UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

ESPACES VECTORIELS NORMES

(suite)

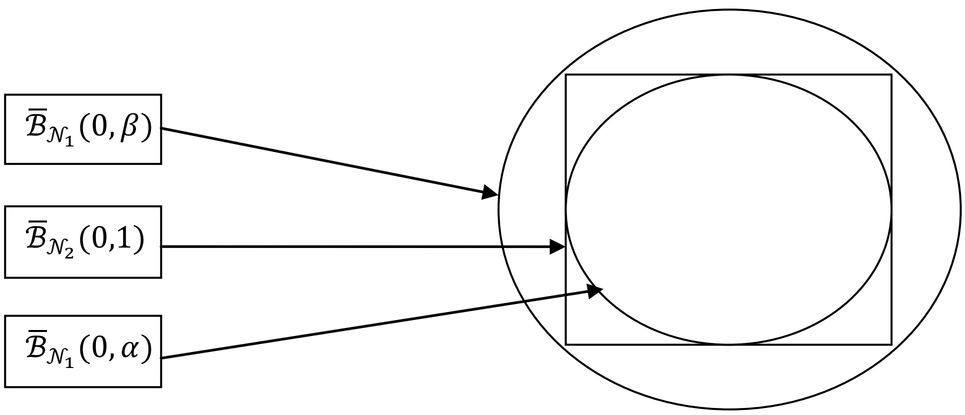
René-J. BWEMBA

PROPOSITION 4.2 :

Deux normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ définies sur E sont équivalentes si et seulement s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$$

Schématiquement :



Démonstration :

Montrons d'abord l'implication :

$$\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$$

Notons (5)-(6) les deux inclusions précédentes.

On a :

$$\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \Rightarrow \exists \alpha_1, \beta_1 > 0, \forall x \in E, \alpha_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \beta_1 \mathcal{N}_1(x)$$

Notons (7)-(8) ces deux inégalités et montrons alors que :

$$\exists \beta > 0, \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$$

Rappelons que :

Si $x \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1)$ alors $\mathcal{N}_2(x) \leq 1$. Et d'après (7) :

$$\alpha_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_1(x) \leq \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\Rightarrow x \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\frac{1}{\alpha_1})$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta = \frac{1}{\alpha_1})$$

D'où l'inclusion (6).

Montrons de même l'inclusion (5), c'est-à-dire :

$$\exists\alpha > 0, \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1)$$

Si $x \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha)$ alors $\mathcal{N}_1(x) \leq \alpha$. Et d'après (8) :

$\mathcal{N}_2(x) \leq \beta_1\mathcal{N}_1(x) \leq \alpha\beta_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_2(x) \leq \alpha\beta_1$

$\Rightarrow\ x \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,\alpha\beta_1)$

Prenant $\alpha\beta_1 = 1$, on a : $\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1)$.

On en conclut qu'il existe $\alpha = \frac{1}{\beta_1},\ \beta = \frac{1}{\alpha_1}$; $\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$.

Montrons à présent l'implication :

$$\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta) \Rightarrow \mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2$$

Notons (9)-(10) ces deux inclusions.
Supposons l'inclusion (10) vérifiée, c'est-à-dire :

$$\exists\beta > 0, \quad \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta) \qquad (10)$$

Montrons une inégalité entre $\mathcal{N}_2(x)$ et $\mathcal{N}_1(x)$, pour un vecteur quelconque non nul $x \in E$.
Soit alors $x \in E,\ x \neq 0_E$, le cas $x = 0_E$ est trivial, puisque $\mathcal{N}_1(0_E) = \mathcal{N}_2(0_E) = 0$. On a :

$$\mathcal{N}_2\left(\frac{x}{\mathcal{N}_2(x)}\right) = \frac{1}{\mathcal{N}_2(x)}\mathcal{N}_2(x) = 1 \ \Rightarrow \frac{x}{\mathcal{N}_2(x)} \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1)$$

D'après (10) :

$$\frac{x}{\mathcal{N}_2(x)} \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta) \ \Rightarrow\ \mathcal{N}_1\left(\frac{x}{\mathcal{N}_2(x)}\right) \leq \beta \ \Rightarrow\ \mathcal{N}_1(x) \leq \beta\mathcal{N}_2(x) \qquad (11)$$

Supposons cette fois-ci que l'inclusion (9) soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\exists\alpha > 0, \qquad \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \qquad (12)$$

