Électromagnétisme
S05 Potentiel et champ électrostatique, énergie électrostatique

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Potentiel et champ électrique, relations locales

Du champ électrostatique au potentiel

- Travail fourni de A vers B par charge déplacée [potentiel] :

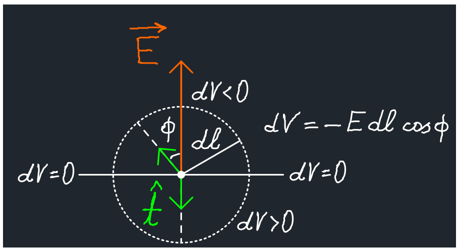
$$\frac{W_{A\to B}}{q} = V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\,\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

- Différence de potentiel entre A et B :

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = \int_{\Gamma:\,\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \mathrm{d}V$$

$$\boxed{\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}} \qquad (1)$$

À un point de l'espace, examiner les cas :
$\mathrm{d}V > 0$ (max ?) ;
$\mathrm{d}V < 0$ (min ?) ;
$\mathrm{d}V = 0$



3

Du potentiel au champ électrostatique

- $\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- En coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

et $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(x,y,z)$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z$$

donc

$$-\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \triangleq \overrightarrow{\textbf{grad}}\,V$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}\,V \qquad (\mathrm{V\,m^{-1}}) \qquad (2)$$

- Remarque : $\mathrm{d}V = -\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ [gradient]

4

Du champ au potentiel : un raccourci

- $V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l$
- Deux conditions pour prendre un raccourci :
  1. Le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ n'a qu'*une seule composante*...
  2. ...correspondant à une *variable de longueur*
- Exemple : coordonnées cartésiennes et $\vec{\boldsymbol{E}} = E_z \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
  - Commencer par $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = -\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V(x, y, z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\right)$
  - $\vec{\boldsymbol{E}} = E_z \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ implique $\partial V / \partial x = 0$ et $\partial V / \partial y = 0$
  - Donc V est fonction uniquement de z !
  - $E_z(z) = -\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -V'(z)$

$$V(z) = -\int E_z(z)\, \mathrm{d}z \tag{3}$$

  - Constante d'intégration à déterminer en imposant une valeur à V (p.ex. $V_{\text{réf}} = 0$; continuité de V)

5

Gradient d'un champ scalaire

6

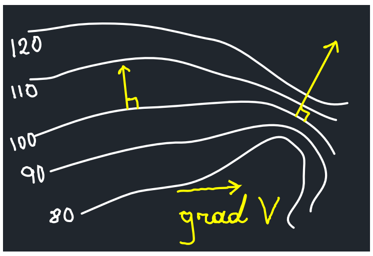
Le gradient d'un champ scalaire

- [potentiel relations locales] $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l$

$$\boxed{\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l} \text{ dérivée selon } \hat{\boldsymbol{t}}}$$

- Le gradient d'un champ scalaire V :
  1. Est un champ *vectoriel*
  2. Perpendiculaire aux *équipotentielles*

     $(V = \text{cste},\ \mathrm{d}V = 0)$



  3. Montre la direction de la plus *forte* augmentation de V ($\mathrm{d}V$ max)
  4. $\|\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V\| = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}\Big|_{\text{max}}$ (max quand $\hat{\boldsymbol{t}} \parallel \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V$)

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = \int_{\Gamma:\, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \underbrace{\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l}_{\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}l}$$

$$\text{rappel : } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x$$

7

Le gradient en coordonnées cartésiennes

- $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- Écrire $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ et $\mathrm{d}V$ ...
- Coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

et $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(x, y, z)$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

donc

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \tag{4}$$

8

Le gradient en coordonnées cylindriques

- $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- Écrire $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ et $\mathrm{d}V$ ...
- Coordonnées cylindriques

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}\rho\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

et $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(\rho, \phi, z)$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

donc

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \tag{5}$$

Expression valide si $\rho \neq 0$

9

Le gradient en coordonnées sphériques

- $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- Écrire $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ et $\mathrm{d}V$ ...
- Coordonnées sphériques

