Charge électrique :

C'est une propriété (une caractéristique) fondamentale de la matière (au même titre que la masse)

Deux types de charges : Positive / Négative

Unité SI : Coulomb (C).

Valeurs : charge d'un électron : $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
proton : $|q_e| = 1{,}602 \cdot 10^{19}$ C

De manière générale la charge d'une particule sera toujours un multiple de q_e.

Modèles utilisés :

Charges ponctuelles : Des points dans l'espaces.
Dans ce cas, la charge totale sera la somme discrète des charges : $q = \sum_i q_i$

Charges continues : Ces charges sont étendues dans l'espace : une, deux ou trois dimensions.

1 dim → Linéique → densité en $C.m^{-1}$: ρ_l → charge élémentaire $dq = \rho_l \, dl$

2 dim → Surfacique → densité ρ_s $C.m^{-2}$ → $dq = \rho_s \, dS$

3 dim → Volumique → densité ρ_v $C.m^{-3}$ → $dq = \rho_v \, dV$

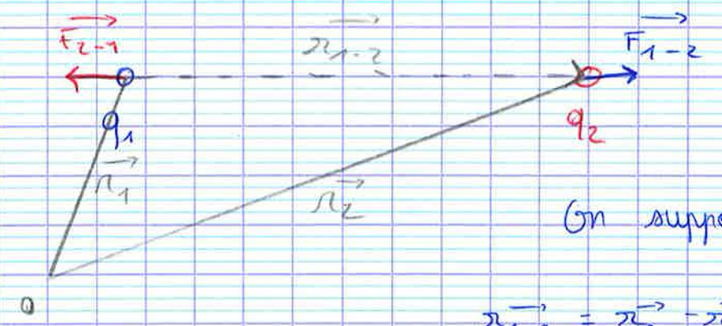
La charge s'obtient en intégrant la charge élémentaire

⚠ Différence entre ρ en coordonnées cylindriques et ρ de la densité.

Force et champ électrostatiques

Statique : Les charges ne se déplacent pas.

Loi de Coulomb (1785) :



On suppose $(q_1 q_2 > 0)$

$\vec{r}_{1-2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

La loi dit :

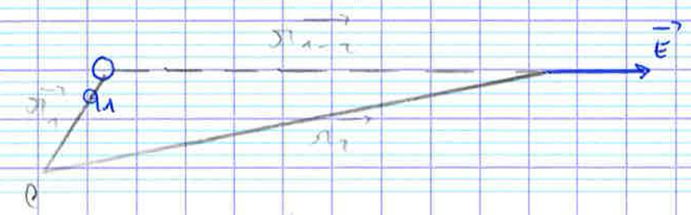
$$\boxed{\vec{F}_{1-2} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{constante pour respecter le SI}} \frac{q_1 q_2}{r_{1-2}^2} \hat{r}_{1-2}}$$

Vecteur unitaire pour ne parler uniquement de la direction

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ $F.m^{-1}$: Constante électrique

$\vec{F}_{2-1} = -\vec{F}_{1-2}$ (dans la formule, seul $\hat{r}_{1-2}$ devient $\hat{r}_{2-1}$).

Notion de champ électrostatique



$(q_1 > 0)$

On oublie q_2.

La force, le champ électrique créé par la charge 1 est :

$$\boxed{\vec{E_1} \triangleq \frac{\vec{F_{1-2}}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1-2}^2}\hat{r}_{1-2} \qquad (N.C^{-1})}$$

r_{1-2} ne peut être égale à 0 donc une charge n'a pas d'effet sur elle-même.

On peut alors calculer :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Force électrique = Charge x Champ.}\\ \vec{F_{1-2}} = q_2\vec{E_1}\end{array}}$$

Champs scalaire et vectoriel

I Champs scalaires :

C'est l'association à chaque point de l'espace d'un scalaire (c-a-d un seul nombre).
Par exemple la température sur une carte

Champs vectoriels :

C'est l'association à chaque point de l'espace d'un vecteur (longueur + orientation).
Par exemple le vent ou la vitesse.

Mathématiquement parlant, un champ scalaire n'est qu'une fonction à 3 variables. Il ~~est~~ dépend du vecteur de position $\vec{r}$.

Un champ vectoriel, lui, est un ensemble de 3 fonctions (les composantes) chacune de 3 variables (les coordonnées).

Visualisation des champs scalaires et vectoriels :

- Représentation en 3D pour un champ scalaire en 2D.
- Iso-Niveaux

Surface fermée S

$$\oint_S \vec{h} \cdot \hat{n}\, dS$$

$\int_S$ => surface ouverte

$\oint_S$ => surface fermée

Surface fermée : $\hat{n}$ est dans le sens interieur → ext.

Flux d'un champ vectoriel :

Soit $\vec{A}(\vec{r})$ le champ vectoriel

Flux du champ $\vec{A}(\vec{r})$ à travers S :

$$\int_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS$$

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS$$

Le flux est un scalaire ! Il ne donne pas d'indication sur la direction.

Pourquoi utiliser les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour décrire les phenomènes électromagnetique ?

La loi de Coulomb nous donne la force électrostatique seulement dans le cas où les charges sont immobiles.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{r_{1-2}^2}\, \hat{r}_{1-2}}$$

Or, en utilisant les champs magnetiques, electriques on peut, grâce à la force de Lorentz, étudier la force lorsque les charges sont mobiles.

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

(Force exercée sur une charge q, ayant une vitesse instantanée $\vec{v}$, traversant $\vec{E}$ et $\vec{B}$)

D'où l'intérêt des champs électrique et magnetique

Visualisation de champs vectoriels :

• Diagramme "quiver" :

Dessiner des vecteurs :

· À chaque point $\vec{r}$ on dessine le vecteur $\vec{A}(\vec{r})$

· Le placement du vecteur se fait à son origine (à l'extrémité de $\vec{r}$).

Cette visualisation ne nous montre pas pas l'essentiel du champ que l'on veut visualiser.

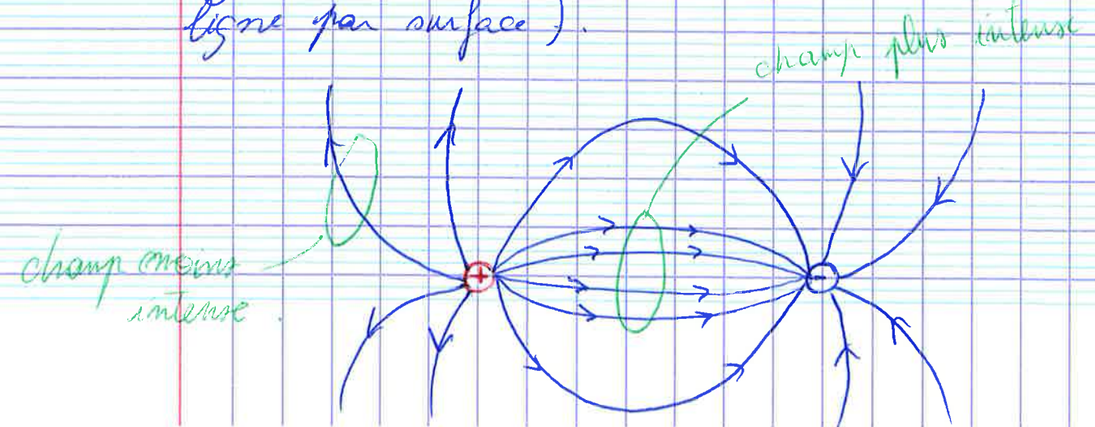
• Lignes de Champ.

· On trace des lignes continues qui suivent le champ

· Les lignes sont tangentes au champ $\vec{A}(\vec{r})$

· Les lignes de champ ne se croise jamais. Si elles se croisaient, on aurait en un point, un champ tangentiel à 2 lignes differentes.

· Pour connaître l'intensité du champ on regarde la densité de ligne (le nbre de ligne par surface).

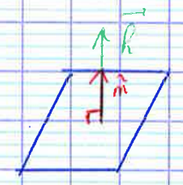


Flux d'un champ vectoriel

Analogie avec l'écoulement de l'eau :

On va se demander qu'est ce qui va traverser une surface ?

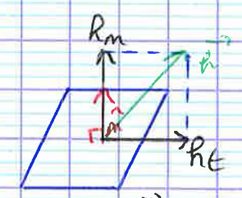
On prend : • un champ $\vec{h}$ ($kg.s^{-1}.m^{-2}$)
• Une surface ouverte élémentaire dS
> un vecteur normal $\hat{n}$
> un vecteur $\vec{dS} = \hat{n}dS$
> Que représente $\vec{h}.\hat{n}dS$?



Cas simple.

ici $\vec{h}.\hat{n} = h$

hdS est alors la masse qui traverse dS par seconde ($kg.s^{-1}.m^{-2}.m^{2}$).



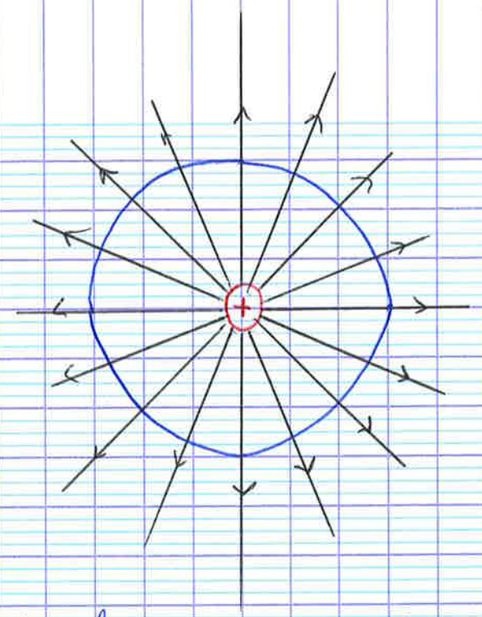
h_t représente de l'eau ne traversant pas la surface.

