1 Equations différentielles linéaires du 1^{ier} ordre.

Définition 1.1. On appelle équation différentielle linéaire du 1ier ordre toute équation différentielle du type :
$y' + a(x)y = b(x) \quad (EDL1A)$ avec a et b : I intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ fonctions continues sur I .

⋄ **Remarque 1.1.** *On rappelle qu'une solution de (EDL1A) est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que :$(\forall x \in I) \quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$;*
*résoudre (EDL1A) signifiant : trouver **toutes** les solutions de (EDL1A) : l'ensemble de ces solutions sera noté $\mathcal{S}_{I,\mathbb{K}}(EDL1A)$.*

1.1 Premières remarques .

1) On associe à (EDL1A) une équation différentielle du 1ier ordre dite sans second membre ou homogène : $y' + a(x)y = 0$ (EDL1H) .
Soit L : $\begin{pmatrix} \mathcal{D}(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \phi' + a\phi \end{pmatrix}$ L est clairement linéaire (d'où le titre).
L'ensemble $\mathcal{S}_{I,\mathbb{K}}(EDL1H)$ apparaît alors comme $\mathrm{Ker}\ L$ et est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ (ce que l'on peut aussi prouver directement).
2) Soit $\phi \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ une solution particulière de (EDL1A) c'est à dire $L(\phi) = b$. Alors :

$$\begin{aligned} \psi \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K}) \text{ solution de (EDL1A)} &\Leftrightarrow L(\psi) = b \\ &\Leftrightarrow L(\psi) = L(\phi) \\ &\Leftrightarrow L(\psi) - L(\phi) = \widetilde{0} \\ &\Leftrightarrow L(\psi - \phi) = \widetilde{0} \\ &\Leftrightarrow \psi - \phi \in \mathrm{Ker}\ L = \mathcal{S}_{I,\mathbb{K}}(EDL1H) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathcal{S}_{I,\mathbb{K}}(EDL1H)) \quad \psi = \phi + k \end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé que :

solution générale de (EDL1A)= solution générale de (EDL1H) + une solution particulière de (EDL1A)

3)Enfin si le second membre apparaît comme une somme $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$
Si $(\forall i \in [\![1,n]\!])$ ϕ_i est une solution particulière de $y' + a(x)y = b_i(x)$ c'est à dire $L(\phi_i) = b_i$ alors :
$L(\sum_{i=1}^{n} \phi_i) = \sum_{i=1}^{n} L(\phi_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i = b$ c'est à dire que :
$\sum_{i=1}^{n} \phi_i$ est une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$: c'est ce que l'on appelle **principe de superposition** des solutions .

⋄ **Remarque 1.2.** *Bien comprendre que les 3 propriétés précédentes sont très spécifiques au caractère linéaire (voir l'application L) de l'équation différentielle .*

1.2 résolution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ (EDL1H)

D'après la remarque 2) du 1.1 , le résolution de l'équation homogène joue un rôle essentiel : le thèorème suivant donne la solution générale de (EDL1H) :

Théorème 1.1. Soit $y' + a(x)y = 0$ (EDL1H) avec $a : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue .
Les solutions de (EDL1H) sont exactement les fonctions f_k : $\begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & ke^{-A(x)} \end{pmatrix}$ où A est une primitive de a sur I et $k \in \mathbb{K}$.
$\mathcal{S}_{I,\mathbb{K}}(EDL1H)$ est donc une droite vectorielle (sous-espace vectoriel de dimension 1) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration:

$$\begin{aligned}
\phi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \text{ solution de (EDL1H)} &\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad \phi'(x) + a(x)\phi(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad e^{A(x)}(\phi'(x) + a(x)\phi(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad \left(e^{A(x)}\phi(x)\right)' = 0 \\
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{K})(\forall x \in I) \quad e^{A(x)}\phi(x) = k \\
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{K})(\forall x \in I) \quad \phi(x) = ke^{-A(x)}
\end{aligned}$$

c.q.f.d.$\odot$

♣ **Exemple 1.1.** *Résoudre :* $(x^2 + 1)y' + xy = x$ (E)
$(E) \Leftrightarrow y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = \dfrac{x}{x^2+1}$ $(EDL1A)$
On résoud donc d'abord : $y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$ $(EDL1H)$
$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C = \ln\sqrt{1 + x^2} + C \quad C \in \mathbb{R}$ *et donc :*
solution générale de (EDL1H) : $y = ke^{-\ln\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{k}{\sqrt{1 + x^2}} \quad k \in \mathbb{K}$
Comme $y = 1$ *est de façon évidente solution de (EDL1A) , on a finalement :*
solution générale de (EDL1A) : $y = \dfrac{k}{\sqrt{1 + x^2}} + 1 \quad k \in \mathbb{K}$

Le corollaire suivant est l'application évidente du théorème au cas où a (fonction en facteur de y) est constante :

Corollaire 1.2. La solution générale de $y' + \alpha y = 0 \quad \alpha \in \mathbb{K}$ est définie par : $y = ke^{-\alpha x} \quad k \in \mathbb{K}$.

