càd $\begin{cases} -y + 3x + 2z = 7 \\ 14x + 2z = 23 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{22z - 29}{14} \\ x = \dfrac{23 - 2z}{14} \end{cases}$

Dans ce cas, le système est de rang 2 et l'ens de sol est

$\mathcal{S}(S_3) = \left\{ \left( \dfrac{23-2z}{14}, \dfrac{22z-29}{14}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

* Si $\lambda \neq 4$

Correction

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$$

$$\underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\iff} \begin{cases} -y + 3x + 2z = 7 \\ 2y + \lambda x - 3z = -1 \\ 2y + 8x - 2z = 9 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\iff}} \begin{cases} -y + 3x + 2z = 7 \\ (\lambda+6)x + z = 13 \\ 14x + 2z = 23 \end{cases}$$

$$\underset{\cancel{l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2}}{\overset{\cancel{l_2 \text{ pivot}}}{\cancel{\iff}}} \begin{cases} -y + 2z + 3x = 7 \\ z + (\lambda+6)x = 13 \\ 2z + 14x = 23 \end{cases}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\iff}} \begin{cases} -y + 2z + 3x = 7 \\ z + (\lambda+6)x = 13 \\ (2-2\lambda)x = -3 \end{cases}$$

Le système est échelonné, discutons le rang et l'ens sol du système en fonction de $\lambda$

$\cancel{\iff}$ 2

• Si $\lambda = 1$ alors la 3$^e$ équation est toujours fausse.

Le système est de rang 2

L'ens solution est l'ensemble vide

• si $\lambda \neq 1$

$(2 - 2\lambda)$ est inversible

Le système est de rang 3 et l'ens sol est un singleton de $\mathbb{R}^3$

Poursuivons la résolution du système

$$\begin{cases} -y + 2z + 3x = 7 \\ z + (\lambda+6)x = 13 \\ x = \dfrac{3}{2\lambda - 2} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1 - 3l_3 \\ l_2 \leftarrow l_2 - (\lambda+6)l_3}}{\overset{l_3 \text{ pivot}}{\iff}} \begin{cases} -y + 2z = 7 - \dfrac{9}{2\lambda-2} \\ z = 13 - \dfrac{(\lambda+6)3}{2\lambda-2} \\ x = \dfrac{3}{2\lambda-2} \end{cases}$$

$$\underset{l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\iff}} \begin{cases} -y = -19 + \dfrac{6\lambda + 27}{2\lambda - 2} \\ z = 13 - \dfrac{(\lambda+6)3}{2\lambda-2} \\ x = \dfrac{3}{2\lambda-2} \end{cases}$$

$\lambda$ étant fixé différent de 1

L'ens sol est le singleton $\left( \dfrac{3}{2\lambda-2}, 19 - \dfrac{6\lambda+27}{2\lambda-2}, 13 - \dfrac{(\lambda+6)3}{2\lambda-2} \right)$

Suite exercice 2

$$S_3 \begin{cases} \lambda x + 2y - 3z = -1 & (l_1) \\ 3x - y + 2z = 7 & (l_2) \\ 8x + 2y - 2z = 9 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_1 \leftrightarrow l_2 \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \\ l_3 \leftrightarrow l_4}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -y + 3x + 2z = 7 \\ 2y + 8x - 2z = 9 \\ 2y + \lambda x - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & -2 & 9 \\ 2 & \lambda & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$l_1$ pivot

$$\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 2 & 23 \\ 0 & (\lambda+6) & 3 & 13 \end{array}\right)$$

$l_2$ pivot

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 - (\lambda+6) l_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & (-2\lambda-9) & (-7\lambda-29) \end{array}\right)$$

$$\underset{l_3 \leftarrow -l_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 2\lambda+9 & 7\lambda+29 \end{array}\right)$$

