UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

ESPACES VECTORIELS NORMES

René-J. BWEMBA

CHAPITRE 2- ESPACES VECTORIELS NORMES

---

3. GENERALITES SUR LES ESPACES VECTORIELS NORMES

3.1 DISTANCE ET NORME :

DEFINITION 3.1 : Notion de distance sur un espace vectoriel.

Soit A un espace vectoriel. On appelle distance sur A une application notée d définie de $A \times A$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall\, (x, y) \in A \times A,\ \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\forall\, (x, y) \in A \times A,\ \ d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $\forall\, x, y, z \in A,\ \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Cette dernière propriété prote le nom d'inégalité triangulaire.

EXEMPLE 3.1 :

(i) Prenons $A = \mathbb{R}$ et $a, b \ \in A$.

L'application $d(a, b) = |a - b|$ est une distance sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Par exemple : $d(2, -3) = |2 - (-3)| = 5$.

(ii) Soit l'espace $A = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\mathcal{N}$. Soit $x, y \ \in A$.

L'application $d(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$ est une distance sur$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. C'est la distance induite par la norme $\mathcal{N}$ (cf définition 3.4). En d'autres termes, une norme définit automatiquement une distance.

DEFINITION 3.2 : espace métrique

On appelle espace métrique, le couple (A, d) dans lequel :

- A est un espace vectoriel ;
- d est une distance définie sur A.

EXEMPLE 3.2 :

L'espace vectoriel des nombre réels, $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace métrique.

DEFINITION 3.3 : Espace vectoriel normé.

On appelle espace vectoriel normé, le couple $(E, \mathcal{N})$ dans lequel :

- E est un K-espace vectoriel ;
- $\mathcal{N}$ est une norme définie sur E.

EXEMPLE 3.3 :

<u>En dimension finie :</u>

Le corps $K = \mathbb{R}$ muni de sa valeur absolue, $(\mathbb{R}, |.|)$ et le corps $\mathbb{C}$ muni de son module $(\mathbb{C}, |.|)$sont des espaces vectoriels normés.

De même, $(\mathbb{R}^2, \| \quad \|_2)$ ainsi que $(\mathbb{R}^n, \| \quad \|_1), (\mathbb{R}^n, \| \quad \|_2), \ldots, (\mathbb{R}^n, \| \quad \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

<u>En dimension infinie :</u>

L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \quad \|_1$ est un espace vectoriel normé.

De même, $(E, \| \quad \|_2), (E, \| \quad \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

DEFINITION 3.4 : Distance induite par la norme $\mathcal{N}$.

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance induite** par la norme $\mathcal{N}$, l'application (notée $d_{\mathcal{N}}$) définie sur E par :

$$d_{\mathcal{N}} : E \times E \to \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \mapsto d_{\mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$$

REMARQUE 3.1 : (cf exemple 3.1 (ii) précédent.)

La présence d'une norme dans un espace vectoriel entraîne nécessairement la présence d'une distance.

La réciproque est-elle vraie ? Une distance définit-elle automatiquement une norme ?

L'homogénéité est-elle toujours vérifiée ?

DEFINITION 3.5 : Norme induite par une application linéaire injective.

Soit φ une application **linéaire injective** définie sur un K-espace vectoriel E, et à valeurs dans un K-espace vectoriel **normé** $(F, \|.\|_F)$. L'application φ définit sur E une norme notée $\|.\|_{E,\varphi}$ telle que :

$$\|x\|_{E,\varphi} = \|\varphi(x)\|_F \ , \quad \forall x \in E$$

C'est la norme induite sur E par l'application φ.

DEFINITION 3.6 : Norme sur un sous-espace vectoriel.

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
La restriction $\mathcal{N}_F$ de la norme de E sur F définit une norme sur F, c'est-à-dire que le couple $(E, \mathcal{N}_F)$ est un espace vectoriel normé.

DEFINITION 3.7 : Norme sur un espace vectoriel produit.

Soient $(E, \mathcal{N}_E)$ et $(F, \mathcal{N}_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'application notée $\mathcal{N}_{E\times F}$ définie sur l'espace produit $E \times F$ par :

$$\mathcal{N}_{E\times F} : (u, v) \mapsto \max(\mathcal{N}_E(u), \mathcal{N}_F(v))$$

est une norme sur l'espace-produit.

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé, soit $X \in E$ et soit $r > 0$.

DEFINITION 3.8 : Boules et sphère.

(i) On appelle boule ouverte de centre $X_0 \in E$ et de rayon r, l'ensemble défini par :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(X_0, r) = \{X \in E, \mathcal{N}(X - X_0) < r\} = \{X \in E, d_{\mathcal{N}}(X, X_0) < r\}$$

où $d_{\mathcal{N}}$ est la distance induite (cf Définition 3.4) par la norme $\mathcal{N}$ sur E.

(ii) On appelle boule fermée de centre $X_0 \in E$ et de rayon r, l'ensemble défini par :

$$\overline{\mathcal{B}_{\mathcal{N}}}(X_0, r) = \{X \in E, \mathcal{N}(X - X_0) \leq r\} = \{X \in E, d_{\mathcal{N}}(X, X_0) \leq r\}$$

(iii) On appelle sphère de centre $X_0 \in E$ et de rayon r, l'ensemble noté défini par :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(X_0, r) = \{X \in E, \mathcal{N}(X - X_0) = r\} = \{X \in E, d_{\mathcal{N}}(X, X_0) = r\}$$

REMARQUE 3.5 :

S'il n'y a pas d'ambiguité, on notera simplement : $\mathcal{B}(X_0, r)$, $\overline{\mathcal{B}}(X_0, r)$, $\mathcal{S}(X_0, r)$.

