DEVOIR SURVEILLÉ

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Quelques questions indépendantes d'applications directes du cours.

1) **Complexes.** On considère l'équation : $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$ (E).

a) Rappeler sans calcul ce que valent la somme et le produit des racines.

b) Résoudre (E) (on pourra vérifier avec ci-dessus).

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ prouver que les points images des racines forment, avec O, un triangle rectangle isocèle.

2) **Polynômes ; fractions rationnelles**. 2 questions **indépendantes** :

a) Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = X^6 + 1$.

b) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $F(X) = \dfrac{1}{X^3 - 1}$. Déterminer : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 1}$.

Exercice II

Les questions sont indépendantes.

1) Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-nx} dx = 0$ et en déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx = 0$

2) **Des intégrales à calculer :**

a) $F = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$; $G = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; $H = \displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\, dx$ (2 méthodes possibles, vues en cours).

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$.

c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 4t + 8}$ puis $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x}$

Exercice III

Reprise d'un **exercice fondamental vu en cours** : intégrales de Wallis avec une application .

Soit , pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx}$.

1)

a) Calculer directement W_n pour $n \in [\![0, 2]\!]$.

(dans la suite , seule la connaissance de W_0 et W_1 est nécessaire)

2) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \quad W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$ à l'aide d'une intégration par parties.

En déduire, par exemple, W_{10} (on pourra laisser les numérateurs et dénominateurs sous forme de produit).

3) (obtention d'un équivalent de W_n au voisinage de $+\infty$)

a) Prouver que la suite W est décroissante et strictement positive .

b) En partant d'une chaîne d'inégalités reliant W_n , W_{n+1} et W_{n+2} , prouver que : $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$

c) Soit $u_n = (n+1) W_n W_{n+1}$.

Prouver que la suite u est constante, égale à $\dfrac{\pi}{2}$, puis en déduire : $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Une application :

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$; exprimer I_n en fonction de W_n et en déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
