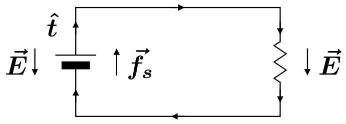
Électromagnétisme

TD 10
Force électromotrice due au mouvement

Introduction : Si l'on considère un circuit électrique simple (une pile et des fils présentant une certaine résistance), on se rend compte que le déplacement des charges qui correspond au courant dans le circuit, doit se faire sous l'action d'une force $\vec{\boldsymbol{F}}$.



En effet, les phénomènes de collision dans les conducteurs (les fils) sont équivalents à une force de friction : il faut donc qu'une autre force soit exercée sur les charges afin qu'elles « traversent » le conducteur. C'est la force électrique $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$ qui joue ce rôle. Le champ électrique est généré par la différence de potentiel aux bornes de la pile et sa direction est du + vers le − (puisque $\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} V$). De la même façon, à l'intérieur de la pile, le champ électrique (toujours orienté du + vers le −) exerce une force *s'opposant* au sens du courant : une autre force $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}$, due à la source, permet donc aux charges libres de « remonter la pente » du potentiel. Dans le cas d'une pile, cette force est de nature chimique. La *force par charge* est alors écrite comme :

$$\vec{\boldsymbol{f}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}}{q} = \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}}$$

où le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ (force électrique par charge) existe partout dans le circuit et $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}}$ (force due à la source par charge) existe uniquement à l'intérieur de la source. La force par charge indique le sens du mouvement d'une particule positive et, par définition, celle du courant électrique.

On définit la *force électromotrice* (fem) comme la circulation de la force par charge $\vec{\boldsymbol{f}}$ le long du circuit (courbe Γ fermée) :

$$\text{fem} \triangleq \oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}l \tag{1}$$

Étant donné que la circulation du champ électrostatique est nulle et qu'à l'intérieur d'une pile idéale (sans résistance[1]) les charges ne subissent aucune force (donc $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}} = -\vec{\boldsymbol{E}}$), on peut montrer que *la force électromotrice correspond à la différence de potentiel aux bornes de la pile* (donc la fem, malgré son nom, n'est pas une force !).

[1] On peut toujours considérer la pile sans résistance et ajouter sa résistance interne dans le reste du circuit.

De façon équivalente, si un autre phénomène (pas forcément une pile chimique) crée une force par charge $\vec{f}$ mettant les charges en circulation dans un circuit, on pourra assimiler la force électromotrice donnée par (1) à un générateur (fictif…) présent dans le circuit. Cette force électromotrice génère un courant I, puisque $|\text{fem}| = RI$.

On remarque que le sens du vecteur $\hat{t}$ (le sens de parcours du circuit, choisi de façon arbitraire) détermine la polarité du générateur associé à la force électromotrice : dans le cas particulier présenté ici, on a pris $\hat{t} \parallel \vec{f}$ et ce choix donne $\text{fem} > 0$ d'après (1). Donc, dans un cas général (y compris celui d'un circuit sans source) les étapes à suivre sont les suivantes :

a. on choisit le sens de $\hat{t}$ de façon arbitraire et on calcule la fem d'après (1) ;

b. on place ensuite une « pile » dans le circuit de telle façon que *le vecteur $\hat{t}$ entre par la borne négative et sorte par la borne positive.*

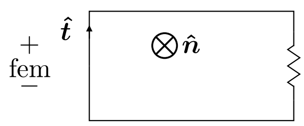
Le choix de $\hat{t}$ est effectivement arbitraire (ce qui est normal !) puisque si l'on choisit $\hat{t}' = -\hat{t}$ (l'autre sens) on obtient $\text{fem}' = -\text{fem}$, mais le générateur associé est aussi inversé dans le circuit (puisque il est placé selon $\hat{t}'$) ; les deux choix ($\hat{t}$ et $\hat{t}'$) donnent les mêmes résultats.

Sous certaines conditions, le mouvement d'un circuit dans un champ magnétique peut générer une force électromotrice, due justement à ce mouvement. La vitesse du circuit (donc des charges libres dans les conducteurs) fait apparaître une force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}$, donc une force par charge $\vec{f} = \vec{v}\wedge\vec{B}$ qui met les charges en mouvement, crée une fem selon (1) et génère un courant $I = |\text{fem}|/R$.

On peut montrer que la fem (calculée le long de la courbe Γ du circuit) est liée à la dérivée temporelle du flux magnétique Φ_B à travers une surface ouverte S, associée[2] à Γ :

$$\text{fem} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

Le courant $I = \text{fem}/R$ généré par cette fem va créer, à son tour, un champ magnétique secondaire, $\vec{B}\,'$. Si les doigts de la main droite suivent le sens du courant dans le circuit, c'est le pouce qui donne le sens du champ $\vec{B}\,'$ (voir 7.2 dans TD 5 pour le cas spécial d'un circuit circulaire). On considère, par exemple le circuit suivant, où l'on a pris S comme la surface plate délimitée par Γ. Les vecteurs $\hat{t}$ et $\hat{n}$ sont liés par la règle de la main droite (règle du tire-bouchon).



Si Φ_B augmente, la fem (dont la polarité est déterminée par $\hat{t}$) prendra une valeur négative : un courant opposé à $\hat{t}$ va donc circuler dans le circuit. Il va créer un champ magnétique selon $-\hat{n}$. Le flux de ce champ magnétique à travers S sera négatif (puisque $\vec{B}\,'\cdot\hat{n} < 0$), il s'opposera donc à l'augmentation initiale de Φ_B. Le même phénomène d'opposition se produit si Φ_B diminue. Le signe négatif dans (2) indique

[2] L'association entre la courbe fermée Γ et la surface ouverte S est expliquée dans le TD 8.

