Devoir surveillé n° 2/4

5 janvier 2016

Nom ..STROBBE.. Prénom ..Nathan.. Groupe de td. .5

Barème indicatif

- Etude d'une relation binaire : 10 points. 6,25
- Résolution d'un système linéaire paramétré : 10 points. 6,5
- Restitution de cours : 10 points. 3,5
- Etude d'une application : 10 points. 0,5

Note finale : 8,5 /20

1 Exercice : étude d'une relation binaire entre entiers naturels.

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2.
Sur $\mathbb{P}$, on considère la relation binaire, notée $\mathcal{R}$, définie par :

$$\forall a, b \in \mathbb{P} \quad a\,\mathcal{R}\,b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \in \mathbb{P}$$

(a) Donner un exemple de couple (3, b) appartenant à la relation $\mathcal{R}$.
(b) Donner un exemple de couple (3, b) n'appartenant pas à la relation $\mathcal{R}$.
(c) La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ?
(d) La relation $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ?
(e) La relation $\mathcal{R}$ est-elle transitive ?
(f) La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

V a) Le couple $(3,3)$ marche, en effet : $\frac{3+3}{2} = 3 \in \mathbb{P}$
Donc $3 \mathcal{R} 3$ vraie

V b) Le couple $(3,13)$ ne fonctionne pas, en effet : $\frac{3+13}{2} = 8 \notin \mathbb{P}$
Donc $3 \mathcal{R} 13$ faux

c) $\mathcal{R}$ réflexive ?

V Soit $a \in \mathbb{P}$, $a \mathcal{R} a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} \in \mathbb{P}$

$\Leftrightarrow \frac{2a}{2} \in \mathbb{P} \Leftrightarrow a \in \mathbb{P}$

~ Donc : $\forall a \in \mathbb{P}$, $a \mathcal{R} a$ vraie ($\mathcal{R}$ est réflexive)

d) Soit $a, b \in \mathbb{P}$

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \in \mathbb{P}$

V $\Leftrightarrow \frac{b+a}{2} \in \mathbb{P}$ (par commutativité de l'addition)

dans $\mathbb{N}$

V $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \mathcal{R} a$

~ Donc : $\forall a, b \in \mathbb{P}$, $(a \mathcal{R} b) \Rightarrow (b \mathcal{R} a)$

i-e : $\mathcal{R}$ est symétrique

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$

e) $\mathcal{R}$ transitive ? Soit x fixé $\in \mathbb{P}$

Soit $a, b, c \in \mathbb{P}$, $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$

Pourquoi ?!

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = x$ et $\frac{b+c}{2} = x$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{2}$ $(\Leftrightarrow a+b = b+c)$

$\Leftrightarrow a = c$

$\Leftrightarrow a \mathcal{R} c$ (car $\mathcal{R}$ est réflexive)

Donc : $\forall a, b, c \in \mathbb{P}$, $\mathcal{R}$ est transitive

f) Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, alors $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.

$a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{2}$$

$$a+b = b+c$$

$$a = c$$

2 Exercice : résolution d'un système linéaire paramètré.

Soit a un réel.
Soit le système S à résoudre en $(x,\ y,\ z)$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x+y+az &= 2 \\ 3x+4y+2z &= a \\ 2x+3y-z &= 1 \end{cases}$$

Discussion erronée mais cohérente.

$$S:\begin{cases} x+y+az=2 & (l_1) \\ 3x+4y+2z=a & (l_2) \\ 2x+3y-z=1 & (l_3) \end{cases}$$

(passage à l'écriture à matrice augmentée)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}(l_1)\\(l_2)\\(l_3)\end{array}$$

l_1 pivot, $l_2 \leftarrow l_2-3l_1$, $l_3 \leftarrow l_3-2l_1$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & (2-3a) & a-6 \\ 0 & 1 & (-1-2a) & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c}(l_1)\\(l_2)\\(l_3)\end{array}$$

$l_2 \leftrightarrow l_3$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & (-1-2a) & -3 \\ 0 & 1 & 2-3a & a-6 \end{array}\right) \begin{array}{c}(l_1)\\(l_2)\\(l_3)\end{array}$$

X

l_2 pivot, $l_3 \leftarrow l_3-l_2$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & (-1-2a) & -3 \\ 0 & 0 & (3+a) & a-3 \end{array}\right) \begin{array}{c}(l_1)\\(l_2)\\(l_3)\end{array}$$

Err. de calcul.

