

## Contrôle n°2 : 21 novembre 2012

*Documents et appareils électroniques non autorisés - Durée 45min*

Nom :

Prénom :

Groupe :

### Exercice 1 (Questions de cours).

1. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.

2. Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction lipschitzienne. Que peut on dire de  $f$  ?

3. La partie  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x^2 + 2y^3 \leq 5\}$  est elle ouverte, fermée ou ni l'un ni l'autre ?

4. Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet au plus une limite.

**Exercice 2.**

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  munit de sa norme usuelle  $\|\cdot\|_\infty$ . On considère l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u = (x, y) & \rightarrow & \max(\|u\|_\infty, |x - y|) \end{array}$$

1. Montrer que  $N$  est une norme.

2. Déterminer et représenter la boule ouverte  $B_N(0, r)$ , où  $r > 0$ .

**Exercice 3.**

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ , muni de la norme

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} \{|f(x)|\}.$$

1. Montrer que l'application

$$N(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

définit une norme sur  $E$ .

2. Les norme  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  sont elles équivalentes (on pourra utiliser la suite de fonctions  $f_n(x) = x^n$ ). ?

3. Que peut on en déduire ?