Classement de systèmes linéaires.

On donne six systèmes linéaires à résoudre en (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \\ z = 1 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x = -5 + 14y \\ z = -2 + 4y \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} 3x - y + 5z = 5 \\ 2x + 4y - 8z = 34 \\ -x + 2y + 3z = 18 \end{cases}, \quad S_4 : 3x - y + 5z = 5$$

$$S_5 : \begin{cases} 5y + 14z = 10 \\ 4y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}, \quad S_6 : \begin{cases} 3x - y + 5z = 7 \\ 2x + 4y - 8z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Le but est de classer ces systèmes selon la relation (d'équivalence) « *est équivalent à* ».

(a) Soient $i, j \in [\![1, 6]\!]$. Rappeler ce que signifie : « S_i *est équivalent à* S_j ».

(b) Justifier le nombre maximal de classes d'équivalence.

(c) Sans faire de calcul, justifier le nombre minimal de classes d'équivalence.

(d) Quels sont les systèmes qu'il reste à examiner ?

(e) Echelonner S_5. Que peut-on déduire quant au classement de S_5 ?

(f) On remarque que les systèmes S_3 et S_6 ne diffèrent que par le second membre.
Que peut-on en déduire quant à leur échelonnement par la méthode de Gauss ?

(g) Echelonner S_3. Que peut-on déduire quant au classement de S_3 et de S_5 ?

(h) Terminer le classement.

e) Echelonnons S_5.

$$S_5 : \begin{cases} 5y + 14z = 10 \\ 4y - z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x + 2y + 3z = 1 \\ 4y - z = 2 \\ 5y + 14z = 10 \end{cases}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 + 14 l_2}{\overset{\text{le pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x + 3z + 2y = 1 \\ -z + 4y = 2 \\ 61y = 38 \end{cases}$$

. $rg(S_5) = 3$ donc S_3 non équivalent à S_2 ou S_4

. S_5 admet 1 seule solution distincte de l'unique solution de S_1. En effet $y = \frac{38}{61} \neq 9$

Donc S_5 non équivalent à S_4

Il y a au moins 4 classe d'équivalence

f) $S_3 \begin{cases} 3x - y + 5z = 5 \\ 2x + 4y - 8z = 34 \\ -x + 2y + 3z = 18 \end{cases} \qquad S_6 \begin{cases} 3x - y + 5z = 7 \\ 2x + 4y - 8z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

passage à la forme de matrices augmentées

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & -8 & 34 \\ -1 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Pour échelonner S_3 et S_6, on effectue les mêmes opérations de Gauss

On sait déjà que S_3 et S_6 ne sont pas équivalents car leurs seconds membre sont différents.

Il reste à déterminer si S_3 et S_6 sont équivalents à S_1, S_2, S_4 ou S_5.

Echelonnons S_3 et S_6

$$\begin{array}{ccc} y & x & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -8 & 34 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 18 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 4l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 14 & 12 & 54 & 30 \\ 0 & 5 & 13 & 28 & 15 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_2 \leftarrow \frac{1}{2} l_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 27 & 15 \\ 0 & 5 & 13 & 28 & 15 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_3 \leftarrow 7l_3 - 5l_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 27 & 15 \\ 0 & 0 & 61 & 61 & 30 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_3 \leftarrow \frac{1}{61} l_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 27 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{30}{61} \end{array}\right)$$

On teste les sol de S_1

$3 \times 7 + 6 \times 1 = 27$

$21 + 6 = 27$

S_3 est équivalent à S_1

On sait déjà que S_6 n'est ni équivalent à S_3, ni à S_1

Il reste à tester si S_6 et S_5 le sont

(Ils le sont)

Conclusion :

rangs égaux ?

oui → syst ≠ par leur 2^{nd} membre

- oui → syst non équivalents
- non → syst équivalents

non → syst. non équivalents

$A = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

$= \{S_1, S_3\} \cup \{S_2\} \cup \{S_4\} \cup \{S_5, S_6\}$

4 classes d'équivalence

Correction DS classement de syst. lin

a) Soient $i, j \in [\![1, 6]\!]$
S_i est équivalent à S_j
ssi l'ensemble de sol. de S_i est égal à l'ens. sl S_j

b) La relation " est équivalent à " est une rel. d'équivalence
Elle est réflexive
Donc : $\forall i \in [\![1, 6]\!]$ S_i est équivalent à S_j
Donc : il y a plus 6 classes

c) . S_1 est de rang 3
Son ens de sol est le singleton $\{(3, 9, 1)\}$
. S_2 est de rang 2
Son ens de sol est l'ens. infini à 1 paramètre
$\{(-5 + 14y, -2 + 4y), y \in \mathbb{R}\}$
. S_4 est de rang 1
Son ens de sol est l'ens. infini à 2 paramètres
$\{(x, 3x + 5z - 5, z), x, z \in \mathbb{R}\}$

S_1, S_2, S_4 ne sont pas équivalents 2 à 2.
Donc il y a au moins 3 classes d'équivalence
celle de S_1, de S_2, de S_4.

d) Il reste à classer S_3, S_5, S_6