Exemples - fin du chapitre 4

J. Ribault

6 janvier 2017

Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$ sans utilisation des théorèmes spécifiques

- en calculant directement $\int_I f_n$, à l'aide éventuellement d'un changement de variable ou d'une intégration par partie, puis en passant à la limite .
- en encadrant, pour n suffisamment grand, $\int_I f_n$ par les termes de deux suites convergeant vers un même réel ℓ.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$:
  $0 \leqslant e^{-nx}$ et $0 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$
  donc : $0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x = \ldots = \underbrace{\frac{1-e^{-n}}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

En appliquant le th. des G. on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x = 0$

Exemple

Montrer que **si** $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{K})$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,e^{int}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Calculons : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,e^{int}\mathrm{d}t$

Soit $n \geqslant 1$.

Faisons une IPP :

$$\begin{array}{ll} \boxed{u = f(t)} & du = f'(t)\mathrm{d}t \\ v = \frac{1}{in}e^{int} & \boxed{dv = e^{int}\mathrm{d}t} \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,e^{int}\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{in}e^{int}f(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{in}e^{int}f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{in}\left(e^{ibn}f(b) - e^{ian}f(a) - \int_a^b e^{int}f'(t)\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \left| \int_a^b f(t)\, e^{int} \mathrm{d}t \right| &= \left| \frac{1}{in} \left(e^{ibn} f(b) - e^{ian} f(a) - \int_a^b e^{int} f'(t) \mathrm{d}t \right) \right| \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{n} \underbrace{\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t \right)}_{\text{constante}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}$$

CONCLUSION : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, e^{int} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$