

DEVOIR SURVEILLÉ

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.I.P. I

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

CALCULATRICES INTERDITES

Exercice I

Dérivation. 2 questions indépendantes :

1) On considère les 4 fonctions définies par :

$$f_1(x) = x^{10} ; f_2(x) = 10^x ; f_3(x) = \tan(\cos x) ; f_4(x) = \sqrt{\arccos(x)}.$$

a) Déterminer les 2 ensembles de définition de f_3 et de f_4 .b) Déterminer les 4 expressions des dérivées $f'_k(x)$.2) Soit $f : (x, y) \mapsto x \arctan(2x + y^2)$.Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f et les 2 dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exercice II

Intégration. 2 questions indépendantes :

1) Calculer :

$$I_1 = \int_1^2 x^2 \sqrt{2+x^3} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx.$$

$$2) \text{ Soit } u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}.$$

a) Que vaut $\ln u_n$? Interpréter $\ln u_n$ comme une valeur moyenne.b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice III

Deux équations différentielles (les 2 questions sont indépendantes) :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y' + 2y = xe^x$.

2) On considère un solide de masse m , suspendu à un ressort de raideur k ; on supposera que la force de résistance due à l'air, est (en norme) proportionnelle à la vitesse, f désignant alors le coefficient de proportionnalité dit de frottement.

On repère la position du solide à l'instant t par l'abscisse $x(t)$ de son centre de gravité G relativement au repère (O, \vec{i}) , O étant confondu avec G quand il n'y a pas tension du ressort.

a) Prouver que x vérifie l'équation différentielle : $mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = mg$.

b) La résoudre dans le cas où :

$m = 1 \text{ kg}$; $f = 3 \text{ (N.sec/m)}$; $k = 5 \text{ (N/m)}$ et en prenant $g = 10 \text{ m/(sec)}^2$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

