1 Généralités sur les systèmes linéaires.

Définition 1.1. Soient n, p, deux entiers naturels non nuls. $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensemble de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un système linéaire S est la donnée **conjointe** de n équations **linéaires** en p inconnues x_1, x_2, $\cdots$, x_p à résoudre dans $\mathbb{K}^p$, à coefficients $a_{i,j}$ dans $\mathbb{K}$, de second membre b_i dans $\mathbb{K}$. Un tel système est noté :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}\times x_1 & + & \cdots & + & a_{1,j}\times x_j & + & \cdots & + & a_{1,p}\times x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i,1}\times x_1 & + & \cdots & + & a_{i,j}\times x_j & + & \cdots & + & a_{i,p}\times x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}\times x_1 & + & \cdots & + & a_{n,j}\times x_j & + & \cdots & + & a_{n,p}\times x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Vocabulaire et notations relatifs à un système linéaire.
- Une **solution est un p-uplet** de $\mathbb{K}^p$.
- L'**ensemble solution** est une partie de $\mathbb{K}^p$, éventuellement vide ou pleine, dont les éléments sont les p-uplets de $\mathbb{K}^p$ vérifiant le système. Il est souvent noté $\mathscr{S}(S)$.

Définition 1.2. Soit S un système linéaire à n équations et p inconnues à résoudre dans $\mathbb{K}^p$. Le système S est dit **homogène** si tous le second membre de chacune des n équations est nul.
Le système S est dit **échelonné** s'il existe une numérotation des inconnues et des équations telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, dans la i^e équation, toute inconnue d'indice strictement inférieur à i est affectée du coefficient nul :

$$\forall (i,j)[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \ j < i \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Exemple 1.1. Cas de systèmes échelonnés.

- (S_1) : $\left\{\begin{array}{rcl} x - 2t & = & 5 \\ 5y - 5t & = & 2 \end{array}\right.$.
  Le système a ici deux équations et trois inconnues : il est donc à résoudre dans $\mathbb{R}^3$.
  L'inconnue t est choisie comme paramètre. $\mathscr{S}(S_1)$ est une partie non propre et infinie de $\mathbb{R}^3$ décrite par remplacement : $\mathscr{S}(S_1) = \left\{\left(5+2t, \dfrac{2}{5}+t, t\right),\ \ t \in \mathbb{R}\right\}$.
- (S_2) : $x + 2y = 5$. Le système a ici une équation et deux inconnues : il est donc à résoudre dans $\mathbb{R}^2$.
  Une inconnue est choisie comme paramètre. $\mathscr{S}(S_2)$ est une partie non propre et infinie de $\mathbb{R}^2$ décrite par remplacement.
  ⋆ si x est choisie comme paramètre : $\mathscr{S}(S_2) = \left\{\left(x, \dfrac{5-x}{2}\right),\ \ x \in \mathbb{R}\right\}$.
  ⋆ si y est choisie comme paramètre : $\mathscr{S}(S_2) = \{(5-2y, y),\ \ y \in \mathbb{R}\}$.
- (S_3) : $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & b_1 \\ 5y & = & b_2 \\ 0 & = & b_3 \\ 0 & = & b_4 \end{array}\right.$ On discute en disjoignant les cas :
  ⋆ si b_3 et b_4 sont nuls alors $\mathscr{S}(S_1)$ est un singleton de $\mathbb{R}^2$: $\mathscr{S}(S_3) = \left\{\left(\dfrac{5b_1 - 2b_2}{5}, \dfrac{b_2}{5}\right)\right\}$.
  ⋆ si b_3 ou b_4 est non nul alors (S_1) est un système sans solution dans $\mathbb{R}^2$: $\mathscr{S}(S_3) = \emptyset$.

2 Systèmes linéaires équivalents.

Définition 2.1. Soit p un entier naturel non nul.
Deux systèmes linéaires sont **équivalents** dans $\mathbb{K}^p$ si et seulement si ils ont le même ensemble solution.
Une **opération de Gauss** est une opération qui transforme un système linéaire en un système équivalent.

Théorème 2.1. Soit p un entier naturel non nul. Soit $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i & = & b_1 \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2,i}x_i & = & b_2 \end{array} \right.$ dans $\mathbb{K}^p$.

