Électromagnétisme
S01 Rappels, force et champ électrostatiques

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

ÉLECTROSTATIQUE 2

Rappels sur les vecteurs 3

Vecteurs

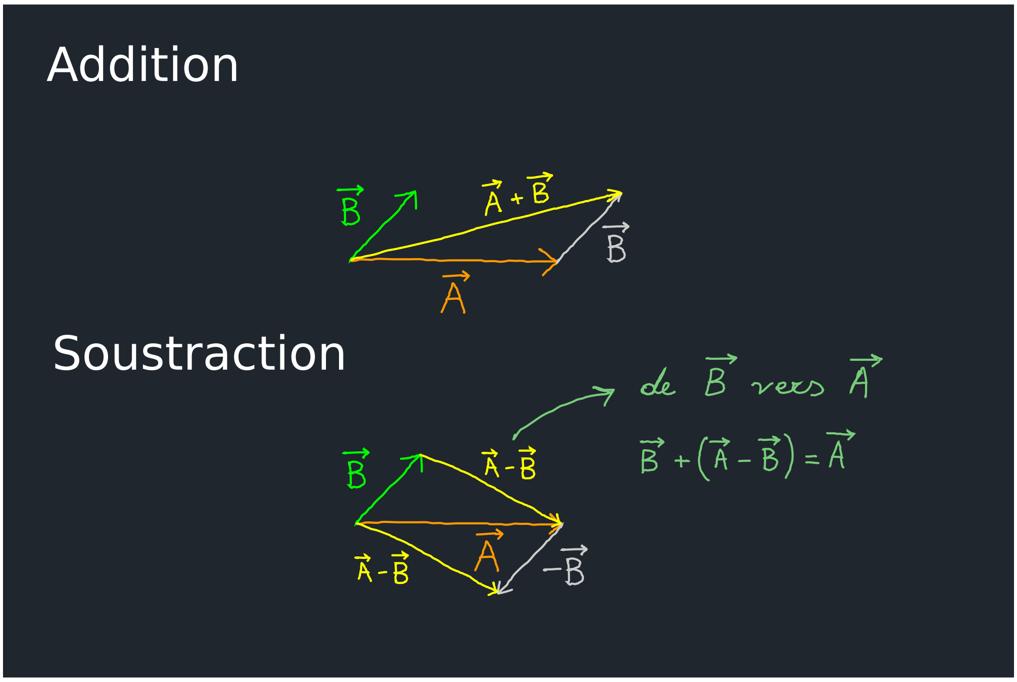
- Objet mathématique ayant une longueur (norme), une direction et un sens (orientation).
- Notation :
  le vecteur : $\vec{\boldsymbol{A}}$
  sa norme : $\|\vec{\boldsymbol{A}}\|$ ou A (un nombre ≥ 0)
- Un vecteur est défini par ses trois *composantes* :

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_1\hat{\boldsymbol{e}}_\mathbf{1} + A_2\hat{\boldsymbol{e}}_\mathbf{2} + A_3\hat{\boldsymbol{e}}_\mathbf{3}$$

Les A_1, A_2, A_3 dépendent du système de coordonnées choisi

4

Addition, soustraction



5

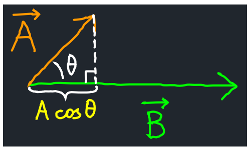
Le produit scalaire : une projection

- Le produit scalaire de $\vec{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$, deux vecteurs formant un angle θ :

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \|\vec{\boldsymbol{A}}\|\|\vec{\boldsymbol{B}}\| \cos\theta = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = AB\cos\theta \quad \text{(notation plus simple)}$$

(Ne pas oublier le point · entre les vecteurs !)