Discutons le rang du système en fonction de $\lambda$

* Si $2\lambda + 9 = 7\lambda + 29$

$\Leftrightarrow 5\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -4$

Alors $S_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$l_1$ pivot
$\Longleftrightarrow$
$l_2 \leftarrow l_2 - 7l_1$
$l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -10 & 20 & -20 \\ 0 & -3-2\lambda & 7+3\lambda & -4-6\lambda \end{array}\right)$$

$\Longleftrightarrow$
$l_2 \leftarrow -\frac{1}{10} \times l_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3-2\lambda & 7+3\lambda & -4-6\lambda \end{array}\right)$$

$l_2$ pivot
$\Longleftrightarrow$
$l_3 \leftarrow l_3 - (3+2\lambda) l_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

échelonnement terminé

Discutons le rang du système en fonction de $\lambda$ :

* Si $(1-\lambda)=0$ soit $\lambda = 1$

Alors le système équivaut à $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

càd $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ \quad\; y - 2z = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 2 + 2z \end{cases}$

Dans ce cas, le système est de rang 2
et l'ens sol est $S_1 = \{(2-z, 2+2z, z), z \in \mathbb{R}\}$

* Si $\lambda \neq 1$ alors $(1-\lambda)$ est inversible dans $\mathbb{R}$

On peut donc multiplier la 3e ligne par $\frac{1}{1-\lambda}$

Le système équivaut à $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

càd $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ \quad\; y - 2z = 2 \\ \qquad\;\; z = 2 \end{cases}$

Dans ce cas le système est de rang 3

$S_1 = \{(0, 6, 2)\}$

$$S_2 \begin{cases} \lambda x - y - z = 1 & (l_1) \\ 2x + 2y - 3z = 0 & (l_2) \\ x + 2y - z = 0 & (l_3) \\ 4x + 3y - 5z = 1 & (l_4) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$
$l_1 \leftrightarrow l_3$
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 & (l_1) \\ 2x + 2y - 3z = 0 & (l_2) \\ \lambda x - y - z = 1 & (l_3) \\ 4x + 3y - 5z = 1 & (l_4) \end{cases}$$

On passe à la notation de matrice augmentée

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ \lambda & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$l_1$ pivot
$\Longleftrightarrow$
$l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$
$l_3 \leftarrow l_3 - \lambda l_1$
$l_4 \leftarrow l_4 - 4l_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & (-1-2\lambda) & (-1+\lambda) & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Longleftrightarrow$
$l_3 \leftrightarrow l_4$
$l_2 \leftarrow -\frac{1}{2} l_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & (-1-2\lambda) & (-1+\lambda) & 1 \end{array}\right)$$

$l_2$ pivot
$\Longleftrightarrow$
$l_3 \leftarrow l_3 + 5l_2$
$l_4 \leftarrow l_4 + (1+2\lambda) l_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2} + 2\lambda\right) & 1 \end{array}\right)$$

Suite du ⑧

$$\underset{l_3 \leftarrow \frac{2}{3} l_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2}+2\lambda) & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_4 \leftarrow l_4 + (\frac{1}{2} - 2\lambda) l_3}{\overset{l_3 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}(1-\lambda) \end{array}\right)$$

Le système équivaut à :
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \\ z = \frac{2}{3} \\ 0 = \frac{4}{3}(1-\lambda) \end{cases}$$

le système est de rang 3

Discutons de $\lambda$ :

* Si $\frac{4}{3}(1-\lambda) = 0$ soit $\lambda = 1$, alors la 4e équation est toujours vraie

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

(il faut faire opérations Gauss)

L'ens sol $S_2 = \left\{ \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$

* Si $\frac{4}{3}(1-\lambda) \neq 0$ alors la 4e équa est toujours fausse le système n'est pas vérifié : $S_2 = \emptyset$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 + 5 l_2}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x + 7y - 2t = 3 & (l_1) \\ -z + 26y - 11t = 12 & (l_2) \\ -y + 2t = 0 & (l_3) \end{cases}$$

(échelonnement terminé)