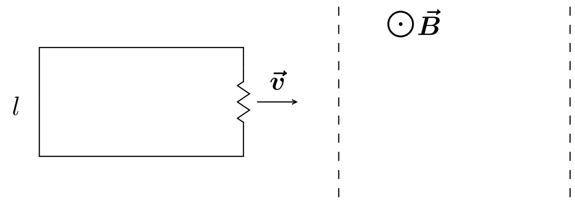
alors que la fem sur le circuit génère un courant qui, à son tour, crée un champ magnétique *s'opposant au changement* de Φ_B.

Le courant induit dans le circuit par la fem subit à son tour une force provenant du champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ initial, $\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I\,\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{l}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$. Cette force s'oppose au mouvement du circuit. Si aucune force extérieure n'agit sur le circuit, celui-ci sera décéléré et son énergie cinétique initiale sera convertie en énergie thermique dans la résistance. De la même façon, si une force extérieure maintient une vitesse constante en s'opposant à cette force magnétique, alors c'est le travail fourni par la force extérieure qui est converti en puissance consommée dans la résistance. Dans tous les cas, la puissance consommée est égale à $P = |\text{fem}|I$.
Notions : force électromotrice ; flux magnétique ; courants induits.

10.1 Circuit en déplacement dans un champ magnétique uniforme

Le circuit ci-dessous se déplace avec une vitesse $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ constante. Le champ $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ est uniforme, stationnaire et existe seulement dans la région indiquée par les deux lignes verticales.

Dans ce qui suit, il faudra examiner séparément les cinq phases suivantes de la position du circuit par rapport au champ : i) à gauche, ii) phase d'entrée, iii) à l'intérieur, iv) phase de sortie, v) à droite.



a. Calculer la force magnétique $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$ sur les charges libres des conducteurs.

b. Calculer la fem à partir de (1).

c. Choisir une surface associée au circuit et calculer le flux Φ_B.

d. Calculer la fem à partir de (2).

e. Vérifier que le courant généré par la fem crée un champ magnétique s'opposant aux variations de Φ_B.

f. Calculer la puissance dissipée dans la résistance.

g. Montrer que cette puissance provient du travail fourni par la force extérieure qui maintient la vitesse constante.

Résultat:

b. ii) et iv) $|fem| = Blv$ *mais de signe différent ; zéro dans les autres cas ;*

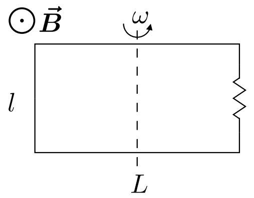
d. mêmes résultats que dans b. ;

f. ii) et iv) $P = (Blv)^2/R$ *; zéro dans les autres cas ;*

g. ii) et iv) $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = IlB\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, $\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$, $P_{ext} = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = IlBv$.

10.2 Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme

Le circuit ci-dessous est en rotation dans un champ magnétique $\vec{B} = B\hat{e}_z$ uniforme et stationnaire. La fréquence angulaire est égale à ω.



a. Choisir une surface associée au circuit et calculer le flux Φ_B.

b. Calculer la fem à partir de (2).

c. Vérifier que le courant généré par la fem crée un champ magnétique s'opposant aux variations de Φ_B.

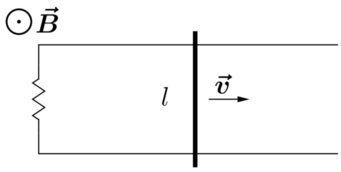
Résultat:

a. $\Phi_B = BlL\cos(\omega t)$ *;*

b. *fem* $= BlL\omega\sin(\omega t)$*.*

10.3 Circuit déformable

Le circuit ci-dessous peut changer de forme : la barre épaisse (conductrice, de masse m) peut glisser, sans frottement, sur les deux autres conducteurs. Une force extérieure déplace cette barre à une vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$ constante. Le champ magnétique $\vec{B} = B\hat{e}_z$ est uniforme et stationnaire.



a. Calculer la force magnétique $\vec{F}_m$ sur les charges libres des conducteurs.

b. Calculer la fem à partir de (1).

c. Choisir une surface associée au circuit et calculer le flux Φ_B.

d. Calculer la fem à partir de (2).

e. Vérifier que le courant généré par la fem crée un champ magnétique s'opposant aux variations de Φ_B.

f. Calculer la puissance dissipée dans la résistance.

g. Montrer que cette puissance provient du travail fourni par la force extérieure qui maintient la vitesse constante.

On considère qu'à l'instant $t = 0$ la force extérieure s'arrête, alors que la barre se déplace avec une vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$.

h. Écrire l'équation du mouvement de la barre.

i. Donner l'évolution de la vitesse en fonction du temps.

j. Que se passe-t-il ?

k. Vérifier que l'énergie totale dissipée dans la résistance provient de l'énergie cinétique initiale de la barre.

Résultat:

b. $|fem| = Blv$;

c. $|\Phi_B| = Blx$;

f. ii) et iv) $P = (Blv)^2/R$;

g. ii) et iv) $\vec{F}_{ext} = IlB\hat{e}_x$, $\mathrm{d}W = \vec{F}_{ext} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, $P_{ext} = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = IlBv$;

h. $m\,\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = -(B^2l^2v/R)\hat{e}_x$;

i. $P(t) = [Blv(t)]^2/R$, $W_{cons} = \int_0^\infty P(t)\,\mathrm{d}t = \ldots = mv^2/2$.