Exercice 4

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ (9 \mid 10^n - 1)$ reviens à

montrer $P(n)$: $10^n - 1 = 9k$, $k \in \mathbb{Z}$

I : pour $n = 0$ $\quad 10^0 - 1 = 0$

$9k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \in \mathbb{Z}$

donc $P(0)$ est vraie

H : Soit $n \geqslant 0$ tel que $P(n)$ est vraie

Montrons que $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ vraie

$$10^n - 1 = 9k$$
$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - 10 = 90k$$
$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - 1 = 90k + 9$$
$$\Leftrightarrow 10^{n+1} - 1 = 9\underbrace{(10k+1)}_{k'}$$

Donc $P(n+1)$ vraie avec $k' \in \mathbb{Z}$

C : $P(n)$ vraie pour tout $n \geqslant 0$

$P(n)$: $(n \in \mathbb{N})$ $10^n - 1 = 9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

. Initialisation : pour $n = 0$ $\quad 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9k$ avec $k = 0$

$P(0)$ est vraie

. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

cad qu'il existe un entier k tel que $10^n - 1 = 9k$

Montrons que $P(n+1)$ est vrai cad qu'il existe un entier

k' tel que $10^{n+1} - 1 = 9k'$

or $10^{n+1} = 10^n \times 10$

donc $10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1$

$= (9k+1)\,10 - 1$ par H.R

$= 90k + 10 - 1$

$= 9(10k+1) = 9k'$

La propriété est héréditaire

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P(n)$ est vraie

Exercice 7

$a \equiv b\ [c]$

a) $\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline r & k \end{array}$ $\Updownarrow$ $\begin{array}{c|c} b & c \\ \hline r & k' \end{array}$

On obtient le système suivant :

$\begin{cases} a = kc + r \\ b = k'c + r \end{cases} \iff (a-b) = kc - k'c \iff \boxed{(a-b) = c\,(k-k')}$

Donc $a \equiv b\ [c] \iff (a-b) = cK \quad (K \in \mathbb{Z})$

b) ① Le domaine de définition est : $\mathbb{N}$ (car a, b, les entiers)

② Le domaine de validité est : $\mathbb{N}$

③ $(\forall k \in \mathbb{Z})\ (\exists p \in \mathbb{N})\quad \dfrac{5^p - 2^p}{3} = k$

c) ① Le domaine de définition est : $\mathbb{N}$ (car a, b entiers)

② Le domaine de validité est : $\emptyset$

③ $(\forall k \in \mathbb{Q})\ (\exists p \in \mathbb{N})\quad \dfrac{5^p + 2^p}{3} = k$

Exercice 2

a) $p : (b^2 - 4ac > 0) \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \quad (a \neq 0)$

b) $q : \frac{c}{a} < 0 \ (a \neq 0) \Rightarrow (b^2 - 4ac > 0)$

c) On suppose $(b^2 - 4ac > 0)$ vraie

$(b^2 - 4ac > 0$

$\Leftrightarrow b^2 > 4ac$

$\Leftrightarrow c < \frac{b^2}{4a}$

$\Leftrightarrow \frac{c}{a} < \frac{b^2}{4a^2}$ or $\frac{b^2}{4a^2} \geqslant 0 \quad (a \neq 0)$

Pour que $\frac{c}{a} < 0$, il faudrait que $\frac{b^2}{4a^2} < 0$

Donc p est faux

Par ex : $a = 1$ $b = 3$ et $c = 1$

$3^2 - 4(1)(1) = 5 > 0$

or $\frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1 > 0$ donc p est faux

Exercice 6

~~Soit P(n)~~ Soit $P(n) : \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$: $\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Initialisation : pour $n = 1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$1 + \lambda \geqslant 1 + \lambda$

$\cancel{(1 + 1) = 2}$ et $\cancel{1 + (1) = 2}$, $\cancel{(1+1) \geqslant 1 + (1)}$

Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n > 0$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad (\text{par HR})$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i)(1 + \lambda_{n+1}) \geqslant \left(1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)(1 + \lambda_{n+1})$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} 1 + \lambda_i \geqslant 1 + \lambda_i + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} 1 + \lambda_i \geqslant 1 + \lambda_i + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i$$

or $1 + \lambda_i + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i + \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i$

donc $\prod_{i=1}^{n+1} 1 + \lambda_i \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i$

$P(n+1)$ est vraie aussi

Conclusion : $(P(1)$ vraie$)$ et $\left([\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}] \ P(n) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie} \right)$

donc $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ P(n)$ vraie$)$

P_2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite

$\underbrace{(u_n)_n \text{ est constante}}_{\text{Proposition}}$, $\underbrace{\text{à partir d'un certain rang}}_{\text{quantification}}$

. Il existe un rang à partir duquel (u_n) est constante

. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0) \Rightarrow u_n = u_{n_0}$

(autre formulat°) . $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0) \Rightarrow u_n = u_{n+1}$

Définition et convention de notation

Quantificateur en langue naturelle	en code	Nom du quantificateur
Pour tout $x \in \mathcal{D}$ $P(x)$ vraie	$\forall x \in \mathcal{D}$ $P(x)$	universel
Au moins un élément x de $\mathcal{D}$ vérifie $P(x)$	$\exists x \in \mathcal{D}$ $P(x)$	quantificateur d'existence
Un seul élément x de $\mathcal{D}$ vérifie $P(x)$	$\exists ! x \in \mathcal{D}$ $P(x)$	quantificateur d'existence et d'unicité

. La quantification précède la proposition

à apprendre

ex : Tout carré réel est positif

$\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geqslant 0$

~~$x^2 \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$~~

Exemple 1.2 : P_3 : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists ! n \in \mathbb{Z}$ $[(n \leqslant x) \text{ et } (x < n+1)]$

. Tout réel peut être encadré de façon unique par deux entiers consécutifs

. A tout réel, on peut associer sa partie entière.

ex : $x = -15,4$ $\quad -16 \leqslant -15,4 < -15$

2 - Permutat° expressions quantifiées dans une proposit°

Ex. 2.1 :

P_6 : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ (a)

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ (b)

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{y+x} = e^y \times e^x$ (c)

$\boxed{\text{Analyse}}$ $e^{x+y} = e^{y+x}$ car addition commutative dans $\mathbb{R}$

$e^x \times e^y = e^y \times e^x$ car multiplication ————

Dans ce cas, (a) et (c) sont exactement la m̂ proposition

(a) et (b) sont équivalentes

P_7 : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left[x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \left(\exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{N}\setminus\{0\} / x = \frac{a}{b}\right)\right]$

Un réel est rationnel ssi il peut s'écrire comme rapport de 2 entiers

Ici : $\left[\forall x \in \mathbb{R}\ \left(x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{N}\setminus\{0\} / x = \frac{a}{b}\right)\right]$

est équivalente à

$\left[\forall x \in \mathbb{R}\ \left(x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \exists a \in \mathbb{Z} / x = \frac{a}{b}\right)\right]$