UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

ESPACES VECTORIELS NORMES

René-J. BWEMBA

CHAPITRE 2- ESPACES VECTORIELS NORMES

---

1. INTRODUCTION.

*Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une **norme**. C'est-à-dire une structure mathématique ayant des propriétés géométriques de **distance**. (références historiques : David Hilbert, 1862-1942, allemand ; Stefan Banach, 1892-1945, polonais).*
*Ce sont des notions de base en analyse, notamment en analyse fonctionnelle, c'est-à-dire dans l'étude des **espaces vectoriels de fonctions** : espaces de Hilbert, espaces de Banach, qui sont des **espaces vectoriels normés complets**, c'est-à-dire, dans lesquels toute suite de Cauchy est convergente).*
*On se placera dans un espace vectoriel E sur un corps K commutatif. En général, K=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dira que E est un K-espace vectoriel. Une **norme** est alors une « extension » de la valeur absolue des nombres aux vecteurs. Elle permet d'obtenir des majorations, de calculer des estimations, et des approximations. Elle induit également sur le K-espace vectoriel une **distance** et une **topologie**. La **distance** est une application qui formalise l'idée intuitive de longueur séparant deux points.*
*La **topologie** est la branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre pour étudier les notions de **limite**, de **continuité** (importante car les fonctions continues ont des propriétés intéressantes), et de **voisinages**.*

2. NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL.

Nous notons :

- K un corps commutatif, en général nous prendrons K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E un espace vectoriel sur K, on dira aussi K-espace vectoriel.
- u, v ou x, y des vecteurs de E.

2.1 PREMIERES DEFINITIONS

DEFINITION 2.1 : Notion de norme.

Une application $\mathcal{N}: E \to \mathbb{R}$ est appelée **norme** lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) **Positivité** (stricte) : $\forall u \in E, \mathcal{N}(u) \geq 0 \; et \; \mathcal{N}(u) = 0 \iff u = 0_E$

(ii) **Homogénéité** : $\forall u \in E, \forall \lambda \in K, \mathcal{N}(\lambda u) = \lambda \mathcal{N}(u)$

(iii) **Inégalité triangulaire** : $\forall u, v \in E, \; \mathcal{N}(u+v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$.

EXEMPLE 2.1 :

La norme la plus connue est la norme euclidienne définie sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ par :

$$\mathcal{N}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

On notera

$$\mathcal{N}(x, y) = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration : on la fera au paragraphe suivant car on aura besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

DEFINITION 2.2 : Notion de produit scalaire.

Ici $K = \mathbb{R}$ et E est un $\mathbb{R}$-espace. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, autrement dit, toute application notée φ définie de $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

(i) $\forall x \in E$; φ_x: $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire ;
de même
$\forall y \in E$; φ_y: $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

C'est la linéarité par rapport aux deux variables : c'est la bilinéarité.

(ii) Symétrie : $\forall (x, y) \in E \times E$; $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

(iii) Définie positive : $\forall x \in E \backslash \{O_E\}$; $\varphi(x, x) > 0$.

NOTATION :

Nous notons à présent le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in E$ sous la forme :

$$\varphi(x, y) = < x, y >$$

LIEN ENTRE PRODUIT SCALAIRE ET NORME ASSOCIEE :

PROPOSITION 2.1 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<.,.>$. Soit x un vecteur de E.

L'application :

$$\psi : x \mapsto \sqrt{< x, x >}$$

est une norme sur E, appelée norme associée au produit scalaire $<.,.>$.

REMARQUE 2.1.

Ceci signifie que la donnée d'un produit scalaire $<.,.>$ permet de définir une norme $\mathcal{N}$ par la relation :

$$\mathcal{N}(x) = \sqrt{< x, x >}$$

PROPOSITION 2.2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $<.,.>$. Soient x, y deux vecteurs de E. On a :

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$$

Démonstration : (cf algèbre)

2.3 PREMIERS EXEMPLES

2.2.1 EN DIMENSION FINIE

Dans un premier temps, considérons l'exemple 2.1 de la norme euclidienne, du paragraphe précédent.