$h_n = \hat{n}.\vec{h}$ $\quad$ $\vec{h}.\hat{n}dS$ nous donne ici aussi la masse traversant la surface dS par seconde

⚠ Signe de la réponse : Dans le sens de $\hat{n}$ ou non

Surface ouverte S (non élémentaire)

$\int_S \vec{h}.\hat{n}dS$ est le flux, ce qui traverse la surface par seconde



Notre surface fermée est une sphère de rayon R
On sait que $\hat{n} = \hat{e}_r$ (coordonnées sphérique ici)

Calculons le flux :

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_r\, dS$$

$$= \oint_S \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2}}_{\text{constante}} dS$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} dS$$

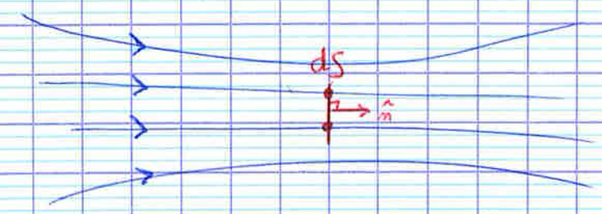
Or, lorsqu'on se "balade" sur S, on remarque que r ne varie pas et vaut R, le rayon de la sphère. D'où :

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \underbrace{\oint_S dS}_{= 4\pi R^2}$$

$$= \frac{Q_0}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \frac{1}{\cancel{R^2}} \cancel{4\pi R^2}$$

$$= \frac{Q_0}{\varepsilon_0}$$ or Q_0 est la seule charge dans la sphère. donc $= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

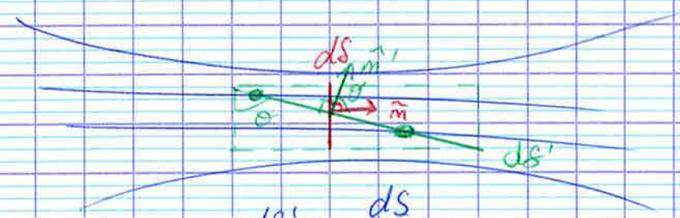
Flux et ligne de champ



$$\frac{\text{nbre de ligne}}{\text{surface} \perp} \propto \|\vec{A}\|$$

$$\text{nbre de ligne} \propto \|\vec{A}\|\, dS$$
$$\propto \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS$$

Donc nbre de ligne $\propto$ flux traversant dS.



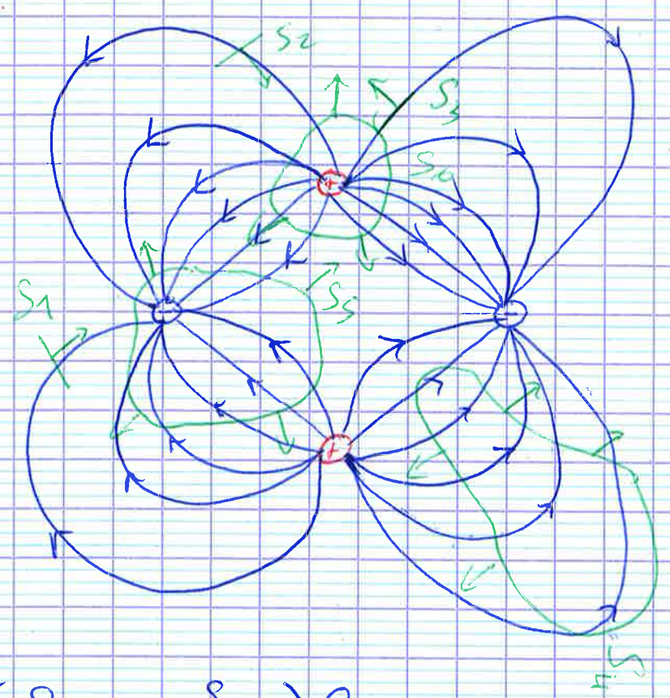
$$dS' = \frac{dS}{\cos\theta}$$

Flux de $\vec{A}$ traversant dS' $= \vec{A} \cdot \hat{n}'\, dS'$
$= \|\vec{A}\|\, \|\hat{n}'\| \times \cos\theta\, dS'$
$= \|\vec{A}\| \cancel{\cos\theta} \frac{dS}{\cancel{\cos\theta}}$

$= \|\vec{A}\|\, dS$
= flux de $\vec{A}$ traversant dS

Donc $\boxed{\text{nbre de ligne} \propto \text{flux}}$

i.



$S_2 < 0$ $\quad S_1 > 0$

$S_3 = 0$

$S_4 = 0$ (autant sortant qu'entrant)

$S_5 < 0$ (12 lignes entrantes)

$S_6 > 0$ (12 lignes sortantes)

Donc $S_5 = -S_6$.

Loi de Gauss : forme intégrable.

Attention elle ne s'applique que dans l'électrostatique.

Loi de Gauss : Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge totale incluse à l'intérieur de cette surface.

$$\boxed{\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

On a vu précédemment que :

Flux $\propto$ nombre de ligne de champ.

La loi de Gauss se formule aussi ainsi :

Le nombre de ligne du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge totale incluse à l'intérieur de la surface.

Application simple : On prend Q_0, une charge à l'origine d'un repère. On sait que le champ créé par celle ci vaut : $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{e}_r$

On va vérifier Gauss dans un cas assez simple (c-a-d surface fermée = sphère).

Loi de Gauss : Forme locale

Rappel : $\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Forme intégrale

Le flux à travers une surface fermée nous donne des informations sur les sources internes.

Grâce à la divergence on peut écrire :

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS = \int_V div(\vec{E}(\vec{r}))\, dV$$

On a transformé l'équation (partie gauche) en intégrale de volume. On essaye de faire pareil à droite.

Charge × volume⁻¹ × volume = charge

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\, dV = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\, dV$$

densité volumique

On a donc $\int_V div\, \vec{E}(\vec{r})\, dV = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\, dV$

On obtient ainsi la loi de Gauss en forme locale :

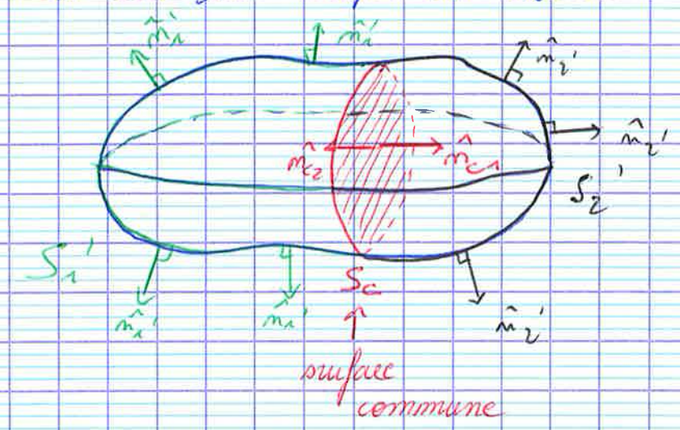
$$\boxed{div\, \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

s'applique à un seul point de l'espace, d'où le nom de "forme locale".

Divergence d'un champ vectoriel

Introduction :

On prend une surface fermée habituelle (une "patate") et on va la couper en deux.



On obtient deux surfaces OUVERTES S_1' et S_2'. C'est en fait la peau de la patate.

En réfléchissant avec la notion des lignes de champ on conclue : $\boxed{\text{Flux à travers } S = \text{Flux à travers } S_1' + \text{Flux à travers } S_2'}$

Si on considère maintenant les surfaces :
$S_1 = S_1' \cup S_c$ et $S_2 = S_2' \cup S_c$
Ces deux surfaces sont FERMÉES

Comme $\hat{n}_{c1} = -\hat{n}_{c2}$ on a :

$$\boxed{\text{Flux à travers } S = \text{Flux à travers } S_1 + \text{Flux à travers } S_2}$$

fermée — ouverte — ouverte

$$\oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_1\,dS = \int_{S_1'} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_1' + \int_{S_c} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_{c_1}\,dS$$

même valeur au signe près.

$$\oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_2\,dS = \int_{S_2'} \vec{A}(\vec{r})\,\hat{n}_2' + \int_{S_c} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_{c_2}\,dS$$

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_2\,dS + \oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_1\,dS$$

Je peux couper en plus de 2 morceaux.

$$\boxed{\oint_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \sum_i \left(\oint_{S_i} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_i\,dS\right)}$$

DIVERGENCE D'UN CHAMP VECTORIEL :

Je peux couper jusqu'à arriver à des surfaces fermées élémentaires, très petites donc.

Quel est le flux à travers une surface fermée élémentaire ?

$$\lim_{\Delta S\to 0} \oint_{\Delta S} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = 0 \;!!!$$

$$\text{Divergence} \triangleq \frac{\text{Flux surface fermée élémentaire}}{\text{Volume}}$$

La divergence du flux $\vec{A}$ sera notée :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS}$$

Quand la surface et le volume deviennent élémentaires alors il ne représentent qu'un point $\vec{r}$ de l'espace ;

La divergence est donc un scalaire différent pour chaque point de l'espace, c'est donc un champ scalaire. (<0 ; >0 ; $=0$)

- $\operatorname{Div}\vec{A}(\vec{r}) \propto$ flux à travers une surface fermée autour du point $\vec{r}$.

Or on a vu : flux à travers une surface fermée $\propto$ sources à l'intérieur

Donc $\operatorname{div}(\vec{A}(\vec{r})) \propto \dfrac{\text{source à l'intérieur}}{\text{Volume}}$

On dit : $\boxed{\text{La divergence du champ } \vec{A}(\vec{r}) \text{ est proportionnelle à la densité volumique des sources qui le créent}}$

Pas de source → Pas de divergence

THÉORÈME DE LA DIVERGENCE :

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_1\,dS + \oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_2\,dS$$

$$= \sum_i \left(\oint_{S_i} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}_i\,dS\right) \overset{S_i\to 0}{=} \int_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})\,dV$$

Donc $\boxed{\oint_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})\,dV}$

Théorème de la divergence
Théorème de Gauss
} et d'autres noms.

