1 Structure de $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg(P) \leq 2\}$

1.1 $\mathbb{R}_2[X]$ est-il un groupe pour l'addition polynomiale ?

On sait que :
$\star(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.
$\star$Dans $\mathbb{R}_2[X]$:

Un polynôme est noté : $aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

L'addition polynomiale est définie par :

$$\forall P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \quad \forall Q = a'X^2 + b'X + c' \in \mathbb{R}_2[X]$$

$$P + Q = (a + a')X^2 + (b + b')X + (c + c')$$

(1)$\mathbb{R}_2[X]$ est non vide : $\tilde{0},\ \tilde{1},\ X,\ X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

(2)$\mathbb{R}_2[X]$ est-il stable pour l'addition polynomiale ?
$\star$Soient $P,\ Q \ \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq 2$$

$$\text{Donc :}(P + Q) \in \mathbb{R}_2[X]$$

$\star$ Ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$ est stable pour l'addition polynomiale.

$$\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] \qquad (P + Q) \in \mathbb{R}_2[X].}$$

$\star$De plus, posons : $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = a'X^2 + b'X + c'$:

$$\begin{aligned} P + Q &= \underbrace{(a + a')}_{\in\mathbb{R}} X^2 + \underbrace{(b + b')}_{\in\mathbb{R}} X + \underbrace{(c + c')}_{\in\mathbb{R}} \\ &= (a' + a)X^2 + (b' + b)X + (c' + c) \\ &= Q + P \end{aligned}$$

$\star$Ainsi, l'addition réelle étant commutative, on déduit que l'addition polynomiale est commutative :

$$\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] \qquad P + Q = Q + P}$$

(3)L'addition polynomiale est-elle associative ?
$\star$Soit $R \ \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose : $R = a''X^2 + b''X + c''$.

$$(P + Q) + R = \underbrace{[(a + a') + a'']}_{[a+(a'+a'')]} X^2 + \underbrace{[(b + b') + b"]}_{[b+(b'+b")]} X + \underbrace{[(c + c') + c"]}_{[c+(c'+c")]}$$

$$\text{Donc :}(P + Q) + R = P + (Q + R).$$

$\star$ Ainsi, l'addition réelle étant associative, on déduit que l'addition polynomiale est associative.

$$\boxed{\forall P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X] \qquad (P + Q) + R = P + (Q + R).}$$

(4)$\mathbb{R}_2[X]$ admet un élément neutre : $\tilde{0} = 0_{\mathbb{R}}X^2 + 0_{\mathbb{R}}X + 0_{\mathbb{R}}$.

$$(P + \tilde{0}) = \underbrace{(a + 0_{\mathbb{R}})}_{a} X^2 + \underbrace{(b + 0_{\mathbb{R}})}_{b} X + \underbrace{(c + 0_{\mathbb{R}})}_{c} = P$$

Donc : $P + \tilde{0} = P$ et $\tilde{0} + P = P$ par commutativité de l'addition polynomiale.

$\star$ Ainsi :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \qquad P + \tilde{0} = \tilde{0} + P = P}$$

(5)Tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ a-t-il un opposé ?

$\star$On pose : $(-P) = (-a)X^2 + (-b)X + (-c)$.

$$(P + (-P)) = \underbrace{(a + (-a))}_{0_{\mathbb{R}}} X^2 + \underbrace{(b + (-b))}_{0_{\mathbb{R}}} X + \underbrace{(c + (-c))}_{0_{\mathbb{R}}}$$

Donc : $P + (-P) = \tilde{0}$ et $(-P) + P = \tilde{0}$ par commutativité de l'addition polynomiale.

$\star$ Ainsi :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \exists (-P) \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P + (-P) = (-P) + P = \tilde{0}}$$

1.2 $\mathbb{R}_2[X]$ est-il un groupe pour la multiplication polynomiale ?

$$\underbrace{X}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \times \underbrace{X^2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} = \underbrace{X^3}_{\notin \mathbb{R}_2[X]}$$

$\star$ Ainsi, on a montré qu'il existe deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ dont le produit est de degré strictement plus grand que 2. Donc $\mathbb{R}_2[X]$ n'est pas stable pour la multiplication polynomiale.

1.3 Conclusion

$\star(\mathbb{R}_2[X], +)$ est un groupe commutatif.

$\star\mathbb{R}_2[X]$ n'est pas pas un groupe pour la multiplication polynomiale.

2 Structure de $\mathbb{U}_4 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^4 = 1\}$

2.1 $\mathbb{U}_4$ est-il un groupe pour l'addition complexe ?

On sait que :
$\star(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.
$\star$ $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$:

Les éléments de $\mathbb{U}_4$ sont de module 1.

