# Jeux sur les graphes ou comment avoir un $\frac{1}{2}$-coup d'avance

Paul Dorbec
Université de Bordeaux - CNRS

March 16, 2016

# De quels jeux parlons nous?


Les reconnaitrez vous tous?

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs (*Richard* et *Louise*)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)
3. pas de hasard (pas de dés, de mélange de cartes...)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)
3. pas de hasard (pas de dés, de mélange de cartes...)

# Les jeux combinatoires

1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)
3. pas de hasard (pas de dés, de mélange de cartes...)
4. le jeu s'arrête toujours par l'impossibilité de jouer d'un joueur. (Pas de répétitions de coup entrainant un match nul)

# Les jeux combinatoires

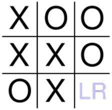
1. deux joueurs ($\mathcal{R}$ichard et $\mathcal{L}$ouise)
2. les deux joueurs savent ce qu'il se passe (information complète)
3. pas de hasard (pas de dés, de mélange de cartes...)
4. le jeu s'arrête toujours par l'impossibilité de jouer d'un joueur. (Pas de répétitions de coup entrainant un match nul)

# Jeux impartiaux ou partisans?

## Jeu impartial

Les deux joueurs ont les mêmes règles, déplacent les mêmes pièces





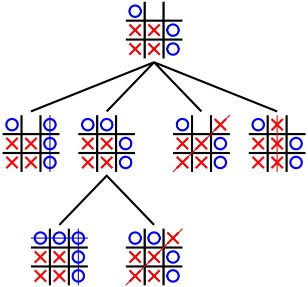

## Jeu partisan

Les deux joueurs ont des règles différentes. Par exemple :

- $\mathcal{L}$ouise joue les pièces noires, $\mathcal{R}$ichard les pièces blanches
- $\mathcal{L}$ouise déplace les pièces dans un sens, $\mathcal{R}$ichard dans l'autre
- $\mathcal{L}$ouise fait des croix, $\mathcal{R}$ichard fait des ronds...

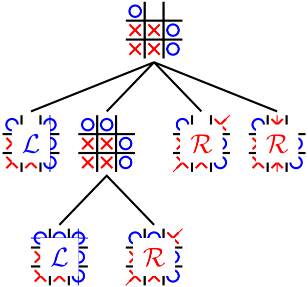
# Comment savoir qui gagne? (issue du jeu)

- On décrit un jeu $G$ par ses options ($G = \{G^{\boldsymbol{L}} | G^{\boldsymbol{R}}\}$)
- déssiné comme un arbre



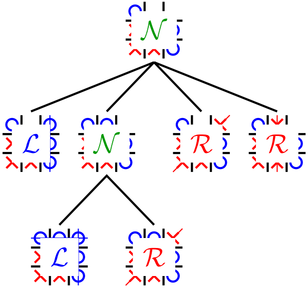
# Comment savoir qui gagne? (issue du jeu)

- On décrit un jeu $G$ par ses options ($G = \{G^{\boldsymbol{L}} | G^{\boldsymbol{R}}\}$)
- déssiné comme un arbre
- On connait l'issue des feuilles



# Comment savoir qui gagne? (issue du jeu)

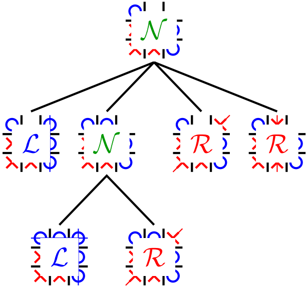
- On décrit un jeu $G$ par ses options ($G = \{G^{\boldsymbol{L}} | G^{\boldsymbol{R}}\}$)
- déssiné comme un arbre
- On connait l'issue des feuilles
- On déduit l'issue d'une feuille par les issue de ses options.



# Comment savoir qui gagne? (issue du jeu)

- On décrit un jeu $G$ par ses options ($G = \{G^{\boldsymbol{L}} | G^{\boldsymbol{R}}\}$)
- déssiné comme un arbre
- On connait l'issue des feuilles
- On déduit l'issue d'une feuille par les issue de ses options.