Face i	$\hat{n}_i$	centre	aire	flux
1	$\hat{e}_x$	$(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)$	$\Delta y \Delta z$	$A_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z$
2	$-\hat{e}_x$	$(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)$	$\Delta y \Delta z$	$-A_x(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z$
3	$\hat{e}_y$	$(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)$	$\Delta x \Delta z$	$A_y(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z$
4	$-\hat{e}_y$	$(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)$	$\Delta x \Delta z$	$-A_y(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z$
5	$\hat{e}_z$	$(x, y, z+\frac{\Delta z}{2})$	$\Delta x \Delta y$	$A_z(x, y, z+\frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y$
6	$-\hat{e}_z$	$(x, y, z-\frac{\Delta z}{2})$	$\Delta x \Delta y$	$-A_z(x, y, z-\frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y$

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\text{flux}}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\frac{A_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z) - A_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} + \dots \right)$$

$\lim_{(a-b)\to 0} \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

Finalement : $$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Pourquoi le terme "divergence" ?

On rappelle : $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) \propto$ flux à travers une surface fermée élémentaire autour de $\vec{r}$

or flux à travers une surface $\propto$ nombre de ligne de champ.

Donc $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) \propto \text{nbre de ligne qui traverse une surface fermée élémentaire autour de } \vec{r}}$

N'oublions pas que la divergence s'applique à un point de l'espace (champ scalaire).

Div : à un point
Flux : autour d'un volume

Le lien entre les deux est fait par le théorème de la divergence.

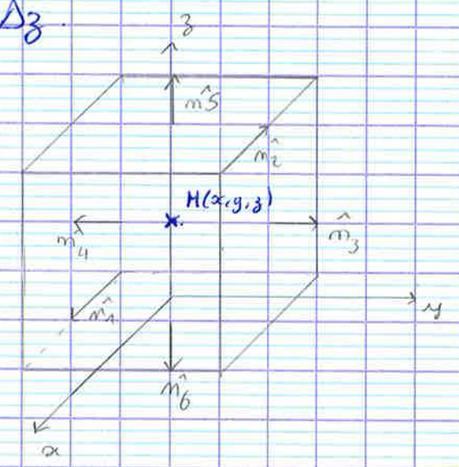
Là où se trouve une charge, la divergence est positive ou negative.
Si la divergence est calculée là où il n'y a pas de charge, alors elle sera nulle.

Formule de la divergence en coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{Div} \triangleq \frac{\text{flux à travers } dS \text{ fermée}}{\text{Volume}}$$

Prenons une surface élémentaire autour d'un point $M(x, y, z)$.

La forme de ce volume ne change pas. On va prendre un cube centré à M, de dimension $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.



Par définition : $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\text{flux}}{\text{volume}}$

On connait déjà volume $= \Delta x \Delta y \Delta z$.

Il faut calculer le flux

On va d'abord décomposer la surface fermée puisque elle est composée de 6 surfaces $(S_1, \dots, S_6)$

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dS = \int_{S_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1\, dS + \dots + \int_{S_6} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_6\, dS$$

On étudie le problème surface par surface.

On rappelle que le cube est élémentaire donc infiniment petit. On peut donc faire des approximations :

- Le champ $\vec{A}(\vec{r})$ est constant sur une face.
- (1) Il sera égal à $\vec{A}(\vec{r}_{centre})$ (valeur au centre de la surface
- Flux : $\int_{S_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_i\, dS = \int_{S_i} A_{nor}(\vec{r})\, dS$ (projection normale)

par (1) $\longrightarrow \simeq A_{nor}(\vec{r}_{centre_i}) \times$ aire S_i

Commençons par le calcul sur les faces avant et arrière (1 et 2, avec $\hat{n}_1$ et $\hat{n}_2$).

S_1 : $\hat{n}_1 = \hat{e}_x$ (2), centre à $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

aire $= \Delta y \Delta z$

Amor $A_{nor}(\vec{r}_{centre_1}) = A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

$A_{nor} = A_x$ par (2)

S_2 : $\hat{n}_2 = -\hat{e}_x$, centre à $(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

aire $= \Delta y \Delta z$

$A_{nor}(\vec{r}_{centre_2}) = -A_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$.

On peut résumer les 6 informations dans un tableau.

Potentiel électrostatique :

$$W_{A\to B} = W_{A\to P\to B}$$
$$= W_{A\to P} + W_{P\to B}$$
$$= -W_{P\to A} + W_{P\to B}$$

$W_{P\to P} = W_{A\to P} + W_{P\to A}$
$\parallel$
0
donc $W_{P\to A} = -W_{A\to P}$

On peut plutôt parler de Travail fourni de A à B, par charge déplacée :

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{P\to B}}{q} - \frac{W_{P\to A}}{q}$$

Le potentiel est le travail par charge pour aller d'un point P à un autre point quelconque.

$$V(\vec{r_A}) \triangleq \frac{W_{P\to A}}{q} \quad (V = J.C^{-1}).$$

Le potentiel est donc un champ scalaire.

Le potentiel au point de référence :

$$V(\vec{r_P}) = \frac{W_{P\to P}}{q} = 0.$$

Finalement on peut écrire : $W_{A\to B} = q\left(V(\vec{r_B}) - V(\vec{r_A})\right)$
Travail = charge × ddp (différence de potentiel).

Si $W_{A\to B} > 0$ alors on fournit de l'énergie :
- $q > 0$ et $V(\vec{r_B}) > V(\vec{r_A})$
- $q < 0$ et $V(\vec{r_B}) < V(\vec{r_A})$

Travail dans un champ électrostatique

- On fixe une charge ponctuelle Q_0 à l'origine
On déplace une charge test q dans le champ $\vec{E}$ de Q_0
On se demande : Quel est le travail fourni de A à B ?

("fourni" : le travail exercé par celui qui déplace la charge).

Travail = Force × déplacement.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = \vec{F}\cdot\hat{t}\,dl$$

← nous indique la longueur du déplacement

↑ nous indique la direction du déplacement

$\hat{t}$: vecteur unitaire tangent à $d\vec{l} = \hat{t}\,dl$.

$\vec{F}\cdot\hat{t}$: composante tangentielle de $\vec{F}$.

$$W_{A\to B} = \int_{\Gamma:\vec{r_A}\to\vec{r_B}} dW = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl$$

sur toute la longueur entre A et B

On cherche donc maintenant la force exercée sur la charge q pendant le déplacement :

$$\vec{F} = -\vec{F_{el}} = -(q\vec{E}).$$

Ainsi $$W_{A\to B} = -q\int_{\Gamma:\vec{r_A}\to\vec{r_B}} \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl$$

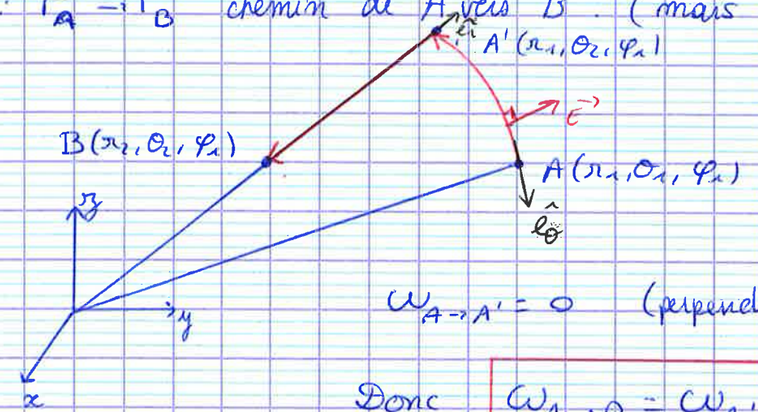
Que se passe-t-il quand il y a plus d'une charge ?

On a un cas de superposition :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_1}(\vec{r}) + \vec{E_2}(\vec{r}) \dots$$

$$W_{A\to B} = W_{1\,A\to B} + W_{2\,A\to B} + \dots$$

$\Gamma : r_A \to r_B$ chemin de A vers B. (mais lequel ?)



$W_{A\to A'} = 0$ (perpendiculaire)

Donc $\boxed{W_{A\to B} = W_{A'\to B}}$

Le chemin que l'on choisit n'a pas d'importance !

La circulation du champ électrostatique

On a $W_{A\to B}$ qui ne dépend que de la position de A et B, non du chemin choisi.

$\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$

Car $\vec{E} \parallel \hat{e_r}$ et $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$

Ceci a une conséquence.

Quel est le travail le long d'une courbe fermée ?

Il est toujours nul

$$W_{A\to A} = -q \oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = 0}$$

On dit que la circulation du champ électrique le long d'une courbe fermée est nulle.

On dit aussi que les forces électrostatique sont conservatrices.

Sous un autre point de vue on dira que la différence de potentiel le long d'un chemin fermé est nulle (loi des mailles).

