Électromagnétisme

TD 9
Champ magnétique : calcul à partir des courants (loi d'Ampère)

Introduction : La loi d'Ampère établit le lien entre le champ magnétique $\vec{B}$ et la densité de courant $\vec{J}$ qui le crée. On considère une surface *ouverte* S et la courbe Γ associée à cette surface (c'est-à-dire son bord, évidemment une courbe *fermée*). Selon la loi d'Ampère, la circulation du champ magnétique le long de Γ est proportionelle au flux de la densité de courant à travers S :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \hat{t}\,\mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

Le sens de parcours de la courbe Γ (le sens du vecteur tangentiel $\hat{t}$) et l'orientation de la surface S (le sens du vecteur normal $\hat{n}$) sont liés par la règle de la main droite : si le pouce montre selon $\hat{n}$, alors ce sont les autres doigts qui indiquent le sens de $\hat{t}$. Il faut noter ici que, pour une courbe fermée Γ, on peut imaginer une infinité de surfaces ouvertes S ayant Γ comme bord. Pour faciliter les calculs, on choisit le plus souvent une courbe fermée *appartenant à un plan* et on lui associe, parmi toutes les surfaces possibles, celle de la plus petite aire, c'est-à-dire la surface qui appartient au même plan que la courbe.

Le flux de la densité de courant $\vec{J}$, dans (1), correspond au *courant* total I qui traverse la surface S. Le sens du vecteur normal $\hat{n}$ définit alors le sens du courant *positif.*

La loi d'Ampère est à la loi de Biot-Savart, ce que la loi de Gauss est à celle de Coulomb. Elle peut être utilisée de trois façons différentes (comparer avec le TD 1) :

a. Calculer la circulation du champ magnétique sur une courbe fermée, à partir du courant qui traverse la surface associée. C'est l'utilisation la plus simple : multiplier I par μ_0.

b. Calculer le courant enlacé par une courbe fermée, à partir du champ magnétique sur cette courbe. Pour cela il faut calculer la circulation du champ, c'est-à-dire l'intégrale curviligne. La difficulté de cette opération peut varier selon les cas, mais elle reste toujours un calcul purement mathématique.

c. Calculer le champ $\vec{B}$ généré par une densité de courant donnée. Ceci est possible uniquement dans le cas de géométries relativement simples. L'objectif est d'arriver à « sortir » le champ magnétique de l'intégrale, donc de trouver une courbe fermée Γ sur laquelle le produit $\vec{B} \cdot \hat{t}$ reste constant. Il faut exploiter les symétries du problème afin de trouver, par un raisonnement *physique* et non pas mathématique, quelle est la direction du champ magnétique et sur quelles courbes son module reste constant. À partir de là, il faut choisir le système de coordonnées qui décrit naturellement ces courbes et trouver une courbe fermée

Γ sur laquelle le produit $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}$ est constant (il peut être nul sur quelques parties de cette courbe !).

Le théorème de Stokes nous permet d'obtenir, à partir de la forme intégrale (1), la forme locale de la loi d'Ampère :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}} \tag{2}$$

Cette forme est l'expression mathématique de l'observation expérimentale (notée déjà par Ørsted) que le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ décrit des cercles autour du courant qui le crée. Si le pouce de la main droite montre dans la direction de $\vec{\boldsymbol{J}}$, alors les autres doigts indiquent le sens de rotation de $\vec{\boldsymbol{B}}$. De façon équivalente à la forme locale de la loi de Gauss (comparer avec le TD 3), le calcul du rotationnel du champ magnétique nous permet d'obtenir la densité de courant à un point de l'espace.
Notions : champ magnétique ; loi d'Ampère ; circulation ; rotationnel.

9.1 Courant rectiligne infini

9.1.1 Un fil

On considère un fil (sans épaisseur. . .) rectiligne infini (Ex. 7.1), orienté selon l'axe z et parcouru par un courant d'intensité I (A).

a. Donner le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ créé par ce courant à un point $\vec{\boldsymbol{r}}$ de l'espace.

b. Tracer les lignes du champ magnétique de façon approximative.

c. Calculer le rotationnel de $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Résultat:

a.

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$$

c. $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\mathbf{0}}$, *à l'exception de* $\rho = 0$, *où se trouve un courant localisé.*

9.1.2 Un conducteur cylindrique

On considère maintenant, à la place du fil sans épaisseur, un conducteur cylindrique, de rayon R_0. Le conducteur est orienté toujours selon l'axe z et parcouru par un courant d'intensité I. On prendra deux cas pour la densité de courant :

- Constante : $\vec{\boldsymbol{J}} = c_1 \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, $(\rho \leq R_0)$
- De variation linéaire : $\vec{\boldsymbol{J}}(\rho) = c_2 \rho \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, $(\rho \leq R_0)$

d. Exprimer les constantes c_i en fonction du courant I.

e. Donner le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur (exprimer le résultat en fonction du courant I).

f. Calculer le rotationnel de $\vec{\boldsymbol{B}}$ à l'intérieur et à l'extérieur.