1.3 Résolution de l'équation avec second membre : $y' + a(x)y = b(x) \quad (EDL1A)$.

1.3.1 cas particulier de $y' + \alpha y = e^{\beta}P(x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad P \in \mathbb{K}[X]$.

On sait résoudre $y' + \alpha y = 0 \quad (EDL1H)$ avec le corollaire précédent ;
il suffit donc de savoir trouver une solution particulière de $y' + \alpha y = e^{\beta}P(x) \quad (EDL1A)$ ce que donne la proposition suivante :

Proposition 1.1. Soit $y' + \alpha y = e^{\beta x}P(x) \quad (EDL1A)$
• Si $\beta \neq -\alpha$ il y a une solution particulière du type $Q(x)e^{\beta x}$ où : $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q =$ *deg* P.
• Si $\beta = -\alpha$ il y a une solution particulière du type $xQ(x)e^{\beta x}$ où : $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q =$ *deg* P.

Démonstration:
$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas} : \beta = 0}$:
• Si $\alpha \neq 0 \quad (EDL1A) : y' + \alpha y = P(x)$ et il s'agit donc de prouver qu'il y a une solution particulière du type Q avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q = deg\ P$; soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$:
$Q' = \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) b_{l+1} X^l$ donc :
Q solution de (EDL1A) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} \alpha b_n = a_n \\ (\forall l \in [\![0, n-1]\!]) \alpha b_l + (l+1) b_{l+1} = a_l \end{cases}$
Ce qui donne à résoudre un système où on tire successivement , puisque $\alpha \neq 0$, $b_n (\neq 0$ car $a_n \neq 0)$ puis les $b_l \quad l \in [\![0, n-1]\!]$, d'ailleurs de manière unique .
• Si $\alpha = 0 \quad (EDL1A) : y' = P(x)$ et en prenant la primitive de P nulle en 0 , on a bien une solution particulière du type $y = xQ(x)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q = deg\ P$.
$\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas} : \beta \text{ quelconque}}$ toute $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ peut s'écrire $y = e^{\beta x} z$ ($\Leftrightarrow z = e^{-\beta x} y$) avec $z \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et on a : $y' = e^{\beta x}(z' + \beta z)$ et donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (EDL1A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{\beta x}(z'(x) + (\beta + \alpha) z(x)) = e^{\beta x} P(x) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad z'(x) + (\beta + \alpha) z(x) = P(x) \text{ (F)} \end{aligned}$$

On est donc ramené au 1er cas ce qui permet de conclure :
Si $\beta + \alpha \neq 0$ c'est à dire $\beta \neq -\alpha$ on a une solution particulière de (F) du type $z = Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q = deg\ P$ et $y = e^{\beta x} Q(x)$ solution particulière de $(EDL1A)$.

Si $\beta + \alpha = 0$ c'est à dire $\beta = -\alpha$ on a une solution particulière de (F) du type $z = xQ(x)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ *et deq* $Q = deg\ P$ et $y = xQ(x)e^{\beta x}$ solution particulière de $(EDL1A)$.
c.q.f.d.$\odot$

♣ **Exemple 1.2.** $y' + 3y = x \cos x$ $(EDL1A)$ *(on cherche ici les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*
• *Equation homogène :* $y' + 3y = 0$ $(EDL1A)$ *a pour solution générale :* $y = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R}$
• *Puisque* $x \cos x = \Re e(xe^{ix}$ *, on cherche d'abord une solution particulière de* $y' + 3y = xe^{ix}$(F) *du type :* $y = (ax + b)e^{ix}$ *;* $y' = (iax + a + ib)e^{ix}$ *et on a :*
y solution de (F) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (a(i+3)x + a + b(i+3))e^{ix} = xe^{ix} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad a(i+3)x + a + b(i+3) = x \Leftrightarrow \begin{cases} a(i+3) = 1 \\ a + b(i+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3+i} = \dfrac{3-i}{10} \\ b = \dfrac{-a}{3+i} = -\dfrac{(3-i)^2}{100} = \dfrac{-4+3i}{50} \end{cases}$
D'où , pour (F) *, la solution particulière :* $y = \left(\dfrac{3-i}{10} x + \dfrac{-4+3i}{50} \right) e^{ix}$ *et pour* $(EDL1A)$ *, la partie réelle de la précédente :* $y = \left(\dfrac{3}{10} x - \dfrac{2}{25} \right) \cos x + \left(\dfrac{1}{10} x - \dfrac{3}{50} \right) \sin x.$
Solution générale de $(EDL1A)$ *:* $y = \left(\dfrac{3}{10} x - \dfrac{2}{25} \right) \cos x + \left(\dfrac{1}{10} x - \dfrac{3}{50} \right) \sin x + ke^{-3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

◇ **Remarque 1.3.** *On comprendra l'intérêt de s'être placé provisoirement dans* $\mathbb{C}$.

