

Rapport - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Nathan Coustance & Yanis Benreguig

Présentation

Ce rapport présente le travail que nous avons effectué lors de notre projet, notre objectif étant de traduire le pseudo-code de plusieurs algorithmes de théorie des graphes en langage R.

Il s'agit des algorithmes de **Prim**, de **Ford-Bellman** ainsi que de **Ford-Fulkerson**.

- **Prim**: Calcul d'un arbre couvrant minimal dans un graphe valué non orienté.
- **Ford-Bellman**: Calcul des plus courts chemins depuis un sommet source dans un graphe valué orienté.
- **Ford-Fulkerson**: Calcule le flot maximal d'un graphe à partir d'un sommet source et d'un sommet puit dans un graphe valué orienté.

Pour chaque algorithme vous trouverez une description, un pseudo-code, une implémentation en code R ainsi qu'un ou plusieurs exemples.

Table des Matières

Présentation	1
Algorithme de Prim	2
Description	2
Pseudo-Code	2
Code R	2
Exemple	3
Algorithme de Ford-Bellman	4
Description	4
Pseudo-Code	4
Code R	5
Exemple n°1	5
Exemple n°2	6
Algorithme de Ford-Fulkerson	7
Description	7
Pseudo-Code	7
Code R	8
Exemple	9
Conclusion	10

Algorithme de Prim

Description

Soit un graphe G valué non orienté, on y cherche un arbre couvrant minimal (*Minimum Spanning Tree*). Cet algorithme consiste, à partir d'un sommet aléatoire, à trouver un ensemble d'arête de G formant un arbre de telle sorte à ce que la somme des poids de ces arêtes soit minimale.

On part donc de ce sommet pris au hasard puis on construit petit à petit notre arbre en trouvant, à chaque étape, une arête de poids minimal ayant exactement un sommet en commun avec notre arbre en construction. Une fois tous les sommets présents dans l'arbre, l'algorithme a fini son travail.

Le calcul d'un arbre couvrant minimal peut s'appliquer différents domaines, notamment le domaine de la téléphonie, où il est important de pouvoir relier toutes les villes par un réseau de câble en une distance minimale (ne pas repasser deux fois au même endroit, etc.)

Pseudo-Code

```
Input :  $G = [X, U]$ 
1   $X' \leftarrow \{i\}$  où  $i$  est un sommet de  $X$  pris au hasard
2   $U' \leftarrow \emptyset$ 
3  Tant que  $X' \neq X$  faire
5      Choisir une arête  $(j, k)$  de poids minimal tel que  $j \in X'$  et  $k \notin X'$ 
6       $X' \leftarrow X' \cup \{k\}$ 
7       $U' \leftarrow U' \cup \{(j, k)\}$ 
8  Fin Tant que
9  Output :  $G' = [X', U']$ 
```

Code R

```
Prim = function(X, A) {
  visited = c(sample(X,1)) # Initialisation de la liste des sommets visités par un sommet pris au hasard
  mst = c() # Initialisation de notre Minimum Spanning Tree
  edges = which(A!=0, arr.ind=T) # Récupération des arêtes à partir de notre matrice d'adjacence

  while(length(visited) != length(X)) {
    possible = list() # Liste des arêtes possibles
    for (node in visited) {
      neighbours = edges[which(edges[, 'row']==node), 'col'] # On récupère la liste des voisins d'un noeud
      neighbours = neighbours[which(!(neighbours %in% visited))] # On prend uniquement ceux qui ne sont pas visités
      for (neighbour in neighbours) {
        possible[[length(possible)+1]] = c(node, neighbour) # On les ajoute à la liste des arêtes possibles
      }
    }
    minval = Inf # On initialise un minimum à l'infini
    cursor = c() # Variable utilisée pour contenir notre arête minimale
    for (edge in possible) { # Pour chaque arête possible
      # Si sa valeur est inférieure au minimum stocké, on met le curseur dessus et on change le minimum
      if (A[edge[1], edge[2]] < minval) {
        minval = A[edge[1], edge[2]]
        cursor = edge
      }
    }
    visited = append(visited, cursor[2]) # On ajoute notre nouveau noeud visité
    mst = append(mst, paste(cursor[1], '-', cursor[2], sep="")) # On ajoute l'arête possible minimale à notre arbre
  }
  return(list(visited, mst))
}
```