Mais l'arbre est énorme!



# Comment gérer la taille de l'arbre?

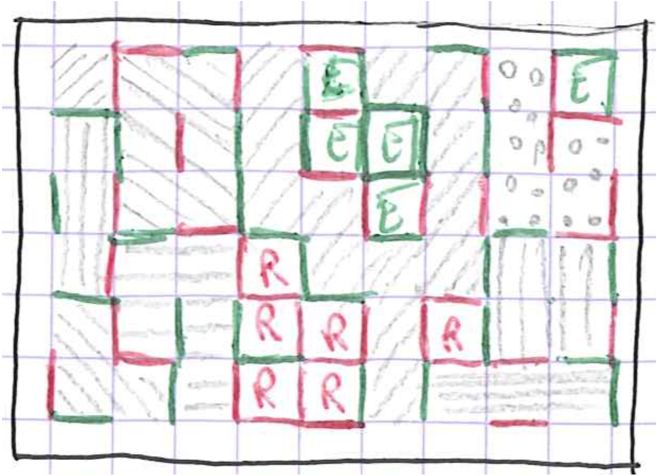
# Comment gérer la taille de l'arbre?


## AlphaGo!

- On ne le dessine pas en entier (MCTS)
  $\rightarrow$ on explore des branches tirées au hasard.
- On évalue des positions ("devine le score")
  $\rightarrow$ permet de ne pas descendre au fond de l'arbre.
- Évaluer des coups
  $\rightarrow$ limite l'exploration en largeur.

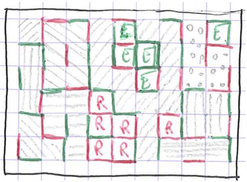
$\rightarrow$ approche heuristique.

# Sommes de jeux



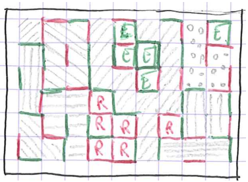
# Sommes de jeux

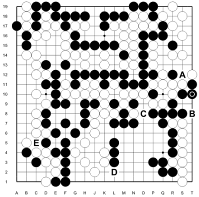
- Dans un jeu $G + H$, chaque joueur joue soit dans $G$, soit dans $H$



# Sommes de jeux

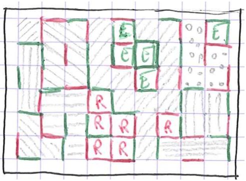
- Dans un jeu $G + H$, chaque joueur joue soit dans $G$, soit dans $H$

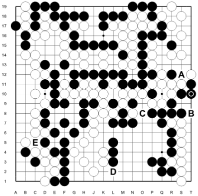


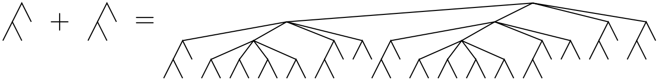


# Sommes de jeux

- Dans un jeu $G + H$, chaque joueur joue soit dans $G$, soit dans $H$
- l'arbre de $G + H$ est souvent bien plus grands que celui des termes...

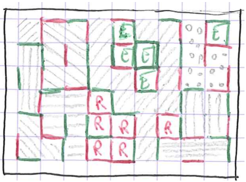


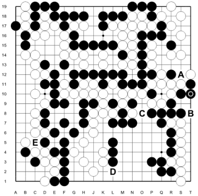


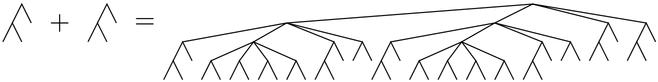



# Sommes de jeux

- Dans un jeu $G + H$, chaque joueur joue soit dans $G$, soit dans $H$
- l'arbre de $G + H$ est souvent bien plus grands que celui des termes...
- On souhaite résoudre $G$ et $H$
  $\rightarrow$ calculer l'issue de $G + H$

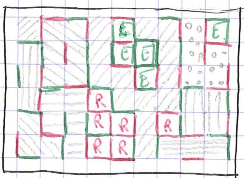


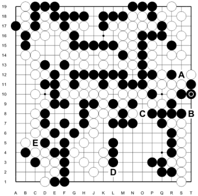


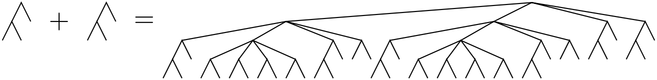



# Sommes de jeux

- Dans un jeu $G + H$, chaque joueur joue soit dans $G$, soit dans $H$
- l'arbre de $G + H$ est souvent bien plus grands que celui des termes...
- On souhaite résoudre $G$ et $H$
  $\rightarrow$ calculer l'issue de $G + H$
- on ne sait plus qui commence!





# Quelles issues possibles

Jeu: une position sans spécifier qui commence.

## Qui gagne: l'issue du jeu

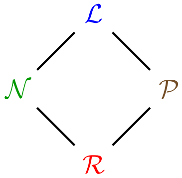
# Quelles issues possibles

Jeu: une position sans spécifier qui commence.

## Qui gagne: l'issue du jeu

Quatre possibilités:

- $\mathcal{L}$ouise gagne ($o(G) = \mathcal{L}$) (aussi b$\mathcal{L}$eu, $\mathcal{L}$eft).
- $\mathcal{R}$ichard gagne ($o(G) = \mathcal{R}$) (aussi $\mathcal{R}$ouge, $\mathcal{R}$ight).
- $\mathcal{N}$ext: le joueur suivant gagne ($o(G) = \mathcal{N}$).
- $\mathcal{P}$revious: le joueur $\mathcal{P}$récédent gagne ($o(G) = \mathcal{P}$).



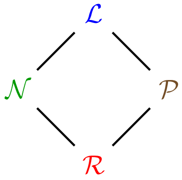
# Quelles issues possibles

Jeu: une position sans spécifier qui commence.

## Qui gagne: l'issue du jeu

Quatre possibilités:

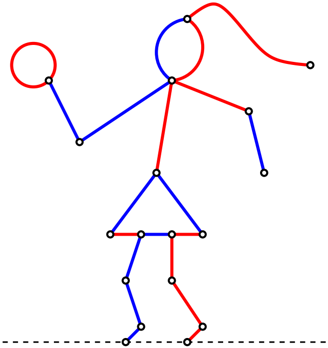
- $\mathcal{L}$ouise gagne ($o(G) = \mathcal{L}$) (aussi b$\mathcal{L}$eu, $\mathcal{L}$eft).
- $\mathcal{R}$ichard gagne ($o(G) = \mathcal{R}$) (aussi $\mathcal{R}$ouge, $\mathcal{R}$ight).
- $\mathcal{N}$ext: le joueur suivant gagne ($o(G) = \mathcal{N}$).
- $\mathcal{P}$revious: le joueur $\mathcal{P}$récédent gagne ($o(G) = \mathcal{P}$).




Il faut quand même plus d'information pour résoudre un jeu

# Notre jeu: Hackenbush

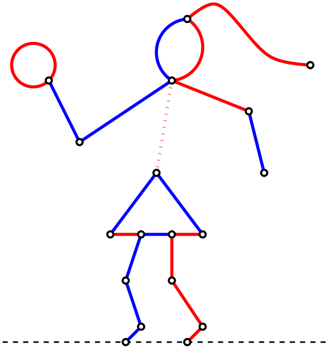
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue le premier

# Notre jeu: Hackenbush

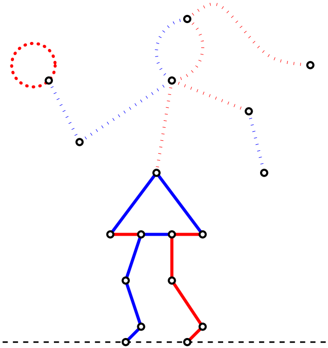
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue le premier