1.3.2 Méthode de "variation de la constante".

$y' + a(x)y = b(x) \quad (EDL1A)$ avec $a, b : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$
$y' + a(x)y = 0 \quad (EDL1H)$ dont on connaît la soluiton générale : $y = ke^{-A(x)}$ avec A primitive de a .

• On a vu qu'il suffit alors d'avoir une solution particulière de $(EDL1A)$ pour conclure : il peut y en avoir une évidente comme dans l'exemple 1.1 ou encore on peut être amené à chercher parmi des familles de fonctions particulières (comme dans la proposition 1.1).
• Sinon on pourra mettre en oeuvre la méthode suivante dite de variation de la constante :
Toute $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ peut s'écrire : $y = ze^{-A(x)}$ $(\star)(\Leftrightarrow z = ye^{A(x)}$) avec $z \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.
Alors : $y' = (z' - a(x)z)e^{-A(x)}$ et donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (EDL1A) &\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad (z'(x) - a(x)z(x))e^{-A(x)} + a(x)z(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad z'(x) = b(x)e^{A(x)} \text{ (donc à chaque fois les z s'annulent)} \end{aligned}$$

On voit donc l'intérêt du changement de fonction inconnue qui transforme $(EDL1A)$ en un simple problème de primitivation : on obtient donc toutes les fonctions z convenables par primitivation puis toutes les y convenables avec la relation $(\star)$.

♣ **Exemple 1.3.** *Résoudre sur* $I =]-1, 1[$: $\quad (1 - x^2)y' - xy = 1$ (E) *Sur* $]-1, 1[$ $(E) \Leftrightarrow$ $y' - \dfrac{x}{1-x^2}y = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(EDL1A)$
•$(EDL1H)$ $y' - \dfrac{x}{1-x^2}y = 0$; $\displaystyle\int -\frac{x}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C = \ln\sqrt{1-x^2} + C \quad C \in \mathbb{R}$
Donc : solution générale de $(EDL1H)$ *:* $y = ke^{-\ln\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}} \quad k \in \mathbb{R}$
• *(méthode de variation de la constante , car il n'est pas évident de repérer une solution particulière)*
Tout $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ *peut s'écrire :* $y = \dfrac{z}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\star)(\Leftrightarrow z = y\sqrt{1-x^2}$ *) avec* $z \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.
Alors : $y' = \dfrac{z'}{\sqrt{1-x^2}} + z\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ *et donc :*
y solution de $(EDL1A) \Leftrightarrow \dfrac{z'}{\sqrt{1-x^2}} + z\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x}{1-x^2}\dfrac{z}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{1-x^2}$
$\Leftrightarrow z' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(on constate bien que les z s'annulent)*
$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad z = \arcsin x + k \underset{\text{avec } (\star)}{\Leftrightarrow} \boxed{(\exists k \in \mathbb{R}) \quad y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}}}$

◇ **Remarque 1.4.** *Dans un cas comme le précédent , la résolution complète de :*
$(1 - x^2)y' - xy = 1$ (E) *sur* $\mathbb{R}$ *consisterait ensuite à résoudre sur* $]-\infty, -1[$ *puis sur* $]1, +\infty[$ *, puis enfin , à examiner si , par recollement par continuité et dérivabilité en* 1 *et* -1*, on peut obtenir une (ou des) solution(s) sur* $\mathbb{R}$ *entier .*

2 Equations différentielles linéaires du $2^{\text{ième}}$ ordre à coefficients constants .

Définition 2.1. On appelle équation différentielle linéaire du $2^{\text{ième}}$ ordre à coefficients constants toute équation différentielle du type :
$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (EDL2A)$ où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \quad a \neq 0$
$g : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue sur I .
On appelle équation différentielle linéaire homogène associée l'équation différentielle :
$ay'' + by' + cy = 0 \quad (EDL2H)$.

2.1 Premières remarques .

Les mêmes remarques qu'en 1.1 retent valables :
1) Soit L : $\begin{pmatrix} \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & a\phi'' + b\phi' + c\phi \end{pmatrix}$ L est clairement linéaire (d'où le titre).
L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{K}}(EDL2H)$ apparaît alors comme $\mathrm{Ker}\ L$ et est donc un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (ce que l'on peut aussi prouver directement).
On peut ici remarquer qu'une solution de $(EDL2H)$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ce que l'on prouve facilement par récurrence en remarquant qu'elle vérifie : $\phi'' = -\frac{b}{a}\phi' - \frac{c}{a}\phi$) .
2)De même , on prouve :

$\boxed{\text{solution générale de (EDL2A)= solution générale de (EDL2H) + une solution particulière de (EDL2A)}}$

3)Enfin , le principe de superposition reste valable .

