Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps infini, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

Endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'endomorphisme u_A de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

On note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de cet endomorphisme. Autrement dit :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(u_A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$$

Remarques 1 *A est inversible* ***si et seulement si*** *$Ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}}\}$.*

1 Eléments propres

Définition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.*

- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une* ***valeur propre*** *de u* ***si et seulement si***

$$\exists x \in E,\ (x \neq 0 \text{ et } u(x) = \lambda x).$$

On appelle ***spectre*** *de u, et on note $Sp(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.*

- *Soit $x \in E$, on dit que x est un* ***vecteur propre*** *de u* ***si et seulement si***

$$x \neq 0 \text{ et } (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x).$$

Remarques 2
- *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ sont des valeur propre et vecteur propre associés* ***si et seulement si*** *$x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.*
- *Par définition, un* ***vecteur propre n'est jamais nul****.*
- *Un vecteur propre ne peut être associé à deux valeurs propres distinctes.*

Exemple 1 *Déterminer le spectre des endomorphismes suivants :*

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et h_α l'homothétie vectorielle de rapport α.*
2. *Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-y,x) \end{array}$.*

Définition 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une* ***valeur propre*** *de A* ***si et seulement si***

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ (X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X).$$

On appelle ***spectre*** *de A, et on note $Sp(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.*

- *Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on dit que X est un* ***vecteur propre*** *de A* ***si et seulement si***

$$X \neq 0 \text{ et } (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X).$$

Exemple 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
Vérifier que les vecteurs suivants sont des vecteurs propres, quelles sont leurs valeurs propres associées ?
$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarques 3 *1. Lien entre les définitions 1 et 2.*

- *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n*
- *$u \in \mathcal{L}(E)$*
- *$\mathcal{B}$ une base de E*
- *$A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$*
- *$X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$*
  - ⋆ *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est une valeur propre de u **si et seulement si** λ est une valeur propre de A.*
  - ⋆ *Pour tout $x \in E$, x est un vecteur propre de u **si et seulement si** X est un vecteur propre de A.*

*2. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des valeur propre et vecteur propre associés **si et seulement si** $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.*

Proposition 1 *1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\lambda \in Sp(u) \iff Ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \iff u - \lambda Id_E \text{ non injectif}$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \in Sp(A) \iff Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff rg(A - \lambda I_n) < n$$

En particulier, pour un endomorphisme de u d'un espace vectoriel de dimension finie, u est bijective **si et seulement si** 0 n'est pas valeur propre de u.

Définition 3 *1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u.*
*On appelle **sous-espace propre de u associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel $Ker(u - \lambda Id_E)$.*

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A.
*On appelle **sous-espace propre de A associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel $Ker(A - \lambda I_n)$.*

Remarques 4
- *Le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre λ sera souvent noté E_λ.*
- *E_λ est formé des vecteurs propres de u associé à la valeur propre propre λ et du vecteur nul.*
  Il est formé des vecteurs de E solutions de l'équation $u(x) = \lambda x$.
  Par exemple $E_0 = Ker(u)$.
  $E_1 = \{x \in E, u(x) = x\}$. C'est l'espace des vecteurs invariants par u.

Proposition 2 *Soit λ une valeur propre de u.*
- *E_λ est stable par u*
- *L'endomorphisme $u_{|E_\lambda}$ induit sur E_λ est l'homothétie de rapport λ.*

Proposition 3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.*
Alors les sous-espaces propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ sont en somme directe.

☠☠☠ La somme des sous-espaces propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ est directe cependant cette somme n'est pas nécessairement égale à E.

Corollaire 1 *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

Corollaire 2 *En dimension finie égale à n, un endomorphisme ne peut admettre plus de n valeurs propres.*

Détermination pratique :
Pour déterminer les valeurs propres de u, on étudie pour quels scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ l'équation $u(x) = \lambda x$ possède d'autres solutions que la solution nulle.
Cette équation est appelée **l'équation aux éléments propres associée à u.** De même pour déterminer, les valeurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on étudie l'équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.

Exemple 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de* A.

Exemple 4 *Dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *on considère l'endomorphisme* $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$. *Déterminer les valeurs propres de* D

2 Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe $\mathbb{K}$ est un corps infini.
On peut donc identifier polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Proposition 4

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & det(A - \lambda I_n) \end{array}$ *est une application polynômiale appelée* ***polynôme caractéristique*** *de* A, *et noté* χ_A.
2. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$.
   L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & det(u - \lambda Id_E) \end{array}$ *est une application polynômiale appelée* ***polynôme caractéristique*** *de* u, *et noté* χ_u.

