Séries de Fourier (1)

J. Ribault

7 avril 2017

Proposition

- $\left(t \mapsto e^{int}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$ (donc de $\mathcal{D}_{2\pi}$).
- $(t \mapsto 1, t \mapsto \cos(nt), t \mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}*}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_{2\pi}$ (donc de $\mathcal{D}_{2\pi}$).

Preuve de la proposition 3

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n \ : \ t \mapsto e^{int}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : t \mapsto \cos(nt)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n : t \mapsto \sin(nt)$

On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\int_{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{\left(e^{2i\pi}\right)^k}{ik} - \frac{\left(e^0\right)^k}{ik} = \frac{1}{ik} - \frac{1}{ik} = 0$$

$$\int_{2\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \int_{2\pi} \sin(kt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\mathrm{d}t = 0$$

Montrons que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée

- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$(e_n|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} e^{-int}e^{int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\mathrm{d}t = 1$$

- Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}(e_n|e_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} e^{-int}e^{imt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} e^{i\underbrace{(m-n)}_{\neq 0}t}\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

Finalement, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, $(e_n|e_m) = \delta_{n\,m}$.
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Montrons que $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une famille orthogonale

- Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
(\gamma_n|\gamma_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{\cos(nt)}\cos(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{2\pi} (\cos((\underbrace{n+m}_{\neq 0})t) + \cos((\underbrace{n-m}_{\neq 0})t))\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin a \sin b = -\tfrac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))}$$

- Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
(\sigma_n|\sigma_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{\sin(nt)}\sin(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{2\pi} (\cos((\underbrace{n+m}_{\neq 0})t) - \cos((\underbrace{n-m}_{\neq 0})t))\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
(\gamma_n|\sigma_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \overline{\cos(nt)}\sin(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{2\pi} (\sin((n+m)t) + \sin((m-n)t))\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

CONCLUSION

Les vecteurs de la famille $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont orthogonaux deux à deux.

Cette famille est donc orthogonale.

De plus c'est une famille de vecteurs non nuls, donc elle est libre...

Montrons que la famille $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ n'est pas orthonormée

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$

$$
\begin{aligned}
(\gamma_n|\gamma_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nt) + 1)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nt)\mathrm{d}t}_{=0} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- $(\gamma_0|\gamma_0) = 1$

Montrons que la famille $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ n'est pas orthonormée

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sin^2 a = -\frac{1}{2}(\cos(2a) - 1)$

$$\begin{aligned}
(\sigma_n|\sigma_n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nt) - 1)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nt)\mathrm{d}t}_{=0} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$