Électromagnétisme
S07 Circulation et rotationnel d'un champ vectoriel II

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Le rotationnel du champ électrostatique 2

Champ électrostatique : circulation vers rotationnel

[circulation champ électrostatique] $\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = 0$

- La valeur moyenne de E_{tan} le long d'une courbe fermée est nulle

[théorème rotationnel] $\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S$

- Rotationnel du champ électrostatique :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}} \quad (1)$$

- Circulation de $\vec{E}(\vec{r})$ = différence de [potentiel] départ−arrivée :

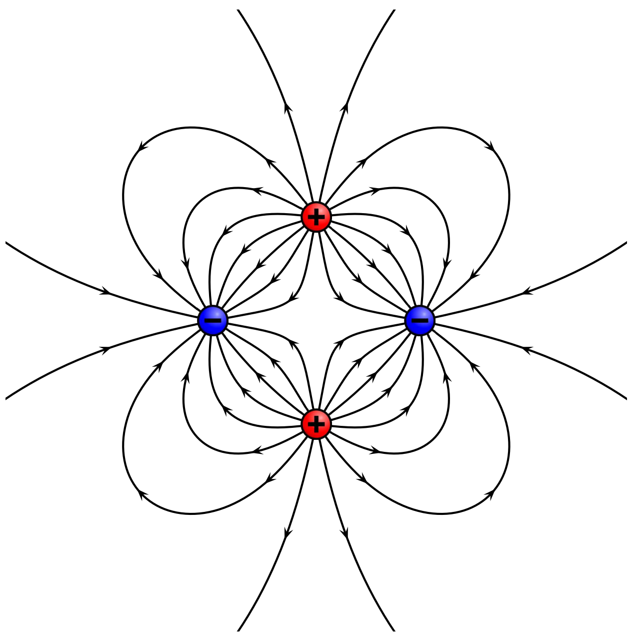
$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\vec{r})$ [potentiel relations locales]

et $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ sont liés

- $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{rot}}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\vec{r})) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\vec{r})) = \vec{0}$

3

Lignes du champ électrostatique



Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

$\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = 0$: $E_{\text{tan moy}}$ nulle sur une courbe fermée

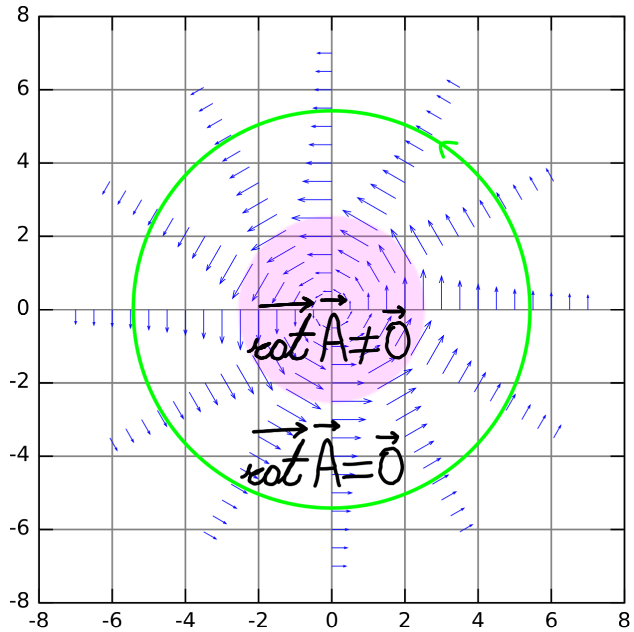
$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$: pas de tourbillons

4

Pourquoi « rotationnel » ?

Pourquoi « rotationnel » ?

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}(\vec{r}\,) \propto$ circulation maximale sur une courbe élémentaire fermée autour du point $\vec{r}$
- [circulation] = valeur moyenne A_{tan} × longueur courbe



$\vec{A} \propto \frac{\rho}{R_0^2}$, $\rho < R_0$
$\vec{A} \propto \frac{1}{\rho}$, $\rho > R_0$

$\overrightarrow{\text{rot}}$: à un point
circulation : sur une courbe
lien : [théorème rotationnel]

- Besoin d'une *formule* ! [rotationnel en cartésiennes]