Remarques 5 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension* $n \geqslant 1$, u *un endomorphisme de* E, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E *et* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. *On a :*

$$\chi_u = \chi_A$$

Ainsi en dimension finie on pourra choisir le point de vue « endomorphisme »ou le point de vue matriciel.

Preuve : **Montrons que** $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ \lambda & \mapsto & \mathbf{det}(A - \lambda \mathbf{I}_n) \end{array}$ **est une application polynômiale.**

Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1\,1} - \lambda & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} - \lambda \end{vmatrix}$

Pour $n = 1$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(\lambda) = a_{1\,1} - \lambda$.

Pour $n \geqslant 2$:

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On pose, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$: $\alpha_{i\,j} = \begin{cases} a_{i\,j} - \lambda \text{ pour } i = j \\ a_{i\,j} \text{ pour } i \neq j \end{cases}$.

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)\,1} \times \ldots \times \alpha_{\sigma(n)\,n}$$

  - ⋆ Pour $\sigma \neq \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$
    Il existe au moins deux entiers i et j tels que :
    $\alpha_{\sigma(i)\,i} \neq \alpha_{i\,i}$ et $\alpha_{\sigma(j)\,j} \neq \alpha_{j\,j}$.
    Donc $\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)\,1} \times \ldots \times \alpha_{\sigma(n)\,n}$ est un polynôme en λ de degré au plus $n - 2$.
  - ⋆ Pour $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$

$$\begin{aligned} \alpha_{1\,1} \times \ldots \times \alpha_{n\,n} &= \prod_{i=1}^{n} (a_{i\,i} - \lambda) \\ &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{1\,1} + \ldots + a_{n\,n}) \\ &\quad + \ldots \end{aligned}$$

    Donc $\alpha_{1\,1} \times \ldots \times \alpha_{n\,n}$ est un polynôme en λ de degré n.

Donc $\chi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1)\,1} \times \ldots \times \alpha_{\sigma(n)\,n}$ est un polynôme en λ de degré n, de plus :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \ldots$$

Le terme constant de ce polynôme est :

$$\chi_A(0) = \det(A).$$

CONCLUSION : Pour $n \geqslant 1$, $\lambda \mapsto \chi_A(\lambda)$ est une application polynomiale. □

Exemple 5 *Polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *où a, b, c, d sont des réels.*

Le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice carrée est facilité lorsque cette matrice est triangulaire.

Exemple 6 *Polynôme caractéristique de* $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ *où les a_i sont des réels.*

Proposition 5 *Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,Tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + det(A)$$

Remarques 6

- *Le polynôme caractéristique de A s'écrit alors :*

$$\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,Tr(A)X^{n-1} + \cdots + det(A)$$

- *Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors χ_A peut s'écrire sous la forme :* $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ *et on en déduit que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)\ \ et\ \ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A).$$

- *Si A est triangulaire alors χ_A est scindé.*

Proposition 6 *Si deux matrices carrées sont semblables alors elles ont le même polynôme caractéristique.*

☠☠☠ Attention la réciproque est fausse.
En effet, si on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique cependant elles ne sont pas semblables.

Proposition 7

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
   *λ est une valeur propre de A **si et seulement si** λ est une racine du polynôme caractéristique de A.*
2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
   *λ est une valeur propre de A **si et seulement si** λ est une racine du polynôme caractéristique de u.*

Conséquences :

- Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, tout endomorphisme admet au moins une valeur propre.
- Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire, tout endomorphisme admet au moins une valeur propre.

Corollaire 3 *Un endomorphisme de E (de dimension $n \geqslant 1$) ou une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a au plus n valeurs propres .*

Définition 4 *Soient u un endomorphisme de E de dimension finie $n \geqslant 1$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et λ_0 un valeur propre de u (respectivement de A).*
*On appelle **ordre de multiplicité** de λ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_u (respectivement χ_A).*

Remarques 7
- *Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, tout endomorphisme u admet exactement n valeurs propres comptées avec multiplicité.*
- *Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, tout endomorphisme u admet au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.*

Proposition 8 *Soient :*
- *E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$;*
- *$u \in \mathcal{L}(E)$;*
- *λ une valeur propre de u ;*
- *ω l'ordre de multiplicité de λ ;*
- *E_λ le sous-espace propre associé à λ.*

On a :

$$1 \leqslant dim(E_\lambda) \leqslant \omega$$

Conséquence importante : pour toute valeur propre λ simple de u (respectivement de A) , la dimension du sous-espace propre associé vaut 1.

Exemple 7 *Détermination pratique des éléments propres en dimension finie.*
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$