UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Fonctions de plusieurs variables

René-J. BWEMBA

CHAPITRE 3 – FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

---

1. GENERALITES ET NOTION DE LIMITE.

1.1 LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT.

Soient deux espaces vectoriels normés $(E, \mathcal{N}_E)$ et $(F, \mathcal{N}_F)$.

Soit f une application définie sur un sous-espace vectoriel V de E à valeurs dans F.

Soit enfin $x_0 \in \bar{V}$.

DEFINITION 1.1.

On dit que f admet pour limite $l \in F$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V, \mathcal{N}_E(x - x_0) < \eta \Rightarrow \mathcal{N}_F(f(x) - l) < \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

REMARQUE 1.1.

Comment traduire cette notion en termes de boules ?

Nous pouvons ré-écrire la DEFINITION 1.1 sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; f(\mathcal{B}_{\mathcal{N}_E}(x - x_0, \eta)) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{N}_F}(f(x) - l, \varepsilon)$$

PROPOSITION 1.1.

On a les équivalences suivantes :

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

(ii) L'image par f de toute suite de vecteurs de V (convergeant vers x_0) tend vers l ; en d'autres termes :

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V \; t.q. \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$$

(iii) $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V \; t.q. \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_F(f(x_n) - l) = 0$

REMARQUE 1.2.

(i) Unicité de la limite : si la limite existe, alors elle est unique.

(ii) Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors la notion de limite ne dépend pas des normes choisies.

(iii) Dans la pratique : on peut étudier l'existence et calculer la valeur (éventuelle) d'une limite l de f en $x_0 \in \bar{V}$ par majoration, par encadrement, par composition (de limites)…

EXEMPLE 1.1.

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

La limite de f en $(0,0)$ existe-t-elle ?

On peut partir de la majoration : $|\sin x| \leq |x| \; , \; \forall x \in \mathbb{R}$

Et donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{|\sin(x^4) + \sin(y^4)|}{\sqrt{x^4 + y^4}} \leq \frac{|\sin(x^4)| + |\sin(y^4)|}{\sqrt{x^4 + y^4}} \leq \frac{|x^4| + |y^4|}{\sqrt{x^4 + y^4}} = \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Puis,

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^4 + y^4}$$

Et comme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^4 + y^4} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

EXEMPLE 1.2.

Par encadrement, on peut calculer la limite de la fonction suivante en $(0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{1+\cos x}{|\ln|y||}$$

En effet, sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq 1 + \cos x \leq 2$$

On a :

$$0 \leq \frac{1+\cos x}{|\ln|y||} \leq \frac{2}{|\ln|y||}$$

Or

$$\lim_{y\to 0} \frac{2}{|\ln|y||} = 0$$

Et donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

1.2 APPLICATIONS PARTIELLES.

DEFINITION 1.2.

Nous considérons les e.v.n suivants : $(E, \mathcal{N})$, $(E_1, \mathcal{N}_1)$ et $(E_2, \mathcal{N}_2)$, et la fonction :

$$f : E_1 \times E_2 \to E$$

telle que

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2, \qquad f(x,y) = z$$

On appelle alors applications partielles, les applications définies par :

(i) $\forall a \in E_1, f_a : E_2 \to E$, t .q. $f_a(y) = f(a,y)$;

(ii) $\forall b \in E_2, f_b : E_1 \to E$, t .q. $f_b(x) = f(x,b)$.

PROPOSITION 1.2.

Soit un vecteur $(a,b) \in E_1 \times E_2$.

Si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

Alors

$$\lim_{y\to b} f(a,y) = l \qquad et \qquad \lim_{x\to a} f(x,b) = l$$

(c'est –à-dire que les applications partielles tendent également vers l)

ATTENTION : la réciproque est FAUSSE.

EXEMPLE 1.3.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2}$$

Afin de calculer la limite de cette fonction en $(0,0)$, étudions ses applications partielles :

Fixons $a = 0$, $f(0,y) = 0$ et $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

De même,

fixons $b = 0$, $f(x,0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$.

Cependant,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$$

Car si on considère la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ définie par :

$$u_n = (x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$$

On a bien :

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$$

Calculons à présent

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$$

On a :

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Et donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq 0$$

L'unicité de la limite quand elle existe, permet donc de conclure que la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

D'où la remarque suivante.

REMARQUE 1.3.

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point (x_0, y_0), il suffira de montrer que les applications partielles f_{x_0} et f_{y_0} ont des limites différentes quand $y \to y_0$ et quand $x \to x_0$ ou alors que l'une des applications partielles n'admet pas de limite.

2. CONTINUITE DANS UN E.V.N. ET APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES.

Soient deux espaces vectoriels normés $(E, \mathcal{N}_E)$ et $(F, \mathcal{N}_F)$.

Soit f une application définie sur un sous-espace vectoriel V de E à valeurs dans F.

2.1 CONTINUITE.

DEFINITION 2.1.

