Électromagnétisme

TD 3
Divergence (applications) / loi de Gauss forme locale

Introduction : Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface *fermée* est proportionnel aux sources du champ à l'intérieur de cette surface. Un flux positif indique la présence de sources à l'intérieur, alors qu'un flux négatif indique la présence de puits (sources « négatives »). Un flux nul indique soit l'absence de sources ou de puits, soit l'équilibre entre sources et puits (somme nulle) à l'intérieur de la surface fermée.

Dans la limite où on considère une surface fermée infiniment petite, on arrive à la conclusion que la divergence d'un champ vectoriel (flux par volume, donc densité volumique de flux) est proportionnelle à la densité volumique de ses sources.

Le lien entre le flux et la divergence nous amène à la formulation du théorème de la divergence : le flux à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la divergence sur le volume englobé par S, puisque ce flux est la somme d'une infinité de flux ($\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}V$) à travers plusieurs surfaces fermées élémentaires, englobant chacune un volume élémentaire $\mathrm{d}V$:

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{1}$$

Ces interprétations générales, valables pour tout champ vectoriel, prennent une forme précise dans le cas du champ électrique. Ici les sources du champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ sont les charges positives, alors que les puits sont les charges négatives. La relation entre flux et sources s'exprime par la loi de Gauss sous sa forme intégrale (TD 2) alors que la relation entre la divergence et la densité volumique des sources par la forme locale de la même loi :

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2}$$

où ρ est la densité volumique de charges en $\mathrm{C\,m^{-3}}$. Il faut noter que $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}$ et ρ sont des champs scalaires, c'est-à-dire des scalaires qui dépendent de la position $\vec{\boldsymbol{r}}$ dans l'espace. Il faudrait pour cela écrire plutôt $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ mais souvent on préfère une notation simplifiée.

Dans les trois systèmes de coordonnées, la divergence est calculée à l'aide des expressions suivantes :

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(cartésiennes)}$$

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(cylindriques)}$$

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(sphériques)}$$

Notions : divergence ; dérivée partielle ; théorème de la divergence ; loi de Gauss forme locale ; lignes de champ.

3.1 Charge ponctuelle, distribution linéaire et distribution planaire

Utiliser les résultats des exercices 2.1, 2.2 et 2.3 pour calculer la divergence du champ électrique $\vec{E}$ produit par :

a. une charge ponctuelle (comparer le résultat avec celui trouvé en 2.5) ;

b. une distribution linéaire infinie ;

c. un plan chargé infini.

Attention : dans cet exercice on a des charges « localisées » dans l'espace : elles n'ont aucune étendue dans une (cas c.), deux (cas b.) ou trois (cas a.) dimensions. On ne peut pas calculer $\operatorname{div}\vec{E}$ aux endroits où se trouvent des charges de ce type. . . (essayer avec les formules !)

Résultat:
div $\vec{E} = 0$ *, à l'exception des points où se trouvent des charges localisées*

3.2 Une sphère chargée

À partir des expressions obtenues à l'exercice 2.4, calculer la divergence du champ électrique $\vec{E}$ produit par une sphère chargée de rayon R_0. Considérer les cas a) et b) de l'exercice. (Les charges de ce problème ne sont pas « localisées », elles existent en trois dimensions : on parle de « coulomb par mètre cube » ; dans ce cas, on peut calculer $\operatorname{div}\vec{E}$ partout, y compris sur les charges).

Utiliser la loi de Gauss sous sa forme locale pour obtenir l'expression de la densité de charges $\rho(\vec{r})$ qui a créé ce champ. Vérifier qu'elle correspond à la description de l'exercice 2.4.