Gradient

Remarque : $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = \overrightarrow{grad}(V)\cdot d\vec{l}$

$$\boxed{V(\vec{r_B}) - V(\vec{r_A}) = -\int_{\vec{r_A}\to\vec{r_B}} \vec{E}\cdot\hat{t}\,dl}$$

Deux conditions pour prendre un raccourci :

1. Le champ $\vec{E}$ n'a qu'une seule composante...
2. ... correspondant à une variable de longueur (pas θ, φ etc)

Exemple : $\vec{E} = E_z\hat{e_z}$

Commencer par

$$\vec{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}\,V(x,y,z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e_z}\right)$$

- $\vec{E} = E_z\hat{e_z}$ implique $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$.
- Donc V est uniquement un fonction de z !

$$\vec{E}(z) = E_z\hat{e_z} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{e_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Leftrightarrow E_z = -\frac{dV(z)}{dz} = -V'(z) \\ &\Leftrightarrow V(z) = -\int E_z(z)\,dz \end{aligned}}$$

Il faudra juste penser à la constante d'intégrat°

Si $W_{A\to B} < 0$ alors on récupère de l'énergie
- $q > 0$ et $V(\vec{r_B}) < V(\vec{r_A})$
- $q < 0$ et $V(\vec{r_B}) > V(\vec{r_A})$.

ce déplacement est spontané c'est à dire que si on laisse la charge sans rien faire alors elle va de A à B

Si $W_{A\to B} = 0$ alors nécessairement :
- $V(\vec{r_B}) = V(\vec{r_A})$

Donc arrivée et départ sur une équipotentielle.

Calcul du potentiel électrostatique

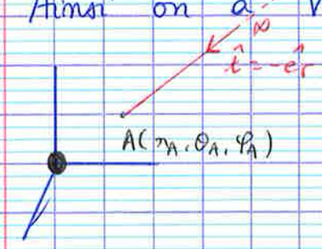
Potentiel créé par une charge ponctuelle

Charge Q_0 à l'origine
Elle crée le champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{e_r}$

Potentiel = $\frac{\text{Travail}}{\text{Charge}}$.

On a besoin d'un point P où le potentiel est nul, on prend donc P à l'infini.

Ainsi on a : $V(\vec{r_A}) = \frac{W_{\infty\to A}}{q} = \frac{1}{q}(-q)\int_{\vec{r_\infty}\to\vec{r_A}} \vec{E}\cdot\hat{t}\,dl$



$$= \frac{-Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r_\infty}\to\vec{r_A}} \frac{1}{r^2}\hat{e_r}(-\hat{e_r}\,dr)$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r_A}}^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr$$

ATTENTION AUX BORNES !

$r_A \to r_\infty$ car on a considéré $t = -\hat{e_r}$.

$$V(\vec{r}_A) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r_A}}$$

$Q_0 > 0$ crée $V(\vec{r}) > 0$
$Q_0 < 0$ crée $V(\vec{r}) < 0$

Si la charge Q_0 n'est pas à l'origine :

- $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$

Potentiel créé par un ensemble de charge situées à $\vec{r}_i$:

- $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\left(\frac{q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|}\right)$

Potentiel crée par une distribution surfacique de charges :

- $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma_S(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dS'$

Potentiel crée par une distribution volumique :

- $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dV'$

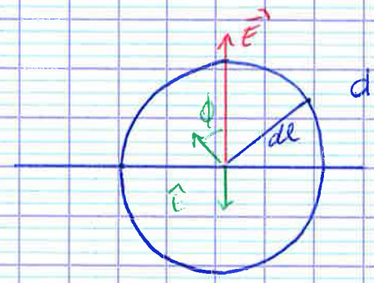
Potentiel et champ électrique : Relations locales

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A\to\vec{r}_B}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Différence de potentiel entre A et B :

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = \int_{\vec{r}_A\to\vec{r}_B} dV$$ ← différence de potentiel sur un déplacement élémentaire

$$\boxed{dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$ ← relation locale.



$dV = -E\,dl\cos\phi$

Je me dirige comme $\vec{E}$? $dV \searrow$
contre $\vec{E}$? $dV \nearrow$

- $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{d\vec{l} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z}$$

et $V(\vec{r}) = V(x,y,z)$

$$\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz.}$$

et $$\boxed{-\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z.} \triangleq \overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ $(V.m^{-1})$.

Simplifions cela : $U_e = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r_i})$

Ex $N = 3$.

U_e = somme des termes.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	—	—	—
$i=2$	$q_2 V_1(\vec{r_2})$	—	—
$i=3$	$q_3 V_1(\vec{r_3})$	$q_3 V_2(\vec{r_3})$	—

commence à $i=2$.

Rmq : $q_i V_j(\vec{r_i}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = q_j V_i(\vec{r_j})$

$q_i V_j(\vec{r_i}) = q_j V_i(\vec{r_j})$

U_e = somme des termes.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	—	$q_1 V_2(\vec{r_1})$	$q_1 V_3(\vec{r_1})$
$i=2$	—	—	$q_2 V_3(\vec{r_2})$
$i=3$	—	—	—

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>1} q_i V_j(\vec{r_j})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} q_i V_j(\vec{r_i})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[q_i \left(\sum_{j \neq i} V_j(\vec{r_i}) \right) \right]$$

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r_i})}$$

$V(\vec{r_i})$: potentiel créé au point $\vec{r_i}$ par toute les autres charges (pas q_i)

Gradient d'un champ scalaire :

$dV = \overrightarrow{grad}(V) \cdot d\vec{l} = \overrightarrow{grad}(V)\, \hat{t} \cdot dl$

↑ gradient.

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(V) \cdot \hat{t} = \frac{dV}{dl}}$$

← variation du potentiel

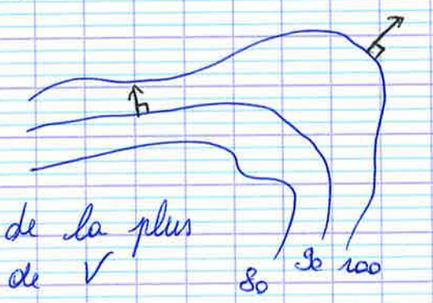
← ~~de~~

← variation de longueur

grad nous donne la dérivée selon $\hat{t}$.

Le gradient d'un champ scalaire V :

- Est un champ vectoriel
- Perpendiculaire aux équipotentielles ($V = cste$, $dV = 0$)



- Montre la direction de la plus forte augmentation de V (dV max).
- $\|\overrightarrow{grad}(V)\| = \left.\frac{dV}{dl}\right|_{max}$ (max qd $\hat{t} \parallel \overrightarrow{grad}(V)$).

$$V(\vec{r_B}) - V(\vec{r_A}) = \int_{\Gamma : \vec{r_A} \to \vec{r_B}} \underbrace{\overrightarrow{grad}\, V \cdot \hat{t}}_{\frac{dV}{dl}}\, dl$$

$$= \int_{\vec{r_A} \to \vec{r_B}} dV$$

Rappel : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx$

Gradient en coordonnées cartésiennes :

$$dV = \vec{\text{grad}}\, V \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = V(x,y,z)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

donc $\boxed{\vec{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z}$

Gradient en coordonnées cylindrique :

$$d\vec{l} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\, d\phi\,\hat{e}_\phi + dz\,\hat{e}_z$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi}d\phi + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\boxed{\vec{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z}$$

Attention ⚠ Valide sauf pour $\rho = 0$.

Gradient en coordonnées sphérique :

$$d\vec{l} = dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{e}_\phi$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}d\phi$$

$$\boxed{\vec{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{e}_\phi}$$

$r \neq 0$, $\sin\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq 0\,[\pi]$

Énergie électrostatique : Charges ponctuelles

Pour déplacer une charge q dans un champ je fournis du travail.
Ce travail que je fournis devient une energie potentielle.

$$W_{P\to A} = q\left(V(\vec{r_A}) - V(\vec{r_P})\right)$$

$$= qV(\vec{r_A})$$

$$\boxed{U_e = qV(\vec{r})}$$ ← Énergie électrostatique

$V(\vec{r})$ correspond bien au potentiel créé par les autres charges.

Travail fournis pour deplacer N charges $P \to A$:

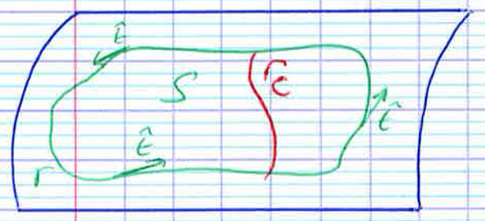
On regarde les charges les unes après les autres.
q_i à $\vec{r_i}$.

$V_j(\vec{r_i})$: potentiel créé au point $\vec{r_i}$ par la charge q_j

Deplacée	Présente(s)	Travail Fournis
q_1	—	0
q_2	q_1	$q_2 V_1(\vec{r_2})$
q_3	q_1, q_2	$q_3 V_1(\vec{r_3}) + q_3 V_2(\vec{r_3})$
...	...	...
q_N	$q_1, \dots, q_{N-1}$	$q_N\left(V_1(\vec{r_N}) + \dots + V_{N-1}(\vec{r_N})\right)$

$$\boxed{U_e = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j<i} q_i V_j(\vec{r_i})}$$

Rotationnel d'un champ vectoriel :



$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl = \oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{t}_1\,dl + \oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r})\hat{t}_2\,dl.$$

Jusqu'où peut on couper ?

Courbe formée élémentaire autour d'une surface élémentaire $\boxed{\text{plane}}$

On se demande donc :

$$\lim_{\text{longeur } \Gamma \to 0} \oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{\text{Rotationnel} \triangleq \frac{\text{Circulation courbe élémentaire fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}}$$

▷ On doit faire intervenir $\hat{n}$ de la surface.

(Respecte la règle de la main droite)

$\hat{t}$ et $\hat{n}$ sont donc liés.

$$\hat{n}\cdot\vec{\text{rot}}\,\vec{A}(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta S\to 0} \frac{1}{\Delta S}\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl$$

Le rotationnel de $\vec{A}$ est un champ vectoriel !

