DEVOIR SURVEILLÉ D'O.M.I.(partie analyse)

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

CALCULATRICES INTERDITES

24,5

Exercice I

Dérivation. 2 questions **indépendantes** :

1) On considère les 4 fonctions définies par :

$$f_1(x) = \cos(x^5) \quad ; f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^4}} \quad ; f_3(x) = \arctan(\sin x) \quad ; f_4(x) = \tan(\ln x).$$

a) Déterminer les 2 ensembles de définition de f_3 et de f_4. 1/2

b) Déterminer les 4 expressions des dérivées $f_k'(x)$.

2) Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 9 11

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, les 2 dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et la différentielle (totale) de f en (x, y).

b) Déterminer une fonction g de 2 variables vérifiant : $(\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f) \quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \quad (\star)$.

Quelles sont alors toutes les solutions de $(\star)$? X

Exercice II

Intégration. 4 questions **indépendantes** :

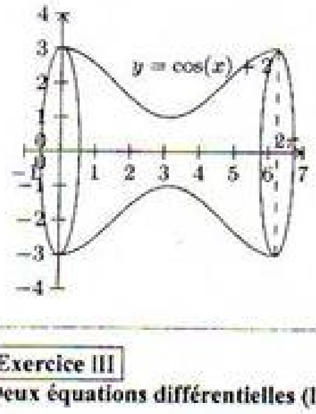
1) Essentiellement à l'aide d'un changement de variable, calculer :

$$I_1 = \int \frac{x^3}{(x^4+2)^5}\,dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx \quad I_3 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad F = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2) Calculer : $F = \displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x+1}\,dx$; $G = \displaystyle\int \arcsin x\,dx$. 7,5

3) Soit $u_n = \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$ $\quad (k \in \mathbb{N}$ fixé). Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. 15,5

4)



Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution (récipient en forme de diabolo ci-contre) engendré par la rotation autour de $x'x$ de la partie du plan : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \cos x + 2 \right\}$. X

"Application" (modeste) : l'unité étant le dm, pourra-t-on le remplir complètement si on dispose de 90 litres d'eau ?

[on donne : $\pi^2 < 10$]

Exercice III

Deux équations différentielles (les 2 questions sont indépendantes) :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' - 3y = \cos x$. 9,5

2) On considère l'équation différentielle : $x''(t) + ax'(t) + b^2 x(t) = c \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a) La résoudre pour $a = 0$; $b \neq 0$ et c quelconque. 8

b) La résoudre pour $a = b = 1$ et $c = 0$.

c) La résoudre pour $a = b = 0$ et c quelconque (sans rien savoir, évident avec programme de terminale).