

# Électromagnétisme

## S11 Diélectriques II

Iannis Aliferis

*Université Nice Sophia Antipolis*

<b>Potentiel d'un diélectrique polarisé</b>	<b>2</b>
Potentiel d'un objet polarisé . . . . .	3
<b>Loi de Gauss dans les diélectriques : le vecteur déplacement électrique</b>	<b>4</b>
Loi de Gauss dans les diélectriques . . . . .	5
Déplacement électrique . . . . .	6
<b>Milieux linéaires, homogènes et isotropes : permittivité électrique</b>	<b>7</b>
Milieux LHI . . . . .	8
Permittivité relative: quelques valeurs typiques . . . . .	9
<b>Champ électrique dans un milieu linéaire, homogène et isotrope</b>	<b>10</b>
Champ électrique plus faible . . . . .	11
<b>Énergie électrostatique dans la matière</b>	<b>12</b>
Énergie électrostatique dans un diélectrique lhi . . . . .	13
<b>Rigidité diélectrique</b>	<b>14</b>
Rigidité diélectrique . . . . .	15
Rigidité diélectrique: quelques valeurs typiques . . . . .	16

## Potentiel d'un diélectrique polarisé

2

### Potentiel d'un objet polarisé

- ▼ Objet de volume  $\mathcal{V}$  et de surface  $S$  : découper en morceaux  $d\mathcal{V}$
- ▼ Quel potentiel au point d'observation  $\vec{r}$ ?
- ▼ Chaque  $d\mathcal{V}$  (à  $\vec{r}'$ ) contient un moment dipolaire  $\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') d\mathcal{V}$
- ▼ Vecteur  $\vec{l} \triangleq \vec{r} - \vec{r}'$  : de  $d\mathcal{V}$  au point d'observation
- ▼ Chaque dipôle  $\vec{p}(\vec{r}')$  à l'intérieur de  $d\mathcal{V}$  crée un potentiel  $dV(\vec{r})$  :

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{l} \cdot \vec{p}}{l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{l} \cdot \vec{P} d\mathcal{V}}{l^2}$$

- ▼ Le potentiel  $V(\vec{r})$  :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{l} \cdot \vec{P}}{l^2} d\mathcal{V} \stackrel{\text{sans démonstration}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{l} dS + \int_{\mathcal{V}} \frac{-\text{div } \vec{P}}{l} d\mathcal{V} \right]$$

- ▼ Rappel : le potentiel d'une charge ponctuelle  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$
- ▼ [charges polarisation surfaciques]  $\rho_s \text{ pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$
- ▼ [charges polarisation volumiques]  $\rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}$
- ▼ Vue **macroscopique** : dans l'objet,  $V(\vec{r})$  est une *valeur moyenne* !  
(résultat important, sans démonstration)

3

## Loi de Gauss dans les diélectriques : le vecteur déplacement électrique<sup>4</sup>

### Loi de Gauss dans les diélectriques

- ▼ Deux types de charges :
  1. « Libres » : on peut les choisir/placer, etc.
  2. « De polarisation » : liées à la matière
- ▼ Loi de Gauss (électrostatique) :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{libres}}) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (-\text{div } \vec{P} + \rho_{\text{libres}}) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libres}}$$

$$\vec{D} \triangleq \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1)$$

- ▼  $\vec{D}$  : déplacement (ou induction) électrique, en  $\text{C m}^{-2}$

5



## Déplacement électrique

### ▼ Définition

$$\vec{D} \triangleq \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

### ▼ Loi de Gauss du champ $\vec{D}$ (forme locale/intégrale) :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libres}}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, dS = Q_{\text{int libres}} \quad (2)$$

- ▼  $\vec{D}$  : densité de flux électrique, en  $\text{C m}^{-2}$
- ▼ Mêmes techniques pour calculer  $\vec{D}$  à partir de Gauss (symétrie, surface appropriée, etc.)
- ▼ Mais  $\vec{D}$  n'est pas comme le champ  $\vec{E}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\text{rot}} \vec{E} + \vec{\text{rot}} \vec{P} = \vec{\text{rot}} \vec{P} \neq 0 \quad \text{en général}$$

- ▼  $\vec{D}$  dépend des charges libres *et* de la polarisation [théorème Helmholtz]

6

## Milieux linéaires, homogènes et isotropes : permittivité électrique

7

### Milieux LHI

#### ▼ Linéaire :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3)$$

$\chi_e$  : susceptibilité électrique

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (4)$$

$$\triangleq \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

- ▼  $\epsilon$  : permittivité du milieu, en  $\text{F m}^{-1}$
- ▼  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  : permittivité relative  $\epsilon/\epsilon_0$  (ou constante diélectrique)
- ▼ Homogène :  $\epsilon_r$  ne dépend pas de  $\vec{r}$
- ▼ Isotrope : toutes les directions sont équivalentes :  $\epsilon_r$  est un scalaire

