E.P.U de Nice Sophia-Antipolis
Analyse - CIP2 - Année 2010-2011

TD 5 : Ouverts, fermés et suites

Exercice 1.

1. Montrer que la partie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$ est fermée.
2. Montrer que la partie $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 4\}$ est ouverte.
3. Qu'en est il de la partie $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4\}$
4. Qu'en est il de la partie $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 4\}$

Exercice 2.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$$

est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.
On munit $\mathbb{R}^2$ de l'une des normes usuelles. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = (\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\ln n)$$

est convergente.

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \cos(t)$ si $t \leq n$ et $f_n(t) = \sin(t)$ si $t > n$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) \to f \text{ quand } n \to +\infty$$

où f est une fonction à déterminer.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$, c'est à dire pour la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, c'est à dire pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|)?$$

Exercice 5.
Déterminer les intérieurs et adhérences dans $\mathbb{R}$ de $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $\{a\}$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, +\infty[$

TD n°5

Exercice 1 :

1) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$

Pour montrer que A est fermé, on considère $u_n = (x_n, y_n, z_n)$ une suite convergente de A

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $x_n^2 + 2y_n^2 + 3z_n^2 \leq 4$ $\quad (*)$

On note $u = (x,y,z)$ la limite de u_n quand $n \to +\infty$

Comme l'application $(x,y,z) \to x^2 + 2y^2 + 3z$ est continue, en passant à la limite dans $(*)$, on obtient :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4$$

D'où $u = (x,y,z) \in A$

Ainsi, $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ convergente, u_n a sa limite qui appartient à A.

D'où A fermé.

$$\left| \begin{array}{l} x_n \to x \\ f(x_n) \to f(x) \end{array} \right.$$

2) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 . \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 4\}$

Pour montrer que B est ouvert, on va montrer que B^c est fermé

$B^c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq 4\}$

On procède comme dans 1)

Comme B^c est fermé, B est ouvert.

3) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4\}$

$C = A \cap B^c$

or A est fermé et B^c est fermé

Comme l'intersection de 2 fermés est un fermé, alors C est fermé

4) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 4\}$

$D = A^c$

Comme A est fermé, son complémentaire est ouvert.

Donc D est ouvert.

EXERCICE 2

$\mathcal{C}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\}$

Soit $(u_n = (x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}_f$ convergente vers $u = (x,y)$

Montrons que $u \in \mathcal{C}_f$

$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = f(x_n)$ car $u_n \in \mathcal{C}_f$

Comme u_n converge dans $\mathbb{R}^2$, $\left|\begin{array}{l} x_n \underset{+\infty}{\rightarrow} x \text{ dans } \mathbb{R} \\ y_n \underset{+\infty}{\rightarrow} y \text{ dans } \mathbb{R} \end{array}\right.$

De plus, comme f est continue, $f(x_n) \underset{+\infty}{\rightarrow} f(x)$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$

D'où $y = f(x)$

Donc la limite $u = (x,y) \in \mathcal{C}_f$

Donc $\mathcal{C}_f$ est fermé.

E.P.U de Nice Sophia-Antipolis
Analyse - CIP2 - Année 2010-2011

TD 5 : Ouverts, fermés et suites

Exercice 3
On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = (\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\ln n)$$

est convergente. Pour cela, il faut déterminer la limite u de cette suite et montrer que pour n'importe quelle norme on a

$$\|u_n - u\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On peut choisir dans ce cas n'importe quelle norme car nous sommes dans $\mathbb{R}^2$ qui est un espace de dimension finie sur lequel toutes les normes sont équivalentes.
D'autre part, dans cet exerice, en utilisant la dernière remarque du paragraphe III (Limite d'une suite) du cours, comme les éléments de cette suite appartiennent à $\mathbb{R}^2$, il suffit d'étudier séparément chacune des composantes de la suite, et de montrer que chacune des composantes de (u_n) est suite suite convergente dans $\mathbb{R}$ dont on devra déterminer la limite. Ainsi, notre problème se ramène à l'étude de deux suites réelles.
Posons $x_n = \frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{(-1)^n}{n}\ln n$.

- Dans $\mathbb{R}$, lorsque $n \to +\infty$, $\cos\frac{1}{n} \to 1$, $\frac{1}{n} \to 0$ et donc $x_n \to 1$.
- On va montrer que $y_n \to 0$ quand $n \to \infty$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $|y_n - 0| \to 0$, par définition de convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$ pour la norme $|.|$

$$|\frac{(-1)^n \ln n}{n} - 0| = |\frac{\ln n}{n}| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Ainsi, comme les deux composantes de la suite $u_n = (x_n, y_n)$ sont des suites convergentes on peut conclure que $u_n = (x_n, y_n) \to (1,0)$ quand $n \to +\infty$.
Remarque Si on munit R^2 de la norme infinie, en posant $u = (1,0)$

$$\|u_n - u\|_\infty = \max(|x_n - 1|, |y_n - 0|) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc par défintion, $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$.

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \cos(t)$ si $t \le n$ et $f_n(t) = \sin(t)$ si $t > n$. Dans cet exercice, on veut étudier la convergence de la suite de fonctions f_n pour deux types de convergence. Ces définitions de convergence sont très souvent utilisées dans le cas de suites de fonction.

