d) Décrivons $51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

$$51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = \{ n \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists l \in \mathbb{Z}, n = 51k = 9l \}$$

Soit $n \in 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 51k$
l $n = 9l$

Donc : $51k = 9l$
$17k = 3l$

$17k$ est donc multiple de 3

Or 3 et 17 sont 1^er entre eux

Nécessairement, 3 divise k

Donc : il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tq $k = 3k'$

Donc, en reportant dans la relation $(n = 51k)$

on obtient : $n = 51 \times (3k')$

i-e : $n = 153k'$

Donc : $n \in 153\mathbb{Z}$

On a montré : $\forall n \in 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$, $n \in 153\mathbb{Z}$

• Réciproquement, $153\mathbb{Z}$ est-il inclus dans $51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

Soit $n \in 153\mathbb{Z}$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq : $n = 153k$

Or : $153 = 51 \times 3 = 9 \times 17$

Donc : $\begin{cases} n = 51 \times (3k) \\ n = 9 \times (17k) \end{cases}$

Suite correct ex 3

c) Montrons que : $E = 3\mathbb{Z}$

Rq : 3 = pgcd $(51, 9)$

. Montrons $E \subset 3\mathbb{Z}$

Soit $n \in E$

Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $n = 51a + 9b$

Or 3 divise 51 et 9 : $51 = 3 \times 17$ et $9 = 3 \times 3$

Donc : $n = (3 \times 17)a + (3 \times 3)b$

Donc : $n = 3 \times (17a + 3b)$

Donc : $n \in 3\mathbb{Z}$

On a montré : $\forall n \in E$, $n \in 3\mathbb{Z}$

i-e : $E \subset 3\mathbb{Z}$

. Montrons : $3\mathbb{Z} \subset E$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq : $n = 3k$

Or $3 = 51 \times (-1) + 9 \times 6$ par ⓐ

Donc : $n = [51 \times (-1) + 9 \times 6] \times k$

Donc : $n = 51 \times (-k) + 9 \times (6k)$

Donc : $n \in E$

On a montré : $\forall n \in 3\mathbb{Z}$, $n \in E$

i-e : $3\mathbb{Z} \subset E$

Conclusion : $\begin{cases} E \subset 3\mathbb{Z} \\ 3\mathbb{Z} \subset E \end{cases}$ donc : $E = 3\mathbb{Z}$

Donc : $\begin{cases} n \in 51\mathbb{Z} \\ n \in 9\mathbb{Z} \end{cases}$

Donc : $n \in 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

On a montré : $\forall n \in 153\mathbb{Z}$, , $n \in 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

i-e : $153\mathbb{Z} \subset 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$

Conclusion : $\begin{cases} 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} \subset 153\mathbb{Z} \\ 153\mathbb{Z} \subset 51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} \end{cases}$

Donc $51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 153\mathbb{Z}$