Électromagnétisme
S06 Circulation et rotationnel d'un champ vectoriel I

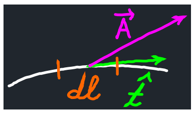
Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Circulation d'un champ vectoriel

Le long d'un chemin

- « Suivre » la composante tangentielle le long d'une courbe



- *Circulation* du champ $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ le long de la courbe Γ :

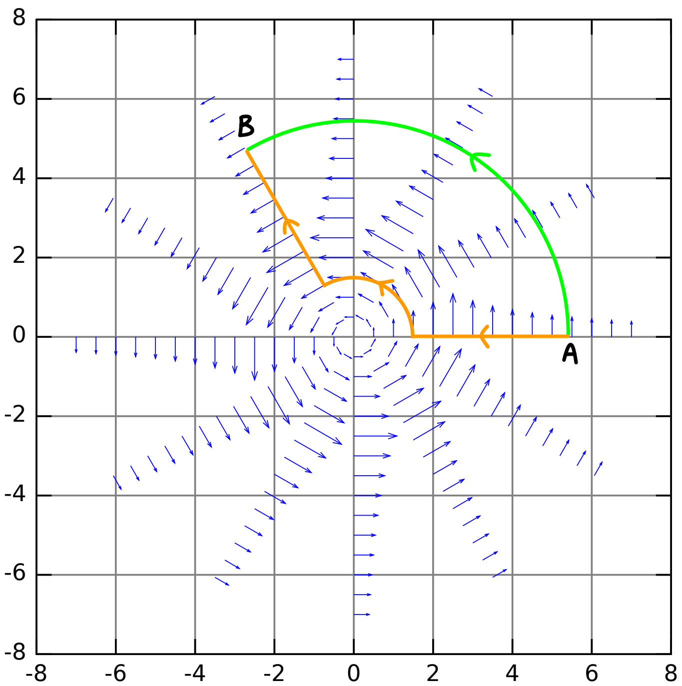
$$\int_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l \tag{1}$$

- *Circulation* du champ $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ le long de la courbe fermée Γ :

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l \tag{2}$$

- Circulation : un scalaire (> 0, < 0, $= 0$)
  égal à la [valeur moyenne] de $A_{\mathrm{tan}} \times$ longueur de Γ
- Pas de direction !
- Dépend du chemin choisi, sauf pour les champs conservatifs
  (p.ex. [circulation champ électrostatique])

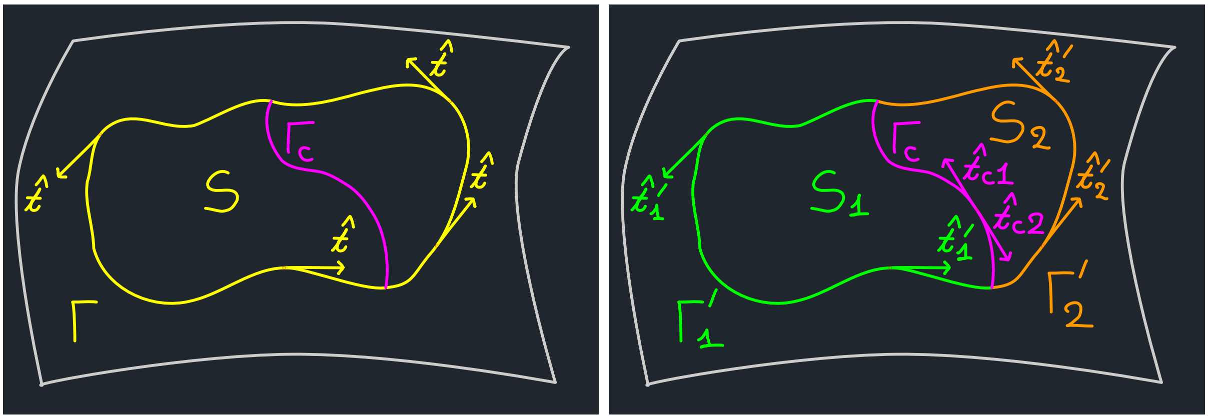
Exemple champ non-conservatif



$$\int_{\Gamma_1 : A \to B} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{1}}\,\mathrm{d}l \quad > \quad \int_{\Gamma_2 : A \to B} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{2}}\,\mathrm{d}l$$

Rotationnel d'un champ vectoriel : introduction 5

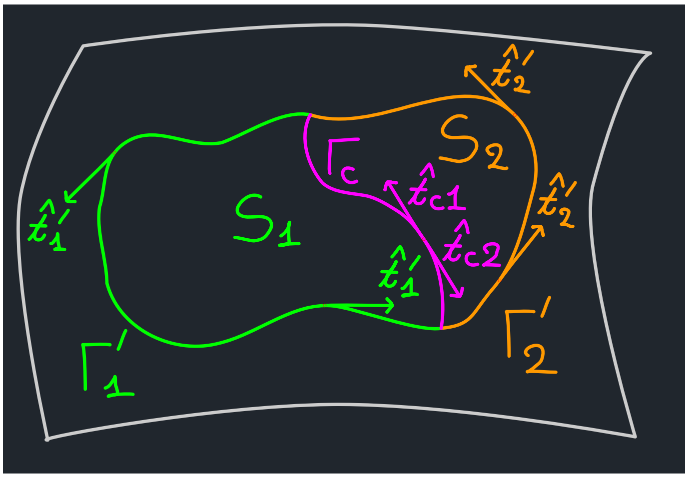
Couper une surface en deux. . .



