Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n+1} z^{4n-1}$.

Exercice 2
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n^2+5n+6}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n \end{array}$.
   Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
3. On pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
   (a) Justifier que f est continue sur $[-1,1]$.
   (b) Déterminer, pour $x \in]-1,1[$, $f(x)$ en fonction de x.
   (c) Déterminer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+5n+6} \quad \text{et} \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} .$$

Exercice 3
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, telle que :

$$\forall t \in [0,\pi], \quad g(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) .$$

1. Tracer le graphe de g sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Montrer que la série de Fourier trigonométrique de g s'écrit : $\alpha + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta}{4n^2-1} \cos(nt)$, où α et β sont des réels à déterminer.
3. On note S la somme de la série de Fourier de g.
   Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ puis exprimer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ en fonction de t.
4. On pose $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ et $D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.
   (a) Exprimer C en fonction de α et β puis donner la valeur exacte de C.
   (b) Même question avec D.