Optimisation de portefeuilles financiers : matrices de covariance, valeurs propres et optimisation selon le modèle de Markowitz

Nathan Bruyere[1] **and Marius Fleith**[1]

[1] *Étudiants ingénieurs à Grenoble INP - Génie Industriel, 46 Av. Félix Viallet, 38031 Grenoble, 2024 ; nathan.bruyere@grenoble-inp.org ; marius.fleith@grenoble-inp.org*

Compiled November 8, 2024

Passionnés par la finance de marché, nous avons décidé de présenter un des pilliers de l'économie néo-classique. Grâce à des lectures comme *La théorie moderne du portefeuille*5, nous avons pu mettre au service de ce beau sujet nos connaissances mathématiques. Fiers d'avoir pu en apprendre plus sur l'algèbre lors du premier semestre, nous aborderons ce sujet de manière technique et précise. Ce document vise donc un publique averti, notamment concernant les notions de valeurs propres, diagonalisation, etc...

https://genie-industriel.grenoble-inp.fr

CONTENTS

1 Introduction 1

2 Modèle de Markowitz et la définition du portefeuille financier 1

3 Optimisation de portefeuille : maximisation du rendement pour un risque donné 2
  A Lagrangien et résolution 3
  B Solution explicite 3

4 Interprétation économique 3

5 Conclusion 3

1. INTRODUCTION

L'optimisation de portefeuille financier est un problème fondamental en finance de marché, qui permet de déterminer la répartition optimale des actifs dans un portefeuille en fonction des objectifs d'un investisseur, qu'il s'agisse de maximiser le rendement ou de minimiser le risque. Ce processus repose sur des concepts mathématiques avancés tels que les matrices de covariance, les valeurs propres et les vecteurs propres, qui sont des outils puissants pour quantifier les risques et les rendements associés aux actifs financiers. Dans ce cadre, le modèle de Markowitz 2 (1952) propose une approche d'optimisation mathématique visant à trouver le portefeuille optimal.
L'objectif de cet exposé est de montrer comment les techniques d'algèbre linéaire, et plus particulièrement les valeurs et vecteurs propres d'une matrice, peuvent être utilisées pour optimiser un portefeuille d'actifs, tout en minimisant le risque pour un rendement attendu donné.

2. MODÈLE DE MARKOWITZ ET LA DÉFINITION DU PORTEFEUILLE FINANCIER

Harry Markowitz développe en 1952 la **Théorie moderne du portefeuille**[1] dans laquelle il expose comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d'optimiser leur portefeuille, et quel devrait être le prix d'un actif étant donné son risque par rapport au risque moyen du marché.

Le modèle

Il repose sur 3 concepts clés :

- Le rendement attendu du portefeuille : R_p
- Le risque du portefeuille, mesuré par la variance $Var(R_p)$ ou l'écart-type δ_p
- La diversification , ou l'allocation du portefeuille

Soit donc un portfeuille composé de n actifs financiers, dont les rendements sont représentés par un vecteur $R = (R_1 , ..., R_n)^T$, où $\forall i \in \mathbb{R}$ R_i est le rendement de l'actif i sur une période donnée. Le **rendement** attendu du portefeuille est donc donné par une combinaison linéaire des rendements attendus des actifs : $R_p = w^T * R$ avec $w = (w_1, ..., w_n)^T$ le vecteur des poids des actifs dans le portefeuille[2]. Le **risque** du portefeuille, mesuré par la variance de son rendement est défini comme :

$$Var(R_p) = w^T \sum w \quad (1)$$

[1] Harry Markowitz The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
[2] Bien entendu on a $\forall i \in \mathbb{R},\ w_i \in [0;1]$

Où $\sum$ est la matrice de covariance des rendements des actifs, et où w est le vecteur des poids des actifs. Cette matrice est de taille $n * n$ dont les éléments δ_{ij} représentent la covariance entre les actifs i et j : $\sum = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$. On peut noter que les éléments diagonaux δ_{ii}sont en réalité les variances du rendement de l'actif i. La variance du portefeuille mesure donc le risque global associé à la combinaison des actifs du portefeuille.