Le système est échelonné

Discutons de l'ensemble de solution de S en fonction de a

∗ Si $a=-3$, le système S est équivalent à :

$$S : \begin{cases} x+y+az=2 \\ y+(-1-2a)z=-3 \\ 0=-6 \end{cases}$$

Ce système n'est pas vérifié

Donc : $\mathcal{S}(S)=\emptyset$

∗ Si $a\neq-3$, le système S est équivalent à :

$$S : \begin{cases} x+y+az=2 \\ y+(-1-2a)z=-3 \\ z=\dfrac{a-3}{3+a} \end{cases}$$

l_3 pivot

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{-a^2+5a+6}{3+a} \\ y=\dfrac{-2a^2+4a-12}{3+a} \\ z=\dfrac{a-3}{3+a} \end{cases}$$

l_2 pivot

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2+a+18}{3+a} \\ y=\dfrac{-2a^2+4a-12}{3+a} \\ z=\dfrac{a-3}{a+3} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}(S)=\left(\left(\dfrac{a^2+a+18}{3+a},\ \dfrac{-2a^2+4a-12}{3+a},\ \dfrac{a-3}{a+3}\right),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}\right)$

Non.

$2-3a-(-1-2a)$

$2-3a+1+2a$

$3+a$

$a-6+3$

$$\begin{cases} x+y+az=2 \\ y+(-1-2a)z=-3 \\ (3+a)z=a+3 \end{cases}$$

$z=\dfrac{a-3}{3+a}$

$L_2 \leftarrow L_2-(-1+2a)L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - aL_3$

$x+y=$

a^2-3a

$2-\dfrac{a(a-3)}{3+a}$

$\dfrac{6+2a-a^2+3a}{3+a}$

$\dfrac{-a^2+5a+6}{3+a}$

$-3-\dfrac{(-1+2a)(a+3)}{3+a}$

$\dfrac{-9-3a-(-a+3+2a^2-6a)}{3+a}$

$\dfrac{-9-3a+a-3-2a^2+6a}{3+a}$

$y=\dfrac{-2a^2+4a-12}{3+a}$

$x+\dfrac{-2a^2+4a-12}{3+a}=\dfrac{-a^2+5a+6}{3+a}$

$x=-a^2+5a+6+2a^2-4a+12$

$\dfrac{a^2+a+18}{3+a}$

3 Restitution de cours.

(a) Quelles sont les opérations élémentaires de Gauss ?

- Intervertion de deux équations
Permutation
- Multiplication d'une équation par une constante non nulle
- ~~Addition de 2 équations~~
- Inversement des inconnues dans toutes les équations
- Pivot de Gauss

√

~

HS.

(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus 0$. Soient S, S' deux systèmes à résoudre sur $\mathbb{K}^n$.
Indiquer ce que signifie l'expression «*S et S' sont équivalents*».

Cela signifie que : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence
Soient S, S' deux systèmes : $S \mathcal{R} S'$

Vu.

(c) Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.
Soient a, b deux éléments de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}(a)$, $\mathcal{C}(b)$ leur classes d'équivalence respectives.
Montrer que si $(a, b) \notin \mathcal{R}$, c'est-à-dire si a n'est pas en relation avec b par $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{C}(a)$ et $\mathcal{C}(b)$ sont disjointes.

$C(a) = \{ x \in \mathcal{E} / a \mathcal{R} x \}$
$C(b) = \{ x \in \mathcal{E} / b \mathcal{R} x \}$

NT

$\rightarrow$ $a\mathcal{R}a$ vraie

$b\mathcal{R}b$ vraie

$a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$

$b\not\mathcal{R}a \Rightarrow \cancel{b}\ a\not\mathcal{R}b$

$C(a) \cap C(b) \stackrel{?}{=} \emptyset$

(d) A présent, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des systèmes linéaires à résoudre dans $\mathbb{R}^3$
et $\mathcal{R}$ désigne la relation binaire définie sur $\mathcal{E}$ ainsi : pour tous systèmes S, S' éléments de $\mathcal{E}$

$\boxed{(S\ \mathcal{R}\ S') \text{ si et seulement si il existe un nombre fini d'opérations élémentaires de Gauss transformant } S \text{ en } S'}$

On admet que $\mathcal{R}$ est transitive. Expliquer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

R réflexive ? Soit S un système

SRS signifie que le système est en relation

V. avec lui-même, ce qui nécessite aucune opération

de Gauss. Donc R est réflexive

R symétrique ?

