<u>רגרסיה ומודלים סטטיסטיים- תגבור באלגברה ליניארית</u>

הערה : חלק מתכני התרגול נלקחו מתוך סיכום התרגול של יולי סלווטסקי

וקטורים ומטריצות

<u>כפל מטריצות:</u> תהי $A=(a_{ij})$ מטריצה בגודל $n\times m$ ו - $B=(b_{ij})$ מטריצה בגודל $m\times p$. מכפלתן AB היא מטריצה בגודל $n\times p$ שאבריה מוגדרים לפי הנוסחה

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

כלומר האיבר בשורה ה - i ובעמודה ה - j של המכפלה AB מתקבל מהכפלת השורה ה - i במטריצה A בעמודה j במטריצה B. לדוגמה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} \end{pmatrix}$$

שימו לב שמתקבל כי העמודה ה-jית במטריצה AB היא קומבינציה ליניארית של עמודות A :

$$AB_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{m}A^{i}B_{ij}$$

<u>שחלוף מטריצות:</u> שחלוף הוא פעולת ההחלפה בין השורות והעמודות של מטריצה נתונה. לפיכך עבור $A=(a_{ij})$ מטריצה בגודל $n\times m$

$$\left(A^T\right)_{ij}=(A)_{ji}$$

ובדוגמה שלנו

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

<u>תכונות:</u>

א. פילוג הכפל:

$$A\left(B+C\right)=AB+AC$$
$$A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$$

ב. שחלוף:

$$\left(A^T\right)^T=A$$
$$\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$$
$$\left(AB\right)^T=B^TA^T$$

ג. כפל בסקלר c:

$$cA=Ac$$
$$c\left(AB\right)=\left(cA\right)B$$
$$\left(cA\right)^T=c\left(A\right)^T$$

ד. דטרמיננטה (נזכיר בהמשך):

$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$
$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$$

תרגיל:

הוכיחו את תכונות א׳-ג׳.

מכפלה סקלרית

יהיו $x, y \in R^n$ וקטורים. נגדיר את המכפלה הסקלרית בין x, y :

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

שימו לב (ודעו להוכיח) שהמכפלה הסקלרית היא :

אדטיבית- $(x+w)^T y = x^T y + w^T y$

הומוגנית- $(kx)^T y = k(x^T y),\ k \in R$

סימטרית (מעל הממשיים)- $x^T y = y^T x$

וחיובית לחלוטין- $x^T x = \left||x|\right|^2 \Leftrightarrow x = 0 \in R^n$

ומכאן היא *מכפלה פנימית* (לא הכרחי לקורס- כן הכרחי לדעת את התכונות הנ״ל).

משמעות : תהי θ הזווית בין שני הוקטורים. אז :

$$\cos(\theta) = \frac{x^T y}{\left||x|\right| \cdot \left||y|\right|}$$

ומכאן, אם x, y **אורתוגונליים** זה לזה : $x^T y = 0$ אז הם ניצבים זה לזה- כלומר הזוית ביניהם היא 90 מעלות.

3. נורמה של וקטור

נורמה היא פונקציה המוגדרת על מרחב וקטורי ומתאימה לכל וקטור ערך ממשי כך שמתקיימים מספר תנאים. נורמה יכולה להיות מוגדרת על כל מרחב וקטורי אך התנאים מבוססים על תכונות שמתקיימות עבור אורך במרחב אוקלידי.

א. חיוביות: $\|x\| \geq 0$ ו - $\|x\| = 0$ רק עבור $x = 0$

ב. הומוגניות (בכפל בסקלר): $\|cx\| = |c|\,\|x\|$

ג. אי שוויון המשולש: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

תרגיל: הראו שהנורמה האוקלידית היא נורמה.