- La permutation d'équations est une opération de Gauss.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i & = & b_1 \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2,i}x_i & = & b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow (S') : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{p} a_{2,i}x_i & = & b_2 \\ \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i & = & b_1 \end{array} \right. .$$

- Le remplacement d'une équation par une combinaison d'équations est une opération de Gauss.

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall \beta \in \mathbb{K}^*\ (S) : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i & = & b_1 \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2,i}x_i & = & b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow (S') : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i & = & b_1 \\ \alpha \sum_{i=1}^{p} a_{1,i}x_i + \beta \sum_{i=1}^{p} a_{2,i}x_i & = & \alpha b_1 + \beta b_2 \end{array} \right. .$$

Exemple 2.1. En appliquant 4 fois le théorème, on forme un système échelonné S' équivalent à S dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ 2x + 2y - 3z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0 \\ 4x + 3y - 5z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (S') : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ 4y - z & = & -2 \\ 3y + 0z & = & -1 \end{array} \right. . \Leftrightarrow (S') : \left\{ \begin{array}{rcl} x - z - y & = & 1 \\ z - 4y & = & 2 \\ 3y & = & -1 \end{array} \right. .$$

3 Notion de rang.

Définition 3.1. Le rang d'un système linéaire est le nombre d'équations du système échelonné équivalent.

Remarque 3.1. Soit S un système à p inconnues et à n équations dans $\mathbb{K}^p$.

- Le rang de S est noté $\mathrm{rg}(S)$. L'encadrement suivant est vérifié : $0 \leq \mathrm{rg}(S) \leq \min(n, p)$.
  $(p - \mathrm{rg}(S))$ inconnues, au plus, sont *utilisées* comme paramètres pour exprimer les éventuelles solutions du système. en comptant
- Les inconnies exprimées en fonction des paramètres sont dites *inconnues principales.*
- Les inconnues utilisées comme paramètres sont dites *inconnues secondaires.*

Théorème 3.1 (Théorème du rang). Soit S un système à p inconnues et à n équations dans $\mathbb{K}^p$.
Si $\mathrm{rg}(S) = n$ alors S admet au moins une solution.
Si $\mathrm{rg}(S) = p$ alors S admet au plus une solution.
Si $\mathrm{rg}(S) = n = p$ alors S admet exactement une solution. On dit que S est un **système de Cramer**.

4 Résolution de systèmes linéaires par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss : transformation d'un système linéaire en un système linéaire échelonné équivalent.

1. Ordonner les inconnues dans chaque équation.
2. Si nécessaire permuter les équations pour placer en première position une équation où la première inconnue est affectée du coefficient -1 ou 1. Cette première équation est appelée **premier pivot de Gauss**. Nommons-la ℓ_1.
   Cette équation N'EST PLUS MODIFIEE PAR LA SUITE.
3. Eliminer la première inconnue dans chaque équation suivante en substituant une combinaison linéaire :
   $\forall k \in \{2, 3, \cdots, n\}\quad \ell_k \leftarrow \ell_k - a_{k,1}\ell_1$.
4. Recommencer les étapes (2), (3), (4) avec les équations restantes jusqu'à obtenir un système échelonné.

Rédaction type de résolution d'un système linéaire. Soit m un réel.

Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_3+2x_4+x_5 & = & 1 \\ 3x_1-x_2+7x_3+5x_4+2x_5 & = & 6 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5 & = & -3 \\ x_1-2x_2+4x_3+x_4 & = & m \end{array}\right.$ à résoudre dans $\mathbb{R}^5$ par la méthode de Gauss.

Tant qu'on effectue des opérations de Gauss, on utilise une notation matricielle plus économique et plus lisible.

Dans l'écriture ci-dessous, que représente 7 ? Quelle est l'économie notationnelle ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1(\ell_1) \\ 3 & -1 & 7 & 5 & 2 & | & 6(\ell_2) \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & | & -3(\ell_3) \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & | & m(\ell_4) \end{pmatrix} \underset{\substack{\ell_1\,:\ \text{pivot} \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2-3\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3-\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4-\ell_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & | & m-1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\ell_2\,:\ \text{pivot} \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3+\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4-2\ell_2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & m-7 \end{pmatrix} \underset{\substack{\ell_3\,:\ \text{pivot} \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4+\ell_3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & m-8 \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss étant finie, on revient à un système d'équations qui constitue le problème.

