

Théorie : la syntaxe

Une théorie est la donnée :

- d'un *langage* L
- d'un ensemble d'*axiomes* $A_1, A_2, \dots A_n$

Langage

On se place dans le cadre d'un langage L du premier ordre.

1.1 Les symboles de L

- Les *fonctions*
d'arité (i.e nombre d'arguments) quelconque sont notées : f, g, h, f_i, \dots
les fonctions 0-aires sont appelées *constantes* et sont notées a, b, c, a_i, \dots
- Les *prédicats*
d'arité quelconque sont notés : p, q, r, p_i, \dots
les prédicats 0-aires sont appelés *propositions* et sont notés P, Q, R, \dots
- Les *variables*
sont notées x, y, z, x_i, \dots

- Les *connecteurs logiques*

\neg (not), \wedge (et), \vee (ou), \Rightarrow (implication), \Leftrightarrow (équivalent)

- Les *quantificateurs*

\forall (universel), \exists (existantiel)

La syntaxe de L

- Les *termes de L* sont définis récursivement par :
 - (T1) toute *constante* c est un terme
 - (T2) toute *variable* x est un terme
 - (T3) si t_1, t_2, \dots, t_n , sont des termes et f un symbole de fonction d'arité n , alors $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme
- Les *atomes de L* sont définis récursivement par :
 - (A1) toute *proposition* P est un atome
 - (A2) si t_1, t_2, \dots, t_n , sont des termes et p un symbole de prédicat d'arité n , alors $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un atome

- Les *formules de L* sont définies récursivement par :

(F1) tout *atome* est une formule

(F2) si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$,
 $\phi \Rightarrow \psi$, $\phi \Leftrightarrow \psi$ et $\neg \phi$ sont des formules

(F3) si ϕ est une formule et si x est une variable
de ϕ , $\forall x \phi$ et $\exists x \phi$ sont des formules

(F4) \square représente la formule vide

Les formules sont notées $\phi, \psi, \varphi, \phi_i, \dots$

- **Priorité (par ordre décroissant) :**
 - les symboles de relations, la négation,
 - les quantificateurs
 - et
 - ou
 - implique

\Rightarrow est associatif à droite :

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3$$

S'interprète

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3)$$

Exemples :

fonctions : f (arité 1), g (arité 1), a (arité 0)

prédicats : p (arité 2), q (arité 2), r (arité 2), Q (arité 0)

termes : a , $f(a)$, $f(g(a))$, $f(x)$, x , $f(f(f(x)))$, ...

atomes : $p(x, y)$, $p(x, f(x))$, $q(a, g(f(x)))$, Q , ...

formules : $p(x, a) \vee p(x, f(x)) \wedge Q$

$$\exists x (p(x, f(x)) \Rightarrow q(a, g(f(x))))$$

$$\forall x \exists y r(a, f(y)) \Leftrightarrow (\neg p(x, a) \wedge q(a, a))$$

Remarque : par abus de langage on pourra utiliser une notation infixe: par exemple $x + y$ désigne le terme $+(x, y)$ où $+$ est un symbole de fonction, $x < y$ désigne l'atome $<(x, y)$ où $<$ est un symbole de prédicat

Exercise

- fonctions : f (arité 1), g (arité 1), a (arité 0)
- prédicats : p (arité 2), q (arité 2), r (arité 2), Q (arité 0)
- Les expressions suivantes sont-elles des formules du premier ordre ?
- $\phi_1 : \forall x (p (f(g(x)),a) \vee q(a))$
- $\phi_2 : \forall x \forall y (f(x) \vee q(x,y))$
- $\phi_3 : \forall x (q (x,y) \vee Q \wedge r(f(x),g(a)))$

Variables libres ou liées

On note $V(\phi)$ les variables qui apparaissent dans ϕ , \equiv l'égalité syntaxique (même écriture des deux termes).

