7.2 Exercices sur les endomorphismes orthogonaux ou symétriques.

4. **Corrigé : matrices d'endomorphismes en dimension 2.**

(1) Dans chaque cas, déterminons **sans calcul** si f est orthogonal.
On a montré en cours que :

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; a^2+b^2=1 \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; a^2+b^2=1 \right\}$$

⋆ Formellement, si une matrice M d'ordre 2 est orthogonale, alors ou bien $M = a.I_2 + A$ avec A antisymétrique, ou bien M est symétrique.

Avec ce premier critère formel, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{7} & \dfrac{\sqrt{33}}{7} \\ -\dfrac{\sqrt{33}}{7} & -\dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$

sont caractérisées comme n'étant pas orthogonales.

⋆ Il reste donc à examiner M_2, M_3, M_6, M_7.
Le plus simple est ici un argument numérique si évident qu'on l'obtient sans calcul : déterminant comparé à ± 1, norme comparée à 1, produit scalaire comparé à 0.
Avec ce deuxième critère numérique, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $M_6 = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{33} \\ \sqrt{33} & -4 \end{pmatrix}$ qui ont chacune au moins une colonne dont les coefficients absolus sont supérieurs ou égaux à 1, sont caractérisées comme n'étant pas orthogonales.

⋆ Il reste donc à examiner M_3, M_7.
$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale car : $M_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\begin{cases} f(u_1) & = -u_2 \\ f(u_2) & = u_1 \end{cases}$.
Par hypothèse, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une b.o.n. donc $(-u_2, u_1) = (f(u_1), f(u_2))$ l'est aussi.
Donc f est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ donc $M_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonal.

$M_7 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{33} \\ -\sqrt{33} & 4 \end{pmatrix}$ est la seule matrice pour laquelle un seul calcul est nécessaire.
Sans calcul, on sait que $f(u_1), f(u_2)$ sont orthogonaux (voir exercice 9 p. 23 §1). $f(u_1), f(u_2)$ ayant les mêmes coordonnées à l'ordre et au signe près, il suffit de calculer <u>une</u> norme :

$$\frac{1}{7^2}\sqrt{4^2+33} = \frac{1}{7^2}\sqrt{49} = 1$$

M_7 est caractérisée comme matrice orthogonale.

⋆ Conclusion :

$$\boxed{M_3, M_7 \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})}$$

(2) Représentations graphiques de l'image de $\mathcal{B}$ par f à construire seul.
Remarques :
⋆ Si le déterminant est positif, observer que l'orientation de la base est conservé. *i.e.* :
le sens de rotation pour passer de la direction de u_1 à celle de u_2 est le même que le sens de rotation pour passer de la direction de $f(u_1)$ à celle de $f(u_2)$.
⋆ M_5 est la matrice d'une symétrie <u>non</u> orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1 - u_2)$.