# Notre jeu: Hackenbush

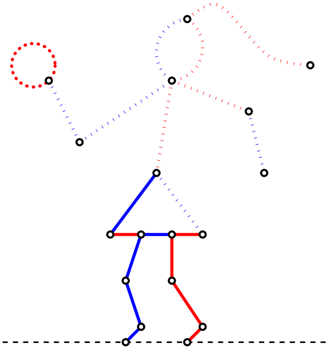
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



Le pantin perd la tête

# Notre jeu: Hackenbush

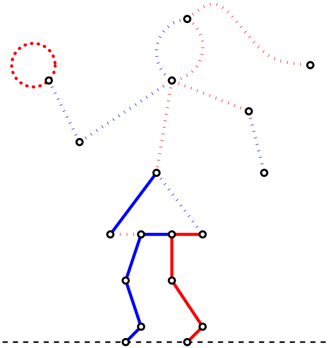
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{L}$ouise joue

# Notre jeu: Hackenbush

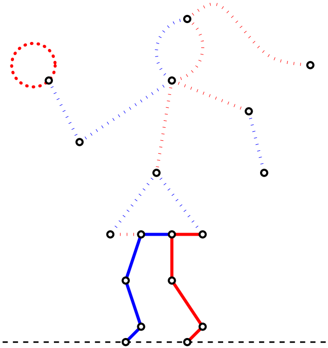
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue

# Notre jeu: Hackenbush

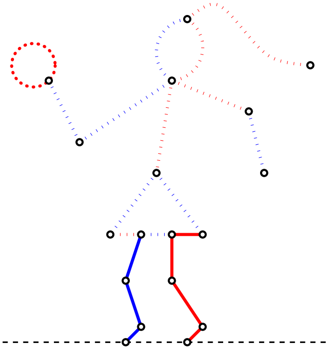
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



chute d'un morceau de jupe

# Notre jeu: Hackenbush

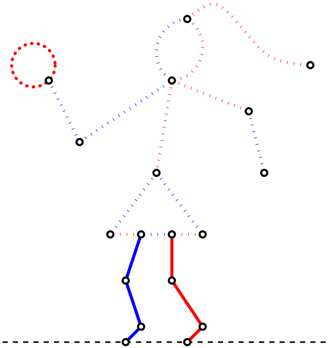
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{L}$ouise joue

# Notre jeu: Hackenbush

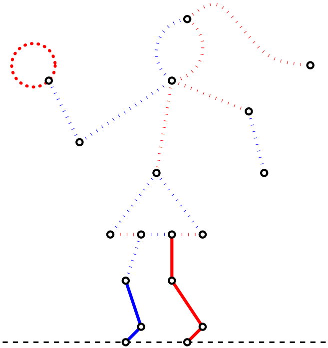
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue

# Notre jeu: Hackenbush

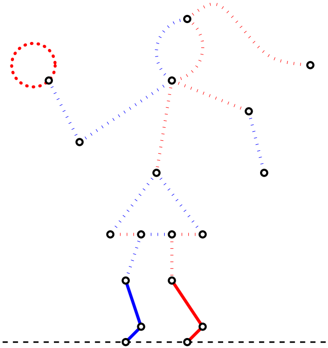
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{L}$ouise joue

# Notre jeu: Hackenbush

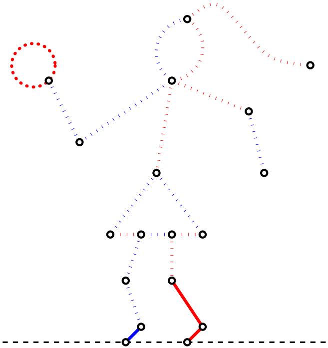
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue

