Cette activité prépare les preuves par récurrence que l'on va faire en cours.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^* \quad \mu \in \mathbb{R}$.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Utiliser la définition récursive du déterminant (en développant par exemple par rapport à la première colonne) pour calculer les déterminants suivants dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

— de M ;

— de D puis de DM avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

— de T puis de TM avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$;

— de P puis de PM avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

— de ${}^tM$.

— de N : présenter chacun des 9 termes dans l'ordre lexicographique ;

— de Δ puis de ΔN avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

— de τ puis de τN avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

— Π puis de ΠN avec $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

— de ${}^tN$.

Quelles conjectures peut-on faire quant aux propriétés du déterminant ?