

Électromagnétisme

S10 Diélectriques I

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

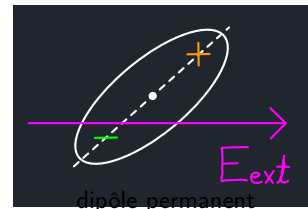
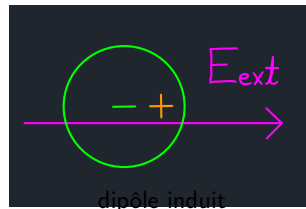
Diélectriques	2
Diélectriques (isolants)	3
Moment dipolaire électrique	4
Un vecteur pour décrire les dipôles.	5
. . . ou les distributions de charges.	6
Les moments dipolaires s'additionnent	7
Dipôle électrique : potentiel et champ	8
Potentiel d'un dipôle électrique	9
Potentiel d'un dipôle élémentaire	10
Champ électrique d'un dipôle	11
Champ d'un dipôle élémentaire	12
Champ d'un dipôle	13
Le vecteur de polarisation	14
Polarisation de la matière	15
Charges de polarisation surfaciques	16
Des charges à la surface d'un diélectrique	17
Charges de polarisation volumiques	18
Des charges à l'intérieur d'un diélectrique	19

Diélectriques

2

Diélectriques (isolants)

- ▼ Les charges ne sont pas libres à se déplacer partout
- ▼ Tous les électrons sont liés aux atomes/molécules
- ▼ \neq conducteurs
- ▼ Intrinsèquement neutres



- ▼ Quel est l'effet d'un champ \vec{E} extérieur ?
 1. Création de **dipôles induits** ($-q/+q$ espacées de d) : **polarisation**
 2. Effet proportionnel à la cause : $d \propto E_{\text{ext}}$
 3. **Alignement** des dipôles permanents/induits \parallel à \vec{E}
- ▼ Décrire les dipôles : **[moment dipolaire électrique]**
- ▼ Quel champ électrique ?
- ▼ Quelles charges ?

3

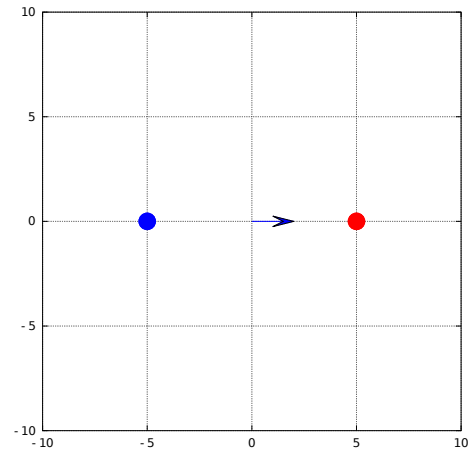


Moment dipolaire électrique

4

Un vecteur pour décrire les dipôles...

▼ « Dipôle » : $N = 2$ charges $-q/+q$ séparées de d



▼ Moment dipolaire électrique :

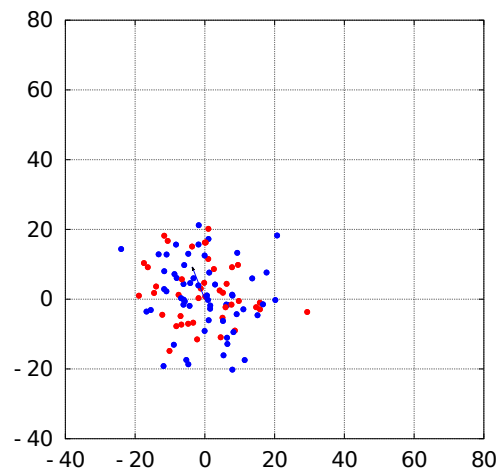
$$\vec{p} \triangleq qd\hat{u}_{-\rightarrow+} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad (1)$$