- $A\cos\theta$: la projection de $\vec{\boldsymbol{A}}$ sur la direction de $\vec{\boldsymbol{B}}$
- Si $\hat{\boldsymbol{u}}$ un vecteur unitaire (orientation) :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \text{projection de } \vec{\boldsymbol{A}} \text{ sur la direction de } \hat{\boldsymbol{u}}}$$

- Dans tous les systèmes de coordonnées :

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

- Cas spécial :

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = AA\cos(0) = A^2$$

6

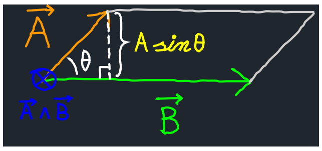
Le produit vectoriel : un vecteur

- Le produit vectoriel de $\vec{\boldsymbol{A}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}}$, deux vecteurs formant un angle θ :

$$\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \text{ ou } \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} : \text{un vecteur perpendiculaire à } \vec{\boldsymbol{A}} \text{ et } \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = -\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} \text{ orientation : règle de la main droite}$$

$$\|\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}\| = \|\vec{\boldsymbol{A}}\|\|\vec{\boldsymbol{B}}\| \sin\theta = AB\sin\theta$$



- $A\sin\theta$: la projection de $\vec{\boldsymbol{A}}$ sur la direction perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{B}}$!
- Conséquence : si $\vec{\boldsymbol{A}} \parallel \vec{\boldsymbol{B}}$ alors $\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
- Si $\hat{\boldsymbol{u}}$ un vecteur unitaire (orientation) :

$$\boxed{\|\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \hat{\boldsymbol{u}}\| = \text{projection de } \vec{\boldsymbol{A}} \text{ sur la direction perpendiculaire à } \hat{\boldsymbol{u}}}$$

- Dans tous les systèmes de coordonnées : $\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

7

Vecteurs unitaires

- $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\|\vec{\boldsymbol{A}}\|}\vec{\boldsymbol{A}}$: même orientation que $\vec{\boldsymbol{A}}$ mais $\boxed{\|\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{A}}\| = 1}$
- Des vecteurs « à part »
- Notation : lettre minuscule + accent circonflexe $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}$, $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$, ...
- Information *uniquement* sur l'orientation :
  - Systèmes de coordonnées : $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}}$, ...
    montrent le sens d'augmentation de la coordonnée en indice
  - Courbes : $\hat{\boldsymbol{t}}$
    montre le sens de la tangente à chaque point de la courbe
  - Surfaces : $\hat{\boldsymbol{n}}$
    montre le sens de la normale par rapport à la surface
    (donc la définit + entrée/sortie)
- « Extraire » la composante d'un vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$:
  - sur la direction du vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{u}}$: $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$
  - sur la direction perpendiculaire au vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{u}}$: $\vec{\boldsymbol{A}} \wedge \hat{\boldsymbol{u}}$
- Les composantes d'un vecteur : $A_i = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$

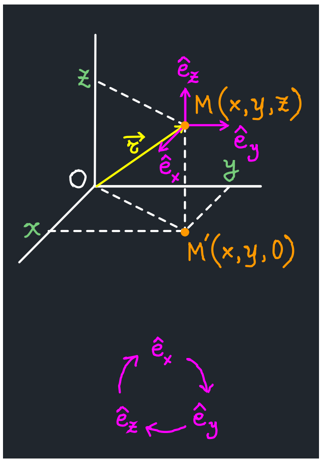
8

Rappels sur les systèmes de coordonnées

9

Système de coordonnées cartésiennes

Variable	valeurs	longueur élémentaire
x	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}x$
y	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}y$
z	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}z$



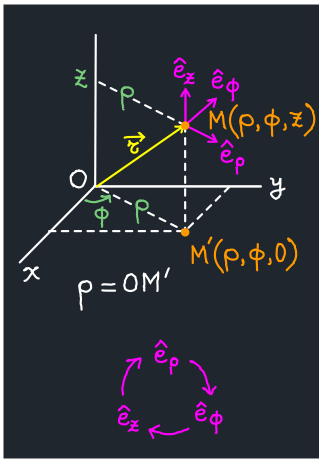
- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  x constant : $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
  y constant : $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$
  z constant : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
- Vecteur de position : $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- Un système d'exception !
  - trois coordonnées : mêmes unités
  - trois coordonnées : équivalentes
  - $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ constants

10

Système de coordonnées cylindriques

Variable	valeurs	longueur élémentaire
ρ	$[0,\infty[$	$\mathrm{d}\rho$
ϕ	$[0,2\pi]$	$\rho\,\mathrm{d}\phi$
z	$]-\infty,\infty[$	$\mathrm{d}z$