- Surface ouverte S, entourée par courbe Γ fermée (son bord)
- Partager S en S_1, S_2, entourées par Γ_1, Γ_2
- Circulation le long de Γ =
  circulation le long de Γ_1'+ circulation le long de Γ_2'
- Γ_1' ouverte ; $\Gamma_1' \cup \Gamma_c = \Gamma_1$ fermée ; Γ_2' ouverte ; $\Gamma_2' \cup \Gamma_c = \Gamma_2$ fermée
- Deux orientations pour Γ_c : $\hat{\boldsymbol{t}}_{c2} = -\hat{\boldsymbol{t}}_{c1}$
- Circulation le long de Γ_1+ circulation le long de Γ_2 =
  circulation le long de Γ

6

Couper une surface en deux : les calculs



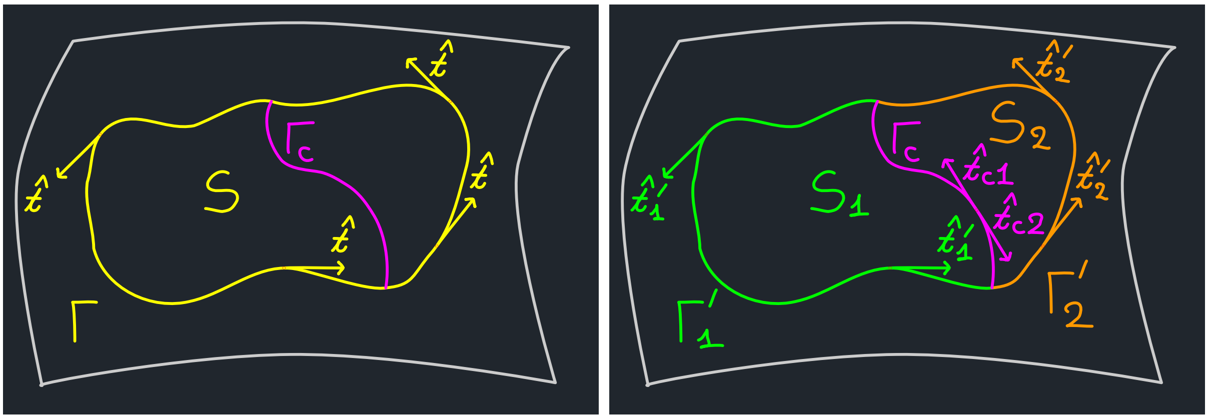
$$\oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1 \, \mathrm{d}l = \int_{\Gamma_1'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1' \, \mathrm{d}l + \int_{\Gamma_c} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_{c1} \, \mathrm{d}l$$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2 \, \mathrm{d}l = \int_{\Gamma_2'} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2' \, \mathrm{d}l + \int_{\Gamma_c} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_{c2} \, \mathrm{d}l$$

Circulation le long de Γ_1+ circulation le long de Γ_2 = Circulation le long de Γ

7

Couper une surface en morceaux. . .



$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\, \mathrm{d}l + \oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\, \mathrm{d}l$$

- Continuer à couper. . .

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_i\, \mathrm{d}l \right)$$

- [rotationnel]

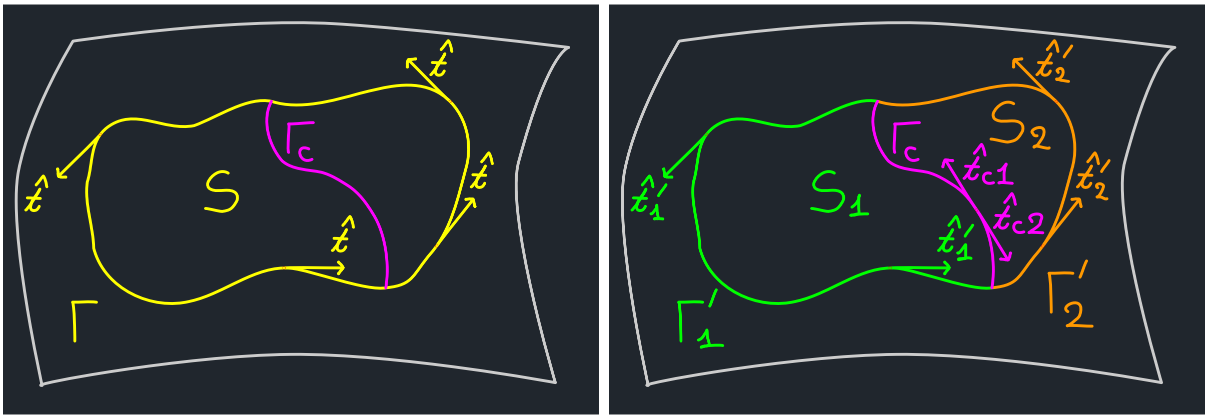
8

CC BY SA

Rotationnel d'un champ vectoriel

Couper une surface en morceaux. . .

