Université de Nice - Sophia Antipolis

Polytech'Nice-Sophia

École d'ingénieurs

Année :

Formation :

Examen :

N° étudiant :

[1] Nom : MIRANDA

Prénoms : Ludovic

Né à :

le

Note de l'épreuve

(1) Le Candidat doit inscrire ici : ses nom, prénoms, lieu et date de naissance, puis rabattre suivant le pointillé le coin de la copie et coller.

Il est interdit au Candidat de signer sa copie ou d'y inscrire un signe quelconque pouvant en indiquer la provenance.

10,5 ; 11 → 10,7

Sophia-Antipolis, le 5/10/2009

Exercice I

explique un peu.

1. a) $\mathcal{D}f_3 = \mathbb{R}$ $\mathcal{D}f_4 =]0;\pi[$

b) * $f_1(x) = x^{10}$, f est continue et dérivable sur son ensemble de définition, avec :

$$\boxed{f_1'(x) = 10x^9}$$

* $f_2(x) = 10^x = e^{x\ln 10}$, f est continue et dérivable sur son ensemble de définition, avec :

$$\boxed{f_2'(x) = \ln 10\, e^{x\ln 10}} \quad 10^x$$

* $f_3(x) = \tan(\cos x)$, f est continue et dérivable sur son ensemble de définition avec :

$$\boxed{f_3'(x) = (1+\tan^2(\cos x)).(-\sin x)}$$

[redacted]

$f_4(x) = \sqrt{\arccos x}$, f est dérivable sur son son ensemble de définition avec :

pas tout à fait ici

$$\boxed{f_4'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{\arccos x}}}$$

2. $f(x;y) = x \arctan(2x+y^2)$ $\qquad Df = \mathbb{R}^2$

f est dérivable partiellement par rapport à x, et à y, avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 1 \times \text{Arctan}(2x+y^2) + x \frac{1}{1+(2x+y^2)^2} \times 2$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \text{Arctan}(2x+y^2) + \frac{2x}{1+(2x+y^2)^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \frac{2x}{1+(2x+y^2)^2}}$$

Exercice II

1) $I_1 = \int_1^2 x^2 \sqrt{2+x^3}\, dx$ Soit $t = 2+x^3$, $dt = 3x^2 dx$

$I_1 = \frac{1}{3}\int_3^{10} dt \,.\, t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_3^{10} = \frac{2}{9}\left[t^{\frac{3}{2}} \right]_3^{10}$

$\boxed{I_1 = \frac{2}{9}\left(10^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right)}$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x \, dx$ Soit $t = \cos x$ $dt = -\sin x\, dx$

$I_2 = -\int_1^0 t^4 dt = \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{5} = I_2}$

$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1+\cos 4x}{2}} \right)$

$= \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$

D'où $I_3 = \left[\frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$

Exercice III

1) $y'' + y' + 2y = xe^{x}$ (EDL2A)

* On résout d'abord (EDL2H) : $y'' + y' + 2y = 0$

(EC) associée : $r^2 + r + 2 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$
$\quad = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$

$\Delta < 0$ donc 2 racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

D'où solution générale (EH) : $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + \lambda_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$ $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

soyez clair

$\Leftrightarrow y = e^{-\frac{x}{2}} R. \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \phi\right)$ $\quad (R, \phi) \in \mathbb{R}^2$

* Cherchons une solution particulière de (EA) $y'' + y' + 2y = xe^{x}$

le coefficient de x, dans l'exponentielle, n'est pas une racine de EC, les solutions particulières de (EA) st dc de la forme

$y = (ax+b)e^{x}$ $\quad y' = e^{x}(ax+b+a)$ $\quad y'' = e^{x}(2a+ax+b)$

y solution (EA) $\Leftrightarrow e^{x}(2a+ax+b + ax+b+a + 2ax+2b) = xe^{x}$

$\Leftrightarrow e^{x}(3a + 4ax + 4b) = xe^{x}$

$\Leftrightarrow 3a + 4ax + 4b = x$ $\quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{16} \end{cases}$

Donc solut° part (EA) : $y = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}\right)e^{x}$

Donc solution gnle (EA) : $\boxed{y = e^{-\frac{x}{2}}. R. \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \phi\right) + \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{16}\right)e^{x} \text{ avec } (R, \phi) \in \mathbb{R}^2}$

