(7) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = ch(e^{-n}) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ~~donc $e^{-n} = 1 - n + \underset{0}{o}(n)$~~

$ch(u) = 1 + \underset{0}{o}(u)$ /

$ch(e^{-n}) = 1 + \underset{+\infty}{o}(e^{-n})$ /

$\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{\pi^3}{n^3}\right)$ /

donc $u_n = 1 + \underset{+\infty}{o}(e^{-n}) - 1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{\pi^3}{n^3}\right)$

or $\underset{+\infty}{o}(e^{-n}) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{\pi^3}{n^3}\right) = e^{-n} \underbrace{\varphi_1(n)}_{\to 0} + \frac{\pi^3}{n^3} \underbrace{\varphi_2(n)}_{\to 0}$

$= \frac{1}{n^3}\left(\underbrace{\frac{e^{-n}}{n^3}}_{\to 0} \underbrace{\varphi_1(n)}_{\to 0} + \pi^3 \underbrace{\varphi_2(n)}_{\to 0}\right) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ /

d'où $u_n = \frac{\pi^2}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ← l'est juste mais il est plus naturel d'écrire :

Finalement : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2} = \frac{a}{n^2}$ où $a = \frac{\pi^2}{2}$

$u_n = \frac{\pi^2}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
On utilise le résultat :
$f = g + o(g) \Leftrightarrow f \sim g$.

(6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin\frac{1}{n}$

$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sqrt[n]{n} = (n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$

or $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \underset{+\infty}{o}(1)$

Exercice 3
Compléter :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\varphi_1 + \frac{1}{n^2}\varphi_2$$
$$= \frac{1}{n}\left(\varphi_1 + \frac{1}{n}\varphi_2\right)$$

donc $u_n = (-1)^n \left(1 + \underset{+\infty}{o}(1)\right)\left(\frac{1}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{\underbrace{(-1)^n}_{\text{bornée}}\ \underbrace{\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}_{\text{bornée}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^n v_n$$

- Soit $\cancel{(}v_n\cancel{)} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ / Votre suite n'est pas définie explicitement...

Finalement : $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{+\infty}{O}(v_n)$

Il est attendu un résultat de la forme :
$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{+\infty}{O}(v_n)$

où (v_n) est négligeable devant $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et (v_n) est explicite !

Pour cela, dès le démarrage, il faut faire un développement asymptotique avec un reste en $\underset{+\infty}{O}$...