U N S
EPU Nice

PeiP1
Algèbre

20/11/2015
N.Auxire

Devoir surveillé n° 1/4

Nom STROBBE

Prénom Nathan

Groupe de td. 5

Barème indicatif

- Restitution : 10 points. 04,5
- Récurrence : 10 points. 03,0 + 03,25 = 06,25
- Problème : 10 points. 04,0

14,75

Note finale 09,8 /20

1 Restitution.

1.1 Définitions.

Compléter les définitions amorcées.

1. Soit E un ensemble. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
   A, B, C forment une *partition* de E ...

N-

ssi $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ et

$A \cup B \cup C = E$

2. Soient E, F deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
   f est *injective* ...

× Non

ssi $(\forall y \in F)$ $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

3. Soient E, F deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
   f est *surjective* ...

×

ssi $(\forall y \in F)$ $\left[f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\right]$ ou $\left[\exists x \in E / f^{-1}(\{y\}) = \{x\}\right)\right]$

4. Voici une définition de la notion d'application numérique périodique :

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad (f \text{ périodique}) \Leftrightarrow \big(\exists T \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\big).$$

Définir ce qu'est une application numérique non périodique.

N

$\forall f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(f$ non périodique$)$ ~~et~~ $\Leftrightarrow$ $\left[\forall T \in \mathbb{R}^+ / \exists x \in \mathbb{R}\right.$ $\left. f(x+T) \neq f(x)\right]$ $\neq 0$

1.2 Notations.

On considère l'ensemble : $E = \{a,\ b,\ c\}$.
Compléter avec le ou les symboles qui conviennent.

V	(1) $c \ldots \in . E$
V	(2) $\{b\} \ldots \subset . E$
V	(3) $\{a\} \in \ldots \mathcal{P}(E)$
V	(4) $\emptyset \ldots \subset . E$
X	(5) $\forall X \in . \cancel{E} \ldots \quad X \cap . E \ldots = X$
X	(6) $E \ldots \cancel{\not\subset} . \{E\}$
V	(7) $\{a,\ b\} \ldots \setminus \ldots \{b,\ c\} = \{a\}$
X	(8) $\overline{\{\{a\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\}} = \ldots \cancel{\{b, c\}}$

2 Récurrence.

2.1 Principe de récurrence.

Soit n un entier naturel.
Soit $P(n)$ une proposition dépendant de n.
On suppose que chacune des propositions suivantes est vraie.
Indiquer si $P(n)$ est **vraie pour tout** $n \in \mathbb{N}$. Justifier de façon concise votre réponse.

1. $P(0)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(n+1))$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$, $P(n)$ est vraie

Car le premier rang à $n=0$ est vraie donc, or d'après

V.

l'implication et le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P(n)$ vraie

2. $P(1)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(n+1))$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $P(n)$ vraie, car cette proposition est

V

vérifiée à partir du rang 1. On ne sait pas si

celle-ci est vraie au rang 0

3. $P(0)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n+1) \Rightarrow P(n))$

On ne peut pas savoir si $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

N.

car la réciproque du principe de récurrence n'est

peut être pas vraie. $\left(P(n+1) \overset{?}{\Rightarrow} P(n)\right)$

4. $P(0)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(n+2))$

Ici le principe de récurrence est vérifié ~~pour tout~~ seulement pour les rangs pairs

X ~~les entiers pairs : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2k+1 / k \in \mathbb{N}\}$, $P(n)$ vraie~~

un rang plus loin donc, $(\forall n+1 \in \mathbb{N})$ $P(n)$ vraie

5. $P(0)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(n+2))$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n+1) \Rightarrow P(n)))$

Le principe de récurrence est bien respecté

V donc $(\forall n+1 \in \mathbb{N})$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $P(n)$ vraie

6. $P(0)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(2n))$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n+1) \Rightarrow P(n))$

Ici le principe de récurrence est vérifié pour tout

X les entiers pairs : $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2k / k \in \mathbb{N}\})$, $P(n)$ vraie

7. $(P(0)$ *et* $P(1))$ $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(2n))$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n+1) \Rightarrow P(n))$

La propriété de récurrence est vraie pour les entiers pairs

N. et la réciproque est vraie pour tous les entiers :

$(\forall n \in \mathbb{N})$ $P(n)$ vraie

2.2 Preuve par récurrence.

Soit a, un réel.

Montrer par récurrence que, quel que soit l'entier naturel non nul n : $(X^n - a^n) = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$.

Soit $P(n)$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall X, a \in \mathbb{R})\ (X^n - a^n) = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

On cherche à montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Initialisation : pour $n=1$

- $X^1 - a^1 = X - a$
- $(X-a)\sum_{k=0}^{0} X^0 a^{1-1-0} = X - a$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier n fixé, on veut alors montrer : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Insuff

Par HR : $(X^n - a^n) = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

$(X^n - a^n)(X+a) = X^{n+1} - a^{n+1} - a^n X + a X^n$

$\cancel{(X^{n+1} - a^{n+1}) = \left[(X-a)^2 \sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}\right] + a^n X + a X^n}$

$\cancel{(X^{n+1} - a^{n+1}) = \left[(X-a)^2 \sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}\right] + a^n X + a X^n - 2a^{n+1}}$

$(X^{n+1} - a^{n+1}) = \left[(X-a)(X+a)\sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}\right] + a^n X - a X^n$

Passage à justifier.

$$(X^{n+1} - a^{n+1}) = (X-a) \sum_{k=0}^{n} X^k a^{n-k}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusion : $P(1)$ vraie et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $P(n)$ est vraie

3 Problème.

On considère l'expression (E) suivante dans laquelle x désigne un réel :

$$(E) : \quad \frac{\ln(|x-2|)}{\ln(|x|)}$$

1. On appelle $\mathcal{D}$ le domaine de définition de (E).
Sans justifier, donner $\mathcal{D}$ sous forme de différence de deux ensembles à préciser.

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$

2. Déduire les intervalles de $\mathbb{R}$, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 tels qu'ils forment une partition de $\mathcal{D}$.

$I_1 =]-\infty, -1[$ $I_2 =]-1, 0[$ $I_3 =]0, 1[$ $I_4 =]1, 2[$ $I_5 =]2, +\infty[$

3. On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble défini en compréhension de la manière suivante :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{D}, \ \frac{\ln(|x-2|)}{\ln(|x|)} = 2 \right\}$$

(a) Pour k variant de 1 à 5, déterminer en extension chacun des ensembles $\mathcal{S} \cap I_k$.

(b) Déduire $\mathcal{S}$.

Justification ?

a) $S \cap I_1 = \{-2\}$

$S \cap I_2 = \emptyset$, $S \cap I_3 = \emptyset$, $S \cap I_4 = \emptyset$, $S \cap I_5 = \emptyset$

b) $S = \bigsqcup_{k=1}^{5} S \cap I_k = \{-2\}$