CHAPITRE 1- INTEGRALES GENERALISEES (fin)

---

5. CAS DES FONCTIONS DE SIGNE QUELCONQUE :

Nous avons vu, pour l'étude de la nature des intégrales impropres, les techniques suivantes :

- *La définition ; inconvénient : calcul de l'intégrale de Riemann suivi d'un calcul de limite ;*
- *Les critères de fonctions « positives » (en réalité, il suffit que les fonctions soient de signe constant dans l'intervalle d'étude ou au voisinage de la borne qui présente un problème) ;*
- *Cas des fonctions de signe non constant : on peut considérer la valeur absolue de la fonction et se ramener ainsi au cas précédent, mais alors, a-t-on une <u>équivalence</u> entre la nature de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction et l'intégrale de la fonction ? La réponse est NON !*

5.1 INTEGRALES ABSOLUMENT CONVERGENTES :

DEFINITION 5.1 :

Soit f une fonction définie, localement intégrable sur un intervalle réel $[a,b[$ (b fini ou pas) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente (ou encore converge absolument) lorsque $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente.

REMARQUE 5.1 :
Cette définition ramène l'étude de la nature de l'intégrale impropre d'une fonction de signe quelconque à celle d'une fonction à valeurs positives.
Nous avons alors le résultat important suivant :

THEOREME 5.1 :

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

REMARQUE 5.2 :
Le théorème 5.1 ci-dessus, signifie en d'autres termes :

$$\boldsymbol{ABSOLUMENT\ CONVERGENTE \Rightarrow CONVERGENTE}$$

Attention, la réciproque est FAUSSE. C'est-à-dire, si $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est divergente, on ne peut rien en conclure sur la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\, dx$.

EXEMPLE 5.1 :

Les intégrales impropres suivantes sont absolument convergentes, elles sont donc convergentes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Donnons à présent un contre-exemple, c'est-à-dire, une intégrale impropre convergente, mais non absolument convergente (cf TD3):

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

On parle alors d'intégrale semi-convergente, on reviendra sur l'étude de cette intégrale dans le paragraphe ci-après.

5.2 INTEGRALES SEMI-CONVERGENTES :

DEFINITION 5.2 :

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente lorsqu'elle est convergente mais non-absolument convergente.

C'est-à-dire :

$$\int_a^b f(t)\,dt \ \ est\ convergente \quad \text{et} \quad \int_a^b |f(t)|\,dt\ est\ divergente$$

Donnons à présent l'énoncé d'un résultat important de convergence : le théorème d'Abel.

THEOREME 5.2 :

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle réel $[a,+\infty[$.
Si :

- f est positive, décroissante sur $[a,+\infty[$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.
- Il existe une réel $M>0$ tel que $\forall\, X \geq a$, $\left|\int_a^X g(x)\,dx\right| \leq M.$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ est convergente.

EXEMPLE 5.2 :

L'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$ est semi-convergente.

6. AUTRES PROPRIETES :

PROPOSITION 6.1 :

Soit a un réel strictement positif.

Soit f une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

i) S'il existe un réel $\alpha>1$ tel que $x^\alpha f(x)$ admette une limite finie quand x tend vers $+\infty$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

ii) S'il existe un réel $\alpha\leq 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ admette une limite non nulle quand x tend vers $+\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

Démonstration :

i) Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = l$, $l < \infty$

Alors il existe un réel X_0 tel que,

$$\forall x > X_0 \ ; \quad 0 \le x^\alpha f(x) \le 2l$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le f(x) \le \frac{2l}{x^\alpha}$$

Or, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, puisque $\alpha > 1$. Par le critère de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est aussi convergente.

ii) ….

7. CAS DES FONCTIONS A VALEURS COMPLEXES :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle réel I, et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut écrire :

$$f = \mathcal{R}e(f) + \mathbf{i}\, \mathcal{I}m(f) \quad , \quad \mathbf{i}^2 = -1$$

Où $\mathcal{R}e, \mathcal{I}m$ représentent les partie réelle et imaginaire de f, avec :

$$\mathcal{R}e(f), \mathcal{I}m(f) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telles que :

$$\mathcal{R}e(f)(x) = \mathcal{R}e(f(x))$$
$$\mathcal{I}m(f)(x) = \mathcal{I}m(f(x))$$

PROPOSITION 7.1 :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle réel I, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
La fonction f est intégrable sur l'intervalle I si et seulement si les fonctions $\mathcal{R}e(f), \mathcal{I}m(f)$ sont toutes deux intégrables sur I.

Exemples (cf TD3)