

Thermodynamique Contrôle No. I (2016-2017)

Un raisonnement détaillé et argumenté sera apprécié !

Distribution de Maxwell : $\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$

Capacité thermique molaire à $V=\text{const}$: $c_v = \frac{1}{\vartheta} \frac{dU}{dT}$

Constantes universelles : $R \approx 8 \text{ J/(mol.K)}$; $k \approx 10^{-23} \text{ J/K}$; $N_A \approx 10^{24} \text{ mol}^{-1}$

1. Théorie (6,5 pts.)

1.1. Le gaz parfait, quelles hypothèses respecte-t-il ?

1.2. Distribution de Boltzmann.

• Donner l'expression de loi de distribution discrète en expliquant tous les termes. (10,75)

• Démontrer l'expression pour la constante figurant dans cette loi. (10,75)

1.3. L'énergie interne d'un gaz parfait est $U=3PV$.

• Trouver la capacité thermique molaire à $V=\text{const}$, c_v , de ce gaz. (1)

• S'agit-il d'un gaz monoatomique, diatomique ou poly-atomique (molécules non-linéaires et le nombre de molécule est supérieur à deux) ? Justifier. (7)

1.4. Travail.

• Donner l'expression pour le travail W reçu par une matière lors de sa compression (ou détente) en fonction de sa pression $P(V)$ qui évolue au cours de la compression. (10,5)

• Déduire une expression pour le travail W reçu par un gaz parfait lors de sa compression sachant que son volume diminue de deux fois ($V_2=V_1/2$) mais sa température reste constante et égale à T . Donner W en fonction de ϑ (nombre de moles) et T (une autre constante peut éventuellement figurer dans votre résultat). (19,5)

2. Ionisation de potassium (6,5 pts.)

Les atomes de potassium s'ionisent lorsque leur énergie cinétique ϵ dépasse l'énergie ϵ_0 d'ionisation d'un atome qui correspond à une certaine vitesse v_0 des atomes : $\epsilon \geq \epsilon_0 = mv_0^2/2$. On souhaite trouver la fraction des atomes ionisés à la température T . Pour cela :

2.1. Tracer l'allure de la courbe de distribution des normes de vitesses des atomes : $dN/(N \cdot dv) = f(v)$ avec $f(v)$ – la densité de probabilité que l'atome donné se déplace à une vitesse v . Représenter sur ce graph la fraction $\Delta N/N$ d'atomes ionisés.

2.2. Trouver l'expression pour cette fraction $\Delta N/N = f(T, \epsilon_0, m, k)$, avec m – la masse de l'atome de potassium. Vous obtenez une intégrale qui n'a pas d'expression analytique !

Afin d'estimer le résultat, on utilise l'approximation $\frac{\Delta N}{N} \approx \exp\left(-\frac{mv_0^2}{2kT}\right)$ valable

pour $mv_0^2/(2kT) \gg 1$.

2.3. En déduire l'expression approchée pour $\Delta N/N = f(T, \epsilon_0)$.

3. Inflammation de l'essence (7 pts.)

Une flaque d'essence d'épaisseur homogène $h=1\text{cm}$ est exposée à l'air ambiant à la pression atmosphérique $P_0=1\text{atm}$. L'essence s'enflamme par un mégot jeté. On suppose que :

- la flamme se propage verticalement du haut vers le bas ;
- les molécules d'air au voisinage de la flaque se déplacent avec une vitesse quadratique moyenne correspondante à la température de la flamme $T=2000\text{K}$.
- Les molécules d'air frappant la surface de la flaque réagissent avec l'essence en proportion 50 molécules d'air pour 1 molécule d'essence.

On donne : les masses molaires de l'air $\mu_{\text{air}} \approx 30 \text{ g/mol}$ et de l'essence $\mu_e \approx 100 \text{ g/mol}$; la masse volumique de l'essence $\rho_e \approx 1 \text{ g/cm}^3$.

On souhaite trouver la durée Δt de la combustion. Pour cela :

3.1. Exprimer le nombre N_e de molécules d'essence brûlées en fonction de nombre de collisions N_{coll} de molécules d'air.

3.2. Trouver l'expression pour N_e en fonction de P_0 , T , m_{air} (masse de la molécule d'air), S (surface de la flaque) et Δt (durée de la combustion). Une autre constante peut éventuellement apparaître dans l'expression.

3.3. En déduire la relation pour Δt en fonction de P_0 , T , m_{air} , h (épaisseur de la flaque) et n_e (nombre de molécules d'essence par unité de volume).