6

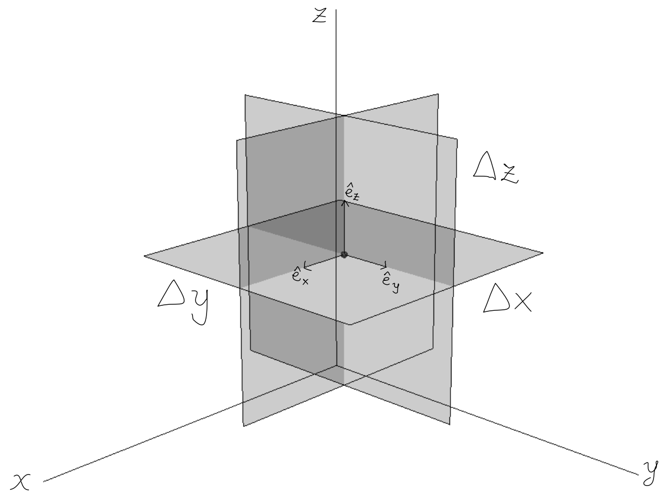
Formule du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Circulation par surface

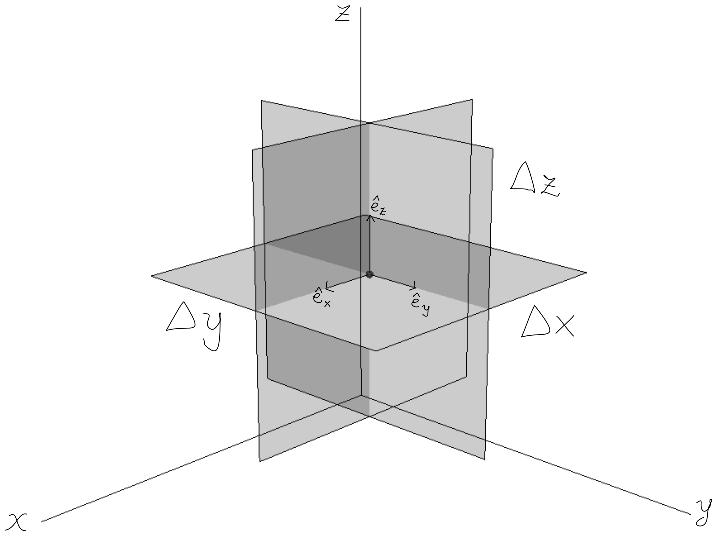
- [rotationnel]

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\text{circulation courbe élémentaire fermée}}{\text{aire surface plane entourée}}$$

- Système de coordonnées cartésiennes
- Courbes élémentaires autour de (x, y, z) :



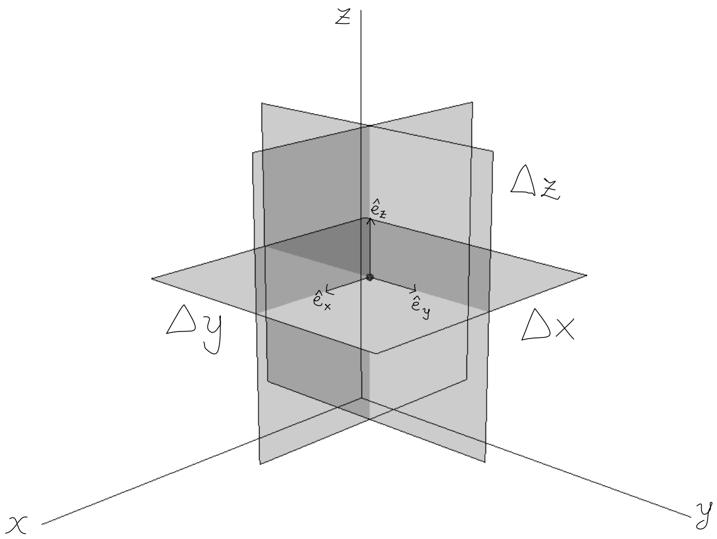
Décomposer la courbe fermée



$$\oint_\Gamma \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l \overset{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4}{=} \int_{\Gamma_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_1\,\mathrm{d}l + \ldots + \int_{\Gamma_4} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_4\,\mathrm{d}l$$

9

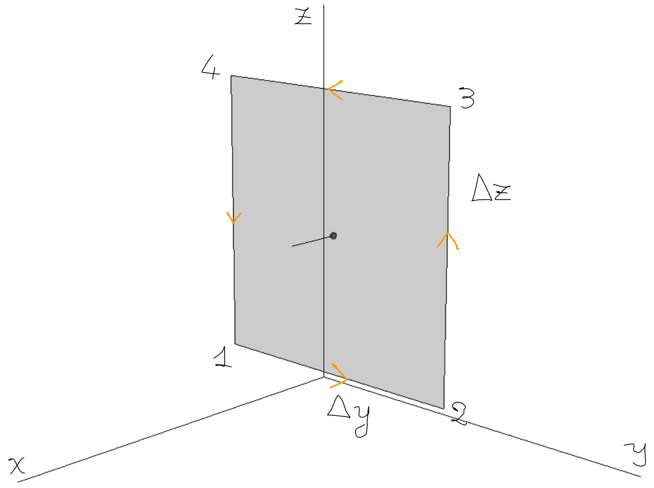
Approximation surface élémentaire



- Champ $\vec{A}(\vec{r})$ constant sur un côté, égal à $\vec{A}(\vec{r}_{\text{centre}})$
- Circulation :
  $\int_{\Gamma_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{t}_i\,\mathrm{d}l = \int_{\Gamma_i} A_{\text{tan}}(\vec{r})\,\mathrm{d}l \approx A_{\text{tan}}(\vec{r}_{\text{centre } i}) \times \text{longueur } \Gamma_i$