DEFINITION 3.9 : Partie bornée.

Soit E un K-espace vectoriel.

Une partie (sous-espace vectoriel) $\mathcal{A}$ de E est dite bornée si elle est incluse dans une boule de centre 0_E, c'est-à-dire, s'il existe $r > 0$, tel que $\mathcal{N}(X) < r$, $\forall X \in \mathcal{A}$.

EXEMPLE 3.4 :

1. Dans l'espace vectoriel normé normé $(\mathbb{R}, |\quad|)$

Ici, $\dim E = 1$; $X_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$;

$$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(X_0, r) =]X_0 - r, X_0 + r[$$

$$\overline{\mathcal{B}_{\mathcal{N}}}(X_0, r) = [X_0 - r, X_0 + r]$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(X_0, r) = \{X_0 - r, X_0 + r\}$$

2. Dans l'espace vectoriel normé normé $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$

Ici, $\dim E = 2$; $X_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$;

$$X(x, y) \in \mathcal{B}(X_0, R) \Leftrightarrow \|X - X_0\|_2 < R$$

$$\Leftrightarrow \|(x - x_0, y - y_0)\|_2 < R$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

$\mathcal{B}(X_0, R)$ est le disque ouvert de centre X_0 et de rayon R.

De même,

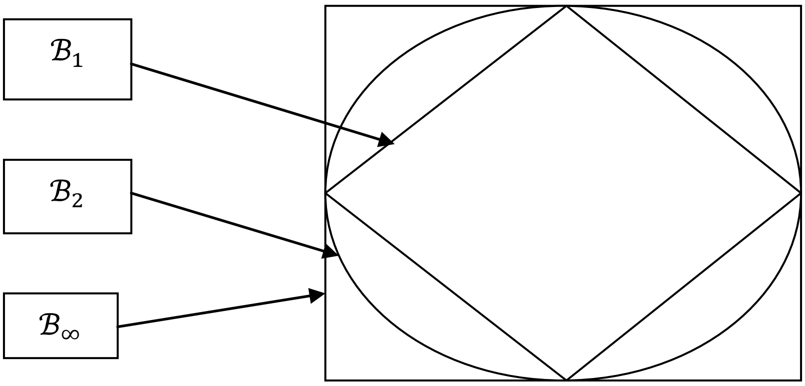
$\overline{\mathcal{B}}(X_0, R)$ est le disque fermé centré en X_0 et de rayon R.

Et

$$\mathcal{S}(X_0, r) = \{X(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

est le cercle de centre X_0 et de rayon R.

Représentation des boules unités associées aux normes $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.



4 TOPOLOGIE D'ESPACES VECTORIELS NORMES.

Nous allons à présent définir la notion de topologie sur un espace vectoriel normé, que nous notons dorénavant : $(E, \mathcal{N})$.

4.1 NORMES EQUIVALENTES :

DEFINITION 4.1 :

Deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ définies sur E sont dites équivalentes sur E s'il existe deux réels, $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \alpha \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \beta \mathcal{N}_1(x)$$

REMARQUE 4.1 :
Grâce à la propriété d'homogénéité, il suffira de démontrer ces inégalités pour les vecteurs de E de norme 1.

PROPOSITION 4.1 :

Soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$, trois normes définies sur E.

Si $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_2 \sim \mathcal{N}_3$ alors $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_3$.

DEMONSTRATION :

Rappelons que :

$$\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \beta_1 > 0, \forall x \in E, \alpha_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \beta_1 \mathcal{N}_1(x)$$

Notons respectivement (1) et (2) les deux inégalités précédentes. On a également par hypothèse :

$$\mathcal{N}_2 \sim \mathcal{N}_3 \Leftrightarrow \exists \alpha_2, \beta_2 > 0, \forall x \in E, \alpha_2 \mathcal{N}_2(x) \leq \mathcal{N}_3(x) \leq \beta_2 \mathcal{N}_2(x)$$

Notons cette fois-ci (3) et (4) ces deux dernières inégalités.

On a alors, en divisant (3) et (4) par α_2 , puis en tenant compte de (1) et (2) :

$$\alpha_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \frac{1}{\alpha_2} \mathcal{N}_3(x) \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} \mathcal{N}_2(x) \leq \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_2} \mathcal{N}_1(x)$$

C'est-à-dire

$$\alpha_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \frac{1}{\alpha_2} \mathcal{N}_3(x) \leq \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_2} \mathcal{N}_1(x)$$

Puis, en multipliant ces deux inégalités par $\alpha_2 > 0$, on obtient :

$$\alpha \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_3(x) \leq \beta \mathcal{N}_1(x)$$

Où

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \quad , \quad \beta = \beta_1 \beta_2$$

Conclusion : $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_3$.

Enonçons à présent une caractérisation de l'équivalence des normes, par les boules fermées de l'espace.

PROPOSITION 4.2 :

Deux normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ définies sur E sont équivalentes si et seulement s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$$

Schématiquement :