# Notre jeu: Hackenbush

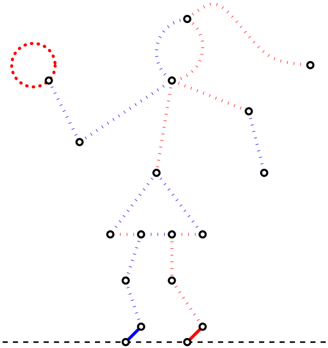
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{L}$ouise joue

# Notre jeu: Hackenbush

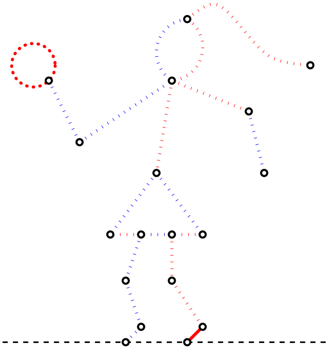
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{R}$ichard joue

# Notre jeu: Hackenbush

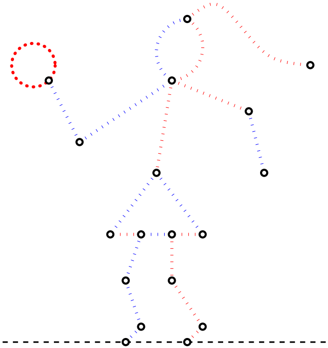
- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



$\mathcal{L}$ouise joue

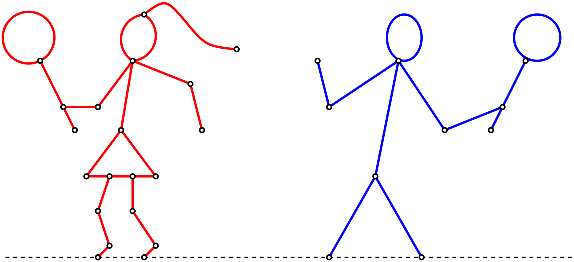
# Notre jeu: Hackenbush

- On joue sur un dessin (rouge/bleu).
- $\mathcal{R}$ichard enlève des arêtes $\mathcal{R}$ouges.
- $\mathcal{L}$ouise enlève des arêtes b$\mathcal{L}$eues.
- Tout ce qui ne touche plus le sol tombe.
- Dès qu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.



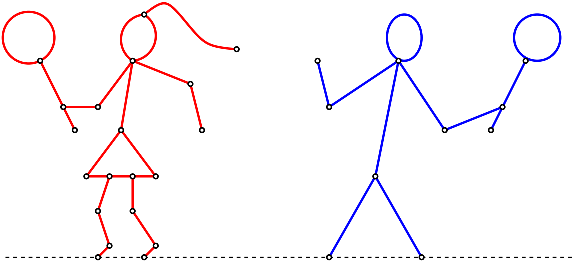
$\mathcal{L}$ouise a perdu!

# Un cas facile



Qui gagne?

# Un cas facile



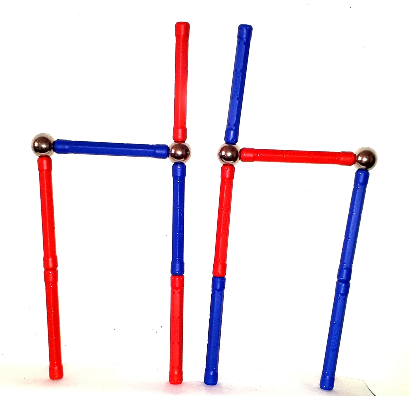
Qui gagne?

## Cas d'un dessin d'une seule couleur

Si le jeu est constitué de dessins indépendants monochromes, celui qui a le plus d'arêtes gagne!
Si les deux joueurs ont le même nombre d'arêtes, celui qui joue en premier perd.

# Qui gagne?

La position de départ :



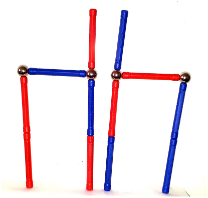
# Reprenons...

