E4,5

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!] \\ n \longmapsto (q,r) \quad \text{avec } n = 3q + r. \end{array} \right.$$

(a) $\mathbb{Z} \times [\![0,2]\!] = \mathbb{Z} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times \{1\} \cup \mathbb{Z} \times \{2\}$.

$$= \{(q,0),\ q \in \mathbb{Z}\} \cup \{(q,1),\ q \in \mathbb{Z}\} \cup \{(q,2),\ q \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Montrons que f est surjective :

Soit $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!]$.

Résolvons l'équation : $f(n) = (q,r)$ sur $\mathbb{Z}$ (d'inconnue n)

On procède par disjonction de cas :

- Si $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ alors $(q,r) = (q,0)$.

  On résout $f(n) = (q,0)$ sur $\mathbb{Z}$.

  i.e. : $f(n) = (q,0)$ tel que $n = 3q + 0 = 3q$.

  Donc $3q \in f^{-1}(\{(q,0)\})$.

- Si $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{1\}$ alors $(q,r) = (q,1)$.

  $f(n) = (q,1)$ sur $\mathbb{Z}$ admet la solution $3q+1$.

  Donc $3q+1 \in f^{-1}(\{(q,1)\})$.

- Si $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \{2\}$

  $f(n) = (q,2)$ sur $\mathbb{Z}$ admet la solution $3q+2$.

  Donc $(3q+2) \in f^{-1}(\{(q,2)\})$

Conclusion : $\forall (q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!]$, $f^{-1}(\{(q,r)\}) \neq \emptyset$.

i.e. : f surjective

PeiP1 Interrogation : applications 20 novembre 2015

Groupe : 5 Nom : STROBBE Prénom : Nathan Note : 16,5.

10.

Cette interrogation comporte deux questions indépendantes.

1. Soient E, F, G des ensembles non vides ; soient $f \in \mathcal{A}(E,F)$, $g \in \mathcal{A}(F,G)$.
   Raisonner directement pour montrer que si $g \circ f$ est bijective alors g est surjective.

V Par hypothèse $g \circ f$ est bijective

Donc $g \circ f$ est surjective

V Soit $z \in G$, z admet au moins un antécédent par $g \circ f$

Soit $x \in E$, l'un d'entre eux

V On a alors : $g \circ f(x) = z$

i-e : $g(f(x)) = z$

V z admet $f(x)$ comme antécédent par g

Conclusion : $\forall z \in G$, $g^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset$

V i-e : g est surjective

2. Soit l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!] \\ n \mapsto (q,r) \end{array} \right.$ tel que $n = 3q + r$.

V.

(a) Donner une partition de l'ensemble d'arrivée de f adaptée à l'étude de la surjectivité de f.

(b) Montrer que l'application f est surjective.

a) $\mathbb{Z} \times [\![0,2]\!] = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{2\})$

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\exists (q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!]$ tel que $n = 3q + r$

Raisonnons par disjonction de cas :

V-

6,5

* $r = 0$, $\forall (q,r) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$ Ici : la conclusion ne va pas. Ne pas perdre de vue la solution cherchée

$3q + 0 = n$, donc $n \in \mathbb{Z}$ $3q \in f^{-1}(\{(q,0)\})$.

* $r = 1$, $\forall (q,r) \in \mathbb{Z} \times \{1\}$

$3q = n - 1$ donc $n \in \mathbb{Z}$ id.

Effort de mise en forme mais quantificateurs faux

* $r = 2$, $\forall (q,r) \in \mathbb{Z} \times \{2\}$

$3q = n - 2$, donc $n \in \mathbb{Z}$

Ainsi $(\overset{\exists}{\cancel{\forall}} n \in \mathbb{Z})$ $\overset{\forall}{\cancel{\exists}} (q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0,2]\!]$ tel que $f(n) = 3q + r$

$3q + r$ admet n comme antécédent par f

Conclusion : f est surjective