Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2[X]$.
On définit l'application φ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2[X], \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'application φ est une forme bilinéaire.
2. On note M la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coefficients de la matrice M.
3. La forme bilinéaire φ est-elle symétrique ?
4. On définit l'application ψ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2[X], \quad \psi(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\varphi(P,Q) + \varphi(Q,P)\right)$$

   (a) Justifier que l'application ψ est une forme bilinéaire symétrique.
   (b) On note S la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}$Je dirais : exprimer les coeff. de S en fonction de ceux de M.
   Exprimer S en fonction de M puis en déduire les coefficients de la matrice S. puis déduire une relation entre S et M...sinon il s'agit plutôt d'une affirmation.
   (c) L'application ψ est-elle un produit scalaire ? Justifier la réponse.

Exercice 2
On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On pose $u_0 = (1, 1, 1)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (0^n, 1^n, 2^n)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(u_0, u_1)$ et p la projection orthogonale sur F.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit l'application ϕ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \phi(a,b) = \sum_{k=0}^{2} (k^n - (a+bk))^2.$$

ça colle aux exercices du td de mardi 24/03/15.

   (a) Interpréter, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi(a,b)$ comme le carré de la distance entre deux vecteurs à préciser.
   (b) En déduire qu'il existe un unique couple (a_n, b_n) qui minimise ϕ.
   (c) Montrer que ce couple (a_n, b_n) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} 3a_n + 3b_n = 1 + 2^n \\ 3a_n + 5b_n = 1 + 2^{n+1} \end{cases}$$

   (d) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 3
Soient E un espace préhilbertien et p un projecteur de E.

1. p est donc une projection. Donner ses éléments caractéristiques.
2. Montrer que p est une projection orthogonale **si et seulement si** pour tous $x, y \in E$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.