UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

INTEGRALES GENERALISEES

René-J. B'WEMBA

CHAPITRE 1- INTEGRALES GENERALISEES (suite)

3.3 PREMIERES PROPRIETES :

PROPOSITION 3.3 :

Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, admettant une limite finie l en $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(i) Si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente alors $l = 0$;

(ii) Si $l \neq 0$ alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Démonstration 3.3 :

Nous démontrerons uniquement (ii) car (i) en est la contraposée.

Supposons alors que $l > 0$ (le cas $l < 0$ étant similaire). Il exite un réel X_0 tel que :

Pour $t \geq X_0 \geq a$, on a : $f(t) \geq \frac{l}{2} > 0$.

D'où, pour $X \geq X_0$, on a :

$$\int_a^X f(t)dt = \int_a^{X_0} f(t)dt + \int_{X_0}^X f(t)dt \geq \int_a^{X_0} f(t)dt + \frac{l}{2}(X - X_0) \to +\infty.$$

REMARQUES :

- Un argument similaire montre que lorsque $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors f ne peut tendre ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$ quand $x \to +\infty$.
- Attention : ne pas croire que si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors f admet une limite en $+\infty$. Par contre, si cette limite existe, alors elle est nulle.
- De même, la condition $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ n'entraîne pas la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Contre-exemple : $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$.

- Enfin, ce résultat est faux si on considère une intégrale impropre sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b < \infty$.

Nous énonçons à présent une propriété sur laquelle nous reviendrons après l'étude des séries numériques. Elle permet d'étudier le nature d'une intégrale impropre en la comparant à une série.

PROPOSITION :

> *Soit $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante.*
>
> *L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la série $\sum_{k \geq a} f(k)$ est convergente.*

3.4 NOTION D'INTEGRABILITE :

DEFINITION 3.3 :

> Une fonction f est dite intégrable sur I, s'il existe une constante réelle positive M telle que :
>
> $$\int_\alpha^\beta f(t)dt \leq M$$
>
> pour tout intervalle $[\alpha, \beta] \subset I$.
> On appelle alors intégrale de f sur I (et on note $\int_I f$) la quantité :
>
> $$\int_I f(t)\, dt = \sup_{[\alpha,\beta] \subset I} \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

REMARQUE 3.2 :

- Si l'intervalle I est réduit à un seul point, $I = \{a\}$, alors toute fonction $f: I \to \mathbb{R}^+$ est intégrable sur I et son intégrale sur I est nulle ;
- Si $I = [a, b]$, la définition précedente coïncide avec celle, habituelle, de l'intégrale.

4 CAS DES FONCTIONS CONTINUES A VALEURS POSITIVES :

On dispose de critères d'***intégrabilité*** pour les fonctions de signe constant dans l'intervalle d'étude tout entier ou alors dans un voisinage de la borne où l'on veut étudier la nature de l'intégrale généralisée.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux fonctions définies, continues dans un intervalle réel I et à valeurs positives, les résultats pour les fonctions à valeurs négatives s'en déduisent moyennant les changements adéquats.

4.1 INTEGRABILITE DES FONCTIONS POSITIVES :

PROPOSITION 4.1 :

Soit $f: I = [a, b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction localement intégrable.

L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si, il existe un réel M positif tel que pour tout $X \geq a$, on ait $\int_a^X f(t)dt \leq M$.

Démonstration 4.1 :

Nous allons montrer que la fonction F définie par $F(X) = \int_a^X f(t)dt$ est croissante. Ceci entrainera l'équivalence entre le fait que F soit majorée et l'existence d'une limite pour F lorsque $X \to b^-$.

Soient deux réels X et X' tels que : $a < X < X' < b$. On a alors :

$$F(X') = \int_a^{X'} f(t)dt = \int_a^X f(t)dt + \int_X^{X'} f(t)dt \geq \int_a^X f(t)dt = F(X).$$

Car la fonction f étant supposée **positive** sur $I = [a, b[$, on a :

$$\int_X^{X'} f(t)dt \geq 0.$$

En conclusion :

$$X < X' \Rightarrow F(X) \leq F(X').$$

La fonction F est donc croissante. Si elle est majorée par M, alors elle admet une limite quand $X \to b^-$ et l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

REMARQUE 4.2 :

La notion d'intégrabilité coïncide donc, dans le cas particulier des fonctions positives, avec la notion de convergence de l'intégrale impropre. Attention, ce ne sera pas toujours le cas pour les fonctions de signe quelconque.

