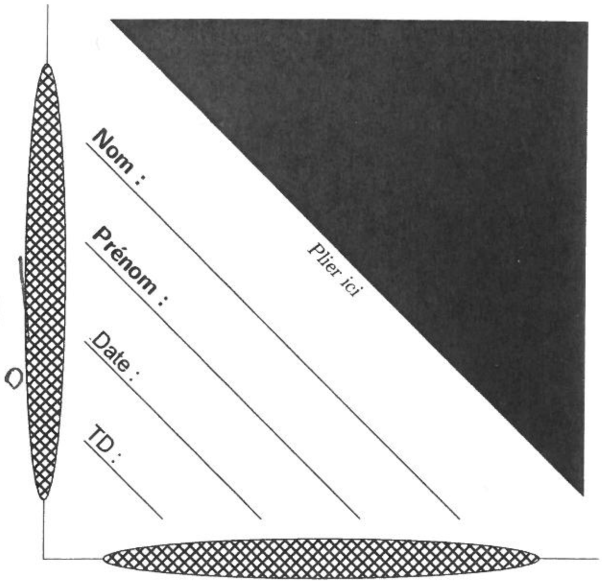
Université de Nice – Sophia Antipolis

Polytech'Nice – PeiP1
Contrôle de Mécanique

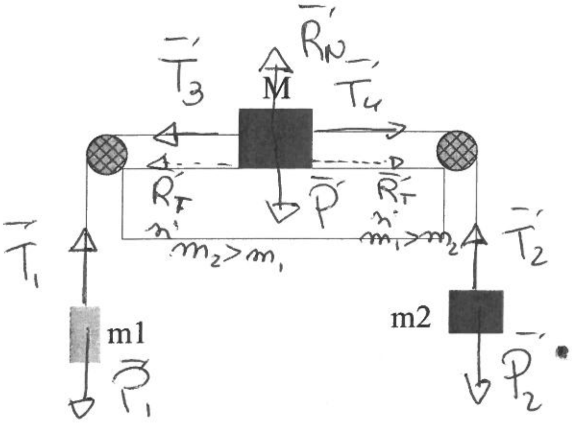
21 Janvier 2016 – Durée : 1h 30 minutes

Note : CORRECTION



Cette feuille doit être cachetée par vos soins. Afin de faciliter le décachetage, n'opérez de fixation qu'à l'intérieur des ellipses hachurées

Documents non autorisés.



1. Le bloc de masse M se trouve sur un plan horizontal et l'on note μ_S et μ_D les coefficients de frottement statique et dynamique entre le bloc et le plan. Les poulies, de masse négligeable, tournent sans frottement autour de leurs axes. Le fil est inextensible.

- Dessinez toutes les forces sur M, m_1 et m_2.
- On observe que le système est à l'équilibre si $|m_1 - m_2| < m_{max}$. Détérminer m_{max} en fonction de M et le coefficient de frottement.

à l'équilibre

$$\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0} \\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \\ \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 + \vec{R}_T = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{on projette}} \begin{cases} -m_1 g + T_1 = 0 \\ -m_2 g + T_2 = 0 \\ -Mg + R_N = 0 \\ -T_3 + T_4 \pm R_T = 0 \end{cases}$$

ça depend si $m_2 > m_1$ où $m_1 < m_2$

alors $T_1 = T_3$ et $T_2 = T_4$

$$\|\vec{R}_T\| = |T_4 - T_3| = |T_1 - T_2| = |m_1 - m_2| g$$

& il faut que $|T_1 - T_2| \leq \mu_S R_N$

c.a.d. $|m_1 - m_2| g \leq \mu_S M g$

$|m_1 - m_2| \leq \mu_S M \longrightarrow \boxed{m_{max} = \mu_S M}$

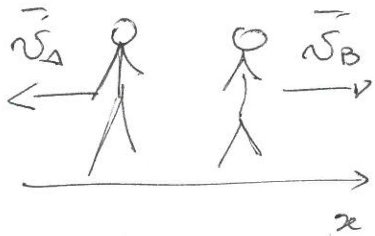
2. Un couple AB de patineurs sur glace est modélisé comme un ensemble formé de deux masses m_A et m_B, supposées ponctuelles. On sait que $m_A = 4/3\, m_B$. La surface de la patinoire est horizonatale. Le couple de patineurs AB est initialement à l'arrêt sur la piste. Ils s'ecartent alors l'un de l'autre en s'aidant de leur bras pendant une durée Δt. A $t \geq \Delta t$, les évolutions de A et B sont alors indépendantes et on suppose que les deux patineurs ne prennent aucune autre impulsion supplémentaire. Une mesure de la vitesse de la patineuse B à $t = \Delta t$, donne $v_B = 4$ m/s.

- Quelle est la vitesse v_A du patineur à l'instant $t = \Delta t$, si on néglige l'action du frottement dans ce premier interval de temps Δt?