Soit alors $x \in E,\ x \neq 0_E$. On a :

$$\mathcal{N}_1\left(\frac{\alpha x}{\mathcal{N}_1(x)}\right) = \frac{\mathcal{N}_1(\alpha x)}{\mathcal{N}_1(x)} = \frac{\alpha \mathcal{N}_1(x)}{\mathcal{N}_1(x)} = \alpha \quad \Rightarrow \frac{\alpha x}{\mathcal{N}_1(x)} \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha)$$

D’après (12) :

$$\frac{\alpha x}{\mathcal{N}_1(x)} \in \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \;\Rightarrow\; \mathcal{N}_2\left(\frac{\alpha x}{\mathcal{N}_1(x)}\right) \leq 1 \;\Rightarrow\; \alpha\mathcal{N}_2(x) \leq \mathcal{N}_1(x) \qquad (13)$$

A partir des inégalités (11) et (12), on conclut que :

$$\alpha\mathcal{N}_2(x) \leq \mathcal{N}_1(x) \leq \beta\mathcal{N}_2(x)$$

d’où l’équivalence des deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$.

EXEMPLES DE NORMES EQUIVALENTES :

(i) Dans l’espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, les normes suivantes sont équivalentes.

$$\|.\|_1 : u = (x,y) \mapsto |x| + |y|$$

$$\|.\|_\infty : u = (x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$$

En effet, on montre que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on a la double inégalité :

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq 2\|u\|_\infty$$

Puisque :

$$|x| \leq |x| + |y|$$

$$|y| \leq |x| + |y|$$

Donc

$$\max(|x|,|y|) \leq |x| + |y|$$

C’est-à-dire

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$$

De même :

$$\|u\|_1 \leq |x| + |y| \leq \max(|x|,|y|) + \max(|x|,|y|) \leq 2\max(|x|,|y|)$$

D’où

$$\|u\|_1 \leq 2\|u\|_\infty$$

Conclusion

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq 2\|u\|_\infty$$

(ii) De même dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, les normes $\|u\|_1$ et $\|u\|_\infty$ sont équivalentes, car pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$on a :

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq 3\|u\|_\infty$$

(iii) Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, les normes $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ et $\|u\|_\infty$ sont équivalentes. On a :

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq (\dim E)\|u\|_\infty$$

Et

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{n}\|u\|_\infty$$

PROPOSITION 4.3 :

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Conséquence : quand une question topologique se pose dans un espace vectoriel normé de dimension finie (par exemple : étude de la continuité de fonctions, détermination de l'adhérence ou de l'intérieur d'un sous-espace…) on peut choisir la norme qui permet d'y répondre le plus simplement.

<u>Cas de la dimension infinie :</u>

Remarquons que :

$$\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha\mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \beta\mathcal{N}_1(x)$$

On peut donc écrire pour $x \neq 0_E$

$$\alpha \leq \frac{\mathcal{N}_2(x)}{\mathcal{N}_1(x)} \leq \beta$$

Puis,

$$\frac{\mathcal{N}_2(x)}{\mathcal{N}_1(x)} \in [\alpha, \beta]$$

En d'autres termes, dans la pratique, pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes dans un espace vectoriel normé E, il suffira de trouver une suite $(x_n) \in E$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{N}_2(x_n)}{\mathcal{N}_1(x_n)} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

En effet,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{N}_2(x_n)}{\mathcal{N}_1(x_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{N}_1(x_n)}{\mathcal{N}_2(x_n)} = \infty.$

EXEMPLE 4.1.

Dans l'espace vectoriel $E = K[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps commutatif K, on définit les normes suivantes, pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots \in E$:

$$\|P\|_1 = \mathcal{N}_1(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

$$\|P\|_2 = \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2}$$

$$\|P\|_\infty = \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Considérons alors le polynôme $P_q = 1 + X + \cdots + X^{q-1}$. On a :

$$\mathcal{N}_1(P_q) = q$$

$$\mathcal{N}_2(P_q) = \sqrt{q}$$

$$\mathcal{N}_\infty(P_q) = 1$$

Alors :

$$\frac{\mathcal{N}_1(P_q)}{\mathcal{N}_2(P_q)} = \sqrt{q}$$

Et

$$\frac{\mathcal{N}_2(P_q)}{\mathcal{N}_1(P_q)} = \sqrt{q}$$

Si on fait tendre $q \to \infty$, les quotients précédents ne seront pas bornés : ces normes ne peuvent donc pas être équivalentes.

4.2 NOTION D'OUVERTS ET DE FERMES :

DEFINITION 4.2.

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit O un sous-espace vectoriel de E.