Énergie électrostatique : Charges continues

On se base sur le résultat precedent :

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)}$$

▷ Distrib linéïque : $dq = \rho_\ell(\vec{r})dl$

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho_\ell(\vec{r})V(\vec{r})dl.}$$

▷ Distrib surfacique : $dq = \rho_s(\vec{r})dS$

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_S \rho_s(\vec{r})V(\vec{r})dS}$$

▷ Distrib volumique $dq = \rho(\vec{r})dV$

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})dV}$$

$V(\vec{r})$ étant, dans chaque cas, le potentiel au point $\vec{r}$ créé par la distribution.

Peut-on exprimer l'énergie en terme de champ $\vec{E}$ plutôt que de potentiel V et de charges ρ ?

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})dV \quad \text{or on connait} \quad \begin{cases}\rho = \varepsilon_0 \,\text{div}\,\vec{E}\\ \vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V\end{cases}$$

Sans démonstration on obtient

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2(r)dV$$

$(J.m^{-3})$. $\frac{\varepsilon_0 E^2(\vec{r})}{2}$ est appelée densité volumique d'énergie

Circulation d'un champ vectoriel :

On va suivre la composante tangentielle le long d'une courbe.

▷ Circulation du champ $\vec{A}$ le long de la courbe Γ :

$$\int_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl$$

▷ Circulation du champ $\vec{A}$ le long d'une courbe fermée Γ :

$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl$$

▷ Circulation : Scalaire $(>0, <0, =0)$.

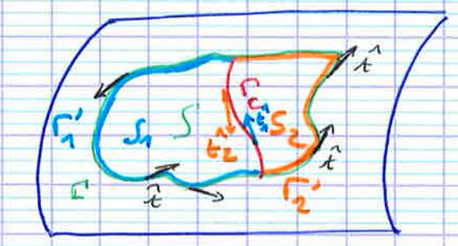
▷ Égal à (la valeur moyenne de A_{tan}) × (longueur de Γ)

Si circulation = 0 alors $Mog(A_{tan}) = 0$.

▷ Depend du chemin choisi ! (Sauf pour les champs conservatifs).
champ électrostatique.

La circulation n'est pas la même selon le chemin choisi !

Rotationnel d'un champ vectoriel
Introduction.



On coupe S, entourée de la courbe Γ fermée, en deux, S_1, S_2 entourée par Γ_1, Γ_2.

▷ Circulation le long de Γ :

$$Circ.\ \Gamma = Circ\ \Gamma_1' + Circ\ \Gamma_2'$$

▷ Γ_1' est ouverte : $\Gamma_1' \cup \Gamma_c = \Gamma_1$ fermée.
▷ Γ_2' est ouverte : $\Gamma_2' \cup \Gamma_c = \Gamma_2$ fermée

▷ Sur Γ_c on remarque $\hat{t}_1 = -\hat{t}_2$

▷ On en déduit : $\boxed{Circ\ \Gamma = Circ\ \Gamma_1 + Circ\ \Gamma_2}$

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, dl = \int_{\Gamma_1'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, dl + \int_{\Gamma_c} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, dl$$

⇕ opposée car $\hat{t}_1 = -\hat{t}_2$ sur Γ_c.

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, dl = \int_{\Gamma_2'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, dl + \int_{\Gamma_c} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, dl$$

On peut avec le même principe, continuer à couper :

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_i\, dl \right)}$$

$$\hat{e_x} \cdot \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta y \Delta z \to 0} \left[\frac{A_z(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z) - A_z(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} - \frac{A_y(x, y, z+\frac{\Delta z}{2}) - A_y(x, y, z-\frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right]$$

$$\boxed{= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r})\Big|_x}$$

"composante x du $\vec{rot}$ de $\vec{A}$".

En réitérant :

$$\hat{e_y} \cdot \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \boxed{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r})\Big|_y}$$

De même :

$$\hat{e_z} \cdot \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = \boxed{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \vec{rot}\,(\vec{A}(\vec{r}))\Big|_z}$$

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e_x} & \hat{e_y} & \hat{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

Théorème de Helmholtz :

La divergence et le rotationnel déterminent le champ vectoriel.

En 3 dim, si on connait $\phi(\vec{r})$ et $\vec{A}(\vec{r})$, tels que $\vec{div}\,\vec{F} = \phi(\vec{r})$ et $\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{A}(\vec{r})$, alors $\vec{F}(\vec{r})$ est unique.

À chaque point de l'espace $\hat{n} \cdot \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$:

- ▷ La composante de $\vec{rot}\,\vec{A}$ selon $\hat{n}$.
- ▷ $\propto$ à la circulation de $\vec{A}(\vec{r})$ autour de ce point
- ▷ Circulation sur le bord de la surface élémentaire associée à $\hat{n}$.

max $(\hat{n} \cdot \vec{rot}\,\vec{A}) = \|\vec{rot}\,\vec{A}\|$ quand $\hat{n}$ est parallèle à $\vec{rot}\,\vec{A}$.

À chaque point de l'espace $\vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$:

- ▷ montre la direction de la normale $\hat{n}$ de la surface sur le bord de laquelle la circulation est maximale.
- ▷ $\|\vec{rot}\,\vec{A}\| \propto$ Circulation maximale autour de $\vec{r}$
- ▷ Sens circulation $\Leftrightarrow$ sens rotationnel (Règle main droite)

Si le champ "tourne" ($\|\vec{rot}\,\vec{A}\| \neq 0$), il fait des tourbillons autour du vecteur du rot.
La surface dont $\hat{n} \parallel \vec{rot}\,\vec{A}$ contient un tourbillon du champ.
Visualisation : moulin immergé dans le champ.
(voir site Harvard)

Théorème du rotationnel (Stokes) :

$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\,dl = \oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t_1}\,dl + \oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r})\,\hat{t_2}\,dl$$

$$= \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t_i}\,dl \right) \overset{\Gamma_i \to 0}{=} \int_S \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\,dS$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\,dl = \int_S \vec{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\,dS}$$

flux du rotationnel à travers S

Rotationnel du champ électrostatique :

Le rotationnel du champ électrostatique est nul

$\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = 0$ or $\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = \int_S \vec{rot}(\vec{E}(\vec{r})) \cdot \hat{n}\, dS$

$= 0$

donc $\vec{rot}(\vec{E}(\vec{r})) = 0$.

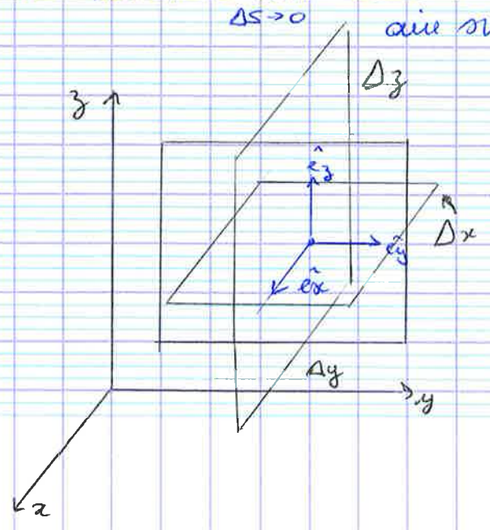
Pourquoi "rotationnel" ?

Rotationnel : Donne des info à un point
Circulation : Donne des informations sur une courbe

Pour le rot on utilise une formule car c'est compliqué de visualiser la notion

Formule du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\hat{m} \cdot \vec{rot}\, \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\text{circulation courbe dim. fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}.$$



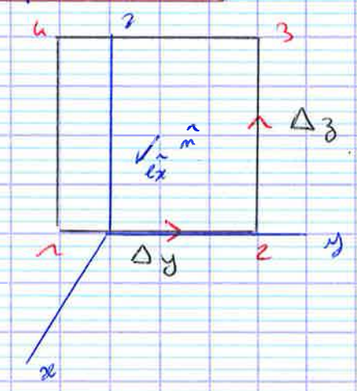
$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl \overset{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4}{=} \int_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t_1}\, dl + \dots + \int_{\Gamma_4} \vec{A}(\vec{r}) \cdot t_4\, dl$$

$\vec{A}(\vec{r})$ cste sur un côté $= \vec{A}(\vec{r}_{centre})$.

Circulation : $\int_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t_i}\, dl$

$= \int_{\Gamma_i} A_{tan}(\vec{r})\, dl \simeq A_{tan}(\vec{r}_{centre_i}) \times \text{long}\, \Gamma_i$

Composante x :



Γ : le bord de S dont $\hat{n} = \hat{e_x}$
aire $= \Delta y \Delta z$.

Γ_{1-2} : $\hat{t_{12}} = \hat{e_y}$ longueur : Δy.
$A_{tan}(\vec{r}_{centre\ 12}) = A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$

Γ_{2-3} : $\hat{t_{2-3}} = \hat{e_z}$ longueur : Δz.
$A_{tan}(\vec{r}_{centre\ 23}) = A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$

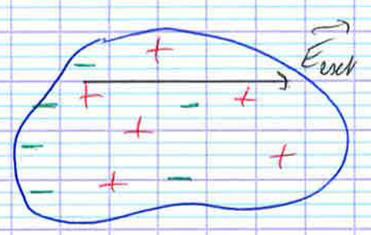
Γ_{3-4} : $\hat{t_{3-4}} = -\hat{e_y}$, longueur : Δy
$A_{tan}(\vec{r}_{centre\ 3-4}) = A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$

Γ_{4-1} : $\hat{t_{41}} = -\hat{e_z}$, longueur $= \Delta z$.
$A_{tan}(\vec{r}_{centre\ 4-1}) = A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$

On ne peut trouver des charges que sur la surface, ρ_s ($C.m^{-2}$).

