POLYTECH'NICE SOPHIA-ANTIPOLIS **ANALYSE PEIP2 - 2014/2015**

CONTROLE N°3 : 23 OCTOBRE 2014 (Durée : 1h30).

Documents et appareils électroniques non autorisés. Les notations sont celles du cours.

Exercice 1. (4 pts)

1.1 Donner la définition d'une application lipschtizienne de rapport k $(k > 0)$.

1.2 Montrer qu'une application lipschitzienne est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 2. (4 pts)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Etudier l'existence de points d'extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Précisez s'il s'agit de minimum strict, de maximum strict ou autre.

Exercice 3. (5 pts)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.1 Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

3.2 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. (7 pts)

Soit F la fonction définie de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{arctan\,(tx)}{1+t^2}\,dt$$

4.1 Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
4.2 Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
4.3.1 Donner une expression de F' .

4.3.2 Montrer que F' peut s'écrire sous la forme

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right)dt \quad ; \quad x \neq 1$$

4.3.3 Montrer que : $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$ pour $x \neq 1$.

4.3.4 Montrer que : $F'(1) = \frac{1}{2}$

5 **Application :** Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\,du$.

On pourra remarquer que $F(x) = F(1) + \int_1^x F'(u)\,du$.