4. עקבה

העקבה של מטריצה היא סכום ערכי האלכסון שלה

$$\mathrm{Tr}\left(A\right)=\sum_{k}A_{k,k}$$

2. מטריצות סימטריות

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ תקרא סימטרית אם $A=A^{T}$, כלומר לכל i,j : $A_{ij}=A_{ji}$

תכונות:

מתקיים:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left(A\right)=\mathrm{Tr}\left(A^{T}\right)\\&\mathrm{Tr}\left(AB\right)=\mathrm{Tr}\left(BA\right)\\&\mathrm{Tr}\left(ABC\right)=\mathrm{Tr}\left(CBA\right)=\mathrm{Tr}\left(BCA\right)\end{aligned}$$

א. אם A,B הן מטריצות סימטריות אזי $A+B$ גם כן סימטרית

ב. אם A,B הן מטריצות סימטריות אזי AB סימטרית אם ורק אם $AB=BA$

ג. חזקה של מטריצה סימטרית A^{n} היא סימטרית

ד. אם A הפיכה, אזי A^{-1} סימטרית רק אם A סימטרית

תרגיל:

הוכיחו או הפריכו את התכונות הבאות:

1) $(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$.

2) $(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}$

3) $tr(AB)=tr(A)tr(B)$

4) $tr(AB)=tr(BA)$

5) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

אם A,B הפיכות:

6) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

7) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

5. פעולות אלמנטריות

דירוג מטריצה הוא הפעלה של פעולות אלמנטריות שאינן משנות את מרחב הפתרונות שלה. פעולות אלמנטריות משמשות מציאת פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות, מציאת דרגה של מטריצה, מציאת דטרמיננטה של מטריצה ומציאת המטריצה ההופכית של מטריצות הפיכות.

הפעלת הפעולות הבאות אינה משנה את מרחב הפתרונות אך משנות את הדטרמיננטה באופן הבא:

א. החלפה בין שתי שורות $R_i \leftrightarrow R_j$ משנה את סימן הדטרמיננטה.

ב. כפל שורה בקבוע שאינו 0, $R_i \leftarrow cR_i$, משנה את הדטרמיננטה בכפל באותו קבוע.

ג. הוספה של שורה לשורה אחרת לאחר שהוכפלה בקבוע $R_i \leftarrow cR_j + R_i$ לא משנה את הדטרמיננטה.

<u>פתרון משוואות:</u> תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה שערכיה ידועים, $b \in \mathbb{R}^m$ וקטור שערכיו ידועים ו-$x \in \mathbb{R}^n$ וקטור של משתנים x_i שערכיהם לא ידועים. מערכת המשוואות

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= b_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

ניתנת לרישום קומפקטי באמצעות כפל מטריצות על ידי $Ax = b$. בהמשך הקורס, אנו נשתמש ברישום זה למציאת הפתרון לרגרסיה לינארית, כאשר בתפקיד המטריצה שערכיה ידועים תהיה מטריצת הנתונים X ואנו נחפש את ערכי המקדמים β שכאן הם מיוצגים על ידי הוקטור x. שימו לב לחילוף התפקידים בסימון.

8. מטריצה הופכית

<u>הגדרה:</u> נתבונן במטריצה ריבועית A מגודל $m \times m$. אם קיימת מטריצה A^{-1} כך ש- $AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$, אז המטריצה A נקראית הפיכה והמטריצה A^{-1} היא המטריצה ההופכית שלה.

<u>פתרון משוואות באמצעות מטריצה הופכית:</u> נניח כי נתונה לנו מערכת המשוואות $Ax = b$ ו - A היא מטריצה הפיכה. אזי

$$\begin{aligned}
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
Ix &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}$$

מרחב לינארי (וקטורי):

מרחב לינארי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא קבוצה עליה מוגדרות 2 פעולות: $+$ חיבור, ו-$\cdot$ כפל בסקלר, המקיימת את התכונות הבאות:

• סגירות לחיבור $v_1+v_2 \in V$	• סגירות לכפל $\alpha \cdot v \in V$
• אסוציאטיביות (חוק הקיבוץ): $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$	• <u>דיסטריבוטיביות</u> (חוק הפילוג): $\alpha\cdot(v_1+v_2) = \alpha\cdot v_1+\alpha\cdot v_2$
• קיים אדיש $v_0 \in V$ כך ש $v+v_0=v$	• $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v+\beta\cdot v$
• קיים נגדי ל v $\bar{v} \in V$ כך ש $v+\bar{v}=v_0$	• $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$
• קומוטטיביות: $v_1+v_2=v_2+v_1$	• $1\cdot v = v$

הערה: האיברים ב-V נקראים וקטורים. v_0 הוא ה-0 של השדה. נסמנו מעתה כ-0.

