Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
On considère l'équation différentielle : $x(x+2)y' + (x+1)y = 1 \qquad (\boldsymbol{E})$.
Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de $(\boldsymbol{E})$ développable en série entière en 0.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad n\, a_{n-1} + (2n+1)\, a_n = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$, où λ est un réel à déterminer.

Exercice 2
Calculer la somme $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n(n^2+n-1)}{3^n}$. Vous justifierez l'existence de A.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

1. Tracer la représentation graphique de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n+1} \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$
4. Ecrire la série de Fourier trigonométrique de f.
5. On note S la somme de la série de Fourier de f.
   Justifier que S est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $S(t)$ en fonction de t.
6. Calculer $B = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.
7. Calculer $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.