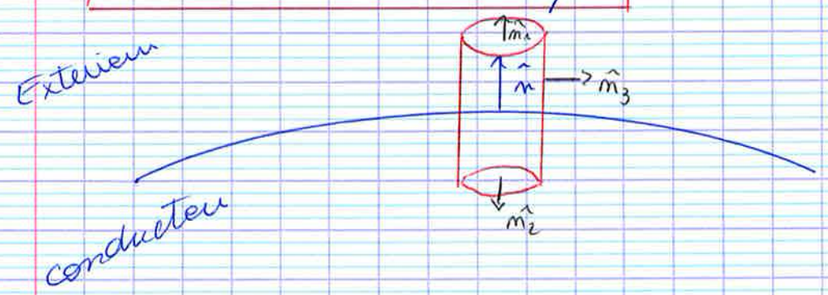
(px des charges induites ou conducteurs chargés)

Champ électrique à la surface d'un conducteur.



à l'Équilibre électrostatique, à la surface, les charges ne se déplacent plus.
donc $\vec{E}$ n'a pas de composante tangentielle

$\boxed{\vec{E} = E\hat{n} \quad \text{à la surface}}$



Loi de Gauss : Petit cylindre autour de la surface

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}_s\,dS = \int_{S_1} \underbrace{\vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}_1}_{E\hat{n}\cdot\hat{n}_1 = \hat{n}\cdot\hat{n} = 1}\,dS_1 + \int_{S_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}_2\,dS_2 + \int_{S_3}\vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}_3\,dS_3$$

$$= \int_{S_1} E\cdot\hat{n}\cdot\hat{n}\,dS_1 + \int_{S_2}\underbrace{\vec{0}}_{\text{intérieur du conducteur}}\cdot\hat{n}_2\,dS_2 + \int_{S_3}\underbrace{E\cdot\hat{n}\cdot\hat{n}_3}_{0}\,dS_3$$

$$= E\int_{S_1} dS_1$$

$$= E A_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Or la divergence représentant les sources du champ et le rotationnel représentant les tourbillons du champ, on peut dire que un champ vectoriel "physique" est déterminé par ses sources et ses tourbillons.

Théorème de la moyenne.

À une dimension : $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
alors $\exists\, c \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

À plusieurs dimensions :

(1D) Circulation : $\int_\Gamma \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl = \int_\Gamma A_{tan}(\vec{r})\,dl$

$= A_{tan\ moy} \times$ longueur Γ

(2D) Flux : $\int_S \vec{A}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \int_S A_{nor}(\vec{r})\,dS$

$= A_{nor\ moy} \times$ aire de S

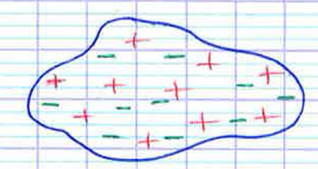
(3D) Intégrale de volume : $\int_V \rho(\vec{r})\,dV = \rho_{moy} \times$ volume de V

Conducteurs électrique

Conducteur / isolant (= diélectrique)
Un matériau conducteur contient des porteurs de charge, qui sont libres de se déplacer.
↳ par exemple les électrons dans le métal ou les ions dans les solutions ioniques

Équilibre électrostatique
↳ les porteurs ne se déplacent plus, il n'y a plus de mouvement

Champ électrique à l'intérieur d'un conducteur

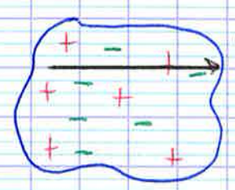


← conducteur métallique.

+ ← fixes
− ← peuvent se déplacer

Équilibre statique → Les charges ne se déplacent plus or les porteurs de charges sont libres de se déplacer !
Pas de mvt, pas de force !
$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$
$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ à l'intérieur du conducteur}}$

Prenons un autre cas :



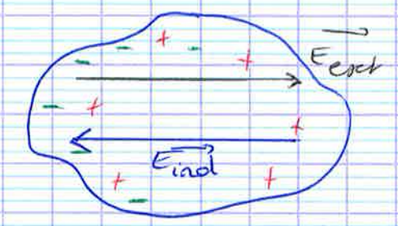
$\vec{E}_{ext}$

En présence d'un champ électrique extérieur

+ ← fixes
− ← libres

Accumulation de charge négatives et charges positives seules à droite

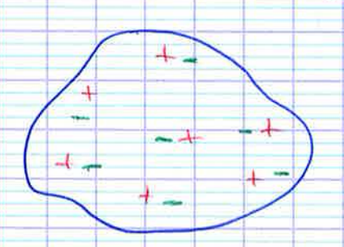
C'est une apparition de charges induites.
Ce crée un champ induit à l'intérieur.



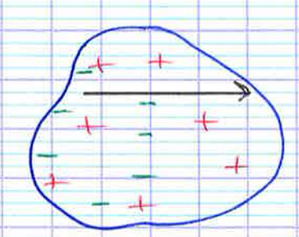
Plus $\vec{E}_{ext}$ est grand, plus les charges vont s'opposer plus $\vec{E}_{ind}$ sera grand.
On arrive alors rapidement à l'état d'équilibre statique.

$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_{ext} = \vec{0} \text{ à l'intérieur du conducteur}}$

Charges à l'intérieur d'un conducteur



ou



Équilibre statique donc $\vec{E} = \vec{0}$

On utilise Gauss à l'intérieur du conducteur :

Forme intégrale : $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \Rightarrow Q_{int} = 0$

Forme locale : $\text{div}\, \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

$\boxed{\text{L'intérieur du conducteur est NEUTRE !}}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, dl}_{} + \int_{\Gamma_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, dl$$

champ électrique nul ds le conducteur

↑ $\vec{E}(\vec{r})$ est déjà tangentiel le long de Γ_2

$$= 0 + \int_{\Gamma_2} \|\vec{E}(\vec{r})\| dl$$

Or circulation vaut 0 le long d'une courbe fermé donc $\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, dl = 0$

donc $\int_{\Gamma_2} \|\vec{E}(\vec{r})\| dl = 0$

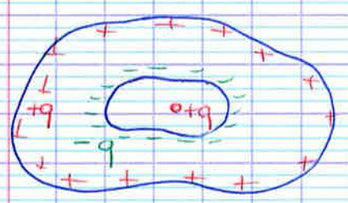
$\|\vec{E}(\vec{r})\|$ est positif ou nul.

Donc $\boxed{\text{dans une cavité vide } E = 0}$

Et ça même en présence d'un champ $\vec{E}_{ext}$.

C'est ce qu'on appelle le blindage

Cavités chargée cette fois-ci :



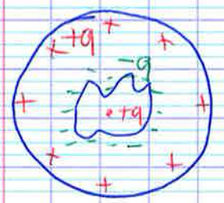
charges rouge

$Q_{surf\ ext}$ crée $E = 0$ dans le conducteur

Q_{cav} et $Q_{surf\ int}$ créent $E = 0$ dans le conducteur.

$\boxed{\text{Dans une cavité chargée : } \vec{E} \neq \vec{0}}$

Cavités dans un conducteurs : géométries sphériques



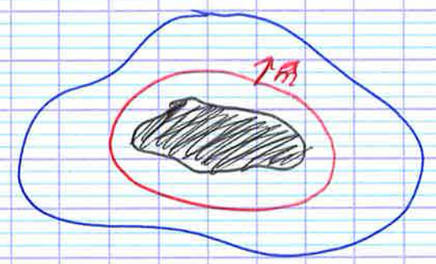
Si notre conducteur est une sphère alors +q sera équirépartie sur la surface car la cavité crée un champ $= \vec{0}$

$Q_{int} = \rho_s \text{Aire}$. (la surface du conducteur coupe le cylindre par un disque d'aire A_{ire}).

On a donc $E\, \cancel{A_{ire}} = \frac{\rho_s \cancel{A_{ire}}}{\varepsilon_0}$

Ainsi $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s(\vec{r})}{\varepsilon_0} \hat{n}}$

Cavité (creux) dans un conducteur : les charges dans une cavité vide



Cavité vide
↓
Elle ne contient pas de charge

On utilise la loi de Gauss à l'intérieur du conducteur.

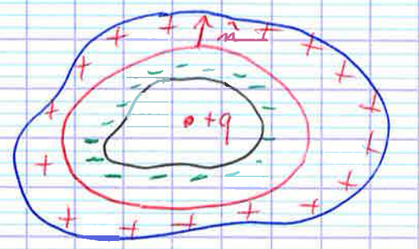
$E = 0$ car on est à l'intérieur
↳ donc flux $= 0$ donc $Q_{int} = 0$.

Or on sait que dans la cavité est vide donc elle ne contient pas de charge, et on sait aussi que l'intérieur d'un conducteur est neutre donc
$Q_{int} = 0 \rightarrow Q_{surf\ int} = 0$

On a le même résultat en présence d'un champ électrique extérieur.

Les charges dans une cavité chargée.

Cavité chargée : $Q_{cav} = +q$



Loi de Gauss :

$E = 0 \rightarrow$ flux $= 0 \rightarrow Q_{int} = 0$

Q_{int} ?

$$Q_{int} = Q_{cav} + Q_{surf_{int}} + \underbrace{Q_{cond}}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow Q_{cav} + Q_{surf_{int}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_{surf_{int}} = -q}$$

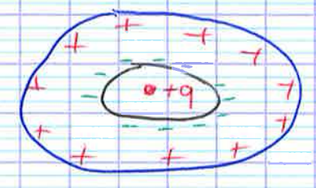
Le déplacement des charges − provoque des charges induites à la surface externe du conducteur

Conducteur neutre :

$\Downarrow$

$$Q_{surf_{ext}} + Q_{surf_{int}} = 0$$

$$\boxed{Q_{surf_{ext}} = +q}$$



Comment se positionnent les charges induites sur la surface intérieure ?

Q_{cav}, $Q_{surf_{int}}$ et $Q_{surf_{ext}}$ créent $E = 0$ dans le conducteur.

Et si le conducteur était beaucoup plus grand ? Alors $Q_{surf_{ext}}$ n'a plus d'influence sur E.