(possibilité de prendre $y$ ou $t$ comme inconnue secondaire)

$$\underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1 + 7 l_3 \\ l_2 \leftarrow l_2 + 26 l_3}}{\overset{l_3 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x + 12t = 3 & (l_1) \\ -z + 41t = 12 & (l_2) \\ -y + 2t = 0 & (l_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 12t \\ z = -12 + 41t \\ y = 2t \end{cases}$$

L'ensemble solution est :
$$S_3 = \{ (-3 + 12t, 2t, 12 + 41t, t), t \in \mathbb{R} \}$$

## Exercice 2

$$S_1 \begin{cases} \lambda x - 3y + 7z = -4 & (l_1) \\ x + 2y - 3z = 6 & (l_2) \\ 7x + 4y - z = 22 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_1 \leftarrow l_2 \\ l_2 \leftarrow l_3 \\ l_3 \leftarrow l_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 & (l_1) \\ 7x + 4y - z = 22 & (l_2) \\ \lambda x - 3y + 7z = -4 & (l_3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \\ \lambda & -3 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

Notation du syst lin. par une matrice augmentée

7)
$$\begin{cases} 3x + y = 2 & (l_1) \\ 8x + 7y + z + 5t = -3 & (l_2) \\ 29x + 18y + 2z + 15t = 13 & (l_3) \end{cases}$$

$l_1$ pivot $\iff$ $l_2 \leftarrow l_2 - 7l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 - 18l_1$
$$\begin{cases} y + 3x = 2 & (l_1) \\ -13x + z + 5t = -17 & (l_2) \\ -25x + 2z + 15t = -23 & (l_3) \end{cases}$$

pivot $l_2$ $\iff$ $l_1 \leftarrow l_1 + \frac{3}{13}l_2$, $l_3 \leftarrow l_3 - \frac{25}{13}l_2$
$$\begin{cases} y + \frac{3}{13}z + \frac{15}{13}t = -\frac{25}{13} & (l_1) \\ -13x + z + 5t = -17 & (l_2) \\ -\frac{1}{13}z + \frac{70}{13}t = \frac{126}{13} & (l_3) \end{cases}$$

(de rang 3 car 3 inconnues princi.)

8)
$$\begin{cases} 4x - 2y - z - 3t = 0 & (l_1) \\ 20x + 9y + 5z + 17t = 0 & (l_2) \\ -x + 7y - 2t = 3 & (l_3) \end{cases}$$

$l_3$ pivot $\iff$ $l_1 \leftarrow l_1 + 4l_3$, $l_2 \leftarrow l_2 + 20l_3$
$$\begin{cases} +26y - z - 11t = 12 & (l_1) \\ -131y + 5z + 57t = -60 & (l_2) \\ -x + 7y - 2t = 3 & (l_3) \end{cases}$$

$l_1$ pivot $\iff$ $l_2 \leftarrow l_2 + 5l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 + l_1$
$$\begin{cases} +26y - z - 11t = 12 & (l_1) \\ +y + 2t = 0 \\ -x + 33y - 13t = 15 & (l_3) \end{cases}$$

$l_2$ pivot $\iff$ $l_1 \leftarrow l_1 - 26l_2$, $l_3 \leftarrow l_3 - 33l_2$
$$\begin{cases} -x - 65t = 15 & (l_1) \\ +y + 2t = 0 & (l_2) \\ -z - 77t = 12 & (l_3) \end{cases}$$

6)
$$S_6 \begin{cases} -b = 6 & (l_1) \\ -a = -3 & (l_2) \\ -5a - 3b + c = -11 & (l_3) \\ 36a + 35b - 6c = -18 & (l_4) \end{cases}$$

$l_1$ pivot $\iff$ $l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1$, $l_4 \leftarrow l_4 + 35l_1$
$$\begin{cases} -b = 6 & (l_1) \\ -a = -3 & (l_2) \\ -5a + c = -29 & (l_3) \\ 36a - 6c = 192 & (l_4) \end{cases}$$

