La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Quelques questions indépendantes et élémentaires d'applications directes du cours.

1) Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de :

- $\ln(1+x) - \sin x$
- $x - \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\tan x$

2) On considère l'équation différentielle : $y'' + y' + y = 0$.

• La résoudre dans $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. • La résoudre dans $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{\ln(1+x^3)}$; $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x + \sin x}$; déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x)$.

5) (déjà donné en préparation)$\mathrm{DA}_{\frac{1}{x}}(+\infty)$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+3} - 4x + 7$.

En déduire l'étude de la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$
(c'est à dire , ici, prouver l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ et préciser la position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à celle-ci).

Exercice II

Etude d'une fonction au voisinage d'un point .

1) Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

a) Donner $\mathcal{D}_f$.

b) Prouver que g admet le $DL_1(0)$: $g(x) = \dfrac{x}{6} + o(x)$.

Qu'en déduit-on sur la possibilité de prolonger g par continuité en 0 par $\widetilde{g}$; que dire de plus de $\widetilde{g}$?

2) Déterminer la dérivée g' de g sur $\mathcal{D}_f$.

a) Prouver que : $\sin^2 x - x^2\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^4}{6}$.

b) En déduire : $g'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{6}$.

En déduire que $\widetilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f \cup \{0\}$.

c) Pourquoi est-il ici évident que O est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$?

Exercice III

Résoudre : $(x^2+2x+5)y' + (x+1)y = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\sqrt{x^2+2x+5}$.

Exercice IV

1) Soit $\mathrm{f_m}$: $\begin{pmatrix} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(mx) \end{pmatrix}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

Prouver : $(\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2)$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_p(x) f_q(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q \end{cases}$

2) En utilisant le 1), prouver que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
