POLYTECH'NICE SOPHIA-ANTIPOLIS **ANALYSE PEIP2 - 2015/2016**

<u>CONTROLE N°1 : 24 SEPTEMBRE 2015</u>

Documents et appareils électroniques non autorisés. Durée : 45 minutes.

<u>Exercice 1.</u> (6pts)

Soit $a > 0$, et soit f une fonction définie, continue et positive sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

1.1 Pourquoi peut-on dire que f est localement intégrable sur $[a, +\infty[$?

1.2 Pourquoi dit-on que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est une intégrale impropre ou généralisée ?

1.3 Montrer que : s'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ tende vers une limite l non nulle quand x tend vers $+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

1.4 <u>Application :</u>
Etudier la nature de l'intégrale généralisée $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\pi x}(2+\sin x)}{\sqrt{x}}\ dx.$

<u>Exercice 2.</u> (8 pts)

Etudier la nature de l'intégrale : $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{1+t^4} sin\ t\ dt.$

<u>Exercice 3.</u> (6 pts)

Soit $I = [0,1]$ et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit $\mathcal{N}$ l'application définie sur E par : $\mathcal{N}(f) = \sup_{t\in I}|f(t)|$.

Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E.