בקורס זה נעסוק בשדה הממשיים בלבד. דוגמא למרחבים לינאריים מעל הממשיים: מרחב הפתרונות למערכת משוואות הומוגנית, מרחב המטריות הממשיות.

תת מרחב לינארי:

יהי V מרחב לינארי מעל F ויהי $W \subseteq V$ תת- קבוצה של V. נאמר ש-W הוא **תת מרחב לינארי** של V אם גם הוא מרחב לינארי. ניתן להראות שזה שקול לכך ש-W מקיים את הבאים:

1. $0 \in W$
2. $w_1+w_2 \in W; \forall w_1,w_2 \in W$
3. $k\cdot w \in W; \forall k \in F, \forall w \in W$

<u>הגדרות נוספות</u>

1. תלות ואי תלות לינארית- תהי $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה של n וקטורים כך ש- $S \subseteq V$. נאמר כי S קבוצה **תלויה לינארית (ת"ל)** אס"ם קיימת קומבינציה לינארית לא טריוויאלית מתאפסת של S. כלומר הגרירה הבאה **אינה** מתקיימת: $\sum_{i=1} k_i\cdot v_i = 0 \to k_i = 0\ \forall i$. אחרת, נאמר ש-$S$ קבוצה בת"ל. תזכורת- כל קבוצה של יותר מ-n וקטורים ב-R^n תלויה לינארית.
2. נגדיר $Span(S) := \{w | w=\sum_{i=1}^{n} k_i v_i, k_i \in \mathbb{F}, v_i \in S, \forall i\}$. תרגיל: ודאו שזהו תת מרחב. לכל תת קבוצה W כך ש- $W \subseteq Span(S)$, נאמר כי S קבוצה הפורשת את W.
3. נגיד ש- S הוא בסיס ל-W אם S קבוצה בת"ל **וגם** קבוצה הפורשת את W. הגדרות שקולות הן: קבוצה מינימלית הפורשת את W, וקבוצה בת"ל מקסימלית, במובן של מספר הוקטורים המוכלים בה.
   תזכורת- בסיס לתת מרחב אינו יחיד.
4. מימד- מימד של מרחב (תת מרחב) הוא מספר הווקטורים בבסיס. תרגיל: הראו שהמימד לא תלוי בבסיס הספציפי.
5. אורתוגונליות- יהיו $u,v \in V$. נאמר שהם אורתוגונליים זה לזה, ונסמן $u \perp v$ אם $u^Tv = v^Tu = 0$.[1]
6. יהי $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס לתת מרחב W. אז S יקרא בסיס אורתוגונלי אם $v_i \perp v_j$ לכל $i \neq j$. לדוגמא עבור R^3:
   $$\{(2,0,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$$
7. S המוגדר לעיל יקרא בסיס אורתונורמלי ל-W אם בנוסף מתקיים ש-$||v_i|| = 1$ לכל i. דוגמא:
   $$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

---

[1] כל עוד לא נאמר אחרת, הכוונה היא למכפלה הפנימית הסטנדרטית: $u^Tv=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 0$, אך ההגדרה נכונה לכל מ"פ.

הוא בסיס אורתונורמלי ל-R^n. בפרט, הוא נקרא "הבסיס הסטנדרטי".

8. מטריצה $A \in R^{n\times n}$ תקרא מטריצה אורתוגונלית אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל-R^n, או באופן שקול: $AA^T = A^TA = I$.

תזכורת (לא נעבור על האלגוריתם בתרגול): יהי $W = Span(S)$ תת מרחב. S לא בהכרח בת"ל. ניתן לקבל בסיס אורתונורמלי B_n ל-W ע"י הפעלת תהליך Gram–Schmidt על איברי S:

1. אתחול:
   1.1. נגדיר $b_1 = s_1$
   1.2. נגדיר $B_1 = b_1$
2. עבור $2 \le i \le n$:
   2.1. $b_i = s_i - P_{B_{i-1}}(s_i)$
   2.2. $B_i = B_{i-1} \cup \{b_i\}$
3. עבור $1 \le i \le n$:
   3.1. $b_i = \frac{b_i}{||bi||}$

תרגיל

3. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $A, B \subseteq V$ תתי קבוצות סופיות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) (15 נקודות) אם $sp(A) \subseteq sp(B)$ אז $A \subseteq B$.