2.2 Résolution de $ay'' + by' + cy = 0 \quad (EDL2H)$

2.2.1 Cas complexe .

On cherche donc ici les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2 fois dérivables et vérifiant :
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.
1)**Remarque** : cherchons les fonctions exponentielles , c'est à dire du type : $\phi_r : x \mapsto e^{rx} \quad r \in \mathbb{C}$, solutions de (EDL2H) :
ϕ_r solution de EDL2H)$\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R})(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \quad (EC)$
L'équation du 2$^{\text{ième}}$ degré (EC) est appelée équation caractéristique associée (à (EDL2H)).

2)Le théorème suivant donne l'ensemble des solutions de (EDL2H) :

Théorème 2.1. Soit : $ay'' + by' + cy = 0 \quad (EDL2H)$ $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \quad a \neq 0$.
$(EC) \quad ar^2 + br + c = 0$ et Δ le discriminant de (EC).

$Si\ \Delta$:	(EC) admet :	(EDL2H) a une solution générale définie par :
$\neq 0$	2 racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$	$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$
$= 0$	une racine double r_0 dans $\mathbb{C}$	$y = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{r_0 x} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

Et donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(EDL2H)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 (sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$).

Démonstration: Soit $r \in \mathbb{C}$ une racine de (EC) : donc $\phi_r : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (EDL2H).
Toute $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ peut s'écrire : $y = \phi_r z$ avec $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})(\Leftrightarrow z = \frac{y}{\phi_r}$ car ϕ_r ne s'annule pas).

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \begin{array}{l} y(x) = e^{rx}z(x) \\ y'(x) = e^{rx}(rz(x) + z'(x)) \\ y''(x) = e^{rx}(r^2 z(x) + 2rz'(x) + z''(x)) \end{array}$

Donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (EDL2H)} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{rx}[\underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=0} z(x) + (2ar + b)z'(x) + az''(x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad az''(x) + (2ar + b)z'(x) = 0(\star) \end{aligned}$$

• Si $\Delta \neq 0$ (EC) a 2 racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$; prenons , par exemple , dans $(\star)$ $r = r_1$; alors :
$(\star) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad z''(x) + (2r_1 + \frac{b}{a})z'(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad z''(x) + (r_1 - r_2)z'(x) = 0$
$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{C})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad z'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$

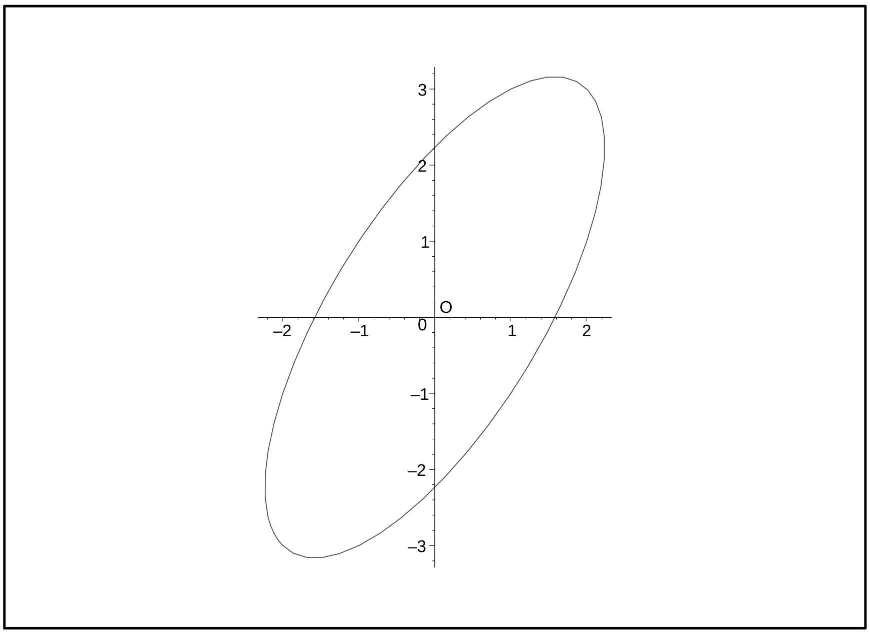
$\Leftrightarrow (\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2)(\forall x\in\mathbb{R})\quad z(x)=\dfrac{\alpha}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x}+\beta$
$\Leftrightarrow (\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2)(\forall x\in\mathbb{R})\quad y(x)=\dfrac{\alpha}{r_2-r_1}e^{r_2x}+\beta e^{r_1x}$
$\Leftrightarrow (\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2))(\forall x\in\mathbb{R})\quad y(x)=\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}$
• Si $\Delta=0$ (EC) a 1 racine double r_0 dans $\mathbb{C}$; prenons dans $(\star)$ $r=r_0$; alors :
$(\star)\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})\quad z''(x)=0\Leftrightarrow(\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2)(\forall x\in\mathbb{R})\quad z(x)=\lambda_1x+\lambda_2$
$\Leftrightarrow (\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2)(\forall x\in\mathbb{R})\quad y(x)=(\lambda_1x+\lambda_2)e^{r_0x}$