On dit que f est continue en $x_0 \in E$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V, \mathcal{N}_E(x - x_0) < \eta \Rightarrow \mathcal{N}_F(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur V si et seulement si f est continue en tout point de V.

REMARQUE 2.1.

f est continue en x_0 peut donc s'interpréter par :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

EXEMPLE 2.1.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} & x \neq -y \\ 1 & x = -y \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En effet :

Pour $x \neq -y$: la fonction f est continue comme quotient de fonctions continues (de dénominateur non nul) ;

Pour $x = -y$:

$$\lim_{(x,y)\to(x,-x)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

D'autre part, par définition de f :

$$f(x,-x) = 1$$

On en déduit donc la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 2.1.

Soit $(E, \mathcal{N}_E)$ un espace vectoriel normé.

Soit f une application définie sur un sous-espace vectoriel V de E à valeurs (vectorielles) dans $F = \mathbb{R}^p, p \in \mathbb{N}^*$.

On note : $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big), \quad \forall x \in V$

Soit enfin $x_0 \in V$.

f est continue en x_0 si et seulement si f_j est continue en x_0, $\forall j = 1, \dots, p$.

EXEMPLE 2.2.

L'application $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\varphi_1(r,\theta) = r\cos\theta$$

et

$$\varphi_2(r,\theta) = r\sin\theta$$

sont continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2.2 APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES.

DEFINITION 2.2.

Soient deux espaces vectoriels normés $(E, \mathcal{N}_E)$ et $(F, \mathcal{N}_F)$.

Soit f une application définie sur un sous-espace vectoriel V de E à valeurs dans F.

L'application f est dite lipschitzienne de rapport $k > 0$ (ou encore k-lipschitzienne) si et seulement si :

$$\exists k > 0, \forall (x,y) \in V^2, \qquad \mathcal{N}_F\big(f(x) - f(y)\big) \leq k\, \mathcal{N}_E(x-y)$$

CONSEQUENCE IMMEDIATE :

Une application lipschitzienne est continue sur son domaine de définition.

Démonstration :

Soit $x_0 \in V$, montrons que f est continue en x_0 c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V,\ \mathcal{N}_E(x - x_0) \leq \eta \Rightarrow \mathcal{N}_F\big(f(x) - f(x_0)\big) \leq \varepsilon \qquad (2)$$

D'après l'hypothèse que f est k-lipschitzienne, on a :

$$\exists k > 0, \forall (x,y) \in V^2, \qquad \mathcal{N}_F\big(f(x) - f(y)\big) \leq k\, \mathcal{N}_E(x-y)$$

En $y = x_0$:

$$\mathcal{N}_F\big(f(x)-f(x_0)\big) \leq k\ \mathcal{N}_E(x-x_0) \leq k\eta$$

Il suffit de choisir : $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ pour conclure à la continuité de f en x_0.

EXEMPLE 2.3.

(i) Toute application f continue sur [a,b] à valeurs dans ℝ dont la dérivée est également continue sur [a,b] à valeurs dans ℝ est lipschitzienne.

On a pour tous $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)dt\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| \int_x^y dt$$

En effet, l'application $|f'|$ étant continue sur $[a,b]$, y est bornée, c'est-à-dire :

$$\exists M>0, |f'(t)| \leq M, \forall t \in [x,y] \subset [a,b]$$

Donc :

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

L'application f est M-lipschtzienne.

(ii) Dans l'e.v.n $(E,\mathcal{N})$, l'application $\mathcal{N}$ est 1-lipschtzienne.

Considérons la DEFINITION 2.2 pour l'application $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}_F\big(\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(y)\big) \leq k\ \mathcal{N}_E(x-y)$$

Or $\mathcal{N}: E \to \mathbb{R}^+$, on peut donc choisir pour la norme $\mathcal{N}_F$ la valeur absolue, et $\mathcal{N}_E = \mathcal{N}$.

L'inéquation précédente devient :

$$|\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(y)| \leq k\ \mathcal{N}(x-y)$$

A-t-on alors :

$$|\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x-y) \quad ?$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x-y+y) \leq \mathcal{N}(x-y)+\mathcal{N}(y) \Rightarrow \mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(y) \leq \mathcal{N}(x-y)$$
$$\Rightarrow |\mathcal{N}(x)-\mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x-y)$$

(iii) L'application produit (notée p), définie de la boule $\mathcal{B}(0,r) \subset \mathbb{R}^2$, $r>0$, à valeurs dans ℝ par : $p(x,y) = xy$ est lipschtzienne.

En effet, prenons : $(u,v) \in \mathcal{B}(0,r), t.q.\ u = (x_1,y_1)\ ;\ v = (x_2,y_2)$.