$l_2$ pivot $\iff$ $l_3 \leftarrow l_3 - 5l_2$, $l_4 \leftarrow l_4 + 36l_2$
$$\begin{cases} -b = 6 & (l_1) \\ -a = -3 & (l_2) \\ c = -14 & (l_3) \\ -6c = 84 & (l_4) \end{cases} \underset{\substack{l_1 \leftarrow -l_2 \\ l_2 \leftarrow -l_1 \\ l_4 \leftarrow -\frac{1}{6}l_4}}{\iff} \begin{cases} b = 6 \\ a = 3 \\ c = -14 \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble solution est : $\{(3, 6, -14)\}$

7)
$$S_7 \begin{cases} 3x + y = 2 & (l_1) \\ 8x + 7y + z + 5t = -3 & (l_2) \\ 29x + 18y + 2z + 15t = 13 & (l_3) \end{cases}$$

$\iff$ $l_1 \leftarrow l_2$, $l_2 \leftarrow l_3$, $l_3 \leftarrow l_1$
$$\begin{cases} 8x + 7y + z + 5t = -3 & (l_1) \\ 29x + 18y + 2z + 15t = 13 & (l_2) \\ 3x + y = 2 & (l_3) \end{cases}$$

$l_1$ pivot $\iff$ $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$
$$\begin{cases} 8x + 7y + z + 5t = -3 \\ 13x + 4y + 5t = 19 & (l_2) \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$\iff$ $l_1 \leftrightarrow l_2$
$$\begin{cases} 13x + 4y + 5t = 19 \\ 8x + 7y + z + 5t = -3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\overset{\ell_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 13x + 4y + 5t = 19 \\ -5x + 3y + z = -22 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 4\ell_3 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 3\ell_3}}{\overset{\ell_3 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + 5t = 11 \\ -14x + z = -28 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11-x}{5} \\ z = -28 + 14x \\ y = 2 - 3x \end{cases}$$

(le rang est 3)

L'ensemble solution est ~~$S_7 = \{(x, 2, -3x, -28+14x$~~

$$S_7 = \left\{ \left(x, 2-3x, -28+14x, \frac{11-x}{5}\right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

8) $S_8 \begin{cases} 4x - 2y - z - 3t = 0 & (\ell_1) \\ -20x + 9y + 5z + 17t = 0 & (\ell_2) \\ -x + 7y - 2t = 3 & (\ell_3) \end{cases}$

$$\underset{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x + 7y - 2t = 3 & (\ell_1) \\ -20x + 9y + 5z + 17t = 0 & (\ell_2) \\ 4x - 2y - z - 3t = 0 & (\ell_3) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 20\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + 4\ell_1}}{\overset{\ell_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x + 7y - 2t = 3 & (\ell_1) \\ -131y + 5z + 57t = -60 & (\ell_2) \\ +26y - z - 11t = 12 & (\ell_3) \end{cases}$$

$$\underset{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -x + 7y - 2t = 3 & (\ell_1) \\ +26y - z - 11t = 12 & (\ell_2) \\ -131y + 5z + 57t = -60 & (\ell_3) \end{cases}$$

6) $\begin{cases} 0a - b + 0c = 6 & (\ell_1) \\ -a + 0b + 0c = -3 & (\ell_2) \\ -5a - 3b + c = -11 & (\ell_3) \\ 36a + 35b - 6c = -18 & (\ell_4) \end{cases}$

$$\underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 3\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 35\ell_1}}{\overset{\ell_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 0a - b + 0c = 6 & (\ell_1) \\ -a - b + 0c = 3 & (\ell_2) \\ -5a + c = -29 & (\ell_3) \\ 36a - 6c = -123 & (\ell_4) \end{cases}$$

$$\cancel{\underset{\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 + 3\ell_3 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_3 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 6\ell_3}}{\overset{\ell_3 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}}} \begin{cases} \cancel{-a - \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}} & (\ell_1) \\ \cancel{-a - 3b + \frac{c}{3} = 1} & (\ell_2) \\ \cancel{-3b + c = 4} & (\ell_3) \\ \cancel{+17b = -102} & (\ell_4) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 5\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + 36\ell_2}}{\overset{\ell_2 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} a + 0b + 0c = 3 & (\ell_1) \\ -a - b + 0c = 3 & (\ell_2) \\ 0a + 5b + c = -44 & (\ell_3) \\ 0a - 36b - 6c = -15 & (\ell_4) \end{cases}$$