5



... ou les distributions de charges

▼ En général : N charges q_i à \vec{r}_i



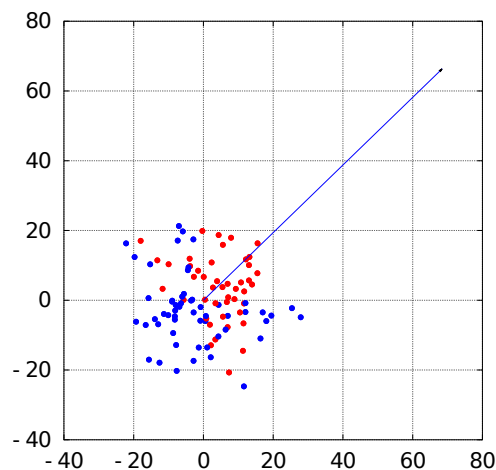
$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \stackrel{q_i = \pm q}{=} q \sum_{i: q_i = q} \vec{r}_i - q \sum_{i: q_i = -q} \vec{r}_i \stackrel{\sum_i q_i = 0}{=} q \frac{N}{2} (\vec{r}_{c+} - \vec{r}_{c-}) \\ &= \frac{N}{2} q D \hat{u}_{c- \rightarrow c+} = N_{\text{dip}} q D \hat{u}_{c- \rightarrow c+}\end{aligned}$$

▼ Un « grand » dipôle : $\pm N_{\text{dip}} q$ aux barycentres des charges $+/-$

6

Les moments dipolaires s'additionnent

▼ En général : N charges q_i à \vec{r}_i



▼ Regrouper les charges par dipôles :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \stackrel{q_i = \pm q}{=} \sum_{j=1}^{N_{\text{dip}}} q (\vec{r}_{j+} - \vec{r}_{j-}) = \sum_{j=1}^{N_{\text{dip}}} \vec{p}_j$$

7



Dipôle électrique : potentiel et champ

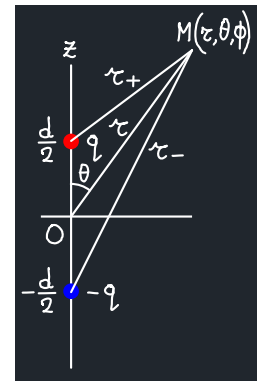
8

Potentiel d'un dipôle électrique

- ▼ Charge $-q$ à $z = -d/2$ et $+q$ à $z = +d/2$
- ▼ Moment dipolaire électrique : $\vec{p} = qd\hat{e}_z$
- ▼ Le potentiel $V(\vec{r})$ à $r \gg d$
- ▼ $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$
- ▼ $r_{\pm} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp 2r\frac{d}{2}\cos\theta}$
 $= r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2} \stackrel{d \ll r}{\approx} r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\theta}$
- ▼ $\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta \right)^{-1/2}$
- ▼ $f(x) = (1 - x)^{-1/2} \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{2}x$
- ▼ $\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta \right)$
- ▼ $\frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r}\cos(\pi - \theta) \right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta \right)$

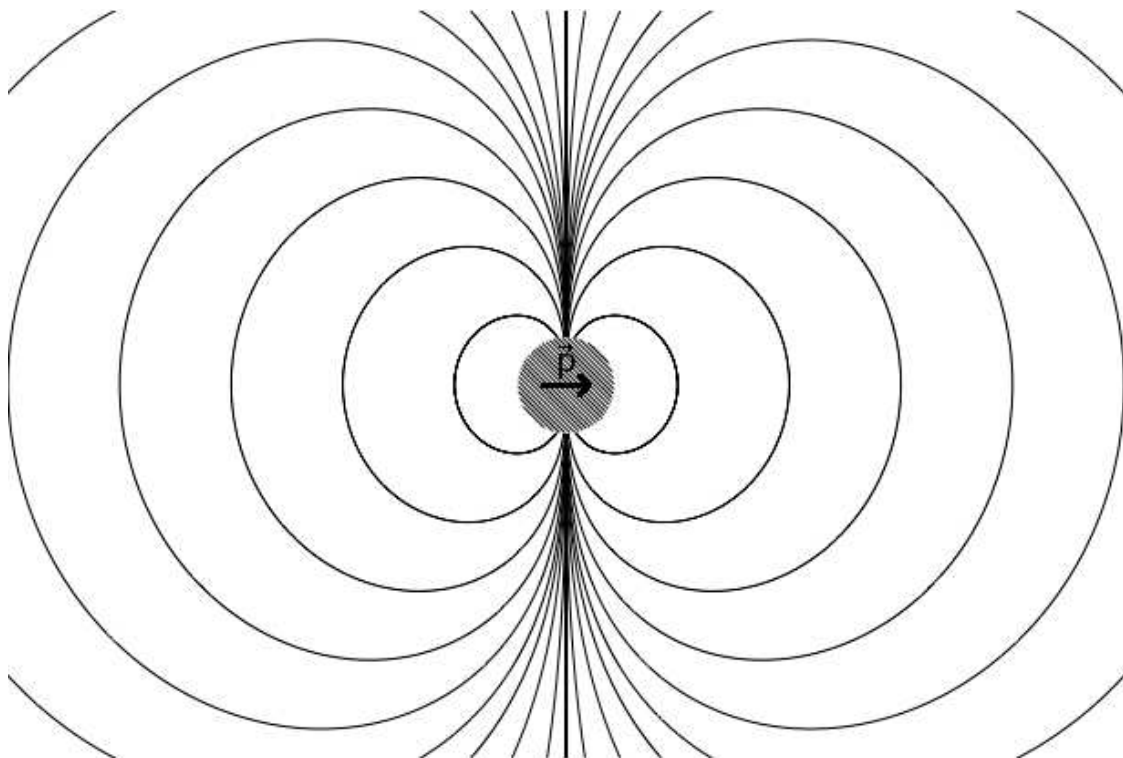
$$V(r, \theta) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{d}{r^2} \underbrace{\cos\theta}_{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}_r}{r^2} \quad (2)$$