La diversification, un autre aspect de l'évaluation des risques

"*Ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier*" en plus complexe : c'est la pierre angulaire de l'allocation d'actifs. Si les rendements d'un portefeuille sont combinaison linéaire de celui de ses composants pondérés par leur poids $R_p = \sum w_i \ R_i$ ce n'est pas le cas de la volatilité qui est fonction de la corrélation ρ_{ij} entre les actifs i et j du portefeuille :

$$variance = \sigma_p^2 = \sum w_i^2 \ \sigma_i^2 \ + \sum\sum w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Comme $volatilite = \sqrt{\sigma_p^2}$, le risque[3] d'un portefeuille est réduit en détenant des actifs pas ou peu (ou négativement) corrélés 2 les uns aux autres (ici la corrélation entre i et j vaut ρ_{ij}). Un agent rationnel[4] va donc continuellement chercher à réduire ce risque tout en maximisant le rendement. L'utilisation de ratios tels que le **Ratio de Sharpe**[5] : $\frac{Rendement_{ptf} - Rendement_{SansRisque}}{vol}$ est fréquente comme celle d'autres outils comme les matrices de corrélation lorsque le nombre de lignes du portefeuille devient important.

Un rapide exemple pour visualiser l'application pratique de ces théories à un portefeuille composé de 2 actifs A et B, d'où

$$R_p = w_A R_A + w_B R_B$$

$$vol = \sigma_p = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{AB}$$

	Emprunts d'Etats	Obligations d'Entreprise	Liquidités	Cuivre	Matières Premières	Immobilier
Années 1930	0.15	0.23	-0.07	0.23		0.01
Années 1940	0.36	0.24	0.16	0.02		0.03
Années 1950	-0.16	-0.01	-0.28	0.01		0.14
Années 1960	0.07	-0.21	-0.13	0.08	0.13	-0.10
Années 1970	0.41	0.52	-0.10	-0.19	-0.12	0.15
Années 1980	0.31	0.29	-0.17	0.07	0.15	0.06
Années 1990	0.36	0.45	0.01	-0.12	0.06	0.00
Années 2000	-0.15	0.12	-0.09	0.29	0.28	0.14
Années 2010	-0.54	-0.22	-0.03	0.60	0.58	0.00

Fig. 1. Matrice de corrélation de différents actifs aux actions US depuis 1930

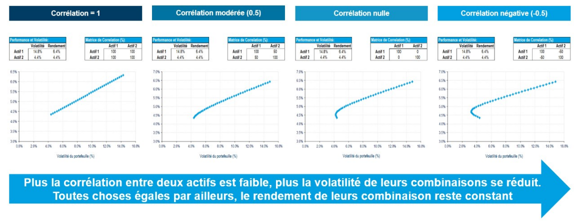
[3]On assimile la volatilité au risque sous l'hypothèse que la distribution est normale, ce qui se vérifie dans le cas général extremum(s) exclu(s)-

[4]Voir les travaux de Fama sur l'efficience des marchés financiers

[5]Nommé d'après William F. Sharpe, mesure l'écart de rentabilité d'un portefeuille d'actifs financiers par rapport au taux de rendement d'un placement sans risque, souvent une obligation d'état

Corrélation

On comprend naturellement l'importance de la corrélation des actifs entre eux pour optimiser le risque d'un portefeuille. Même si ce dernier contient beaucoup de positions, le portefeuille n'est pas diversifié si les actifs sont corrélés (positivement) entre eux... Lors d'une crise, tous les actifs chuteront ensemble : c'est absolument l'inverse de ce qu'on cherche à faire.



La matrice $\sum$ est symétrique (réelle), donc diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) [6]. On peut donc la décomposer en valeurs propres et vecteurs propres. Cette décomposition permet d'analyser plus facilement la structure du risque au sein du portefeuille.

Décomposition en valeurs et vecteurs propres

Soit $\sum$ une matrice symétrique (réelle). Il existe une décomposition unique qui permet d'écrire $\sum$ sous la forme :

$$\sum = VDV^T$$

Avec V matrice de vecteurs propres $(v_1, \ ,v_2, \ , \dots, \ ,v_n)$ et D matrice diagonale dont les éléments $(\lambda_1, \ ,\lambda_2, \ , \dots, \ ,\lambda_n)$ sont les **valeurs propres** de $\sum$, représentant donc l'ampleur du risque de la variance globale du portefeuille.

Ici, les $\lambda_1, \ ,\lambda_2, \ , \dots, \ ,\lambda_n$ sont des réels **positifs**.
Pour rappel, une grande valeur propre λ_i signifie que la direction associée au vecteur propre v_i est particulièrement importante en terme de variance des rendements, et inversement. Les vecteurs propres $v_1, \ ,v_2, \ , \dots, \ ,v_n$ sont unitaires. Chaque vecteur propre définit une direction dans l'espace des rendements dans laquelle la covariance est maximisée, et ces directions sont orthogonales entre elles.

3. OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE : MAXIMISATION DU RENDEMENT POUR UN RISQUE DONNÉ

L'objectif de l'optimisation de portefeuille est de maximiser le rendement pour un risque le plus contrôlé possible. On peut le formuler comme suit :

$$max \ w^T R \ sous \ la \ contrainte \ w^T \sum w = \sigma^2$$

Avec σ^2 la variance (ou le risque) cible. Ce problème est une **optimisation quadratique** avec une contrainte linéaire comme vu en cours de **Problèmes**. On cherche à determiner quels doivent être les poids w_i de chaque actif i dans le portefeuille en maximisant la combinaison linéaire des rendements, tout en respectant la *contrainte risque* : la variance.

[6]Selon la proposition 2.5 du cours d'outils pour l'ingénieur

A. Lagrangien et résolution

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange ; le Lagrangien associé au problème est :

$$\mathcal{L}(w,\ \lambda) = w^T R - \lambda(w^T \sum w - \sigma^2) \tag{2}$$

Où λ est le multiplicateur de Lagrange assiocié à la contrainte $w^T \sum w = \sigma^2$. En dérivant $\mathcal{L}(w,\ \lambda)$ (éq. 2) par rapport à w et λ on obtient les conditions de premier ordre :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = R - 2\lambda \sum w = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w^T \sum w - \sigma^2 = 0$$

D'où :

$$R = 2\lambda \sum w$$
$$\Leftrightarrow \sum = \frac{1}{2\lambda} R$$

Cela montre que les vecteurs des poids w est proportionnel à la matrice inverse de $\sum$ et au vecteur des rendements R.

B. Solution explicite

On vient de montrer que :

> **Les poids sont fonctions de la covariance des actifs et des rendements attendus**.

On obtient finalement les poids :

$$w = \frac{1}{2\lambda} \sum{}^{-1} R \tag{3}$$

On pourrait déterminer λ en utilisant la contrainte $w^T \sum w = \sigma^2$ pour avoir les poids optimaux w_i des actifs i pour un risque donné.

4. INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

Vecteurs propres & Diversification

Chaque vecteur propre v_i représente une combi. li. des actifs qui capture un aspect du risque. Les actifs ayant des rendements similaires dans une direction donnée contribuent d'avantage au risque du portefeuille (voir 2). En choisissant des vecteurs propres associés à de plus petites valeurs propres (faible variance), un investisseur peut minimiser son risque global.

Valeur propre & Importance du risque

Les grandes valeurs propres λ_i indiquent les directions de forte volatilité. La volatilité est souvent[a] l'ennemi de l'investisseur. Il va donc réduire son exposition à ces directions de forte volatilité.

[a] Sauf dans certaines conditions de marché qui permettent certains arbitrages

5. CONCLUSION

Ce cadre mathématiques rigoureux montre comment les techniques d'algèbre linéaire permettent de comprendre et d'optimiser un portefeuille. On fait la remarque que c'est vrai au sens de la théorie moderne du portefeuille de Markowitz (voir 5) : le courant qui fait foi depuis plus de cinquante ans. Néanmoins selon d'autres courants de pensée économique, la notion d'optimisation serait différente.

Par ailleurs, dans un souci de concision et de respect des consignes, nous avons décidé de ne pas expliquer certains concepts clés pour se concentrer sur l'approche technique du modèle : l'algèbre linéaire. On aurait pu évoquer le thème tout aussi intéressant des produits dérivés. C'est une niche de la finance de marché dont la branche la plus technique a inspiré des grands mathématiciens comme Louis Bachelier[7]. Les **options**[8], rendus célèbres par les mathématiciens Fischer Black et Myron Scholes[9] font intervenir la résolution d'équations aux dérivées partielles...

L'économie et la finance de marché sont les preuves qu'encore une fois, les mathématiques sont **partout**.

REFERENCES

Harry Markowitz The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

Efficient Capital Markets :a Review of Theory and Empirical Work, by E. Fama, 1970

Histoire de la pensée économique, G. Deleplace, 2018

[7] Théorie de la spéculation, 1900
[8] Produit dérivé permettant de spéculer ou de se protéger à la hausse ou à la baisse via des contrats échangés sur les marchés
[9] THE CONCEPTS AND PRACTICE OF MATHEMATICAL FINANCE, by M. S. Joshi