

# Dossier “Optimisation et Recherche Opérationnelle”

Julien Ah-Pine et JAP

Université Lyon 2 / ICOM  
M1 Informatique 2016/2017

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Algorithme 1 : Calcul du noyau d’un graphe orienté</b>	<b>1</b>
2.1	Objet de l’algorithme . . . . .	2
2.2	Pseudo-code de l’algorithme . . . . .	2
2.3	Code R de l’algorithme . . . . .	2
2.4	Illustration sur un exemple . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Algorithme 2</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Algorithme 3</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Algorithme 4</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>3</b>

## 1 Introduction

*Voici un exemple d’organisation de la section introduction de votre rapport :*

- Présentez l’objet de ce dossier : “Ce dossier entre dans le cadre de du contrôle continu des connaissances dans le contexte du cours de théorie des graphes ...”
- Décrivez de façon générale le contenu de ce dossier : “Dans ce dossier, nous présentons les algorithmes : leurs objectifs, leurs implémentations ...”
- Enumérer les différents algorithmes que vous étudierez dans la suite : “Les algorithmes auxquels nous nous sommes intéressés sont les suivants ... Nous détaillons par la suite ...”

## 2 Algorithme 1 : Calcul du noyau d’un graphe orienté

*Voici un exemple d’organisation d’une section de votre rapport et décrivant le travail réalisé sur un algorithme :*

- Décrivez le problème que tente de résoudre l’algorithme : “Nous nous intéressons à des graphes orientés/non orientés, pondérés/non pondérés et au calcul de ...”
- Donnez un ou plusieurs exemples pratiques illustrant l’intérêt d’un tel algorithme : “Ce type de problème peut intervenir dans des cas pratiques pour la résolution ...”
- Rappelez le pseudo-code de l’algorithme : reprendre le pseudo-code du cours
- Donnez votre code R : copier coller votre code R et ajouter des informations si nécessaire
- Illustrer le bon fonctionnement sur un exemple ou plusieurs

## 2.1 Objet de l'algorithme

Soit un graphe orienté, non pondéré et sans boucle que l'on notera par  $G = [X, U]$ . Ce graphe est représenté par sa matrice d'adjacence notée  $A$ . Nous nous intéressons au calcul du noyau de  $G$ , noté  $N$ , qui est un sous-ensemble de sommets qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall i, j \in Y : (i, j) \notin U \wedge (j, i) \notin U$
- $\forall i \in X \setminus Y, \exists j \in Y$  tel que  $(i, j) \in U$

Le noyau d'un graphe  $N$  est tel que ses éléments  $j$  sont mutuellement non adjacents, et tous les éléments  $i$  hors du noyau sont tels qu'il existe au moins un arc  $(i, j) \in U$ . Le calcul du noyau d'un graphe peut intervenir dans des problèmes de décision afin d'avoir un sous-ensemble restreint d'alternatives parmi lequel il est optimal de prendre ses décisions.

## 2.2 Pseudo-code de l'algorithme

Nous rappelons ci-dessous le pseudo-code de l'algorithme du calcul d'un noyau d'un graphe. Nous faisons remarquer que cet algorithme est valide uniquement pour les graphes sans circuit ce que nous supposons donc dans la suite de cette section.

```
Input :  $A$  (Matrice d'adjacence d'un graphe sans circuit)
1   $Y \leftarrow \emptyset$ 
2  Marquer une ligne  $j$  ne comportant que des 0
3   $Y \leftarrow Y \cup \{j\}$ 
4  Dans la colonne  $j$ , barrer les lignes et colonnes  $i$  telles que  $a_{ij} = 1$ 
5  Tant que il existe une ligne non marquée et non barrée ne
    comportant que des 1 barrés ou des 0 faire
6    Marquer une ligne  $j$  non marquée et non barrée ne
    comprenant que des 1 barrés ou des 0
7     $Y \leftarrow Y \cup \{j\}$ 
8    Dans la colonne  $j$ , barrer les lignes et colonnes  $i$ 
    telles que  $a_{ij} = 1$ 
9  Fin Tant que
10 Output :  $Y$ 
```