- ▼ Exact si $d \rightarrow 0$ et qd constant : *dipôle élémentaire*



9

Potentiel d'un dipôle élémentaire



Surfaces équipotentielles (dipôle élémentaire *horizontal*)

Auteur : François Le Maître / CC-BY-SA

10



Champ électrique d'un dipôle

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}, \quad r \gg d$$

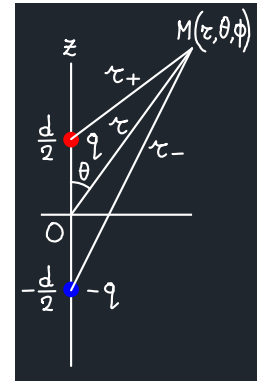
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}} V(\vec{r})$$

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

donc :

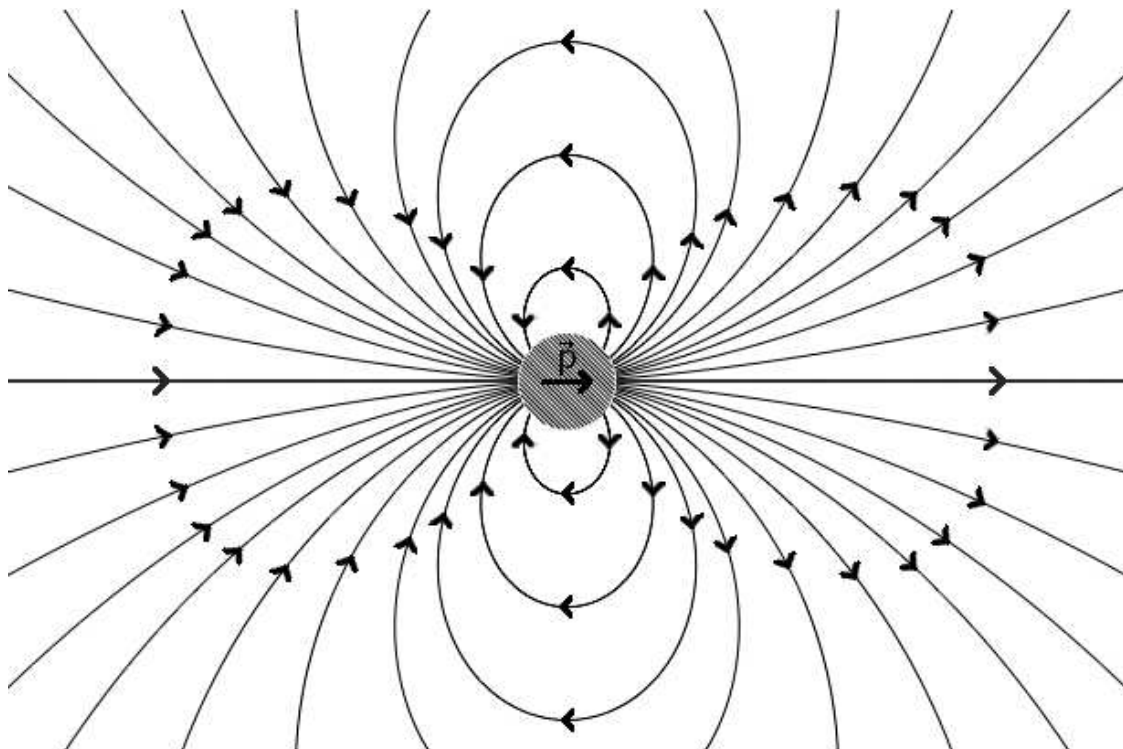
$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \frac{qd \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r + \frac{qd \sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