L'addition complexe est définie par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}$$

$$z + z' = (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')) + i(\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z'))$$

$$\underbrace{1}_{\in \mathbb{U}_4} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{U}_4} = \underbrace{2}_{\notin \mathbb{U}_4}$$

$\star$ Ainsi, on a montré qu'il existe que l'addition de deux éléments de $\mathbb{U}_4$ est un complexe de module différent de 1. Donc $\mathbb{U}_4$ n'est pas stable pour l'addition complexe.

2.2 $\mathbb{U}_4$ est-il un groupe pour la multiplication complexe ?

$\star$La multiplication complexe est définie par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}$$

$$z \times z' = |z| \times |z'| e^{Arg(z) + Arg(z')}$$

$\star$Table de multiplication dans $\mathbb{U}_4$:

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

(1) $\mathbb{U}_4$ est stable pour la multiplication complexe.

(2) La multiplication dans $\mathbb{C}$ est associative.
Or $\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{C}$.
La multiplication est donc associative dans $\mathbb{U}_4$.

(3) 1 est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$ donc dans $\mathbb{U}_4$.
$1 \in \mathbb{U}_4$: donc 1 est l'élément neutre de $\mathbb{U}_4$.

(4) La multiplication dans $\mathbb{C}$ est commutattive.
Or $\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{C}$.
La multiplication est donc commutative dans $\mathbb{U}_4$.

(5) Tout élément de $\mathbb{U}_4$ a un inverse dans $\mathbb{U}_4$.

2.3 Conclusion.

$\star$ $\mathbb{U}_4$ n'est pas un groupe pour l'addition complexe.
$\star$ $(\mathbb{U}_4, \times)$ est un groupe commutatif.

3 Exercice : vérifier la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.1 Rappel de l'énoncé.

Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit :

$\star$**l'addition interne sur E ainsi :**

$$\forall u = (x, y), \;\; v = (x', y') \in E$$

$$u + v = (x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$$

$\star$**l'opération externe sur $\mathbb{R} \times E$ ainsi :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \forall u = (x, y) \in E$$

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$$

3.2 Vérifions que $(E, +)$ est un groupe commutatif.

(1)$E \neq \emptyset$. En effet : $(1, 0) \in E$.
(2)E est stable par $+$. En effet : soient $u = (x, y), \;\; v = (x', y') \in E$

$$u + v = (\underbrace{x \times x'}_{\in \mathbb{R}_+^*}, \underbrace{y + y'}_{\in \mathbb{R}})$$

$\star(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif.

$\star(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

Ł'addition dans E est associative et commutative.

(3)E admet un élément neutre pour $+$:

$$0_E = (1, 0)$$

(4)Tout élément de E admet un opposé pour $+$:

$$\forall u = (x, y) \in E \;\; (-u) = (\frac{1}{x}, -y)$$

3.3 Vérifions que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(1) L'action de $1_\mathbb{R}$ sur E est neutre :

$$\forall u = (x, y) \in E \qquad 1_\mathbb{R} \cdot u = (x^1, 1 \times y) = (x, y)$$

(2) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+_E$:

$$\text{Soient } u = (x, y), v = (x', y') \in E \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (u +_E v) = \lambda \cdot (xx', y + y') &= ((xx')^\lambda, \lambda(y + y')) \\
&= (x^\lambda x'^\lambda, \lambda y + \lambda y')) \\
&= (x^\lambda, \lambda y) + (x'^\lambda, \lambda y') \\
&= \lambda \cdot (x, y) + \lambda \cdot (x', y') \\
&= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v
\end{aligned}$$

(3) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+_{\mathbb{R}}$:

$$\text{Soient } u = (x, y) \in E \quad \lambda, \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda + \mu) \cdot (x, y) &= (x^{\lambda+\mu}, (\lambda + \mu)y) \\
&= (x^{\lambda} x^{\mu}, \lambda y + \mu y) \\
&= (x^{\lambda}, \lambda y) + (x^{\mu}, \mu y) \\
&= \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x, y) \\
&= \lambda \cdot u + \mu \cdot u
\end{aligned}$$

(4) $\cdot$ est pseudo-associative :

$$\text{Soient } u = (x, y) \in E \quad \lambda, \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda \times \mu) \cdot u = (\lambda \times \mu) \cdot (x, y) &= (x^{\lambda \times \mu}, (\lambda \times \mu)y) \\
&= (x^{\mu \times \lambda}, (\lambda \times \mu) \times y) \\
&= ((x^{\mu})^{\lambda}, \lambda \times (\mu y)) \\
&= \lambda \cdot (x^{\mu}, \mu y) \\
&= \lambda \cdot (\mu \cdot (x, y)) \\
&= \lambda \cdot (\mu \cdot u)
\end{aligned}$$

3.4 Conclusion.

- ⋆ $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.
- ⋆ $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- ⋆ La loi externe $\cdot$ vérifie les axiomes d'une loi externe de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ⋆ $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.