27 mars 2017

Algèbre- Corrigé du DS1

Ce corrigé n'utilise que des réponses d'étudiants.
Ceux qui ne sont pas cités peuvent avoir proposé d'autres réponses intéressantes.
Ce corrigé vise à faire comprendre le niveau de réponse attendu.
N.A.

Exercice.

(1) H_1, H_2 étant donnés.

(a) Justifier que H_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

⚠ 3 vect. de $\mathbb{R}^4$. Le déterminant n'est pas défini. Utiliser ~~le rang ou~~ la définition de famille libre

(a,b,c) est une famille libre car, soit $x,y,z \in \mathbb{R}$

$xa + yb + zc = 0_{\mathbb{R}^4} \iff x(1,1,0,0) + y(-1,0,1,0) + z(3,0,0,1) = 0$

$\iff (x,x,0,0) + (-y,0,y,0) + (3z,0,0,z) = 0$

$\iff \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

On a bien $xa + yb + zc = 0 \iff$ ~~...~~ $x = y = z = 0$

On a donc que le rang de $\mathrm{Vect}(a,b,c)$ est maximal

De plus $\dim(\mathrm{Vect}(a,b,c)) = 3$
et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$

On a bien $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Vect}(a,b,c)) - 1$

$\mathrm{Vect}(a,b,c)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$

(b) Caractériser H_1 par une équation cartésienne.

H_1 est un hyperplan, il existe donc f une application linéaire tq: $\begin{cases} H_1 = \mathrm{Ker}(f) \\ f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \\ f(c) = 0 \end{cases}$ ~~on prend~~ cherche $f = \alpha e_1^* + \beta e_2^* + \gamma e_3^* + \lambda e_4^*$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$

(e_i^* les forme linéaire dans la base canonique)

D'où $\begin{cases} f(a) = \alpha + \beta = 0 \\ f(b) = -\alpha + \gamma = 0 \\ f(c) = 3\alpha + \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = \alpha \\ \lambda = -3\alpha \end{cases}$

La décomposition dans la base (e_i^*) est la seule qui justifient l'équation finale.

On a $f = \alpha e_1^* - \alpha e_2^* + \alpha e_3^* - 3\alpha e_4^*$

On choisi $\alpha = 1$

On obtient $H_1 = \{u \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - 3t = 0\}$

(c) Justifier que H_2 est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

H_2 est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ ssi H_2 est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) \longmapsto 2x+y+z \end{array} \right.$

$f(e_1) = 2$ donc $f \neq \tilde{0}$

f est bien une forme linéaire non nulle comme combinaison linéaire des formes linéaires canoniques : $f = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$

Très efficace - les e_i^* st déclarées comme formes linéaires. Aucun calcul nécessaire.

(d) Déterminer une base de H_2.

$H_2 = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+y+z = 0 \}$

Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$u \in H_2 \iff 2x+y+z=0$

$\iff y = -2x-z$ (Système dans $\mathbb{R}^4$ de rang 1 à 1 inconnue principale : y. 3 inconnues secondaires : x, z, t)

$\iff u = (x, -2x-z, z, t)$

$H_2 = \{ (x, -2x-z, z, t),\ x,y,z,t \in \mathbb{R} \}$

$= \text{Vect}(\underbrace{(1,-2,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,-1,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{u_3})$

$\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de H_2

(e) Soit $F = H_1 \cap H_2$. Déterminer la dimension de F puis celle de son orthogonal.

On a $F = H_1 \cap H_2$

soit $u \in \mathbb{R}^4$

$u \in F \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+z-3t=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = -2x-z \\ t = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases}$

Ici : à tous (excepté l'auteur) Inutile de chercher une base. Le rang du syst. lin. ds $\mathbb{R}^4$ est 2 ($H_1 \neq H_2$). Donc 2 paramètres indiquent que : $\dim F = 2$

Cuter le début.

On a donc $\dim(F) = 2$ car 2 inconnues principale et 2 secondaires. Or $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ donc $\dim(F^\perp) = 2$

(2) Soient G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

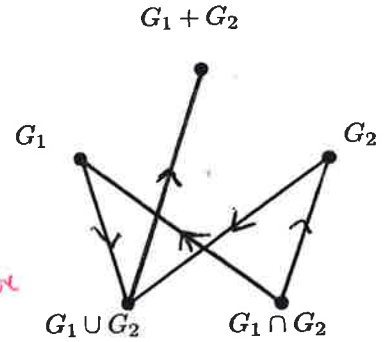
(a) Utiliser deux couleurs différentes pour tracer, dans le graphique ci-dessous, deux chaînes d'inclusion croissantes et maximales.

