1 Introduction.

Définition 1.1. Structure de groupe.
Soit E, un ensemble non vide et muni d'une opération binaire, notée $*$ de façon infixée.
E est un *groupe* pour $*$ si et seulement si :
(1) $*$ est interne : $\forall x, y \in E, \quad (x * y) \in E$
(2) $*$ est associative : $\forall x, y, z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z$
(3) E admet un élément neutre pour $*$: $\exists e \in E \ / \ \forall x \in E, \quad e * x = x * e = x$
(4) tout élément de E admet un symétrique pour $*$: $\forall x \in E, \quad \exists y \in E \ / \ y * x = x * y = e.$

De plus, si $*$ est commutative (*i.e.* : $\forall x, y \in E, \quad x * y = y * x$) alors le groupe est dit commutatif.

On note : (E, *) ce groupe éventuellement commutatif.

Remarque 1.1. Vocabulaire et notations.
Usuellement, si l'opération est commutative alors elle est notée $+$. Dans ce cas :
- ⋆ $(E, +)$ est dit *groupe additif* ;
- ⋆ l'élément neutre est appelé *zéro* de E et noté 0_E ;
- ⋆ soit $x \in E$. Le symétrique de x est appelé *opposé de x* et est noté $(-x)$.

Si E est muni d'une deuxième opération de groupe, elle peut être notée $\times$. Dans ce cas :
- ⋆ $(E, \times)$ est dit *groupe multiplicatif* ;
- ⋆ l'élément neutre est appelé *unité* de E et noté 1_E ;
- ⋆ soit $x \in E$. Le symétrique de x est appelé *inverse de x* et est noté (x^{-1}).
- ⋆ Un groupe multiplicatif peut être ou non commutatif. Cela dépend.

Exemple 1.1. ... et contre-exemple.

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathbb{R}[X], +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif .

$\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ non stable par $+$: $I_n + (-I_n) \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.
Dans $\mathbb{N}$, 1 n'a pas d'opposé pour $+$.
Dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, seul 1 et -1 ont un inverse pour $\times$.
$(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif.

Théorème 1.1. Groupes de référence
(1) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif avec :

$$\forall u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall v = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ u + v = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

(2) Soit E, F deux ensembles non vides. Soit $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications définies de E dans F.
Si $(F, +)$ est un groupe commutatif alors $(\mathcal{A}(E, F), \oplus)$ est un groupe commutatif avec :

$$\forall f \in \mathcal{A}(E, F), \ \ \forall g \in \mathcal{A}(E, F), \ \ \left(f \oplus g \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. \right) \in \mathcal{A}(E, F)$$

Définition 1.2. Structure de corps.
Soit $\mathbb{K}$ un ensemble de nombres : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathbb{K}$ est muni des opérations usuelles d'addition (notée $+$) et de multiplication (notée $\times$).

(1) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif ;
(2) $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif commutatif où $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$;
(3) $\times$ est distributive sur $+$.

On dit que $\mathbb{K}$ est un *corps commutatif* et l'on note : $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Définition 1.3.
Soit $\mathbb{K}$, un corps commutatif : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E, un ensemble non vide.
Une application définie de $\mathbb{K} \times E$ dans E et notée de façon infixée par $\cdot$ est appelée *opération externe.*

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

2 Structure d'espace vectoriel.

Définition 2.1.
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$, un corps commutatif.
Soit $(E, +)$, un groupe commutatif muni d'une opération externe définie sur $\mathbb{K} \times E$ et notée $\cdot$.

E est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* si et seulement si :
(1) E est stable par $\cdot$. *i.e.* : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x \in E$;
(2) L'action de $1_{\mathbb{K}}$ est neutre. *i.e.* : $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$;
(3) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+$. *i.e.* : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
(4) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+$. *i.e.* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
(5) $\cdot$ est pseudo-associative. *i.e.* : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

On note : $(E, +, \cdot)$.