Par la méthode de Gauss, on a donc montré : $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_3+2x_4+x_5 & = & 1 \\ -x_2+x_3-x_4-x_5 & = & 6 \\ -x_4-x_5 & = & -1 \\ 0 & = & m-8 \end{array}\right.$.

Le système est échelonné : il reste 3 équations. Le système est de rang 3.

Discutons l'ensemble solution, $\mathscr{S}(S)$, en fonction du paramètre m et du rang de S.

- Si $m \neq 8$ alors $\mathscr{S}(S) = \emptyset$.
- Si $m = 8$ alors on choisit x_3, x_5 comme paramètres.

On obtient : $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 1-x_5 \\ x_2 = -4+x_3 \\ x_1 = -1-2x_3+x_5 \end{array}\right.$

$$\mathscr{S}(S) = \left\{ (\underbrace{-1-2x_3+x_5}_{x_1}, \underbrace{-4+x_3}_{x_2}, x_3, \underbrace{1-x_5}_{x_4}, x_5), x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5 Exercices à préparer.

1. **Exercice : dans $\mathbb{R}^3$.**
Résoudre chaque système.

$$(S_\lambda) : \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 3 \end{cases} \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$

$$(S_k) : \begin{cases} kx + 2y + kz = 1 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un paramètre réel.}$$

2. **Exercice : dans $\mathbb{R}^n$.**
Pour chaque système :
– échelonner par la méthode de Gauss ;
– discuter le rang et la nature de l'ensemble solution ;
– décrire l'ensemble solution.

$$(S_1) : \begin{cases} \lambda x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} \lambda x - y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} \lambda x - y + z - t + w = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - t + 2w = 0 \\ 4x - 2y + 6z - 3t + 3w = 0 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} \lambda 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases}$$

3. **Problème de synthèse**

Partie 1 : la formule de Pascal.
Soient n, p deux entiers naturels.
On appelle *combinaison de p parmi n* le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n.
On note ce nombre $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ dans les cas où p appartient à l'ensemble $\{0, n\} \cup \{k \in \mathbb{N} \ / \ k > n\}$.

(b) Etude d'un exemple. Soit $E = \{a, b, c, d\}$.
Déterminer $\mathscr{P}(E)$ en extension.
Déduire la suite des combinaisons $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ p \end{pmatrix}\right)_{p \in \mathbb{N}}$.

(c) Soient E un ensemble de cardinal $n + 1$, x un élément de E et A une partie de E de cardinal $p + 1$.
En raisonnant par disjonction de cas sur l'appartenance de x à A, montrer la formule de Pascal :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}.$$

(d) Construire le triangle de Pascal pour n variant de 0 à 10.

Partie 2 : la formule du binôme de Newton.

(a) En raisonnant par récurrence sur $n (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, montrer la formule du binôme de Newton :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(b) En donnant des valeurs particulières au binôme (a, b), déduire la valeur en fonction de n des sommes

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

(c) Application. Pour tout entier naturel n, pour tout réel x, calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.

Partie 3 : calcul de sommes par congruence.

(a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On nomme :

$$A_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} \quad B_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \quad C_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}.$$

Soit ω une racine cubique de 1 dans $\mathbb{C}$.
Exprimer $(1+\omega)^n$ en fonction de ω, A_n, B_n et C_n.

(b) Déduire un système linéaire en (A_n, B_n, C_n) à résoudre dans $\mathbb{C}^3$ par la méthode de Gauss.

(c) Déterminer les valeurs de (A_n, B_n, C_n) en fonction de n.

(d) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à $p-1$ et r un entier entre 0 et $p-1$.
Décrire la procédure de calcul pour déterminer la suite $(A_{n,r})_{0 \leq r \leq p-1}$ où $A_{n,r} = \sum_{0 \leq pk+r \leq n} \binom{n}{pk+r}$.