Contrôle n°1 : 16 octobre 2013

Documents et appareils électroniques non autorisés - Durée 1h

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1.
Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} dx.$$

Exercice 2.

Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 3.
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I(n) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$$

est elle convergente ? Calculer $I(n)$ pour ces valeurs de n.

Exercice 4.

1. Soient $a < b$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et $f, g : \ [a, b[\to \mathbb{R}^+$ continues telles que $f \sim_b g$ avec g intégrable sur $[a, b[$. Montrer que f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Donner la définition de $\|x\|_2$.

3. Rappeler la définition de la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r dans un espace vectoriel $(E, \|.\|)$.

4. Justifier que l'intervalle $[3, 4]$ est borné dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}, |.|)$.