1. On veut étudier la convergence simple de la suite f_n, c'est à dire trouver f tel que pour une valeur de $t \in \mathbb{R}$ fixé, la suite f_n converge dans $\mathbb{R}$ vers f, c'est à dire

$$|f_n - f| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

La difficulté est ici de trouver ce qu'il faut choisir pour la fonction f. Lorsqu'on étudie une limite de suite, on regarde son comportement quand $n \to +\infty$, c'est à dire lorsque n est très grand. Dans notre cas, on fixe $t \in \mathbb{R}$, et on regarde ce qui se passe quand n est grand. Comme t est fixé, lorsque n tend vers l'infini, il y a toujours un moment où toutes les valeurs de n sont plus grandes que t, et pour ces valeurs de n on a $f_n(t) = \cos(t)$ (qui ne dépend pas de n).
Ainsi, il existe un rang $N = E(t) + 1$ (où E est la partie entière) au delà duquel la suite f_n sera toujours égale à $\cos t$ avec t fixé, et donc

$$\forall n \ge N, |f_n - \cos(t)| = 0$$

d'où $|f_n(t) - \cos(t)| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Dans cette question, on s'intéresse à la convergence uniforme, qui n'est rien d'autre que la convergence "classique" de la suite f_n pour la norme $\|.\|_\infty$.
Comme précédemment, trouver la limite de la suite n'est pas forcément évident. Cependant, on peut montrer (mais ce n'est pas l'objet de cet exercice) que la convergence uniforme implique la convergence simple (la réciproque est fausse en général) et la limite est la même dans les deux cas.
Comme on vient de montrer que f_n convergeait simplement vers $f(t) = \cos t$, si f_n converge uniformément sur $[a,b]$, sa limite sera nécéssairement égale à f.
Montrons que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = \begin{cases} \sup_{t\in[a,b]} |\sin t - \cos t| & \text{si } n < a \\ \sup_{t\in[a,b]} |\cos t - \cos t| = 0 & \text{si } b < n \end{cases}$$

Si $a < n < b$, c'est un peu plus compliqué mais comme on regarde le comportement de n en $+\infty$, et comme a et b sont fixés, on voit facilement que le cas qui nous intéresse est celui où $n > b$. Il est donc inutile d'étudier le cas $a < n < b$.
Pour tout $n > b$, $\|f_n - f\|_\infty = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

donc f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$ où f est la fonction cos.

3. Dans cette question, on regarde la convergence uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$. Comme dans la question précédente, si f_n converge uniformément, sa limite sera égale à la fontion $f(t) = \cos t$. On doit montrer la convergence de la suite f_n pour la norme $\|.\|_\infty$ c'est à dire

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Dans cette question, on va montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme. On a

$$|f_n - f| = \begin{cases} |\cos t - \cos t| = 0 & \text{si } n \le t \\ |\sin t - \cos t| & \text{si } n > t \end{cases}$$

Quelque soit la valeur de n, on peut toujours trouver un $t > n$ tel que

$$|\sin t - \cos t| > |\cos t - \cos t| = 0.$$

Par exemple, en prenant t de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $|\sin t - \cos t| = \sqrt{2} > 0$. Ainsi,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\sin t - \cos t|$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n - f\|_\infty \ge \sqrt{2}$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \ge \sqrt{2}$$

et donc on peut pas avoir convergence uniforme car $\|f_n - f\|_\infty$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 4 :

$(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction

Convergence simple

On fixe t et on étudie $f_n(t)$

1) $f_n(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t < n \\ \sin t & \text{si } t \geq n \end{cases}$

$t = 2,5$

- Si $n=1$ $\sin t$
- Si $n=2$ $\sin t$
- Si $n=3$ $\cos t$
- si $n=10$ $\cos t$

...

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, alors il existe $N = E(t) + 1$

tel que $\forall n \geq N$, $f_n(t) = \cos t$ car $n > t$

d'où $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos t$

donc f_n converge simplement vers $\cos t$

2) $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - \cos t|$

Comme f_n converge simplement vers $\cos t$, alors si f_n conv uniformément, elle converge uniformément vers $\cos t$

Etudions $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - \cos t|$

On veut montrer que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $n > b$, alors $|f_n(t) - \cos t| = |\cos t - \cos t| = 0$

Si $n > b$, $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - \cos(t)| = 0$

d'où $\|f_n - \cos t\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} \cos t$

3) Pour que f_n converge uniformément vers $f(t) = \cos t$,

il faut que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - \cos t| = |\sin t - \cos t|$

Si $n = 100$ $\begin{cases} \cdot\ t \geq 100 & |f_n(t) - \cos t| = |\sin t - \cos t| \\ \cdot\ t < 100 & |f_n(t) - \cos t| = 0 \end{cases}$

Si $t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $|\cos t - \sin t| = \sqrt{2} > 0$

d'où $\sup |\sin t - \cos t| \geq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d'où $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0 si $n \to +\infty$

et f_n ne converge pas uniformément vers $\cos t$