Les résultats précédents donnent clairement une famille génératrice , à 2 éléments , de $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(EDL2H)$.
Par exemple , dans le cas $\Delta\neq 0$, on a obtenu (avec les notations du début) que (ϕ_{r_1},ϕ_{r_2}) est génératrice de $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(EDL2H)$.Prouvons qu'elle est libre .
Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2)$ tels que : $\lambda_1\phi_{r_1}+\lambda_2\phi_{r_2}=\widetilde{0}$. Alors : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}=0.$
En prenant : $x=0$ puis $x=1$, on obtient : $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1e^{r_1}+\lambda_2e^{r_2}=0\end{cases}$ système linéaire homogène de déterminant $e^{r_2}-e^{r_1}\neq 0$ et donc $\lambda_1=\lambda_2=0$ ce qui achève la preuve que (ϕ_{r_1},ϕ_{r_2}) est aussi libre donc est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(EDL2H)$ qui , par là même , est de dimension 2 .
c.q.f.d.$\odot$

♣ **Exemple 2.1.** *(mouvement à accélération centrale)*
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ *, on considére un point matériel de masse m soumis à une force* $\overrightarrow{F}=-k\overrightarrow{OM}\quad k>0\quad m>0$ *.*
D'après le principe fondamental de la dynamique , on a :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\overrightarrow{F}=-k\overrightarrow{OM}$$

Par conséquent , en désignant par $z(t)$ *l'affixe de* M *à l'instant* t *, on a :*
$mz''(t)=-kz(t)$ *c'est à dire* $mz''(t)+kz(t)=0\quad(EDL2H)$
$(EC):mr^2+k=0\Leftrightarrow r=\pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *et donc , la solution générale de* $(EDL2H)$ *est :*
$z(t)=\lambda e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}+\mu e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.$
On obtient facilement une trajectoire elliptique (pouvant être réduite à un segment) de centre O.



2.2.2 Cas réel .

On cherche donc ici les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2 fois dérivables et vérifiant :
$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad a \neq 0$.

Théorème 2.2. Soit : $ay'' + by' + cy = 0 \quad (EDL2H)$ $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad a \neq 0$.
$(EC) \quad ar^2 + br + c = 0$ et Δ le discriminant de (EC).

$Si\ \Delta$:	(EC) admet :	(EDL2H) a une solution générale définie par :
> 0	2 racines r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}$	$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
$= 0$	une racine double r_0 dans $\mathbb{R}$	$y = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{r_0 x} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
< 0	2 racines complexes , non réelles , conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha + i\beta$	$e^{\alpha x}(\lambda_1 \cos\beta x + \lambda_2 \sin\beta x) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ soit encore $e^{\alpha x} R\cos(\beta x - \phi) \quad (R, \phi) \in \mathbb{R}^2$

Et donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}(EDL2H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 (sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Démonstration:• Les 2 premiers cas se démontrent exactement comme le thèorème précédent .
• Traitons donc le cas où $\Delta < 0$.
D'après le précédent thèorème $\phi_1 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{(\alpha+i\beta)x} \end{pmatrix}$ vérifie $(EDL2H)$.
Donc $\Re\mathrm{e}\phi_1 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix}$ aussi , car $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
De même : $\Im\mathrm{m}\phi_1 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x}\sin\beta x \end{pmatrix}$
On a ainsi 2 éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}(EDL2H)$ et toute combinaison linéaire de ces 2 éléments est encore dans $(EDL2H)$ ce qui prouve une inclusion .
Réciproquement : soit $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}(EDL2H)$; alors $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(EDL2H)$ et donc , d'après le précédent théorème :
$(\exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2) \quad f = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\overline{\phi_1}$ (où $\overline{\phi_1} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{(\alpha-i\beta)x} \end{pmatrix}$)
Or $f$est à valeurs réelles et donc :
$f = \Re ef = \Re e\lambda_1 \Re e\phi_1 - \Im m\lambda_1 \Im m\phi_1 + \Re e\lambda_2 \Re e\phi_1 + \Im m\lambda_2 \Im m\phi_1$ donc :

$(\exists(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2)\quad f=\gamma\Re e\phi_1+\delta\Im m\phi_1$ c'est à dire $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=e^{\alpha x}(\gamma\cos\beta x+\delta\sin\beta x)$
ce qui prouve l'autre inclusion et achève la preuve .
c.q.f.d.$\odot$
Le corollaire suivant ne fait que mettre en relief 2 cas particuliers du théorème précédent :

