas convaincu).

Ainsi $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{1 - \frac{1}{2} h_{00}(r_1)}{1 - \frac{1}{2} h_{00}(r_2)}$

D'où

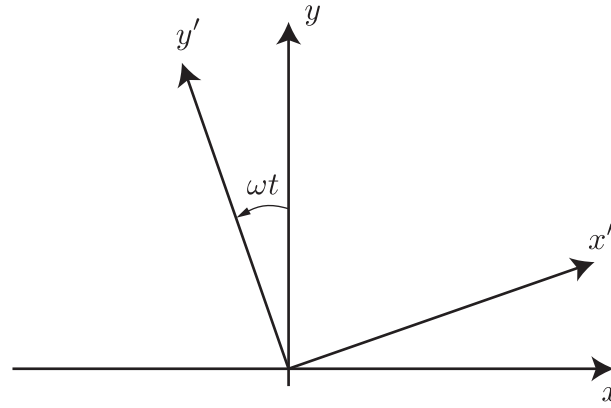
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2} \frac{h}{R}$$

On retrouve un résultat classique de votre cours de RG. Noter que cet effet est crucial dans le GPS. Par ailleurs, il sera testé par le projet ACES sur la station spatiale au niveau de 3×10^{-6} aux alentours de 2015. Bien sûr, dans ce cas le calcul relativiste complet, tenant compte de la vitesse de la station spatiale, doit être fait dans ce cas.

Effets inertiels

7. Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y = y' \cos(\omega t) + x' \sin(\omega t) \\ z = z' \end{cases}$$



Donc
$$\begin{cases} cdt = cdt' \\ dx = dx' \cos(\omega t) - dy' \sin(\omega t) - \omega dt(x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)) \\ dy = dy' \cos(\omega t) + dx' \sin(\omega t) - \omega dt(y' \sin(\omega t) - x' \cos(\omega t)) \\ dz = dz' \end{cases}$$

Ainsi,
$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 \left(1 - \frac{\omega^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right) - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2dx'dt' \omega y' - 2dy'dt' \omega x'$$

Le calcul est un peu laborieux, mais on peut le faire réaliser par un logiciel de calcul formel.

D'où
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{c^2} & \frac{\omega y}{c} & -\frac{\omega x}{c} & 0 \\ \frac{\omega y}{c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega x}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. On a immédiatement (utilisez également un logiciel de calcul formel) :

$$V = \frac{1}{2} c^2 h_{00} = -\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad , \quad \Omega_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega & 0 \\ -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Il vient sans difficulté que (utilisez également un logiciel de calcul formel) :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

On retrouve bien les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Autrement dit, la description métrique que nous faisons permet de décrire dans le même cadre les effets gravitationnels et inertiels. Dit autrement, les effets inertiels sont en fait indiscernables des effets gravitationnels.

10. POUR ALLER PLUS LOIN : on commence par un raisonnement classique, pour aller vers une description relativiste, et enfin une description incluant les effets gravitationnels. On va donc faire la procédure de covariantisation qui permet de passer (grâce au principe d'équivalence), des lois connues en physique classique à celles qui s'applique en RG.

★ Dans un référentiel Galiléen où le point d'attache du pendule est fixe, le vecteur unitaire \mathbf{n} perpendiculaire au plan d'oscillation vérifie l'équation

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{n}^2 = 1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Ce sont des expressions covariantes au sens de la relativité Galiléenne (c'est-à-dire prennent la même forme dans tous les référentiels Galiléens, s'ils ne se déplacent pas trop vite les uns par rapport aux autres!).

Physiquement, on est en train de dire qu'aucun couple n'agit sur ce plan pour le faire tourner (plus précisément, la projection du moment des forces agissant sur la masse du pendule n'a pas de composante selon l'axe défini par le champ gravitationnel).

- ★ La généralisation de cette équation en relativité restreinte est faite ainsi : on considère un référentiel localement Minkowskien (c'est-à-dire $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, « généralisation » du référentiel Galiléen) dans lequel le point d'attache du pendule se déplace à la vitesse v^μ . On appelle τ le temps propre d'un observateur au repos avec le point d'attache. Alors

$$v^\nu \partial_\nu n^\mu = \frac{dn^\mu}{d\tau} = 0 \quad , \quad n^2 = -1 = \eta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = (n^0)^2 - \mathbf{n}^2$$

Ce sont des expressions covariantes au sens de la relativité restreinte (valable pour tout référentiel Galiléens, quelque soit leur vitesse de déplacement les uns par rapport aux autres).

- ★ Le dernier pas à franchir est de tenir compte de la gravitation. Pour cela, on considère un référentiel localement inertiel (c'est-à-dire $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0$). Dans ce référentiel, on a les lois de la relativité restreinte d'après le principe d'équivalence (cf ci-dessus). Le principe de transposition pour obtenir la loi généralisable dans n'importe quel référentiel consiste ensuite à remplacer $\eta_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\nu}$ et ∂_μ par D_μ , et donc

$$v^\nu D_\nu n^\mu = \frac{Dn^\mu}{D\tau} = 0 \quad , \quad n^2 = -1 = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$$

Ainsi, le plan d'oscillation du pendule est bien transporté parallèlement⁴.

Cas d'un espace plat [en toute rigueur le pendule ne peut pas osciller dans ce cas là] – On prend un référentiel dans lequel le point d'attache est au repos, donc $v^\mu = c(1, \mathbf{0})$. La métrique est celle du référentiel tournant de la question 7, avec les Christoffels de la question 3.