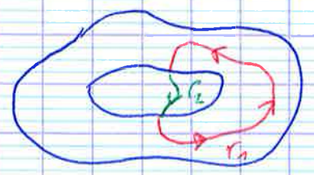
Seules Q_{cav} et $Q_{surf_{int}}$ s'organisent pour que $E = 0$ dans le conducteur.

$$\boxed{\text{Les charges induites } Q_{surf_{int}} \text{ annulent l'effet de } Q_{cav}}$$

$Q_{surf_{ext}}$ crée $E = 0$ dans le conducteur.
$E \neq 0$ à l'extérieur.

Cette organisation des charges est unique !

Champ électrique dans une cavité :



Cavité vide :
Pas de charge.

Hypothèse : $\vec{E} \neq \vec{0}$ dans la cavité

Γ : Γ_1 (dans le conducteur) $\cup$ Γ_2 (dans la cavité, en sorte qu'elle suive une ligne de champ).

Autre méthode :

$$U_e = \frac{1}{2}\int_S \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_{S_+} \rho_s(\vec{r})V_+\,dS_+ + \frac{1}{2}\int_{S_-} \rho_s(\vec{r})V_-\,dS_-$$

$$= \frac{1}{2}V_+\int_{S_+} \rho_s(\vec{r})\,dS_+ + \frac{1}{2}V_-\int_{S_-} \rho_s(\vec{r})\,dS_-$$

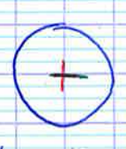
$$= \frac{1}{2}V_+Q_+ + \frac{1}{2}V_-(-Q)$$

$$= \frac{1}{2}Q(V_+ - V_-) = \frac{1}{2}QV = \boxed{\frac{1}{2}CV^2 = U_e}$$

Diélectrique :

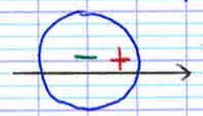
- Ce sont des matériaux isolants.
  Les charges ne sont pas libres.
- ≠ conducteurs

Intrinsèquement neutre.



atome non polarisé

Quel est l'effet d'un $\vec{E}$ extérieur ?



Création de dipôles induits ($-q$ / $+q$ espacés de d)

polarisation de la matière.

Effet proportionnel à la cause

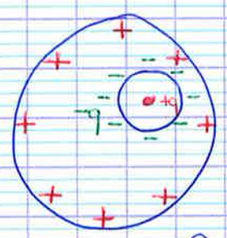
$d \propto E_{ext}$

Équation du champ créé par une charge ponctuelle →

En dehors du conducteur, je sais que cette structure créée un champ :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r}$$

Conducteur sphérique ET Cavité sphérique :



$Q_{cav} = +q$ est au centre de la cavité

$Q_{surf_{int}} = -q$ équirépartie sur la surface interne

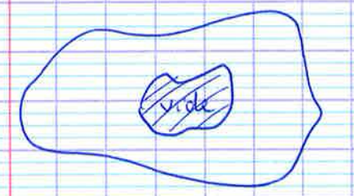
$Q_{surf_{ext}} = +q$ équirépartie sur la surface externe

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\hat{e}_{r'}}$$

r' étant la distance par rapport à $+q$ dans la cavité

Conducteur et potentiel électrostatique :



$E = 0$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

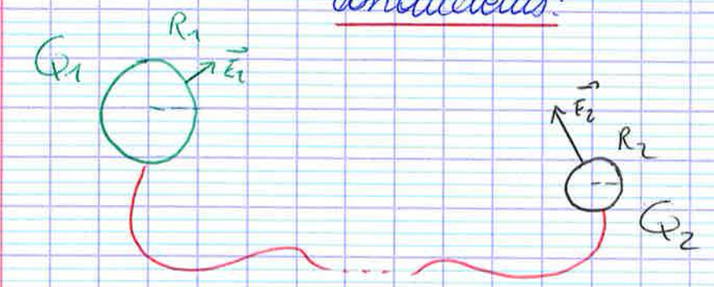
$E = 0$ dans la cavité vide

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_{\Gamma = r_A \to r_B} \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl = 0$$

Un conducteur (avec ses cavités vides) forme une région équipotentielle.

à la surface : $\vec{E} \perp$ équipotentielle
donc
$\vec{E} \parallel \vec{n}$

Relation entre champ surfacique et forme des conducteurs :



Deux sphères métalliques
Très éloignées ; connecté par un fil conducteur
elles n'ont pas d'effet l'une sur l'autre

Charges Q_1 et Q_2

Densité surfacique $\rho_{s_i} = \dfrac{Q_i}{4\pi R_i^2}$

Potentiel : $V_i = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_i}{R_i}$

Le fil reliant les boules métalliques permet de les mettre au même potentiel

$$V_1 = V_2 \iff \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Si $R_1 > R_2$, $\rho_{s_1} < \rho_{s_2}$, donc $E_1 < E_2$

Le champ est plus fort aux endroits où le rayon de courbure est plus petit (les pointes).

Condensateurs

▶ Condensateurs : Ensemble de deux conducteurs.

$+Q$ à V_+
$-Q$ à V_-

$V \triangleq V_+ - V_-$ Différence de potentiel

$$= -\int_{\Gamma(-)\to(+)} \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{t}\,dl$$

▶ $\underbrace{V \propto E, \; E \propto \rho_s, \text{ et } Q \propto \rho_s}_{V \propto Q}$

$$\boxed{\text{Capacitance } C \triangleq \frac{Q}{V} \text{ en } F = C.V^{-1}}$$

La capacitance est la capacité à stocker de la charge

C'est un paramètre purement géométrique
Elle ne dépend que de la géométrie de la structure.

▶ Énergie d'un condensateur.

$dW = dq(V_+ - V_-)$ travail élémentaire pour déplacer dq de V_- à V_+.
$= V dq$
$= \frac{1}{C} q\,dq$

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{1}{C} q\,dq = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} \quad \boxed{\frac{1}{2}CV^2 = U_e}$$

Vue microscopique : $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r_i}$
Ce que l'on a fait precedemment.

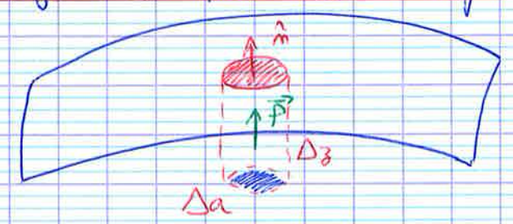
Vue macroscopique : $\Delta V \to 0$
un seul point qui contient px 10^3 dipôles.

Vecteur de polarisation $\vec{P}$:

$$\vec{P}(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\vec{p}}{\Delta V} \quad (C.m.m^{-3} = C.m^{-2}).$$

"densité volumique du moment dipolaire électrique"

Charges de polarisation surfacique :



Moment dipolaire d'un petit volume où $\vec{P}(\vec{r}) = P\hat{e_z}$ constant

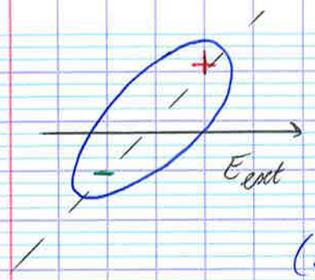
$$\vec{p} = \int_{\Delta V} \vec{P}(\vec{r})dV = \vec{P} \times dV = \vec{P}\Delta a \Delta_z$$
$$= P\Delta a \Delta_z \hat{e_z}$$
$$= qd\,\hat{u}_{- \to +}$$

On peut dire : charges $\pm P\Delta a$ espacées de Δ_z
charges par surface $\pm P$.

De manière generale : $\vec{P} = P_n \hat{n} + P_t \hat{t}$
$= (\vec{P} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{P} \cdot \hat{t})\hat{t}$

$$\boxed{\rho_{s\,pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}}$$

Charges de polarisation, liées à la matières ($\neq$ libres).



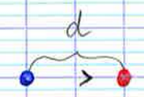
Cas du dipole permanent (molécule H_2O px).

Alignement des dipôles permanents (et induits) parallèle à $\vec{E}$

Décrire les dipoles : Moment dipolaire électrique

Moment dipolaire électrique :

▷ Dipôle : $N = 2$ charges $-q / +q$ separée de d



$$\boxed{\vec{p} \triangleq q \times d\,\hat{u}_{- \to +}}$$

Norme : charge x distance
Origine : Centre du dipôle.

$$d\vec{u}_{- \to +} = (\vec{r_+} - \vec{r_-})$$

$$\boxed{\vec{p} = q(\vec{r_+} - \vec{r_-})} \boxed{= \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r_i}}$$

▷ En général : N charges q_i à $\vec{r_i}$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r_i} \overset{q_i = \pm q}{=} q \sum_{i : q_i = q} \vec{r_i} - q \sum_{i : q_i = -q} \vec{r_i}$$

on peut décomposer

distance entre les barycentres
D

$$= q \frac{N}{2} (\vec{r_{c_+}} - \vec{r_{c_-}})$$

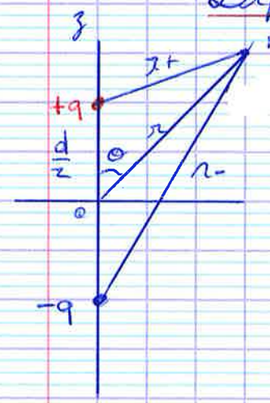
$$\boxed{= \frac{N}{2} q D \hat{u}_{c_- \to c_+}} = N_{dip}\, q D \hat{u}_{c_- \to c_+}$$

Une distribution de charges se comporte comme un grand dipôle

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r_i} = \sum_{j=1}^{N_{dip}} q(\vec{r_{j+}} - \vec{r_{j-}}) = \boxed{\sum_{j=1}^{N_{dip}} \vec{p_j}}$$

Les moments dipolaires s'ajoutent.

