DEVOIR SURVEILLÉ

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Les questions sont totalement indépendantes.

1) **Définitions et propriétés basiques** :

Soit f : $\mathcal{D}$réunion d'intervalles non réduits à un point $\to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.

On considère les 3 propositions :

1) f est continue en a 2) f est dérivable en a 3) $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale en $A(a, f(a))$

a) Donner les définitions de 1) et 2).

b) Ecrire l'implication classique entre les propositions 1) et 2) et justifier que la réciproque est fausse.

c) Quel lien (implication, équivalence ?) y-a-t-il entre 3) et l'une des 2 précédentes propositions ?

Donner la pente de la tangente ainsi qu'une équation de celle-ci.

2) **Continuité** : retraiter l'exercice de cours prouvant qu'une fonction polynôme P de degré impair admet au moins une racine réelle.

3) **Notion de dérivée :**

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\dfrac{1}{x} = 0$

(on se réfèrera 2 fois à ce résultat dans la suite **sans** être obligé de le **redémontrer** à chaque fois).

Prouver que $f : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{continue en } 0 \\ \text{dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et donner } f' \\ \text{dérivable aussi en } 0 \text{ et préciser } f'(0). \end{cases}$.

4) **Théorème de Rolle ; des accroissements finis ; quelques applications.**

a) **(Re)justifier** la proposition suivante : entre 2 zéros d'une fonction dérivable sur un intervalle, il y a au moins un zéro de sa dérivée.

b) Enoncer et **démontrer** le théorème des accroissement finis (avec un dessin l'illustrant).

c) **Applications :**

Soit $f : x \mapsto x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[n, n+1]$, en justifiant.

En déduire : $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < (n+1)^\alpha - n^\alpha < \dfrac{\alpha}{(n)^{1-\alpha}}$.

d) Donner la **définition** de ce qu'est une fonction k-lipschitzienne sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{R}_+)$.

Enoncer le corollaire du T.A.F. donnant une condition suffisante classique pour qu'une fonction $f : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **dérivable** soit k-lipschitzienne.

En déduire rapidement que $\sin$; $\arctan$; Argsh sont 1-lipschitziennes.

Exercice II

Soit $f : x \to \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_u$ de u et $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Préciser l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f.

Prouver que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad \mathrm{sgn}(f'(x)) = \mathrm{sgn}(u'(x))$.

Etudier à son tour u' puis obtenir le signe de u' et en déduire finalement $f' > 0$ sur $\mathcal{D}_f$.

3) Etudier les limites de u aux 4 bornes de l'ensemble de définition.

4) Prouver que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de celui-ci .

5) Donner le tableau de variation de $\widetilde{f}$, ainsi que sa représentation graphique.

Exercice III

Ce dernier exercice consiste à **choisir l'une des 2** questions suivantes, de nature bien différente, toutes 2 très courtes :

1) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ (penser à utiliser le binôme de Newton).

2) Prouver que la condition suffisante, rappelée dans la dernière question du I), pour qu'une fonction soit k-lipschitzienne est en fait également nécessaire.