Corollaire 2.3. Soit $\omega\in\mathbb{R}^*$.
$y''+\omega^2y=0$ admet une solution générale définie par : $y=\lambda\cos\omega x+\mu\sin\omega x\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
$y''-\omega^2y=0$ admet une solution générale définie par : $y=\lambda e^{\omega x}+\mu e^{-\omega x}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Démonstration: Immédiat avec le théorème , puisque , par exemple pour le 1^{er} cas :
$(EC)r^2+\omega^2=0\Leftrightarrow r=\pm i\omega$, d'où le résultat en utilisant le $3^{\text{ième}}$ cas du tableau .
c.q.f.d.$\odot$

♣ **Exemple 2.2.** *$y''+y'+y=0\quad(EDL2H)$;*
$(EC)r^2+r+1=0\Leftrightarrow r=j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
solution générale définie par : $y=e^{-\frac{x}{2}}(\lambda\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\mu\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

♣ **Exemple 2.3.** *$y''+2\sqrt{3}y'+3y=0\quad(EDL2H)$;*
$(EC)r^2+2\sqrt{3}r+3=0\Leftrightarrow(r+\sqrt{3})^2=0\Leftrightarrow r=-\sqrt{3}$
solution générale définie par : $y=(\lambda x+\mu)e^{-\sqrt{3}x}\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

2.3 Résolution de $ay''+by'+cy=P(x)e^{\alpha x}$ avec $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

Le théorème suivant donne une méthode pour trouver une solution particulière dans le cas très fréquent et important d'un second membre particulier du type $P(x)e^{\alpha x}$.

Théorème 2.4. Soit $ay''+by'+cy=P(x)e^{\alpha x}\quad(EDL2A)$ avec : $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3\quad a\neq 0$
$P\in\mathbb{K}[X]\quad\alpha\in\mathbb{K}$.

• si α non racine de (EC) alors il y a une solution particulière du type $Q(x)e^{\alpha x}$
• si α racine simple de (EC) alors il y a une solution particulière du type $xQ(x)e^{\alpha x}$
• si α racine double de (EC) alors il y a une solution particulière du type $x^2Q(x)e^{\alpha x}$
avec$\begin{cases} Q\in\mathbb{K}[X]\\ deg\ Q=deg\ P.\end{cases}$

Démonstration:
1)<u>Cas où $\alpha=0$</u> .
• Si $c\neq 0$, il s'agit de prouver que l'équation : $ay''+by'+cy=P(x)$Ⓔ admet une solution particulière $Q\in\mathbb{K}[X]$ avec $deg\ Q=deg\ P$.
Soit $deg\ P=n$ et L : $\begin{pmatrix}\mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X]\\ y & \mapsto & ay''+by'+cy\end{pmatrix}$(évidemment endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$).
En munissant $\mathbb{K}_n[X]$ de sa base canonique $\mathcal{B}=(1,X,\ldots,X^n)$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} c & b & 2a & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & c & 2b & 6a & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \vdots & \ddots & c & 3b & 12a & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1)a \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & nb \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}) \text{ (et même } \mathcal{TS}_n(\mathbb{K})\text{)}.$$

Puisque $c \neq 0$, on a de suite L bijective (par exemple avec $\det L = c^{n+1}$ ou même directement en résolvant le système triangulaire : $L(Q) = P$) et donc Ⓔ admet une solution Q dans $\mathbb{K}_n[X]$ unique [la résolution du système , en commençant par la dernière ligne , prouve même que Q est de degré n] .

• Si $c = 0$ *et* $b \neq 0$ alors : Ⓔ $\Leftrightarrow ay'' + by' = P(x) \Leftrightarrow z' + \dfrac{b}{a}z = P(x)$Ⓕ en posant $z = y'$.

Or on a vu qu'il y a une solution de Ⓕ du type $R(x)$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$ et $deg\ R = deg\ P$; en prenant pour y la primitive de R nulle en 0 , on a bien une solution de Ⓔ du type $xQ(x)$ avec$\begin{cases} Q \in \mathbb{K}[X] \\ deg\ Q = deg\ P. \end{cases}$

• Enfin si $c = b = 0$ alors : Ⓔ $\Leftrightarrow y'' = \dfrac{P(x)}{a}$

En prenant la biprimitive de $\dfrac{P(x)}{a}$ nulle en 0 ainsi que sa dérivée , on a bien une solution de Ⓔ du type $x^2Q(x)$ avec$\begin{cases} Q \in \mathbb{K}[X] \\ deg\ Q = deg\ P. \end{cases}$

2)Cas α quelconque : toute $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ peut s'écrire : $y = ze^{\alpha x}$ avec $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et on a :
$y' = (z' + \alpha z)e^{\alpha x}$ et $y'' = (z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z)e^{\alpha x}$ et donc :
$ay'' + by' + cy = [az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z]e^{\alpha x}$
Donc : $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x} \Leftrightarrow az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$ et on conclut donc en utilisant les résultats démontrés au 1)
c.q.f.d.$\odot$