Ainsi, pour $\mu = i$, $\frac{\partial n^i}{\partial t} + \Gamma_{\rho\nu}^i n^\rho v^\nu = 0 = \frac{\partial n^i}{\partial t} + c\Gamma_{00}^i n^0 + c\Gamma_{0j}^i n^j$

La condition de normalisation $n^2 = -1$ montre que n^0 est d'ordre un en $\beta = r\omega/c$, donc le deuxième terme du membre de droite est d'ordre $O(\beta^2)$, c'est-à-dire négligeable. On a finalement à l'ordre 1,

$$\frac{\partial n^i}{\partial t} + c\Gamma_{0j}^i n^j = 0$$

On utilise ensuite le fait que h_{0i} peut s'écrire

$$h_{0i} = \frac{(\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega})^i}{c} = \epsilon_{ijk} \frac{x^j \omega^k}{c}$$

4. Vous trouverez d'autres explications sur le pendule de Foucault et le transport parallèle sur le papier J.-P. Perez and O. Pujol, Eur. J. Phys. **36** (2015) 015019

et donc
$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} (\partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}) = -\epsilon_{ijl} \frac{\omega^l}{c}$$

Et finalement
$$\boxed{\frac{\partial n^i}{\partial t} = \epsilon_{ijl} n^j \omega^l \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\omega}}$$

On retrouve la precession du plan d'oscillation autour de l'axe porté par le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$.

La situation étudiée ici est celle d'un pendule observé dans un référentiel tournant, en l'absence de gravitation (le tenseur de Riemann est nul). Elle ne se transpose pas aisément au cas du réel pendule de Foucault ⁵.

5. Pour cela, il faudrait traiter le même problème dans la métrique de Kerr, qui tient compte de la courbure créée par la Terre et de la courbure créée par la rotation de la Terre. On montre qu'à l'ordre le plus bas, on a

$$ds^2 = ds_{\text{Schwarzschild}}^2 + \frac{4GJ}{rc^2} \sin^2 \theta d\varphi dt$$

où J est le moment cinétique de la Terre (voir par exemple dans Hobson chap 13.20). Il faut ensuite écrire le transport parallèle le long du vecteur v^μ qui tourne avec la Terre, c'est-à-dire tel que $v^\varphi = \Omega$, $v^r = v^\theta = 0$. On montre [après quelques calculs pénibles] qu'à l'ordre le plus bas, n^φ et n^θ vérifient

$$\frac{ds^\varphi}{d\tau} + \frac{\Omega}{\tan \theta} s^\theta = 0 \quad , \quad \frac{ds^\theta}{d\tau} - \Omega \sin \theta \cos \theta s^\varphi = 0$$

Ainsi, n^φ et n^θ satisfont tous deux une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\Omega \cos \theta$, exactement comme dans le cas de l'étude du transport parallèle d'un vecteur unitaire sur la sphère (cf TD1). L'équation sur s^r permet de rendre compte du tilt du plan d'oscillation par rapport à la verticale (effet d'ordre supérieur).

Correction du TD1

Exercice 1 : Équation géodésique et principe de moindre action

Quelques remarques avant de commencer l'exercice :

- ★ L'approche Lagrangienne est importante dans la formulation moderne des théories physiques. Si vous n'avez jamais rencontré de Lagrangien, je vous invite à consulter un livre de mécanique analytique⁶.
- ★ L'étudiant attentif aura noté que si x^μ et \dot{x}^μ sont les solutions physiques réelles du mouvement, alors le Lagrangien vaut $L = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}c^2$! L'astuce de l'approche Lagrangienne, c'est de ne pas faire cette hypothèse a priori, et de considérer x^μ et \dot{x}^μ comme des variables indépendantes. C'est uniquement après avoir minimisé l'action que l'on montre finalement que $v^2 = c^2$. Ainsi, le résultat de cet exercice sera finalement que **l'équation géodésique est un chemin qui minimise le temps propre $\frac{c^2}{2} \int d\tau$, donc l'intervalle $\int ds = c \int d\tau$.**
- ★ Pour rebondir sur ce qui vient d'être dit, on aurait pu avoir une autre approche, davantage en analogie avec le principe de Fermat, qui consiste à minimiser directement le temps propre de la particule, à savoir minimiser

$$\int d\tau = \frac{1}{c} \int ds = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt$$

où t est ici le temps coordonnée (c'est-à-dire un paramètre non physique mais qui a la propriété d'être une fonction monotone lors du mouvement et peut ainsi être utilisé comme un paramètre de la trajectoire). On aurait obtenu l'équation géodésique en fonction du temps coordonnée, que l'on peut ensuite re-exprimer en équation géodésique en temps propre, qui donnerait la même équation que celle demandée à la question 2. Faites l'exercice pour vous en convaincre.

1. On a
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \delta_\rho^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \delta_\rho^\nu$$

Donc
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = g_{\rho\nu}(x) \dot{x}^\nu = g_{\rho\nu} v^\nu = v_\rho$$

Puis
$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) v^\mu v^\nu$$

Ainsi, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\boxed{\frac{dv_\rho}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) v^\mu v^\nu}$$

Cette équation est très pratique pour trouver rapidement des quantités conservées à partir de principes de symétrie (comme on le verra par la suite). En effet, si $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas de x^α , alors

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0$$

6. Par exemple H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (Cambridge, MA, 1950).

Ainsi, le moment conjugué $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu = \dot{x}_\alpha \equiv v_\alpha$ se conserve. Les composantes covariantes de la vitesse sont les moments conjugués des positions.

2. Partons des équations de Lagrange écrites en fonction de \dot{x}^μ ,

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu) - \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

$$g_{\rho\nu} \ddot{x}^\nu + \dot{x}^\nu \frac{dg_{\rho\nu}}{d\tau} - \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

Or,
$$\frac{dg_{\rho\nu}}{d\tau} = \dot{x}^\mu \partial_\mu g_{\rho\nu}$$

Et on peut écrire
$$\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \partial_\mu g_{\rho\nu} = \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu})$$

d'où
$$g_{\rho\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

En contractant ensuite par $g^{\rho\alpha}$, on obtient finalement

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

c'est-à-dire l'équation géodésique vue en cours. Ainsi, on retrouve que la géodésique en espace courbe peut se retrouver à partir d'un principe variationnel très simple.

Exercice 2 : Géodésique et transport parallèle sur une sphère

1. PREMIÈRE MÉTHODE : on se place dans l'espace 3D plus large qui contient la sphère, avec ses coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) telles que

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

On part de la conservation de l'invariant ds^2 , qui dans les coordonnées cartésiennes x^i s'écrit

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Après quelques calculs simples qui consistent à différencier les expressions de x^i , on trouve que

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

La sphère considérée est telle que $dr = 0$ et $r = a$, donc

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

DEUXIÈME MÉTHODE : on part de la loi de transformation du tenseur métrique dans l'espace à 3 dimensions :

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^j} \eta_{kl}$$

où on a noté $X^1 = r$, $X^2 = \theta$ et $X^3 = \varphi$. On obtient facilement après quelques calculs

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Le résultat pour la métrique sur la sphère peut être obtenu en se restreignant aux composantes X^2 et X^3 et en prenant $r = a$.

