Partie 0 : Dénombrement.

N.Auxire

24 janvier 2017

Définition

⋆ L'**univers** U d'une expérience aléatoire est :

l'ensemble non vide des résultats possibles.

Définition

- L'**univers** U d'une expérience aléatoire est :

  l'ensemble non vide des résultats possibles.

- U est **fini** ssi :

  il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur U.

  L'entier n est appelé **cardinal** de U.

Définition

- L'**univers** U d'une expérience aléatoire est :

  l'ensemble non vide des résultats possibles.

- U est **fini** ssi :

  il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur U.
  L'entier n est appelé **cardinal** de U.

- U est **infini dénombrable** ssi :

  il existe une partie I non vide et non majorée de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une bijection de I sur U.

Définition

- ⋆ L'**univers** U d'une expérience aléatoire est :

  l'ensemble non vide des résultats possibles.

- ⋆ U est **fini** ssi :

  il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur U.
  L'entier n est appelé **cardinal** de U.

- ⋆ U est **infini dénombrable** ssi :

  il existe une partie I non vide et non majorée de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et une bijection de I sur U.

- ⋆ U est **infini non dénombrable** ssi :

  U n'est pas dénombrable.

Remarque

- $\star$ Autrement dit :
  U est dénombrable si l'on peut indicer ses éléments.

- $\star$ Différentes notations : $\quad \mathrm{card}(E) \quad |E| \quad \#(E)$

- $\star$ Convention : $\quad E = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{card}(E) = 0$

Ex.1 Rendre l'initiale d'un mot tiré au hasard dans le dictionnaire.

Le Nomade, Antibes
www.alamy.com

$$\ell \left| \begin{array}{lcl} [\![1,26]\!] & \longrightarrow & \{a, b, \dots, y, z\} \\ & & \\ k & \longmapsto & \ell(k) = k^e \text{ lettre} \end{array} \right.$$

Suite ℓ bornée donc U fini.

Ex.1 Rendre l'initiale d'un mot tiré au hasard dans le dictionnaire.

Le Nomade, Antibes
www.alamy.com

$$\ell \left| \begin{array}{lcl} [\![1, 26]\!] & \longrightarrow & \{a, b, \dots, y, z\} \\ k & \longmapsto & \ell(k) = k^e \text{ lettre} \end{array} \right.$$

Suite ℓ bornée donc U fini.

Ex.2 Lancer une pièce autant de fois qu'il faut jusqu'à obtenir *face*.

$$u \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \{pile\}^\infty \times \{face\} \\ k & \longmapsto & u(k) = (\underbrace{pile, \dots}_{(k-1) \text{ piles}}, face) \end{array} \right.$$

Suite u non bornée donc U dénombrable infini.

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis.

- ⋆ *Principe additif :*

$$\boxed{E \cap F = \emptyset \Rightarrow card(E \cup F) = card(E) + card(F)}$$

- ⋆ *Principe multiplicatif :*

$$\boxed{card(E \times F) = card(E) \times card(F)}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis.

- ⋆ *Principe additif :*

$$\boxed{E \cap F = \emptyset \Rightarrow card(E \cup F) = card(E) + card(F)}$$

- ⋆ *Principe multiplicatif :*

$$\boxed{card(E \times F) = card(E) \times card(F)}$$

Remarque.

Si E et F sont disjoints alors on peut utiliser le symbole d'**union disjointe** : $E \sqcup F$.

Corollaire. Soit E un ensemble fini.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\boxed{\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)}$$

Corollaire. Soit E un ensemble fini.
Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\boxed{\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)}$$

Remarque.

Opérations ensemblistes	**Propriétés d'événements**	**Opérations numériques**
disjonction	disjonction	addition
conjonction	indépendance	multiplication
différence	complémentarité	différence

Définition

- $\star$ Dénombrement : *faire sortir* le nombre.

- $\star$ Les procédures de dénombrement :
  - $\star$ la figuration : tableau, arbre, diagramme de Venn
  - $\star$ le comptage : énumération
  - $\star$ les opérations ensemblistes :
    partition, passage au complémentaire, crible
  - $\star$ les formules fondées sur un modèle d'applications.

Exercice

Tirage d'une main dans un jeu de poker J.

Q.1 Définir l'univers U et le dénombrer.

Q.2 Dénombrer les mains comportant exactement une paire.
Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

Q.3 Dénombrer les quintes flush.
Quinte flush $\equiv$ 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur.

Q.1 : Définir l'univers U et le dénombrer.

