$$= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3R_0^2 - r^2}{2R_0^3}\right).$$

Question 5 :

Calcul de U_e : Deux méthodes.

1. Avec la formule (4) : $U_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV$ (*)

(*) Ici V est le volume de la sphère seulement, car $\rho = 0$ à l'extérieur de la sphère.

$$U_e = \frac{1}{2}\rho \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_0 \frac{(3R_0^2 - r^2)}{2R_0^3} dV$$

$$= \frac{\rho Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R_0^3}\left(3R_0^2 \int_V dV - \int_V r^2 dV\right)$$

$$= \frac{\rho Q_0}{16\pi\varepsilon_0 R_0^3}\left(3R_0^2 V - \underbrace{\int_V r^2 dV}_{I}\right)$$

Calculons I.

$$I = \int_V r^2 dV \qquad \text{or } dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Donc
$$I = \int_V r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{R_0} r^4 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{R_0} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{R_0^5}{5} \times 2 \times 2\pi$$

$$= \frac{4\pi R_0^5}{5}$$

$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$

Ainsi
$$3R_0^2 \times V - I = 4\pi R_0^5 - \frac{4\pi R_0^5}{5}$$
$$= \frac{16}{5} R_0^5 \pi$$