Électromagnétisme
S04 Travail dans un champ électrostatique, potentiel électrostatique

Iannis Aliferis

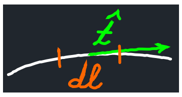
Université Nice Sophia Antipolis

Travail dans un champ électrostatique

Le travail de A vers B (1)

- Une charge (fixe) ponctuelle Q_0 à l'origine
  (le reste n'est que superposition !)
- On déplace une charge « test » q
  dans le champ $\vec{E}$ de Q_0
- Quel est le travail *fourni* de A à B ?
  (« fourni » : par celui qui déplace la charge)
- Travail $=$ force $\times$ déplacement $(\mathrm{J} = \mathrm{N\,m})$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{F} \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l$$

- $\hat{t}$: vecteur unitaire, tangent à $\mathrm{d}\vec{l} = \hat{t}\,\mathrm{d}l$ 

- $\vec{F}(\vec{r}\,) \cdot \hat{t}$: composante tangentielle de $\vec{F}$
-
$$W_{A\to B} = \int_{\Gamma:\,\vec{r}_A \to \vec{r}_B} \mathrm{d}W = \int_{\Gamma:\,\vec{r}_A \to \vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}\,) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l$$
- Quelle force $\vec{F}(\vec{r}\,)$?

3

Le travail de A vers B (2)

- Force *exercée* sur la charge q pendant le déplacement :
  (« exercée » : par celui qui déplace la charge)

$$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{el}} = -(q\vec{E})$$

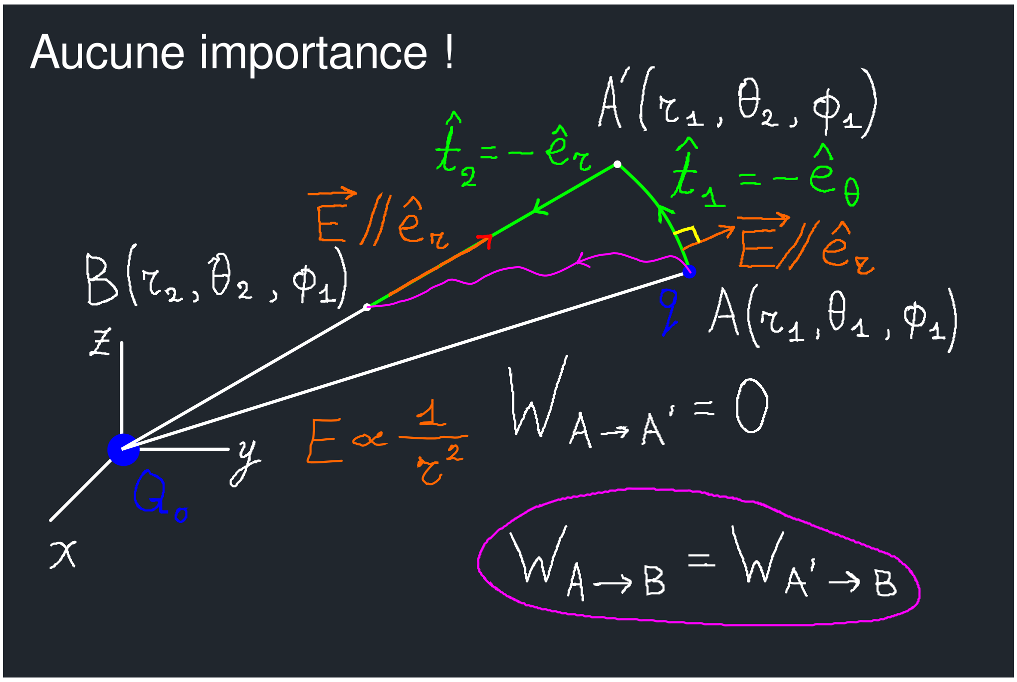
- Travail *fourni* de A à B :

$$\boxed{W_{A\to B} = -q \int_{\Gamma:\,\vec{r}_A \to \vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}\,) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l} \qquad (1)$$

- Superposition : $\vec{E}(\vec{r}\,) = \vec{E}_1(\vec{r}\,) + \vec{E}_2(\vec{r}\,) + \ldots$
  $W_{A\to B} = W_{(1)A\to B} + W_{(2)A\to B} + \ldots$
-
  $\Gamma :\ \vec{r}_A \to \vec{r}_B$ le chemin de A vers B (*lequel ?*)

4

Quel chemin choisir ?