(ב) (15 נקודות) אם $A \subseteq sp(B)$ ו- $B \subseteq sp(A)$ אז $sp(A) = sp(B)$

תרגיל:

הוכיחו שאם $W \subseteq V$ תתי מרחבים, וכן $\dim(W) = \dim(V)$, אז $W = V$.

סכום של תתי מרחבים:

יהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים. נסמן: $U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, w \in W\}$ זהו תת המרחב הקטן ביותר המכיל גם את U וגם את W ומימדו:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

תרגיל: הראו שזהו תת מרחב ליניארי

כאשר $U \cap W = \{0\}$ נאמר כי זהו **סכום ישר** ונסמן את תת המרחב: $U \oplus V$.

משפט הסכום הישר: יהי V מרחב לינארי ויהיו $W, U \subseteq V$ תתי מרחבים שלו. אז $V = U \oplus W$ אס"ם לכל וקטור $v \in V$ קיימת הצגה יחידה: $v = u + w | \, u \in U, w \in W$.

הוכחה:

1 וקטורים וערכים עצמיים, פולינום אופייני והפירוק הספקטראלי

1.1 הגדרות

1. תהי המטריצה **הריבועית** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ויהיו $\lambda \in \mathbb{R}$ סקלאר ו־ $x \in \mathbb{R}^n$ וקטור. אם מתקיים השוויון $Ax = \lambda x$ אזי x הוא **וקטור עצמי** של Aו־ λ הוא **ערך עצמי** של A.

2. $\det(A - \lambda I)$ מוגדר להיות **הפולינום האופייני** של A, עבור I מטריצת היחידה מאותו מימד של A. באמצעות הפולינום האופייני מחשבים את הע"ע של המטריצה, מאחר ועבור פתרונות לא טריוויאלים (וע שאינם 0) הפתרון הוא יחיד, משמע A היא מטריצה סינגולרית, כלומר $\det(A - \lambda I) = 0$.

3. תהי המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$מטריצה סימטרית. אזי ניתן להציג את A כך: $A = U\Lambda U^T$ וההצגה הזו נקראת **הפירוק הספקטרלי של** A, כאשר:

- $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה אלכסונית, שעל האלכסון שלה נמצאים הע"ע של A.
- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא מטריצה המורכבת מהוקטורים העצמיים של A. העמודה ה j היא הוקטור העצמי המתאים לערך העצמי λ_j.
- כמו כן מתקיים ש $UU^T = U^T U = I$ כלומר U היא מטריצה אורתונורמלית.

משפט הפירוק הספקטרלי:

תהי $A \in R^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אשר הפירוק הספקטרלי שלה הוא $U\Lambda U^T$, אז $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U^i U^{i^T}$.

הוכחה: $A_{ij} = [U\Lambda U^T]_{ij} = \sum_k \sum_m U_{ik}\Lambda_{km}U^T_{mj} = \sum_k \lambda_k U_{ik}U^T_{kj} = [\sum_k \lambda_k U_k U^T_k]_{ij}$

דוגמא:

1. תהי S מטריצה סימטרית 2×2.
   a. מצאו פירוק הספקטרלי עבור $S = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$.
   כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית U ומטריצה אלכסונית D כך ש S=UDU'.

2. תהי $A \in R^{n\times n}$ מטריצה סימטרית ויהיו $(\lambda_1, u_1), (\lambda_2, u_2)$ זוגות של וקטורים עצמיים וע"ע של A כך שמתקיים שהערכים העצמיים $\lambda_1 \neq \lambda_2$. הראו כי $u_1^t u_2 = 0$.

מטריצה חיובית, איידמפוטנטית

1. חזקה של מטריצה סימטרית - באמצעות הפירוק הספקטראלי ניתן לראות כי עבור מטריצה סימטרית מתקיים $A^k = U\Lambda^k U^T$ לכל k ממשי (הוכחה בשיעור).

2. שורש של מטריצה סימטרית - אם בנוסף הע"ע של המטריצה הסימטרית הם אי־שליליים אז באותו האופן ניתן להראות כי $\sqrt{A} = A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$.

3. מטריצה אידמפוטנטית היא מטריצה ריבועית המקיימת $A = A^2$.