Exemple 2.1. A savoir et savoir montrer.
Soit n,un entier naturel non nul. Pour les opérations usuelles, les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

- ⋆ $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ $\mathbb{R}[X]$;
- ⋆ $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des applications définies sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des applications définies d'un ensemble non vide dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.2. Vocabulaire d'espace vectoriel.
Un *vecteur* est un élément d'un ensemble structuré en espace vectoriel.
Un *scalaire* est un élément d'un corps commutatif opérant sur un espace vectoriel.
Une *combinaison linéaire de vecteurs* est un vecteur qui est la somme d'un nombre fini de vecteurs.

$$\forall (x_k)_{1 \le k \le n} \in E^n,\ \forall (\lambda_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{K}^n, \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k}_{\text{combinaison linéaire de vecteurs}}$$

Deux vecteurs sont *linéairement dépendants* s'il existe deux scalaires de $\mathbb{K}$, λ, μ, non tous nuls tels que $\lambda \cdot x + \mu . y = 0_E$.
Deux vecteurs sont *colinéaires* s'ils sont linéairement dépendants.
⚠La notion de colinéarité s'applique à la relation entre **exactement** 2 vecteurs.

Théorème 2.1. relatif au vecteur nul.
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$, un corps commutatif et soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \ (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E) \Rightarrow \lambda \cdot x = 0_E$;
(2) $\forall x \in E,\ (-1) \cdot x = (-x)$;
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \ \lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$;
(4)$\{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.1. Vérifier la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit :
- l'addition interne sur E ainsi : $\forall (x, y), (x', y') \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$.
- l'opération externe sur $\mathbb{R} \times E$ ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall (x, y) \in E,\ \ \lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$.

3 Sous-espace vectoriel (s-e-v).

Définition 3.1.
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$, un corps commutatif et $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F, une partie non vide de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 3.1. Sous-espace vectoriel.
$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/3x-2y-z=0\right\}$: F est s-e-v de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.
Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{K}_n[X],+,\cdot)$ est s-e-v de $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$.
Par convention, le polynôme nul est de degré égal à $-\infty$.

Théorème 3.1. Caractérisation de sous-espace vectoriel.
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$, un corps commutatif.
Soit $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, une partie de E.
F, un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(1) F est un sous-groupe de $(E,+)$. *i.e.* : $(F\neq\emptyset)$ et $(\forall x,y\in F, x-y\in F)$
(2) F est stable par la loi externe $\cdot$. *i.e.* : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ \forall x\in F,\ \ \lambda\cdot x\in F$.

Remarque 3.1.
Pour caractériser F comme sous-espace vectoriel de E, il est équivalent de montrer :
$F\subset E$ **et** $F\neq\emptyset$ **et** $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \ \forall x,y\in F,\ \ \lambda\cdot x+\mu\cdot y\in F$.
Le théorème précédent permet de caractériser un ensemble comme un espace vectoriel en le considérant comme sous-ensemble d'un espace vectoriel de référence.

Exercice 3.1. Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-e-v.
$E_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=3y\right\}$
$E_2=\left\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/f''-4f'+4f=\tilde{0}\right\}$
$E_3=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})/M={}^tM\}$

Théorème 3.2. Théorème de la famille génératrice.
Soit $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit n, un entier naturel non nul.
Soit $\mathscr{F}=\{x_k, 1\leq k\leq n\}$, une famille de vecteurs de E.
(1) L'ensemble des combinaisons linéaires formées avec les éléments de $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Cet espace est noté $Vect(\mathscr{F})$. $\mathscr{F}$ est dite *famille génératrice* de cet espace.
(2) $Vect(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant $\mathscr{F}$.

Définition 3.2. Plan et droite vectoriels.
Soit $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un e-v engendré par un vecteur non nul est appelé *droite vectorielle* de E.
Un e-v engendré par deux vecteurs non nuls et non colinéaires est appelé *plan vectoriel* de E.

Exemple 3.2. Quelques familles génératrices.
Les matrices canoniques $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ engendrent le plan vectoriel des matrices diagonales dans le $\mathbb{R}$-e-v $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Les matrices canoniques $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ engendrent le plan vectoriel des matrices diagonales dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathscr{T}_2(\mathbb{R})$, lui-même s-e-v de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $Vect(\{0_E\})=\{0_E\}$;
$\mathbb{R}^3=Vect(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$;
$\mathbb{C}=Vect(\{1,i\})=Vect(\{1\})=Vect(\{i\})$.