Soient S, S' deux systèmes, supposons SRS' vraie

Il existe un nombre fini d'opérations de Gauss

transformant S à S'.

Il existe également un nombre fini d'opérations de

Gauss transformant de S' à S. Il suffit alors

V. d'effectuer l'opération "inverse" par exemple

de soustraire à la place d'additionner et de multiplier à

la place de diviser : $S : l_2 \leftarrow l_2 + 3l_1 \rightarrow S'$

$S' : l_2 \leftarrow l_2 - 3l_1 \rightarrow S$

Incomplet / cas gén. attendu.

Donc R symétrique

Donc R est une relation d'équivalence

(e) On donne 6 éléments de $\mathcal{E}$:

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3 \\ y & = & 9 \\ z & = & 1 \end{array} \right. , \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -5 + 14y \\ z & = & -2 + 4y \end{array} \right. , \quad S_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + 5z & = & 5 \\ 2x + 4y - 8z & = & 34 \\ -x + 2y + 3z & = & 18 \end{array} \right. , \quad S_4 : \ 3x - y + 5z \ = \ 5$$

$$S_5 : \left\{ \begin{array}{lcl} 5y + 14z & = & 10 \\ 4y - z & = & 2 \\ -x + 2y + 3z & = & 1 \end{array} \right. , \quad S_6 : \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + 5z & = & 7 \\ 2x + 4y - 8z & = & 2 \\ -x + 2y + 3z & = & 1 \end{array} \right.$$

On forme $\mathcal{A}$ la partie de $\mathcal{E}$ telle que : $\mathcal{A} = \{S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6\}$. Déterminer la partition de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{R}$.

$A \in \mathcal{P}(E)$ tq $A = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

4 Exercice : étude d'une application.

On rappelle la définition suivante :

> Soit E un ensemble non vide.
> La relation $\mathcal{R}$: *est semblable à* est définie ainsi :
> $$\forall f, g \in \mathcal{A}(E,E) \ (f \ \mathcal{R} \ g) \Leftrightarrow (\exists \varphi, \ \varphi^{-1} \in \mathcal{A}(E,E) \ \ f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi).$$

Soient les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (7x-5y, 4x-2y) \end{array} \right. \qquad d \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x, 3y) \end{array} \right. \qquad \Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-5y, 2x-4y) \end{array} \right.$$

(a) Montrer que Φ est bijective et définir sa bijection réciproque Φ^{-1}.

. ϕ injective ? Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

Supposons $\phi((x,y)) = \phi((x',y'))$

$\sim$ $\begin{cases} 2x - 5y = 2x' - 5y' \\ 2x - 4y = 2x' - 4y' \end{cases} \Leftrightarrow$?

Donc $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\phi((x,y)) = \phi((x',y')) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

Donc ϕ injective

. ϕ surjective ?

$\phi^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (\end{array} \right.$

$(f \mathcal{R} d) \Leftrightarrow (\exists \phi, \phi^{-1} \in \mathcal{B}(E,F) \; f = \phi^{-1} \circ d \circ \phi)$

ϕ injective ?

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f((x_1,y)) = f((x',y')) \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

$2x - 5y = 2x' - 5y'$

$2x - 4y = 2x' - 4y'$

$x = 2x' - 4y' + 4y$

$2x' = 4x' - 8y' + 8y - 5y + 5y'$

$-2x' = -3y' + 3y$

$\phi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

$\begin{cases} a = 2x - 5y \\ b = 2x - 4y \end{cases}$

$2x = a + 5y$

$4y = 2x - b$

$4y = a + 5y - b$

$y = -a + b$

(b) Vérifier que : $f = \Phi \circ d \circ \Phi^{-1}$.

....

....

....

....

....

....

....

(c) Que peut-on conclure ?

....

(d) Donner la notation de l'ensemble des antécédents par f de l'élément $(0,0)$ et déterminer cet ensemble.

....

....

....

....

....

....

....

....

....