4. מטריצה חיובית לחלוטין או למחצה -

- מטריצה סימטרית, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא חיובית לחלוטין אם לכל וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $yAy^T > 0$ $\Leftarrow$ (דרוש הוכחה) מטריצה סימטרית היא חיובית לחלוטין אםם הע"ע שלה חיוביים.

- מטריצה סימטרית, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא חיובית למחצה אם לכל וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $yAy^T \geq 0$ $\Leftarrow$ (דרוש הוכחה) מטריצה סימטרית היא חיובית למחצה אםם הע"ע שלה אי־שליליים.

<u>טענה</u>: A מטריצה סימטרית מגודל $m \times m$ ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ערכיה העצמיים. אזי

א. A חיובית לחלוטין אם ורק אם לכל k, $\lambda_k > 0$.

ב. A חיובית למחצה אם ורק אם לכל k, $\lambda_k \geq 0$.

העתקות (פונקציות) ליניאריות, מרחב הגרעין ומרחב התמונה

ההעתקה (פונקציה, טרנספורמציה) $T: V \to W$ היא ליניארית אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ו-$k_1, k_2 \in F$ מתקיים:

$$T(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2)$$

ובאופן כללי:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(v_i)$$

שימו לב שמכך נובע שאם T ליניארית, $T(0) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$.

נגדיר את הגרעין והתמונה של העתקה ליניארית T:

$$Ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$$

$$IM(T) = \{w \in W | \exists v \in V: T(v) = w\}$$

טענה: אלו תתי מרחבים.

משפט המימד להעתקות ליניאריות:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(IM(T))$$

הוכחה: כאן.

מטריצת מעבר מבסיס לבסיס ומטריצה מייצגת העתקה:

טענת עזר: תהי $u \in R^m, A \in R^{n \times m}$. אז $v = Au$ הוא קומבינציה ליניארית של עמודות A, כלומר $v \in colspace(A)$. הוכחה:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{m} [A^j]_i u_j$$

ובאותו האופן:

$$v = \sum_{j=1}^{m} A^j u_j$$

<u>הגדרות:</u>

1. יהי $v \in V$ ו-$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס **סדור** ל-V, ולכן $v = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i = Bk$ וכן זוהי הקומבינציה הליניארית היחידה המקיימת את שוויון זה (פתרון יחיד למערכת המשוואות). נגדיר את וקטור הקואורדינאטות של v ביחס לבסיס B: $[v]_B = (k_1, \dots, k_n)^T$.

הערה: שימו לב שאם B הוא הבסיס הסטנדרטי אז $[v]_B = v$. ניתן להסתכל על כך באופן הבא: תחת הבסיס הסטנדרטי "מערכת הצירים" היא זו המוכרת לנו- הקרטזית, ולכן הקואורדינאטות מוגדרות בדיוק באופן שבו אנו מכירים. תחת בסיס אחר, ניתן לחשוב על כך כשינוי של מערכת צירים לכזו בעלת נקודות ייחוס שונות מראשית הצירים, ולכן נצטרך לייצג את הוקטור v תחת מערכת הצירים החדשה.

דוגמה:

$V=\mathbb{R}^2$ ו- $v=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$.

אז על מערכת הצירים: $v=a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

מכאן, $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ כי מתקיים ש- $v=-3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

לחילופין, הפעולה זהה ל- $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ שהיא למעשה פתרון המטריצה: $\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-3\\0&1&5\end{array}\right]$

הפתרון היחיד היינו $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$

2. מטריצת מעבר מבסיס לבסיס: יהיו B,C בסיסים סדורים ל-V, $v\in V$, $[v]_B$. מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C היא המטריצה $[I]_C^B$ (היחידה) המקיימת: $[I]_C^B[v]_B=[v]_C$.[2] במילים- המטריצה שהכפלה משמאל בה של וקטור הקואורדינאטות של v לפי הבסיס B, תתן את וקטור הקואורדינאטות של v לפי הבסיס C.

