Électromagnétisme
S17 Loi d'Ampère, nabla et laplacien

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

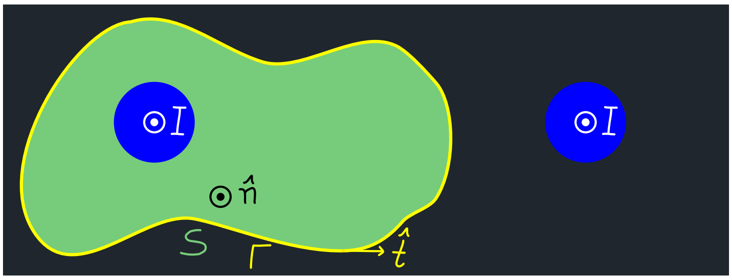
Loi d'Ampère intégrale

Loi d'Ampère (forme intégrale)

- [Lignes de champ magnétique] : boucles autour des courants
- **Loi d'Ampère** (1826) :
  « La [circulation] du champ $\vec{B}$, calculée sur une courbe Γ *fermée*, est proportionnelle au courant *traversant* une surface S (ouverte) *associée* à la courbe Γ »

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

- Γ le bord de S ; sens $\hat{t}$, $\hat{n}$ règle main droite [théorème rotationnel]
- $\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S$: le courant *enlacé* par la courbe Γ



- À chaque Γ, une infinité de S associées

Loi d'Ampère locale

Loi d'Ampère (forme locale)

- [Loi Ampère intégrale] :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S$$

- Appliquer théorème de Stokes [théorème rotationnel] :

$$\int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S$$

  pour toute surface ouverte S
- Loi d'Ampère (forme locale) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} \tag{2}$$

- Le champ $\vec{B}$ « tourne » autour de $\vec{J}$
  [visualisation rotationnel]
  [pourquoi rotationnel]

Opérateur nabla

6

L'opérateur nabla

- « Opérateur » : doit agir sur quelque chose !
  (il ne doit jamais rester seul)
- Champs (scalaires ou vectoriels) : fonctions de plusieurs variables
- Coordonnées cartésiennes : les trois dimensions sont équivalentes
  [systèmes coordonnées]
- Définir un « vecteur » spécial :

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \tag{3}$$

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

- L'opérateur nabla est un vecteur gourmand !
  il agit sur des champs (scalaires ou vectoriels)

7

Opérations avec le nabla (1)

- On peut traiter $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$ comme un vecteur ordinaire

1. Vecteur fois scalaire : $\Phi(x, y, z)$ champ scalaire

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi \quad \text{[gradient]} \tag{4}$$

2. Vecteur · vecteur : $\vec{\boldsymbol{A}}(x, y, z)$ champ vectoriel

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} \quad \text{[divergence cartésiennes]} \tag{5}$$

3. Vecteur ∧ vecteur : $\vec{\boldsymbol{A}}(x, y, z)$ champ vectoriel

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} \quad \text{[rotationnel cartésiennes]} \tag{6}$$

8

Opérations avec le nabla (2)

- Les résultats sont valables dans *tous* les systèmes de coordonnées !
  $\vec{\nabla}\Phi = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{div}\,\vec{A} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$
- Mais $\vec{\nabla}$ a une expression *uniquement* en cartésiennes

$$\text{p.ex., en sphériques} \quad \vec{\nabla} \neq \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial \phi}\hat{e}_\phi \quad !!!$$

Opération	De	À
$\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$	scalaire Φ	vecteur $\vec{\nabla}\Phi$
div $\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	scalaire $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	vecteur $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$
[laplaciens]		
$\Delta\Phi$	scalaire Φ	scalaire $\nabla^2\Phi$
$\vec{\Delta}\vec{A}$	vecteur $\vec{A}$	vecteur $\vec{\nabla}^2\vec{A}$

9

Identités vectorielles

10

Dérivées secondes spatiales

- Plutôt simples :

$$\text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) \triangleq \boxed{\nabla^2\Phi}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$$
$$\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

- Et une plus compliquée :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \triangleq \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{A} - \boxed{\vec{\Delta}\vec{A}}$$
$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) \triangleq \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A}}$$

$$\text{utiliser } \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi$ et $\vec{\Delta}\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A}$ [laplaciens]

11

Laplacien scalaire et vectoriel

12

Le(s) Laplacien(s) : nabla au carré

▼ L'opérateur $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ prend deux formes :

1. Opérateur sur un scalaire : laplacien *scalaire*
   [identités vectorielles] $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)$:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &\triangleq \nabla^2\Phi \triangleq (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\Phi \\ &\overset{\text{cart}}{=} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{7}$$

   formules plus compliquées dans les autres systèmes !

2. Opérateur sur un vecteur : laplacien *vectoriel*
   [identités vectorielles] $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$:

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}\vec{A} &\triangleq \vec{\nabla}^2\vec{A} \triangleq (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &\overset{\text{cart}}{=} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})(A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z) \\ &= (\nabla^2 A_x)\hat{e}_x + (\nabla^2 A_y)\hat{e}_y + (\nabla^2 A_z)\hat{e}_z\end{aligned} \tag{8}$$

   Décomposition en composantes $\nabla^2 A_i$ *uniquement* en cartésiennes !

13