1 Généralités sur les applications.

Définition 1.1. Soient E, F deux ensembles.
Une application f de E dans F associe à **tout** élément x de E **un** unique élément y de F.

Vocabulaire et notation.
- E désigne l'ensemble de départ de f ; F désigne l'ensemble d'arrivée de f ;
- y est l'image de x **par** f ; on la note $f(x)$;
- x est **un** antécédent de y **par** f ;
- On appelle **graphe de** f, l'ensemble,noté $\mathcal{G}(f)$, défini ainsi : $\mathcal{G}(f) = \{(x,y) \in E \times F / \ y = f(x)\}$;
- $f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et $\mathcal{G}(f)$ sont deux notations usuelles de f.

Axiome. Soient E, F deux ensembles.
Les applications définies de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{A}(E,F)$.

Remarque 1.1.
Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{A}(\emptyset, F) = \{\nu\}$ où ν est l'application dont le graphe est l'ensemble vide.
Si $E \neq \emptyset$ alors : si $F = \emptyset$ alors $\mathcal{A}(E, \emptyset) = \emptyset$;
si F est un singleton alors $\mathcal{A}(E,F)$ est un singleton.

Exercice 1.1. Déterminer $\mathcal{A}(E,F)$ lorsque E est un singleton.

Exemple 1.1. Applications particulières : vocabulaire et notations à connaître.

Application **identité** : $Id_E \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$. Déterminer son graphe.

Application **constante** : soit $a \in F$ $\tilde{a} \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & a \end{array} \right.$. Déterminer son graphe.

Restriction : soit $f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$. Si $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $f_{|A} \left| \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est la restriction de f à A.

Projection sur E_i : soient $E_1, E_2, \cdots, E_i, \cdots, E_n$, des ensembles non vides et $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_i \times \cdots \times E_n$.
L'application *projection sur* E_i donne la i^e composante de chaque $n-$uplet : $p_i \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E_i \\ (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$.

Module : $|.| \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & |z| = \sqrt{z\bar{z}} \end{array} \right.$. Déterminer son graphe.

Indicatrice : soit E un ensemble non vide; soit A, une partie de E : $\Gamma_A \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$.
Déterminer son graphe.

Homothétie de rapport λ : soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $h_\lambda \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \end{array} \right.$

Changement de coordonnées : $c \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \ \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,a) & \mapsto & (r\cos(a), r\sin(a)) \end{array} \right.$

Paramétrage : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et l'application $\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \\ \lambda & \mapsto & \left((\lambda \cdot f) \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right. \right) \end{array} \right.$

Nombre intégral : soient $a,\, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et l'application $I \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,\, b]\,, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)dt \end{array} \right.$

2 Propriétés d'une application.

Définition 2.1. Egalité de deux applications : soient E, F deux ensembles. Soient $f,\ g \in \mathcal{A}(E,F)$.
f et g sont égales si et seulement si, pour tout élément de E, elles associent le même élément de F.

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(E,F) \ \ (f = g) \Leftrightarrow (\forall x \in E \ \ f(x) = g(x)).$$

Exemple 2.1. Considérons $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{3}} \end{array} \right.$. On a « seulement » : $f_{|\mathbb{R}_+^*} = g$.

Définition 2.2. Soit $f : E \to F$.
(1) Les éléments de F qui ont au moins un antécédent par f forment un ensemble appelé «**image de** f», noté :

$$Im(f) = \{y \in F \;/\; \exists x \in E \; y = f(x)\} \text{ ou encore } Im(f) = \{f(x),\ x \in E\}\,.$$

(2) Soit A, une partie de E.
Les images par f des éléments appartenant à A forment un ensemble appelé « **image directe de** A **par** f » et noté :

$$f(A) = \{f(x) \quad x \in A\}\,.$$

(3) Soit B, une partie de F.
Les éléments de E dont l'image par f appartient à B forment un ensemble appelé «**image réciproque de** B **par** f» et noté :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in B\} \text{ ou encore } f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} \{x \in E \;/\; f(x) = y\}\,.$$

Théorème 2.1. Soit $f : E \to F$.
(1) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset f^{-1}(f(A))$
(2) $\forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(B)) \subset B$

Définition 2.3. Soit $f : E \to F$.
f est **surjective** si et seulement si **tout** élément de F a **au moins** un antécédent par f.
f est **injective** si et seulement si **tout** élément de F a **au plus** un antécédent par f.
f est **bijective** si et seulement si **tout** élément de F a **un et un seul** antécédent par f.

Remarque 2.1. ♡ Autres formulations de la surjectivité et de l'injectivité.
f est surjective $\Leftrightarrow (Im(f) = F)$
(1) f est injective $\Leftrightarrow [\forall y \in F \quad (f^{-1}(\{y\}) = \emptyset)$ ou $(\exists x \in E \;/\; f^{-1}(\{y\}) = \{x\})]$.
(2) f est non injective $\Leftrightarrow [\exists y \in F \quad \exists x \in E \quad \exists x' \in E \;/\; (x \neq x')$ et $(f(x) = f(x'))]$.
(3) f est injective $\Leftrightarrow [\forall x, x' \in E \quad (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')]$.
(4) f est injective $\Leftrightarrow [\forall x, x' \in E \quad (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))]$.
f est bijective $\Leftrightarrow [\forall y \in F \quad \exists! x \in E \;/\; y = f(x)]$.