Il s'agit alors de montrer que l'application

$$\mathcal{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \mathcal{N}(x, y) = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(i) **Positivité stricte** : $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

De plus,

$$\|u\|_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

(ii) **Homogénéité** : $\lambda \in K = \mathbb{R}$; $\|\lambda u\|_2 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_2 = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = |\lambda| \|u\|_2$

(iii) **Inégalité triangulaire** : Posons $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$; $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

On a alors, d'une part :

$$\|u + v\| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

En élevant au carré :

$$\|u + v\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \quad (1)$$

D'autre part,

$$\|u\| + \|v\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

En élevant au carré :

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \quad (2)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Proposition 2.2) :

$$|< u, v >| \leq \|u\| \|v\|$$

donc

$$2|< u, v >| \leq 2\|u\| \|v\|$$

L'expression (1) peut alors être majorée sous la forme :

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

On en déduit :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

L'inégalité triangulaire est donc vérifiée pour la norme euclidienne.

<u>Autres exemples de normes en dimension finie :</u>

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Les applications suivantes sont des normes :

$\| \quad \|_{\mathbf{1}} : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |x_1| + \cdots + |x_n|.$

$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{1}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|.$

$\| \quad \|_{\mathbf{2}} : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{|x_1^2| + \cdots + |x_n^2|}.$

$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{2}} = \sqrt{\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\mathbf{2}}|}.$

$\| \quad \|_{\infty} : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \max_{i=1\ldots n} |x_i|.$

$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty} = \mathbf{max}_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}\ldots\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|.$

Montrons que $\| \ \|_1$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$.

(i) **Positivité stricte** :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$$

puisque c'est une somme de valeurs positives ou nulles.

De plus,

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$$

Une somme de nombres positifs ou nuls, est nulle si et seulement si chacun des termes est nul. C'est-à-dire :

$$|x_i| = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Et donc

$$x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

$$x = (0,0, \dots ,0) = 0_E$$

(ii) Homogénéité :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; calculons $\|\lambda x\|_1$.

$$\|\lambda x\|_1 = \|\lambda(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

(iii) **Inégalité triangulaire** :

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Conclusion :

L'application $\| \ \|_1$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$.

REMARQUE 2.2 :

On peut également définir sur $E = \mathbb{R}^n$ la norme- p, $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\|\ \ \|_p : E \to \mathbb{R}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|^{\boldsymbol{p}}\right)^{\boldsymbol{1}/\boldsymbol{p}}$$

Pour la démonstration, on a besoin des inégalités de Hölder et de Minkowski.

2.2.2 EN DIMENSION INFINIE

Soit par exemple $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ que nous noterons simplement $\mathcal{C}([0,1])$, l'espace vectoriel des fonctions définies, continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit l'application

$$\|\ \ \|_1 : E \to \mathbb{R}$$

pour toute fonction $f \in E$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

Cette application définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$, appelée norme-L^1.

On définit de même l'application

$$\|\ \ \|_2 : E \to \mathbb{R}$$

pour toute fonction $f \in E$ par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Cette application définit une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$, appelée norme-L^2.

De même, l'application :

$$\|\ \ \|_\infty : E \to \mathbb{R}$$

définie pour toute fonction $f \in E$ par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

est une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$, appelée norme de la **convergence uniforme**.

Montrons que $\| \quad \|_1$ est une norme sur $E = \mathcal{C}([0,1])$.

Remarquons d'abord que si $f \in E = \mathcal{C}([0,1])$ alors $|f| \in E$ et, est bien évidemment positive donc $\int_0^1 |f(t)|\, dt$ existe et, est positive.

(i) **Positivité stricte** :

On a :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \geq 0$$

car c'est l'intégrale d'une fonction positive. De plus,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = 0, \forall t \in [0,1] \Leftrightarrow f(t) = 0, \forall t \in [0,1] \Leftrightarrow f = 0_E$$

(ii) **Homogénéité** :

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$; calculons $\|\lambda f\|_1$:

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(t)|\, dt = \int_0^1 |\lambda||f(t)|\, dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\, dt = |\lambda|\ \|f\|_1$$

(iii) **Inégalité triangulaire** :

Soit $g \in E = \mathcal{C}([0,1])$. On a :

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(t) + g(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t))|\, dt + \int_0^1 |g(t)|\, dt \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Conclusion :

L'application $\| \quad \|_1$ est une norme sur $E = \mathcal{C}([0,1])$.