DOCUMENTS ET CALCULATRICES NON AUTORISÉS
LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ET LE SOIN APPORTÉ À LA RÉDACTION SERONT PRIS EN COMPTE DANS LA NOTATION

Exercice 1
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction : $f \ : \ x \mapsto \ln(x^2-4x+3)$.
Préciser le domaine de validité.

Exercice 2
On considère l'équation différentielle : $\quad 4xy'' + 8y' - xy = 0 \qquad \boldsymbol{(E)}$.
Soit $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de $\boldsymbol{(E)}$, développable en série entière en 0, telle que $y(0) = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 4(n+2)(n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} \neq 0$
3. La série entière ayant pour somme y s'écrit donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{2n}x^{2n}$.

   On nomme R son rayon de convergence.
   Déterminer R. Justifier soigneusement la réponse.
4. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\quad y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n}$, où λ est un réel à déterminer.
5. En déduire, pour tout $x \in]-R, R[$, l'expression de $y(x)$ en fonction de x.

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que la série de Fourier de f s'écrit : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)x)$, où α est un réel à déterminer.
3. On note S la somme de la série de Fourier de f.
   Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout $x \in [-\pi, 2\pi[$, $S(x)$ en fonction de x.
4. Calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
5. Poser le calcul permettant de calculer la somme $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.