3.4. Trouver la relation entre n_e et ρ_e (masse volumique de l'essence) et exprimer Δt en fonction de ρ_e , P_0 , T , h , μ_{air} et μ_e . Dans cette expression finale, essayez de regrouper toutes les constantes universelles dans une seule constante (R , k ou N_A).

3.5. Faire l'analyse dimensionnelle pour Δt .

3.6. Estimer la valeur numérique de Δt .

N1 Théorie

1.1. Hypothèse d'un gaz parfait

- sphères dures de diamètre négligeable
- Chocs élastiques, pas d'interaction entre molécules
- agitation thermique → le gaz occupe tout le volume offert
 - isotropie des vitesses: vitesse moyenne suivant une direction donnée ne dépend pas de cette direction

1.2. Distribution de Boltzmann

$$\bullet \quad \Pi(\epsilon_i) = \frac{N_i}{N} = \text{Const} \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right) \quad (1)$$

$\Pi(\epsilon_i) \rightarrow$ probabilité que la particule donnée possède l'énergie ϵ_i

$\frac{N_i}{N} \rightarrow$ fraction de particules ayant l'énergie ϵ_i

$N \rightarrow$ nombre total des particules

$k \rightarrow$ constante de Boltzmann

$T \rightarrow$ température absolue

$$\bullet \quad \sum_i \text{Eq (1)} \Rightarrow \underbrace{\sum_i \frac{N_i}{N}}_1 = \text{Const} \sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Const} = \frac{1}{\sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right)} \quad (2)$$

1.3. Energie interne du gaz

$$U = 3PV$$

$$C_v = \frac{1}{2} \frac{dU}{dT}$$

avec $U = 3PV = 3 \cdot 2RT$ selon l'eq. d'etat des gaz parfaits

$$C_v = \frac{1}{2} \frac{d}{dT}(3 \cdot 2RT) = 3R$$

Il s'agit d'un gaz polyatomique ayant 6 degres de liberte pour lequel

$$C_v = 3R$$

1.4. Travail

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV$$

$$V_2 = \frac{V_1}{2}, \quad T = \text{const}$$

avec $T = \text{const}$: l'eq. d'etat des gaz parfaits :
 $P(V)V = 2RT \Rightarrow P(V) = \frac{2RT}{V}$

$$W = - \int_{V_2}^{V_2/2} \frac{2RT}{V} dV = -2RT \ln \frac{V_2}{V_1} = -2RT \ln \frac{1}{2} =$$

$$= +2RT \ln 2 > 0$$

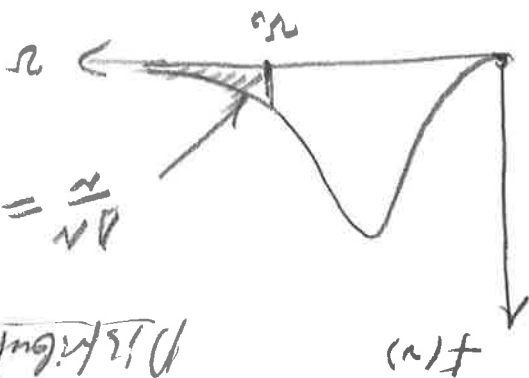
N2. Ionisation de potassium

ionisation si $E > E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

2.1. Distribution de Maxwell

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{+\infty}^{v_0} f(v) dv = \text{aire}$$

sous la courbe de distribution
à $v > v_0$.



2.2. $\frac{\Delta N}{N} = f(T, E_0, m, k)$?

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{+\infty}^{v_0} f(v) dv = \int_{+\infty}^{v_0} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

avec $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$

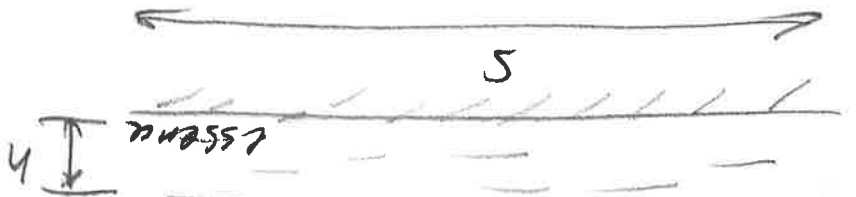
$$\frac{\Delta N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2E_0}{m}}} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = f(m, E_0, T, E_0)$$

2.3. Approximation $\frac{\Delta N}{N} = \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)$ pour $\frac{mv_0^2}{2kT} \gg 1$

dans notre cas $\frac{mv_0^2}{2} = E_0$, donc

$$\frac{\Delta N}{N} = \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)$$

N3. Inflammation et présence



50 molécules d'air \rightarrow 2 molécules d'essence

3.2. $Ne = f(N_{coll}) \rightarrow$ nombre de molécules brûlées

$$Ne = \frac{N_{coll}}{50}$$

ce qui traduit le fait

que 50 collisions des molécules d'air sur la surface de la

flamme font réagir 2 molécules

molécules d'essence.