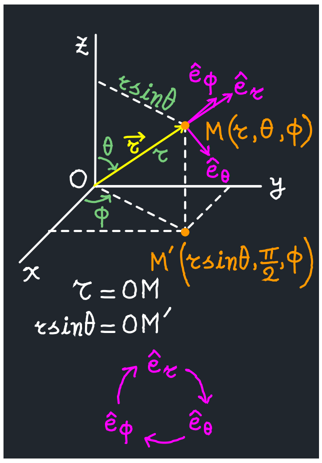
- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  ρ constant : $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
  ϕ constant : $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$
  z constant : $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$
- Vecteur de position : $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$



Système de coordonnées sphériques

Variable	valeurs	longueur élémentaire
r	$[0,\infty[$	$\mathrm{d}r$
θ	$[0,\pi]$	$r\,\mathrm{d}\theta$
ϕ	$[0,2\pi]$	$r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$

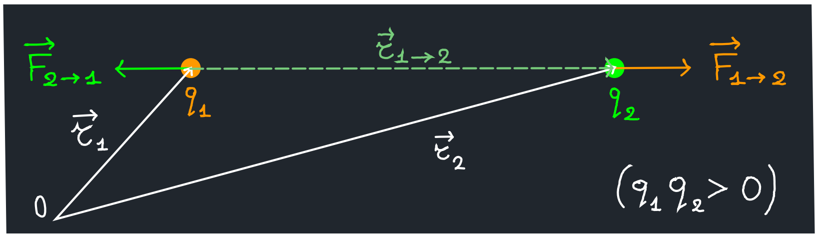
- Surface élémentaire $\mathrm{d}S$
  r constant : $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$
  θ constant : $r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$
  ϕ constant : $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
- Volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
- Vecteur de position : $\vec{r} = r\hat{e}_r$



Force et champ électrostatiques

Force électrostatique

- *« Statique »* : les charges ne se déplacent pas
- Loi de Coulomb (1785)

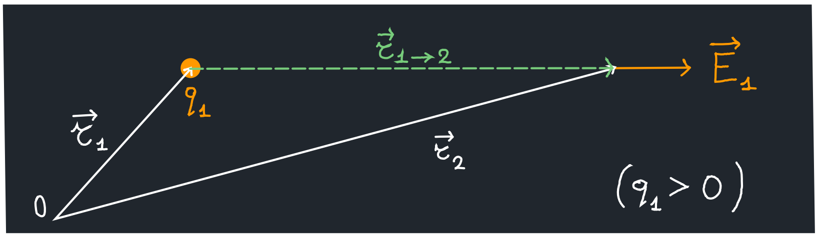


- Force exercée par la charge 1 sur la charge 2 :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\to2}^2}\hat{r}_{1\to2}} \qquad (\vec{r}_{1\to2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{1}$$

- $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ « constante électrique » (permittivité du vide)
- $\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$

Champ électrostatique



- Champ électrique créé par la charge 1 :

$$\boxed{\vec{E}_1 \triangleq \frac{\vec{F}_{1\to2}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\to2}^2}\hat{r}_{1\to2} \quad (\mathrm{N\,C^{-1}})} \tag{2}$$

- Force électrique : charge fois champ

$$\vec{F}_{1\to2} = q_2\vec{E}_1 \tag{3}$$

Champs scalaires et vectoriels

16

La notion de champ

- *Champ scalaire* :
  l'association à chaque point de l'espace d'un scalaire (un seul nombre) : p.ex. température, altitude, ...
- *Champ vectoriel* :
  l'association à chaque point de l'espace d'un vecteur (longueur et orientation) : p.ex. vent, vitesse, ...
- Il faut d'abord pouvoir se repérer et s'orienter dans l'espace !
- [rappels sur les systèmes de coordonnées]
- [rappels sur les vecteurs]