[introduction rotationnel]



$$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = \oint_{\Gamma_1} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{1}}\,\mathrm{d}l + \oint_{\Gamma_2} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{2}}\,\mathrm{d}l$$

- Continuer à couper. . .

$$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}l = \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{i}}\,\mathrm{d}l \right)$$

- . . . jusqu'où ?
- Courbe fermée élémentaire
  autour d'une surface élémentaire *plane*

Rotationnel

- Quelle est la circulation le long d'une courbe fermée élémentaire ?

$$\lim_{\text{longueur } \Gamma \to 0} \oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}\,) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = 0 \quad !!!$$

- $\boxed{\text{Rotationnel} \triangleq \frac{\text{circulation courbe élémentaire fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}}$
- Faire intervenir le vecteur $\hat{n}$ de la surface

- Sens du parcours $\hat{t} \leftrightarrow$ sens de la normale $\hat{n}$ (règle de la main droite)

$$\hat{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}(\vec{r}\,) \triangleq \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}\,) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l \qquad (3)$$

- $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$: un champ *vectoriel* ! (norme + sens)

Rotationnel : un champ vectoriel

- À chaque point $\vec{r}$ de l'espace, $\hat{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$:
  - la composante de $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$ selon $\hat{n}$
  - $\propto$ à la circulation de $\vec{A}(\vec{r}\,)$ autour de ce point
  - circulation sur le bord de la surface élémentaire associée à $\hat{n}$
- $\max\left(\hat{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\right) = \|\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\|$ quand $\hat{n}$ parallèle à $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$
- À chaque point $\vec{r}$ de l'espace, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$:
  - montre la direction de la normale $\hat{n}$ de la surface sur le bord de laquelle la circulation est maximale
  - $\|\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\| \propto$ circulation maximale autour de $\vec{r}$
  - [circulation] = valeur moyenne de $A_{\text{tan}} \times$ périmètre
  - sens circulation $\leftrightarrow$ sens rotationnel : règle de la main droite
- Si le champ « tourne » ($\|\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\| \neq 0$), il fait des tourbillons autour du vecteur du rotationnel (règle de la main droite)
- La surface dont $\hat{n} \parallel \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$ contient un tourbillon du champ
- [Visualisation du rotationnel] : un moulin immergé dans le champ

Visualisation du rotationnel

13

Vidéo de capture d'écran

- Applet de l'Université de Harvard
  http://www.math.harvard.edu/~knill/pitf/2dcurldiv.html

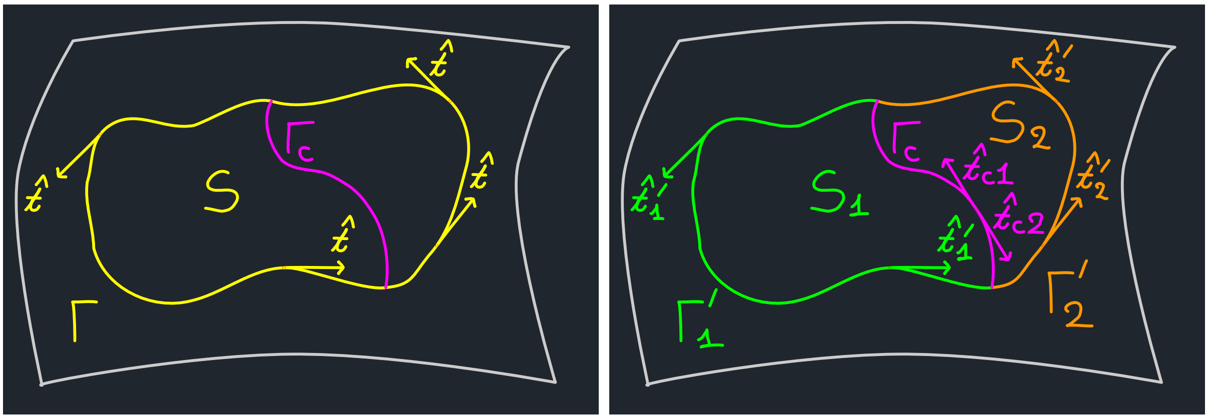
14

Théorème du rotationnel (Stokes)

15

Couper une surface en morceaux...

[rotationnel]



$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l = \oint_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\,\mathrm{d}l + \oint_{\Gamma_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_2\,\mathrm{d}l$$

$$= \sum_i \left(\oint_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_i\,\mathrm{d}l \right) \overset{\Gamma_i \to 0}{=} \int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l = \int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S} \quad (4)$$

- Surface ouverte S associée à la courbe fermée Γ, son bord
- $\hat{t}$ et $\hat{n}$ liés par la règle de la main droite
- À chaque Γ correspond une infinité de S associées
- Théorème du rotationnel (ou de Stokes)

16

CC BY SA