Électromagnétisme

Examen (3[e]), durée 1h30
documents autorisés : aucun

21 mars 2017

Numéro étudiant								Groupe de TD	Place

VOTRE COPIE NE DOIT COMPORTER AUCUN AUTRE ÉLÉMENT D'IDENTIFICATION (PAS DE NOM, PRÉNOM).

Ne pas dégrafer les feuilles svp !

Vous êtes libre à utiliser les pages (recto/verso) pour donner vos réponses ou comme brouillon, comme cela vous convient. Merci d'indiquer les pages brouillon.

Extrait du règlement des études de Polytech'Nice Sophia (section 9) :

Pendant la durée des épreuves il est interdit :

- *de détenir tout moyen de communication (téléphone portable, micro-ordinateur, ...), sauf conditions particulières à l'épreuve ;*
- *de communiquer entre candidats ou avec l'extérieur et d'échanger du matériel (règle, stylo, calculatrice, ...) ;*
- *d'utiliser, ou même de conserver sans les utiliser, des documents ou matériels non autorisés pendant l'épreuve.*

Toute infraction aux instructions énoncées ci-avant ou tentative de fraude dûment constatée entraîne l'application du décret N° 95-842 du 13 juillet 1995 relatif à la procédure disciplinaire dans les établissements publics d'enseignement supérieur.

1 Conducteur plat

Dans cette partie on va obtenir l'expression du champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ créé par un conducteur plat (p.ex. du papier aluminium, posé sur une surface plane, parcouru par un courant). Afin de rendre les calculs possibles, on va considérer que l'épaisseur du conducteur plat est nulle et que sa largeur, ainsi que sa longueur, sont infinies. (Les résultats obtenus seront alors valides dans le cas d'un conducteur plat non-infini tant qu'on reste dans sa partie centrale, à une hauteur relativement faible par rapport à ses vrais dimensions.) Le conducteur se trouve sur le plan xy et il est parcouru par un courant uniforme, orienté selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$.

On peut considérer ce conducteur plat comme un ensemble d'une infinité de conducteurs rectilignes, infiniment longs, orientés selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ et placés les uns à côté des autres. Chacun de ces conducteurs (des « lamelles ») a une largeur $\mathrm{d}y$ et il est parcouru par un courant $I = J_s\,\mathrm{d}y$, où J_s est la norme de la *densité de courant surfacique*, en $\mathrm{A\,m^{-1}}$ (courant par largeur de lamelle). Comme $\mathrm{d}y$ est infiniment petit, le champ magnétique créé par chacune de ces lamelles correspond à celui créé par un conducteur rectiligne *filiforme*, de longueur infinie, parcouru par le même courant I. Le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ du conducteur plat sera alors la somme de toutes les contributions $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ créées par ces lamelles.

a. Faire un schéma avec le plan yz sur la feuille. Isoler d'abord deux lamelles, situées à $y_1 = -y$ et $y_2 = +y$, et donner l'expression de la somme de leurs contributions au point $M(0, 0, z)$, situé à une hauteur z (> 0) au dessus de l'origine :
$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{M}}) = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{M}}) + \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{M}})$.

b. À partir du résultat de la question précédente, donner l'expression du champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{M}})$, créé par la totalité du conducteur plat.

c. Comment peut-on généraliser l'expression du champ $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{M}})$ à n'importe quel point de l'espace, y compris à $z < 0$? Donner l'expression de $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

d. Utiliser la loi d'Ampère, forme intégrale, pour vérifier que le champ $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ est exact. Prendre une courbe Γ sous forme de rectangle, de côtés parallèles aux axes Oy (largeur L) et Oz (hauteur l), dont une partie se situe à $z > 0$ et l'autre partie à $z < 0$.

e. Choisir un point dans l'espace (à $z \neq 0$) et vérifier que la loi d'Ampère, sous sa forme locale, y est valide.

Remarque 1 *Le champ magnétique créé par un conducteur rectiligne filiforme, de longueur infinie, placé sur l'axe Oz du système des coordonnées cylindriques et parcouru par un courant I orienté dans le sens de $\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{z}}$ est donné par $\vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$.*

Remarque 2 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$

Réponse :
L'énoncé est long afin d'aider à la mise en place des différentes étapes (dans un livre, on trouvera l'équivalent des quatre premières lignes seulement). La correction est manuscrite dans les pages qui suivent.