$\star$ U : ensemble des sous-ensembles de 5 cartes prises parmi 32.

$$U \subset \mathcal{P}(J)$$

$$U = \{\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}, \forall k \in [\![1, 5]\!] c_k \in J\}$$

Q.1 : Définir l'univers U et le dénombrer.

⋆ U : ensemble des sous-ensembles de 5 cartes prises parmi 32.

$$U \subset \mathcal{P}(J)$$

$$U = \{\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}, \forall k \in [\![1, 5]\!] c_k \in J\}$$

⋆ D'après le **modèle des combinaisons** :

$$\boxed{\mathrm{card}(U) = \binom{32}{5}}$$

$$\binom{32}{5} \underbrace{=}_{\mathrm{A.N}} 32 \times 31 \times 29 \times 7 \underbrace{=}_{\mathrm{Calcul}} 2^5 \times (30^2 - 1) \times 7$$

$$\underbrace{=}_{\mathrm{Exact}} 2^5 \times (6300 - 7) \underbrace{\sim}_{\mathrm{Ordre}} 2 \times 10^5$$

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$								
$\diamondsuit$								
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$								
$\diamondsuit$								
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$			$\times$					
$\diamondsuit$			$\times$					
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
$\diamondsuit$			$\times$					
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
$\diamondsuit$			$\times$ $\times$					
$\spadesuit$								
$\clubsuit$			$\times$					

Q.2 :Dénombrer les mains comportant exactement une paire.

Paire $\equiv$ deux cartes de même valeur.

$\star$ Un **tableau** permet de classer les éléments de J par valeur ou couleur.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
$\diamondsuit$			$\times$ $\times$	$\times$				
$\spadesuit$					$\times$			
$\clubsuit$			$\times$			$\times$		

Q.2 (suite)

⋆ **Stratégie de dénombrement :** analyse | principe multiplicatif

- les singletons donnant la valeur de la paire : $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- les paires associées à cette valeur : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- les triplets de valeurs parmi les 7 valeurs restantes : $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- les singletons de couleur pour chaque valeur : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q.2 (suite)

⋆ **Stratégie de dénombrement :** analyse | principe multiplicatif

- les singletons donnant la valeur de la paire : $\binom{8}{1}$.

- les paires associées à cette valeur : $\binom{4}{2}$

- les triplets de valeurs parmi les 7 valeurs restantes : $\binom{7}{3}$.

- les singletons de couleur pour chaque valeur : $\binom{4}{1}$.

⋆ **Résultat :** $\boxed{\binom{8}{1}\binom{4}{2}\times\binom{7}{3}\binom{4}{1}^3}$

$$\underbrace{=}_{\text{A.N}} 8\times 6\times 35\times 4^3 \underbrace{=}_{\text{Calcul}} 105\times 2^{10} \underbrace{\sim}_{\text{Ordre}} 10^5 \underbrace{=}_{\text{Exact}} 107520$$

Q.3 : Dénombrer les quintes flush.

Quinte flush $\equiv$ 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur.

$\star$ **Tableau :** outil d'analyse.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$								
$\diamondsuit$								
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.3 : Dénombrer les quintes flush.

Quinte flush $\equiv$ 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur.

$\star$ **Tableau :** outil d'analyse.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$								
$\diamondsuit$								
$\spadesuit$								
$\clubsuit$								

Q.3 : Dénombrer les quintes flush.

Quinte flush $\equiv$ 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur.

$\star$ **Tableau :** outil d'analyse.

couleur / valeur	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
$\heartsuit$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
$\heartsuit$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$\heartsuit$			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\heartsuit$				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Q.3 : suite.

Soit Q_F l'ensemble de quintes flush.
$\star$ **Stratégie :** partition de Q_F | principe additif.

(1) Partition : $Q_F = Q_F^{\heartsuit} \sqcup Q_F^{\diamondsuit} \sqcup Q_F^{\spadesuit} \sqcup Q_F^{\clubsuit}$

(2) Sous-ensembles de même cardinal : $\mathrm{card}(Q_F) = 4 \times \mathrm{card}(Q_F^{\heartsuit})$

(3) Énumération :

$$Q_F^{\heartsuit} = \{\, \{As, Roi, Dame, Valet, 10\}, \{Roi, Dame, Valet, 10, 9\}, \{Dame, Valet, 10, 9, 8\}, \{Valet, 10, 9, 8, 7\} \,\}$$

Q.3 : suite.

Soit Q_F l'ensemble de quintes flush.

⋆ **Stratégie :** partition de Q_F | principe additif.