Exemple

Soit un graphe G avec X la liste de ses sommets et A sa matrice d'adjacence représentée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Prim(X, A)
```

```
## [[1]]
## [1] 2 5 7 6 3 4 1
##
## [[2]]
## [1] "2-5" "5-7" "7-6" "6-3" "2-4" "2-1"
```

Ici on a en premier la liste de nos sommets ajoutés dans l'ordre chronologique.
En deuxième valeur de retour, nous avons la liste des arêtes qui constitue notre arbre.

Algorithme de Ford-Bellman

Description

Soit un graphe G valué orienté, on cherche à calculer le plus court chemin d'un sommet donné vers tous les autres sommets du graphe. Pour ce faire, l'algorithme va créer un tableau de distances qu'il initialisera à l'infini pour tous nos sommets excepté le sommet d'origine qui sera initialisé à zéro.

Il va ensuite parcourir le graphe et mettre à jour au fur et à mesure notre tableau de distances. Si ce tableau ne change pas entre deux itérations, alors le travail est terminé.

Une des particularité de Ford-Bellman est qu'il est capable de détecter, ou non, la présence d'un cycle de poids négatif dans le graphe qu'on lui a donné. Cependant, dans ce pseudo-code, nous n'avons pas ce système de détection. Ainsi, s'il y a réellement un cycle de poids négatif, notre algorithme pourra ne jamais finir de s'exécuter. (cf. exemple n°1 et n°2)

Le problème de plus court chemin est rencontré dans plusieurs domaines également, notamment dans le calcul d'un chemin le plus court possible entre deux villes qu'un GPS effectue. Il est également utilisé dans des algorithmes de pathfinding pour l'intelligence artificielle avec notamment l'algorithme A*.

Pseudo-Code

```
Input :  $G = [X, U], s$ 
1   $\pi(s) \leftarrow 0$ 
2  Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{s\}$  faire
3       $\pi(i) \leftarrow +\infty$ 
4  Fin Pour
5  Répéter
6      Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{s\}$  faire
7           $\pi(i) \leftarrow \min(\pi(i), \min_{j \in \Gamma^{-1}(i)} \pi(j) + l_{ji}) ;$ 
8      Fin Pour
9  Tant que une des valeurs  $\pi(i)$  change dans la boucle Pour
10 Output :  $\pi$ 
```

Code R

```
Ford_Bellman = function(vertices, adjacency, source)
{
  "
  INPUT:
  vertices : Liste des sommets du graphe
  adjacency : Matrice d'adjacence du graphe
  source : Sommet à partir duquel on calcule les plus courts chemins
  "
  dist = c()
  end = FALSE
  edges = which(adjacency!=0, arr.ind=T)

  for (i in vertices) {
    dist[i] = Inf
  }
  dist[source] = 0

  while(!end)
  {
    end = TRUE
    for (i in vertices[-source])
    {
      pred = unname(edges[which(edges[, 'col']==i), 'row'])
      if (length(pred) > 0)
      {
        for (j in pred)
        {
          weight = dist[j] + adjacency[j,i]
          if (weight < dist[i])
          {
            dist[i] = weight
            end = FALSE
          }
        }
      }
    }
  }
  return(dist)
}
```

Exemple n°1

Soit un graphe G avec X la liste de ses sommets et B sa matrice d'adjacence représentée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
#Ford_Bellman(X, B, sample(X,1))
```

Dans cette exemple nous n'aurons pas de sortie, puisque la fonction ne finira jamais de s'exécuter. En effet dans ce graphe on a deux cycles de poids négatif : celui entre les sommets 2 et 5 ainsi que celui entre les sommets 6 et 7.

Ainsi, peu importe le choix du sommet d'origine, notre algorithme se perd dans ce cycle et ne finit jamais de s'exécuter.

