DEVOIR SURVEILLÉ

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Quelques questions indépendantes d'applications directes du cours.

1) **Complexes.**

a) Enoncer le théorème sur les racines n-ièmes d'un complexe $Z = Re^{i\theta} \quad (n \in \mathbb{N}^*; R > 0; \theta \in \mathbb{R})$.

Application : racines $4^{\text{ièmes}}$ de $Z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

b) Soit $B(b), C(c)$; déterminer l'affixe a de A tel que (A, B, C) soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet A.

2) **Polynômes ; fractions rationnelles**. 3 questions **indépendantes** :

a) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?

$P = X^4 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Sinon, le décomposer (rapidement) en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \dfrac{1}{X(X^2+X+1)}$.

c) (Reprise d'un exercice préparé puis corrigé en TD :

soit (a, b, c) la famille en extension des racines dans $\mathbb{C}$ de $z^3 + 3pz^2 + 3qz + r = 0 \quad (p, q, r) \in \mathbb{C}^3$.

• Exprimer $a + b + c$ et $ab + bc + ac$ en fonction des coefficients p, q, r.

• On rappelle le résultat classique :

$(A(a), B(b), C(c))$ forment un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

Justifier que cette condition équivaut à : $q = p^2$.

Exercice II

Des intégrales à calculer :

1) $F = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$

2) $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx$; en déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = 2e^{\frac{\pi-4}{2}}$.

3) $H(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2+4t+13}$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)$.(cette limite (finie) sera alors notée en $2^{\text{ième}}$ année : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+4t+13}$)

4) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx$.

Exercice III

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

1) Calculer I_0, I_1, I_2.

2) Sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$.

[on prouvera déjà : $1 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n\mathrm{d}x}{1+x^n}$]

4) Etablir :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^\star) \quad \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

5) Prouver que : $(\forall t \in \mathbb{R}_+) \quad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$; en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$

Prouver finalement que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$$

[ce qui,avec les notations du cours, se note encore : $I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$]