## Quatre types de jeux

- $\mathcal{L}$ouise peut toujours gagner (elle a une stratégie gagnante).
- $\mathcal{R}$ichard peut toujours gagner.
- Le premier qui joue perd.
- Le premier qui joue gagne.

# Et notre récréation?

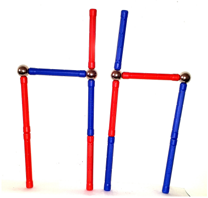
Le deuxième joueur gagnait à chaque coup!



On peut adopter une stratégie d'imitation : quoique fasse l'adversaire, on fait la même chose dans l'autre copie.

# Et notre récréation?

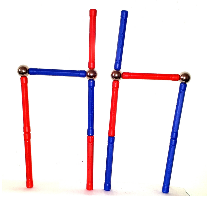
Le deuxième joueur gagnait à chaque coup!



On peut adopter une stratégie d'imitation : quoique fasse l'adversaire, on fait la même chose dans l'autre copie.

# Et notre récréation?

Le deuxième joueur gagnait à chaque coup!



On peut adopter une stratégie d'imitation : quoique fasse l'adversaire, on fait la même chose dans l'autre copie.

Autrement dit, c'est un jeu nul!

# Donnons des valeurs aux jeux...

## Un jeu nul?

- si le premier joueur perd, on dit que le jeu est *nul* $(= 0)$

# Donnons des valeurs aux jeux...

## Un jeu nul?

- si le premier joueur perd, on dit que le jeu est *nul* $(= 0)$
- si $\mathcal{R}$ichard gagne toujours, on dit que le jeu est *négatif* $(< 0)$
- si $\mathcal{L}$ouise gagne toujours, on dit que le jeu est *positif* $(> 0)$

# Donnons des valeurs aux jeux...

## Un jeu nul?

- si le premier joueur perd, on dit que le jeu est *nul* $(= 0)$
- si $\mathcal{R}$ichard gagne toujours, on dit que le jeu est *négatif* $(< 0)$
- si $\mathcal{L}$ouise gagne toujours, on dit que le jeu est *positif* $(> 0)$
- si le premier joueur gagne, on dit que le jeu est *flou* $(\|0)$

# Donnons des valeurs aux jeux...

## Un jeu nul?

- si le premier joueur perd, on dit que le jeu est *nul* $(= 0)$
- si $\mathcal{R}$ichard gagne toujours, on dit que le jeu est *négatif* $(< 0)$
- si $\mathcal{L}$ouise gagne toujours, on dit que le jeu est *positif* $(> 0)$
- si le premier joueur gagne, on dit que le jeu est *flou* $(||0)$

## Hackenbush n'est pas flou!

Dans Hackenbush, il n'y a jamais d'avantage à commencer.

# Et concrètement?

## Donnons des valeurs simples...

- Un jeu sans arête vaut $0 = \{|\}$
- Un jeu avec une arête Bleue vaut $1 = \{0|\}$
- Un jeu avec une arête Rouge vaut $-1 = \{|0\}$

# Et concrètement?

## Donnons des valeurs simples...

- Un jeu sans arête vaut $0 = \{|\}$
- Un jeu avec une arête Bleue vaut $1 = \{0|\}$
- Un jeu avec une arête Rouge vaut $-1 = \{|0\}$

Qui peut proposer un jeu qui vaut 2?

# Et concrètement?

## Donnons des valeurs simples...

- Un jeu sans arête vaut $0 = \{|\}$
- Un jeu avec une arête Bleue vaut $1 = \{0|\}$
- Un jeu avec une arête Rouge vaut $-1 = \{|0\}$

Qui peut proposer un jeu qui vaut 2?

## coups d'avance

On peut assimiler la valeur d'un jeu au nombre de coups d'avance de $\mathcal{L}$ouise.

# Que faire de ces valeurs?

Si on joue à 1 et $-1$ en même temps...

# Que faire de ces valeurs?

Si on joue à 1 et $-1$ en même temps...

