Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (-1)^n t e^{-(2n+1)t} \end{array}$.

On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction S est $[0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $S(t) = \dfrac{t}{2\mathrm{ch}(t)}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n|$.
   Calculer u_n, à l'aide d'une intégration par parties. (*Ne pas oublier de justifier l'existence de* u_n*.*)
4. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$, l'écrire comme somme d'une série numérique convergente.

Exercice 2

Question préliminaire :
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes positifs convergentes.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \max(u_n, v_n)$.
Montrer que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est convergente.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : \begin{array}{rcl}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \end{array}$.

On pose $G = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.

1. Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$.
2. (a) Etudier, pour $n \geq 2$, les variations de g_n.
   (b) La série d'applications $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge-t-elle normalement sur $]-1, +\infty[$? Justifier la réponse.
   (c) Soit $a \geq 0$. Montrer que série d'applications $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur $]-1, a]$.
3. Justifier que G est continue sur $]-1, +\infty[$.
4. (a) Montrer que l'application $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ admet une limite finie en -1 et écrire cette limite comme somme d'une série numérique convergente.
   (b) Après avoir justifié son existence, déterminer la limite de G en -1.
5. (a) Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 1} g'_n$ converge absolument sur $]-1, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 1} g'_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1, +\infty[$.
   (c) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, écrire G' comme somme d'une série d'applications.