## Correction

dans $\mathbb{R}^3$

$$S_2 : \begin{cases} x + 5z = -1 & (l_1) \\ -2x - 11z = 6 & (l_2) \\ -2x - y + 10z = -12 & (l_3) \end{cases} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + 5z = -1 \\ -z = 4 \\ -y + 20z = -14 \end{cases}$$

(forme triangulaire)

$$\begin{cases} \cdot \;\cdot\; \cdot = \cdot \\ \quad \cdot \;\cdot = \cdot \\ \qquad \cdot = \cdot \end{cases}$$

$$\underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 5z = -1 \\ -y + 20z = -14 \\ -z = 4 \end{cases} \underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1 + 5l_3 \\ l_2 \leftarrow l_2 + 20l_3}}{\overset{l_3 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x = 19 \\ -y = 66 \\ -z = 4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_2 \leftarrow (-1) \times l_2 \\ l_3 \leftarrow (-1) \times l_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 19 \\ y = -66 \\ z = -4 \end{cases}$$

~~L'en~~

Concl : l'ensemble solution de $S_2$ est :

$S_2 = \{(19, -66, -4)\}$

$$S_3 : \begin{cases} x + 5z = -1 & (l_1) \\ -2x - 11z = 6 & (l_2) \\ -2x - y + 10z = -12 & (l_3) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = -66 \\ z = -4 \end{cases}$$

Concl : $\mathcal{S}_{S_3} = \{(19, -66, -4, w),\ w \in \mathbb{R}\}$

$S_3$ admet une infinité de solution

$$S_4 : \begin{cases} 3u + v = 5 & (l_1) \\ u + 3w = -2 & (l_2) \\ 14u + 4v + 6w = 16 & (l_3) \end{cases} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} u + 3w = -2 & (l_1) \\ 3u + v = 5 & (l_2) \\ 14u + 4v + 6w = 16 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 14l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} u + 3w = -2 & (l_1) \\ v - 9w = 11 & (l_2) \\ 4v - 36w = 44 & (l_3) \end{cases} \underset{l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} u + 3w = -2 & (l_1) \\ v - 9w = 11 & (l_2) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = -2 - 3w \\ v = 9w + 11 \end{cases}$$

Concl : L'ensemble de sol est $\{(-2 - 3w, 11 + 9w, w),\ w \in \mathbb{R}\}$

Il y a une infinité de solution

# Exercice systèmes linéaires

(2) $\begin{cases} x + 5z = -1 & (l_1) \\ -2x - 11z = 6 & (l_2) \\ -2x - y + 10z = 12 & (l_3) \end{cases} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2+2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3+2l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + 5z = -1 & (l_1) \\ -z = 4 & (l_2) \\ -y + 20z = \cancel{12} & (l_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ z = -4 \\ y = \cancel{92} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3u + v = 5 & (l_1) \\ u + 3w = -2 & (l_2) \\ 14u + 4v + 6w = 16 & (l_3) \end{cases} \underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1-3l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3-14l_2}}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} v - 9w = 15 & (l_1) \\ u + 3w = -2 & (l_2) \\ -10v - 36w = 12 & (l_3) \end{cases}$

$\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3-4l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} v - 9w = 15 \\ u + 3w = -2 \\ -14v = -72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -\frac{23}{21} \\ u = -\frac{37}{7} \\ v = \frac{36}{7} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 6x + y - z = -6 & (l_1) \\ 8x + 2y - z = -7 & (l_2) \\ -42x - 6y + 5z = 31 & (l_3) \end{cases} \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2-l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3+5l_1}}{\overset{l_1 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6x + y - z = -6 & (l_1) \\ -2x - y = -13 & (l_2) \\ -12x - y = 1 & (l_3) \end{cases}$

$\underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1+l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3-l_2}}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 4x - z = -19 \\ -2x - y = -13 \\ -10x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{67}{5} \\ y = \frac{79}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases}$

21

Si $b_{p+1} = \dots = b_n = 0$ alors S a une sol

Si l'un des second membre parmi $b_{p+1}, \dots, b_n$ est non nul alors S n'a pas de solution.