Résultat:

d. $c_1 = \frac{I}{\pi R_0^2}$, $c_2 = \frac{3}{2}\frac{I}{\pi R_0^3}$

e.

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} & \rho \geq R_0 \quad \textit{dans les deux cas} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho}{R_0^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} & \rho \leq R_0 \quad \vec{\boldsymbol{J}} = c_1\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho^2}{R_0^3}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} & \rho \leq R_0 \quad \vec{\boldsymbol{J}} = c_2\rho\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

f. $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\vec{\boldsymbol{J}}$

9.2 Courant planaire infini

On considère un plan conducteur infini, à $z = 0$ (sans épaisseur). Sur ce conducteur, on prend une densité de courant *surfacique* $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{s}} = J_s\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, exprimée en $\mathrm{A\,m^{-1}}$: le courant I sur une lame parallèle à $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ de largeur l, est égal à $J_s l$.

a. Montrer, par raisonnement physique, que le champ B est orienté selon $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$.

b. Donner le champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ créé par ce courant à un point $\vec{\boldsymbol{r}}$ de l'espace.

c. Tracer les lignes du champ magnétique de façon approximative.

d. Calculer le rotationnel de $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Résultat:

a. On peut utiliser la loi de Biot-Savart (sans faire des calculs). Ou on peut penser à ce que signifierait d'inverser le sens de $\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{s}}$*...*

b.

$$\vec{\boldsymbol{B}}(z) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2}J_s\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \textit{si } z > 0 \\ \frac{\mu_0}{2}J_s\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} & \textit{si } z < 0 \end{cases} \quad \textit{(comparer avec Ex. 2.3)}$$

d. $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{0}}$*, à l'exception de* $z = 0$*, où se trouvent des courants localisés.*

9.3 Solénoïde

Un solénoïde (ou « bobine ») est un fil conducteur enroulé, de façon hélicoïdale, autour d'un cylindre de rayon R_0 (le « noyau »). On considère ici un solénoïde de longueur infinie, dont le noyau est... le vide. Si l'enroulement des spires est dense, on peut considérer qu'il s'agit d'un ensemble de boucles de courant (Ex. 7.2), les unes à côté des autres, parcourues par le même courant I. On note n le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. La géométrie du problème nous indique le choix d'un système de coordonnées cylindriques, dont l'axe z correspond à l'axe du solénoïde.

a. Identifier, à la base des symétries du problème, de quelles coordonnées dépend le champ magnétique.

b. Montrer, par raisonnement physique, que le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ n'a pas de composante B_ρ.

c. Choisir comme Γ_1 un cercle de rayon $R < R_0$ (à l'intérieur du solénoïde). Appliquer la loi d'Ampère et montrer que le champ magnétique à l'intérieur n'a pas de composante B_ϕ. Choisir un autre cercle de $R > R_0$ et montrer que le champ magnétique à l'extérieur n'a pas de composante B_ϕ.

d. Choisir comme Γ_2 un rectangle à l'intérieur du solénoïde, dont les deux côtés sont parallèles à l'axe z. Appliquer la loi d'Ampère et montrer que le champ magnétique à l'intérieur est constant.

e. Choisir comme Γ_3 un rectangle à l'extérieur du solénoïde, dont les deux côtés sont parallèles à l'axe z. Appliquer la loi d'Ampère et montrer que le champ magnétique à l'extérieur est constant aussi.

f. Utiliser les propriétés des lignes du champ magnétique et le résultat précédant pour montrer que le champ à l'extérieur est nul.

g. Choisir comme Γ_4 un rectangle dont un côté (parallèle à l'axe z) se trouve à l'extérieur du solénoïde et l'autre (aussi parallèle à l'axe z) se trouve à l'intérieur. Appliquer la loi d'Ampère et donner l'expression du champ magnétique du solénoïde.

h. Pour une valeur typique de n (nombre de spires par mètre), calculer l'intensité du courant I qui produit un champ magnétique comparable à celui de la Terre ($\approx 0.5\,\mathrm{G}$)

Résultat:

e.

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} & si\ \rho < R_0 \\ 0 & si\ \rho > R_0 \end{cases}$$