## 1.2 Principes de dénombrement.

**Théorème 1.2.1.** Soient $E, F$ deux ensembles finis.

- ⋆ Principe additif: $E \cup F = \{x/\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$

$$\boxed{E \cap F = \emptyset \Rightarrow \text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)}$$

- ⋆ Principe multiplicatif: $E \times F = \{(x, y)/\ x \in E \text{ et } y \in F\}$

$$\boxed{\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)}$$

*Preuve.* Soient $E, F$ deux ensembles finis.
$E$ fini donc il existe un entier $n(n > 0)$ et $u_E : [\![1, n]\!] \to E$ bijective.
$F$ fini donc il existe un entier $p(p > 0)$ et $u_F : [\![1, p]\!] \to F$ bijective.

Plan de la preuve.

- ⋆ Montrons que $E \cup F$ est fini *i.e.*
  il existe un entier $q(q > 0)$ et $u : [\![1, q]\!] \to E \cup F$ bijective.
  Construisons $u$.
- ⋆ Montrons que $E \times F$ est fini *i.e.*
  il existe un entier $r(r > 0)$ et $v : [\![1, r]\!] \to E \times F$ bijective.
  Construisons $v$.

Preuve du principe additif par construction de $u$. Posons $q = n + p$.

$$\boxed{u \left| \begin{array}{ccc} [\![1, q]\!] \to & \to & E \cup F \\ k & \mapsto & \begin{cases} u_E(k) \text{ si } 1 \leq k \leq n \\ \\ u_F(k-n) \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.}$$

$u_{|[\![1,n]\!]} = u_E$ et $u_{|[\![n+1,q]\!]} = u_F$. Donc $u$ **bijective**.
Donc: $\text{card}(E \cup F) = q = n + p = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

Preuve du principe multiplicatif par construction de $v$. On suppose $(n \leq p)$ quitte à permuter $n$ et $p$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\boxed{(q_k, r_k)}$ l'unique couple $(quotient, reste)$ de la division euclidienne de $k$ par $p$.

$$\boxed{v \left| \begin{array}{ccc} [\![1, np]\!] & \to & E \times F \\ k & \mapsto & \begin{cases} (u_E(q_k), u_F(r_k + 1)) & \text{si } p|k \\ \\ (u_E(q_k + 1), u_F(r_k)) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.}$$

$v$ **est bijective** comme composée de trois applications bijectives (cf ci-après).
$v$ prouve qu'on peut indicer les éléments du produit cartésien de deux ensembles finis.
Donc: $\text{card}(E \times F) = np = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

**Exemple 1.2.1.** $E = \{a, b, c\}$ $\quad u_E \left| \begin{array}{l} [\![1, 3]\!] \to E \\ 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto b \\ 3 \mapsto c \end{array} \right.$ $\quad F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ $\quad u_F \left| \begin{array}{l} [\![1, 4]\!] \to E \\ 1 \mapsto \alpha \\ 2 \mapsto \beta \\ 3 \mapsto \gamma \\ 4 \mapsto \delta \end{array} \right.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |

$[\![1, 12]\!]$

$\sim$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (0,1) | (0,2) | (0,3) | (1,0) |
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,0) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (3,0) |

Table de congruence modulo 4

$\sim$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) |

Table de congruence translatée

$\sim$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a,$\alpha$) | (a,$\beta$) | (a,$\gamma$) | (a,$\delta$) |
| (b,$\alpha$) | (b,$\beta$) | (b,$\gamma$) | (b,$\delta$) |
| (c,$\alpha$) | (c,$\beta$) | (c,$\gamma$) | (c,$\delta$) |

$E \times F$

Ex: $\left[ 7 \underbrace{\mapsto}_{congruence[4]} (1, 3) \underbrace{\mapsto}_{Translation} (2, 3) \underbrace{\mapsto}_{u_E \times u_F} (b, \gamma) \right]$ $\quad \left[ 8 \underbrace{\mapsto}_{congruence[4]} (2, 0) \underbrace{\mapsto}_{Translation} (2, 4) \underbrace{\mapsto}_{u_E \times u_F} (b, \delta) \right]$

Généralisons. Soit $v$ bijective: $v \left| \begin{array}{ccc} [\![1, np]\!] & \to & E \times F \\ k & \mapsto & \begin{cases} (u_E(q_k), u_F(r_k + 1)) & \text{si } p|k \\ \\ (u_E(q_k + 1), u_F(r_k)) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ □