Exercice 1
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux.

1. Donner la définition des coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Donner la définition des coefficients de Fourier exponentiels de f.
3. Déterminer les relations entre les coefficients de Fourier trigonométriques de f et les coefficients de Fourier exponentiels de f.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire telle que :

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x \in]1,\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$
2. Déterminer, pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 3

1. Déterminer la série de Fourier trigonométrique de la fonction triangle.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, telle que :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Montrer que la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est définie pour tout réel x.
5. Déterminer l'expression de $S(x)$ en fonction de x pour $x \in]-\pi, 2\pi[$.
6. Calculer les sommes $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 5
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que :

$$\forall t \in [0, 2\pi[, \quad f(t) = e^{\alpha t}$$

1. Représenter graphiquement f.
2. Déterminer la série de Fourier exponentielle de f.
3. En déduire la série de Fourier trigonométrique de f.
4. Étudier la convergence de cette série.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in]0,\pi], \quad f(t) = \frac{\pi - t}{2}$$

Soit g la fonction impaire et 2π-périodique définie par :

$$\forall t \in]0,1], \; g(t) = tf(1) \text{ et } \forall t \in]1,\pi], g(t) = f(t)$$

1. Représenter graphiquement f, puis g, sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier trigonométrique de f.
3. Exprimer simplement, pour tout $t \in]0,\pi[$, $(g-f)(t)$ en fonction de t.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n(g-f) = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{\sin n}{n^2}$.
5. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques de g, puis écrire la série de Fourier trigonométrique de g.
6. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$.
7. Etudier la convergence de la série de Fourier de g.
8. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. Exprimer ces sommes à l'aide de π.
9. Calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 3 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{et } f \text{ est affine sur l'intervalle } [1,3]$$

1. Représenter graphiquement f.
2. Compléter : $\forall t \in [1,3], \quad f(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Déterminer la série de Fourier trigonométrique de f.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \sin(2n)}{n^2} = \frac{\pi - 2}{2}$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n \sin^2(2n)}{n^4} = \frac{5\pi - 12}{6}$.

Exercice 8 (test année 2014-2015)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire telle que :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(x) = x(\pi - x).$$

1. Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que la série de Fourier de f s'écrit : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)x)$, où α est un réel à déterminer.
3. On note S la somme de la série de Fourier de f.
   Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout $x \in [-\pi, 2\pi[$, $S(x)$ en fonction de x.
4. Calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
5. Poser le calcul permettant de calculer la somme $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.