## Exercice

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 & (l_1) \\ -x + 8y = 3 & (l_2) \\ \frac{2}{3}x + \frac{13}{2}y - 5z = 0 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\iff} \begin{cases} -x + 8y = 3 & (l_1) \\ 2x + 3y - 4z = 7 & (l_2) \\ \frac{2}{3}x + \frac{13}{2}y - 5z = 0 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow 3l_3}{\iff} \begin{cases} -x + 8y = 3 & (l_1) \\ 2x + 3y - 4z = 7 & (l_2) \\ 2x + \frac{39}{2}y - 15z = 0 & (l_3) \end{cases}$$

$$\overset{l_1 \text{ pivot}}{\underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\iff}} \begin{cases} -x + 8y = 3 & (l_1) \\ 19y - 4z = 13 & (l_2) \\ \frac{71}{2}y - 15z = 6 & (l_3) \end{cases}$$

$$\underset{l_2 \leftarrow \frac{1}{19}l_2}{\iff} \begin{cases} \\ y - \frac{4}{19}z = \frac{13}{19} & (l_2) \\ \\ \end{cases}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow 2l_3}{\iff} \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\underset{\substack{l_1 \leftarrow l_1 - 8l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 - 71l_2}}{\iff}$$

Démo (à connaître)

1) Montrons que permuter les équations d'un syst linéaire conserve son ens. de sol

Soit $S : \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\, x_j = b_1 \; (l_1) \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\, x_j = b_2 \; (l_2) \end{cases}$ et $S' \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\, x_j = b_2 \\ \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, x_j = b_1 \end{cases}$

Soient $\mathcal{S}(S)$, $\mathcal{S}(S')$ les ens. sol de $S$ et $S'$.

Montrons que $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(S')$

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S)$

Donc $(u_1, \dots, u_p)$ vérifie l'équation $(l_1)$ et l'équation $(l_2)$

Or "et" est commutatif

Donc : $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S')$

Ainsi, en généralisant, on a : $\mathcal{S}(S) \subset \mathcal{S}(S')$

De même, on a : $\mathcal{S}(S') \subset \mathcal{S}(S)$

2) Montrons que multiplier l'une des équations d'un syst par une cste non nulle conserve l'ens sol.

Soit $S : \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}\, x_j = b_1$, soit $\beta \in \mathbb{K}^*$

et $S' : \beta \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, x_j = \beta b_1$

Soient $\mathcal{S}(S)$ et $\mathcal{S}(S')$ les ens sol de $S$ et $S'$

Montrons que $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(S')$

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S)$

Donc : $\sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, u_j = b_1$

donc, en multipliant par $\beta$ (nul ou non nul)

on déduit $\beta \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, u_j = \beta b_1$

i-e : $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S')$

Donc $\mathcal{S}(S) \subset \mathcal{S}(S')$

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S')$

Donc : $\beta \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, u_j = \beta b_1$

donc : $\beta \left[ \sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, u_j - b_1 \right] = 0$

$\beta \neq 0$ par hypothèse

Nécessairement : $\sum_{j=1}^{p} a_{1j}\, u_j = b_1$

i-e : $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{S}(S)$

Donc $\mathcal{S}(S') \subset \mathcal{S}(S)$

Concl : ATTENTION, lorsqu'on simplifie par un paramètre, on suppose qu'il est non nul

3) A faire seul

# III. Notion de rang

**Déf 3.1 :** le rang d'un syst est le nombre d'équation du syst échelonné équivalent selon une suite finie d'opérations de Gauss.

