# Correction DS n°1

## Récurrence

. Initialisation pour $n=1$

$X^1 - a^1 = X - a$

$(X-a)\sum_{k=0}^{0} X^k a^{1-1-k} = (X-a)X^0 a^0 = X - a$

On a bien : $P(1)$ vraie

. Hypothèse : soit $n \geqslant 1$ tel que $X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

. Récurrence :

$$\begin{aligned} X^{n+1} - a^{n+1} &= X^n \times X - a^{n+1} \\ &= X^n(X-a+a) - a^{n+1} \\ &= X^n(X-a) + X^n a - a^{n+1} \\ &= X^n(X-a) + a(X^n - a^n) \end{aligned}$$

Par H.R. : $X^{n+1} - a^{n+1} = X^n(X-a) + a(X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

$= (X-a)\left[X^n + a\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}\right]$

Donc $X^{n+1} - a^{n+1} = (X-a)\left[X^n a^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-k}\right]$

$= (X-a)\sum_{k=0}^{n} X^k a^{n-k}$

Conclusion : La factorisation est vérifiée au rang 1 et pour tout $n \geqslant$, si elle est vérifiée au rang $n$ alors elle est vérifiée au rang $n+1$.

Donc, la factorisation est vérifiée pour tout $n \geqslant 1$.

(écriture mathématique possible)

Chap. 4

## Exercice 3

a) ① $\mathcal{R}$ symétrique : $\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad (x^2 | y) \Rightarrow (y^2 | x)$

Prenons $x = 2$ et $y = 4$

On a bien $(x \mathcal{R} y)$ car $x^2 = 4$
donc $(4|4)$

Cependant, on a $\neg(y \mathcal{R} x)$ car $y^2 = 16$
et 16 ne divise pas 2

② Prenons $x = -1$ et $y = 1$

On a bien $(x \mathcal{R} y)$ et $(y \mathcal{R} x)$

Cependant : $x \neq y$

Conclusion : $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique

Rappel : $[\mathcal{R}$ antisymétrique$] \Leftrightarrow [\forall x,y \in \mathbb{Z} \ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow x = y]$

$[\mathcal{R}$ non antisymétrique$] \Leftrightarrow [\exists x,y \in \mathbb{Z} \ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$ et $x \neq y]$

$[\mathcal{R}$ symétrique$] \Leftrightarrow [\forall x,y \in \mathbb{Z} \quad (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)]$

$[\mathcal{R}$ non symétrique$] \Leftrightarrow [\exists x,y \in \mathbb{Z} \quad (x\mathcal{R}y)$ et $\neg(y\mathcal{R}x)]$

b) Soit $\mathcal{R}$ une relation sur $E$ sym et antisym

$\mathcal{R}$ est antisym :

donc $\forall x,y \in E \quad \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow y = x$

Puisque $\mathcal{R}$ est symétrique alors si $x\mathcal{R}y$ le système $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$ est vérifié

donc $x = y$

- Soit $x \in E$

Considérons $C(x) = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$

~~On a montré que $C(x) \in$~~ Soit $y \in C(x)$

Donc : $x\mathcal{R}y$

Donc : $y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ sym

Donc $y = x$ car $\mathcal{R}$ antisym

Donc $\forall y \in C(x)$, $y \in \{x\}$ donc $C(x) \subset \{x\}$ donc $C(x) \in \{\emptyset, \{x\}\}$

Concl :

- Si $\mathcal{R}$ est réflexive alors $C(x) = \{x\}$

Sinon $C(x) = \emptyset$ ou $C(x) = \{x\}$