Électromagnétisme

TD 2
Loi de Gauss

Introduction : Selon la loi de Gauss, le flux du champ électrique à travers une surface *fermée* est proportionnel à la charge totale incluse à *l'intérieur* de cette surface :

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

où la constante ϵ_0 (permittivité du vide) est égale à $8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\mathrm{F\,m^{-1}}$ (rappel sur les dimensions : $\mathrm{F} = \mathrm{C\,V^{-1}}$). Le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$ est perpendiculaire à chaque point de la surface S et sa direction est vers *l'extérieur* de celle-ci. La surface S peut être aussi bien réelle que fictive !

Cette loi peut être utilisée de trois façons différentes :

a. Calculer le flux du champ électrique à travers une surface fermée, à partir de la charge incluse par la surface. C'est l'utilisation la plus simple : diviser Q par ϵ_0.
b. Calculer la charge à l'intérieur d'une surface fermée, à partir du champ électrique sur cette surface. Pour cela il faut calculer le flux du champ, c'est-à-dire l'intégrale de surface. La difficulté de cette opération peut varier selon les cas, mais elle reste toujours un calcul purement mathématique.
c. Calculer le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ généré par une charge donnée. Ceci est possible uniquement dans le cas de géométries relativement simples. L'objectif est d'arriver à « sortir » le champ électrique de l'intégrale, donc de trouver une surface S sur laquelle le produit $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ reste constant. Il faut donc exploiter les symétries du problème afin de trouver, par un raisonnement *physique* et non pas mathématique, quelle est la direction du champ électrique et sur quelles surfaces son module reste constant. À partir de là, il faut choisir le système de coordonnées qui décrit naturellement ces surfaces et trouver une surface fermée S sur laquelle le produit $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ est constant (il peut être nul sur quelques parties de cette surface !).

Notions : systèmes de coordonnées ; produit scalaire ; flux ; loi de Gauss ; densité de charge.

Calculs de champs électriques

2.1 Charge ponctuelle

Utiliser la loi de Gauss pour obtenir l'expression du champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ produit par une charge Q. (On considère ici, comme partout ailleurs, que les charges de l'énoncé sont les seules de l'Univers !)

a. Examiner les symétries du problème.

b. Choisir le système de coordonnées qui convient au problème.
c. À partir des symétries du problème, déduire la direction du champ électrique (quelles composantes ?) et l'invariance (de quelles coordonnées il ne dépend pas ?). À la place de $\vec{E}(\vec{r})$ on pourra ainsi écrire une expression plus détaillée.
d. Choisir la surface fermée S pour appliquer la loi de Gauss, d'après les critères décrits dans la partie c) de l'introduction.
e. Donner l'expression du flux du champ électrique à travers S.
f. Donner l'expression de la charge totale incluse par cette surface.
g. À partir de la loi de Gauss, trouver l'expression du champ électrique sur la surface S. Généraliser à chaque point de l'espace.

Résultat:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

2.2 Distribution linéaire de charge

Utiliser la loi de Gauss pour obtenir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ produit par une distribution linéaire de charge électrique. La ligne a une longueur infinie et sa densité de charge linéique est constante, égale à ϱ_l ($\mathrm{C\,m^{-1}}$). Reprendre les questions de l'exercice 2.1.

Comparer le résultat avec celui de l'exercice 1.4.

Résultat:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\varrho_l}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$

2.3 Distribution planaire de charge

Utiliser la loi de Gauss pour obtenir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ produit par une distribution planaire de charge électrique. Le plan est de dimensions infinies et sa densité de charge surfacique est constante, égale à $\varrho_s(\mathrm{C\,m^{-2}})$. Reprendre les questions de l'exercice 2.1.

Résultat:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\varrho_s}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} & si\ z > 0 \\ -\frac{\varrho_s}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} & si\ z < 0 \end{cases}$$

2.4 Une sphère chargée

Utiliser la loi de Gauss pour obtenir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ produit par une sphère chargée, de rayon R_0, dont la densité de charge volumique dépend seulement de la distance r entre chaque point de la sphère et son centre, $\varrho = \varrho(r)(\mathrm{C\,m^{-3}})$. Reprendre les questions de l'exercice 2.1.

Examiner deux cas spéciaux,

a. $\varrho(r) = \varrho$ (une constante) ;
b. $\varrho(r) = \varrho_0\frac{r}{R_0}$ (ϱ_0 est une constante).

Exprimer les résultats en fonction de la charge totale Q_0 de la sphère.

Résultat:

a.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 \frac{r}{R_0^3} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & si\ r \leq R_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & si\ r > R_0 \end{cases}$$

b.

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_0 \frac{r^2}{R_0^4} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & si\ r \leq R_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r^2} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & si\ r > R_0 \end{cases}$$

Calculs de flux

2.5 Charge ponctuelle (bis)

On revient à l'exercice 2.1. On considère que la charge se trouve à l'origine d'un système de coordonnées sphériques et on veut calculer le flux du champ électrique à travers une surface fermée qui englobe le volume défini par $r = [r_1, r_2]$, $\theta = [\theta_1, \theta_2]$, $\phi = [\phi_1, \phi_2]$.

Calculer ce flux de deux manières différentes :

a. En appliquant la loi de Gauss.
b. En calculant directement l'intégrale de surface.

Résultat:

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = 0$$

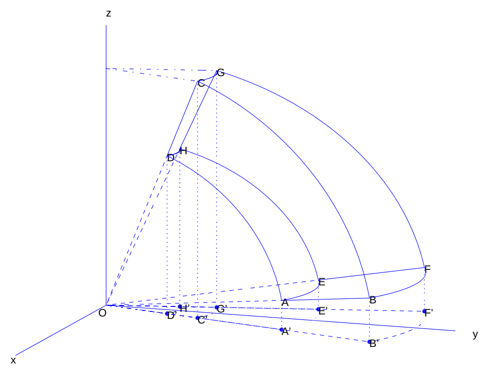

Figure 1 – Exemple avec $r_1 = 0.6\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0.9\,\mathrm{m}$, $\theta_1 = 20°$, $\theta_2 = 80°$, $\phi_1 = 70°$ et $\phi_2 = 110°$.

2.6 Distribution planaire de charge (bis)

On revient à l'exercice 2.3 et on considère une sphère (fictive) de rayon R, coupée en deux hémisphères par le plan infini. Calculer le flux du champ électrique à travers la surface de cette sphère de deux manières différentes, comme à l'exercice précédent (2.5).

Résultat:

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \frac{\varrho_s \pi R^2}{\epsilon_0}$$