Théorème 3.3. Intersection, union, somme de sous-espaces vectoriels.
Soit $(E,+,\cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F_1 et F_2, deux sous-espaces vectoriels de E.
(1) $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Si $F_1 \setminus F_2$ et $F_2 \setminus F_1$ sont non vides alors $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
(3) L'ensemble $F_1 + F_2 = \{y \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 / y = x_1 + x_2\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant $F_1 \cup F_2$.
Cet ensemble est appelé **somme** de F_1 et F_2.

Exemple 3.3. Quelques somme d'espaces vectoriels.
Considérons trois s-e-v de $\mathbb{R}^3$: un plan $P = Vect((1,2,3),(1,0,0)$ et deux droites vectoriels $D_1 = Vect((0,1,0))$ et $D_2 = Vect((0,2,3))$.
En tant que s-e-v, ce plan et ces droites contiennent le vecteur nul $(0,0,0)$. Donc leur intersections deux à deux n'est jamais vide.
Par ailleurs :
$D_1 \cap D_2 = \{(0,0,0)\}$ donc : $D_1 + D_2$ est un plan vectoriel : $D_1 + D_2 = Vect((0,1,0),(0,2,3))$.
$D_1 \cap P = \{(0,0,0)\}$ donc :$D_1 + P = Vect((1,2,3),(1,0,0),(0,1,0)) = \mathbb{R}^3$.
$D_2 \cap P = D_2$ donc : $D_2 + P = Vect((1,2,3),(1,0,0)) = P$.

4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Définition 4.1. Somme directe de sous-espaces vectoriels.
Soit E, un $\mathbb{K}$-e-v. Soient F_1, F_2, deux s-e-v de E. On considère le s-e-v $F_1 + F_2$.
(1) On dit que F_1 et F_2 sont en *somme directe* si et seulement si tout vecteur de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.
On note alors $F_1 \oplus F_2$.
(2) On dit que F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E si et seulement si F_1 et F_2 sont en somme directe et si $E = F_1 + F_2$.
On note alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Théorème 4.1. relatif à la somme directe de sous-espaces Vectoriels.
Soit E, un $\mathbb{K}$-e-v. Soient F_1, F_2, des s-e-v de E.
(1) F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
(2) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $(E = F_1 + F_2)$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
(3) Si F_1 est distinct de E alors F_2, supplémentaire de F_1 dans E, n'est pas unique.

Exemple 4.1. Soient les s-e-v de $\mathbb{R}^3$:
$P = Vect((1,0,0),(0,1,0))$, $D_1 = Vect((0,0,1))$, $D_2 = Vect((1,0,1))$ et $Q = Vect((1,0,0),(0,0,1))$.
On déduit :
$P \oplus D_1 = \mathbb{R}^3$, $P \oplus D_2 = \mathbb{R}^3$, $D_1 \oplus D_2 = Vect((1,0,0),(0,0,1))$, $Q + D_1 = Q$, $Q + D_2 = Q$ et $P + Q = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.1.

1. On pose : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / M = {}^t M\}$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / M = -{}^t M\}$.
   Vérifier que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P = P \circ (-X)\}$ et $G = \left\{XP / P \in \mathbb{R}\left[X^2\right]\right\}$.
   Montrer que : $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.
3. On pose : $\mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f = f \circ (-id_{\mathbb{R}})\}$ et $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f = -f \circ (-id_{\mathbb{R}})\}$.
   $\mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{I}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathscr{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
4. Montrer que : $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}\left(\tilde{1}\right)$ avec $F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) / \int_0^1 f = 0 \right\}$.

5 Indépendance linéaire.

5.1 Généralités.

Définition 5.1. Famille libre de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n\}$, une famille de n vecteurs de E.
$\mathscr{F}$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathscr{F}$ est celle dont tous les scalaires sont nuls.

$$\mathscr{F} \text{ libre } \Leftrightarrow \left[\forall (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) = 0_E \Rightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}})\right]$$

Définition 5.2. Famille liée de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n\}$, une famille de n vecteurs de E.
$\mathscr{F}$ est liée si et seulement si au moins une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathscr{F}$ a un scalaire non nul.

$$\mathscr{F} \text{ liée } \Leftrightarrow \left[\exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) = 0_E \text{ et } (\exists k \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_k \neq 0_{\mathbb{K}})\right]$$

Remarque 5.1. Les deux définitions précédentes se déduisent l'une de l'autre.