▼ Exact si $d \rightarrow 0$ et qd constant : *dipôle élémentaire*



11

Champ d'un dipôle élémentaire



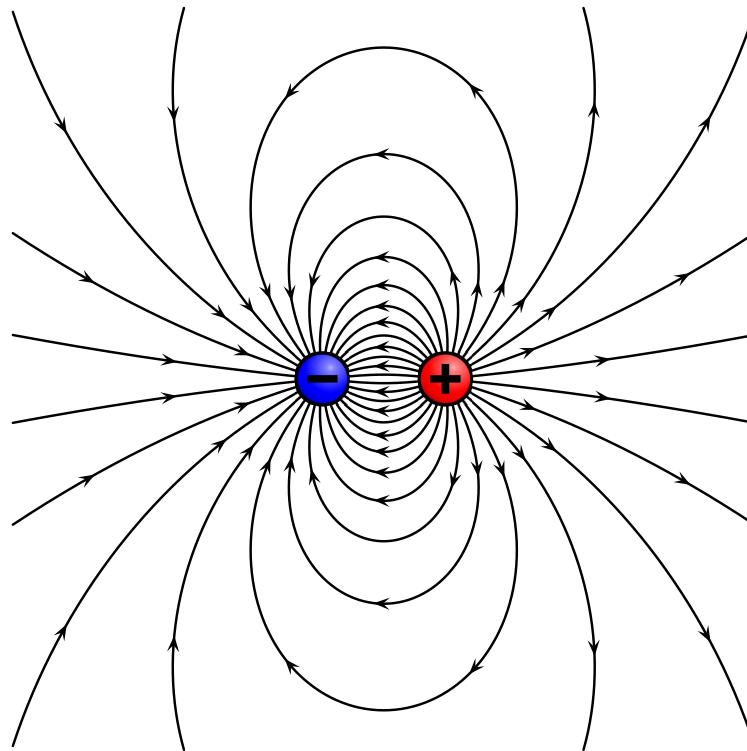
Lignes de champ électrique (dipôle élémentaire *horizontal*)

Auteur : François Le Maître / CC-BY-SA

12



Champ d'un dipôle



Lignes de champ électrique (dipôle élémentaire *horizontal*)

Auteur : [Geek3](#) / CC-BY-SA 3.0

13

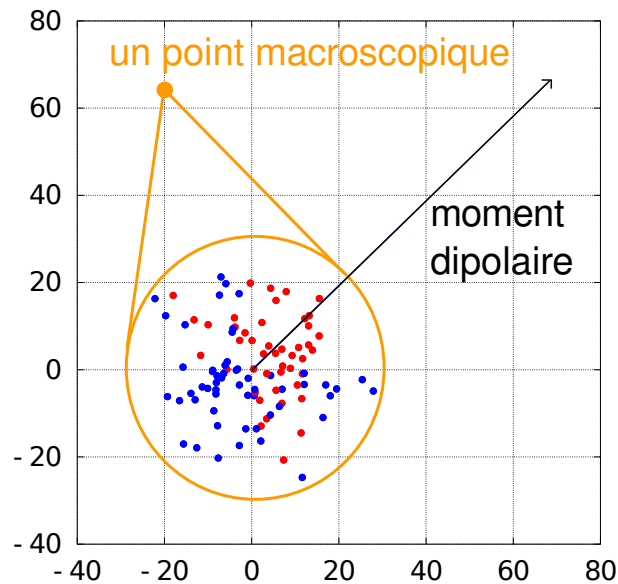


Le vecteur de polarisation

14

Polarisation de la matière

- ▼ « Polarisation » : se réfère aux dipôles (induits ou permanents)
- ▼ Vue **microscopique** : $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ [moment dipolaire électrique]



