Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

**Exercice 1**

1. Soit $P$ un polynôme non nul à coefficients réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{P(n)}{n!}$.
   Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ est absolument convergente.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}$.
   Justifier l'existence de $S$ puis calculer sa valeur. Vous justifierez soigneusement les étapes de calcul.

**Exercice 2**
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$. Justifier la réponse.

**Exercice 3**
On définit, pour $n \geq 1$, $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2^n x}{1+2^n\, n\, x^2} \end{array}$

1. Montrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une application $f$ à préciser.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Soit $n \geq 1$. Calculer $I_n$.
   (b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   (c) En comparant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, que peut-on dire de la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ ? Justifier la réponse.
3. Soit $a \in ]0,1[$.
   (a) Etudier la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[a,1]$.
   (b) Etudier la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,a]$.

**Exercice 4**
Soient $f$ une fonction définie sur $[1,+\infty[$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tous réels $a, b$ avec $b \geq a \geq 1$, on ait

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{C}{a}.$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = f(n^2)$.

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ admet une limite finie $\ell$.
3. **Hors barème (à faire uniquement si les autres questions ont été traitées)**
   Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.