Exemple n°2

Soit un graphe G avec X la liste de ses sommets et C sa matrice d'adjacence représentée ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Ford_Bellman(X, C, 7)
```

```
## [1] 7 12 -1 16 3 -3 0
```

Ici nous récupérons un tableau qui contient la distance minimale entre le sommet 7 et chacun des autres sommets.

Dans ce graphe, l'exécution ne fonctionne que pour les sommets 6 et 7 puisqu'il y a un cycle de poids négatif entre ces deux sommets : puisque notre sommet source fait partie de ce cycle, l'algorithme n'y passera pas.

Algorithme de Ford-Fulkerson

Description

Soit un graphe G valué orienté, on cherche à y trouver un flot réalisable maximal depuis un sommet source jusqu'à un sommet puit. Pour cela, l'algorithme de Ford-Fulkerson va initialiser un flot nul puis va réaliser des itérations, dans lesquels il essaiera de trouver une chaîne de sommet telle qu'elle améliore notre flot actuel. Dans cette recherche de chaîne améliorante, l'algorithme va marquer chaque arc avec un flot, qui ne peut excéder la capacité de cet arc. D'un sommet ne peut sortir qu'un flot inférieur ou égal à la somme de tous les flots qu'il a reçu. Ainsi si un sommet 3 reçoit les valeurs 4 et 7 de la part des sommets 1 et 2, il devra en sortir, au maximum, la valeur 11 ($4+7$).

Cet algorithme s'arrête lorsqu'il ne trouve pas de nouvelle chaîne améliorante entre deux itérations.

Le problème de flot maximum s'applique, par exemple, dans des sociétés de transports où la capacité maximale serait la quantité de marchandises que peut contenir un véhicule et la source et le puit seraient les entrepôts de départ et d'arrivée.

Pseudo-Code

```

Input :  $G = [X, U, C]$ ,  $\varphi$  un flot réalisable
1   $m_s \leftarrow (\infty, +)$  et  $S = \{s\}$ 
2  Tant que  $\exists(j \in \bar{S}, i \in S) : (c_{ij} - \varphi_{ij} > 0) \vee (\varphi_{ji} > 0)$  faire
3      Si  $c_{ij} - \varphi_{ij} > 0$  faire
4           $m_j \leftarrow (i, \alpha_j, +)$  avec  $\alpha_j = \min\{\alpha_i, c_{ij} - \varphi_{ij}\}$ 
5      Sinon Si  $\varphi_{ji} > 0$  faire
6           $m_j \leftarrow (i, \alpha_j, -)$  avec  $\alpha_j = \min\{\alpha_i, \varphi_{ji}\}$ 
7      Fin Si
8       $S \leftarrow S \cup \{j\}$ 
9      Si  $j = p$  faire
10          $V(\varphi) \leftarrow V(\varphi) + \alpha_p$ 
11         Aller en 14
12     Fin Si
13 Fin Tant que
14 Si  $p \in S$  faire
15     Tant que  $j \neq s$  faire
16         Si  $m_j(3) = +$  faire
17              $\varphi_{m_j(1)j} \leftarrow \varphi_{m_j(1)j} + \alpha_p$ 
18         Sinon Si  $m_j(3) = -$  faire
19              $\varphi_{jm_j(1)} \leftarrow \varphi_{jm_j(1)} - \alpha_p$ 
20         Fin Si
21          $j \leftarrow m_j(1)$ 
22     Fin Tant que
23     Aller en 1
24 Sinon faire
25     Output :  $\varphi$ 
26 Fin Si
```

Code R

```
Ford_Fulkerson = function(vertices, adjacency, src, dst)
{
  maxFlow = 0 # Maximum flow (return value)
  edges = which(adjacency!=0, arr.ind=T) # Matrix of edges (row->col)

  flot = matrix(0, nrow=length(vertices), ncol=length(vertices)) # Flow matrix initialized to 0

  search = TRUE # Flag used for the 'GoTo Line 1'
  while(search) {

    mark = list() # Initializing a marking list
    mark[[src]] = c(-1, Inf, 1) # Initialize source mark (-1 for no predecessor, 1 for positive)
    S = c(src) # Used to store our visited vertices
    S_cache = c() # Vector used for a check at the end of the while(TRUE) part

