**Polytech' Nice Sophia – Antipolis PeiP 2**

**2016/2017** **FEUILLE DE T.D. 5**

**EXERCICES D'ANALYSE – Ouverts, Fermés, Convergence de Suites.**

**Les notations sont celles du cours.**

**Exercice 1.**

1. Montrer que la partie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$ est fermée dans $\mathbb{R}^3$.
2. Qu'en est-il des parties suivantes :
   2.1 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 4\}$ ;
   2.2 $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4\}$ ;
   2.3 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 4\}$.

**Exercice 2.**

Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe

$$C_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$$

est fermé dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.**

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les intérieurs et les adhérences des parties suivantes :

$$I_1 = ]a, b[\ ;\ I_2 = [a, b]\ ;\ I_3 = ]a, b]\ ;$$

$$I_4 = ]-\infty, a]\ ;\ I_5 = \ ]-\infty, a[\ ;$$

$$I_6 = \{a\}\ ;$$

$$I_7 = ]-\infty, +\infty[.$$

**Exercice 4.**

Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

**Exercice 5.**

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $u_n = \left(\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\ln n\right)$ est convergente.