Corrigé n°11 p.24 : dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Soient $u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,2,-3),\ u_3 = (5,-4,-1) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminons : $\text{Vect}(u_1 - u_2, u_1 + u_3)^\perp$. Posons : $a = u_1 - u_2 = (0,-1,4)$ et $b = u_1 + u_3 = (6,-3,0)$.

$$\text{Vect}(a,b)^\perp = \text{Vect}(a)^\perp \cap \text{Vect}(b)^\perp = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{ll} -y+4z & = 0 \\ 6x-3y & = 0 \end{array} \right\} \right. = \ker({}^tM) \text{ avec } {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vect}(a,b)^\perp = \text{Vect}(c) \text{ avec } c = (2,4,1)$$

(2) (a) Posons : $d = 2u_2 + u_3 = (7,0,-7)$.

$$\text{Vect}(d)^\perp \cap \text{Vect}(a,b) = \text{Vect}(d)^\perp \cap (\text{Vect}(a,b)^\perp)^\perp = \text{Vect}(d)^\perp \cap \text{Vect}(c)^\perp = \text{Vect}(c,d)^\perp = \ker({}^tN) \text{ avec } {}^tN = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Or $N \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie : $\text{Vect}(d)^\perp \cap \text{Vect}(a,b) = \text{Vect}(2.e_1 + 4.e_2 + e_3, e_1 - e_3)^\perp$.

(b) Une base de $\text{Vect}(2u_2 + u_3)^\perp \cap \text{Vect}(u_1 - u_2, u_1 + u_3)$ est : (e) avec $e = (4,-3,4)$.

(3) u_1, u_2, u_3 sont deux à deux orthogonaux. En effet : posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

La matrice de Gram est diagonale et inversible donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille orthogonale sans vecteur nul.
Donc : $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de rang maximal.
Donc : (u_1, u_2, u_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
En normalisant les vecteurs de cette base, on a : $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$u'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1,1,1),\ u'_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}.(1,2,-3),\ u'_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}.(5,-4,-1)$$

(4) Soient $v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B'}$ et $w \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{B'}$.

Posons Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}$.

$$(v \mid w) = {}^t(QV) I_3 (QW) = {}^tV({}^tQQ)W = {}^tV I_3 W = xx' + yy' + zz'$$