Le premier joueur perd... $\rightarrow$ c'est un jeu nul ! $-1+1=0$

# Que faire de ces valeurs?

Si on joue à 1 et $-1$ en même temps...

Le premier joueur perd... $\rightarrow$ c'est un jeu nul ! $-1+1=0$

## Somme de jeux

On appelle somme de deux jeux le jeu consistant en la réunion des deux jeux, chaque joueur pouvant jouer à son tour dans l'un ou l'autre des deux jeux.

# Que faire de ces valeurs?

Si on joue à 1 et $-1$ en même temps...

Le premier joueur perd... $\rightarrow$ c'est un jeu nul ! $-1 + 1 = 0$

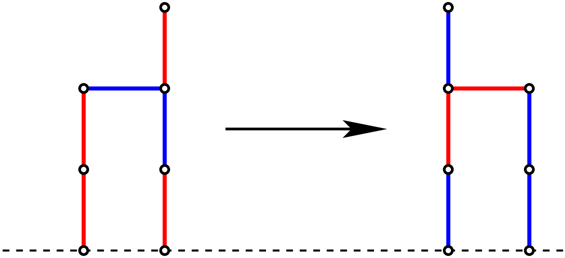
## Somme de jeux

On appelle somme de deux jeux le jeu consistant en la réunion des deux jeux, chaque joueur pouvant jouer à son tour dans l'un ou l'autre des deux jeux.

Et maintenant, on aimerait que ce soit cohérent!

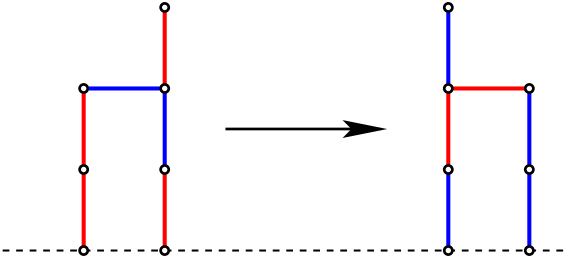
# Le négatif

Si dans un dessin, on échange toutes les couleurs des arêtes...



# Le négatif

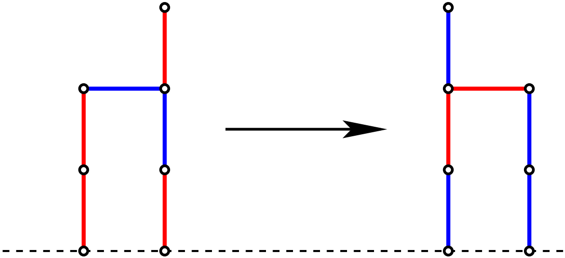
Si dans un dessin, on échange toutes les couleurs des arêtes...



La somme est nulle... (cf récréation) On dira donc que c'est son opposé!

# Le négatif

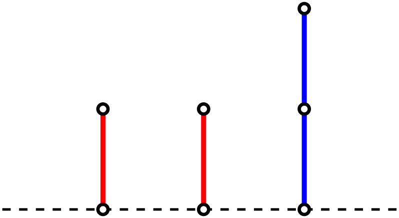
Si dans un dessin, on échange toutes les couleurs des arêtes...



La somme est nulle... (cf récréation) On dira donc que c'est son opposé!

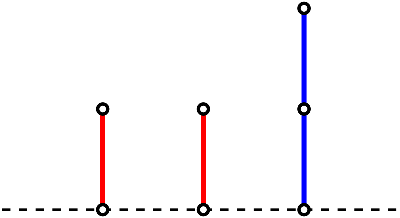
On sait maintenant comparer 2 nombres : on joue des sommes...

# $2 = 1 + 1$



On montre que $-1 - 1 + 2 = 0$

# $2 = 1 + 1$



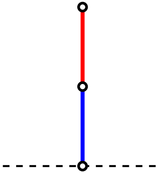
On montre que $-1 - 1 + 2 = 0$

On peut aussi montrer que $1 < 2$...
en montrant que $2 - 1 > 0$ (gagnant pour $\mathcal{L}$ouise!)

