Électromagnétisme
S02 Flux, loi de Gauss forme intégrale

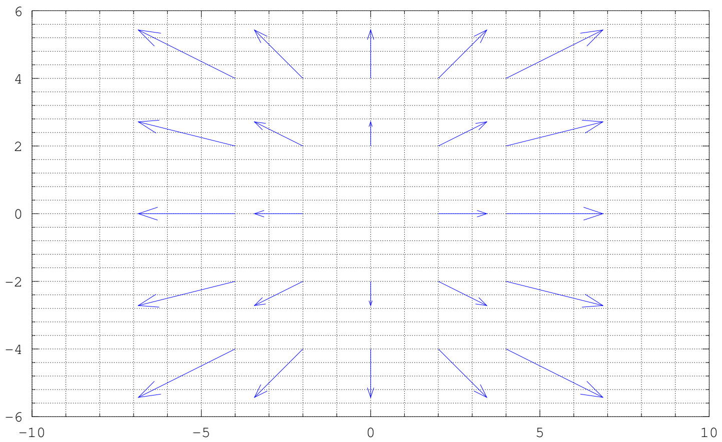
Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Visualisation de champs vectoriels

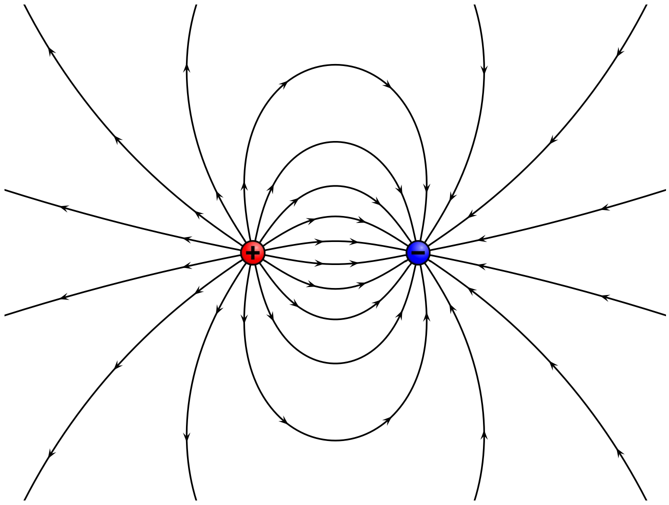
Diagramme "quiver"

- Dessiner des vecteurs [champs scalaires et vectoriels]
  - À chaque point $\vec{r}$ dessiner le vecteur $\vec{A}(\vec{r})$
  - L'origine du vecteur à $\vec{r}$
  - Diagramme "quiver" (carquois)
- Exemple en 2D, $\vec{A}(x,y) = 2x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$



Lignes de champ

- Dessiner des « lignes de champ »
  - Lignes continues, tangentes au champ $\vec{A}(\vec{r})$ (orientation)
  - Ne se croisent jamais
  - $\frac{\text{nombre de lignes}}{\text{surface perpendiculaire}} \propto \|\vec{A}\|$ (norme)
- Exemple : charges égales et opposées, champ $\vec{E}(\vec{r})$



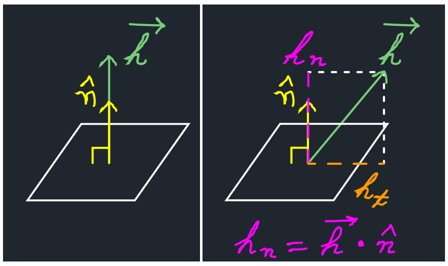
Flux d'un champ vectoriel

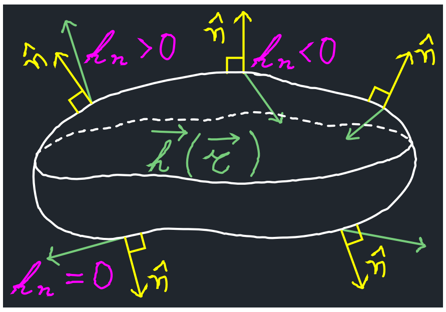
5

Écoulement d'eau

(Qu'est-ce qui traverse une surface ?)

- Champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{h}}$: $\mathrm{kg\,s^{-1}\,m^{-2}}$
- Surface élémentaire (ouverte) $\mathrm{d}S$
  - Vecteur normal à la surface $\hat{\boldsymbol{n}}$
  - Vecteur $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$
  - Que représente $\vec{\boldsymbol{h}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$?
- Surface ouverte S
  - Que représente $\int_S \vec{\boldsymbol{h}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$?
- Surface fermée S
  - Que représente $\oint_S \vec{\boldsymbol{h}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$?





6

Flux d'un champ vectoriel

- Champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$
- Surface (ouverte) S
  Flux du champ $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ à travers S :

$$\int_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \quad \text{ou} \quad \int_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

- Surface (fermée) S ($\hat{\boldsymbol{n}}$ sortant)
  Flux du champ $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ à travers S :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \quad \text{ou} \quad \oint_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

  Le flux à travers une surface *fermée* donne des informations sur les « sources » du champ à l'intérieur de la surface
- Flux : un scalaire ($> 0, = 0, < 0$)
- Pas de direction !

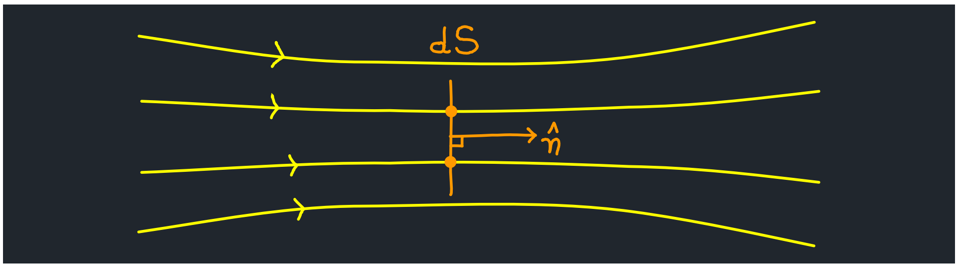
7

Flux et lignes de champ

Nombre de lignes $\propto$ flux

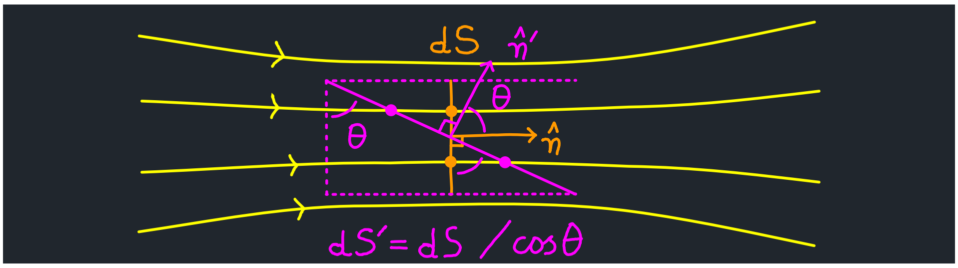
- [Visualisation de champs vectoriels]

$$\frac{\text{nombre de lignes}}{\text{surface perpendiculaire}} \propto \|\vec{A}\|$$



$$\begin{aligned}\text{nombre de lignes} &\propto \|\vec{A}\| \times \text{surface perpendiculaire}\\ &= \|\vec{A}\|\,\mathrm{d}S \overset{\vec{A}\|\hat{n}}{=} \vec{A}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S\\ &= \text{flux de } \vec{A} \text{ à travers la surface perpendiculaire } \mathrm{d}S\end{aligned}$$

Nombre de lignes $\propto$ flux



$$\begin{aligned}\text{Flux de } \vec{A} \text{ à travers } \mathrm{d}S' &= \vec{A}\cdot\hat{n}'\,\mathrm{d}S' = \|\vec{A}\|\cos\theta\frac{\mathrm{d}S}{\cos\theta} = \|\vec{A}\|\,\mathrm{d}S\\ &= \text{Flux de } \vec{A} \text{ à travers } \mathrm{d}S \quad \text{[flux champ vectoriel]}\end{aligned}$$