## 2.3 Code R de l'algorithme

Voici ci-dessous le code R de notre implémentation de l'algorithme présenté dans le paragraphe précédent.

```
Noyau = function(X,A)
{
  #Détermine le noyau d'un graphe SANS CIRCUIT
  #INPUT
  #X est l'ensemble des sommets
  #A est la matrice d'adjacence
  #OUTPUT
  #N est l'ensemble de sommets formant un noyau du graphe
  n=length(X)#nb de sommets
  lignes_non_marquees_non_barrees = X#initialisation de l'ensemble des sommets des non marqué
  lignes_deg_nul=which(rowSums(A)==0)#recherche des lignes de degré nul (feuilles qui sont dan
  lignes_a_marquer = intersect(lignes_non_marquees_non_barrees,lignes_deg_nul)#initialisation
  j = lignes_a_marquer[1]#sélection du sommet à marquer
  N=c(j)#ajout du sommet dans le noyau
  print("Le noyau N comprend : ")#affichage de l'état courant du noyau
  print(N)
  lignes_a_barrer = which(A[,j]==1)#recherche des somemts à barrer
  A[lignes_a_barrer,]=0#on barre les lignes en mettant un 0 dans la matrice A
```

```

A[,lignes_a_barrer]=0#on barre les colonnes en mettant un 0 dans la matrice A
lignes_non_marquees_non_barrees=setdiff(lignes_non_marquees_non_barrees,union(lignes_a_barre
lignes_deg_nul=which(rowSums(A)==0)#maj
lignes_a_marquer = intersect(lignes_non_marquees_non_barrees,lignes_deg_nul)#maj
while (length(lignes_a_marquer)>0)#tant qu'il y a des sommets à marquer
{
  j=lignes_a_marquer[1]#sélection du sommet à marquer
  N=append(N,j)#ajout du sommet dans le noyau
  print("Le noyau N comprend : ")
  print(N)
  lignes_a_barrer = which(A[,j]==1)
  A[lignes_a_barrer,]=0
  A[,lignes_a_barrer]=0
  lignes_non_marquees_non_barrees=setdiff(lignes_non_marquees_non_barrees,union(lignes_a_barre
  lignes_deg_nul=which(rowSums(A)==0)
  lignes_a_marquer = intersect(lignes_non_marquees_non_barrees,lignes_deg_nul)
}
return(N)
}

```

## 2.4 Illustration sur un exemple

Nous illustrons le bon fonctionnement de l'algorithme implémenté en l'exécutant sur le graphe dont la matrice d'adjacence est donnée par :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

L'exécutions du code R présenté dans la sous-section précédente donne le résultat suivant :

```

> X=1:5
> A=cbind(c(0,0,0,0,0),c(1,0,0,0,0),c(0,1,0,0,0),c(1,1,0,0,0),c(0,0,1,1,0))
> Noyau(X,A)
[1] "Le noyau N comprend : "
[1] 5
[1] "Le noyau N comprend : "
[1] 5 2

```

Le noyau du graphe de l'exemple est bien  $N = \{5, 2\}$

## 3 Algorithme 2

## 4 Algorithme 3

## 5 Algorithme 4

## 6 Conclusion

*Voici un exemple d'organisation de la section conclusion de votre rapport :*

- *Synthèse du travail développé : "Dans ce travail, nous avons implémenté plusieurs algorithmes de graphes ..."*

- *Apport du travail : “Ce travail nous a permis de ...”*
- *Difficultés rencontrées : “Les principales difficultés que nous avons rencontrés ont été ...”*
- *Critiques éventuelles : “Certaines parties sont à améliorer ... ”*
- *Bilan global*