# Exercice

Combien vaut ce jeu?

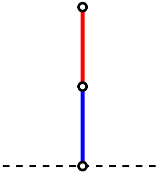
(Est-il positif? Négatif? ... )



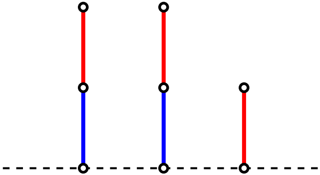
# Exercice

Combien vaut ce jeu?

(Est-il positif? Négatif? ... )



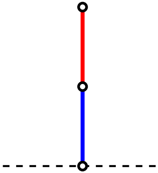
Indice : Combien vaut ce jeu?



# Exercice

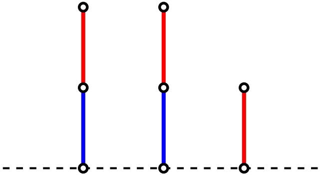
Combien vaut ce jeu?

(Est-il positif? Négatif? ... )

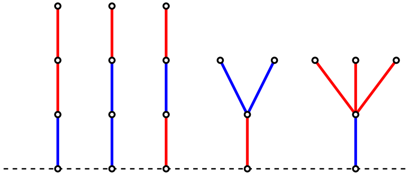


Indice : Combien vaut ce jeu?

$x + x - 1 = 0$, donc $x = \frac{1}{2}$



# et d'autres valeurs encore...



D'autres jeux dont on peut déterminer la valeur...

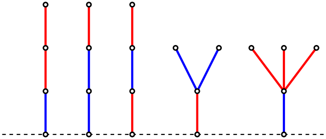
# La solution est la simplicité même...

## Règle de Simplicité

La valeur d'un jeu de Hackenbush est la valeur la plus *simple* comprise entre toutes les options de $\mathcal{L}$ouise et toutes les options d'$\mathcal{R}$ichard...

Une valeur est dite simple si

- si elle est entière, elle est la plus petite possible
- si elle est fractionnaire, son dénominateur est une petite puissance de deux.



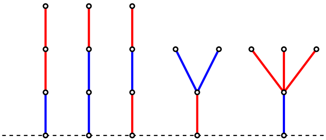
# La solution est la simplicité même...

## Règle de Simplicité

La valeur d'un jeu de Hackenbush est la valeur la plus *simple* comprise entre toutes les options de $\mathcal{L}$ouise et toutes les options d'$\mathcal{R}$ichard...

Une valeur est dite simple si

- si elle est entière, elle est la plus petite possible
- si elle est fractionnaire, son dénominateur est une petite puissance de deux.

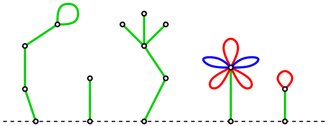


Les valeurs correspondantes :

$$\begin{array}{rcl} \{0|\frac{1}{2},1\} & = & \frac{1}{4} \\ \{0,1|2\} & = & \frac{3}{2} \\ \{-1|-\frac{1}{2},0\} & = & -\frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \{-\frac{1}{2}|0\} & = & -\frac{1}{4} \\ \{0|\frac{1}{4}\} & = & \frac{1}{8} \end{array}$$

# Hackenbush Bleu-Rouge-Vert

- Une variante de Hackenbush peut ajouter des arêtes *vertes*, retirables par $\mathcal{R}$ichard ou $\mathcal{L}$ouise...



- Une arête verte seule : $\{0|0\} = \star$ : c'est un jeu flou!
- Les jeux avec que des arêtes vertes sont impartiaux, on parle de *Nimbers*
- mais tout ceci est une autre histoire!

# Merci de votre attention...

Et bonnes parties de Hackenbush!

Des chercheurs en théorie des jeux combinatoires après (ou pendant) une scéance de travail.