Considérons les espaces vectoriels normés :$(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ et $(\mathbb{R}, |.|)$ et montrons qu'il existe un réel $k > 0$

$$\forall u, v \in \mathcal{B}(0, r), |p(u) - p(v)| \leq k\|u - v\|_\infty$$

C'est-à-dire

$$|x_1 y_1 - x_2 y_2| \leq k \ \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

Or

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 - x_2 y_2| &= |x_1 y_1 - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_2 y_2| = |(x_1 - x_2) y_1 + (y_1 - y_2) x_2| \\ &\leq |x_1 - x_2||y_1| + |y_1 - y_2||x_2| \leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \,.\, (|y_1| + |x_2|) \\ &\leq 2r \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \end{aligned}$$

On prend $k = 2r$.

L'application p est k-lipschitzienne sur $\mathcal{B}(0, r), \forall r > 0$, elle est donc continue sur $\mathcal{B}(0, r), \forall r > 0$, on en déduit que cette application est continue sur $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{r>0} \mathcal{B}(0, r)$.

PROPOSITION 2.2 :

> Soit $(E, \mathcal{N}_E)$ un e.v.n de dimension **finie** ; et soit $(F, \mathcal{N}_F)$ un e.v.n quelconque.
>
> Alors, toute application $f: E \to F$ est lipschitzienne.

Démonstration : (à voir)

COROLLAIRE 2.2 :

> Soit $(E, \mathcal{N}_E)$ un e.v.n de dimension **finie** ; et soit $(F, \mathcal{N}_F)$ un e.v.n quelconque.
>
> Alors :
>
> (i) Toute application $f: E \to F$ est continue sur E ;
>
> (ii) L'application « somme », $S: E \times E \to F$, t.q. $S(x, y) = x + y$ est continue sur $E \times E$;
>
> (iii) Si $E = \mathbb{R}^n$, l'application « coordonnée », $\pi_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, t.q. $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

CONTINUITE ET COMPOSITION DE LIMITES :

PROPOSITION 2.3 :

Soient E, F, G trois e.v.n.

Soient deux applications continues f, g ;

$f: V \subset E \to F$, $g: W \subset F \to G$;

Alors l'application :

$$gof: V \cap f^{-1}(W) \to G$$

Est continue sur son ensemble de définition.

EXEMPLE 2.4 :

(i) Soit $E = \mathbb{R}^p$. Soient $n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\varphi: E \to \mathbb{R}$ telle que : $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_p) = x_1^{n_1} + x_2^{n_2} + \cdots + x_p^{n_p}$ est continue.
En fait, les polynômes à plusieurs variables sont continues sur E.

(ii) Les fonctions définies par des formules explicites, par composition de fonctions usuelles ($\sin$, $\cos$, $\exp$, $\sqrt{\ }$, $\frac{1}{x}$ ....) et de polynômes sont continues sur leur ensemble de définition.

CONTINUITE ET DENSITE :

THEOREME 2.1 (Prolongement unique) :

Soit E un e.v.n.

Soit V un sous-espace vectoriel de E, **dense** dans E (c'est-à-dire $\overline{V} = E$).

Soient deux applications f, g définies et continues sur E, et à valeurs dans F.

Si $f(x) = g(x), \quad \forall x \in V$ alors $f(t) = g(t), \quad \forall t \in \boldsymbol{E}$.

Démonstration :

Soit $a \in E$, comme $\overline{V} = E$ alors $a \in \overline{V}$.

Il existe donc une suite $\{x_n\}$ de vecteurs de V qui converge vers a.

Et par hypothèse,

$$\forall n \geq 0, f(x_n) = g(x_n)$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

Par continuité des applications f et g, on a :

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

C'est-à-dire

$$f(a) = g(a)$$

Le vecteur a étant quelconque dans E, on conclut que :

$$\forall t \in E, f(t) = g(t)$$

BORNES D'UNE FONCTION CONTINUE :

Une fonction continue sur un intervalle fermé, borné $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

La notion de compact permet de généraliser cette propriété qui sera utile lors de l'étude des extrema de fonctions de plusieurs variables.

RAPPELS :

Un sous-espace V de E est fermé ssi $\bar{V} = V$.

DEFINITION 2.3 :

Soit $(E, \mathcal{N})$ un e.v.n et soit V un sous-espace vectoriel de E.

(i) Le sous-espace V est dit borné s'il existe un réel $r > 0$ tel que $V \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}}(0, r)$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in V, \qquad \mathcal{N}(x) \leq r$$

(ii) Supposons E de dimension finie. Si V est un sous-espace vectoriel fermé et borné de E, alors on dit que Vest un sous-espace vectoriel compact de E.

THEOREME 2.2 :

Soit $(E, \mathcal{N})$ un e.v.n de dimension finie et soit V un sous-espace vectoriel **compact** de E.

Soit une application f définie et **continue** sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors f est bornée sur V et atteint ses bornes, c'est-à-dire :

- Il existe un vecteur m de V tel que : $f(m) = \inf_V f(x)$;
- Il existe également un vecteur M de V tel que : $f(M) = \sup_V f(x)$.