- ▼ Vue **macroscopique** : $\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0$ contient $N_{\text{dip}} \approx 10^3$ dipôles !
- ▼ Vecteur de polarisation \vec{P} :

$$\vec{P}(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \vec{p} \quad (\text{C m m}^{-3} = \text{C m}^{-2}) \quad (4)$$

densité volumique du moment dipolaire électrique

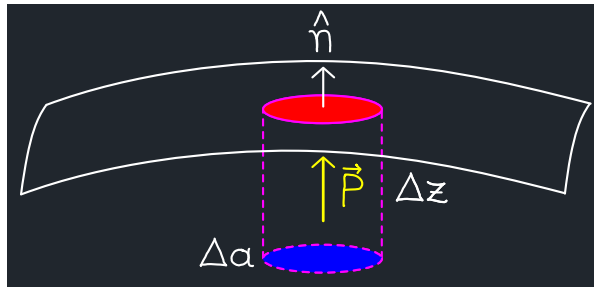
15



Charges de polarisation surfaciques

16

Des charges à la surface d'un diélectrique



- ▼ Moment dipolaire d'un petit volume, où $\vec{P}(\vec{r}) = P\hat{e}_z$ constant :

$$\vec{p} = \int_{\Delta V} \vec{P}(\vec{r}) dV = \vec{P}\Delta V = \vec{P}\Delta a\Delta z = (P\Delta a)\Delta z\hat{e}_z = qd\vec{u}_{- \rightarrow +}$$

- ▼ Charges $\pm P\Delta a$ espacées de Δz ; charges par surface $\pm P$
 ▼ En général $\vec{P} = P_n\hat{n} + P_t\hat{t} = (\vec{P} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{P} \cdot \hat{t})\hat{t}$

$$\rho_{s \text{ pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (\text{C m}^{-2}) \quad (5)$$

- ▼ Charges de *polarisation*, liées à la matière (\neq libres)
 ▼ [charges polarisation volumiques]

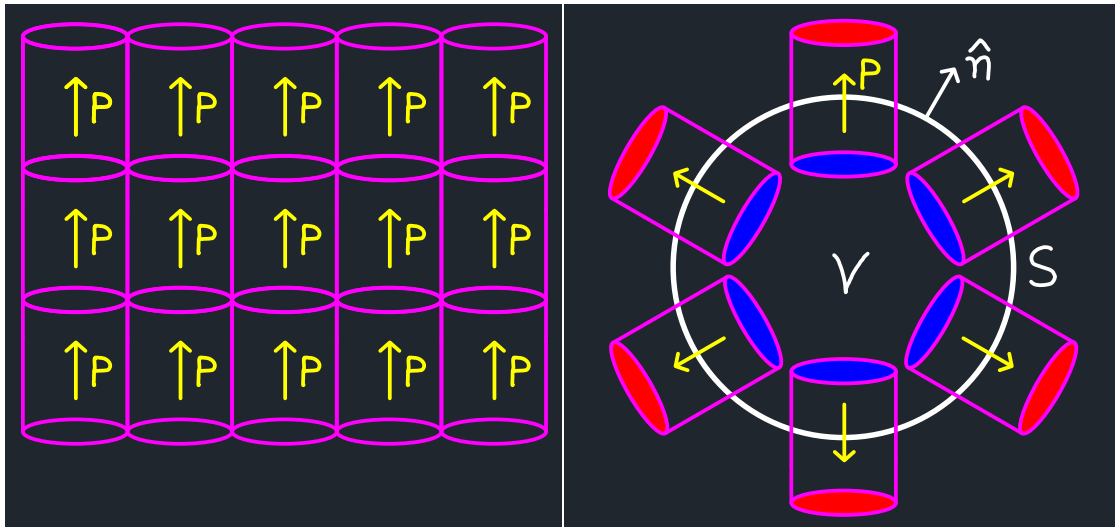
17



Charges de polarisation volumiques

18

Des charges à l'intérieur d'un diélectrique



- ▼ Polarisation homogène : pas de charges à l'intérieur du diélectrique
- ▼ Polarisation inhomogène : apparition de charges liées à la matière

$$Q_{\text{int}} = -Q_{\text{ext}} = - \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, dS \quad [\text{charges polarisation surfaciques}]$$

$$Q_{\text{int}} = \int_V \rho_{\text{pol}} \, dV = - \int_V \text{div} \vec{P} \, dV \quad [\text{théorème divergence}]$$

$$\rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P} \quad (\text{C m}^{-3}) \quad (6)$$

- ▼ Charges de *polarisation*, liées à la matière (\neq libres)

19