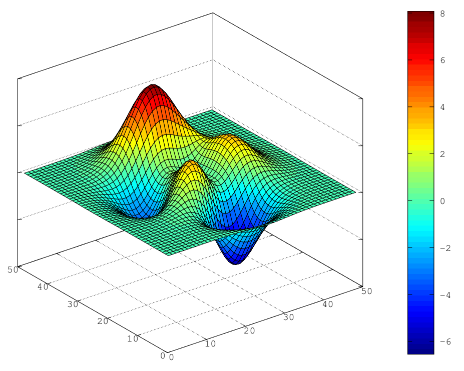
17

Champ scalaire

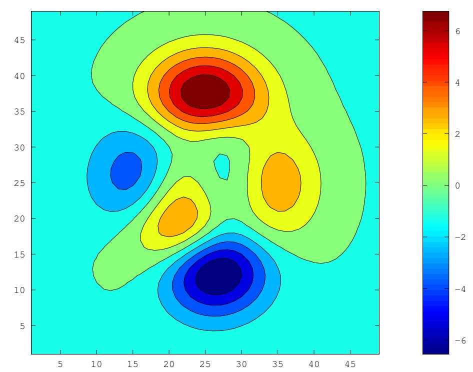
- *Champ scalaire* : l'association à chaque point de l'espace d'un scalaire (un seul nombre) : p.ex. température, altitude, potentiel, ...
- Un champ scalaire est une fonction de 3 variables

  $$\Phi(x, y, z),\ \Phi(\rho, \phi, z),\ \Phi(r, \theta, \phi)\,;\ \text{en général : } \Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

- Visualisation : exemples en 2D, $\Phi(x, y)$:



Surface
(Impossible à visualiser en 3D)



Iso-niveaux / contours
(Iso-surfaces en 3D)

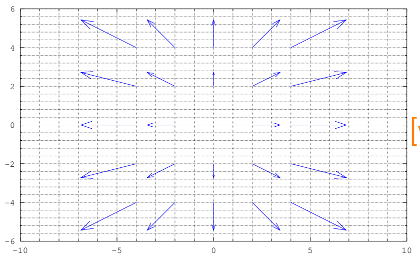
18

Champ vectoriel

- *Champ vectoriel* : l'association à chaque point de l'espace d'un vecteur (module et direction) : p.ex. vent, vitesse, ...
- Un champ vectoriel est un ensemble de 3 fonctions (les composantes) chacune de 3 variables (les coordonnées) :

$$\vec{\boldsymbol{A}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix} = A_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + A_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + A_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

- Ne pas confondre *composantes* et coordonnées !
- Visualisation : exemple en 2D, $\vec{\boldsymbol{A}}(x,y) = 2x\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$



[visualisation champs vectoriels]

19

Charges électriques

20

L'essentiel

- *Charge électrique* : une propriété fondamentale de la matière
- Deux types : positive et négative
- Unité SI : *Coulomb* (C)
- Valeurs :
  - électron : $q_e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
  - proton : $|q_e|$
  - en général : *multiples entiers de* $|q_e|$
    expérience de Millikan-Fletcher, 1913
    (quarks : $\pm\frac{1}{3}|q_e|$, $\pm\frac{2}{3}|q_e|$)

21

Modèles utilisés

- Charges *ponctuelles*
  Des points dans l'espace, sans dimensions

$$\text{charge totale : } q = \sum_i q_i$$

- Charges *continues*
  Étendues dans l'espace : une, deux ou trois dimensions

Distribution	Densité	Charge élémentaire	Charge totale
linéique	$\rho_l\,(\mathrm{C\,m^{-1}})$	$\mathrm{d}q = \rho_l\,\mathrm{d}l$	$q = \int_\Gamma \rho_l\,\mathrm{d}l$
surfacique	$\rho_s\,(\mathrm{C\,m^{-2}})$	$\mathrm{d}q = \rho_s\,\mathrm{d}S$	$q = \int_S \rho_s\,\mathrm{d}S$
volumique	$\rho\,(\mathrm{C\,m^{-3}})$	$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V}$	$q = \int_\mathcal{V} \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V}$

- ρ_l, ρ_s, ρ : des champs scalaires [champs scalaires et vectoriels]
- Notation : ρ ou ϱ ($\neq \rho$ des coordonnées cylindriques)

22

Pourquoi les champs électromagnétiques ?

23

Champ électrique, champ magnétique

- Pourquoi utiliser les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$
  pour décrire les phénomènes électromagnétiques ?
- [force et champ électrostatiques] : loi de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\to2}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{1\to2}}$$

  Valable *uniquement* si les charges sont immobiles !
- Force électromagnétique (force de Lorentz) :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})} \tag{4}$$

  Exercée sur une charge q de vitesse instantannée $\vec{v}$
  se déplaçant dans un champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$
  Valable *toujours*
- Charges (sources) $\xrightarrow{\text{créent}}$ Champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ $\xrightarrow{\text{agissent}}$ Autres charges

24