Le sous-espace O est dit ouvert dans E si tout vecteur $x \in O$ est le centre d'une boule ouverte incluse dans O, c'est-à-dire :

$$\forall x \in O, \exists r > 0 \quad t.q. \ \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x, r) \subseteq O$$

EXEMPLE 4.2.

(i) Dans $E = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
(ii) Dans $E = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 4\}$.
(iii) Une boule ouverte dans un espace vectoriel normé est un sous-espace vectoriel ouvert.

PROPOSITION 4.4.

Soit E un espace vectoriel normé.

(i) L'ensemble vide noté $\{\quad\}$ ou $\emptyset$ est un sous-espace vectoriel ouvert de E.
(ii) L'espace E est un sous-espace vectoriel ouvert de E.
(iii) La réunion d'une famille **quelconque** de sous-espaces vectoriels ouverts de E est un sous-espace vectoriel ouvert de E.
(iv) Si O_1 , O_2 sont deux sous-espaces vectoriels ouverts de , alors $O = O_1 \cap O_2$ est un sous-espace vectoriel ouvert de E . Plus généralement, l'intersection d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ouverts de E est un sous-espace vectoriel ouvert de E.
(v) Si deux normes $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes dans E alors $(E, \mathcal{N}_1)$ et $(E, \mathcal{N}_2)$ ont les mêmes sous-espaces vectoriels ouverts. C'est-à-dire, si O est un sous-espace vectoriel ouvert dans $(E, \mathcal{N}_1)$ alors O est aussi ouvert dans $(E, \mathcal{N}_2)$.

REMARQUE 4.1.

Considérons une famille dénombrable d'ouverts, notée $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$O_n =]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$$

Alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[= \{0\}$$

Or le sous-espace vectoriel $\{0\}$ de E est une sous-espace vectoriel fermé de E.
L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels peut être fermée.

On a aussi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[=]-1,1[$$

DEFINITION 4.3.

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E.

Le sous-espace F est dit fermé dans E si son complémentaire dans E (noté $E\backslash F$ ou F^c) est un sous-espace vectoriel ouvert dans E.

REMARQUE 4.3.

Cette définition nous ramène à un ouvert. La topologie de E sera parfaitement définie en décrivant ses ouverts.

EXEMPLE 4.3.

(i) Dans $E=\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. L'intervalle $[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Puisque, $[a,b]^c =]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$. C'est une réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}$.

(ii) Dans $E=\mathbb{R}^3$, le sous-espace $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+2y^2+3z^2\geq 4\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{R}^3$ car son complémentaire est l'ouvert $O=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+2y^2+3z^2<4\}$.

(iii) Une boule fermée dans un espace vectoriel normé est un sous-espace vectoriel fermé.

REMARQUE 4.4.

Attention, un sous-espace vectoriel non ouvert, n'est pas nécessairement fermé.

PROPOSITION 4.5.

Soit E un espace vectoriel normé.

(i) L'ensemble vide noté $\{ \quad \}$ ou $\emptyset$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
(ii) L'espace E est un sous-espace vectoriel fermé de E.
(iii) L'intersection d'une famille **quelconque** de sous-espaces vectoriels fermés de E est un sous-espace vectoriel fermé de E.
(iv) La réunion d'une famille **finie** de sous-espaces vectoriels fermés de E est un sous-espace vectoriel fermé de E.
(v) Un sous-espace vectoriel F de E est fermé si et seulement si il contient les limites de toutes ses suites convergentes. En d'autres termes, si pour toute suite $\{x_n\}_n$ de vecteurs de F convergeant vers l, on a alors $l \in F$.
(vi) Si deux normes $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes dans E alors $(E, \mathcal{N}_1)$ et $(E, \mathcal{N}_2)$ ont les mêmes sous-espaces vectoriels fermés. C'est-à-dire, si F est un sous-espace vectoriel fermé dans $(E, \mathcal{N}_1)$ alors F est aussi fermé dans $(E, \mathcal{N}_2)$.

REMARQUE 4.5.

