

EXERCICES D'ANALYSE – Fonctions de plusieurs variables.

Les notations sont celles du cours.

**Exercice 1.**

On définit dans  $\mathbb{R}^2$  privé de  $(0,0)$  les applications suivantes :

$$f_1(x, y) = 1 + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}}; f_2(x, y) = 1 + \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^2}; f_3(x, y) = 1 + \frac{xy^2}{x^4 + y^2}.$$

Déterminer les limites de ces applications en  $(0,0)$ .

**Exercice 2.**

Pour les fonctions  $f$  suivantes, définies de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$ , déterminer le domaine de définition  $\mathfrak{D}_f$  et les limites éventuelles de  $f$  à la frontière de  $\mathfrak{D}_f$ .

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; f(x, y) = \frac{x^2 y}{|x|^3 + |y|^3} - 1.$$

**Exercice 3.**

Etudier la continuité en  $(0,0)$  de la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

**Exercice 4.**

Etudier la continuité des fonctions  $f$  suivantes, définies de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } y \geq 0 \\ x(x - y) & \text{sinon} \end{cases}$$