2 Mouvement au dessus d'un conducteur plat

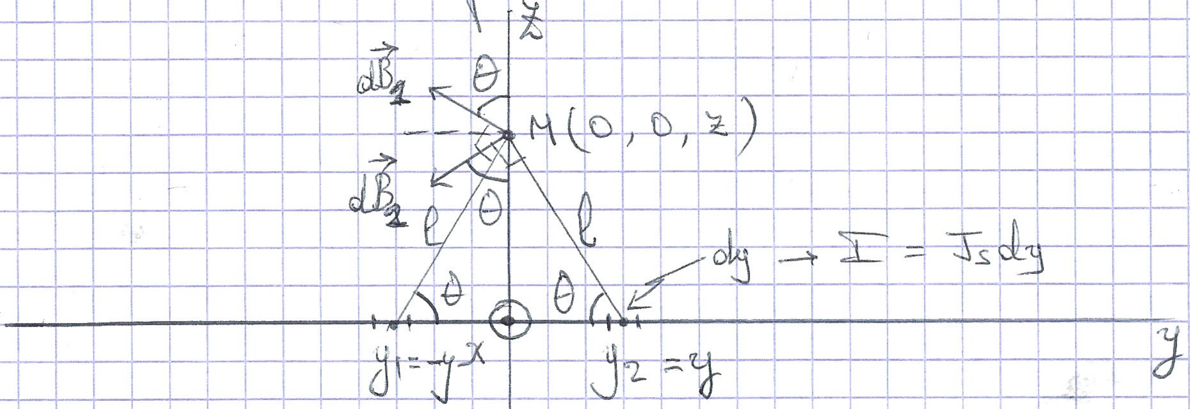
On laisse une particule de charge q et de masse m au repos au point $M(0,0,h)$ (en cartésiennes) dans une région de l'espace où le champ magnétique est uniforme et constant dans le temps, $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -B\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ (pour $z > 0$).

À cause de son poids, la particule va initialement commencer à perdre de l'altitude. *Mais est-ce qu'elle va toucher le plan horizontal (à $z = 0$) ou pas ?* Pour répondre à cette question, il faudra utiliser la deuxième loi de Newton et examiner le mouvement. (On considère que g, l'accélération de la pesanteur, ne change pas en fonction de z.)

Remarque 3 *Pour trouver la solution à une équation différentielle avec second membre (« inhomogène »), il faut d'abord trouver la solution générale, qui correspond à l'équation homogène (sans le second membre), et lui ajouter une solution particulière. Si le second membre est une constante, la solution particulière est une constante aussi (on peut la déterminer en la « testant » dans l'équation différentielle).*

Réponse :
Cet exercice correspond à une partie du TD 8.2 (qu. a et qu. b, uniquement la position verticale $z(t)$), sauf que à la place de la force électrostatique $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} = qE\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ on a ici le poids $\vec{\boldsymbol{P}} = -mg\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$. On trouvera alors les résultats du 8.2, mais avec le terme E remplacé par $-mg/q$. Après cette modification, ainsi que celle de la position initiale $\vec{\boldsymbol{r}}(t=0) = (0,0,h)^T$ (au lieu de l'origine) on obtient $z(t) = \frac{g}{\omega^2}[\cos(\omega t) - 1] + h$, où $\omega = \frac{qB}{m}$. Comme le cosinus oscille entre $+1$ et -1, la particule oscille en hauteur entre h et $h - 2\frac{g}{\omega^2}$, elle ne touchera donc pas le conducteur si $h > 2\frac{g}{\omega^2} = \frac{2gm^2}{q^2B^2}$.

1. Conducteur plat



On considère le conducteur plat comme un ensemble de lamelles, c'est-à-dire de conducteurs rectilignes filiformes infinis. Le champ de chaque lamelle est donné par la Remarque 1, pas par Biot-Savart.

a. $$dB_1(\vec{r}_M) = dB_2(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(\pm y)^2+z^2}}J_s\,dy$$

$$\vec{dB}(\vec{r}_M) = \vec{dB}_1(\vec{r}_M) + \vec{dB}_2(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}J_s\,dy\left(-2\underbrace{\sin\theta}_{z/l}\,\hat{e}_y\right)$$

orientation : règle de la main droite

$$= -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{z}{y^2+z^2}J_s\,dy\,\hat{e}_y$$

b. $$\vec{B}(\vec{r}_M) = \int dB(\vec{r}_M) = -\frac{\mu_0}{\pi}J_s\,z\int_0^\infty \frac{1}{y^2+z^2}dy\;\hat{e}_y =$$

car dans $\vec{dB}(\vec{r}_M)$ on a la contribution de <u>deux</u> lamelles, à $\pm y$, il faut donc intégrer uniquement sur la moitié de l'axe y.

