1. $\left\{\begin{array}{lllll} 2x & +3y & -4z & = & 7\,(\ell_1) \\ -x & +8y & & = & 3\,(\ell_2) \\ \frac{2}{3}x & +\frac{13}{2}y & -5z & = & 0\,(\ell_3) \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en suivant les instructions suivantes :

(1) Permuter les lignes (ℓ_1) et (ℓ_2) ;
(2) Multiplier la ligne (ℓ_3) par 3 ;
(3) Eliminer x dans les lignes (ℓ_2) et (ℓ_3) en prenant la ligne (ℓ_1) comme pivot ;
(4) Multiplier les lignes (ℓ_2) et (ℓ_3) respectivement par $\frac{1}{19}$ et par 2 ;
(5) Eliminer y dans les lignes (ℓ_1) et (ℓ_3) en prenant la ligne (ℓ_2) comme pivot ;
(6) Calculer z ;
(7) Eliminer z en prenant la ligne (ℓ_3) comme pivot ;
(8) Calculer y puis x ;
(9) Conclure : donner l'ensemble des solutions du système.

2. $\left\{\begin{array}{lllll} x & & +5z & = & -1 \\ -2x & & -11z & = & 6 \\ -2x & -y & +10z & = & -12 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

Ecrire une liste d'opérations de Gauss conduisant à la résolution du système.

3. $\left\{\begin{array}{lllll} x & & +5z & = & -1 \\ -2x & & -11z & = & 6 \\ -2x & -y & +10z & = & -12 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^4$.

4. $\left\{\begin{array}{lllll} 3u & +v & & = & 5 \\ u & & +3w & = & -2 \\ 14u & +4v & +6w & = & 16 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$

5. $\left\{\begin{array}{lllll} 6x & +y & -z & = & -6 \\ 8x & +2y & -z & = & -7 \\ -42x & -6y & +5z & = & 31 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

6. $\left\{\begin{array}{lllll} & -b & & = & 6 \\ -a & & & = & -3 \\ -5a & -3b & +c & = & -11 \\ 36a & +35b & -6c & = & -18 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

7. $\left\{\begin{array}{llllll} 3x & +y & & & = & 2 \\ 8x & +7y & +z & +5t & = & -3 \\ 29x & +18y & +2z & +15t & = & 13 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^4$ en prenant x comme inconnue secondaire.

8. $\left\{\begin{array}{llllll} 4x & -2y & -z & -3t & = & 0 \\ -20x & +9y & +5z & +17t & = & 0 \\ -x & +7y & & -2t & = & 3 \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^4$.

$(a_1, a_2, a_3) \neq (a_2, a_1, a_3)$ mais $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}$

Hérédité : on suppose vraie pour un n fixé $\in \mathbb{N}^*$

Problème de synthèse

Partie 1 : La formule de Pascal

Soient $n, p \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{p}$ désigne le nb d'ens à p éléments dans un ens à n éléments

a) On fixe n

On fait varier p et on détermine $\binom{n}{p}$

Cas où $p > n$

$$\binom{n}{p} = 0$$

Cas où $p \leqslant n$

Nommons les éléments de la partie pleine : $x_1, \dots, x_n$

Formons un p-uplet : $(a_1, \dots, a_p)$ tel que :

$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad a_p \in \{x_1, \dots x_n\}$

Combien peut-on former de p-uplets ?

- n pour choisir a_1
- $n-1$ pour choisir $a_2 \neq a_1$
- $n-2$ pour choisir $a_3 \neq a_1$ et $a_3 \neq a_2$

$\vdots$

$(n-(k-1))$ pour choisir a_k tq : $\forall i \in [\![1, k-1]\!] \quad a_i \neq a_k$

$\vdots$

$(n-(p-1))$ pour choisir a_p tq : $\forall i \in [\![1, p-1]\!] \quad a_i \neq a_p$

Finalement il y a : $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))\dots(n-(p-1))$ choix pour former un p-uplet à composante dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ tq les composantes sont $\neq$ 2 à 2.

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Il y a $p!$ p-uplets à composantes distinctes formés avec les même composantes

Donc : $\dfrac{n!}{(n-p)!} \times \dfrac{1}{p!}$ est le nb de parties à p éléments

Ccl : si $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

b) Soit $E = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

Ecrivons la suite $\left(\binom{4}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$

$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$

$\forall p > 4 \quad \binom{4}{p} = 0$

c) Formule de Pascal

- Soit $n, p \in \mathbb{N}$ Soit E tq $\mathrm{card}(E) = n+1$

Soit A une partie E telle que $\mathrm{card}(A) = p+1$

Soit $x \in E$

Combien y-a-t-il de parties A ? $\binom{n+1}{p+1}$

Autres dénombrement des parties à $(p+1)$-éléments parmi $(n+1)$

Si $x \notin A$ alors il y a $\binom{n}{p+1}$ parties à $(p+1)$ élément

Si $x \in A$ alors il y a $\binom{n}{p}$ parties ______

Conclus : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$ par la disjonction de cas

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Partie 2 . Formule du binôme de Newton

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps de nombre où l'addition et la multiplication sont commutatives

A CONNAITRE

Soit $P(n)$, la proposition : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$

Preuve par récurrence pour $n \geq 1$

pour $n=1$ comparons $(a+b)^1$ et $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$

Chap 6

Problème synthèse

a) $n = 4$

$\binom{4}{0} \binom{4}{1}$

b) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{b,a,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

d)

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Partie 2

a) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Initi : $n=1$

$(a+b)^1 = a+b$

$\binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b$ donc $P(1)$ vraie

b) Soit $(a,b) = (1,1)$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}}_{P} + \underbrace{\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}}_{I}$$

donc $2^n = P + I$

Soit $(a,b) = (-1,1)$

$$(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^{2k+1}$$

$$= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

On a donc $0 = P - I$

On résout dans $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} 2^n = P + I \\ 0 = P - I \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2^n = 2P \\ 0 = P - I \end{cases} \iff \begin{cases} P = 2^{n-1} \\ I = 2^{n-1} \end{cases}$

c) On cherche $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(e^{ix}+1\right)^n\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\left(e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right)\right)^n\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{in\frac{x}{2}} \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n\right]$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \times \mathrm{Re}\left[e^{in\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n \times \cos\left(n\frac{x}{2}\right)$$

. $(a+b)^1 = a+b$

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0 b^1 + \binom{1}{1}a^1 b^0$$
$$= 1\times 1\times b + 1\times a\times 1$$
$$= b + a$$

. + est commutative dans $\mathbb{C}$ donc : $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k}$

P(1) vraie

. Soit $n \geqslant 1$. Supposons P(n) vraie

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$
$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$0 \leqslant k \leqslant n$ chgt indice

$1 \leqslant k+1 \leqslant n+1$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

terme isolé

$$= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}$$

Donc : $(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

Concl : P(1) est vraie et $[\forall n \geqslant 1 \; P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ vraie

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ P(n) vraie

i.e. : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$