Électromagnétisme

TD 4
Potentiel et énergie électrostatique

Introduction : La différence de potentiel (ddp) entre deux points, A et B, correspond au travail effectué pour déplacer une charge *test* q très lentement du point A jusqu'au point B, divisé par la charge :

$$V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\int_{\Gamma:\, \vec{r}_A \to \vec{r}_B} \vec{E} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \frac{W_{A\to B}}{q} \tag{1}$$

À partir de cette expression, on peut obtenir aussi le potentiel à un point B si on choisit comme point A la référence du potentiel, où par définition $V(\vec{r}_A) = 0$.

On voit que le potentiel est une sorte de fonction primitive du champ électrique, ce qui est confirmé par la relation inverse, qui exprime le champ électrique comme une dérivée spatiale (à trois dimensions) du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, V \tag{2}$$

Le travail dépensé pour déplacer une charge q entre le point de référence du potentiel jusqu'à un autre point, de potentiel $V(\vec{r})$, est finalement emmagasinée en tant qu'énergie potentielle de cette charge : $\mathcal{U}_e = qV(\vec{r})$. Ici, le potentiel est créé par toutes les autres charges du problème. Si on considère un ensemble de N charges, l'énergie électrostatique du système sera égale à

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i) \tag{3}$$

où, pour chaque terme, $V(\vec{r}_i)$ correspond au potentiel créé au point $\vec{r}_i$ par toutes les autres charges du problème, sauf la charge q_i qui se trouve à $\vec{r}_i$.

Dans le cas où on a une distribution de charges continue, cette formule devient

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})V(\vec{r})\, \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{4}$$

où $V(\vec{r})$ est le potentiel créé par cette distribution au point $\vec{r}$. Le volume d'intégration V couvre les charges. Si la distribution de charges est planaire ou linéaire, on intègre sur une surface ou sur une ligne en remplaçant $\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$ par $\rho_s(\vec{r})\,\mathrm{d}S$ ou $\rho_l(\vec{r})\,\mathrm{d}l$.

La formule (4) peut être écrite (sans démonstration) en fonction du champ électrique, au lieu du potentiel :

$$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \epsilon_0 E^2(\vec{r})\, \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{5}$$

Le volume d'intégration V correspond maintenant à *tout l'espace* où le champ électrique est différent de zéro et non seulement à l'endroit où se trouvent les charges !

Notions : potentiel électrostatique ; énergie électrostatique ; travail ; rigidité diélectrique ; capacitance.

CC BY NC SA

4.1 Une sphère chargée

On considère la sphère chargée de l'exercice 2.4 et on s'intéresse au cas où la densité volumique de charges est uniforme (cas a).

À partir des expressions du champ électrique (à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère), donner les expressions :

a. Du potentiel $V(\vec{r})$ créé par cette sphère (prendre le point de référence à l'infini). Quelle condition doit-on respecter à $r = R_0$?

b. De l'énergie électrostatique $\mathcal{U}_e$ de la sphère (utiliser les deux formules, (4) et (5), elles doivent donner le même résultat !).

Résultat:

$$a.\ V(\vec{r}) = V(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{3R_0^2-r^2}{2R_0^3} & si\ r \leq R_0 \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} & si\ r > R_0 \end{cases}$$

$$b.\ \mathcal{U}_e = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R_0}$$

4.2 Une sphère métallique creuse chargée

Une sphère métallique creuse, de rayon R_0, porte une charge Q_0. Donner les expressions :

a. Du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ créé par cette sphère (utiliser la loi de Gauss !).

b. Du potentiel $V(\vec{r})$ créé par cette sphère (prendre le point de référence à l'infini).

c. De l'énergie électrostatique $\mathcal{U}_e$ de la sphère (utiliser les deux formules, (4) et (5) !).

d. Application numérique : $R_0 = 30\,\mathrm{cm}$.
On considère que le champ électrique à la surface de la sphère correspond au niveau maximal supporté par l'air (à 1 bar et 25 °C), $E_{\mathrm{max}} = 3\,\mathrm{MV\,m^{-1}}$ (rigidité diélectrique de l'air[1]).
Calculer la charge Q_0, le potentiel sur la surface de la sphère, la capacitance (rapport $Q_0/V(R_0)$) et le potentiel à une distance de 1 m, 2 m et 3 m du centre de la sphère. (Cette situation correspond à l'expérience de Walter Lewin avec le générateur Van de Graaff et le tube fluorescent. En réalité, la surface du générateur n'est pas parfaitement sphérique mais présente des irrégularités. Au niveau de ces irrégularités, le champ électrique est plus élévé — WL utilise un facteur de 3 — que la valeur calculée sur la surface d'une sphère parfaite. Donc il faudrait prendre plutôt $E'_{\mathrm{max}} = E_{\mathrm{max}}/3 = 1\,\mathrm{MV\,m^{-1}}$.)

Résultat:

$$a.\ \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & si\ r \leq R_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\hat{e}_r & si\ r > R_0 \end{cases}$$

$$b.\ V(\vec{r}) = V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{R_0} & si\ r \leq R_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{r} & si\ r > R_0 \end{cases}$$

[1] L'air, comme tous les isolants (ou *diélectriques*), devient conducteur sous l'effet de champs électriques dépassant une certaine valeur, appelée « rigidité diélectrique ». Elle est de l'ordre de quelques $\mathrm{MV\,m^{-1}}$, variant de $1\,\mathrm{MV\,m^{-1}}$ pour l'air très humide jusqu'à $60\,\mathrm{MV\,m^{-1}}$ pour le Téflon.

cc BY NC SA

c. $\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} Q_0 V(R_0) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q_0^2}{R_0}$

d. *Calculs avec* $E_{max} = 3\,\mathrm{MV\,m^{-1}}$ *:* $Q_0 = 30\,\mu\mathrm{C}$ *;* $V(R_0) = 900\,\mathrm{kV}$ *;* $C = 33.33\,\mathrm{pF}$ *;*
$V(1\,\mathrm{m}) = 270\,\mathrm{kV}$ *;* $V(2\,\mathrm{m}) = 135\,\mathrm{kV}$ *;* $V(3\,\mathrm{m}) = 90\,\mathrm{kV}$
(en pratique, il faudrait diviser par 3 toutes les valeurs de Q *et de* V*)*