♣ Exemple 2.4. $y'' + y = \cos x\ (EDL2A)$
•$(EDL2H)$ $y''+y = 0$ *dont la solution générale est (voir corollaire 2.3)* $y = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
• *Puisque* $\cos x = \Re e(e^{ix})$ *on cherche une solution particulière de* $y'' + y = e^{ix}$ (F) *du type* $y = xke^{ix}$ $k \in \mathbb{C}$ *(car ici* i *est racine de l'équation caractéristique associèe).*
$y' = k(1 + ix)e^{ix}$ *;* $y'' = k(-x + 2i)e^{ix}$ *; donc :*
y solution de $EDL2A) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \quad k2ie^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$ *, d'où , pour* (F) *, la solution particulière* $y = -\dfrac{i}{2}e^{ix}$ *, et , pour (EDL2A), la solution particulière :* $y = \Re e(-\dfrac{i}{2}e^{ix}) = \dfrac{x \sin x}{2}$.
Finalement , solution générale de $(EDL2A)$ *:* $y = \dfrac{x \sin x}{2} + \lambda \cos x + \mu \sin x \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

♣ Exemple 2.5.

$y'' + 3y' - 4y = x\text{sh}x\ (EDL2A)$
•$(EDL2H)$: $y'' + 3y' - 4y = 0$;
$(EC) r^2 + 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow r = 1$ *ou* $r = -4$ d'où :
solution générale de $(EDL2H)$: $y = \lambda e^x + \mu e^{-4x}$
•$x\text{sh}x = x\dfrac{e^x}{2} - x\dfrac{e^{-x}}{2}$

On cherche déjà une solution particulière de $y'' + 3y' - 4y = x\dfrac{e^x}{2}$ (F) du type :
$y = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$ (car 1 racine de (EC)) ;
$y' = (ax^2 + (2a+b)x + b)e^x$; $y'' = (ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)e^x$

y solution de (EDL2A) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\quad (10ax+2a+5b)e^x = x\dfrac{e^x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = \dfrac{1}{2} \\ 2a+5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{20} \\ b = -\dfrac{1}{50} \end{cases}$

D'où , pour (F) , la solution particulière : $y = \left(\dfrac{1}{20}x^2 - \dfrac{1}{50}x\right)e^x$

De même , on trouve pour solution particulière de : $y''+3y'-4y = -x\dfrac{e^{-x}}{2}$ (F) : $y = \left(\dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{72}\right)e^{-x}$

Finalement : solution générale de $(EDL2A)$:
$y = \left(\dfrac{1}{20}x^2 - \dfrac{1}{50}x\right)e^x + \left(\dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{72}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{-4x} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

♣ **Exemple 2.6.** *On considère un solide de masse m suspendu à un ressort et soumis à :*
son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
une force de tension due au ressort $\overrightarrow{T}$
une force de frottement du type $\overrightarrow{F} = -f\overrightarrow{v}$ $\quad (f > 0)$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse
Décrire le mouvement du centre de gravité G du solide .

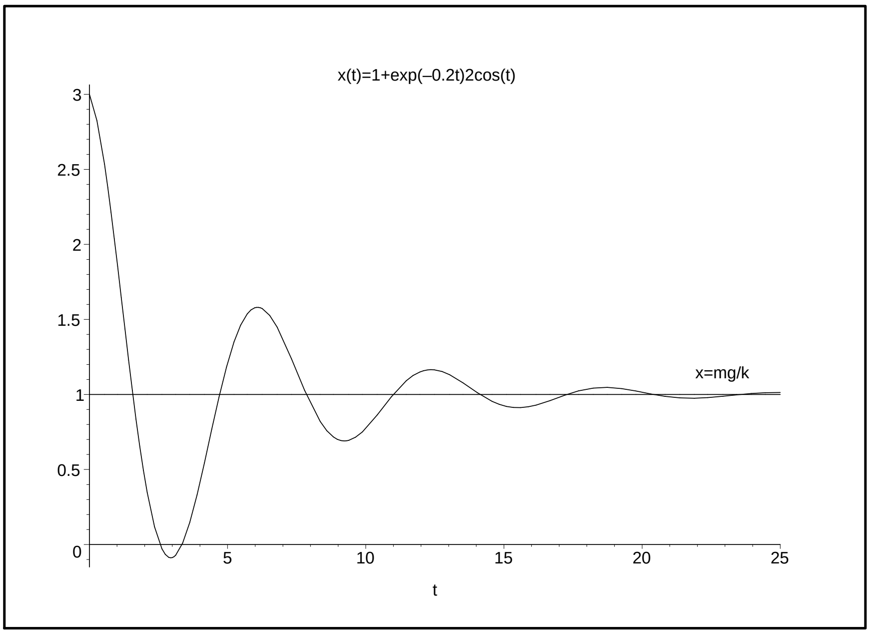
Considérons un axe $(O, \overrightarrow{i})$ orienté vers "le bas" , O étant la position du centre de gravité G du solide quand le ressort n'est pas tendu et soit $x(t)$ l'abscisse de G à l'instant t (x 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$) .
Le principe fondamental de la dynamique ou $2^{ème}$ loi de Newton donne :
$\Sigma\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ $\quad$ *($\overrightarrow{\gamma}$ désignant l'accélération) c'est à dire ici : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$ $(\star)$*
D'après la loi de Hooke , la composante de $\overrightarrow{T}$ suivant $\overrightarrow{i}$ est du type $-kx(t)$ ($k > 0$ étant un coefficient , dépendant du ressort , qu'on appelle coefficient de raideur).
En considérant la composante suivant $\overrightarrow{i}$, la relation $(\star)$ donne :
$mg - kx(t) - fx'(t) = mx''(t)$ *c'est à dire : $mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = mg$ $(EDL2A)$.*
$(EDL2H)$: $\quad mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = 0$;
(EC) $\quad mr^2 + fr + k = 0 \qquad \Delta = f^2 - 4mk$.
• *Si le frottement n'est pas "trop grand" , plus précisément , si $f < 2\sqrt{mk}$:*
Alors $\Delta < 0$ donc (EC) admet 2 racines non réelles complexes conjuguées :
$r_1 = \dfrac{-f - i\sqrt{\Delta}}{2m}$ *et* $r_2 = \dfrac{-f + i\sqrt{\Delta}}{2m}$