TROISIÈME MÉTHODE : on utilise la définition extrinsèque de la métrique

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \quad \text{avec} \quad \vec{e}_\mu = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x^\mu}$$

Puisque $\vec{OM} = a \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + a \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + a \cos \theta \vec{e}_z$

on en déduit
$$\begin{cases} \vec{e}_\theta = a \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + a \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - a \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -a \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_x + a \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases}$$

ie
$$\boxed{g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = a^2 \quad , \quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = a^2 \sin^2 \theta}$$

QUESTION SUBSIDIAIRE – si on avait choisi un système de coordonnées cylindrique, l'intervalle s'écrit

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

En utilisant la contrainte $r^2 + z^2 = a^2$, on tire

$$2rdr + 2zdz = 0 \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{r}{z} dr \quad \Rightarrow \quad dz^2 = \frac{r^2}{a^2 - r^2} dr^2$$

Et donc
$$\boxed{ds^2 = \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 = a^2 \left(\frac{dr'^2}{1 - r'^2} + r'^2 d\theta^2 \right)}$$

Il s'agit de la métrique RW (Robertson Walker) à 2D.

2. D'après l'exercice précédent, puisque g_{ab} ne dépend pas explicitement de φ , le moment conjugué v_φ doit se conserver, à savoir $\frac{dv_\varphi}{d\tau} = 0$.

Or
$$v_\varphi = g_{\varphi b} v^b = g_{\varphi\varphi} v^\varphi = a^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau}$$

On en déduit la conservation de $\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau}$ le long d'une géodésique.

3. On peut sans perte de généralité redéfinir les axes de telle sorte que le point de départ du chemin corresponde à $\theta = 0$ (il suffit de mettre le point de départ au pôle nord). On en déduit que $v_\varphi = 0$ au début, donc on doit avoir

$$\sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

Lorsque $\theta \neq 0$, cela impose $\boxed{\varphi = \text{const}}$, donc la géodésique est un méridien (un grand cercle de longitude constante).

4. L'équation de transport parallèle le long de t^a s'écrit :

$$\boxed{\frac{D\lambda^b}{Ds} \equiv t^a D_a \lambda^b = t^a \partial_a \lambda^b + \Gamma_{ac}^b t^a \lambda^c = 0 \quad \text{avec} \quad t^a \partial_a \lambda^b = \frac{d\lambda^b}{ds}}$$

5. On a immédiatement

$$t^\theta = 0 \quad \text{et} \quad t^\varphi = 1$$

6. On a besoin pour cette question de l'expression des symboles de christoffel

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

où la métrique inverse g^{ab} s'écrit (il suffit d'écrire que par définition $g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c$)

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

On montre sans trop de difficulté que les seules composantes non nulles des symboles de Christoffel sont (essayer de vous en convaincre !)

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad , \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

À l'aide de ces expressions, de l'équation géodésique et des composantes de t^a de la question précédente, on montre que

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^\theta = \sin \theta_0 \cos \theta_0 \lambda^\varphi \\ \dot{\lambda}^\varphi = -\cotan \theta_0 \lambda^\theta \end{cases}$$

7. Par définition,

$$\cos \beta \equiv \frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2} \sqrt{\mathbf{t}^2}}$$

$$\text{Or, } \boldsymbol{\lambda}^2 = 1 \quad , \quad \mathbf{t}^2 = g_{ab} t^a t^b = a^2 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{t} \equiv g_{ab} \lambda^a t^b = a^2 \sin^2 \theta \lambda^\varphi$$

Donc

$$\lambda^\varphi = \frac{\cos \beta}{a \sin \theta_0}$$

On a supposé $0 < \theta_0 < \pi$. En utilisant la normalisation de $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\boldsymbol{\lambda}^2 = g_{ab} \lambda^a \lambda^b = a^2 (\lambda^\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta (\lambda^\varphi)^2 = 1$$

on en déduit

$$\lambda^\theta = \frac{\sin \beta}{a}$$

(on a choisit $\beta > 0$).

8. Il vient ensuite, grâce par exemple à l'équation sur λ^θ obtenue à la question 6.,

$$\dot{\beta} = \cos \theta_0 = \frac{d\beta}{d\varphi}$$

REMARQUE : notons à ce stade que l'on aurait pu calculer directement $\boldsymbol{\lambda}(\varphi)$ car le système d'équation différentielle se ramène à deux équations de type oscillateur harmonique $\ddot{\lambda}^a + \cos^2 \theta_0 \lambda^a = 0$, avec les conditions initiales de la question précédente, de telle sorte que

$$\lambda^\theta(\varphi) = \frac{\sin(\beta_0 + \varphi \cos \theta)}{a} \quad , \quad \lambda^\varphi(\varphi) = \frac{\cos(\beta_0 + \varphi \cos \theta)}{a \sin \theta_0}$$

Au passage, on aurait vérifié que la norme de $\boldsymbol{\lambda}$ reste bien égale à 1 (comme il se doit).

Correction du TD2

- On utilise le principe d'équivalence : localement en un point P où se situe la particule, l'espace est plat, donc on peut trouver un système de coordonnées localement Minkowskien dans lequel les composantes u^μ sont celles de la relativité restreinte, c'est-à-dire $v^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, où \mathbf{v} est la vitesse (spatiale) dans ce référentiel. On calcule alors simplement que $\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = c^2$. Puisque la norme est un scalaire, elle est invariante par changement de coordonnées, donc $v^2 = c^2$ tout le temps.

