Séries numériques (3)

J. Ribault

21 octobre 2016

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **alors** $\sum u_n$ est convergente.

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si $\sum u_n$ est convergente **alors** $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique, on note (S_n) la suite des sommes partielles associée.
$\sum u_n$ est convergente **si et seulement si** (S_n) est majorée.

1. VRAI
2. FAUX

QCM

On considère la série $\sum(-1)^n$ et on note (S_n) la suite des sommes partielles associée.
(S_n) est majorée .

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique, on note (S_n) la suite des sommes partielles associée.
Si $\sum u_n$ est convergente **alors** (S_n) est majorée.

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique, on note (S_n) la suite des sommes partielles associée.
Si (S_n) est majorée **alors** $\sum u_n$ est convergente .

1. VRAI
2. FAUX

Preuve de la proposition 14 (règle de Cauchy) :

Hypothèses

- $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs
- $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
- $\ell < 1$

Il existe un entier n_0 et un réel A (avec $\ell < A < 1$) tel que :
$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant A,$
donc : $\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{A^n}_{=v_n}.$

Or la série $\sum v_n$ est une série géométrique de raison A avec $|A| < 1$,
elle est donc convergente.
On déduit du critère « $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ » que $\sum u_n$ est convergente.

Preuve de la proposition 14 (suite) :

Hypothèses

- $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs
- $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
- $\ell > 1$

Il existe un entier n_0 et un réel A (avec $1 \leqslant A < \ell$) tel que :
$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant A \leqslant \sqrt[n]{u_n}$,
donc : $\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \underbrace{A^n}_{=v_n} \leqslant u_n$.

Or la série $\sum v_n$ est une série géométrique de raison A avec $|A| \geqslant 1$,
elle est donc divergente.
On déduit du critère « $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ » que $\sum u_n$ est divergente.

QCM

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2(n+\sqrt{n})}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est

1. convergente
2. divergente

Exercice question 1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2(n+\sqrt{n})}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est à termes positifs.

De plus $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$,
en appliquant le critère « $u_n \sim v_n$ » on en déduit que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ sont de même nature.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$, elle est donc convergente.

Finalement $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

QCM

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est

1. convergente
2. divergente

Exercice question 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

$\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est une série à termes strictement positifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{2n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$$

En appliquant la règle de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

QCM

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2(2+\sin n)}.$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est

1. convergente
2. divergente

Exercice question 3

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2(2+\sin n)}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
Elle est donc convergente.
En appliquant le critère « $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ »,
on en déduit que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

QCM

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\ln n}{n(3 + \sin n)}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est

1. convergente
2. divergente

Exercice question 4

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\ln n}{n(3+\sin n)}.$$

$$\forall n \geqslant 2\,,\ u_n \geqslant \frac{\ln n}{4n} \geqslant 0$$

La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1 \leqslant 1$.
Elle est donc divergente.
Donc $\sum \frac{\ln n}{4n}$ est divergente (car $\frac{1}{4} \neq 0$).
En appliquant le critère « $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ »,
on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.