Exemple 5.1. Famille libre, famille liée ?
(1)Soient $u = (2, -1, 1),\ v = (1, 2, 1),\ w = (-3, 4, 2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\{u, v, w\}$ est **libre**.
Preuve : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3} (\star)$.
Montrons que nécessairement : $a = b = c = 0$.
$(\star) \Leftrightarrow a \cdot (2, -1, 1) + b \cdot (1, 2, 1) + d \cdot (-3, 4, 2) = (0, 0, 0)$

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Soient $u = (1, 1, 0),\ v = (0, 1, 1),\ w = (1, -1, -2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Une combinaison linéaire est évidente : $u - 2v = w$. La famille $\{u, v, w\}$ est donc **liée**.

Théorème 5.1.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(1) Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linaire des autres.
(2) Si une famille est liée alors toute sur-famille est liée.
(3) Si une famille est libre alors toute sous-famille est libre.

5.2 Rang d'une famille de vecteurs.

Définition 5.3. Rang d'une famille de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E.
On appelle *rang de $\mathscr{F}$*, le nombre maximal de vecteurs libres qu'on peut extraire de $\mathscr{F}$.

$$0 \leq \text{rg}(\mathscr{F}) \leq n.$$

Exercice 5.1.
Soit $\{u, v\}$, une famille libre d'un $\mathbb{K}$- e-v.

1. $\text{rg}(\{u, 2v\}) =?$
2. $\text{rg}(\{u, v, u + 2v\}) =?$
3. Combien de familles libres peut-on extraire de $\text{rg}(\{u, v, u + 2v\})$?

4. Si $\mathrm{rg}(\{u,v,w\}) = 2$ a-t-on $\mathrm{Vect}(\{u,v\}) = \mathrm{Vect}(\{u,v,w\})$?

Définition 5.4.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F, un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille génératrice de F.
(1) La dimension de F est égale au rang de $\mathscr{F}$. On note : $\dim(F) = \mathrm{rg}(\{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\})$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.
(2) Une famille libre et génératrice de E est appelée *base* de E.

Théorème 5.2.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
(1) Toute famille génératrice de F a un rang égal à la dimension de F.
Autrement dit, la dimension de F ne dépend pas de la famille considèrée comme génératrice de F.
(2) Une famille libre et génératrice de E est appelée *base* de E.

Exemple 5.2. Bases dites *bases canoniques*.
$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. La base *canonique* de $\mathbb{R}^3$ est $\mathscr{B}_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
$\mathbb{K}^n (n \geq 1)$ est de dimension n. La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $\mathscr{B}_0 = \{e_k, 1 \leq k \leq n\}$ où e_k est le k-uplet de - $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la k^e qui est égale à $1_{\mathbb{K}}$.
$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathscr{B}_0 = \{1, X, X^2\}$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B}_0 = \{X^k, 0 \leq k \leq n\}$.
$\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4. La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
De même, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 et admet une base canonique constituée de n^2 matrices carrées d'ordre n presque nulles : tous les coefficients sont nuls sauf un qui est égal à $1_{\mathbb{K}}$.

Théorème 5.3.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Soit $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E.
(1) $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$.
(2) Si $\mathscr{F}$ libre alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
(3) Si $\mathscr{F}$ génératrice alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
(4) Toute base de E a n vecteurs.
(5) Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
(6) Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.
(7) Soit F un s-e-v de E. Toute base de F peut être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète).
(8) Soient F, G deux s-e-v de E. F, G verifient la relation dimensionnelle : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exemple 5.3. Base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathscr{F} = \{x_1, x_2, x_3\}$, une famille de $\mathbb{R}^3$ où $x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (1,1,1)$.
- $\{x_1, x_2\}$ est libre comme sous-famille de la base canonique mais non génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- $\{x_1, x_2, x_3 - x_2 - x_1\}$ libre : c'est la base canonique. - $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est libre.