Plus rapidement, on peut partir de $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Donc

$$v^2 \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$$

- La métrique ne dépend pas explicitement de $x^0 = ct$ et de φ , donc v_0 et v_φ se conservent le long du mouvement. Ensuite, il suffit d'écrire que $v_0 = g_{0\rho} v^\rho = g_{00} v^0$ et $v_\varphi = g_{\varphi\rho} v^\rho = g_{\varphi\varphi} v^\varphi$ pour obtenir le résultat demandé, à savoir que les quantités suivantes se conservent :

$$\begin{aligned} E &\equiv mc^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \frac{dt}{d\tau} = emc^2 \\ L &\equiv mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = m\ell \end{aligned}$$

On voit que $E = p_0 c = g_{00} p^0 c$ est une généralisation de l'équation valable en relativité restreinte. La conservation de cette quantité provient de l'invariance de la métrique par rapport à x^0 . D'autre part, $p^2 = m^2 v^2 = m^2 c^2$. Dans le cas d'un mouvement non relativiste, on a $|\mathbf{p}| \ll p^0$, donc

$$p^2 \simeq g_{00} (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

Ainsi,

$$p^0 \simeq mc + \frac{\mathbf{p}^2}{2mc} + \frac{GMm}{rc}$$

Donc

$$E \simeq mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r} = mc^2 + E_M$$

Ainsi, on peut interpréter E comme l'énergie au repos plus l'énergie mécanique Newtonienne E_M . De son côté, L se réduit au moment cinétique projeté sur l'axe (Oz) dans la limite non relativiste.

- Par un simple choix de système de coordonnées, on peut s'arranger pour qu'à une position P donnée de la particule, $\varphi(P) = 0$ et $\frac{d\varphi}{d\tau}(P) = 0$. Donc $\ell = 0$ et le reste pour l'ensemble de la trajectoire, donc $v^\varphi = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$, c'est-à-dire que le mouvement est plan. En tournant les axes de $\pi/2$ pour que le mouvement soit dans le plan équatorial, on peut tout à fait se placer dans le cas où c'est désormais v^θ qui est nul.
- On part de :

$$(v^0)^2 g_{00} + (v^r)^2 g_{rr} + (v^\theta)^2 g_{\theta\theta} + (v^\varphi)^2 g_{\varphi\varphi} = c^2$$

Puis on utilise $v^0 = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mcg_{00}}$, $v^r = \frac{dr}{d\tau}$, $v^\theta = 0$ et $v^\varphi = \frac{\ell}{r^2}$ (car $\theta = \pi/2$). On en déduit sans soucis que :

$$\frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{m\ell^2}{2r^2} - \frac{GMm\ell^2}{r^3 c^2}$$

Donc en identifiant, on a :

$$\mathcal{E} \equiv \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} = \frac{e^2 - 1}{2} mc^2$$

Et

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{m\ell^2}{2r^2} - \frac{GMm\ell^2}{r^3 c^2} = V_{\text{Newt}}(r) - \frac{GMm\ell^2}{r^3 c^2}$$

5. Les deux premiers termes sont ceux de Newton. Le terme nouveau est celui en $-1/r^3$, il aura des conséquences qualitatives importantes.

Dans la limite non relativiste, on a $E \simeq mc^2 + E_M$ et donc $\mathcal{E} \simeq E_M$. Ainsi, \mathcal{E} se réduit à l'énergie mécanique dans la limite des mouvements non relativistes.

REMARQUE : Un Soleil non parfaitement symétrique produit classiquement un terme également en $1/r^3$, avec

$$V_{\text{Newt}}(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{J_2 GMR^2}{2r^3}$$

6. En $+\infty$, le potentiel se comporte comme $-1/r$, donc tend vers zéro par valeur négative. En zéro, le terme dominant est celui en $-1/r^3$, donc tend vers $-\infty$, contrairement au cas Newtonien qui tend vers $+\infty$ en zéro. Ainsi, l'existence d'un minimum d'énergie n'est plus assuré, et en plus si il y a un minimum, il doit aussi y avoir un maximum. Pour savoir si ce minimum existe et ainsi tracer la fonction, on se pose la question du signe de $V_{\text{eff}}(r)$. Posons $\xi = \frac{\ell c}{GM}$ et $\varrho = \frac{rc^2}{GM}$ pour se ramener à une équation sans dimension.

$$V_{\text{eff}}(\varrho) = -mc^2 \frac{2\varrho^2 - \xi^2 \varrho + 2\xi^2}{2\varrho^3}$$

Le polynôme du numérateur n'a pas de zéro si $\xi < 4$, un seul zéro si $\xi = 4$ et deux zéros si $\xi > 4$ qui s'écrivent

$$\varrho_{\pm} = \frac{\xi^2}{4} \left(1 \pm \sqrt{\xi^2 - 4} \right)$$

$V_{\text{eff}}(\varrho)$ est positif entre ϱ_- et ϱ_+ .

Dans le système Solaire, on peut facilement se convaincre qu'on est dans la pratique toujours dans la situation $\xi \gg 4$. Dans cette situation, le potentiel effectif possède deux extrema, pour des rayons r_{\min} et r_{\max} tels que :

$$r_{\min / \max} = \frac{\ell^2}{2GM} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{GM}{\ell c} \right)^2} \right]$$

Ces deux solutions correspondent à des trajectoires circulaires, dont l'une est stable et l'autre instable. Les 4 trajectoires possibles sont donc (cf figure 1) :

- ★ Etat diffusif (état libre, non lié).
- ★ Trajectoire circulaire.
- ★ Plongeon (capture).
- ★ Trajectoire liée.

La trajectoire de type « plongeon » (ou capture) est nouvelle par rapport au cas Newtonien (ce qui donne éventuellement un sens à la phrase que l'on entend souvent en science fiction : « se faire happer par le champ gravitationnel »). En particulier, on voit que si on arrive avec suffisamment d'énergie, on se fait toujours capturer par le trou noir, indépendamment du moment cinétique initial (donc pour un moment cinétique donné, il y a une vitesse radiale initiale à partir de laquelle la trajectoire sera un plongeon dans le trou noir). Autre chose, si $\xi \leq 0$, les trajectoires qui viennent de l'infini se terminent toujours en plongeon dans le trou noir.