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{0} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

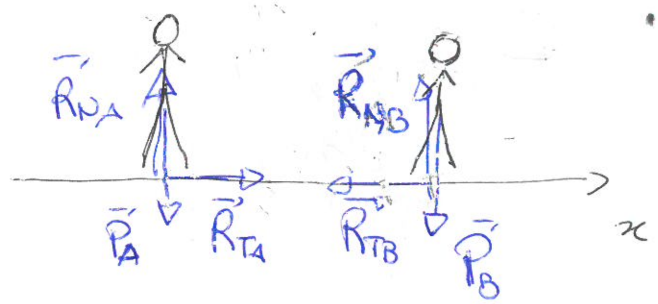
$$\vec{v}_A = -\frac{m_B}{m_A}\vec{v}_B$$



$$v_A = \|\vec{v}_A\| = \frac{m_B}{m_A} v_B = 3 \text{ m/s}$$

- Exprimer $v_A(t)$ et $v_B(t)$, pour $t > \Delta t$, en fonction de m_A, m_B, l'accélération de gravité g, et le coefficient de frottement dynamique μ_D.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_A = m_A \vec{a}_A \\ \sum \vec{F}_B = m_B \vec{a}_B \end{cases}$$



$$\left.\begin{cases} -m_B g + R_{NB} = 0 \\ -m_A g + R_{NA} = 0 \\ +R_{TA} = m_A a_{Ax} \\ -R_{TB} = m_B a_{Bx} \end{cases}\right\} \text{on projette}$$

$$a_{Ax} = \mu_D g$$

$$a_{Bx} = -\mu_D g$$

$$v_{Ax}(t) = v_{Ax,0} + \mu_D g t$$

$$v_{Bx}(t) = v_{Bx,0} - \mu_D g t$$

(on deplace l'origine temporelle à $t = \Delta t$)

- Déterminer les temps d'arrêt t_A et t_B pour m_A et m_B respectivement.
  A.N. : $\mu_D = 0.1$ *et* $g = 10\ m\,s^{-2}$.

$$v_{Ax}(t=t_A)=0 \Rightarrow t_A = -\frac{v_{Ax,0}}{\mu_D g} = 3 \text{ sec}$$

$$v_{Bx}(t=t_B)=0 \Rightarrow t_B = \frac{v_{Bx,0}}{\mu_D g} = 4 \text{ sec}$$

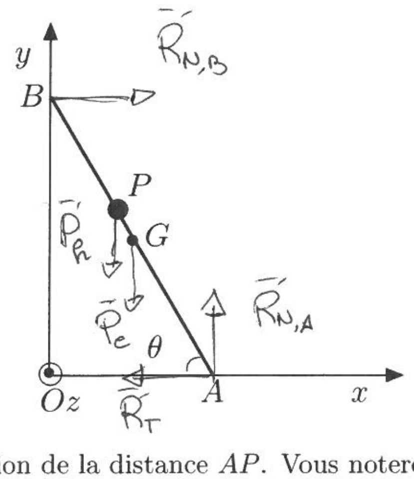
- (*bonus*) Estimer l'intensité de la force d'interaction F_{AB} entre les deux patinateurs.
  A.N. : $\Delta t = 0.1s$.

$$\vec{F}_{A\to B} = m_B \vec{a}_B = m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

$$\|\vec{F}_{A\to B}\| \simeq m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t}$$

(j'avais oublié de donner m_B, donc on ne pouvait pas terminer le calcul)

3. On modélise une échelle par une tige homogène de longueur l, de centre d'inertie G et de masse m. Elle est contenue dans le plan (Oxy) où elle repose au point A sur le sol horizontal et au point B sur un mur vertical. On note θ l'angle de l'échelle avec le sol. On considère pour simplifier que le contact au sol se caractérise par un coefficient de frottement statique μ_S constant et que le contact avec le mur est sans frottement (au point B il n'y a que la réaction normale au support). Une personne, modélisée par un point matériel P de masse M, monte à l'échelle.



- Ecrire la condition d'équilibre de l'échelle en fonction de la distance AP. Vous noterez $AP = x$.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{R}_{N,B} + \vec{R}_{N,A} + \vec{P}_R + \vec{P}_e + \vec{R}_T = \vec{0}$$

$$\begin{cases} R_{N,B} - R_T = 0 \\ R_{N,A} - P_A - P_e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_T = R_{N,B} \\ R_{N,A} = (M+m)g \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}$$

$$\frac{\ell}{2} mg \cos\theta \, \hat{e}_z + x Mg \cos\theta \, \hat{e}_z - \ell R_{N,B} \sin\theta \, \hat{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow R_{N,B} = \left(\frac{mg}{2} + \frac{x}{\ell} Mg\right) \cot\theta$$

$$R_{N,B} \leq \mu_s R_{N,A}$$

$$\left(\frac{m}{2} + \frac{x}{\ell} M\right) g \cot\theta \leq \mu_s (M+m) g$$

$$\left(\frac{m}{2} + \frac{x}{\ell} M\right) \cot\theta \leq \mu_s (M+m)$$

- A quelle condition sur θ la personne arrive-t-elle en haut de l'échelle sans que celle-ci ne glisse sur le sol?

$$x = \ell$$

$$\cot\theta \leq \mu_s \frac{M+m}{M + \frac{m}{2}}$$