5

La circulation du champ électrostatique 6

Déplacement sur une courbe fermée

- $W_{A \to B}$ ne dépend que de $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$
  parce que $\vec{E} \parallel \hat{e}_r$ et $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$
- Il n'y a que les points de départ et d'arrivée qui interviennent !
- Le chemin Γ de A à B ne compte pas !
- Conséquence :
  le travail le long d'une courbe *fermée*. . . est nul

$$W_{A \to A} = -q \oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t} \, \mathrm{d}l = 0$$

donc :

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t} \, \mathrm{d}l = 0} \qquad (2)$$

- « La [circulation] du champ électrique
  le long d'une *courbe fermée*, est nulle »
- Les forces électrostatiques sont conservatrices
- La différence de potentiel le long d'un chemin fermé est nulle
  (loi des mailles en Électronique)

7

Potentiel électrostatique

Du travail au potentiel

- Le [travail dans un champ électrostatique]

$$W_{A\to B} = -q \int_{\Gamma:\, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l = f(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}})$$

$$\begin{aligned} \boxed{W_{A\to B}} &= W_{A\to P\to B} \text{ (le chemin ne compte pas)} \\ &= W_{A\to P} + W_{P\to B} \\ &\boxed{= -W_{P\to A} + W_{P\to B}} \end{aligned}$$

- Remarque : $W_{P\to P} = W_{P\to A} + W_{A\to P} = 0$
- Travail *fourni* de A à B *par charge* déplacée : $W_{A\to B}/q$
-

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = \frac{W_{P\to B}}{q} - \frac{W_{P\to A}}{q} \tag{3}$$

Potentiel : le travail par charge

- On *choisit* un point de référence P et on *définit le potentiel* à chaque point A de l'espace :

$$\boxed{V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) \triangleq \frac{W_{P\to A}}{q}} \quad \left(\mathrm{V} = \mathrm{J\,C^{-1}}\right) \tag{4}$$

- Le potentiel $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ est un champ scalaire
- Le potentiel du point de référence :

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}}) = \frac{W_{P\to P}}{q} = 0$$

- Le travail fourni de A à B :

$$W_{A\to B} \overset{(3),(4)}{=} q[V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}})] \tag{5}$$

- La *différence de potentiel* entre A et B :

$$V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}) - V(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}}) = -\int_{\Gamma:\, \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{B}}} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l \tag{6}$$

Travail : charge × ddp

- $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$: différence de potentiel (ddp)

$$\boxed{W_{A\to B} = q[V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)] = \text{charge} \times \text{ddp}} \tag{7}$$

- Si $W_{A\to B} > 0$ on fournit de l'énergie à la charge déplacée
  - $q > 0$ et $V(\vec{r}_B) > V(\vec{r}_A)$
  - $q < 0$ et $V(\vec{r}_B) < V(\vec{r}_A)$
- Si $W_{A\to B} < 0$ on récupère de l'énergie (déplacement « *spontané* » $A \to B$)
  - $q > 0$ et $V(\vec{r}_B) < V(\vec{r}_A)$
  - $q < 0$ et $V(\vec{r}_B) > V(\vec{r}_A)$
- Si $W_{A\to B} = 0$
  - $V(\vec{r}_B) = V(\vec{r}_A)$
  - Arrivée/départ sur une *équipotentielle*

11

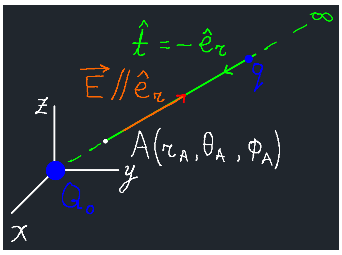
Calcul du potentiel électrostatique

12

Potentiel créé par une charge ponctuelle

- Charge Q_0 à l'origine
- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{e}_r$
- [potentiel électrostatique] = travail / charge
- Référence P à l'infini

$$\begin{aligned}\boxed{V(\vec{r}_A)} &= \frac{W_{\infty\to A}}{q} \\ &= \frac{1}{q}(-q)\int_{\Gamma:\,\vec{r}_\infty\to\vec{r}_A} \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{\Gamma:\,\vec{r}_\infty\to\vec{r}_A}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\cdot(-\hat{e}_r\,\mathrm{d}r) \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \quad \textit{attention aux bornes !} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{\infty} \boxed{= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r_A}} \quad Q_0 > 0 \text{ crée } V(\vec{r}) > 0\end{aligned} \tag{8}$$



13

Potentiel et superposition

- Potentiel créé par une charge ponctuelle située à $\vec{r}_0$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$$

- Potentiel créé par un ensemble de charges situées à $\vec{r}_i$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

- Potentiel créé par une distribution surfacique de charges :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\mathrm{d}q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\, \mathrm{d}S'$$

- Potentiel créé par une distribution volumique de charges :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\mathrm{d}q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\, \mathrm{d}\mathcal{V}'$$

14