    # First part of the pseudo-code, going from our source vertex to our destination
    stop=FALSE # Flag used for the 'GoTo Line 14'
    while(TRUE) # Used to repeat, we'll exit this loop with break statements
    {
      reloadS=FALSE # Flag used to come back here if the S vector has been changed and need to be considered by the for loop
      for (j in setdiff(X,S)) # For each node not in S
      {
        # Store all of j's neighbours that are in S
        iTab = intersect(union(edges[which(edges[, 'col']==j), 'row'], edges[which(edges[, 'row']==j), 'col']), S)
        for (i in iTab) # For each vertex in iTab
        {
          cij = adjacency[i,j] # cij is the edge capacity
          aij = flot[i,j] # aij is our current flow for the ij edge
          aji = flot[j,i] # aji is our current flow for the ji edge
          if ((cij - aij > 0) | (aji > 0)) # If there is something to do about the edge flow
          {
            if (cij - aij > 0) # If positive
            {
              aj = min( c( mark[[i]][2], cij-aij ) ) # j flow equals the minimum between i flow and cij-aij
              mark[[j]] = c(i, aj, 1) # We update j mark (i the used predecessor, aj the flow, 1 for positive)
            }
            else if (aji > 0) # If negative
            {
              aj = min( c( mark[[i]][2], aji ) ) # j flow equals the minimum between i flow and aji
              mark[[j]] = c(i, aj, -1) # We update j mark (i the used predecessor, aj the flow, -1 for negative)
            }
            S = append(S, j) # We add j to the visited vertices
            reloadS = TRUE # Now we need to exit the for loop so it considers that we changed S
            if (j == dst) # If j is out destination
            {
              maxFlow = maxFlow + mark[[dst]][2] # We increment the maxFlow by j's flow
              stop=TRUE # Now we need to exit the while(TRUE)
            }
          }
        }
        if(stop | reloadS) {break} # Flags IF statement
      }
      if(stop | reloadS) {break} # Flags IF statement
    }
    # If S hasn't changed between 2 iterations, it means we couldn't reach the destination, so we exit
    if(identical(S, S_cache)) {break} else {S_cache=S}
    if(stop) {break} # Flags IF statement
  }

  # Second part of the pseudo-code, updating our edges flow and retracing path
  if (dst %in% S) # If our destination is in S
  {
    while(j != src)
    {
      if(mark[[j]][3] == 1) # If j mark is positive
        flot[mark[[j]][1],j] = flot[mark[[j]][1],j] + mark[[dst]][2] # Update our flow matrix
    }
  }
}
```



```

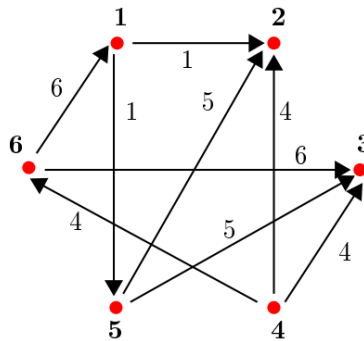
    else if (mark[[j]][3] == -1) # If j mark is negative
        flot[j,mark[[j]][1]] = flot[j,mark[[j]][1]] - mark[[dst]][2] # Update our flow matrix

    j = mark[[j]][1] # Change j to its predecessor
}
}
else {search = FALSE} # If he's not, we end the algorithm
}
return(maxFlow)
}

```

Exemple

Soit un graphe G avec X la liste de ses sommets, D sa matrice d'adjacence et sa représentation graphique ci-dessous :



```
Ford_Fulkerson(X, D, 4, 2)
```

```
## [1] 6
```

Dans notre exemple nous prenons le sommet 4 comme source et le sommet 2 comme puit. L'algorithme nous retourne donc le flot maximal qu'il est possible de faire passer dans ce graphe lorsque nous partons du sommet 4 pour arriver au sommet 2.

Conclusion

Ce projet aura été pour nous une occasion de travailler sur des algorithmes de théorie des graphes qui résolvent des problèmes que l'on peut rencontrer dans bien des domaines aujourd'hui.

Traduire des pseudo-codes n'est pas une tâche facile mais ce travail nous aura permis de nous y entraîner, dans un langage que nous ne pratiquons que trop rarement.

La principale difficulté étant de comprendre et de retranscrire un pseudo-code qui n'est bien souvent pas adapté à un langage comme R, nous avons pris du temps afin de trouver des méthodes qui pouvaient reproduire de manière efficace ce qu'il nous était demandé.

Par exemple, les instructions comme 'Aller à la ligne x' ou bien les boucles qui contiennent beaucoup de conditions difficiles à vérifier ont été plus longues à implémenter, surtout celles de Ford-Fulkerson.

Il est évidemment possible d'améliorer notre code en trouvant des manières plus intelligentes de gérer ces boucle qu'avec des flags.

Mise à part cet élément, nous sommes contents du résultat et de ce que cela nous a apporté.

Nous espérons que vous avez apprécié la lecture de ce rapport.