- Quelle que soit l'orientation de la surface :

$$\boxed{\text{Nombre de lignes} \propto \text{flux}}$$

- Lignes « positives » : traversent dans le sens de $\hat{n}$
- Lignes « négatives » : traversent contre le sens de $\hat{n}$

Exemples flux et lignes de champ

Flux à travers :

$S_1 > 0$

$S_2 < 0$

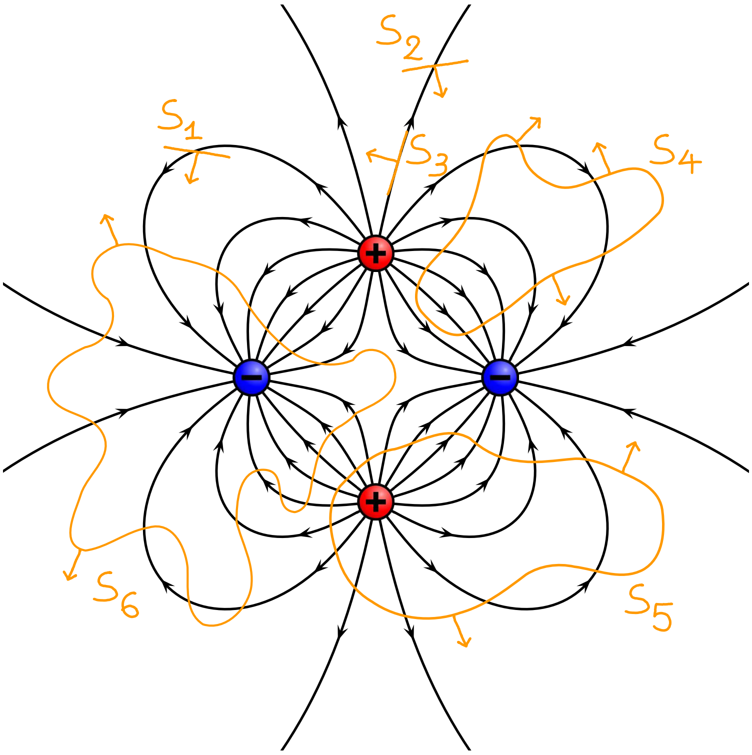
$S_3 = 0$

$S_4 = 0$

$S_5 \propto 16$ lignes > 0

$S_6 \propto -16$ lignes < 0

flux $S_6 = -$flux S_5



Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

11

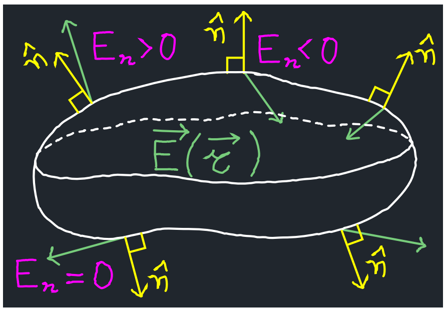
Loi de Gauss, forme intégrale

12

Loi de Gauss (électrostatique), forme intégrale

- **Électrostatique** : les charges sont immobiles
- **Loi de Gauss** :
  « Le [flux] du champ électrique à travers une surface *fermée* est proportionnel à la charge totale incluse à *l'intérieur* de cette surface »

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{3}$$

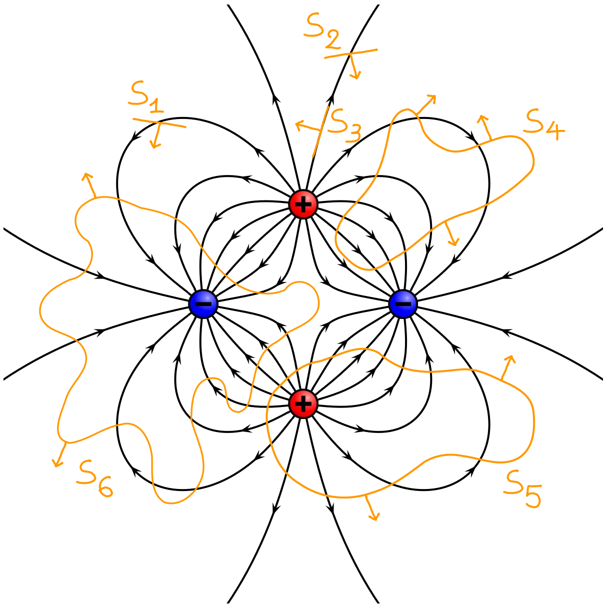


- (étonnament simple !)