(1) Partition : $Q_F = Q_F^{\heartsuit} \sqcup Q_F^{\diamondsuit} \sqcup Q_F^{\spadesuit} \sqcup Q_F^{\clubsuit}$

(2) Sous-ensembles de même cardinal : $\mathrm{card}(Q_F) = 4 \times \mathrm{card}(Q_F^{\heartsuit})$

(3) Énumération :

$$Q_F^{\heartsuit} = \{\, \{As, Roi, Dame, Valet, 10\}, \{Roi, Dame, Valet, 10, 9\}, \{Dame, Valet, 10, 9, 8\}, \{Valet, 10, 9, 8, 7\} \,\}$$

⋆ **Résultat :** $\boxed{\mathrm{card}(Q_F) = 16}$

Théorème

Soient E, F *deux ensembles finis non vides.*
Soit $\mathcal{A}(E, F)$ *l'ensemble des applications de* E *dans* F.

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.
Soit $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

(1) Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$.
Soient $e_1, e_2, \ldots, e_{card(E)}$ les éléments de E.
*f est notée sous forme de **liste** :*

$$\boxed{(y_1, y_2, \ldots, y_{card(E)}) \quad / \quad \forall k \in [\![1, card(E)]\!] \quad y_k = f(e_k)}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.
Soit $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

(1) Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$.
Soient $e_1, e_2, \ldots, e_{card(E)}$ les éléments de E.
*f est notée sous forme de **liste** :*

$$\boxed{(y_1, y_2, \ldots, y_{card(E)}) \quad / \quad \forall k \in [\![1, card(E)]\!] \quad y_k = f(e_k)}$$

(2) $\mathcal{A}(E, F)$ et $F^{card(E)}$ sont en bijection.

$$\boxed{card(\mathcal{A}(E, F)) = card(F)^{card(E)}}$$

Corollaire. Soit E un ensemble fini.

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}}$$

Remarque. Binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{card}(E)} \binom{\mathrm{card}(E)}{k} = 2^{\mathrm{card}(E)}$$

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Un **arrangement** de E est une injection d'une partie de E dans E.
2. Une **permutation de** E est une bijection de E dans E.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Un **arrangement** de E est une injection d'une partie de E dans E.
2. Une **permutation de** E est une bijection de E dans E.

Code : $homme \mapsto 1 |\ femme \mapsto 2 |\ fille \mapsto 3$

Arrangement de 3 parmi 4

$\forall f \in \mathcal{I}(\{1,2,3\}\ ,\ \{1,2,3,4\})$

$3 - liste :\ (f(1), f(2), f(3))$

$(1, 2, 4)$

Un couple et une fille.

$(4, 2, 1)$

Une fille et sa mère ... et un homme.

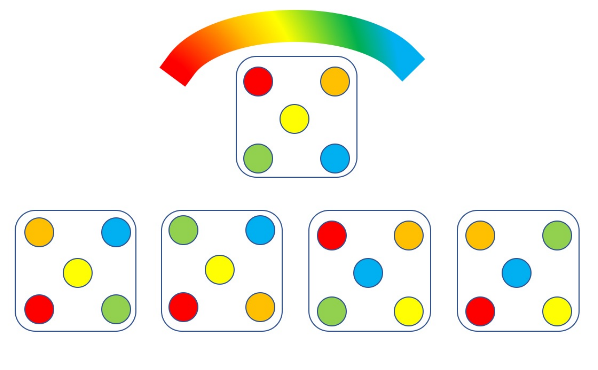
$(2, 4, 3)$

Une fille et ses parents.
Une famille unie?

Exemple

Codage : *rouge* $\mapsto$ 1 | *jaune* $\mapsto$ 2 | *vert* $\mapsto$ 3 | *bleu* $\mapsto$ 4

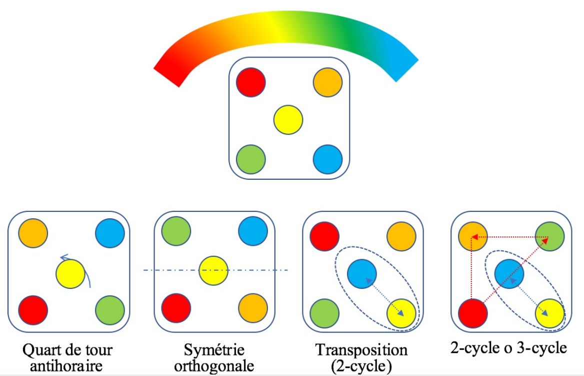
Permutations dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



Exemple

Codage : *rouge* $\mapsto$ 1 | *jaune* $\mapsto$ 2 | *vert* $\mapsto$ 3 | *bleu* $\mapsto$ 4