Légende :

$a \longrightarrow b$

$\equiv$ $a \subset b$.

Noter la prise d'initiative



Rq : Le signe « $\subset$ » convient dans une écrite unidirectionnelle. Ici, les flèches (orientation) conviennent

(b) Compléter la proposition suivante :
$G_1^\perp + G_2^\perp$ ... *est le plus* . petit .... *sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant* $G_1^\perp \cup G_2^\perp$.

Définition déjà vue ... et revue.

(c) Montrer : $(G_1^\perp \cup G_2^\perp) \subset (G_1^\perp + G_2^\perp) \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$.

Tout d'abord on a : $G_1^\perp \subset G_1^\perp + G_2^\perp$
$G_2^\perp \subset G_1^\perp + G_2^\perp$

donc de ceci on en déduit que :
$G_1^\perp \cup G_2^\perp \subset G_1^\perp + G_2^\perp$ ①

De plus : $G_1 \cap G_2 \subset G_2$
$G_1 \cap G_2 \subset G_1$ donc $G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)$
$G_1^\perp \subset (G_1 \cap G_2)$

donc $G_1^\perp \cup G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$

Or $G_1^\perp + G_2^\perp$ est le plus petit sev contenant $G_1^\perp \cup G$

ie que $(G_1 \cap G_2)^\perp = G_1^\perp + G_2^\perp$ ou $G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap$

Pour l'instant, l'on peut seulement affirmer que
$G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$ ②

De ①, ② on en déduit que :
$G_1^\perp \cup G_2^\perp \subset G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$.

Noter la maîtrise du français

(d) Montrer : $\begin{cases} G_1^\perp & \subset (G_1^\perp + G_2^\perp) \\ G_2^\perp & \subset (G_1^\perp + G_2^\perp) \end{cases} \Rightarrow (G_1 \cap G_2)^\perp \subset (G_1^\perp + G_2^\perp).$

Supposons $\begin{cases} G_1^\perp \subset (G_1^\perp + G_2^\perp) \\ G_2^\perp \subset (G_1^\perp + G_2^\perp) \end{cases}$

On a alors $\begin{cases} (G_1^\perp + G_2^\perp)^\perp \subset (G_1^\perp)^\perp = G_1 \\ (G_1^\perp + G_2^\perp)^\perp \subset (G_2^\perp)^\perp = G_2 \end{cases}$ car G_1 et G_2 sont SEV de $\mathbb{R}^5$ de dimension finie

donc $(G_1^\perp + G_2^\perp)^\perp \subset G_1 \cap G_2$

donc $(G_1 \cap G_2)^\perp \subset ((G_1^\perp + G_2^\perp)^\perp)^\perp = (G_1^\perp + G_2^\perp)$ 1 raison.

On a bien montré l'implication.

De plus $G_1^\perp$ et $G_2^\perp$ sont inclus dans $(G_1^\perp + G_2^\perp)$ par définition.

(e) Formuler une conclusion.

On a montré que $(G_1^\perp + G_2^\perp) \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$

et que $(G_1 \cap G_2)^\perp \subset (G_1^\perp + G_2^\perp)$

Finalement on a $(G_1^\perp + G_2^\perp) = (G_1 \cap G_2)^\perp$

Ici, il suffisait de lire les questions (c) et (d).

(3) $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel noté $(.|.)$.

(a) Expliquer pourquoi, sans calcul supplémentaire, on connaît u_1 une base de $H_1^\perp$.

On a définit une equation cartésienne de H_1, donc tel que :
$u \in H_1$; $ax+by+cz+dt=0$.
On reconnait le produit scalaire usuel et on en deduit.
$u_1 = (a,b,c,d) = (1,-1,1,-3)$

(b) Sans calcul, donner u_2 tel que : $H_2^\perp = \text{Vect}(u_2)$.

De même $u_2 = (2,1,1,0)$.

