On souhaite, de façon graphique, illustrer certains concepts de base en électrostatique grâce à l'application Charges and Fields. On place quatre particules dans l'espace, trois chargées négativement et une chargée positivement (q1=1nC ; q2=-1nC ; q3=-1nC ; q4=-1nC). Puis on imagine qu'elles sont placées sur les axes Ox , Oy d'un repère orthonormée de centre le point O . Les quatre charges sont situées à équidistance du centre. De plus, on choisit comme point d'observation le point O, un point où le champ électrique est non nul .

1- On affiche le vecteur du champ électrique au point O ainsi que le potentiel à ce point. (voir Fig.1 en pièce jointe)
On souhaite valider par calcul les valeurs numériques données par l'applet :
a) Calcul du champ électrique au point O :

$$\vec{E} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q1}{r^3_{1\to O}}\vec{r}_{1\to O} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q2}{r^3_{2\to O}}\vec{r}_{2\to O} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q3}{r^3_{3\to O}}\vec{r}_{3\to O} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q4}{r^3_{4\to O}}\vec{r}_{4\to O}$$

$$\vec{E} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\left(\frac{3}{2}\,.\,\hat{e}_x\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q2}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\left(\frac{-3}{2}\,.\,\hat{e}_z\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q3}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\left(\frac{-3}{2}\,.\,\hat{e}_x\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q4}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\left(\frac{3}{2}\,.\,\hat{e}_z\right)$$

$$\vec{E} = \left[\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)(q1 - q3)\right].\hat{e}_x + \left[\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)(q4 - q2)\right].\hat{e}_z$$

$$\vec{E} = \left[\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)(2.10^{-9})\right].\hat{e}_x$$

donc $\vec{E} = E(\mathrm{x}).\,\hat{e}_x$ et $E(\mathrm{x}) = \left[\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)(2.10^{-9})\right] = 7{,}99\ \mathrm{V/m}$

donc $\boxed{\vec{E} \;=\; 7{,}99\,.\,\hat{e}_x}$

Or : l'applet nous montre que le vecteur du champ électrique au point O est collinaire à l'axe Ox , et que sa norme est égale à : 7,97 V/m.

Conclusion : La valeur numérique du champ électrique au point O donnée par l'applet est donc bien vérifiée.

b) Calcul du potentiel au point O :

$$\mathrm{V}(\vec{r}) \;=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{q_i}{\|\vec{r}_O - \vec{r}_i\|}\right)$$

$$\mathrm{V}(\vec{r}) \;=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{-1}{\frac{3}{2}} + \frac{-1}{\frac{3}{2}} + \frac{-1}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\mathrm{V}(\vec{r}) \;=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-2.10^{-9}}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{V}(\vec{r}) \;=\; -11{,}99\,V}$$

Or : L'applet nous montre que la valeur numérique du potentiel au point O est de : -11,96 V .

Conclusion : La valeur numérique du potentiel au point O est donc bien vérifiée.

2- On souhaite mettre en évidence graphiquement que les vecteurs du champ électrique et du gradient du potentiel sont opposés.
Pour cela , on affiche à différents points d'une ligne équipotentielle , le vecteur du champ électrique . (voir Fig.2)
Observations :
On s'aperçoit rapidement que ces vecteurs sont tous perpendiculaires à la ligne équipotentielle et en direction des lignes équipotentielles de plus petite valeur.
Or , on sait que :
- tout gradient d'un champ scalaire montre la direction de la plus forte augmentation du champ scalaire (ligne équipotentielles de plus grande valeur)
- tout gradient d'un champ scalaire est perpendiculaire aux lignes équipotentielles

Donc :
Même si l'applet ne nous permet pas d'afficher le vecteur du gradient du potentiel en un point , on en déduit qu'il est collinaire et en direction opposée au vecteur du champ électrique en un même point.

De plus , on sait que le potentiel et le champ électrique sont reliés par cette relation : $-\overrightarrow{grad}\,V = \vec{E}$. Les vecteurs du gradient du potentiel et les vecteurs du champ électrique sont donc bien opposés.

3- Si les vecteurs du gradient du potentiel et les vecteurs du champ électrique sont opposés alors leurs normes sont égales .
On souhaite vérifier par calcul que la norme du gradient du potentiel est bien égale à la norme du champ électrique. (voir Fig.3)
Calcul approximatif de la norme du gradient du potentiel :

$\left\|\overrightarrow{grad}\,V\right\| = \left.\frac{dV}{dl}\right|_{max}$ Or : max quand : $\overrightarrow{grad}\,V \perp$ lignes équipotentielles

On prend alors deux lignes équipotentielles de proche valeur telles que : 11,5 V et 14,1 V ; on mesure la distance qui sépare les deux lignes ; puis on calcule la norme du gradient du potentiel :

$$\left\|\overrightarrow{grad}\,V\right\| = \frac{14{,}1-11{,}5}{4{,}2.10^{-2}} = 61{,}9$$

Norme du champ électrique donnée par l'applet : 60,5

Conclusion : La norme du gradient du potentiel est bien égale à la norme du champ électrique .

On a bien donc bien illustré à travers ces 3 étapes certains concepts de base en électrostatique ; des concepts que l’on a ensuite vérifié par des calculs basés sur des lois fondamentales de l’électrostatique .