DOCUMENTS ET CALCULATRICES NON AUTORISÉS
LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ET LE SOIN APPORTÉ À LA RÉDACTION SERONT PRIS EN COMPTE DANS LA NOTATION

Exercice 1

1. Soient E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
2. $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique.
   On pose $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + z = 0 \text{ et } y - t = 0\}$.
   On note s_H la symétrie orthogonale par rapport à H et $p_{H^{\perp}}$ la projection orthogonale sur $H^{\perp}$.
   (a) Déterminer, en utilisant la question 1, une base de $H^{\perp}$.
   (b) Exprimer s_H en fonction de $p_{H^{\perp}}$. Illustrer à l'aide d'un schéma.
   (c) Déduire des questions précédentes $s(\boldsymbol{u})$ où $\boldsymbol{u} = (-1, 2, -3, 1)$.

Exercice 2

$\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$, est l'espace orienté usuel.

On considère la rotation r d'axe orienté par $\boldsymbol{a} = (2, -3, 6)$ et d'angle de mesure $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$.

On note D la droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{a}$ et p la projection orthogonale sur $D^{\perp}$.

1. Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur orthogonal à $\boldsymbol{a}$.
   Exprimer $r(\boldsymbol{u})$ en fonction de $\boldsymbol{u}$ et de $\boldsymbol{a}$.
2. Exprimer, pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\boldsymbol{v})$ en fonction de $\boldsymbol{v}$ et de $\boldsymbol{a}$.
3. (a) Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. Déduire des questions précédentes que $r(\boldsymbol{v})$ s'écrit :

$$r(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v} + \beta (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \gamma \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v},$$

   où α, β et γ sont des réels à déterminer.
   (b) **Application** : calculer $r(\boldsymbol{v})$ pour $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1)$.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.
Question préliminaire : montrer que **si** f est un automorphisme orthogonal tel que $f \circ f = \text{Id}_E$ **alors** f est une symétrie orthogonale.

Partie A

Dans cette partie $n = 2$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.
On considère la rotation r d'angle de mesure θ et la réflexion s par rapport à $\text{Vect}(\boldsymbol{i})$.

1. Ecrire la matrice M de $s \circ r$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Caractériser l'endomorphisme $s \circ r$.
3. (a) En déduire que r s'écrit $r = s \circ f$ où f est une réflexion à préciser.
   (b) Donner une base de chacun des sous-espaces propres de f.

Partie B

Dans cette partie $n = 3$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
On considère la rotation g d'axe orienté par $\boldsymbol{k}$ et d'angle de mesure θ et la réflexion σ par rapport au plan P d'équation $y = 0$.

1. Ecrire la matrice de la réflexion σ dans la base $\mathcal{B}$. Justifier rapidement la réponse.
2. Ecrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice N de $\sigma \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que $\sigma \circ g$ est une symétrie orthogonale.
5. Dans cette question $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   Montrer que g s'écrit $g = \sigma \circ h$ où h est une réflexion par rapport à un plan Π dont on donnera une équation cartésienne.
6. **Retour au cas général -**
   Montrer que g s'écrit $g = \sigma \circ h$ où h est une réflexion par rapport à un plan dont on donnera une base .