N°

Exercice III

2) a) Bilan Forces : $\vec{P} = m.g\,\vec{i}$ (poids)

$\vec{T}$ (tension ressort) $= -K\,x(t)\,\vec{i}$

$\vec{F}$ (force frottement due à l'air) $= f\,\vec{v}\,\vec{i}$

erreur signe

* 2nde loi de Newton : $\sum \overrightarrow{Forces\ ext} = m.\vec{a}$

En prenant les composantes à $\vec{i}$:

et là

$$m.g - K\,x(t) - f\,x'(t) = m.x''(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad m.x''(t) + f\,x'(t) + K\,x(t) = m.g$$

x(t) est donc solution de cette équation différentielle

b)

$\int \mathrm{Arcsin}\, x \, dx$

OHI TD

Exercice II (contrôle) 2008

$V = \pi \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (\sin x + 2)^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x + 4\sin x + 4 \, dx$

$= \pi \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx}_{I_3} + \underbrace{4\int_0^{2\pi} \sin x}_{I_2} + \underbrace{4\int_0^{2\pi} dx}_{I_1} \right)$

$I_1 = 4[x]_0^{\pi} = 8\pi \qquad I_2 = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$

On linéarise $\cos^2 x$ ← $I_3 = \cancel{\tfrac{1}{2}[\cos 2x]} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$

D'où $V = \pi(\pi + 4\times 0 + 8\pi) = 9\pi^2$ u.v.

Correct° DS OHI

I 1) a) $f_3(x) = \tan(\cos x)$. Il faut que $\cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tjrs vrai puisque $(\forall x) \cos x \in [-1;1]$

donc $\mathcal{D}f_3 = \mathbb{R}$

$f_4(x) = \sqrt{\arccos x}$ $\quad \mathcal{D}f_4 = [-1;1]$ car $\forall x \in [-1;1]$ $\mathrm{Arccos}\, x \in [0;\pi]$

b) f_1, f_2, f_3 dérivable sur $\mathbb{R}$: $f_1'(x) = 10x^9 \quad f_2'(x) = 10^x \ln 10$

$f_3'(x) = 1 + \tan^2(\cos x) \cdot (\sin x)$

$f_4(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ avec $f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Arccos}\, x}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

2 $f(x;y) = x\,\mathrm{Arctan}(2x + y^2)$ $\quad \mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$, f dérivable partiell^t % x et à y avec

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \mathrm{Arctan}(2x + y^2) + x \frac{1}{1+(2x+y^2)^2} \times 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = x \frac{1}{1+(2x+y^2)^2} \times 2y$

II 2) $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)}$

a) $\ln u_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

dc $\ln u_n$ est la valeur moyenne de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en les pts $\left(\frac{k}{n}\right)_{1 \le k \le n}$ qui constitue une subdivision régulière de $[0;1]$

D'où avec th. sur valeur moyennes, $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \ln(1+x)\, dx = I$

soit $t = 1+x$ $dt = dx$ $\qquad I = \int_1^2 \ln(t)\, dt = [t \ln t - t]_1^2$

$I = 2\ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}$ $\qquad$ Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{e}$

III 1) $y'' + y' + 2y = xe^x$ (EDL2A)

(EDL2H) $y'' + y' + 2y = 0$ (EC) : $r^2 + r + 2 = 0$ $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ $(i\sqrt{7})^2$

D'où 2 solut°s cplxes : $r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ $r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$

Dc sol° gnle (EH) : $y = e^{-\frac{x}{2}}(\lambda_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + \lambda_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x)$ $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

* on cherche solut° part (EA) type : $y = (ax+b)e^x$, donc $y' = (ax + a + b)e^x$

$y'' = e^x(ax + 2a + b)$

y sol° (EA) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x(4ax + 3a + 4b) = xe^x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 & a = \frac{1}{4} \\ 3a + 4b = 0 & b = -\frac{3}{16} \end{cases}$

D'où sol° part. $y = \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{16}\right)e^x$

* Donc solut° gnle (EA) : $y = e^{-\frac{x}{2}}(\lambda_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + \lambda_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x) + \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{16}\right)e^x$ $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

II 1) $I_1 = \int_1^2 x^2 \sqrt{x^3 + 2}\, dx$ $t = x^3 + 2$ $dt = 3x^2 dx$