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$$

et $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = V(r,\theta,\phi)$

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi$$

donc

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{6}$$

Expression valide si $r \neq 0$ et $\theta \neq 0, \pi$

10

Énergie électrostatique : charges ponctuelles

11

Charge ponctuelle

- Déplacer une charge q dans un champ électrostatique
- Travail fourni $P \to A$ = Énergie potentielle

$$W_{P\to A} = q[V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}})] = qV(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = \mathcal{U}_{\mathrm{e}}$$

- L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q :

$$\boxed{\mathcal{U}_{\mathrm{e}} = qV(\vec{\boldsymbol{r}})} \tag{7}$$

- $V(\vec{\boldsymbol{r}})$: potentiel créé par toutes les *autres* charges

12

Ensemble de N charges

- $\mathcal{U}_e$: Le travail fourni pour déplacer *toutes* les charges de $P \to A$
- Charges déplacées l'une après l'autre, q_i à $\vec{r}_i$
- $V_j(\vec{r}_i)$: potentiel créé au point $\vec{r}_i$ par la charge q_j

Déplacée	Présente(s)	Travail fourni
q_1	—	0
q_2	q_1	$q_2 V_1(\vec{r}_2)$
q_3	q_1, q_2	$q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3)$
...	...	...
q_N	$q_1, \ldots, q_{N-1}$	$q_N \left[V_1(\vec{r}_N) + \ldots + V_{N-1}(\vec{r}_N)\right]$
	Total :	$\mathcal{U}_e = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i)$

- Peut-on trouver une formule plus simple ?

13

Ensemble de N charges : symétrie

- $\mathcal{U}_e = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i)$
- Exemple $N = 3$
- $\mathcal{U}_e =$ somme des termes :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	—	—	—
$i=2$	$q_2 V_1(\vec{r}_2)$	—	—
$i=3$	$q_3 V_1(\vec{r}_3)$	$q_3 V_2(\vec{r}_3)$	—

- Remarque :

$$q_i V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = q_j V_i(\vec{r}_j) \text{ (normal !)}$$

- $\mathcal{U}_e =$ somme des termes (échanger i et j) :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	—	$q_1 V_2(\vec{r}_1)$	$q_1 V_3(\vec{r}_1)$
$i=2$	—	—	$q_2 V_3(\vec{r}_2)$
$i=3$	—	—	—

14

Ensemble de N charges : formule simple

- Reprendre

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i)$$

- Diviser par deux et ajouter l'autre moitié des termes !

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} q_i V_j(\vec{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} q_i V_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[q_i\left(\sum_{j\neq i} V_j(\vec{r}_i)\right)\right]$$

$$\boxed{\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)} \tag{8}$$

- $V(\vec{r}_i)$: potentiel créé au point $\vec{r}_i$ par toutes les *autres* charges (sauf la q_i)

Énergie électrostatique : charges continues

Distribution continue de charges

[Énergie électrostatique charges ponctuelles]

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)$$

- Distribution linéique : $\mathrm{d}q = \rho_l(\vec{r})\,\mathrm{d}l$ [charges électriques]

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho_l(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}l \tag{9}$$

- Distribution surfacique : $\mathrm{d}q = \rho_s(\vec{r})\,\mathrm{d}S$

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_S \rho_s(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}S \tag{10}$$

- Distribution volumique : $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$

$$\mathcal{U}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_\mathcal{V} \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{11}$$

- $V(\vec{r})$: le potentiel au point $\vec{r}$ créé par la distribution
- Intégrer *sur les charges*

Densité volumique d'énergie

- Peut-on exprimer l'énergie en termes de champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ plutôt que de potentiel V et de charges ρ ?

$$\mathcal{U}_\mathsf{e} = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}})V(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$
$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}}$$
$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, V$$

- Sans démonstration :

$$\boxed{\mathcal{U}_\mathsf{e} = \frac{1}{2}\int_\mathcal{V} \epsilon_0 E^2(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}} \tag{12}$$

- $\epsilon_0 E^2/2$: densité volumique d'énergie ($\mathrm{J\,m^{-3}}$)
- Intégrer *partout dans l'espace* !

18