1 Questionnaire.

Dans tout le questionnaire, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ muni du produit scalaire canonique.

Q.1 Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la distance entre le vecteur $(-5, 2, 5)$ et le plan $\text{Vect}((1, 0, 2), (2, 0, -1))$:

Q.2 Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.
Lequel des énoncés suivants n'est pas toujours vrai pour u, v, w ?

Q.3 Parmi les énoncés suivants, lequel n'est pas toujours vrai ?

- ⋆ ◯ Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$$
- ⋆ ◯ Les colonnes d'une matrice orthogonale d'ordre n désignent des vecteurs formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
- ⋆ ◯ Si U est une matrice carrée symétrique d'ordre n alors pour tout vecteur dont on note X sa matrice colonne de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:
$$||UX|| = ||X||$$
- ⋆ ◯ Si U est une matrice orthogonale alors son déterminant est strictement positif.

Q.4 Soient $a = (1, 1, 1),\ b = (0, 3, 6),\ c = (1, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $||c - (x_0.a + y_0.b)|| = inf_{x,y\in\mathbb{R}} ||c - (x.a + y.b)||$.

Q.5 Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $a = (1,3,5)$ $b = (1,3,-2)$ et $u = (1,1,1)$.
Déterminer $p(u)$ le projeté orthogonal de u sur $\text{Vect}(a,b)$.

Q.6 Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la distance entre les vecteurs $(1,-1,2,3)$ et $(1,2,3,4)$:

Q.7 Soient $u_1 = (1,0,-1)$ et $u_2 = (2,1,4)$ deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$.
Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille $\{u_1,u_2\}$:

Q.8 Soient $u = (1,2,1)$ et $v = (-1,4,5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Construire (u',v') une base orthogonale de $\text{Vect}(u,v)$.

Q.9 Soient $u = (2,4,6)$, $a = (3,-3,0)$, $b = (2,2,-1)$, $c = (1,1,4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Après avoir vérifié que (a,b,c) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de u dans la vase (a,b,c).

Q.10 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Parmi les matrices suivantes, laquelle est la matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale ?

⋆ vrai/faux $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

⋆ vrai/faux $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

⋆ vrai/faux $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

⋆ vrai/faux $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Q.11 Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la distance entre le vecteur $v = (1, 2, 6)$ et la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 1, 1)$?

Q.12 Certaines des propositions suivantes ne sont pas toujours vraies.

(1) Toute matrice symétrique d'ordre n admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

(2) Une matrice carrée d'ordre n non symétriques n'a pas de vecteurs propres indépendants deux à deux.

(3) Pour toute matrice A, la matrice $A\,{}^tA$ est orthogonalement diagonalisable.

(4) Toute matrice carrée d'ordre n admet n valeurs propres distinctes.

Sélectionner la bonne réponse.

⋆ ○ Seulement le (1)

⋆ ○ Seulement les (1) et (2)

⋆ ○ Seulement le (1) et (4)

⋆ ◯ Seulement le (4)

Q.13 Lequel des énoncés suivants est faux :

⋆ vrai/faux Deux matrices semblables ont le même déterminant.

⋆ vrai/faux Si une matrice est inversible alors elle est diagonalisable.

⋆ vrai/faux Deux matrices semblables ont le même spectre de valeurs propres.

⋆ vrai/faux Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres réelles distinctes est diagonalisable.

Q.14 Soient les vecteurs $u = (2, -1, -3, 1)$ et $v = (-1, 5, 6, -5)$ dans $\mathbb{R}^4$.
Déterminer la distance entre le vecteur v et la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$:

Q.15 Soient $u = (2, 1, 1)$ et $v = (-1, 0, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Par le procédé de Gram-Schmidt, orthogonaliser la famille $\{u, v\}$.

Q.16 Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (2, -1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer le projeté orthogonal de v sur $\text{Vect}(u)$.

Q.17 Soient $a = (2, 1, -1)$ $b = (0, 1, 1)$, $c = (1, -1, 1)$ et $u = (1, 2, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Après avoir vérifié que (a, b, c) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de u dans la base (a, b, c).

Q.18 Lequel des énoncés suivants n'est pas toujours vrai ?
Les matrices considérées, A et B, sont à coefficients réels.

⋆ vrai/faux Si A est orthogonalement diagonalisable alors A est symétrique.

⋆ vrai/faux Si A orthogonalement diagonalisable alors AA est orthogonalement diagonalisable.

⋆ vrai/faux Si une matrice A est semblable à une matrice B symétrique alors A est orthogonalement diagonalisable. .

⋆ vrai/faux Si une matrice A est symétrique et inversible alors son inverse est orthogonalement diagonalisable.

Q.19 Soit $H = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,5,0))$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour déterminer une base orthonormée de H.