CY-TECH - Département Mathématiques

$2^{\text{ème}}$ année Ingénieurs - Mathématiques & Informatique

Optimisation déterministe

TD1 - Introduction et généralités

2023-2024

EXERCICE 1 On considère $\mathbf{U} = \mathscr{B}\big((0,0)\,,1\big)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(0,0)$ et de rayon 1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{U}$, $f : \mathbf{U} \to \mathbb{R}^2$ définie pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = \frac{e^{\sin\left(\sqrt{1+x_1} - \sqrt{1+x_2}\right)}}{2 + x_1 - x_2}.$$

Sachant que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) = 0,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0) = \frac{1}{8},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -\frac{1}{8},$$

déterminer le développement de Taylor-Young de f à l'ordre 2 en $a = (0,0)$.

EXERCICE 2 Soit $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\big)$. Montrer que l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$H = \Big\{x \in \mathbb{R}^n;\ \ f(x) = \alpha\Big\}$$

est un convexe de $\mathbb{R}^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. f est convexe.
2. $\forall\, \big(x, y\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle.$

EXERCICE 4

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe avec $f(\Omega) \subset I$ et soit $g : I \to \mathbb{R}$, une fonction convexe croissante. Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est convexe.
2. **Application :**
   (a) Si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\exp(f)$ est convexe.
   (b) Si $f > 0$ et la fonction $\ln(f)$ est convexe alors la fonction f est convexe.

EXERCICE 5 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

1. Soit $d = (d_1, d_2)$, montrer que la dérivée directionnelle au point (x_1, x_2) dans la direction de d existe.

2. Soit $d = (1;0)$, exprimer la dérivée directionnelle au point (x_1, x_2) dans la direction de d. Que peut-on dire sur f.

EXERCICE 6 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique où

$$f : x \mapsto c + b^{\mathrm{T}} x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \mathrm{A} x$$

A une matrice symétrique d'ordre n. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = \mathrm{A}x + b$ et $\nabla^2 f(x) = \mathrm{A}$.

EXERCICE 7 Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction f définie pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2.$$

1. Montrer que f est une fonction quadratique sur $\mathbb{R}^2$.

2. Exprimer $\nabla f(x)$ et $\mathbf{H}_f(x)$.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^2$, $d \in \mathbb{R}^2$ non nul. Résoudre $g^{'}(\mathbf{t}) = 0$ où

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \mathbf{t} & \mapsto & f(x + \mathbf{t}d) \end{array}$$

EXERCICE 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction des moindres carrés $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\| Ax - b \right\|^2.$$

1. Montrer que f est une fonction quadratique.

2. Donner l'expression du gradient $\nabla f(x)$ et du hessien $\mathbf{H}_f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que f est convexe.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et d un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ad \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. On considère la fonction réelle $g : t \mapsto f(x + td)$. Montrer que
$$\operatorname*{arg\,min}_{t \in \mathbb{R}_+} g(t) = -\frac{\langle \nabla f(x), d \rangle}{\| Ad \|^2}.$$