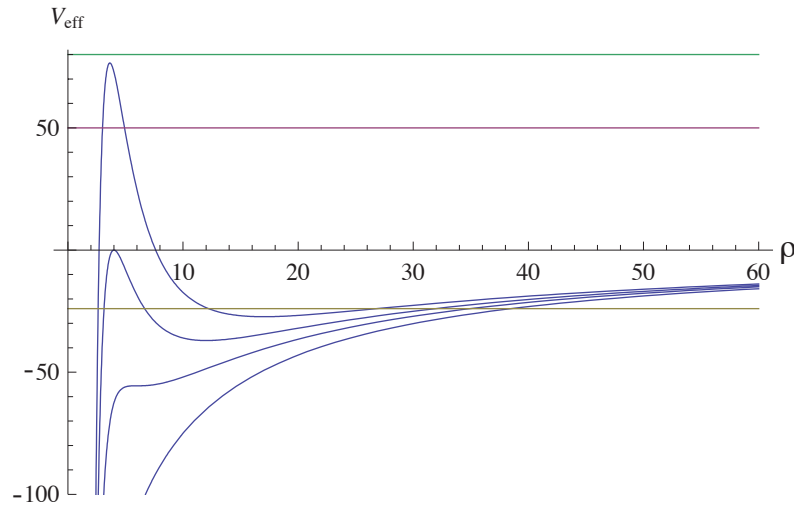


FIGURE 1 – Potentiel $V_{\text{eff}}(\rho)$. De bas en haut les valeurs de ξ valent : 2.2, $\sqrt{12}$, 4 et 4.5.

7. On a $r_{\min} = r_{\max} = r_{\text{ISCO}}$ quand $GM/(\ell c) = 1/\sqrt{12}$.

et

$$r_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2}$$

Dans le cas du Soleil, $r_{\text{ISCO}} \simeq 9 \text{ km} \ll R_{\odot}$. À noter, l'instrument GRAVITY du VLT a détecté en 2018 l'émission synchrotron infrarouge d'un « hot spot » de la zone d'accrétion orbitant autour du trou noir central de notre galaxie à une distance de 6 à 10 fois le rayon $m = GM/c^2$, qui vaut $6 \times 10^9 \text{ m}$, soit $5 \mu\text{as}$ vu depuis la Terre. C'est la chose la plus près que l'on ait vu de l'horizon d'un trou noir. Le « hot spot » se déplace à environ 30% de la vitesse de la lumière.

Notons également que si le trou noir est en rotation, alors le rayon ISCO est modifiée, avec l'apparition de deux rayons, dépendant de si on tourne dans le même sens que le trou noir ou dans le sens opposé.

Application : avance du périhélie de Mercure.

8. L'équation radiale permet d'écrire :

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2(\mathcal{E} - V_{\text{eff}})}{m}}$$

En utilisant

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

on en déduit
$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2 c} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2 c^2} \right) \right]^{-1/2}$$

9. Le changement de variable $u = 1/r$ donne :

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c^2}{\ell^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2GMu}{c^2} \right) \left(1 + \frac{u^2 \ell^2}{c^2} \right) \right]$$

En dérivant l'expression précédente, on arrive finalement à

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{3GM}{c^2} u^2 = \frac{GM}{\ell^2}$$

10. On cherche une orbite quasi-circulaire autour de u_0 , donc on écrit $u = u_0 + \chi$, avec $\chi \ll u_0$. On obtient à l'ordre le plus bas :

$$\chi'' + \left(1 - \frac{6GM}{c^2} u_0 \right) \chi = \frac{GM}{\ell^2} + \frac{3GM}{c^2} u_0^2 - u_0$$

Le second membre est nul car χ est de moyenne nulle (cette relation permet de trouver u_0). On a l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution s'écrit (en redéfinissant l'axe repérant l'angle φ au besoin) :

$$\chi(\varphi) = \chi_0 \cos(\gamma\varphi)$$

Avec

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{6GM}{c^2} u_0 \right)$$

On peut donc récrire la solution sous la forme demandé, à savoir

$$u(\varphi) = u_0 + \chi_0 \cos(\gamma\varphi) \quad \Rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\gamma\varphi)}$$

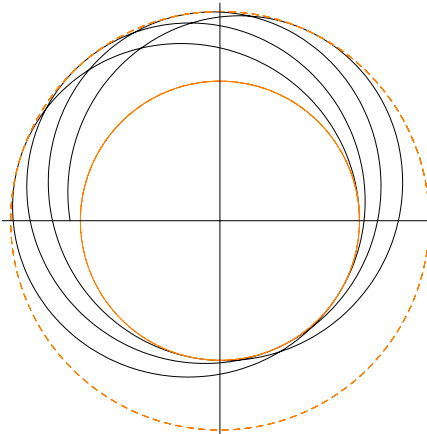
où $u_0 = \frac{1}{p}$, $\chi_0 = \frac{\varepsilon}{p}$ et

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{6GM}{pc^2}} \simeq 1 - \frac{3GM}{pc^2} = 1 - \frac{3GM}{a_p(1 + \varepsilon)c^2}$$

où on a utilisé le fait que $GM/(pc^2) \ll 1$. En effet, même au ras du Soleil, on a

$$\frac{GM_\odot}{R_\odot c^2} \simeq 10^{-6} \ll 1$$

11. La trajectoire ne se reboucle pas exactement car $\gamma \neq 1$, ce qui fait la différence avec le cas Newtonien où la solution liée est une ellipse. Voir figure ci-dessous.



12. Il faut faire un peu plus de 2π pour revenir au périhélie, plus précisément, on y revient lorsque :

$$\gamma(2\pi + \Delta\varphi) = 2\pi$$

Et donc

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a_p(1 + \varepsilon)c^2} \simeq 5 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

sur une période. On peut exprimer le résultat précédent en seconde d'arc par siècle :

$$\Delta\varphi = 43'' \text{ arc/siècle}$$

Le fait que la RG retrouve cet effet connu depuis Le Verrier en 1859 est le premier grand succès de la relativité générale naissante (le résultat date de 1915).

REMARQUE : On trouve aussi dans la littérature le résultat sous la forme :

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1 - \varepsilon^2)c^2}$$

où cette fois a est le demi grand axe (cf relation dans les coniques).

