1 Quantificateurs propositionnels.

On considère une proposition portant sur un ou plusieurs élements non valués, chacun d'eux étant considéré dans un domaine de définition.
Quantifier une proposition consiste à indiquer combien d'éléments du domaine de définition vérifient cette proposition.
Il y a autant de quantificateur que d'éléments non valués dans la proposition.
La quantification précède la proposition.

Exemple 1.1.
P_1 : (deux entiers sont de même parité si et seulement si leur différence est paire)
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, a et b sont de même parité si et seulement si 2 divise $(a-b)$.

P_2 : (la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang).
La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant fixée,
il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est supérieur ou égal à n_0 alors u_n est égal à u_{n_0}.

Définition 1.1.
Soit $P(x)$ une proposition relative à un élément x appartenant au domaine de définition $\mathscr{D}$.

Si $P(x)$ est vraie pour tout élément appartenant à $\mathscr{D}$ alors on note : $\forall x \in \mathscr{D},\ \ P(x)$.
Le quantificateur *pour tout* est dit **quantificateur universel** (notation $\forall$).

Si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément de $\mathscr{D}$ alors on note : $\exists x \in \mathscr{D},\ \ P(x)$.
Le quantificateur *au moins un* est dit **quantificateur d'existence** (notation $\exists$).

Si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément de $\mathscr{D}$ alors on note : $\exists! x \in \mathscr{D},\ \ P(x)$.
Le quantificateur *exactement un*est dit **quantificateur d'existence et d'unicité** (notation $\exists!$).

Exemple 1.2.
$P_3 : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \quad [(n \leq x)\ et\ (x < n+1)]$
$P_4 : \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2|n^2) \Rightarrow (2|n)$
$P_5 : \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2|(2n)^2)$

2 Permutations d'expressions quantifiées dans une proposition.

La permutation de deux expressions quantifiées avec le même quantificateur ne change pas la proposition.

La permutation de deux expressions quantifiées avec des quantificateurs différents change la proposition.

Exemple 2.1.
$P_6 : \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (e^{x+y} = e^x e^y)$

$P_7 : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\exists a \in \mathbb{Z}\ \ \exists b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\ \ x = \dfrac{a}{b})$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application numérique.
$P_8 : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad (f(x) = b)$
$P_9 : \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = b)$

3 Négation d'une proposition.

La négation d'une proposition quantifiée change chaque quantificateur et prend la négation de la propriété.
⚠Ne pas confondre négation d'une propositition et contraposée d'une réciproque.

Exemple 3.1. Application aux définitions ou théorèmes.
Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \lim u_n = \ell) \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathbb{R} \ \forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ [(n \geq N) \Rightarrow (|u_n - \ell| \leq \eta)])$
Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $(\exists! g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(g(x)) = g(f(x)) = x) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R} \ \exists! x \in \mathbb{R} \ f(x) = y)$

4 Rédaction d'un raisonnement par récurrence.

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et n_0, un entier naturel.
1- Annoncer le raisonnement : «Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.»
2- Initialiser le raisonnement : «Montrons que $P(n_0)$ est vraie.»
3- Faire la récurrence : «Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.»
4- Conclure : «$P(n_0)$ et $[\forall n \geq n_0 \ \ (P(n) \Rightarrow P(n+1))]$ sont vraies donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.»

Exemple 4.1. $\forall n \geq 2 \ \ \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ \ ((\sum_{k=1}^n a_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} a_j a_k)$

5 Exercices à préparer.

1. **Exercice : quantifier une proposition.**
   Exprimer, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes.
   Puis donner, pour chacune d'elles, leur négation.
   (a) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante.
   (b) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule au moins une fois.
   (c) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annule une et une seule fois.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   (f) Aucun terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule à partir d'un certain rang.

2. **Exercice : à propos du trinome de degré 2.**
   Soient a, b, c, trois réels avec a non nul.
   On considère la proposition suivante p :
   Si l'équation en x, $(ax^2 + bx + c = 0)$ à résoudre sur $\mathbb{R}$ admet deux solutions alors les coefficients a et c sont de signe contraire.
   (a) Traduire cette proposition avec les symboles mathématiques.
   (b) Ecrire q la réciproque de cette proposition.
   (c) Parmi les propositions p et q, une seule est vraie.
   Montrer la proposition qui est vraie et donner un contre-exemple pour la proposition fausse.

3. **Exercice : qu'est-ce qu'une suite non convergente ?**
   Voici une proposition :
   $$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \quad [\lim x_n = 1] \Rightarrow [\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p \geq n) \Rightarrow (x_p > 0)].$$
   (a) Traduire en langue naturelle cette proposition.
   (b) Ecrire en symboles mathématiques la contraposée de cette proposition.
   (c) Par un raisonnement direct, montrer que cette proposition est vraie .

4. **Exercice : récurrence numérique.**
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ (9 \mid 10^n - 1)$.
   Nota bene : le symbole $\mid$ signifie «*est diviseur de* ».

5. **Exercice : partie de $\mathbb{N}$.**
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les trois propositions suivantes :

$$(P_1)\ 1 \in A \qquad (P_2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*(n \in A \Rightarrow 2n \in A) \qquad (P_3)\ \forall n \in \mathbb{N}^*(n+1 \in A \Rightarrow n \in A)$$

   (a) Montrer que, pour tout n entier naturel, 2^n appartient à A.
   (b) Déduire que : $A = \mathbb{N}^*$.
   Pour cela, il suffira de montrer que tout entier naturel non nul appartient à A.

6. **Exercice : preuve par récurrence.**
Raisonner par récurrence pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+,\ \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geq 1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

7. **Exercice : congruences modulo 3.**
   (a) Soient a, b, c des entiers. On suppose de plus que c est un entier naturel non nul.
   La notation : $a \equiv b\,[\,c\,]$ signifie que a et b ont le même reste par la division euclidienne par c.
   Montrer que : $a \equiv b\,[\,c\,]$ équivaut au fait que $(a-b)$ soit multiple de c.
   (b) On considère la proposition : $5^p \equiv 2^p\,[\,3\,]$.
      (1) Quel est son domaine de définition ?
      (2) Quel est son domaine de validité ?
      (3) Quantifier la proposition.
   (c) On considère la proposition : $5^p \equiv -2^p\,[\,3\,]$.
   Mêmes questions qu'au (b).