3.2. $Ne = f(P_0, T_{moy}, S, A) ?$

$$Ne = \frac{N_{coll}}{50} \quad (1)$$

Avec le nombre de collisions.

$$N_{coll} = \frac{1}{6} n \cdot v \cdot S \cdot \Delta t \quad (2)$$

ici la concentration de molécules d'air dans les voisinages de la flamme.

$$P_0 = n k T \Rightarrow n = \frac{P_0}{k T} \quad (3)$$

la vitesse quadratique moyenne de molécules d'air dans le champ cinétique de translation.

$$v = \sqrt{\frac{3 k T}{m_{air}}} = \frac{2}{3} k T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k T}{m_{air}}} \quad (4)$$

(2), (3), (4) \rightarrow (1) \Rightarrow

$$n_e = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{6} \frac{P_0}{kT} \cdot \sqrt{\frac{3kT}{m_{air}}} \cdot S \Delta t =$$

$$= \frac{P_0 \cdot S \Delta t}{300} \sqrt{\frac{3}{kT \cdot m_{air}}} \quad (5)$$

3.3. $\Delta t = f(P_0, T, m_{air}, h, n_e \rightarrow \frac{\text{nombre molécule essence}}{\text{volume}})$

(5) $\rightarrow \Delta t = \frac{300 n_e}{P_0 \cdot S} \sqrt{\frac{kT m_{air}}{3}} \quad (6)$

avec le nombre totale des molécules brûlées:

$$n_e = n_e \cdot V = n_e \cdot S \cdot h \quad (7)$$

\downarrow volume trapé

(7) \rightarrow (6) $\Rightarrow \Delta t = \frac{300 n_e \cdot h}{P_0} \sqrt{\frac{kT m_{air}}{3}} \quad (8)$

3.4. relation entre n_e et ρ_e (masse volumique essence)

par définition $n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{N_e \cdot m_e}{V \cdot m_e} = \frac{M}{V m_e} = \frac{\rho_e}{m_e}$

avec $m_e = \frac{m_e}{N_A} \rightarrow$ masse d'une molécule d'essence

$$n_e = \frac{\rho_e N_A}{m_e} \quad (9)$$

Aussi $m_{air} = \frac{m_{air}}{N_A} \quad (10)$

(9), (10) \rightarrow (8) $\Rightarrow \Delta t = \frac{300 \rho_e N_A \cdot h}{P_0 m_e} \sqrt{\frac{kT m_{air}}{3 N_A}} =$

$$= \frac{300 \rho_e h}{P_0 m_e} \sqrt{\frac{R T m_{air}}{3}} \Rightarrow \Delta t = \frac{300 \rho_e h}{P_0 m_e} \sqrt{\frac{R T m_{air}}{3}}$$

3.5. Analyse dimensionnelle: — 6 —

$$\begin{aligned}
 [\Delta t] &= \frac{[\rho_e][h]}{[\rho_0][\mu_e]} \sqrt{[\alpha_e] \cdot [T] \cdot [\mu_{air}]} = \\
 &= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}} \left[\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{K} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \right]^{1/2} = \\
 &= \text{m}^{-2} \text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{mol} \left[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-2} \right]^{1/2} = \\
 &= \text{m}^{-2} \text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{mol} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \text{mol}^{-1} = \text{s} \quad (\text{OK})
 \end{aligned}$$

3.6. A.N: avec $\rho_e = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$
 $h = 2 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
 $\mu_{air} \approx 30 \text{ g/mol} = 0,03 \text{ kg/mol}$
 $\mu_e \approx 1000 \text{ g/mol} = 1 \text{ kg/mol}$

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{10^5 \cdot 0,1} \sqrt{\frac{8 \cdot 2000 \cdot 0,03}{3}} = \\
 &= 300 \cdot 10^{-3} \sqrt{160} \approx 0,3 \cdot 13 \approx \underline{\underline{4 \text{ s}}}
 \end{aligned}$$