UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

POLYTECH'NICE-SOPHIA

PEIP2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Fonctions de plusieurs variables

René-J. BWEMBA

CHAPITRE 3 – FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

---

3 DIFFERENTIABILITE D'UNE FONCTION DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^p$.

3.1 DIFFERENTIABILITE

RAPPEL : une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dérivable en a ssi

$$\exists f'(a) \in \mathbb{R}\ t.q.\ f(a+h) = f(a) + f'(a).h + O(h)\,, \qquad \forall h > 0$$

DEFINITION 3.1

Une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est dite différentiable en $a \in \dot{V}$ s'il existe une forme linéaire notée df_a définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + O(\|h\|)\,, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

REMARQUE 3.1

- On prend $a \in \dot{V}$ car la dérivation sur le bord est plus délicate.

- notation $O(\|h\|)$: considérons l'application $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Dire que $\varphi(h) = O(\|h\|) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\|\varphi(h)\|_p}{\|h\|_n} = 0$
  on dit que φ est négligeable en 0 devant $\|h\|$.

EXEMPLE 3.1 - Polynôme à deux variables

L'application $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$P(x,y) = x^2 + y^2$$

est différentiable en tout point $a = (x_a, y_a) \in \mathbb{R}^2$.

En effet, soit $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$, calculons $P(a+h)$.

On a :

$$P(a+h) = P(x_a + h_x, y_a + h_y) = (x_a + h_x)^2 + (y_a + h_y)^2$$

En développant :

$$P(a+h) = x_a^2 + y_a^2 + 2x_a h_x + 2y_a h_y + h_x^2 + h_y^2$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$P(a+h) = P(a) + L_a(h_x, h_y) + O(\|h\|)$$

Où

$$L_a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

est telle que :

$$L_a(h) = L_a(h_x, h_y) = 2x_a h_x + 2y_a h_y$$

Il est clair que l'application L_a est une forme linéaire.

On en déduit que l'application P est différentiable en a, de différentielle $dP_a = L_a$.

REMARQUE 3.2. Unicité de la différentielle.

La différentielle, quand elle existe, est unique.

3.2 DERIVEE DIRECTIONNELLE

DEFINITION 3.2.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $a \in \dot{V}$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

On appelle dérivée (directionnelle) au point a, dans la direction $v \in \mathbb{R}^n$ la quantité :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Et on lit « dérivée partielle de f au point a dans la direction v (ou suivant v, ou encore par rapport à v) ».

PROPOSITION 3.1.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $a \in \dot{V}$.

Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées (directionnelles) au point a, dans toutes les directions $v \in \mathbb{R}^n$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$.

Démonstration :

La fonction f est différentiable en a de différentielle df_a. On a donc :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + O(\|h\|), \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Posons $h = tv$

$$f(a+tv) = f(a) + df_a(tv) + O(\|tv\|) = f(a) + tdf_a(v) + O(|t|\|v\|)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}[f(a+tv) - f(a)] = df_a(v) + \frac{1}{t}O(|t|\|v\|)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a) = df_a(v)$$

REMARQUE 3.3.

La réciproque est fausse. Une application peut avoir des dérivées partielles en un point a suivant toutes les directions, sans être différentiable en ce point a.

Il s'agit par exemple de la fonction f suivante en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>NOTATIONS :</u>

Dans les cas où $n = 2,3$, on note les directions sous la forme : e_x, e_y, e_z et on parlera alors de dérivées suivants les directions e_x, e_y, e_z.

Et on écrira :

$\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial e_x}(a)$.

De même, on notera : $\frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial e_y}(a), \frac{\partial f}{\partial e_z}(a)$.

DEFINITION 3.3.

Les dérivées directionnelles de la fonction f sont appelées dérivées partielles de f et correspondent aux dérivées des applications partielles.

PROPOSITION 3.2. Condition suffisante de continuité.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si les dérivées partielles de f existent et sont continues alors f est continue.

REMARQUE 3.4.

A la suite de la remarque précédente, le fait que les dérivées partielles de f existent dans toutes les directions n'entraîne pas nécessairement la continuité de f.

REMARQUE 3.5.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est différentiable en a, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + O(\|h\|)\,, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Supposons que

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$$

où nous avons noté $\{e_i\}$ la base de $\mathbb{R}^n$.

On a :

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i df_a(e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$$

PROPOSITION 3.3.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \dot{V}$.

Si f est différentiable en a, alors

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$$

EXEMPLE 3.2.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\ \ f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^3 + z$$

Les dérivées partielles de f sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + 2y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x + 3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 \end{cases}$$

La différentielle de f au point $= (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$, appliquée au vecteur

$$h = (h_x, h_y, h_z) \in \mathbb{R}^3$$

est :

$$df_a(h) = (2a_0 + 2b_0)h_x + (2a_0 + 3b_0^2)h_y + 1.h_z$$

PROPOSITION 3.4.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, qui associe à tout $X \in V$, le vecteur $(f_1(X), \dots, f_p(X))$.

f est différentiable en $a \in \dot{V}$ ssi f_i est différentiable en a, pour tout $i = 1, \dots, p$.

