Partie 1 : forme linéaire et hyperplan.

N.Auxire

31 décembre 2016

$\mathbb{K}$ désigne un corps de nombres : $\mathbb{R}$, parfois $\mathbb{C}$.

Définition

Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Toute application f définie sur E linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire*** **sur** E.
On note : $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

$\mathbb{K}$ désigne un corps de nombres : $\mathbb{R}$, parfois $\mathbb{C}$.

Définition

Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Toute application f définie sur E linéaire et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire*** **sur** E.
On note : $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Exemple

Formes linéaires coordonnées* sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left(e_1^* \middle| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \right) \qquad \left(e_2^* \middle| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array} \right)$$

$$\left(e_1^* + 3.e_2^* \middle| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + 3y \end{array} \right)$$

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
F est un **hyperplan*** de E si et seulement si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur cet E.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
F est un **hyperplan*** de E si et seulement si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur cet E.

Exemple

⋆Ex.1. Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-y \end{array} \right.$.

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))}$$

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
F est un **hyperplan*** de E si et seulement si F est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur cet E.

Exemple

⋆Ex.1. Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-y \end{array} \right.$.

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))}$$

⋆Ex.2. Soit $G = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ un s.-e. v. de $\mathbb{R}^3$.
Une caractérisation cartésienne de G est :

$$\boxed{G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{ \begin{array}{ccc} 2x-y & = & 0 \\ 3x-z & = & 0 \end{array} \right. \right\}}$$

Exemple

$\star$Ex.3. Soit $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & h(P) = P(1) \end{array} \right.$.

$$\boxed{\ker(h) = \{(X-1)Q, Q \in \mathbb{R}[X]\}}$$

Exemple

⋆Ex.3. Soit $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & h(P) = P(1) \end{array} \right.$.

$$\boxed{\ker(h) = \{(X-1)Q, Q \in \mathbb{R}[X]\}}$$

Conclusion : soit F s.-e.-v. de E. On peut caractériser F :

- ⋆ par un système de p équations cartésiennes indépendantes :

  F est l'intersection de p hyperplan(s).
- ⋆ par une base (suite de vecteurs indépendants) :

  F est l'ensemble des C.L. de ses vecteurs de base.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-e.-v. de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base.

*(1) Toute forme linéaire sur E est un **polynôme homogène*** ***de degré 1*** par rapport aux coordonnées vectorielles dans $\mathcal{B}$.*

(2) $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$e.-v. de dimension n.

(3) Soit F un s.-e.-v. de E.
F est un hyperplan de E si et seulement si : $dim(F) = dim(E) - 1$.

Exemple

Ex.1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\}$.
Vérifions que F est un plan de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \text{ et } \boxed{\dim(F) = 2}$$

Exemple

Ex.1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\}$.
Vérifions que F est un plan de $\mathbb{R}^3$.

$$F = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \text{ et } \boxed{\dim(F) = 2}$$

Ex.2. Soit $G = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1, 1, -1)}_{v_1}, \underbrace{(0, -1, 5)}_{v_2})$.
Vérifions que G est hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
⋆ dans une base complétée de $\mathbb{R}^3$, (v_1, v_2, v_3) :

$$\boxed{G = \{u = x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\}}$$

⋆ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{G = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -4x + 5y + z = 0\}}$$