Exercice 2.1. On considère l'application $\phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 2n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \\ -n & \text{si} \quad n \notin \mathbb{N} \end{cases} \end{array} \right.$

1. Déterminer $\phi(A)$ où $A = \{n \in \mathbb{Z} / -5 \leq n \leq 5\}$.
2. Déterminer $\phi^{-1}(A)$ où $A = \{n \in \mathbb{Z} / -5 \leq n \leq 5\}$.
3. ϕ est-elle injective ?
4. ϕ est-elle surjective ?

Définition 2.4. Soit E un ensemble non vide et A une partie non propre de E.
E est dit *fini* si et seulement si il existe un entier naturel n, non nul, tel qu'il existe une bijection définie de E dans $[\![1,n]\!]$.
L'entier n est alors appelé *cardinal de E*. On note : $\mathrm{card}(E)=n$.
E est dit *infini* si et seulement il existe une application injective définie de E dans A.
E est dit *infini dénombrable* si et seulement il existe une application bijective définie de E dans une partie de $\mathbb{N}$.

Théorème 2.2. Les ensembles suivants sont dénombrables :
(1) les ensembles finis ;
(2) $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs ($\mathbb{Z}=\{n,\ -n, n\in\mathbb{N}\}$) ;
(3) $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels ($\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b},\ (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$).

Preuve directe du (2).

Théorème 2.3. Soit $f:E\to F$.
(1) f **est surjective si et seulement si** $\left[\forall B\in\mathcal{P}(F)\quad B=f(f^{-1}(B))\right]$.
(2) f **est injective si et seulement si** $\left[\forall A\in\mathcal{P}(E)\quad A=f^{-1}(f(A))\right]$.

Définition 2.5. Soit $f:E\to F$ **bijective.**
On appelle «**application réciproque de** f »l'application notée f^{-1} définie de F dans E telle que :

$$\forall x\in E\quad \forall y\in F\quad (y=f(x))\Leftrightarrow(f^{-1}(y)=x).$$

Exercice 2.2. Dans un triangle ABC,on note respectivement $a=BC$, $b=AC$ et $c=AC$. On admet :

$$\cos(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc},\ \cos(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\ \cos(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Un triangle a pour longueur de côtés 4, 13 et 16 cm. Quelle est la mesure de l'angle le plus grand ?

Théorème 2.4. Soit $f:E\to F$ bijective.
(1) L'application réciproque de f est unique.
(2) L'application réciproque de f est bijective.
(3) $\forall x\in E\ \forall y\in F\ \ (f(f^{-1}(y))=y=Id_F(y))$ et $(f^{-1}(f(x))=x=Id_E(x))$.

Remarque 2.2. ⚠Notation. Soit $f:E\to F$.
Pour tout y de F, $f^{-1}(\{y\})$ est défini : c'est un élément de $\mathcal{P}(E)$.
$f^{-1}(y)$ désigne un élément de E qui n'est défini que si f est bijective,f^{-1} désignant l'application réciproque de f.

3 Relations et opérations sur les applications.

Définition 3.1. ♡ Soient E,F,G, trois ensembles.
L'application qui calcule les images en appliquant deux applications l'une après l'autre est appelée «**composition**»et est notée $\circ$:

$$\circ\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{A}(E,F)\times\mathcal{A}(F,G) & \to & \mathcal{A}(E,G)\\ (f,g) & \mapsto & \left((g\circ f)\left|\begin{array}{ccc}E&\to&G\\ x&\mapsto&g(f(x))\end{array}\right.\right)\end{array}\right..$$

Théorème 3.1.
(1)La composition est associative : $\forall f\in\mathcal{A}(E,F),\ \forall g\in\mathcal{A}(F,G),\forall h\in\mathcal{A}(G,H),\ \ h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.
(2)La composition n'est pas commutative.
(4)L'application identité est neutre pour la composition : $\forall f\in\mathcal{A}(E,F),\ (Id_F\circ f)=f$ et $(f\circ Id_E)=f$.
(3)La composée de deux bijections est une bijection.
(4)L'application réciproque de la composée de deux bijections est la composée des applications réciproques :

$$\forall f\in\mathcal{A}(E,F)\ /\exists!f^{-1}\in\mathcal{A}(F,E),\ \forall g\in\mathcal{A}(F,G)\ /\exists!g^{-1}\in\mathcal{A}(G,F)\quad (g\circ f)^{-1}=(f^{-1}\circ g^{-1}).$$

4 Cas de $\mathcal{A}(E,\mathbb{R})$.

Définition 4.1. Opérations sur les applications de $\mathcal{A}(E,\mathbb{R})$.
Multiplication d'une application par un réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \forall f \in \mathcal{A}(E,\mathbb{R})\ \ (\lambda \cdot f) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right. .$$

