Électromagnétisme
S15 Magnétostatique : loi Biot-Savart

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Loi de Biot-Savart

2

Loi de Biot-Savart

- Les nouvelles de l'expérience de Ørsted arrivent à Paris (11/9/1820)
- Biot (1774–1862) et Savart (1791–1841) : formulation quantitative (30/10/1820)
- Circuit électrique filiforme, parcouru par un courant I
- *Champ magnétique* créé à $\vec{r}$ par un élément de courant à $\vec{r}'$:

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\wedge\hat{s}}{s^2}} \overset{\vec{s}=\vec{r}-\vec{r}'}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\wedge(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} \quad (1)$$

- $\vec{B}$: le champ magnétique, en Tesla (T)
- $\mathrm{d}\vec{l}$: longueur élémentaire de courant
- $\vec{s}$: de l'élément de courant au point d'observation
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$: *perméabilité du vide* (valeur exacte)
- Champ magnétique créé à $\vec{r}$ par le circuit :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\vec{l}\wedge\hat{s}}{s^2}} \quad (2)$$

- Γ : la courbe définie par le circuit

3

Conducteur rectiligne infini

4

Application loi Biot-Savart

- Conducteur rectiligne infini
- Champ magnétique créé par un élément $\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\wedge\hat{s}}{s^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,1\sin\alpha}{s^2}\hat{e}_\phi$$

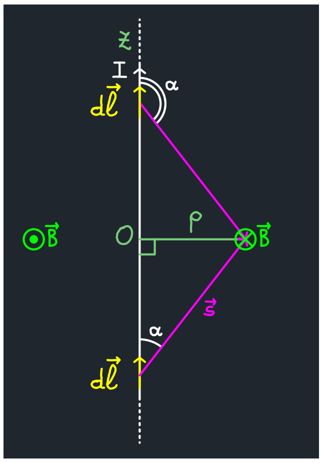
- Système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho) = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}l\sin\alpha}{s^2}\hat{e}_\phi$$

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}z\ ;\quad \sin\alpha = \frac{\rho}{s}\ ;\quad s = \sqrt{z^2+\rho^2}$$

$$\boxed{\vec{B}(\rho)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z\right)\hat{e}_\phi$$

$$\overset{\text{lien intégration}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I\rho\left[\frac{z}{\rho^2\sqrt{z^2+\rho^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}\hat{e}_\phi = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{\rho}\hat{e}_\phi}$$



5

Application loi Biot-Savart

- Conducteur rectiligne infini
- Champ magnétique créé par un élément $\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\wedge\hat{\boldsymbol{s}}}{s^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,1\sin\alpha}{s^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

- Système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

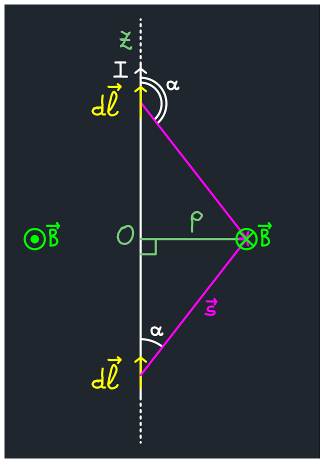
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho) = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}l\sin\alpha}{s^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}z\;;\quad s = \frac{\rho}{\sin\alpha}\;;\quad \tan\alpha = \frac{\rho}{(-z)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(-\frac{\rho}{z}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{\rho}{z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\rho}{z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} \overset{\tan'\alpha}{=} \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

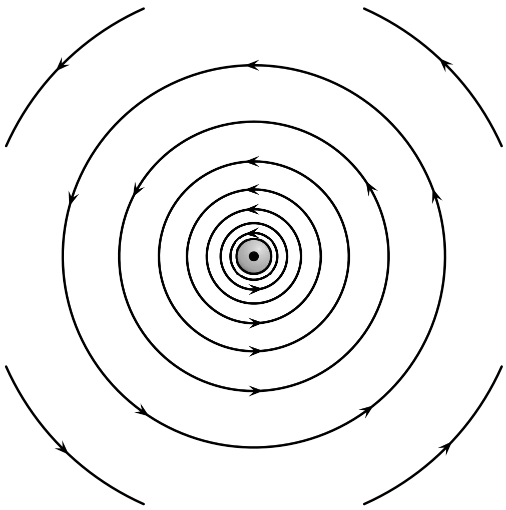
$$\mathrm{d}z = \frac{z^2}{\rho\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \overset{z=-\frac{\rho}{\tan\alpha}}{=} \frac{\rho}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

$$\boxed{\vec{B}(\rho)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\rho}\int_0^\pi \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}$$



Champ magnétique d'un conducteur infini

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$



Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

- Lignes du champ magnétique : des cercles autour du courant
- Règle de la main droite

Boucle de courant 8

Application loi Biot-Savart

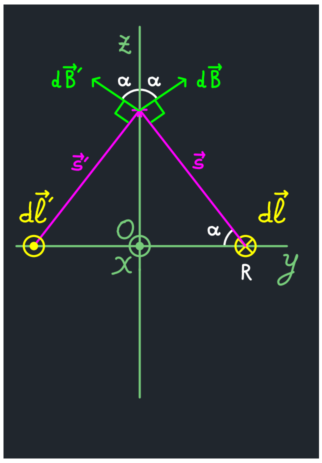
- Boucle de courant de rayon R
- Champ magnétique créé par un élément $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\wedge\hat{\boldsymbol{s}}}{s^2}$$

$$s = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{s}}\perp\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\,;\quad \|\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\wedge\hat{\boldsymbol{s}}\,\| = \mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}B(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l}{s^2}$$



- Tous les éléments créent le même $\mathrm{d}B$
- Élément $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}'$ diamétralement opposé à $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$
- $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}} + \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}'$ pas de composantes horizontales

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{B}}(0,0,z)} = \oint_\Gamma \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}} = \oint_\Gamma \mathrm{d}B_z\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} = \oint_\Gamma \mathrm{d}B\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{s^2}\frac{R}{s}\oint_\Gamma \mathrm{d}l\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \boxed{= \frac{\mu_0}{4\pi}2I\frac{\pi R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}}$$

9