**Théo 3.1 :** Soit $S$ un système échelonné à $n$ équations et $p$ inconnues.
- Si $rg(S) = n$ alors $S$ admet au moins une solution
- Si $rg(S) = p$ alors $S$ admet au plus une solution
- Si $rg(S) = n = p$ alors $S$ admet exactement une solution.

On dit que le système est de Cramer.

## Explication

. Cas où $rg(S) = n$

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad 0 \qquad a_{nn}x_n + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Dans ce cas $n \leqslant p$

Les $n$ équations sont $n$ contraintes sur les $p$ inconnues.

On choisit $n$ inconnues comme inconnues principales : $x_1, \dots, x_n$.

$(p-n)$ Secondaires : $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p$

Il y a donc au moins une solution

. Cas où $rg(S) = p$

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad 0 \qquad a_{pp}x_p = b_p \\ \qquad\qquad 0 = b_{p+1} \\ \qquad\qquad 0 = b_n \end{cases}$$

Dans ce cas $n \geqslant p$ :

Il y a davantage de contraintes que d'inconnues

$$S_3 \iff \begin{cases} x = b_1 - \dfrac{2b_2}{5} \\ y = \dfrac{b_2}{5} \\ 0 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$$

- Si $b_3$ et $b_4$ sont nuls alors $S_3$ admet une solution. L'ens sol de $S_3$ est le singleton $\left\{\left(b_1 - \dfrac{2b_2}{5}, \dfrac{b_2}{5}\right)\right\}$

- Si $b_3$ non nul ou $b_4$ non nul alors le système $S_3$ n'a pas de solution. L'ens. sol de $S_3$ est la partie vide de $\mathbb{R}^2$ : $\emptyset$

# II. Syst linéaire équivalent et échelonnement

**Déf 2.1 :** . Soient $S$, $S'$ deux systèmes linéaires à résoudre dans $\mathbb{K}^p$.

$S$ et $S'$ sont équivalents ssi ils ont le m̂ ens solution.

. On appelle " opération de Gauss ", toute transformation qui permet de transformer $S$ en un syst équivalent.

**Théo. 2.1**

Les opérations de Gauss sont les suivantes :
- permutation de 2 équations d'un syst linéaire
- multiplication d'une équation par une constante NON NULLE.
- addition membre à membre de 2 équations

On déduit qu'on peut sous certaines conditions, ajouter la transformation de combinaison linéaire d'équations.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 & (l_1) \\ 3y - z = -2 & (l_2) \\ 3y = -1 & (l_3) \\ 7y - z = -3 & (l_4) \end{cases} \underset{l_3 \leftrightarrow l_4}{\iff} \begin{cases} x - z - y = 1 & (l_1) \\ -z + 3y = -2 & (l_2) \\ -z + 7y = -3 & (l_3) \\ 3y = -1 & (l_4) \end{cases}$$

$$\underset{l_3 \leftarrow l_3 - l_2}{\overset{l_2 \text{ pivot}}{\iff}} \begin{cases} x - z - y = 1 & (l_1) \\ -z + 3y = -2 & (l_2) \\ 4y = -1 & (l_3) \\ 3y = -1 & (l_4) \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - y = 1 & (l_1) \\ -z + 3y = -2 & (l_2) \\ y = -\frac{1}{4} & (l_3) \\ y = -\frac{1}{3} & (l_4) \end{cases}$$

Conclusion : Les équations $l_3$ et $l_4$ sont incompatibles donc l'ens de solution de $S$ est la partie vide de $\mathbb{R}^3$.

