POLYTECH'NICE SOPHIA-ANTIPOLIS **ANALYSE PEIP2 - 2014/2015**

CONTROLE N°2 : 6 OCTOBRE 2014

Documents et appareils électroniques non autorisés. Les notations sont celles du cours.
Durée : 1h30.

Exercice 1. (5 pts)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.1 Rappeler la définition de deux normes équivalentes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ définies sur E.
1.2 Montrer que : s'il existe deux réels strictement positifs α et β, tels que :

$$\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha) \subset \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1) \subset \overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta) \qquad (1.1)$$

alors la norme $\mathcal{N}_1$ est équivalente à la norme $\mathcal{N}_2$.

1.3 Application : On considère l'espace E = $\mathbb{R}^2$ et les normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :
$\mathcal{N}_1(x,y) = |x| + |y|$; $\mathcal{N}_2(x,y) = \max\ (|x|,|y|)$.

Donner deux réels strictement positifs α et β puis tracer $\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\alpha)$; $\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_2}(0,1)$; $\overline{\mathcal{B}}_{\mathcal{N}_1}(0,\beta)$ telles que les inclusions (1.1) soient vérifiées.

Conclure.

Exercice 2. (5 pts)

Soit $I = [0,1]$ et $E = \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}$ = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Montrer que les applications suivantes définissent des nomes sur E :

$$\|.\|_\infty : f \to \sup_{t\in I}|f(t)| \quad \text{et} \quad \|.\|_1 : f \to \int_0^1 |f(t)|\ dt$$

2.2 Montrer que : $\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
2.3 Ces normes sont-elles équivalentes sur E ? (On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$ par $f_n(t) = t^n$).

Exercice 3. (5 pts)

Dire si la partie de $\mathbb{R}^2$ suivante est fermée, ouverte ou ni l'un ni l'autre, **puis le démontrer**.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy > 1\}$.

Exercice 4. (5 pts)

Montrer que l'intégrale suivante est semi-convergente :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$