$BV(\phi)$ les *variables liées* (Bounded Variables) de ϕ sont définies par :

- si $\phi \equiv r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ou $\phi \equiv t_1 = t_2$ alors $BV(\phi) = \emptyset$
- si $\phi \equiv \varphi \text{ op } \omega$ (avec $\text{op} : \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$) alors $BV(\phi) = BV(\omega) \cup BV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \neg \varphi$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \forall x \varphi$ ou $\phi \equiv \exists x \varphi$ alors $BV(\phi) = BV(\varphi) \cup \{x\}$

Exemple : $\phi_1 : (x = y) \vee (x > y)$
 $\phi_2 : \forall x ((y < x) \vee (y = x))$

$BV(\phi_1) = \emptyset$: x et y sont libres dans ϕ_1

$BV(\phi_2) = \{x\}$: x est liée dans ϕ_2

$FV(\phi)$ les *variables libres* (Free Variables) de ϕ sont définies par :

- si $\phi \equiv r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ou $\phi \equiv t_1 = t_2$ alors $FV(\phi) = V(\phi)$
- si $\phi \equiv \varphi \text{ op } \omega$ (op valant $\wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$) alors $FV(\phi) = FV(\omega) \cup FV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \neg \varphi$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi)$
- si $\phi \equiv \forall x \varphi$ ou $\phi \equiv \exists x \varphi$ alors $FV(\phi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

Exemple : $\phi_1 : \forall x, \forall y p(x,y)$

$\phi_2 : \forall x (q(x) \vee p(x,y))$

Exemples :

- $\phi_1 \equiv (p(x, f(y)) \vee \forall z r(a, z))$

$$V(\phi_1) = \{x, y, z\} \quad BV(\phi_1) = \{z\} \quad FV(\phi_1) = \{x, y\}$$

- $\phi_2 \equiv (\forall x p(x, y, z)) \vee \forall z (p(z) \Rightarrow r(z))$

$$V(\phi_2) = \{x, y, z\} \quad BV(\phi_2) = \{x, z\} \quad FV(\phi_2) = \{y, z\}$$

Remarque : z est à la fois libre et liée dans ϕ_2

Exercice : Langage : ?

$$\forall x \quad ((x \subset y) \Leftrightarrow \forall t (t \in x \Rightarrow t \in y))$$

Libres : ?

Liées : ?

$$((x \subset y) \wedge \exists y (y \in x)) \Rightarrow \exists x (x \in y)$$

Libres : ?

Liées : ?

Formules particulières

- Si $FV(\phi) = \emptyset$ alors ϕ est une *formule close*
- Si $FV(\phi) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors
 - $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \phi$ *clôture universelle*
 - $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \phi$ *clôture existentielle*
- Si $\phi \equiv p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ alors ϕ est un atome ou *littéral positif*
- Si $\phi \equiv \neg p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ alors ϕ est un atome nié ou *littéral négatif*
- Si $\phi \equiv \forall x_1, x_2, \dots, x_n (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n)$ avec ϕ_i un littéral alors ϕ est une *clause*
- Si $\phi \equiv \forall x_1, x_2, \dots, x_n (\neg \phi_1 \vee \neg \phi_2 \vee \dots \vee \neg \phi_n \vee \varphi)$ où les ϕ_i et φ sont des atomes, alors ϕ est une *clause de Horn*

Axiomes

- ***Un axiome est utilisé pour faire des déductions***
- On « identifie » les formules du langage par rapport aux axiomes pour faire ces déductions
- Quand on passe à un domaine sémantique, ***l'axiome doit être vrai et sa validité ne doit pas dépendre de la valeur de ses variables***
 - un axiome est une **formule close** c'est à dire que toutes ses variables sont liées

Exemple :

Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux formules du langage L contenant deux symboles de relation = et <

$$\phi_1 : \forall x, \forall y ((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y))$$

$$\phi_2 : \forall x ((y < x) \vee (y=x))$$

x et y sont liées dans ϕ_1 ; x est liée dans ϕ_2 ; y est libre dans ϕ_2

ϕ_1 n'a pas de variable libre

Quand on interprète ϕ_1 et ϕ_2 dans des mondes sémantiques, ϕ_1 est une Formule soit valide soit non valide. Par contre, la validité de ϕ_2 dépend de la valeur de y

Par exemple, pour les entiers positifs, ϕ_1 est toujours vraie mais ϕ_2 est vraie quand on interprète y comme la valeur 0 *et elle est fausse sinon.*

Un axiome est une formule close
Les formules à démontrer sont aussi des formules closes