Correction du TD3

On rappelle la métrique de Schwarzschild (avec $m \equiv GM/c^2$, homogène à une longueur) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

Vous trouverez de plus amples détails dans les chapitres 9 et 11 du livre de Hobson et Hefstathiou.

1. On a montré au TD 2 que (en éliminant la masse de la particule, qui se simplifie partout)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

où
$$\mathcal{E} = \frac{e^2 - 1}{2} c^2 \quad , \quad e = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

et
$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{r^3 c^2}$$

Puisque l'on considère un mouvement radial, il n'y a pas de moment cinétique, $\ell = 0$.

Ainsi,
$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} = -\frac{mc^2}{r}$$

Et donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{mc^2}{r} \quad , \quad \mathcal{E} = \text{constante}$$

On pourrait penser qu'on est revenu en Newton. Ce n'est pas exactement le cas car d'une part la dérivée de r est prise par rapport au temps propre τ , et d'autre part r est une coordonnée, et non une distance propre.

2. On considère que la particule part sans vitesse initiale depuis l'infini, donc $\mathcal{E} = 0$, c'est-à-dire $e = 1$. On en tire

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (\iff e = 1) \quad (2)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \left(\frac{2m}{r} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Le quadrivecteur vitesse u^μ de la particule s'écrit donc

$$u^\mu = c \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, -\left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2}, 0, 0 \right]$$

On constate en particulier que la vitesse radiale de la particule tend vers c lorsque r s'approche de l'horizon.

3. Il suffit d'intégrer u^r ,

$$\frac{dr}{d\tau} = -c \left(\frac{2m}{r} \right)^{1/2} \Rightarrow \sqrt{r} dr = -c\sqrt{2m} d\tau$$

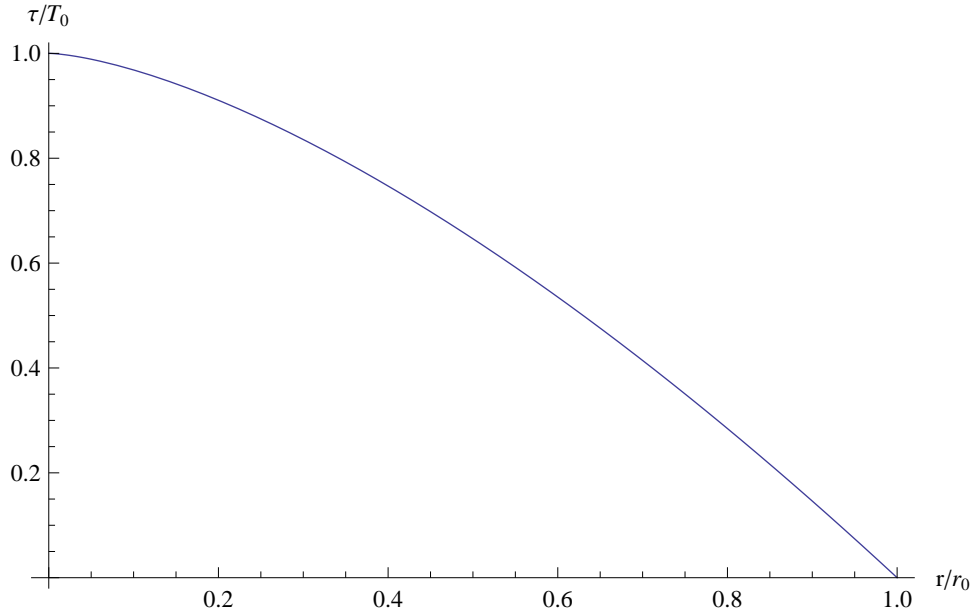
C'est-à-dire

$$\frac{2}{3} (r^{3/2} - r_0^{3/2}) = -c\sqrt{2m} (\tau - \tau_0)$$

On peut choisir $\tau_0 = 0$ pour fixer $r = r_0$ en $\tau = 0$. On voit en particulier que

$$\tau(r \rightarrow 2m) = \frac{4m}{3c} \left[\left(\frac{r_0}{2m} \right)^{3/2} - 1 \right] , \quad \tau(r \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}}{3c\sqrt{m}} r_0^{3/2} \equiv T_0$$

C'est-à-dire que la particule met un temps propre **fini** pour parvenir à l'horizon et également pour parvenir à la singularité centrale ($r = 0$). Voir la figure ci-dessous.



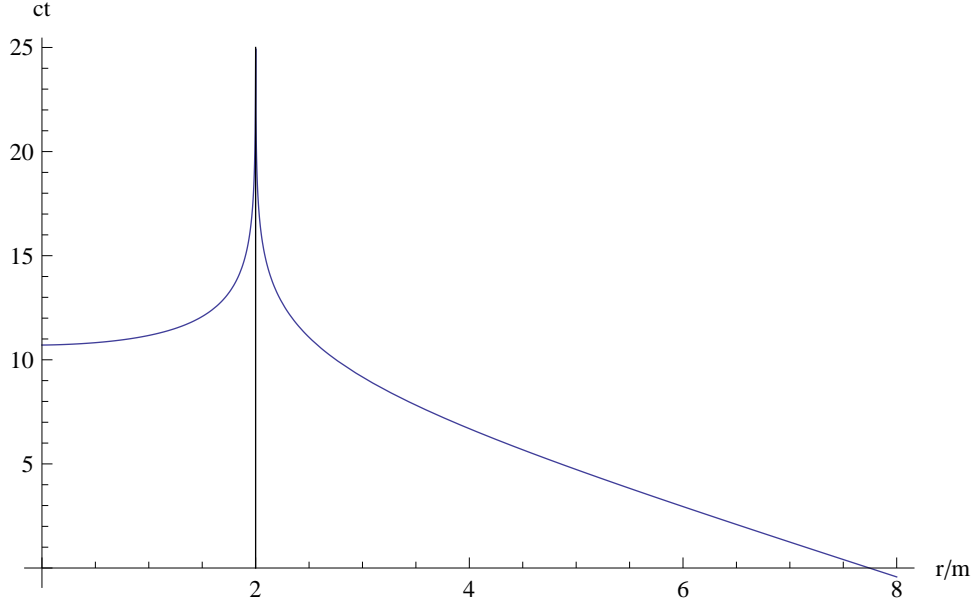
4. Il suffit de diviser les deux équations de la question 2 pour obtenir

$$\frac{dr}{dt} = -c\sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$$

dont la solution s'écrit (utiliser un logiciel de calcul formel pour y parvenir)