Solution générale de $(EDL2H)$: $x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}R\cos\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2m}t - \phi\right) \quad (R, \phi) \in \mathbb{R}^2$

Par ailleurs , $(EDL2A)$ admet comme solution évidente : $x(t) = \dfrac{mg}{k}$ donc ;

Solution générale de $(EDL2A)$: $x(t) = \dfrac{mg}{k} + e^{-\frac{f}{2m}t}R\cos\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2m}t - \phi\right) \quad (R, \phi) \in \mathbb{R}^2$

Voir ci-contre un exemple de représentation graphique d'une telle fonction .



Comme : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \left| e^{-\frac{f}{2m}t} R\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t - \phi\right)\right| \leq e^{-\frac{f}{2m}t}$ *, on déduit de suite :*

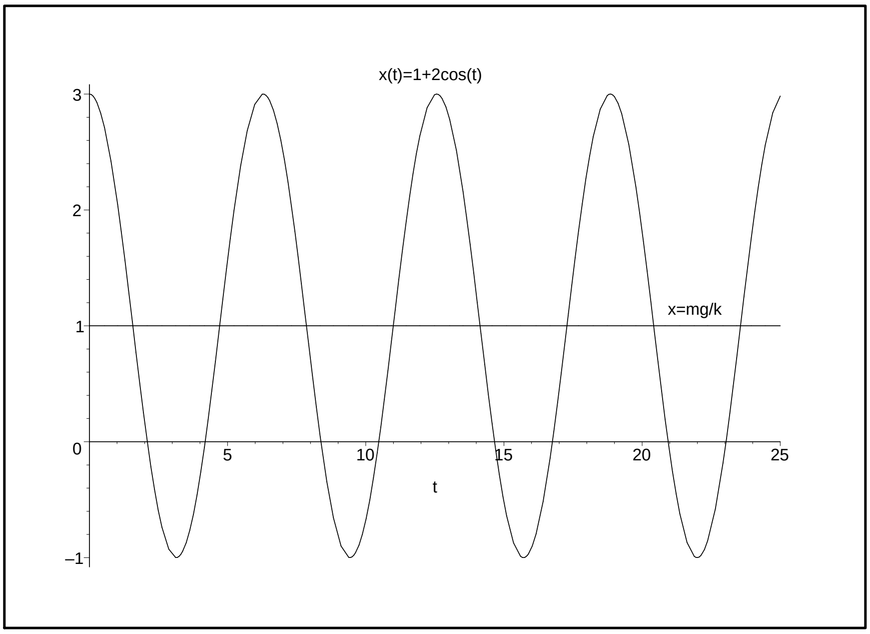
$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{f}{2m}t} R\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t - \phi\right) = 0$ *, d'où :* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \frac{mg}{k}$.

Autrement dit , le solide "tend" vers la position définie par $x = \frac{mg}{k}$ *(oscillations amorties).*

Remarque :*Dans le cas où on néglige le frottement (* $f = 0$ *), on trouve un mouvement défini par :*

$x(t) = \frac{mg}{k} + R\cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t - \phi\right) \quad (R, \phi) \in \mathbb{R}^2$.

(oscillations non amorties "autour" de la position $x = \frac{mg}{k}$*).*



• *Terminer en traitant les 2 autres cas :* $f = 2\sqrt{mk}$ *et* $f > 2\sqrt{mk}$