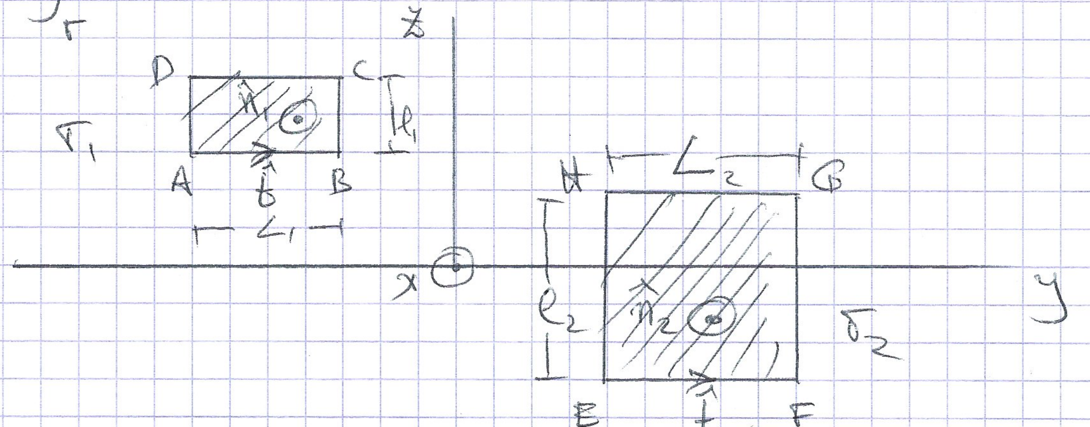
$$= -\frac{\mu_0}{\pi}J_s\,z\left[\frac{1}{z}\arctan\frac{y}{z}\right]_0^\infty \hat{e}_y =$$

$$= -\frac{\mu_0}{\pi}J_s\left(\underbrace{\arctan(\infty)}_{\pi/2} - \underbrace{\arctan(0)}_{0}\right)\hat{e}_y = -\frac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y$$

c. Les symétries par translations (selon x et y) nous montrent que le résultat est valable quel que soit x et y.
En plus, l'expression de $\vec{B}(\vec{r}_M)$ ne fait pas apparaître la hauteur z, elle est donc valable pour tout $z>0$ ($\vec{B}$ constant!)
À $z<0$, on a le même développement mais le champ sera de sens opposé, comme on peut voir si on prend $M'(0,0,z<0)$ avec deux lamelles symétriques.
Finalement

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y &, z>0 \\ +\dfrac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y &, z<0 \end{cases}$$

d. $$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\hat{t}\,dl = \mu_0 I_{enlacé}$$



$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}\cdot\hat{t}\,dl = \int_{A\to B} -\frac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y\cdot(\hat{e}_y)\,dl + \int_{\substack{B\to C\\ D\to A}} \underbrace{-\frac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y\cdot(\pm e_z)}_{=0} +$$

$$+\int_{C\to D} -\frac{\mu_0 J_s}{2}\hat{e}_y\cdot(-\hat{e}_y)\,dl = -\frac{\mu_0 J_s}{2}L + \frac{\mu_0 J_s}{2}L = 0$$

alors qu'il n'y a pas de courant enlacé, donc $0=0$ ✓

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot \hat{t}\, dl = \int_{E \to F} + \frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y\, dl + 0 + \int_{G \to H} - \frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{e}_y \cdot (-\hat{e}_y)\, dl + 0$$

$$= 2 \frac{\mu_0 J_s}{2} L = \mu_0 J_s L$$

Le courant enlacé par Γ_2 circule sur une largeur L du conducteur, dans le sens de $+\hat{e}_x$, // à $\hat{n}$.
Il est donc égal à $J_s L$ ✓

e. Ampère forme locale : $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Le champ $\vec{B}$ ~~est~~ ne dépend pas de x, y, z tant qu'on reste du même côté du plan, donc $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ (pas de dérivées spatiales).
À tous ces endroits on est dans le vide, donc $\vec{J} = \vec{0}$, ce qui vérifie Ampère local.