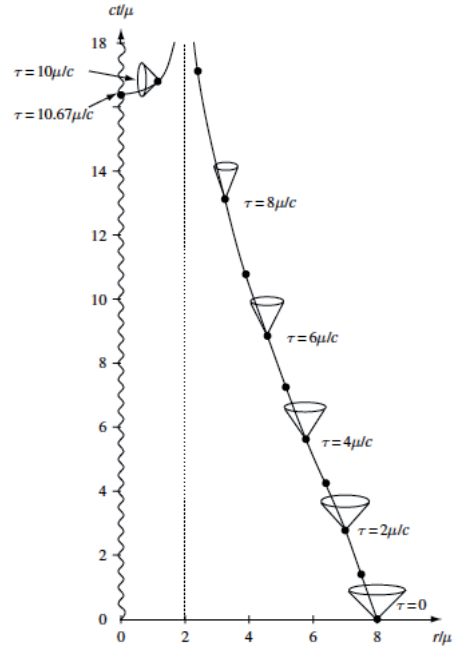
$$\begin{aligned} \frac{ct}{m} = & \frac{2}{3} \left[\left(\frac{r_0}{2m} \right)^{3/2} - \left(\frac{r}{2m} \right)^{3/2} \right] + 4 \left[\left(\frac{r_0}{2m} \right)^{1/2} - \left(\frac{r}{2m} \right)^{1/2} \right] \\ & + 2 \ln \left| \left(\frac{\sqrt{r/(2m)} + 1}{\sqrt{r/(2m)} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{r_0/(2m)} - 1}{\sqrt{r_0/(2m)} + 1} \right) \right| \end{aligned} \quad (4)$$

La figure ci-dessous représente l'évolution de ct avec r .



5. On constate cette fois que $t \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 2m$. En temps coordonné, la particule semble mettre un temps infini pour parvenir à l'horizon. Notons dès à présent que le temps coordonné correspond au temps propre d'une particule au repos loin du centre ($r \gg 2m$). On verra un peu plus loin qu'en effet un observateur au repos loin observe que la particule met un temps infini (pour lui!) pour rejoindre l'horizon.

La figure ci-contre représente la trajectoire d'une telle particule massive en chute radiale vers $r = 0$. Il y a clairement deux trajectoires disjointes. Pour $r > 2m$, la trajectoire tend vers le rayon de Schwarzschild $r_S = 2m$ pour $t \rightarrow \infty$. Une autre branche de cette trajectoire existe à l'intérieur de l'horizon, avec un temps coordonné qui diminue lorsque le temps propre τ de la particule augmente ($dt/d\tau < 0$ si $r < 2m$).



6. On part de $ds^2 = 0$, ce qui donne

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$$

7. On en déduit
$$\pm c dt = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = dr + \frac{2m}{r - 2m} dr$$

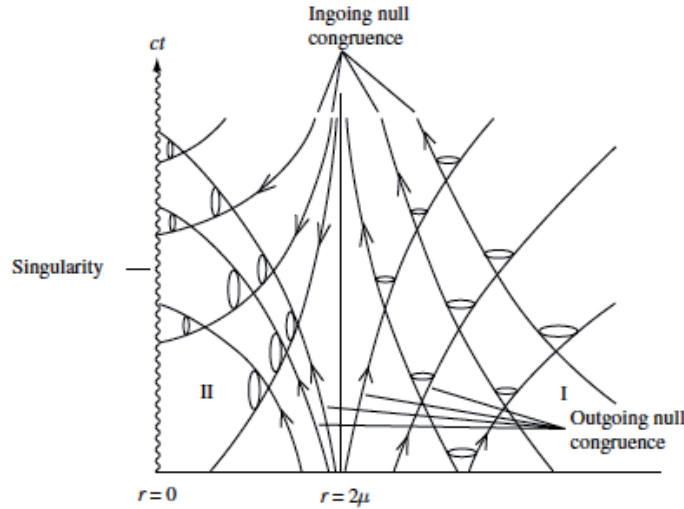
Et donc

$$r - r_0 + 2m \ln \left| \frac{r - 2m}{r_0 - 2m} \right| = \pm c(t - t_0)$$

C'est-à-dire

$$\mp ct + r + 2m \ln |r - 2m| = \text{constante}$$

Le signe $-$ est pour une trajectoire radiale sortante tandis que le signe $+$ est pour une trajectoire radiale plongeante. La figure ci-dessous représente les lignes d'univers des photons, c'est-à-dire les cônes de lumière.



On constate que ceux-ci sont déformés au voisinage de l'horizon. En particulier, la pente de ces cônes tend vers l'infini, ce qui permet de comprendre pourquoi un observateur lointain met un temps infini à recevoir un signal émis par la particule en chute (cf plus loin pour une description covariante).

Par ailleurs, pour $r < 2m$, les cônes de lumière sont même tournés de 90° , ce qui montre que si on part d'un point à l'intérieur de l'horizon, le futur nous amène irrémédiablement vers $r = 0$ (que ce soit pour une particule massive ou même pour la lumière). Il n'existe donc pas d'observateur qui puisse être stationnaire en $r < 2m$.