Permutations dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

1. *Si $card(E) = card(F)$ alors :*

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{A}(E,F) \;\; (f \;\; injective) \Leftrightarrow (f \;\; surjective) \Leftrightarrow (f \;\; bijective)}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

1. *Si $card(E) = card(F)$ alors :*

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{A}(E,F) \ \ (f \ \ injective) \Leftrightarrow (f \ \ surjective) \Leftrightarrow (f \ \ bijective)}$$

2. *Soit $\mathcal{I}(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F.*

$$\boxed{card(\mathcal{I}(E,F)) = \begin{cases} 0 & si \ card(E) > card(F) \\ card(F)! & si \ card(E) = card(F) \\ \dfrac{card(F)!}{[card(F) - card(E)]!} & si \ card(E) < card(F) \end{cases}}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

3. *Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{I}(E, F)$ définie par :*

$$\forall f, g \in \mathcal{I}(E, F) \quad (f \mathcal{R} g) \Leftrightarrow f(E) = g(E)$$

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ partitionne } \mathcal{I}(E, F) \text{ en } \binom{card(F)}{card(E)} \text{ classes d'équivalence.}}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

3. *Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{I}(E,F)$ définie par :*

$$\forall f, g \in \mathcal{I}(E,F) \quad (f\mathcal{R}g) \Leftrightarrow f(E) = g(E)$$

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ partitionne } \mathcal{I}(E,F) \text{ en } \binom{card(F)}{card(E)} \text{ classes d'équivalence.}}$$

4. *Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que : $0 < p < n$.*
Soit $\mathcal{M}_c$, l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Alors :

$$\boxed{card(\mathcal{M}_c) = \binom{n}{p}}$$

Exemple

Injections dans $E = \{1, 2, 3\}$ dans $F = \{a, b, c, d\}$

- $\star$ Classe de $\{a, b, c\}$:
  $\{(a, b, c), (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)\}$
- $\star$ Classe de $\{a, b, d\}$:
  $\{(a, b, d), (a, d, b), (d, b, a), (b, a, d), (b, d, a), (d, a, b)\}$
- $\star$ Classe de $\{a, c, d\}$:
  $\{(a, c, d), (a, d, c), (d, c, a), (c, a, d), (c, d, a), (d, a, c)\}$
- $\star$ Classe de $\{b, c, d\}$:
  $\{(b, c, d), (b, d, c), (d, c, b), (c, b, d), (c, d, b), (d, c, b)\}$

Remarque : Une classe est un ensemble noté $\{\ldots\}$.
Une injection est une application notée $(\ldots)$.

Exemple

Arrangements à 3 éléments dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$\star$ Classe de $\{1, 2, 3\}$:

$$\{{\color{red}(1, 2, 3)}, (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$$

$\star$ Classe de $\{1, 3, 4\}$:

$$\{(1, 3, 4), (1, 4, 3), {\color{red}(4, 3, 1)}, (3, 1, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 3)\}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

3 *Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{I}(E,F)$ définie par :*

$$\forall f, g \in \mathcal{I}(E,F) \quad (f\mathcal{R}g) \Leftrightarrow f(E) = g(E)$$

$$\boxed{\mathcal{R} \textit{ partitionne } \mathcal{I}(E,F) \textit{ en } \binom{card(F)}{card(E)} \textit{ classes d'équivalence.}}$$

Théorème

Soient E, F deux ensembles finis non vides.

3 *Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{I}(E, F)$ définie par :*

$$\forall f, g \in \mathcal{I}(E, F) \quad (f \mathcal{R} g) \Leftrightarrow f(E) = g(E)$$

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ partitionne } \mathcal{I}(E, F) \text{ en } \binom{card(F)}{card(E)} \text{ classes d'équivalence.}}$$

4 *Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que : $0 < p < n$.*
Soit $\mathcal{M}_c$, l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors :

$$\boxed{card\left(\mathcal{M}_c\right) = \binom{n}{p}}$$

Formulaire.

$\star \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p parmi n.

$\star \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ arrangements strictement croissants de p parmi n.

$\star$ $n!$ permutations de n éléments.

$\star \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ combinaisons de p éléments parmi n.

Exemple

⋆ Une boîte comporte trois compartiments ouverts.

⋆ On y place n billes identiques de telle sorte que lorsqu'on bascule la boîte, chaque bille vient se placer aléatoirement dans l'un des trois compartiments.

⋆ On dénombre les applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$.

$\boxed{\textit{i.e.} : 3^n \text{ distributions possibles des billes dans la boîte}}$.

Exemple

$\star$ Une entreprise distribue aléatoirement 500 cuillers parmi 50000 paquets de céréales.