(c) Sans calcul, justifier que : $F^\perp = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

$$F^\perp = (H_1 \cap H_2)^\perp \underset{\text{propriété qu'on vient de démontrer}}{=} H_1^\perp + H_2^\perp = \text{Vect}(u_1) + \text{Vect}(u_2) = \text{Vect}(u_1,u_2)$$

(d) Orthonormaliser la base (u_1, u_2).

On a $(u_1|u_2) = 2 \neq 0$, il faut donc normaliser cette base.

Posons $u_1' = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{(u_1|u_1)}} u_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} u_1$

Posons également $\tilde{u}_2 = u_2 - \frac{(u_1|u_2)}{(u_1|u_1)} u_1$

$= (2,1,1,0) - \frac{2}{12}(1,-1,1,-3)$

$= \left(\frac{11}{6}, 7/6, 5/6, 3/6\right) = \frac{1}{6}(11,7,5,3)$

Maintenant posons $u_2' = \frac{1}{\|\tilde{u}_2\|}\tilde{u}_2 = \frac{1}{\frac{1}{6}\sqrt{204}}\tilde{u}_2$

A suivre.!!

$= \frac{6}{\sqrt{204}}\tilde{u}_2$

Vérifions : si on fait le produit scalaire suivant :

$(u_1'|u_2') = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{6}{\sqrt{204}}[11-7+5-9] = 0.$

La base est orthonormalisée.

(4) $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire ϕ.

(a) Donner G la matrice de Gram, relativement à ϕ, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (calculs non demandés).

V

$$G = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Montrer que : $H_1^\phi = \left\{ u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; {}^tM_1 G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (ne pas résoudre l'équation).

Soit $v \in \mathbb{R}^4$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$v \in H_1^\phi \iff \begin{cases} \phi(a,v) = 0 \\ \phi(b,v) = 0 \\ \phi(c,v) = 0 \end{cases} \iff$ ~~on "empile" les lignes~~ $\begin{cases} {}^tAGV = 0 \\ {}^tBGV = 0 \\ {}^tCGV = 0 \end{cases} \underset{\text{on "empile" les lignes}}{\iff} {}^t(ABC)GV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff {}^tM_1GV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec V la matrice colonne des coordonnées de v qui soit quelconque dans $\mathbb{R}^4$, donc $v = (x,y,z,t)$

donc ${}^tM_1 G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalement $v \in H_1^\phi \iff {}^tM_1 G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $H_1^\phi = \left\{ v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; {}^tM_1 G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

(c) Vérifier $v_1 = (-24, 36, -28, 25)$ une base de H_1^ϕ.

$\phi(v_1, a) = -24 + 2(36-24)\times 2 + 3\times 2(36-24-28) + 4\times 2(36+25-24-28)$

$= 24 - 96 + 72$

$= 0$

$\phi(v_1, b) = 24 - 2(36-24) = 0$

$\phi(v_1, c) = -72 + 2\times 3(36-24) + 3\times 3(36-24-28) + 4\times 4(36+25-24-28$

$= 0 - 151 + 151$

$= 0$

Noter la prise d'initiative dans le changement de présentation des calculs.

~~DZ~~ Donc $v_1 \in H_1^\phi$, de plus $\dim H_1^\phi = 1$ donc v_1 base de H_1^ϕ

(d) Appliquer directement la méthode matricielle pour déterminer v_2 tel que : $H_2^{\phi} = \text{Vect}(v_2)$.

$d = (1,-2,0,0)$, $e = (0,-1,1,0)$, $f = (0,0,0,1)$

$$M_2 = (d\ e\ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^tM_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on déduit de la question c :

$$H_2^{\phi} = \left\{ v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, {}^tM_2\, G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On resoud l'équation, pour trouver $v = v_2 = (x,y,z,t)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser Gauss !

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & -9 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 9y - 7z - 4t = 0 \\ -2x - 2y = 0 \\ 4x + 4y + 4z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y - 7z - 4t = 0 \\ x = -y \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + 7t - 4t = 0 \\ x = -y \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3}y \\ x = -y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases}$$

Donc $v = \left(-y, y, -\frac{1}{3}y, \frac{1}{3}y\right)$ $y \in \mathbb{R}$

$v_2 = \left(-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$H_2^{\phi} = \text{Vect}\left(\left(-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$

(e) Conclure en donnant une base de F^{ϕ}.

$F^{\phi} = H_1^{\phi} \cap H_2^{\phi} = \text{Vect}(v_1, v_2)$