

EXERCICES D'ANALYSE – Dérivation et recherche d'extrema.

Les notations sont celles du cours.

Exercice 1.

Etudier la continuité de la fonction f suivante, puis l'existence et la continuité de ses dérivées partielles premières :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$.

1. Justifier que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 .
2. Exprimer les dérivées partielles premières de g en fonction de celles de f .

Exercice 3.

Calculer la matrice Hessienne de la fonction $f(x, y, z) = x^2(x + y) + z^3$.

Exercice 4.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$.
2. $g(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2xy + 1$.