DEVOIR SURVEILLÉ D'O.M.I.(partie analyse)

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis P.e.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Dérivation : les 2 questions sont indépendantes.

1) On considère les 4 fonctions définies par :

$f_1(x) = (\cos(2x))^3$; $f_2(x) = e^{\arcsin x}$; $f_3(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^4+3)}}$; $f_4(x) = \arctan(\ln x)$.

a) Déterminer les 2 ensembles de définition de f_2 et de f_4.

b) Déterminer $\boxed{\text{directement les 4 expressions}}$ des dérivées $f_k^{'}(x)$ (sans écrire exceptionnellement : "f dérivable sur etc...", pour gagner du temps)

2) Soit $f : (x, y) \mapsto \cos \dfrac{y}{x}$ et $g : (x, y) \mapsto \arctan \sqrt{x^2 + y^2}$.

Déterminer :

a) les ensembles de définition $\mathcal{D}_f$ de f et $\mathcal{D}_g$ de g.

b) les 2 dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$.

Exercice II

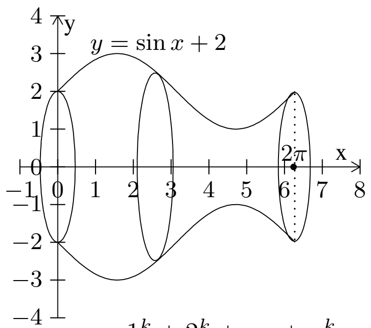
Intégration : les 4 questions sont indépendantes.

1) Essentiellement à l'aide d'un **changement de variable**, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx. \quad F = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}.$$

2) Calculer : $F = \displaystyle\int_0^{\pi} x \cos 3x \, dx$; $G = \displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$; $H = \displaystyle\int \frac{5x+4}{x^2+4x+8}\, dx$.

3)



Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution (sorte de cruche horizontale ci-contre) engendrée par la rotation autour de $x'x$ de la partie du plan : $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sin x + 2 \right\}$.

"Application" (modeste) : l'unité étant le dm, pourra-t-elle contenir 88 litres d'eau ? (on précise : $\pi^2 > \dfrac{88}{9}$)

4) Soit $u_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}$ fixé). Justifier : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{k+1}$.

Exercice III

Deux équations différentielles : les 2 questions sont indépendantes.

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 5y = \cos x$.

2) Résoudre l'équation différentielle : $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 10$.
