Séries numériques (2)

J. Ribault

14 octobre 2016

Mini-test **Semaine 42**

- Questions de cours (Définition d'une série convergente, de la suite des sommes partielles associée à une série, du reste d'ordre n...)
- Développement asymptotique

QCM

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est

1. une série
2. un nombre si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente
3. les deux réponses précédentes sont justes

QCM

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ existe uniquement lorsque la série de terme général u_n est convergente.

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série numérique.
On peut, sans condition sur la série, définir le reste d'ordre n.

1. VRAI
2. FAUX

QCM

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série numérique.

On peut, sans condition sur la série, définir la suite des sommes partielles.

1. VRAI
2. FAUX

Exercice (Question 1)

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \ln(n!)$.

- Ecrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n comme la somme partielle d'ordre n d'une suite (u_n) à préciser.

$$
\begin{aligned}
\forall n \geqslant 1, S_n &= \ln(n!) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln k \\
&= \ln 1 + \sum_{k=2}^{n} \ln k \\
&= \sum^{n} \ln k
\end{aligned}
$$

On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \ln n$.

On a, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$

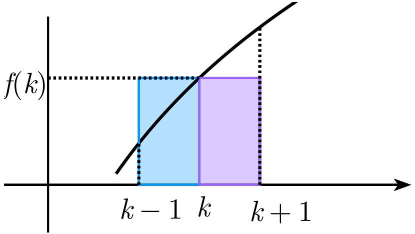
Question 2. « $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln k$ »

Soit $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$.

f est continue, positive et croissante.

Pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_{k-1}^{k} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f$$



Les deux rectangles ont pour aire $f(k)$.

Soit $n \geqslant 2$, en sommant membre à membre cet encadrement pour k variant de 2 à n on obtient : $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} f$

Donc : $\int_{1}^{n} f \leqslant S_n \leqslant \int_{2}^{n+1} f$

f étant positive : $\displaystyle\int_2^{n+1} f \leqslant \int_1^{n+1} f$.

Finalement :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_1^n f \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} f$$

Soit $n \geqslant 2$.

Calculons $I_n = \int_1^n f$:

$$I_n = \int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t$$

On pose :

$$\begin{array}{ll} u = \ln t & \mathrm{d}u = \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ v = t & \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \end{array}$$

Par IPP on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= [t \ln t]_1^n - \int_1^n \mathrm{d}t \\ &= n \ln n - [t]_1^n \\ &= n \ln n - n + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que : $I_{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n$.

CONCLUSION

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_1^n f \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} f$$

Donc :

$$\forall n \geqslant 2, \quad n \ln n - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$$

Question 3 « $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln k$ »

On cherche un équivalent de S_n

On vient de prouver que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad n \ln n - n + 1 \leqslant S_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \underbrace{1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n}}_{=v_n} \leqslant \frac{S_n}{n \ln n} \leqslant \underbrace{\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln n}}_{=w_n} \quad (\star)$$

$v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ ...

$w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ en effet :

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n \ln n}{n \ln n} = 1 \text{ et } \frac{1}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.
En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\left(\dfrac{S_n}{n\ln n}\right)$ est convergente et que sa limite vaut 1.
Donc

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln n.$$

CONCLUSION

$$\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln n.$$