10

Composante x du rotationnel



- Γ : le bord de S dont $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, aire : $\Delta y \Delta z$
- Γ_{12} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{12}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, longueur Δy, $A_{\mathrm{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{12}}) = A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$
- Γ_{23} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{23}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, longueur Δz, $A_{\mathrm{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{23}}) = A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$
- Γ_{34} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{34}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, longueur Δy, $A_{\mathrm{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{34}}) = -A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$
- Γ_{41} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{41}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, longueur Δz, $A_{\mathrm{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{41}}) = -A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$

11

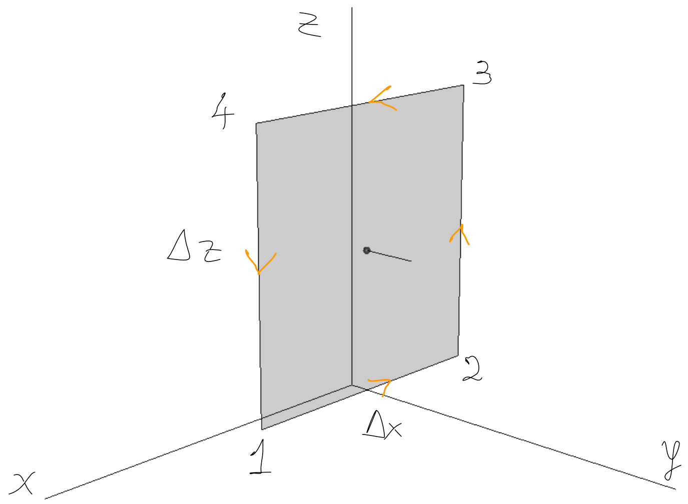
Composante x du rotationnel

chemin ij	$\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{ij}}$	centre	longueur	circulation
12	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$	$(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$	Δy	$A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})\Delta y$
23	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$	$(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$	Δz	$A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)\Delta z$
34	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$	$(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$	Δy	$-A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})\Delta y$
41	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$	$(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$	Δz	$-A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)\Delta z$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \left[\frac{A_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{A_y(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_y(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right] \\
&= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_x
\end{aligned}$$

12

Composante y du rotationnel



- Γ : le bord de S dont $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, aire : $\Delta x \Delta z$
- Γ_{12} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{12}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, longueur Δx, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre }\mathbf{12}}) = -A_x(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$
- Γ_{23} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{23}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, longueur Δz, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre }\mathbf{23}}) = A_z(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$
- Γ_{34} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{34}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, longueur Δx, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre }\mathbf{34}}) = A_x(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$
- Γ_{41} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{41}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, longueur Δz, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre }\mathbf{41}}) = -A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

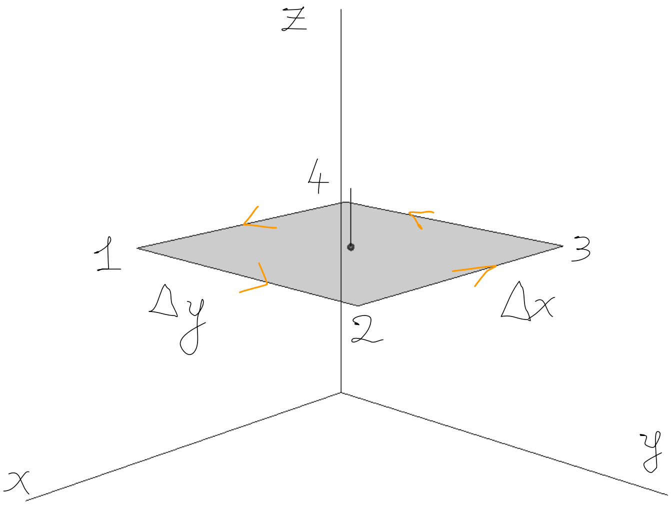
Composante y du rotationnel

chemin ij	$\hat{\boldsymbol{t}}_{ij}$	centre	longueur	circulation
12	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$	$(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$	Δx	$-A_x(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})\Delta x$
23	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$	$(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$	Δz	$A_z(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta z$
34	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$	$(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$	Δx	$A_x(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})\Delta x$
41	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$	$(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$	Δz	$-A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta z$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \cdot \overrightarrow{\textbf{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \lim_{\Delta x, \Delta z \to 0} \left[\frac{A_x(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - A_x(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} - \frac{A_z(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - A_z(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \overrightarrow{\textbf{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_y$$