4.2 PROPRIETES :

PROPOSITION 4.2 :

Soient deux fonctions f,g définies, continues, positives et intégrables sur un intervalle réel I (non vide). On a les propriétés suivantes :

- Pour tout intervalle $J \subset I$, la fonction f est intégrable sur J et $\int_J f(x)dx \leq \int_I f(x)dx$
- Pour tous réels positifs μ, λ, la fonction $\mu f + \lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I (\mu f(x) + \lambda g(x))dx = \mu \int_I f(x)dx + \lambda \int_I g(x)dx$
- Si $\int_I f(x)dx = 0$ alors $f \equiv 0$ sur I.

THEOREME 4.1 :

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4.3 :

Soient deux fonctions f,g définies, continues, positives sur un intervalle réel I. Supposons que :

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \quad \forall x \in I$$

On a :

- Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$
- Si f n'est pas intégrable sur I alors g n'est pas intégrable sur I.

EXEMPLE 4.1 : utilisation du critère de comparaison des fonctions positives.

Etudier la nature de l'intégrale généralisée : $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

La fonction $f(t) = e^{-t^2}$ est continue, positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Utilisons le critère de comparaison des fonctions positives. Considérons la fonction $g(t) = e^{-t}$. Rappelons que nous avons démontré, exemple 3.2, que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente, il en va évidemment de même de $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$.

Pour $t \geq 1,\ t^2 \geq t$

donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

On a alors : $0 \leq f(t) \leq g(t)$, $\forall t \geq 1$.

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ par le critère de comparaison des fonctions positives.

Conclusion : $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est une intégrale convergente.

EXEMPLE 4.2 : utilisation du critère de comparaison des fonctions positives.

Soit à étudier la nature de l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln t}\, dt$ par le critère de comparaison de fonctions positives.

La fonction $f(t) = \sqrt{-\ln t}$ est définie, continue et positive sur l'intervalle]0,1]. Le problème à étudier est donc uniquement en $t = 0$.

Sachant que

$$\lim_{t \to 0^+} t \ln t = 0$$

$$\lim_{t \to 0^+} (-t \ln t) = \lim_{t \to 0^+} t(-\ln t) = 0$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t(-\ln t)} = \lim_{t \to 0^+} (\sqrt{t}\, \sqrt{-\ln t}) = 0$$

En d'autres termes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $0 < t < \varepsilon$:

$$\sqrt{t}\, \sqrt{-\ln t} \leq 1$$

C'est-à-dire

$$0 \leq \sqrt{-\ln t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad , \quad 0 < t < \varepsilon$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de référence de Riemann au voisinage de 0, convergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Par le critère de comparaison de fonctions positives, l'intégrale impropre $I_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln t}\, dt$ est aussi convergente.

PROPOSITION 4.4 : (Critère des fonctions équivalentes positives)

Soient deux fonctions f,g définies, continues, positives sur un intervalle réel $I = [a,b[$, $b\ fini\ ou\ pas$. Supposons, de plus, que :

$$f \sim g \quad au\ voisinage\ de\ b$$

On a :

$$\int_a^b f(x)dx \quad est\ convergente \quad \mathbf{ssi} \quad \int_a^b g(x)dx \quad est\ convergente$$

En d'autres termes,

$\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

APPLICATIONS : ex 1 TD2

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$A_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{(x-1)(x^4+1)}} dx$; $B_1 = \int_0^1 \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} dx$; $C_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)} dx$;

$D_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$; $E_1 = \int_0^1 \sqrt{-\ln x}\ dx$.

4.3 AUTRES INTEGRALES DE REFERENCE : LES INTEGRALES DE BERTRAND

On appelle intégrales de BERTRAND les intégrales des fonctions du type :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \quad ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

sur les intervalles de la forme $]0,a], [b,+\infty[$; $0 < a < 1$, $b > 1$.

PROPOSITION 4.5 :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \ converge \ ssi \ \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \ converge \ ssi \ \begin{cases} \alpha < 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

REMARQUE 4.1 :

Tout comme avec les intégrales de référence de Riemann, les résultats sur les intégrales de Bertrand peuvent être utilisés sans revenir sur leur démonstration.

Démonstration 4.5 :

Considérons l'intégrale impropre

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est définie, continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$. L'intégrale I_1est impropre car l'intervalle d'intégration est infini. Nous avons donc un seul problème à étudier en $+\infty$.

