Exercice 0.1

a) $DL_3(2)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ b) $DL_3(4)$ de e^x c) $DL_2(3)$ de $\sqrt{1+x}$ d) $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

e) $DL_3(\dfrac{\pi}{4})$ de $\sqrt[3]{\tan x}$ f) $DL_2(0)$ de $\exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{\mathrm{ch}\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\right)$ g) $DL_4(0)$ de $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

h) $DL_4(0)$ de $\arccos(e^x - e^{-x})$ i) $DL_5(0)$ de $\arctan(1+x)$ j) $DL_5(0)$ de $\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

Exercice 0.2

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^3 x}\left(x-\dfrac{2}{3}\sin x-\dfrac{1}{3}\tan x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan nx - n\tan x}{\sin nx - n\sin x}$ $(n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\})$ d) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{9x^2+3x}$ g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{3x-2x^4}-x\sqrt{x}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$ j) $\lim\limits_{x\to t}\dfrac{t-x}{x\ln t - t\ln x}$ $(t>0)$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)}{(\cos x-1)^2}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt[3]{x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{9}{8}x+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ *p)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-(a+bx)}{x}$ (discuter)

Exercice 0.3

Soient f et g 2 fonctions impaires admettant un $DL_7(0)$ de 1^{er} terme x .
Déterminer un $DL_7(0)$ de $f\circ g - g\circ f$ et en déduire que c'est un infiniment petit d'ordre 7.

Application : $\arctan(\arcsin x)-\arcsin(\arctan x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^7}{30}$; $\mathrm{sh}(\tan x)-\tan(\mathrm{sh}x)\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^7}{90}$ etc...

Exercice 0.4

Soit $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$. Donner en moins de 10 secondes $f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Même question avec $g(x)=\arctan x$.

Exercice 0.5

Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ et $g:x\mapsto\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.
Etudier f et g au voisinage de 0 (prolongement , dérivabilité du prolongement etc...)

Exercice 0.6

Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ de :

a) $f:x\mapsto\sqrt{x^2+2x+3}-4x+7$ b) $g:x\mapsto x^2\ln\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right)$

c) $h:x\mapsto(x^2+2x+3)\arctan\dfrac{1}{2x+3}$ d) $k:x\mapsto(x+\sqrt{x})e^{\sqrt{x^2+x}-x}$.

Exercice 0.7

Soit $f:x\mapsto e^x\sin x$. Montrer que f est localement bijective au voisinage de 0 et déterminer un

$\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1} .

Exercice 0.8

A l'aide du Théorème des accroissements finis , trouver un équivalent au voisinage de $+\infty$ de :

a) $\sin\dfrac{1}{\ln n}-\sin\dfrac{1}{\ln(n+1)}$ b) $\arccos\dfrac{1}{n}-\arccos\dfrac{1}{n^2}$ c) $\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}$

Exercice 0.9

Donner la partie principale :

au voisinage de 0 de : $\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-\dfrac{3\sin x}{1-2\cos x}$

au voisinage de $+\infty$ de : $\dfrac{\pi}{2}-\arctan n-\sin\dfrac{1}{n}$

au voisinage de 0 de : $\ln(1+x+ax^2)-\dfrac{x}{1+bx}$ (discuter suivant les valeurs de a et b)

Exercice 0.10

Soit $f : x\mapsto\dfrac{x\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x-1}$

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de f .

2) Qu'en déduit-on sur un éventuel prolongement $\widetilde{f}$ de f par continuité en 0 ?

3) Qu'en déduit-on sur la nature du point $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$?

Exercice 0.11

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.

1) Déterminer le $DL_6(0)$ de $\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ puis , celui de $f(x)$.

2) Déterminer a et b pour que f(x) soit , au voisinage de 0 , un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible .

Prouver qu'alors : $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^6}{480}$.

Exercice 0.12

Développement limité d'une fonction réciproque.

1) Reprouver que $\tan$ admet le $DL_6(0)$: $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^6)$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\tan x-x$

a) Prouver que f réalise une bijection de $I=]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ sur une partie de $\mathbb{R}$ à préciser .

b) Justifier que f^{-1} est impaire , de classe $\mathcal{C}^\infty$, et admet en particulier un $DL_6(0)$ du type :

$$f^{-1}(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^6)$$

3)

a) Déterminer avec 1) et 2) le $DL_6(0)$ de $f\circ f^{-1}$.

b) que dire par ailleurs de $f\circ f^{-1}$? En déduire finalement le $DL_6(0)$ de f^{-1} .