# I. Généralités

**Déf :** Soit $\mathbb{K}$, un corps de nombres : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $(a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$ une suite finie de $\mathbb{K}$ ($n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Soit $(b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite finie de $\mathbb{K}$

On appelle " syst linéaire " à $n$ équations et $p$ inconnues : $x_1, \dots, x_p$ la donnée conjointe de $n$ équations linéaires en $(x_1, \dots, x_p)$ à résoudre dans $\mathbb{K}^p$. On note :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1} \times x_1 + a_{1,2} \times x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 & (l_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{i,1} \times x_1 + a_{i,2} \times x_2 + \dots + a_{i,p} \times x_p = b_i & (l_i) \\ \vdots \\ a_{n,1} \times x_1 + a_{n,2} \times x_2 + \dots + a_{n,p}\, x_p = b_n & (l_n) \end{cases}$$

## Vocabulaire

. Les $a_{i,j}$ sont appelés coefficients du système
$i$ est l'indice d'équation
$j$ est l'indice de l'inconnue
. Les $b_i$ sont appelés " second membres "
Si tous les $b_i$ sont nuls alors le syst est dit " homogène "
. " linéaire " signifie que la puissance des inconnues est 1.
. Si le système admet une numérotation des inconnues et des équations telle qu'il apparaît sous une forme " triangulaire " alors le syst est dit échelonné :

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \dots + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ 0\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \dots + a_{2p}\, x_p = b_2 \\ \vdots \\ 0\, x_1 + 0\, x_2 + \dots + a_{ij}\, x_j + \dots + a_{ip}\, x_p = b_i \\ \vdots \\ \qquad a_{np}\, x_p = b_n \end{cases}$$

19

$[\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad j < i \Rightarrow a_{ij} = 0]$
équivaut à dire que le syst est échelonné.

Exemple 1.1

- Soit $S_1 : \begin{cases} x - 2t = 5 \\ 5y - 5t = 2 \end{cases}$ à résoudre en $(x, y, t)$ dans $\mathbb{R}^3$

$S_1$ est échelonné, en effet.

$$S_1 \begin{cases} 1 \times x - 0y - 2t = 5 \\ 0 \times x - 5 \times y - 5 = 2 \end{cases}$$

On peut ~~donner~~ déduire les solutions de $S_1$ à partir de ces 2 équations.

Comme le nb d'inconnues (3) est strict$^t$ sup au nombre d'éq., il est nécessaire de choisir une des inconnues comme paramètre pour décrire les deux autres : $t$

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = \frac{2}{5} + t \end{cases}$$

On dit que : $x, y$ sont inconnues principales
$t$ est inconnue secondaire (paramètre)

L'ens. sol de $S_1$ est : $\left\{\left(5+2t, \frac{2}{5}+t, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$

- Soit $S_3 \begin{cases} x + 2y = b_1 \\ 5y = b_2 \\ 0 = b_3 \\ 0 = b_4 \end{cases}$ à résoudre en $(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$

$S_3$ est échelonné et paramétré par $b_1, b_2, b_3, b_4$

Cela signifie que il faudra discuter l'ens sol de $S_3$ ~~est~~ en fct de $b_1, b_2, b_3, b_4$

# Chapitre 6 : Systèmes linéaires

## I. Déf

Un système linéaire à $p$ inconnues et $n$ équations a ses solutions dans $\mathbb{K}^p$

$\mathbb{K}^p$ désigne l'ens des $p$-uplets à coeff dans $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## II. Système linéaire équivalents

Déf 2.1.

Soient $S_1, S_2$ deux syst. linéaires à résoudre dans $\mathbb{K}^p$ ($p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$S_1$ et $S_2$ sont équivalents ssi $S_1$ et $S_2$ ont le m̂ ens de solution dans $\mathbb{K}^p$

Ex 2.1.

$$S \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + 3y - 5z = 1 \end{cases}$$ à résoudre dans $\mathbb{R}^3$

On transforme $S$ par des opérations de Gauss successives. On obtient finalement un système équivalent facile à résoudre

$$S \begin{cases} x - y - z = 1 & (l_1) \quad l_1 \text{ pivot} \\ 2x + 2y - 3z = 0 & (l_2) \quad \Leftrightarrow \\ x + 2y - z = 0 & (l_3) \quad l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1 \\ 4x + 3y - 5z = 1 & (l_4) \quad l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \\ & \quad\quad\;\; l_4 \leftarrow l_4 - 4l_1 \end{cases}$$