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels fermés de E, alors $F = F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

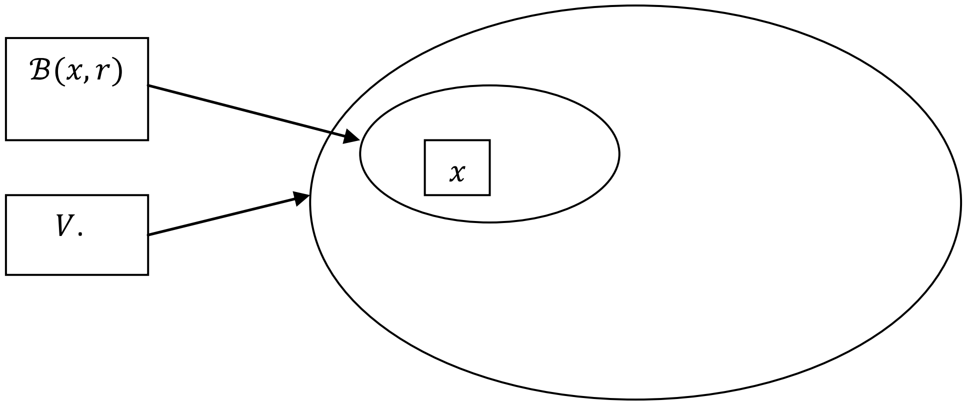
4.3 NOTION DE VOISINAGES

Soit E un espace vectoriel normé et soit $V \subseteq E$.

Soit $x \in E$.

V est dit voisinage de x si $\exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subseteq V$.

L'ensemble des voisinages de x est noté $\vartheta(x)$.

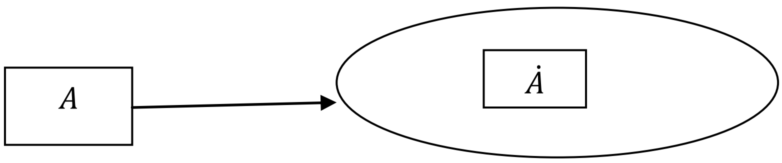


4.4 NOTION D'INTERIEUR.

Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$.

Un élément $x \in A$ est dit intérieur à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire si $A \in \vartheta(x)$.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A, noté $\dot{A}$ ou $int\ (A)$.



EXEMPLE 4.4.

$E = \mathbb{R}$;

$$int(\,[0,1]\,) = int(\,]0,1]\,) = int(\,[0,1[\,) = int(\,]0,1]\,) =]0,1[$$

PROPOSITION 3.6.

Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$.

(i) $\dot{A}$ est un sous-espace ouvert de E. C'est le plus grand ouvert de E contenant A.
(ii) A est un sous-espace ouvert de E si et seulement si $\dot{A} = A$.

4.5 NOTION D'ADHERENCE ET DE DENSITE

DEFINITION 4.6.

Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$.

(i) Un vecteur $x \in E$ est dit adhérent à A si l'intersection de tout voisinage de x avec A est non vide, c'est-à-dire : pour tout voisinage V de x, on a : $V \cap A \neq \emptyset$.

(ii) L'ensemble des vecteurs adhérents à A est appelé adhérence de A, notée $\bar{A}$ ou $adh(A)$.

EXEMPLE 4.5.

Dans $E = \mathbb{R}$: $\overline{]0,1[} = \overline{]0,1]} = \overline{[0,1[} = \overline{[0,1]} = [0,1]$

PROPOSITION 4.7.

(i) Tout sous-espace vectoriel fermé de E, contenant A contient aussi $\bar{A}$;

(ii) Le sous-espace vectoriel A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$;

(iii) Un vecteur $x \in E$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $\{a_n\}$ de vecteurs de A qui converge vers x, c'est-à-dire :

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{a_n\} \in A \ \ t.q. \lim_{n \to \infty} a_n$$

DEFINITION 4.7. (Densité)

Soit E un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$.

Le sous-espace A est dit dense dans E si $\bar{A} = E$.

EXEMPLE 4.8.

(i) Soit $\{x_n\}$ une suite de vecteurs de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. Alors $l \in \bar{X}$ ou $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(iii) L'ensemble des matrices inversibles (noté $GL_n(K)$) est dense dans l'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées définies sur un corps K, c'est-à-dire $\overline{GL_n(K))} = M_n(K)$.

PROPRIETES UTILES :

(i) $\left(\dot{A}\right)^c = \overline{A^c}$

(ii) $(\bar{A})^c = \overset{\cdot}{\widehat{A^c}}$

(iii) $\overset{\cdot}{\widehat{A \cap B}} = \dot{A} \cap \dot{B}$

5 CONVERGENCE DES SUITES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME.

Dans ce paragraphe, nous notons $\{x_n\}$ une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé $(E, \mathcal{N})$.

DEFINITION 5.1. Convergence dans un e.v.n.

On dit que la suite de vecteurs $\{x_n\}$ converge vers $l \in E$ (pour la norme $\mathcal{N}$) si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}(x_n - l) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \geq 0, n \geq N_0 \Rightarrow \mathcal{N}(x_n - l) \leq \varepsilon$$

REMARQUE 5.1.