$\star$ On dénombre les injections de $[\![1, 500]\!]$ dans $[\![1, 50000]\!]$.

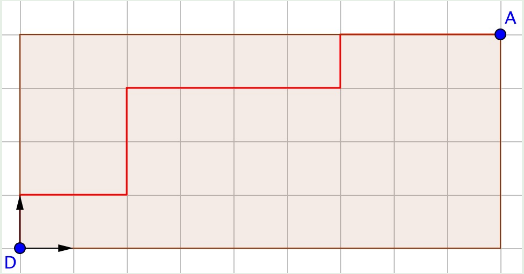
$\boxed{i.e. : \dfrac{50000!}{49500!} \text{ distributions possibles de cuillers parmi les paquets.}}$

Exemple

⋆ Un chemin du point D au point A suit les arcs orientés d'un quadrillage de dimension $a \times b$.

⋆ On dénombre les injections strictement croissantes de $[\![1, a]\!]$ dans $[\![1, a+b]\!]$.

$$\boxed{i.e. : \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} \text{ chemins possibles de } A \text{ à } B.}$$



Exemple

⋆ Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$de $\mathbb{N}$ de somme égale à 5.

Exemple

⋆ Dénombrer les suites $(x_1, \dots, x_p)$de $\mathbb{N}$ de somme égale à 5.

⋆ Algorithme du sac à dos.

p	Suite de somme 5	Suite des cumuls
1	(5)	5
2	(4,1) (1,4) (3,2) (2,3)	(4,5) (1,5) (3,5) (2,5)
3	(3,1,1) (1,3,1) (1,1,3) (2,2,1) (2,1,2) (1,2,2)	(3,4,5) (1,4,5) (1,2,5) (2,4,5) (2,3,5) (1,3,5)
4	(2,1,1,1) (1,2,1,1) (1,1,2,1) (1,1,1,2)	(2,3,4,5) (1,3,4,5) (1,2,4,5) (1,2,3,5)
5	(1,1,1,1,1)	(1,2,3,4,5)

Exemple

⋆ Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$de $\mathbb{N}$ de somme égale à 5.

⋆ Algorithme du sac à dos.

p	Suite de somme 5	Suite des cumuls
1	(5)	5
2	(4,1) (1,4) (3,2) (2,3)	(4,5) (1,5) (3,5) (2,5)
3	(3,1,1) (1,3,1) (1,1,3) (2,2,1) (2,1,2) (1,2,2)	(3,4,5) (1,4,5) (1,2,5) (2,4,5) (2,3,5) (1,3,5)
4	(2,1,1,1) (1,2,1,1) (1,1,2,1) (1,1,1,2)	(2,3,4,5) (1,3,4,5) (1,2,4,5) (1,2,3,5)
5	(1,1,1,1,1)	(1,2,3,4,5)

⋆ Dénombrer les suites strictement croissantes de type :

$$(5), (a, 5), (a, b, 5), (a, b, c, 5), (a, b, c, d, 5)$$

⋆ Dénombrer les suites strictement croissantes dans $[\![1, 4]\!]$:

$$\sum_{p=0}^{4} \binom{4}{p} = 2^4 = 16(\text{binôme de Newton})$$

Exercice

Soient n, p entiers naturels non nuls.
Dénombrer les $p-$listes $(x_1, \ldots, x_p)$ d'entiers naturels non nuls de somme n.

1. Justifier que chaque terme appartient à $[\![1, n]\!]$.
2. Soit $\mathcal{S}_n(p)$ l'ensemble des $p-$listes de somme n.

$$\text{Soit } \phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(p) & \longrightarrow & [\![1, n]\!]^p \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \left(\underbrace{x_1}_{c_1}, \underbrace{x_1 + x_2}_{c_2}, \ldots, \underbrace{\sum_{j=1}^{k} x_j}_{c_k}, \ldots, \underbrace{n}_{c_p}\right) \end{array} \right. .$$

   a. Justifier que, pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}_n(p)$, alors $\phi((x_1, \ldots, x_p))$ est une $p-$liste croissante.
   b. Soit $\mathcal{C}_n(p)$ l'ensemble des $p-$listes strictement croissantes. Montrer que ϕ est bijective de $\mathcal{S}_n(p)$ dans $\mathcal{C}_n(p)$.

3. Conclure : dénombrer les listes d'entiers naturels de somme n.

Exercice

Soient E, F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p.
Vérifier que le nombre de surjections de E dans F est :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n \\ n! & \text{si} \quad p = n \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n & \text{si} \quad p < n \end{cases}$$