Polytech' Nice Sophia – Antipolis PeiP 2

2016/2017 **FEUILLE DE T.D. 8**

EXERCICES D'ANALYSE – Fonctions définies par une intégrale.

Les notations sont celles du cours.

Exercice 1.

Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée F'.
2. Calculer $\mathrm{F}(0)$ et $\lim_{x\to\infty} \mathrm{F}(x)$.

Exercice 2.

Soit $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et que F est solution de l'équation différentielle :

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 3.

On considère l'intégrale convergente

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}}\,dt$$

et la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{xt}}\sin \mathrm{t}}{\mathrm{t}}\,dt$$

1. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
2. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée F'.
3. En admettant la continuité de F en 0, déterminer la valeur de I.