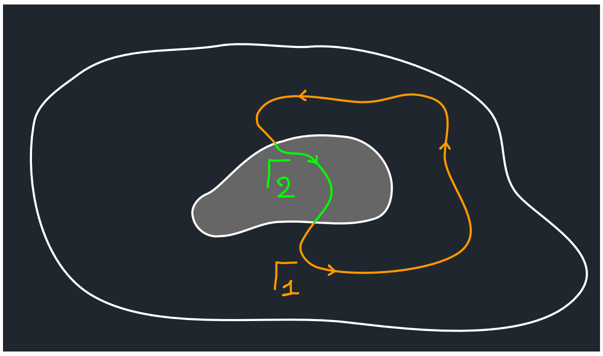
Électromagnétisme
S09 Conducteurs en électrostatique II

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Le champ électrique dans une cavité

Champ électrique dans une cavité vide



- Cavité vide (pas de charges) ; hypothèse : dans la cavité $\vec{E} \neq \vec{0}$
- $\Gamma = \Gamma_1$ (conducteur) $\cup \Gamma_2$ (cavité : suivre une ligne du champ)

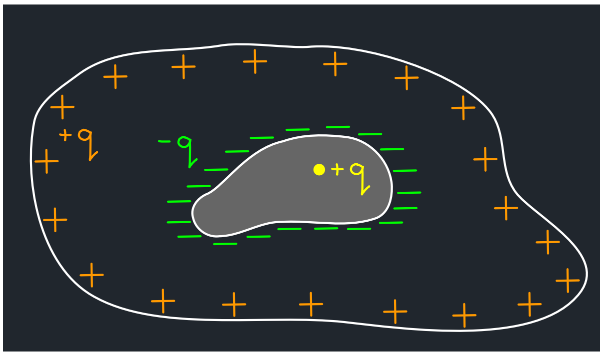
$$\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \int_{\Gamma_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, \mathrm{d}l + \int_{\Gamma_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, \mathrm{d}l$$
$$= 0 + \int_{\Gamma_2} \|\vec{E}(\vec{r})\|\, \mathrm{d}l = 0 \quad \text{[circ. champ électrostatique]}$$

Dans une cavité vide : $E = 0$

- Même en présence d'un champ $\vec{E}_{\text{ext}}$: blindage

3

Champ électrique dans une cavité chargée



- [Cavités charges]
- $Q_{\text{surf ext}}$ crée $E = 0$ *dans* le conducteur
- Q_{cav} et $Q_{\text{surf int}}$ créent $E = 0$ *dans* le conducteur

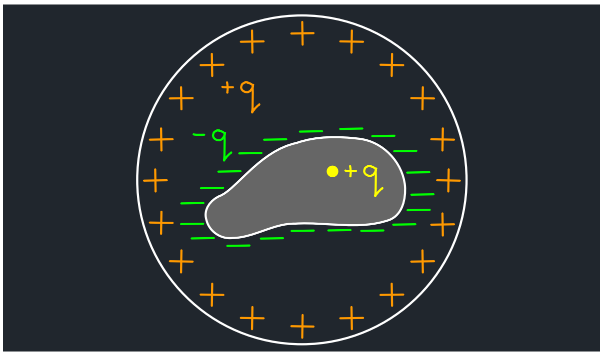
Dans une cavité chargée : $E \neq 0$

- Cas spéciaux : [cavité géométries sphériques]

4

Cavités dans un conducteur : géométries sphériques

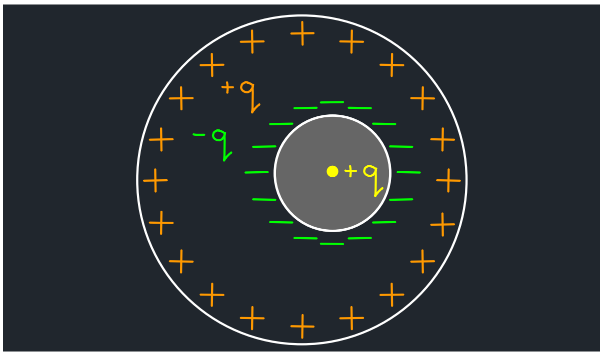
Conducteur sphérique avec cavité



- [Cavité champ] : $E \neq 0$ dans la cavité
- [Cavité charges] : les charges induites $Q_{\text{surf int}}$ annulent l'effet de Q_{cav}
- Charge $Q_{\text{surf ext}} = +q$ équirépartie sur la surface

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \quad \text{en dehors du conducteur}$$