3.3 MATRICE JACOBIENNE

DEFINITION 3.4.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \dot{V}$.

On appelle matrice jacobienne de f (ou tout simplement la jacobienne de f), au point a, la matrice des dérivées partielles de f .

On la note : $J(f)(a)$ ou $J_a f$.

REMARQUE 3.6.

La jacobienne est donc une matrice à p lignes et n colonnes :

$$J(f)(a) \in M_{p,n}$$

Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on a :

$$J(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_1}(a) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial e_n}(a) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial e_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial e_n}(a) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial e_1}(a) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial e_n}(a) \end{pmatrix}$$

3.4 FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$:

DEFINITION 3.5.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

On dit que f est différentiable sur V si elle est différentiable en tout point $x \in \dot{V}$.

Dans ce cas, on appelle différentielle de f, l'application df définie par :

$$df: V \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\ t.q.\ df(x) = df_x$$

Où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Si de plus, df est continue alors on dit que f est continûment différentiable ou de façon équivalente que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque :

Ne pas confondre df et df_x : df_x est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, par définition de la différentielle en un point, et donc automatiquement continue, car les dimensions des espaces sont finies.

PROPOSITION 3.5.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

$f \in \mathcal{C}^1(V)$ ssi $\frac{\partial f_i}{\partial e_j}: V \to \mathbb{R}$ est continue pour tous $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, n$.

4. DERIVEES PARTIELLES SECONDES ET EXTREMA LOCAUX.

4.1 MATRICE HESSIENNE :

DEFINITION 4.1.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si f et ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ sont continûment différentiables ;
- On appelle dérivées partielles secondes et on note $\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}$ la dérivée partielle par rapport à e_j de la fonction $\frac{\partial f}{\partial e_i}$. On a donc : $\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} = \frac{\partial}{\partial e_j}(\frac{\partial f}{\partial e_i})$.
- On appelle matrice hessienne de f au point a, la matrice des dérivées partielles secondes de f, notée $H_a f$:

$$H_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial e_1 \partial e_1}(a) & \cdots \cdots \cdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial e_1 \partial e_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial e_2 \partial e_1}(a) \quad \cdots & \begin{matrix} \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial e_i \partial e_j}(a) \end{matrix} & \cdots \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial e_2 \partial e_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial e_n \partial e_1}(a) & \cdots \cdots \cdots & \frac{\partial^2 f_p}{\partial e_n \partial e_n}(a) \end{pmatrix}$$

Notation :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial e_1 \partial e_1}(a) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial e_1^2}(a)$$

PROPOSITION 4.1 (Lemme de Schwarz)

Soit une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, on a la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_j}(a)$$

Autrement dit, la matrice hessienne est une matrice symétrique.

4.2 EXTREMA LOCAUX.

Soit une fonction f définie dans un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \dot{V}$.

DEFINITION 4.2 .

Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$.

- a est un maximum local (resp. minimum local) s'il existe un réel r strictement positif, tel que $f(a)$ est le maximum (resp. le minimum) de f dans la boule centrée en a et rayon r, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{B}(a,r), f(x) \leq f(a)$$

(resp. $f(x) \geq f(a)$).

- Un extremum local de f est un point $a \in \dot{V}$ qui est, soit un maximum local, soit un minimum local.
- On appelle point critique de f, un point $a \in \dot{V}$, où $df_a = 0$ (ou encore $J(f)(a) = (0, \dots, 0)$).

PROPOSITION 4.2.

Si a est un extremum local de f alors a est un point critique de f.

REMARQUE 4.1

La réciproque est fausse.

PROPOSITION 4.3.

Soit $f \in \mathcal{C}^2$, soit $a \in \dot{A}$ un point critique de f et $H = H_a f$ la hessienne de f au point a.

(i) Si H est définie positive (resp. négative) alors f admet un minimum local strict (resp. maximum local strict) en a ;

(ii) Réciproquement, si f admet un minimum (resp. maximum) local en a, alors H est positive (resp. négative) mais pas nécessairement définie.

RECHERCHE PRATIQUE D'EXTREMUM :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$.

(i) Chercher les points critiques, c'est-à-dire, résoudre les équations : $\frac{\partial f}{\partial e_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(a) = 0$;

(ii) Pour chacun des points critiques, calculer la matrice hessienne :

$$H_a f = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad ; \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Trois cas peuvent alors se produire :

1. $\text{dét}\ H = rt - s^2 < 0$
   f n'a pas d'extremum local en a ; a est appelé point selle de f ;

2. $\text{dét}\ H = rt - s^2 = 0 \Leftrightarrow rt = s^2$
   Tout peut se produire, a est un point critique dégénéré de f ;

3. $\text{dét}\ H = rt - s^2 > 0$

   f admet un extremum local strict en a ;

   - C'est un maximum si $trace(H) = r + t < 0$;
   - C'est un minimum, sinon.