$$\mathcal{U}_e = \frac{\rho Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R_0^3} \times \frac{16}{5} R_0^5 \pi$$

$$= \frac{\rho Q_0 R_0^2}{5\varepsilon_0}$$

or $Q_0 = \int_V \rho \, dV$

$$= \rho \int_V dV = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

donc $\rho = \dfrac{3 Q_0}{4\pi R_0^3}$

D'où $\mathcal{U}_e = \dfrac{3 Q_0^2 \cancel{R_0^2}}{20\pi\varepsilon_0 R_0^{\cancel{3}}}$

$$\boxed{= \frac{3 Q_0^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0}}$$

Méthode 2 : Avec la formule (5)

(5) $\mathcal{U}_e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \varepsilon_0 E^2(\vec{r})\, dV$ avec $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_0 \dfrac{r}{R_0^3}\hat{e_r} & r \leq R_0 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0}{r^2}\hat{e_r} & \text{si } r > R_0 \end{cases}$

Ici V est le volume de l'espace.

Décomposons le :

$V = \underbrace{V_{int}}_{\text{volume tel que } r \leq R_0} \cup V_{ext} \leftarrow$ Volume tel que

Ainsi $\mathcal{U}_e = \dfrac{1}{2}\left(\underbrace{\displaystyle\int_{V_{int}} \varepsilon_0 E^2(\vec{r})\, dV_{int}}_{I} + \underbrace{\displaystyle\int_{V_{ext}} \varepsilon_0 E^2(\vec{r})\, dV_{ext}}_{J}\right)$.

$$I = \varepsilon_0 \int_{V_{int}} \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R_0^3}\right)^2 dV = \frac{\cancel{\varepsilon_0} Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^{\cancel{2}} R_0^6}\int_{V_{int}} r^2 \, dV_{int}$$

$$= \frac{Q_0^2}{16\pi^{\cancel{2}}\varepsilon_0 R_0^{\cancel{6}}} \frac{4}{5} \cancel{R_0^5} \cancel{\pi}$$

$$= \frac{Q_0^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0}$$