<u>טענה 1:</u> עמודות המטריצה הן וקטורי הקואורדינטות של וקטורי הבסיס B לפי הבסיס C. הוכחה:

ראשית, נשים לב שכיוון ש-B,C בסיסים ומהגדרת וקטור הקואורדינטות: $v=B^{-1}v, [v]_B=C^{-1}v, [v]_C$. לכן:

$$[I]_C^B[v]_B=[v]_C\Leftrightarrow[I]_C^BB^{-1}v=C^{-1}v\Leftrightarrow[I]_C^BB^{-1}v=C^{-1}BB^{-1}v\Leftrightarrow[I]_C^B=C^{-1}B\Leftrightarrow[I]_{C\cdot j}^B=C^{-1}b_j=[b_j]_C$$

<u>טענה 2:</u> $[I]_C^B=\left([I]_B^C\right)^{-1}$. ההוכחה נובעת ישירות מהטענה הקודמת. שימו לב שמכך נוכל להסיק שאם B מטריצה ריבועית מדרגה מלאה- כלומר עמודותיה מהוות בסיס, אז B^{-1} היא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס שהוא העמודות של B.

<u>טענה 3:</u> **לכל** העתקה לינארית $T:V\to W$, ובסיסים C,B: $V=span(B)$, $W=span(C)$, קיימת מטריצה יחידה $[T]_C^B$ המקיימת שלכל וקטור $v\in V$: $[T]_C^B[v]_B=[T(v)]_C$. זוהי המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי בסיס B בתחום ו-C בטווח.
שימו לב שמטריצת מעבר היא מקרה פרטי בו T היא העתקת הזהות.

<u>טענה 4:</u> אם $[I]_C^B$ מטריצת מעבר מבסיס B לבסיס C, ו-$T:V\to V$ היא העתקה לינארית, אז:

$$[T]_C=[I]_C^B[T]_B[I]_B^C$$

הוכחה:

לכל $v\in V$ מתקיים: $[T]_C[v]_C=[T(v)]_C=[I]_C^B[T(v)]_B=[I]_C^B[T]_B[v]_B=[I]_C^B[T]_B[I]_B^C[v]_C$. כיוון שקיים יצוג יחיד $v\to[v]_C$ מתקבלת הטענה.

דוגמה:

Consider the linear transformation F on $\mathbf{R}^2$ defined by $F(x,y)=(5x-y,\ 2x+y)$ and the following bases of $\mathbf{R}^2$:

$$E=\{e_1,e_2\}=\{(1,0),\ (0,1)\}\qquad\text{and}\qquad S=\{u_1,u_2\}=\{(1,4),\ (2,7)\}$$

(c) Find the matrix B that represents F in the basis S.

Method 2. By Theorem 6.7, $B=P^{-1}AP$. Thus,

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-7&2\\4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\-2&1\end{bmatrix}$$

הערה: כאן $P=[I]_E^S$, כלומר מטריצת המעבר מהבסיס בייצוג S לבסיס הסטנדרטי.

הערה: אם לא נאמר אחרת, מטריצה נתונה A מייצגת לפי בסיס סטנדרטי (בתחום ובטווח).

בייצוג זה מתקיים:

$$Ker(T)=Ker(A)=\{v\in V|Av=0\}$$
$$IM(T)=IM(A)=colspace(A)=\{w\in W|Av=w\}$$

[2] הערה: בחלק מהמקורות היא נקראת דווקא "מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C". נתייחס אליה כפי שמוגדר כאן.

ונסיק כי דרך למציאת בסיס למרחב הגרעין של העתקה תהיה מציאת בסיס למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $Av = 0$.
ואילו כדי למצוא בסיס למרחב התמונה של ההעתקה, נדרג את A^T לתצורה קנונית (לדוגמא), ונבחר את השורות שאינן מתאפסות.

מהשקילות הנ״ל וממשפט המימד להעתקות לינאריות נוכל להסיק כי לכל מטריצה $A \in R^{n\times m}$, כך ש- $rank(A) = r \le \min(n, m)$ מתקיים: $\dim(IM(A)) = r, \dim(Ker(A)) = n - r$.