Composante z du rotationnel



- Γ : le bord de S dont $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, aire : $\Delta x \Delta y$
- Γ_{12} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{12}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, longueur Δy, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{12}}) = A_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$
- Γ_{23} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{23}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, longueur Δx, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{23}}) = -A_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$
- Γ_{34} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{34}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$, longueur Δy, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{34}}) = -A_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$
- Γ_{41} : $\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{41}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, longueur Δx, $A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{41}}) = A_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$

15

Composante z du rotationnel

chemin ij	$\hat{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{ij}}$	centre	longueur	circulation
12	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$	$(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$	Δy	$A_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y$
23	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$	$(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$	Δx	$-A_x(x, y + \frac{\Delta x}{2}, z)\Delta x$
34	$-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$	$(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$	Δy	$-A_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y$
41	$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$	$(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$	Δx	$A_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left[\frac{A_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - A_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)}{\Delta x} - \frac{A_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - A_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)}{\Delta y} \right]$$

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big|_z$$

16

Composantes du rotationnel

$$\left.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right|_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$\left.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right|_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\left.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right|_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

- Développer selon la première ligne

Formule du rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques

Par un développement similaire à celui en cartésiennes...

Développer les déterminants selon la première ligne

- Le rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} & \rho\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

- Le rotationnel en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} & r\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} & r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix}$$

Théorème de Helmholtz

Sources et tourbillons

- Pourquoi étudier la divergence et le rotationnel ?
- Pourquoi les équations « parlent » de div et de $\overrightarrow{\textbf{rot}}$?
- Théorème de Helmholtz (1821-1894) :
  la divergence et le rotationnel déterminent le champ vectoriel
  - Dans l'espace à trois dimensions
  - si on connaît les champs $\Phi(\vec{r})$ et $\vec{A}(\vec{r})$ partout
  - et div $\vec{F}(\vec{r}) = \Phi(\vec{r})$, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})$
  - alors le champ $\vec{F}(\vec{r})$ est unique
  - à condition que $\lim_{r\to\infty} F = 0$
- Le théorème fondamental de l'analyse vectorielle
- [Divergence] : les sources du champ
- [Rotationnel] : les tourbillons du champ
- Un champ vectoriel « physique » est déterminé
  par ses sources et ses tourbillons

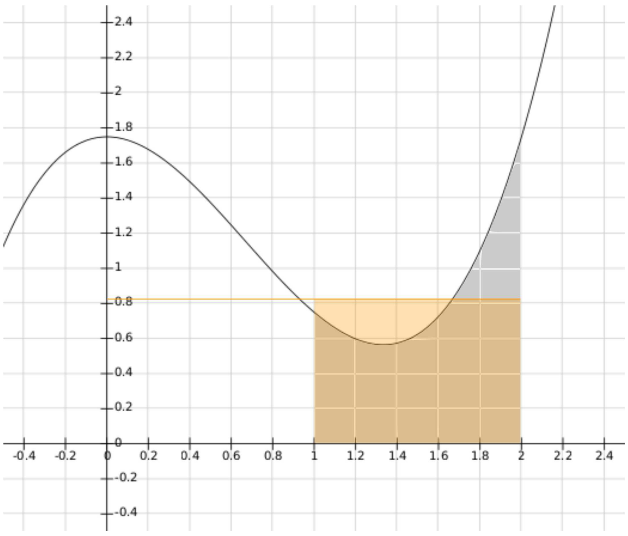
Théorème de la moyenne

Intégrale = valeur moyenne × intervalle

- À une dimension, fonction $f(x)$ à valeurs réelles, continue sur $[a, b]$

$$\text{il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

- Exemple : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.75$, $a = 1$, $b = 2$



$f(c) = 0.83$

Intégrale = valeur moyenne × intervalle

- À plusieurs dimensions (quand les fonctions « se comportent bien »)
- [Circulation] (1D, curviligne)

$$\int_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l = \int_\Gamma A_{\text{tan}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,)\, \mathrm{d}l = A_{\text{tan moy}} \times \text{longueur de } \Gamma$$

- [Flux] (2D)

$$\int_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \int_S A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,)\, \mathrm{d}S = A_{\text{nor moy}} \times \text{aire de } S$$

- Intégrale de volume (3D)

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,)\, \mathrm{d}\mathcal{V} = \rho_{\text{moy}} \times \text{volume de } \mathcal{V}$$

24