8. PREMIÈRE MÉTHODE – On part du résultat de la question 7.,

$$ct_A + r_A + 2m \ln |r_A - 2m| = ct_B + r_B + 2m \ln |r_B - 2m|$$

que l'on différentie (sachant que Bob reste en $r_B = \text{cte}$, donc $dr_B = 0$)

$$cdt_A - \frac{dr_A}{1 - \frac{2m}{r_A}} = cdt_B$$

Par ailleurs, en utilisant les résultats de la question 2., on peut exprimer dt_A , dt_B et dr_A en fonction des temps propres de chaque observateur.

$$dt_{A/B} = \frac{d\tau_{A/B}}{1 - \frac{2m}{r_{A/B}}}, \quad dr_A = -c \left(\frac{2m}{r_A} \right)^{1/2} d\tau_A$$

On en tire

$$d\tau_A \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{r_A}} + \frac{\left(\frac{2m}{r_A} \right)^{1/2}}{1 - \frac{2m}{r_A}} \right) = \frac{d\tau_B}{1 - \frac{2m}{r_B}}$$

Et donc

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2m}{r_A}}}{1 - \frac{2m}{r_B}} = \frac{\nu_B}{\nu_A}$$

DEUXIÈME MÉTHODE – On part directement de la définition covariante de la fréquence propre, $\nu = u^\mu p_\mu$, de telle sorte que

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{u_B^\mu p_\mu(B)}{u_A^\mu p_\mu(A)}$$

où u^μ sont les quadrivecteurs vitesse des observateurs (voir la question 2.) et p^μ le quadrivecteur impulsion du photon, qui vérifie $p^2 = 0$.

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{u_B^0 p_0(B)}{u_A^0 p_0(A) + u_A^r p_r(A)} = \frac{u_B^0 p_0(A)}{u_A^0 p_0(A) + u_A^r p_r(A)}$$

On a utilisé le fait que p_0 se conserve (car la métrique ne dépend pas du temps x^0 , cf TD2). Ensuite, on peut exprimer p_r en fonction de p_0 grâce à

$$0 = p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} p_0^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) p_r^2$$

On fera attention à bien prendre les composantes contravariantes de la métrique, c'est-à-dire les éléments de la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$. Pour les photons se dirigeant vers l'extérieur⁷, on a donc

$$p_r = -p_0 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

Et donc finalement

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{u_B^0}{u_A^0 - u_A^r \left(1 - \frac{2m}{r_A}\right)^{-1}} = - \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_B}\right)^{-1}}{\left(1 - \frac{2m}{r_A}\right)^{-1} + \left(\frac{2m}{r_A}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2m}{r_A}\right)^{-1}}$$

Ce qui est le même résultat que par la première méthode, après simplification (ouf!).

9. La fréquence ν_B reçue par Bob tend vers zéro quand Alice se rapproche de l'horizon. Autrement dit, les signaux régulièrement émis par Alice sont reçues de plus en plus lentement par Bob, ce temps tendant vers l'infini quand $r_A \rightarrow 2m$ (c'est-à-dire la fréquence tend vers zéro). Bob ne sait pas ce qu'il arrive à Alice, en particulier il ne sait pas qu'Alice est en $r \rightarrow 2m$. Il constate simplement qu'il ne reçoit plus de signaux lumineux. On verra en cours que la transition sur laquelle la fréquence chute à zéro est très courte, Alice semble « disparaître » d'un seul coup.

Application : coordonnées de Finkelstein

On introduit le changement de coordonnée temporelle suivant :

$$p = ct + r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (5)$$

10. Grâce à la question 7., on voit que p est constant le long de la géodésique lumière plongeante. C'est donc une bonne idée d'introduire ce paramètre, il n'aura pas de divergence au niveau de l'horizon.

7. On veut que r augmente avec t , donc $p^r > 0$. C'est donc la composante contravariante qui doit être positive. Ensuite, la composante covariante s'écrit $p_r = g_{rr} p^r$ avec $g_{rr} < 0$ si $r > 2m$. Ainsi, à l'extérieur de l'horizon, $p^r > 0 \Rightarrow p_r < 0$, d'où le choix du signe moins.

11. On différencie l'expression (5) ci-dessus, ce qui donne

$$dp = c dt + \frac{r}{r - 2m} dr$$

En exprimant dt en fonction de dp et en réinjectant dans ds^2 , on obtient finalement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dp^2 - 2dpdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

On a éliminé toute divergence dans la métrique, il y a par contre désormais des termes non diagonaux. À noter, nous n'avons fait qu'un changement de coordonnées, la physique n'a pas changé !

12. En écrivant $ds^2 = 0$, on obtient

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 - 2 \frac{dp}{dr} = 0$$

On y voit la solution $p = \text{constante}$ pour une trajectoire plongeante. Pour une trajectoire sortante, on obtient, en divisant par dp/dr

$$\frac{dp}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \Rightarrow p = 2r + 4m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + \text{constante}$$

Cette fois p n'est pas constant, mais dépend de r .

13. $ct' \equiv p - r = ct + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt'^2 - \frac{4mc}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

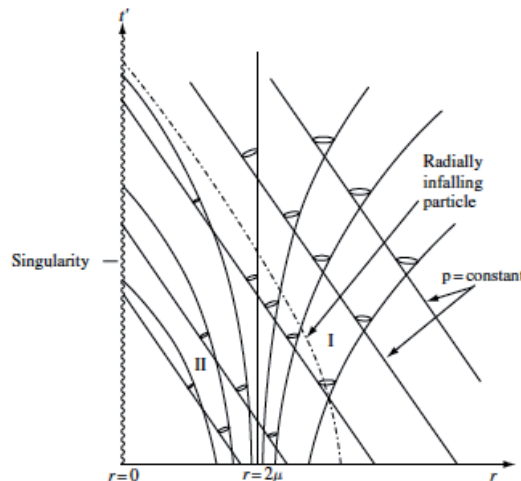
On en déduit les équations de géodésique lumière en cherchant les solutions de $ds^2 = 0$. On trouve sans difficultés que

Trajectoire plongeante : $ct' = -r + \text{constante}$

Trajectoire sortante : $ct' = r + 4m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| + \text{constante}$

On voit que les lignes d'univers plongeantes sont des droites à 45° dans un diagramme d'espace-temps, comme dans Minkowski.

14. On ne peut pas s'échapper de la zone $r < 2m$, car les cônes de lumière ramènent vers la singularité $r = 0$.



15. Voir le livre de Hobson pour de plus amples détails. On tomberait sur un trou blanc, c'est-à-dire un horizon duquel on ne peut que sortir. On ne sait pas si ces objets existent pour de vrais (en particulier s'ils ont pu se former), mais leur existence, en connexion avec les trous de vers (« wormhole » en anglais) ont suscité un intérêt très important dans la communauté de la science fiction.