משפט שימושי:

תהי $A \in R^{n\times n}$, אז הבאים שקולים:

1. A שקולה שורות למטריצת היחידה.
2. A הפיכה.
3. למערכת המשוואות $Av = 0$ יש פתרון יחיד.
4. הוקטור היחיד ב-$Ker(A)$ הוא וקטור ה-0.
5. **לכל** וקטור $b \in R^n$, למערכת $Av = b$ יש פתרון יחיד.
6. עמודות A בת״ל.
7. $colspace(A) = Rowspace(A) = R^n$
8. $\dim(Ker(A)) = 0$
9. $rank(A) = \dim(IM(A)) = n$
10. $\det(A) \neq 0$
11. כל הערכים העצמיים של A שונים מ-0.

הטלה של וקטור לתת מרחב

1. הטלה של וקטור על תת-מרחב- יהי $y \in R^n$ ו-$W \subseteq V$ תת מרחב כך ש-$B = \{b_1, \dots, b_p\}$ בסיס אורתוגונלי ל-W. נגדיר את ההטלה של y על W:

$$\pi_W(y) = \sum_{i=1}^{p} \frac{b_i^T y}{||b_i||^2} b_i$$

המשמעות- כיצד ניתן ליצור קומבינציה לינארית קרובה ככל האפשר לוקטור v המורכבת מאיברי הבסיס B בלבד?

$$Argmin_\beta ||y - B\beta||^2$$

2. מה קורה אם הבסיס איננו אורתוגונלי? כמו במקרה שלמדנו בקורס:

נניח $X \in R^{n\times p}$ ועמודות X בת״ל (כלומר $\text{rank}(X) = p$). אז $X^1, \dots, X^p$ הן בסיס ל-$W = Colspace(X) = IM(X)$.

אז מטריצת ההיטל של y על $IM(X)$ היא:

$$P_X = X(X^T X)^{-1} X^T$$

ונקבל כי:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y, \qquad P_X(y) = P_X y$$

תרגיל:

א. השתמשו בהגדרה הראשונה על מנת להראות שאם עמודות X מהוות בסיס אורתוגונלי ל-$Colspace(X)$, אז לכל $v \in R^n$ מתקיים $P_X v = \pi_{IM(X)}(v)$. במילים אחרות, הראו כי במקרה הזה P_X היא המטריצה המייצגת את ההעתקה $\pi_{IM(X)}: R^n \to R^n$ (ביחס לבסיס הסטנדרטי), ותמונתה היא ה-$Colspace(X)$.
ב. הראו שמטריצת ההיטל אינה תלויה בבסיס המיוצג. כלומר:

10. If $\boldsymbol{Z}$ is another $n \times m$ matrix s.t. $\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{X})$, then $\boldsymbol{P_Z} = \boldsymbol{P_X}$. This means that $\boldsymbol{P_X}$ depends on $\boldsymbol{X}$ only through the span of its columns. Hence, for an arbitrary linear space M, we can define the projection matrix $\boldsymbol{P}_M$ onto M (an explicit form for $\boldsymbol{P}_M$ can be obtained by taking any basis of M and stacking its elements as columns in a matrix $\boldsymbol{X}$, then forming $\boldsymbol{P_X} := \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^\top$)

המרחב המשלים האורתוגונלי: יהי $U \subseteq V$ תת מרחב. נגדיר את תת המרחב המשלים האורתוגונלי של U באופן הבא :

$$U^{\perp} = \{v \in V | u^t v = 0, \forall u \in U\}$$

טענה : $U \oplus U^{\perp} = V$

תרגיל:

הוכיחו את הטענות הבאות:

11. If L and M are two subspaces with $L \subseteq M$, then $\boldsymbol{P}_M \boldsymbol{P}_L = \boldsymbol{P}_L \boldsymbol{P}_M = \boldsymbol{P}_L$.

ד. (15 נק׳) נסמן $M := \text{Im}(\boldsymbol{X})$. נסמן ב-$\tilde{\boldsymbol{X}}$ את המטריצה המתקבלת מ-$\boldsymbol{X}$ ע״י מחיקת חלק מהעמודות, ונסמן $L := \text{Im}(\tilde{\boldsymbol{X}})$. הראו שמתקיים $P_L \boldsymbol{Y} = P_L \hat{\boldsymbol{Y}}$ (כאשר $\hat{\boldsymbol{Y}}$ זה וקטור הערכים החזויים במודל עם מטריצת ה-$\boldsymbol{X}$ המקורית). האם נדרשות הנחות המודל הליניארי או המודל הליניארי הנורמלי כדי שהטענה תתקיים?