Addition de deux applications :

$$\forall f,g \in \mathcal{A}(E,\mathbb{R}) \qquad (f \oplus g) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right. .$$

Multiplication de deux applications :

$$\forall f,g \in \mathcal{A}(E,\mathbb{R}) \qquad (f \otimes g) \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\times g(x) \end{array} \right. .$$

5 Exercices à préparer.

1. **Exercice : notion de graphe d'application.**
   On considère les ensembles suivants : $E = \{1, 2, 3\}$; $F = \{a, b\}$; $\mathcal{A}(E, F)$.
   (a) Soit $\tilde{a}$ l'application constante qui à tout élément de E associe a.
   Décrire le graphe de $\tilde{a}$ en extension, par produit cartésien, en compréhension.
   (b) Soit f un élément de $\mathcal{A}(E, F) \setminus \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$.
   Déterminer les graphes possibles de f.
   (c) Soit f un élément de $\mathcal{A}(E, F)$.
   Dans quel ensemble le graphe de f est-il inclus ?
   Déduire de quel ensemble le graphe de f est un élément.
   (d) Déterminer le cardinal de $\mathcal{A}(E, F)$.

2. **Exercice : application numérique de référence.**
   Soit $f \left| \begin{array}{ccc} [-1,\ 3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$.
   (a) Vérifier : $[-1,\ 0] \subset f^{-1}(f([-1,\ 0]))$.
   (b) Vérifier : $f(f^{-1}([-3,\ 3])) \subset [-3\ ,3]$.

3. **Exercice : applications-lineaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$**
   On considère les applications suivantes :
   $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (x+y,\ 2x+3y) \end{array} \right. \quad \text{et } g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (2x-3y,\ -4x+6y) \end{array} \right. .$$
   Pour chacune des applications f et g, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,\ 0)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des images et interpréter cet ensemble géométriquement.
   (c) L'application est-elle bijective ?

4. **Exercice : étude d'une fonction.**
   Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$.
   (a) Préliminaire.
   i. Vérifier que f est impaire sur son domaine de définition.
   ii. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. En discutant par disjonction de cas, en fonction de $|y-1|$, déterminer $f^{-1}(\{y\})$.
   iii. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(\dfrac{1}{x}) = f(x)$.
   (b) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.
   (c) Montrer que l'ensemble image de f est l'intervalle $[-1\ ,1]$.
   (d) Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[-1\ ,1]$.
   (e) Déduire que la restriction de f à l'intervalle $[-1\ ,1]$ est bijective dans $[-1\ ,1]$.

5. **Exercice : composition d'applications numériques.**
   Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2\pi \end{array} \right.$.
   Montrer que $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ sont égales si et seulement si $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$ est 2π−périodique.

6. **Exercice : application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$**

On considère les applications suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \mapsto & x - y^2 \end{array} \right. \quad \text{et } h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,\, y) & \mapsto & (x + y^2,\, y) \end{array} \right.$$

(a) L'application f est-elle bijective ?

(b) L'application h est-elle bijective ?

(c) Déterminer [redacted] l'application composée $f \circ h$.

(d) Déduire l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi \circ h = Id_{\mathbb{R}^2}$.
Quelle est la relation entre les applications ϕ et h ?

7. **Exercice : composition de transformations du plan.**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les applications : $f \left| \begin{array}{l} P \to P \\ M(x,y) \mapsto M'(-y,x) \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} P \to P \\ M(x,y) \mapsto M'(-x,y) \end{array} \right.$

(a) Interpréter géométriquement les applications f et g.

(b) Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

(c) Pour toute application h, définie d'un ensemble E dans lui-même,on appelle "*ensemble des points fixes de* h", la partie de E dont les éléments sont égaux à leur propre image par h.
Ecrire en compréhenssion l'ensemble des points fixes de chacune des applications : $f \circ g$ et $g \circ f$.
Pouvait-on prévoir ces résultats ?

8. **Exercice : étude d'une équivalence.**

Montrer l'équivalence : $\forall f \in \mathcal{A}(E,E)\ \ (f \text{ surjective}) \Leftrightarrow [\forall g, h \in \mathcal{A}(E,E)\ \ (g \circ f = h \circ f) \Rightarrow (g = h)]$.

9. **Exercice : ensemble infini.**

Soit E, un ensemble non vide.
Si un ensemble E est fini alors quelque soit une partie A, non propre de E, toute application définie de E dans A est non injective.

(a) Construire un exemple le plus simple possible illustrant ce théorème.

(b) Montrer ce théorème par un raisonnement par l'absurde.
Indication : pour tout A de $\mathscr{P}(E)$, A et son complémentaire forment une partition de E.

(c) Enoncer en mots la contraposée de ce théorème.

(d) Appliquer ce théorème pour montrer que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.
On note A l'ensemble des entiers pairs de $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to A$ l'application telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = 2n$.

i. Justifier que A est une partie non propre.

ii. Montrer que f est bijective.

iii. Déduire que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.