Conducteur sphérique avec cavité sphérique



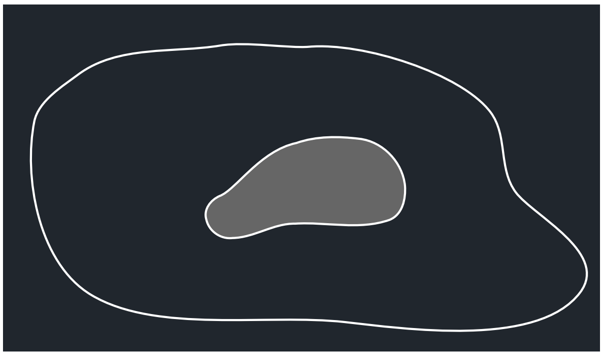
- Charge $Q_{\text{cav}} = +q$ au centre de la cavité
- Charge $Q_{\text{surf int}} = -q$ équirépartie sur la surface interne
- Charge $Q_{\text{surf ext}} = +q$ équirépartie sur la surface externe

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \quad \text{en dehors du conducteur}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{r'} \quad \text{dans la cavité}$$

Conducteurs et potentiel électrostatique

Conducteurs, cavités et potentiel



- [Conducteurs champ intérieur] : $E = 0$
- [Conducteurs surface] : $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$
- [Cavités champ] : $E = 0$ dans une cavité vide

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}\to\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = 0$$

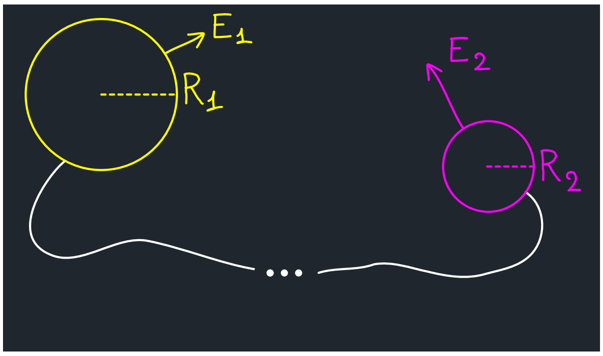
Un conducteur (avec ses cavités vides) forme une *région équipotentielle*

- À la surface, $\vec{\boldsymbol{E}} \perp$ équipotentielle : $\vec{\boldsymbol{E}} \parallel \hat{\boldsymbol{n}}$

Relation entre champ surfacique et forme des conducteurs

10

Le champ à la surface du conducteur



- Deux sphères métalliques, rayons R_1, R_2
- Très éloignées ; connectées par un fil conducteur
- Charges Q_1, Q_2 ; densité de charge surfacique $\rho_{si} = Q_i/4\pi R_i^2$
- Potentiel : $V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{R_i}$
- « Connectées » : $V_1 = V_2$ [conducteurs potentiel]
- $\Longrightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$
- Si $\boxed{R_1 > R_2}$, $\rho_{s1} < \rho_{s2}$ donc $\boxed{E_1 < E_2}$

Le champ électrique est plus fort aux endroits où le rayon de courbure est plus petit (p.ex. pointes)

11

Condensateurs

12

Condensateur et capacitance

- [Conducteurs potentiel] : région équipotentielle
- Condensateur : ensemble de deux conducteurs
  $+Q$ à V_+ et $-Q$ à V_-

$$V \triangleq V_+ - V_- = -\int_{\Gamma:(-)\to(+)} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l$$

- $V \propto E$, $E \propto \rho_s$ et $Q \propto \rho_s$ donc $V \propto Q$

$$\text{Capacitance : } C \triangleq \frac{Q}{V} \text{ en } \mathrm{F} = \mathrm{C\,V^{-1}} \tag{1}$$

- Paramètre purement géométrique

13

Énergie d'un condensateur

- Charger le condensateur :

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}q(V_+ - V_-) = V\,\mathrm{d}q = \frac{1}{C} q\,\mathrm{d}q$$

- Travail fourni pendant la charge :

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^Q \frac{1}{C} q\,\mathrm{d}q = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}CV^2 = \mathcal{U}_\mathrm{e}}$$

- Autre méthode : [énergie électrostatique charges continues]

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\mathrm{e} &= \frac{1}{2}\int_S \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})V(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\int_{S+} \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})V_+\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{S-} \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})V_-\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}V_+\int_{S+} \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}V_-\int_{S-} \rho_s(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}[V_+Q + V_-(-Q)] \\ &= \frac{1}{2}Q(V_+ - V_-) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2\end{aligned}$$

14