**Polytech' Nice Sophia – Antipolis PeiP 2**

**2016/2017** **FEUILLE DE T.D. 4**

**EXERCICES D'ANALYSE – Normes, Boules ouvertes, Boules fermées, Sphères.**

**Les notations sont celles du cours.**

## Exercice 1.

Soit $u = (x, y, z) \in E = \mathbb{R}^3$. On considère les applications suivantes :

$$\mathcal{N}_1 : u \to |x| + |y| + |z| \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\infty : u \to \max \ (|x|, |y|, |z|).$$

1. Montrer que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_\infty$ définissent des normes sur $E$.
   On note à présent $\mathcal{N}_1$ par $\|.\|_1$ et $\mathcal{N}_\infty$ par $\|.\|_\infty$.
2. Calculer $\mathcal{N}_1(u)$ et $\mathcal{N}_\infty(u)$ pour $u = (1, -2, 1)$. Même question pour $v = (-2, 3, -2)$.
3. Montrer que : $\forall u \in E,\ \|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq 3\ \|u\|_\infty$.
   Donner des exemples de vecteurs $u$ pour lesquels $\|u\|_\infty = \|u\|_1$.

## Exercice 2.

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. On pose $I = [a, b]$ et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que les applications suivantes sont des nomes sur $E$ :
   $\mathcal{N}_\infty : f \to \sup_{t \in I} |f(t)|$ et $\mathcal{N}_1 : f \to \int_a^b \ |f(t)| \ dt.$
   On note à présent $\mathcal{N}_1$ par $\|.\|_1$ et $\mathcal{N}_\infty$ par $\|.\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leq (b - a)\|f\|_\infty$.
   Dans la suite, on pose : $a = 0, b = 1$.
3. Soit $f(t) = 2t - 1$. Calculer $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$.
4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $E$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$ par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 1 \ ; \\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \ ; \\ f_n \ \ affine\ sur\ [0, 1/n]\ et\ \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

   Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ ainsi que leurs limites lorsque $n \to \infty$.

5. Existe-t-il un réel $k > 0$ tel que : $\forall f_n \in E,\ \|f_n\|_\infty \ \leq \ k\ \|f_n\|_1$ ?

## Exercice 3.

Représenter graphiquement les boules ouvertes, les boules fermées et la sphère de rayon R, centrées en (0,0) pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice 4.

L'application $\mathcal{N}: (x, y) \to |5x + 3y|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$ ?

**<u>Exercice 5.</u>(DM2 à rendre le 6/10/16)**

On considère l'espace vectoriel $E$ des fonctions de classe $C^2([0,2\pi])$ vérifiant :

$$\forall f \in E, f(0) = f'(0) = 0.$$

On définit les applications suivantes, pour tout $f \in E$ :

$$\mathcal{N}_1(f) = \sup_{[0,2\pi]} |f(x)| + \sup_{[0,2\pi]} |f''(x)| \quad ;$$

$$\mathcal{N}_2(f) = \sup_{[0,2\pi]} |f(x) + f''(x)| \quad ;$$

$$\mathcal{N}(f) = \sup_{[0,2\pi]} |f(x)| \ .$$

1) Montrer que les applications $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}$ définissent des normes sur $E$.
2) Montrer que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes.
3) La norme $\mathcal{N}$ est-elle équivalente à l'une des deux autres normes ?