13

Loi de Gauss et lignes de champ

- Flux $\propto$ nombre de lignes de champ [flux et lignes de champ]
- **Loi de Gauss** :
  « Le nombre de lignes du champ électrique à travers une surface *fermée* est proportionnel à la charge totale incluse à *l'intérieur* de cette surface »



Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

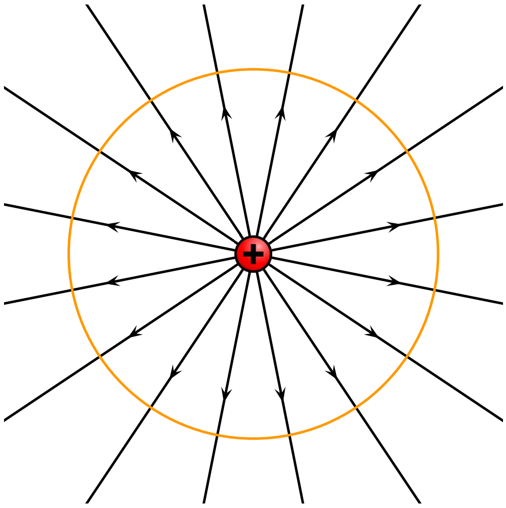
14

Loi de Gauss, forme intégrale : application

Charge ponctuelle à l'origine

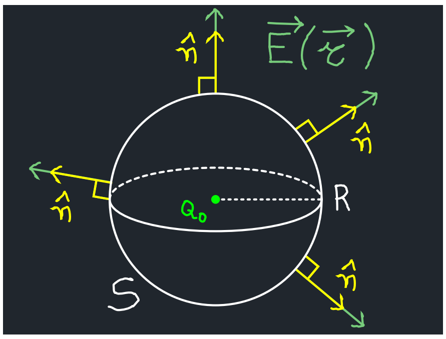
- « Vérification » de la loi de Gauss
- Charge Q_0 à l'origine du système de coordonnées
- Champ électrique créé :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$



Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

- Choisir surface S fermée : sphère, centrée à l'origine, de rayon R, $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$



- Flux de $\vec{\boldsymbol{E}}$ à travers S :

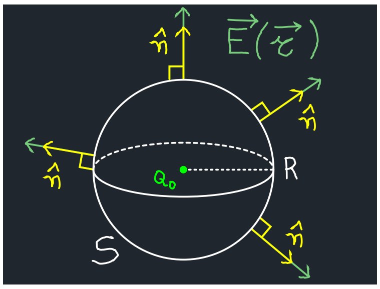
$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}S = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\oint_S \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S$$

$$\overset{r=R}{=} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\oint_S \mathrm{d}S = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}4\pi R^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Loi de Gauss et loi de Coulomb

La loi de Gauss contient celle de Coulomb

- Trouver le champ créé par une charge Q_0 à l'origine
- Champ électrostatique = force / charge test
- Choix du système de coordonnées : sphérique
- Symétrie : $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi) = E(r)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$
- Gauss : $\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
- Choisir surface S fermée : sphère, centrée à l'origine, de rayon R, $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$



- Flux de $\vec{\boldsymbol{E}}$ à travers S :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \oint_S E(r)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}S \overset{r=R}{=} E(R)\oint_S \mathrm{d}S = E(R)4\pi R^2$$

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \text{ donc } E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{R^2}$$

- R : le rayon de la sphère fictive, correspond à r

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \qquad \text{[force et champ électrostatiques]}$$