POLYTECH NICE-SOPHIA

Probabilités : devoir surveillé n°1

Nom et prénom :

Groupe de TD :

Total :

Note sur 20 :

Toute communication entre étudiants est **strictement** interdite.

Toute tentative de fraude est passible de sanction.

La calculette est autorisée.

N.Auxire

NA

1. **Restitution de cours.**
Soit X, une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\mathscr{U}, \mathscr{T}, p)$.
On rappelle la définition de la loi de X où $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{T}_{\mathbb{R}} & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & p(X^{-1}(A)) \end{array}\right. .$$

   (a) Soient $A, B \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$.

   (b) Vérifier que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Zone de réponse

NA

Zone de réponse

NA

2. **Exercice : lois de référence.**

(a) Soit X,une varaible aléatoire suivant la loi de Bernouilli de paramètre q ($q \in \,]\,0;1\,[\,$).
Justifier que X admet une espérance et une variance. Les calculer.

Zone de réponse

(b) Soit Y,une variable aléatoire suivant la loi de binomiale de paramètres n et q ($n \in \mathbb{N}\; n \geq 2$ et $q \in \,]\,.0,1\,[\,$).
Justifier que Y admet une espérance et une variance. Les calculer.

Zone de réponse

NA

(c) Soit Z,une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètres λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).
Justifier que Z admet une espérance et une variance.Les calculer.

Zone de réponse

NA

(d) Pour chacune des situations suivantes, indiquer la loi suivie par la variable aléatoire X.

(d-1) X indique le nombre de clients ayant attendu plus de 3 minutes à une caisse de supermarché.

Zone de réponse

(d-2) X indique le nombre de bonnes réponses à un questionnaire de 80 questions proposant chacune trois choix, chaque question n'admettant qu'une seule réponse juste.

Zone de réponse

(d-3) X indique le succès à un concours d'entrée dans une école supérieure telle que trois places sont disponibles pour 120 candidats.

Zone de réponse

NA

3. **Exercice de dénombrement.**

   (a) On dispose de deux urnes U_1et U_2.
   L'urne U_1 contient 5 boules numérotées de 1 à 5.
   L'urne U_2 contient 10 boules numérotées de 1 à 10.
   On tire une boule dans l'urne U_1 puis une boule dans l'urne U_2.
   On modélise cette situation par une application de l'ensemble $E = \{1\}$ dans un ensemble F.
   Donner F.
   Combien y a-t-il d'applications possibles ?

   Zone de réponse

   (b) Soient E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et π_u, le polynôme minimal de u.
   On suppose que $P = (X-1)(X-2)^2(X-3)^3(X-4)^4(X-5)^5$ est un polynôme annulateur de u.
   Dénombrer les possibilités pour π_u.

   Zone de réponse

NA

4. **Exercice : trois urnes.**
On considère trois urnes opaques contenant des boules indiscernables au toucher :
– U_1 contenant deux boules noires et deux boules rouges ;
– U_2 contenant une boule noire et deux boules rouges ;
– U_3 contenant une boule noire et trois boules rouges.
L'expérience aléatoire est la suivante :
– on tire une boule dans U_1 ;
– on tire une boule dans U_2 ;
– on met ces deux boules dans U_3 ;
– on tire une boule dans U_3.
L'univers, U, de cette expérience aléatoire peut donc être décrit ainsi : $U = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \{r, n\}\}$ où, pour $k \in \{1, 2, 3\}$, la composante x_k indique la couleur rouge (notée r) ou noire (notée n) de la boule tirée dans l'urne n°k.
(a) On considère T, la tribu engendrée par le système complet des événements élémentaires.
Donner la liste des générateurs de T.

Zone de réponse

(b) Soit p, la probabilité définie sur l'espace probabilisable (U, T).
Montrer que p n'est pas uniforme.

Zone de réponse

NA

On considère trois urnes opaques contenant des boules indiscernables au toucher :
- U_1 contenant deux boules noires et deux boules rouges ;
- U_2 contenant une boule noire et deux boules rouges ;
- U_3 contenant une boule noire et trois boules rouges.

L'expérience aléatoire est la suivante :
- on tire une boule dans U_1 ;
- on tire une boule dans U_2 ;
- on met ces deux boules dans U_3 ;
- on tire une boule dans U_3.

(c) On considère l'événement E : *au moins une des boules tirée est rouge.*
Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère l'événement E_k : *la boule tirée dans l'urne n°k est rouge.*
Calculer l'image de E par p de deux façons : d'abord en raisonnant par complémentarité puis en appliquant le crible de Poincaré.

Zone de réponse

NA

On considère trois urnes opaques contenant des boules indiscernables au toucher :
– U_1 contenant deux boules noires et deux boules rouges ;
– U_2 contenant une boule noire et deux boules rouges ;
– U_3 contenant une boule noire et trois boules rouges.
L'expérience aléatoire est la suivante :
– on tire une boule dans U_1 ;
– on tire une boule dans U_2 ;
– on met ces deux boules dans U_3 ;
– on tire une boule dans U_3.

Zone de réponse

NA

On considère trois urnes opaques contenant des boules indiscernables au toucher :

– U_1 contenant deux boules noires et deux boules rouges ;
– U_2 contenant une boule noire et deux boules rouges ;
– U_3 contenant une boule noire et trois boules rouges.

L'expérience aléatoire est la suivante :

– on tire une boule dans U_1 ;
– on tire une boule dans U_2 ;
– on met ces deux boules dans U_3 ;
– on tire une boule dans U_3.

(d) On considère l'événement F : *la boule tirée dans U_3 est noire.*
Déterminer l'image de F par p.
Justifier que p_F, la probabilité conditionnée par F est définie.
Déterminer la probabilité de E sachant F.
Les événements E et F sont-ils indépendants ?

Zone de réponse

NA

On considère trois urnes opaques contenant des boules indiscernables au toucher :
– U_1 contenant deux boules noires et deux boules rouges ;
– U_2 contenant une boule noire et deux boules rouges ;
– U_3 contenant une boule noire et trois boules rouges.
L'expérience aléatoire est la suivante :
– on tire une boule dans U_1 ;
– on tire une boule dans U_2 ;
– on met ces deux boules dans U_3 ;
– on tire une boule dans U_3.

(e) On considère R, la variable aléatoire réelle définie sur U indiquant le nombre de boules rouges d'une expérience. La loi de probabilité de R est :

$$\mathbb{P} \left| \begin{array}{ccl} \mathscr{T}_{\mathbb{R}} & \to & [0,1] \\ \{x\} & \mapsto & \begin{cases} \frac{3}{36} & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{9}{36} & \text{si} \quad x = 1 \\ \frac{14}{36} & \text{si} \quad x = 2 \\ \frac{10}{36} & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Justifier l'existence de $E(R^2)$.
Calculer $E(R)$ et $V(R)$.

Zone de réponse