Électromagnétisme

TD 11
Phénomènes d'induction

Introduction : La variation du flux magnétique à travers un circuit a comme résultat l'apparition d'une force électromotrice dans celui-ci. Dans le cas où cette variation est due au *mouvement du circuit* (déplacement, rotation, déformation) dans un champ magnétique stationnaire, la force par charge $\vec{\boldsymbol{f}}$ générant la fem[1] est de nature *magnétique* (TD 8).

Par un raisonnement d'équivalence, on peut s'attendre à ce que, p.ex., la rotation d'un circuit dans un champ magnétique stationnaire (invariable dans le temps) et la rotation du champ magnétique en présence du même circuit — mais cette fois-ci immobile — aient les mêmes effets. Et de façon plus générale, que la variation du flux magnétique, quelle qu'en soit la cause (mouvement du circuit, mouvement du champ magnétique, variation dans le temps du champ magnétique) ait toujours le même effet, l'apparition d'une force électromotrice. Or, si le circuit reste immobile et la variation du flux est due uniquement aux variations temporelles du champ magnétique, la force électromotrice ne peut être générée par une force de nature magnétique : la force de Lorentz est exercée uniquement sur des charges en mouvement. Il en résulte donc qu'un *champ électrique induit est créé par la variation du flux magnétique.* Ce champ exerce une force de nature électrique $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$ sur les charges libres du circuit. La force par charge $\vec{\boldsymbol{f}}$ correspond alors au champ électrique induit. Les expériences de Faraday ont mis en évidence ce phénomène. L'équation (2) du TD 8 devient alors la loi de Faraday (forme intégrale) :

$$\text{fem} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \qquad (1)$$

où la dérivée temporelle se trouve maintenant à l'intérieur de l'intégrale, puisque la variation de Φ_B est due à la variation du champ magnétique. L'équation (1) peut s'écrire sous forme locale :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} \qquad (2)$$

Le signe négatif indique que *la fem induite génère des courants qui génèrent, à leur tour, un champ magnétique secondaire dont le flux s'oppose à la variation du flux du champ magnétique* $\vec{\boldsymbol{B}}$: c'est la loi de Lenz (une loi qualitative) qui décrit ce phénomène déjà rencontré dans le cadre d'une fem due au mouvement (TD 8).

Il faut remarquer que ce qu'implique la loi de Faraday est beaucoup plus général que l'apparition d'une force électromotrice dans un circuit soumis à une variation du flux magnétique : *toute variation du champ magnétique crée un champ électrique*

[1] Rappel : la fem est définie par $\text{fem} = \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l$, où $\vec{\boldsymbol{f}}$ est la force par charge et Γ la courbe (fermée) du circuit.

induit ! L'apparition d'une fem est l'*effet* de ce champ électrique : elle est conditionnée à la présence ou non d'un circuit, tandis que le champ électrique induit existe indépendamment de ce dernier.

Dans une région électriquement neutre (pas de charges positives ou négatives en excès, $\rho = 0$), la divergence du champ électrique est nulle alors que son rotationnel est égal à $-\,\mathrm{d}\vec{B}/\,\mathrm{d}t$. Le champ électrique induit ressemble donc au champ magnétostatique : les lignes de champ sont des boucles fermées et l'on peut exploiter les résultats de la magnétostatique afin de calculer le champ électrique. Il suffit pour cela de considérer le problème équivalent en magnétostatique, dont les courants $\vec{J}$ sont orientés comme la variation $-\,\mathrm{d}\vec{B}/\,\mathrm{d}t$ du problème d'induction, remplacer $\mu_0\vec{J}$ par $-\,\mathrm{d}\vec{B}/\,\mathrm{d}t$ et renommer le champ $\vec{B}$ du problème magnétostatique en champ électrique induit. Ce raisonnement d'équivalence n'est en aucun cas une approximation, il nécessite seulement le calcul de la dérivée temporelle du champ magnétique.

Souvent, on utilise la loi de Biot-Savart (TD 5) ou celle d'Ampère (TD 7) pour calculer le champ magnétique à partir de courants non-stationnaires (variables dans le temps). Or, ces deux lois ont été élaborées dans le cadre de la magnétostatique (courants stationnaires, invariables dans le temps, générant un champ magnétique, également stationnaire). Il s'agit donc d'une approximation, *valide uniquement en basses fréquences*.[2] Ce mélange de résultats issus de la magnétostatique mais utilisés dans le cadre de phénomènes variables dans le temps, porte le nom de *régime quasistatique* : il s'agit de l'approximation simplificative qui définit l'ensemble de l'Électronique.
Notions : induction ; loi de Faraday ; champ électrique induit ; régime quasistatique.

11.1 Champ électrique induit par un solénoïde

Un long solénoïde (Ex. 9.3) est parcouru par un courant alternatif $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Calculer le champ électrique induit à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

Résultat:

$$\vec{E}(\rho, t) = -\tfrac{1}{2}\mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t) \begin{cases} \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & , \rho < R \\ \frac{R^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi & , \rho > R \end{cases}$$

11.2 Self-inductance d'un solénoïde infini

Calculer la self-inductance *par unité de longueur*, $\mathcal{L}$, du solénoïde de l'exercice 9.3. (Commencer par calculer le flux à travers une spire, ensuite le flux à travers N spires, la self-inductance L associée à ces spires et finalement la self par unité de longueur).

Résultat:

- $\Phi_1 = \mu_0 n I \pi R^2$
- $\Phi_N = \mu_0 n^2 I \pi R^2 l$
- $L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$, $\mathcal{L} = L/l = \mu_0 n^2 \pi R^2$

[2] En réalité, comme on verra plus tard, cette approximation consiste à négliger le terme introduit par Maxwell dans la loi d'Ampère, c'est-à-dire à ne pas prendre en compte le « courant de déplacement » $\epsilon_0\,\mathrm{d}\vec{E}/\,\mathrm{d}t$. Vu la valeur numérique de la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F perm, ce terme peut être négligé tant que le champ électrique varie lentement, ce qui est la définition du terme « basses fréquences ».

11.3 Deux anneaux métalliques

On considère deux anneaux métalliques (comme celui de l'exercice 7.2) parallèles au plan xy. Le premier anneau (de rayon R_1) est centré à l'origine alors que le second (de rayon $R_2 \ll R_1$) est centré à $z = h$.

a. Calculer le flux magnétique Φ_2 à travers le second anneau quand le premier anneau est parcouru par un courant I_1.
b. Calculer l'inductance mutuelle entre les deux anneaux.
c. On note $I_2(t)$ le courant du deuxième anneau : calculer la force électromotrice dans le premier anneau.

Résultat:

a. $\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2} \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{\left(h^2+R_1^2\right)^{3/2}}$
b. $M_{21} = \Phi_2/I_1 = M_{12} = M$
c. *En régime quasistatique (variations lentes de $I_2(t)$),*
$fem_1 = -M \frac{I_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{\left(h^2+R_1^2\right)^{3/2}} \frac{I_2(t)}{\mathrm{d}t}$