DS1-Algèbre : *logique ; ensemble; application.*

Prénom : **Nom :** **Groupe :**

Note détaillée.

	Barème indicatif
Exercice 1 : vrai-faux *sur la logique et le langage des ensembles*	/ 10
Exercice 2 : *opérations sur ensembles*	/ 6
Exercice 3 : *exemple de démonstration*	/ 4
Problème- partie A- restitution de cours : *applications.* partie B- Étude d'une application.	/ 3 /10

Note finale.

Recommandations.

Justifier les réponses.

Répondre dans les espaces laissés sous les questions.
Utiliser les espaces marqués comme brouillon si besoin.
Ce qui est écrit dans les emplacements de brouillon n'est pas évalué.

Soigner l'écriture.

Aucune communication entre étudiants n'est autorisée.

Les téléphones doivent être éteints ; les affaires (y compris la trousse) doivent être déposées près du tableau.

Nom : Groupe :

Exercice 1 : *vrai -faux.*

1. On considère l'ensemble $E=\{1,2,3\}$. Dire si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.

Proposition	$3\in E$	$\{2\}\in E$	$\{1\}\subset E$	$\emptyset\in E$	$\emptyset\subset E$	$\{E\}\subset E$	$E\in\{E\}$	$E=\{1,\{2,3\}\}$
Vrai ou Faux								

2. Pour chaque proposition, indiquer sa valeur logique (vrai ou faux).

Si elle est fausse, réécrire une proposition en apportant les corrections nécessaires.

	Vrai ou Faux
Proposition 1 : $\exists A\in\mathbb{R}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ /\ \sqrt{n}\leq A$ Correction éventuelle :	
Proposition 2 : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ,\ \exists n\in\mathbb{N}\ /\ \frac{1}{n}<x$ Correction éventuelle :	
Proposition 3 : soient f et g, deux applications numériques définies sur $\mathbb{R}$. $[\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)\times g(x)=0]\Rightarrow[(\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=0)\text{ ou }(\forall x\in\mathbb{R}\ \ g(x)=0)]$ Correction éventuelle :	
Proposition 4 : soit f, une application sur un ensemble E. $(f\circ f=\mathrm{Id}_E)$ est une condition nécessaire pour qu'il existe x, appartenant à E, tel que $f(f(x))=x$. Correction éventuelle :	
Proposition 5 : soit un ensemble E. $\forall(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2\ ,\ (A\not\subset B)\Rightarrow(B\subset A)$ Correction éventuelle :	

Nom : **Groupe :**

Exercice 2 : *opérations sur ensembles.*

Soit E, un ensemble non vide. Soient A, B, deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

On considère $A \Delta B$. Pour rappel, $A \Delta B = \{ x \ / \ (x \in A \cup B) \ et \ (x \notin A \cap B) \}$.

1. Comment l'ensemble $A \Delta B$ est-il défini ?

2. En partant de $A \Delta B$, montrer, par égalités successives, que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ en justifiant chaque étape. On donne la première égalité :

   $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(B \cap A)}$

   $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ Justification : ....

   $= \quad \vdots$

3. En déduire :

   (a) $A \Delta \emptyset = A$

   (b) $A \Delta A = \emptyset$

   (c) $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$

Nom : Groupe :

Exercice 3 : *étude d'une démonstration.*

Voici une proposition «*il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel*».

Voici un texte prétendant démontrer la proposition.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ *alors on prend* $a=b=\sqrt{2}$.

Sinon on prend $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *et* $b=\sqrt{2}$.

1. Quel est le type de raisonnement utilisé dans cette démonstration ?

2. Discuter la validité du raisonnement ?

3. Est-il nécessaire de montrer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel ?

Nom : **Groupe :**

Problème.

Partie A. Restitution de cours.

Soient E et F, deux ensembles et $f : E \to F$, une application.

1) Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2) Démontrer que : si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

Partie B. Étude d'une application.

Soit l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \to \dfrac{1}{x-i} \end{array} \right.$. On définit les ensembles A, B, C ainsi :

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad \text{et} \quad B = \{-1, 0, -i, i, 1\} \quad .$$

1. Donner $f(A)$, l'image directe de A par f ,en extension.

2. a) Déterminer $f^{-1}(B)$, l'image réciproque de B par f ,en extension.

   b) Comparer $f(f^{-1}(B))$ et B . Que peut-on déduire quant à l'application f ?

3. f est-elle injective ?

DS1-Algèbre : *logique ; ensemble; application.*

Nom : Groupe :

4. On considère les deux applications de référence: $a \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to a(\mathbb{R}) \\ x \mapsto x - i \end{array} \right.$ et $b \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$

   a) Préciser comment composer les applications a et b pour obtenir f.

   b) Justifier que a est bijective.

   c) On rappelle le théorème montré en cours :

   si deux application sont surjectives alors leur composée (si elle existe) est surjective.

   En utilisant ce théorème et en raisonnant par contraposée, montrer que b n'est pas surjective.

5. a) Dans le plan complexe, décrire en compréhension, C, le cercle dont le centre a pour affixe $\frac{i}{2}$ et dont le rayon est $\frac{1}{2}$.

   b) En considérant deux inclusions, montrer que $f(\mathbb{R}) = C \setminus \{0\}$.

   Aide pour $f(\mathbb{R}) \supset C \setminus \{0\}$: $\forall \alpha \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\,,\ \frac{1 + i e^{i\alpha}}{1 - i e^{i\alpha}} = \frac{i\cos(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)^2}$.