(i) La notion de convergence dans $(E, \mathcal{N})$ est donc étroitement liée au choix de la norme dans cet espace vectoriel.

(ii) si la suite de vecteurs $\{x_n\}$ est convergente dans $(E, \mathcal{N})$ alors sa limite est unique.

(iii) Toute suite convergente de $(E, \mathcal{N})$ est bornée.

(iv) Si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans $(E, \mathcal{N})$ alors $x_n + y_n \to x + y$ et $\forall \lambda \in K$, $\lambda x_n \to \lambda x$ dans $(E, \mathcal{N})$.

(v) Toute suite extraite d'une suite convergente dans $(E, \mathcal{N})$ est elle-même convergente et de même limite dans $(E, \mathcal{N})$. (rappel : soit $\{u_n\}$ une suite, soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, alors la suite de termes $v_n = u_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite extraite de la suite $\{u_n\}$)

PROPOSITION 5.1.

Soient deux normes équivalentes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, définies dans un espace vectoriel E. Soit $\{x_n\}$ une suite de vecteurs de E.

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_1) \Leftrightarrow \{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_2)$$

DEMONSTRATION :

$$\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0, \forall u \in E, \qquad \alpha \mathcal{N}_1(u) \leq \mathcal{N}_2(u) \leq \beta \mathcal{N}_1(u)$$

Notons (1) et (2) ces deux inégalités et montrons l'implication :

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_1) \Rightarrow \{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_2)$$

On a :

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_1(x_n - x) = 0$$

Or, d'après l'inégalité (2) précédente :

$$0 \leq \mathcal{N}_2(x_n - x) \leq \beta \mathcal{N}_1(x_n - x)$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_2(x_n - x) = 0$$

Et donc

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_2)$$

Montrons de même la deuxième implication :

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_2) \Rightarrow \{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_1)$$

On a :

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_2) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_2(x_n - x) = 0$$

D'après l'inégalité (1) précédente :

$$0 \leq \alpha \mathcal{N}_1(x_n - x) \leq \mathcal{N}_2(x_n - x)$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_1(x_n - x) = 0$$

Et donc

$$\{x_n\}\ converge\ vers\ x\ dans\ (E, \mathcal{N}_1)$$

EXEMPLE 5.1.

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la suite définie par :

$$x_n = (\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}; \frac{(-1)^n}{n} \ln n)$$

Pour calculer la limite de cette suite, on calculera les limites des composantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ln n = 0$$

On en conclut que la suite $\{x_n\}$ converge vers $l = (1,0)$.

Choisissons la norme $\|.\|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^2$ pour tout vecteur $u = (x, y)$ par :

$$\|u\|_\infty = \max(|x|, |y|)$$

Alors

$$\|x_n - l\|_\infty = \max(\left|\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} - 1\right|, \left|\frac{(-1)^n}{n} \ln n - 0\right|)$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - l\|_\infty = 0$$

On en conclut que la suite $\{x_n\}$ converge vers $(1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_\infty$ et donc aussi pour toutes les normes de $\mathbb{R}^2$.(rappel : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes)

REMARQUE 5.2.

On peut généraliser le procédé précédent pour $E = \mathbb{R}^p$.

Soit $\mathcal{N}$ une norme définie sur E. Considérons :

- une suite $\{x_n\}$ de vecteurs de E, sous la forme : $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- l'élément $l \in E$, sous la forme : $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$

Dire que la suite $\{x_n\}$ converge vers l est équivalent à dire que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}(x_n - l) = 0$.

Or

$$x_n - l = (x_n^1 - l_1, x_n^2 - l_2, \dots, x_n^p - l_p)$$

On peut donc calculer $\mathcal{N}(x_n - l)$ à partir de la définition de la norme $\mathcal{N}$ sur E. Cependant, l'espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les normes sont donc équivalentes et on choisira celle qui « facilitera » les démonstrations.

Choisissons par exemple la norme $\|.\|_\infty$ définie sur $\mathbb{R}^p$ pour tout vecteur $u = (u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ par :

$$\|u\|_\infty = \max(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_p|)$$

On a alors :

$$\mathcal{N}(x_n - l) = \|x_n - l\|_\infty = \max(|x_n^1 - l_1|, |x_n^2 - l_2|, \dots, |x_n^p - l_p|)$$

Et

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}(x_n - l) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_n^1 - l_1) \to 0 \quad dans \ \mathbb{R} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ (x_n^p - l_p) \to 0 \quad dans \ \ \mathbb{R} \end{cases}$$