Exercice 1
Pour quelles valeurs du complexe q la série $\sum_{n\geq p} q^n$ est-elle convergente ?

En cas de convergence, que vaut sa somme $\sum_{n=p}^{+\infty} q^n$?

Exercice 2
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série géométrique convergente.
Que vaut son reste d'ordre n ?

Exercice 3
On pose, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, u_n s'écrit sous la forme : $u_n = v_{n+1} - v_n$.
   Préciser la valeur de v_n.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4
Déterminer une **condition nécessaire et suffisante** sur le complexe z pour que la série de terme général u_n soit absolument convergente.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1-\sqrt{5})^n z^{2n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = z^{2n}(1-2\sqrt{2}i)^n$.

Exercice 5
Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \quad , \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{5n} \quad , \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{3n-2}} \quad , \quad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n e^{in}} \quad , \quad S_5 = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{1-3n}.$$

Exercice 6 (Test année 2015-2016)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.
On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$) la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$).

1. Exhiber une série divergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ soit convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer S_n puis T_n comme somme des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que **si** $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente **alors** $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.
4. Montrer que **si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente **alors** $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.

Exercices supplémentaires

Exercice 7
Soit a un réel.
Ecrire $\frac{1}{1+2e^{ia}}$ en utilisant une somme de série géométrique convergente.

Exercice 8
Ecrire le rationnel x donné par son développement décimal illimité $0,765765765765765\ldots$ sous forme d'une fraction irréductible.