Dipôle électrique : potentiel et champ



▷ charges $-q$ à $z = -d/2$
q à $z = d/2$

▷ Moment dipolaire électrique
$\vec{p} = qd\hat{e_z}$

Le potentiel $V(\vec{r})$ à $r \gg d$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r\frac{d}{2}\cos\theta}$$

$$= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2} \overset{d \ll r}{\simeq} r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta}$$

donc $\frac{1}{r_+} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$

$f(x) = (1-x)^{-1/2} \simeq f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{2}x$

Donc finalement $\frac{1}{r_+} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$

et $\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos(\pi - \theta)\right) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$.

En faisant la différence on obtient :

$$V(r,\theta) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{d}{r^2} \underbrace{\cos\theta}_{\hat{e_z}\cdot\hat{e_r}}$$

$$\boxed{V(r,\theta) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\hat{e_r}}{r^2}}$$

Résultat exact quelque soit l'endroit où on se trouve si $d \to 0$ et si qd est constant
On appelle cela un dipôle élémentaire.

Champ électrique ?

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd\cos\theta}{r^2}, \quad r \gg d$$

or $\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\vec{r})$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e_\theta} + \overbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}}^{=0}\hat{e_\varphi}$$

$$\vec{E}(r,\theta) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\frac{qd\cos\theta}{r^3}\hat{e_r} + \frac{qd\sin\theta}{r^3}\hat{e_\theta}\right)$$

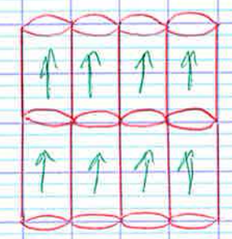
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{e_r} + \sin\theta\,\hat{e_\theta}\right).$$

Exact $\forall r$ ssi ($d \to 0$ et $qd = $ cste).

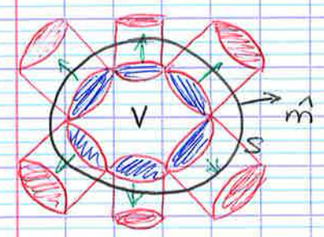
Vecteur de polarisation :

La polarisation se réfère aux dipôles

Charges de polarisation volumique :



Polarisation homogène : Pas de charges à l'intérieur du diélectrique.



Polarisation inhomogène : apparition de charges liées à la matière.

bleu

$$Q_{int} = -Q_{ext} \leftarrow \text{rouge}$$

$$= -\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_V \operatorname{div}\vec{P}\,dV$$

$$Q_{int} = \int_V \rho_{pol}\,dV = -\int_V \operatorname{div}\vec{P}\,dV$$

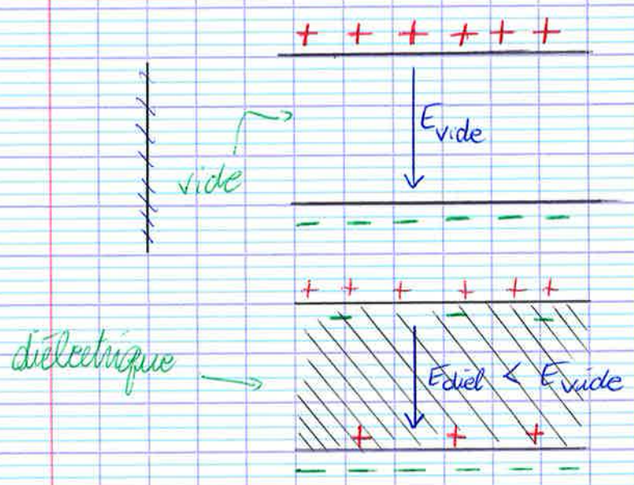
$$\boxed{\rho_{pol} = -\operatorname{div}\vec{P}}$$

Charge de polarisation, liées à la matière ($\neq$ libres).

▸ Isotrope : Toutes les directions sont équivalentes.

ε_r est un scalaire

Champ électrique dans un milieu LHI :



condensateur à plaques parallèles.

(1)

(2).

Les charges de polarisation créent un champ qui atténue $\vec{E}_{vide}$

$\rho_{libre(1)} = \rho_{libre(2)}$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{libres} \quad \text{et} \quad \vec{\operatorname{rot}}(\vec{D}) = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{P})$$

(1) $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{P} = \vec{0}$

(2) $\overset{\text{la}}{=} \vec{\operatorname{rot}}(\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}) \overset{\text{Ro}}{=} \varepsilon_0 \chi_e \vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$

$\vec{D}$ est le même dans les deux situations.

- $\vec{E}_{diel} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \boxed{\dfrac{\vec{E}_{vide}}{\varepsilon_r}}$

- $\operatorname{Div}(\vec{D}) = \rho_{libre} \Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}) = \rho_{libres}$

  car LHI $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho_{libres}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

que l'on peut comparer à $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ← $\rho_{libre} + \rho_{pol}$

Potentiel d'un diélectrique polarisé

On prend un objet de volume V que l'on découpe en dV

Quel potentiel au point $\vec{r}$?

- Chaque volume dV (positionné en $\vec{r}'$) contient un moment dipolaire $\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}')\,dV$.

- On défini $\vec{\ell}$ comme étant $\vec{r} - \vec{r}'$

- Or chaque dipôle $\vec{p}(\vec{r}')$ à l'intérieur de dV créé un potentiel connu $dV(\vec{r})$:

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{p}}{\ell^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{P}(\vec{r}')\,dV}{\ell^2}$$

Ainsi le potentiel $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{p}}{\ell^2}\,dV \overset{\text{sans démonstrat°}}{=}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\oint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{\ell}\,dS + \int_V \frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{\ell}\,dV \right]$$

On retrouve les formules vues précédemment :

- $\rho_{s\,pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

- $\rho_{pol} = -\operatorname{div} \vec{P}$

En vue macroscopique, dans l'objet, $V(\vec{r})$, la formule précédente, nous donne une valeur moyenne !

Loi de Gauss dans les diélectriques
Le vecteur déplacement électrique :

▶ Deux types de charges :
"Libres" : On peut choisir/placer.
"De polarisation" : liées à la matière.

▷ Loi de Gauss (électrostatique) devient :

on divise en deux parties.

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{pol} + \rho_{libres})$$

$\varepsilon_0\,\text{div}(\vec{E}) = \text{div}(\varepsilon_0\vec{E})$.

formule précs

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(-\text{div}\,\vec{P} + \rho_{libres})$$

$$\text{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_{libres}.$$

$$\boxed{\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

Déplacement (ou induction) électrique en $C.m^{-2}$.
m̂ unité que la densité surfacique.

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div}\,\vec{D} &= \rho_{libres} \\ \oint \vec{D}\cdot\hat{n}\,dS &= Q_{int\,libres}. \end{aligned}}$$

← Loi de Gauss du champ $\vec{D}$.

$\vec{D}$ est aussi appelée "densité du flux électrique".

On peut appliquer la méthode de Gauss.
Mais $\vec{D}$ n'est pas comme le champ $\vec{E}$!

$$\vec{rot}\,\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{rot}(\vec{E}) + \vec{rot}\,\vec{P}.$$

or on sait que $\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$.

$$\vec{rot}\,\vec{D} = \vec{rot}(\vec{P}) \neq 0 \text{ en général.}$$

Donc $\vec{D}$ ne se comporte pas comme $\vec{E}$.

Il faut faire attention : $\vec{D}$ dépend des charges libres et de la polarisation.

Si ρ_{libre} ou $Q_{int\,libres}$ sont nuls, $\vec{D}$ n'est pas nécessairement nul !

Milieu linéaires, homogènes et isotropes : permittivité électrique

▷ Milieu LHI :

▸ Linéaire :

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$$

χ_e : susceptibilité électrique. ← sans unité > 0

Plus χ_e est grand plus la matière va être susceptible au champ $\vec{E}$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$
$$= \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$$
$$= \varepsilon_0\vec{E}(1+\chi_e).$$

$(1+\chi_e) = \varepsilon_r$

$$\boxed{\vec{D} \triangleq \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}} = \varepsilon\vec{E}$$

$\varepsilon_r \times \varepsilon_0 = \varepsilon$

ε = permittivité du milieu, en $F.m^{-1}$
$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, permittivité relative $= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ (sans unité).
ε_0 : permittivité du vide

▸ Homogène : χ_e, donc ε_r, donc ε, ne dépend pas de $\vec{r}$.

Diélectrique entre les plaques électriques d'un condensateur

↳ $\vec{E}$ "ε_r fois" plus petit

↳ $V(\vec{r})$ "ε_r fois" plus petit.

↳ Capacitance est multipliée par ε_r

Énergie électrostatique dans la matière :

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2(\vec{r})\, dV.$$

▸ $\varepsilon_0 E^2(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$

↑ permittivité du vide.

Dans la matière on aurait :

↳ $\varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$.

↑ permittivité du diélectrique

$= \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$.

Énergie électrostatique dans un diélectrique LHI :

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\, dV.$$

↗ aussi valide dans le vide (où $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\varepsilon_r = 1$).

Rigidité diélectrique :

Quand les isolants deviennent conducteurs

Rigidité diélectrique : Valeur maximale du champ électrique dans un isolant avant qu'il ne devienne conducteur.

Mécanisme : qd $E > E_{max}$; le champ arrache des électrons.
Les électrons sont eux-mêmes accélérés par le champ et après des chocs, ils vont arracher d'autres électrons.
On a une avalanche d'électrons libre.
Le milieu s'ionise et devient conducteur.
Formation d'arc électrique.

Dans l'air : $E_{max} = 3$ MV/m.

Si $E > E_{max}$: Décharge électrostatique

- Effet Corona : décharge électrostatique sans format° d'arc ;

↑ « fuite » de charges par les pointes.
Quand on frôle E_{max} sans le dépasser.

Air = 3 MV/m
Pyrex = 14 MV/m.
Papier = 16 MV/m.