8



## Permittivité relative : quelques valeurs typiques

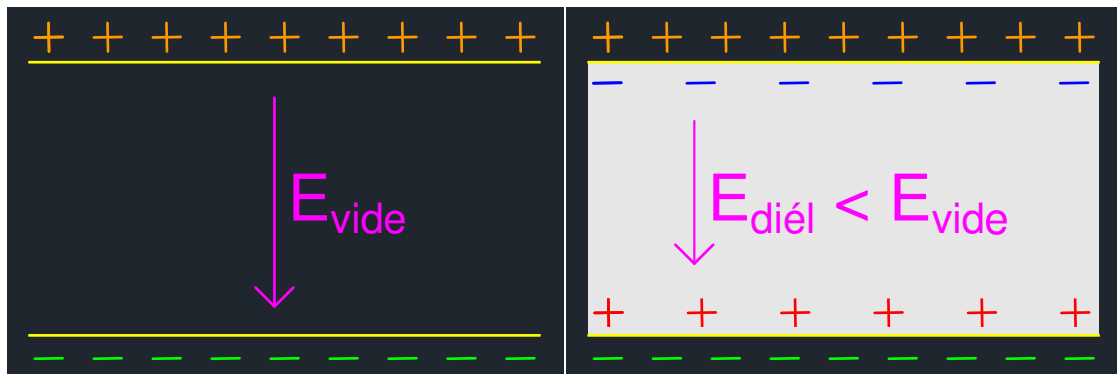
Matériau	$\epsilon_r$
Vide	1
Hydrogène	1.00025
Air (sec)	1.00054
Diamant	5.2
Sel	5.9
Silicone	11.8
Eau	80.1
Glace ( $-30^\circ\text{C}$ )	99

9

## Champ électrique dans un milieu linéaire, homogène et isotrope

10

## Champ électrique plus faible



- ▼ Condensateur à plaques parallèles : vide / rempli de diélectrique  $\epsilon_r$
- ▼ Diélectrique : charges de polarisation surfaciques

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libres}} \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}} \vec{D} = \vec{\text{rot}} \vec{P} \stackrel{\text{li}}{=} \vec{\text{rot}}(\epsilon_0 \chi_e \vec{E}) \stackrel{\text{h}}{=} \epsilon_0 \chi_e \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

$$\vec{E}_{\text{diél}} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\vec{E}_{\text{vide}}}{\epsilon_r}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libres}} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \text{div } \vec{E} \stackrel{\text{li}}{=} \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \left( \text{comparer avec } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

- ▼ remplacer  $\rho \rightarrow \rho_{\text{libres}}$  et  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$  dans la loi de Gauss  $\vec{E}$

11



## Énergie électrostatique dans la matière

12

### Énergie électrostatique dans un diélectrique lhi

- ▼ Énergie électrostatique dans le vide [énergie charges continues] :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2(\vec{r}) dV$$

- ▼  $\epsilon_0 E^2(\vec{r}) = \underbrace{\epsilon_0}_{\text{vide}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow$   
 $\longrightarrow \underbrace{\epsilon}_{\text{diél.}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \stackrel{\text{lhi}}{=} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$

- ▼ Énergie électrostatique dans un diélectrique lhi :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (5)$$

(valide aussi dans le vide,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_r = 1$ )

13

## Rigidité diélectrique

14

### Rigidité diélectrique

- ▼ Quand les isolants deviennent conducteurs...
- ▼ R.D. : valeur maximale du champ électrique dans un isolant avant qu'il ne devienne conducteur
- ▼ Mécanisme : quand  $E > E_{\max}$ , le champ « arrache des électrons » ; électrons libres accélérés par le champ ; avalanche d'électrons libres ; le milieu s'ionise et devient conducteur ; formation d'arc électrique ; son et lumière à la recombinaison électrons/ions
- ▼ Dans l'air  $E_{\max} = 3 \text{ MV/m}$
- ▼ Si  $E > E_{\max}$ , décharge électrostatique
- ▼ Effet corona : décharge électrostatique sans formation d'arc ; « fuite » de charges par les pointes ; champ électrique élevé, mais ne dépasse pas  $E_{\max}$

15



**Rigidité diélectrique : quelques valeurs typiques**

Matériau	R.D. ( $\text{MV m}^{-1}$ )
Air (sec, à 25 °C)	3
Quartz	8
Titanate de strontium	8
Néoprène	12
Nylon	14
Pyrex	14
Huile silicone	15
Papier	16
Bakélite	24
Polystyrène	24
Téflon	60

Remarque :  $\text{MV m}^{-1} = \text{kV mm}^{-1}$

16