Comme lors de l'étude de l'intégrale de référence de Riemann, étudions le problème en fonction de la position du réel α par rapport à 1.

<u>**1^er cas : α=1.**</u>

Revenons à la définition de l'intégrale impropre et posons pour tout réel X > 2 :

$$I_1 = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt = \lim_{X\to+\infty} F(X)$$

Commençons par le sous-cas β=1.

<u>**1^er sous-cas : β=1 (α=1).**</u>

$$F(X) = \int_2^X \frac{1}{t \ln t} dt$$

La fonction

$$f(t) = \frac{1}{t \ln t}$$

est définie, continue sur l'intervalle réel fermé, borné $[2, X]$. Elle y est donc intégrable au sens de Riemann. Calculons-la par une technique classique de calcul d'intégrales, par exemple par un changement de variable.

Pour cela, posons :

$$u = \ln t \quad ; \quad du = \frac{dt}{t}$$

Les bornes deviennent :

$$t = 2 \ \Rightarrow u = \ln 2$$

$$t = X \Rightarrow u = \ln X$$

Et l'intégrale s'écrit :

$$F(X) = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u} = [\ln u]_{u=\ln 2}^{u=\ln X} = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$$

On en déduit :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt = \lim_{X \to +\infty} F(X) = \lim_{X \to +\infty} \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) = +\infty$$

Conclusion du sous-cas α=β=1 :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt \quad est \quad divergente.$$

2ème sous-cas : β≠1 (α=1).

$$F(X) = \int_2^{X} \frac{1}{t\,(\ln t)^{\beta}} dt$$

On utilise le même changement de variable que dans le sous-cas précédent pour calculer l'intégrale de Riemann ci-dessus. On obtient :

$$F(X) = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u^{\beta}}$$

Comme nous nous intéressons à la nature de l'intégrale, il est inutile de continuer les calculs. Par contre, on peut remarquer que le problème revient à l'étude de la nature de l'intégrale :

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$$

Cette intégrale est de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$$

qui est une intégrale de référence de Riemann, convergente si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion du sous-cas α=1, β≠1 :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^{\beta}} dt \quad est\ convergente \quad ssi \quad \beta > 1.$$

2ème cas : α > 1.

Montrons, par le critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est convergente, indépendamment de la valeur du réel β.

L'idée est de montrer qu'il existe un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$0 < \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq \frac{1}{t^{\delta}}$$

où $\delta > 1$. Ceci nous permettra, par le critère de comparaison des fonctions positives, de déduire la convergence de l'intégrale de départ à partir de celle de l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}} dt$, puisque $\delta > 1$.

Soit alors un réel δ tel que :

$$\alpha > \delta > 1$$

on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\delta}(\ln t)^{\beta}} = 0$$

car $\alpha - \delta > 0$.

Il existe donc un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$0 < \frac{t^{\delta}}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq 1$$

Et

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} \leq \frac{1}{t^{\delta}}$$

Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\delta}} dt$$

est une intégrale de référence de Riemann convergente ($\delta > 1$). On en conclut, par le critère de comparaison des fonctions positives, que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est convergente pour $\alpha > 1$.

<u>3ème cas : α < 1.</u>

Montrons, par le critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$$

est divergente, indépendamment de la valeur du réel β.

L'idée est de montrer qu'il existe un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \geq \frac{1}{t^\delta}$$

où $\delta < 1$. Ceci nous permettra, par le critère de comparaison des fonctions positives, de déduire la divergence de l'intégrale de départ à partir de celle de l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\delta} dt$, puisque $\delta < 1$.

Soit alors un réel δ tel que :

$$\boldsymbol{\alpha} < \delta < 1$$

On a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\delta}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\delta} (\ln t)^\beta} = +\infty$$

car $\alpha - \delta < 0$.

Il existe donc un réel T tel que, pour tout $t > T$

$$\frac{t^\delta}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \geq 1$$

Et

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \geq \frac{1}{t^\delta}$$

Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\delta} dt$$

est une intégrale de référence de Riemann divergente ($\delta < 1$). On en conclut, par le critère de comparaison des fonctions positives, que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$$

est divergente pour $\alpha < 1$.

CONCLUSION :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \ \ converge \ \ ssi \ \ \begin{cases} \alpha > 1 \\ ou \\ \alpha = 1, \quad \beta > 1 \end{cases}$$

En exo, Etude de l'intégrale

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$$