Polytech'Nice Sophia-Antipolis Analyse - PEIP2 - 2013-2014

Contrôle n°2 : 20 novembre 2013

Documents et appareils électroniques non autorisés - Durée 1h

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une intégrale semi-convergente.

2. On considère A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 5, 4 < |y|\}$$

La partie A est elle fermée, ouverte, ou ni l'un ni l'autre ?

Exercice 2.

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \text{ et } N"(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f"(t)|dt$$

On admettra que N et $N"$ sont des normes sur E.

1. Montrer que N' est une norme sur E.

2. Montrer que $\forall f \in E,\ N(f) \leq N'(f)$ (on pourra exprimer $f(t)$ en fonction de $f(0)$ et d'une primitive de $f'(t)$).

3. Exprimer N' en fonction de N, $f(0)$ et f'. En déduire que $\forall f \in E,\ N'(f) \leq N"(f)$.

4. En utilisant la suite de fonction $f_n(t) = t^n$, montrer que les normes N et N' ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de la norme :

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \|u\| = max(\|(x, y)\|_2, |z|)$$

où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que la norme $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la boule ouverte de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon $r > 0$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, \|.\|)$ (on pourra faire un dessin).