Remarque 5.2. Notation et vocabulaire dans une base finie.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Soit $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_k, \cdots e_n\}$, une base de E.
- A condition d'indicer les vecteurs de base $\mathscr{B}$, il existe une bijection définie de E dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \end{array} \right.$$

- Les coefficients de $\Phi(x)$ sont appelés *coordonnées de x dans $\mathscr{B}$* (et non plus composantes).
- La base est notée comme un n-uplet $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_k, \cdots e_n)$ (et non plus comme une famille).
- Ne pas confondre un vecteur et l'une de ses matrices colonnes selon une base donnée.

Soient $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique et $\mathscr{B}_1 = (e_1 + e_2 + e_3, e_1, e_2)$, une autre base $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur $x = (2, 3, -1)$ est représenté par $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_0}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_1}$.

Exercice 5.2. Méthode d'étude du rang d'une famille.

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, on considère : $u = (1, 2, 0, 1), v = (2, 1, 3, 1), w = (2, 4, 0, 2)$.
   A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $(u, v - 2u)$ ou (u, v) sont des bases de $\text{Vect}(\{u, v, w\})$.
2. Dans l'espace de dimension infinie $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f_1 = \tilde{1}, f_2 = \sin, f_3 = \sin^2, f_4 = \cos^2, f_5 = \cos \circ (2 \cdot id_{\mathbb{R}})$.
   Montrer que (f_1, f_2, f_3) ou (f_2, f_3, f_4) sont des bases de $\text{Vect}(\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\})$.

5.3 Application aux applications linéaires.

Définition 5.5.

Soit E, F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f, une application de E dans F.

f est linéaire si et seulement si l'image par f de toute combinaison linéaire dans E est la combinaison linéaire des images dans F.

Autrement dit : f linéaire $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x')$.

Exemple 5.4. ... et contre-exemple.

$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, x + y) \end{array} \right.$ et $\text{tr} \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j}) \mapsto \text{tr}(M) = m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3} \end{array} \right.$ sont linéaires.

$\det \left| \begin{array}{l} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j}) \mapsto \det(M) \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Théorème 5.4. Indépendance linéaire via une application linéaire.

Soit E, F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f, une application linéaire de E dans F.

Soit $\mathscr{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E et $\mathscr{F}' = \{f(x_1), \cdots, f(x_k), \cdots f(x_n)\}$, la famille des images par f de F.

(1) L'image du vecteur nul de E par f est le vecteur nul de F. i.e : $f(0_E) = 0_F$.
(2) Si la famille $\mathscr{F}$ est liée alors la famille des images $\mathscr{F}'$ est liée dans F.
(3) Si la famille $\mathscr{F}'$ est libre dans F alors la famille $\mathscr{F}$ est libre dans E.
(4) Si f est injective alors, si la famille $\mathscr{F}$ est libre dans E alors la famille $\mathscr{F}'$ est libre dans F.

6 Exercices à préparer.

1. **Exercice : reconnaître la structure d'espace vectoriel.**
   (a) $(\mathbb{K}, +, \times)$ désigne un corps de nombres.
   Sur $\mathbb{K}^2$, on définit une loi interne notée $\oplus$ et sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^2$, on définit une loi externe notée ..
   Dans chaque cas, déterminer si ces deux lois définissent ou non sur $\mathbb{K}^2$, une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   — $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{K}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda.(x, y) = (\lambda \times x, 0)$.
   — $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{K}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda.(x, y) = (\lambda \times x, \lambda \times y)$.

   (b) Sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites réelles, on définit une loi interne notée $\oplus$ et sur $\mathbb{R} \times \mathscr{S}$, on définit une loi externe notée . ainsi :
   $$\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \forall (y_i)_{i\in\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \oplus (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ et } \lambda.(x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda \times x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$
   — Montrer que $(\mathscr{S}, \oplus, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   — On note $\mathscr{S}_b$ et $\mathscr{S}_c$, respectivement, l'ensemble des suites réelles bornées et l'ensemble des suites réelles convergentes. Ces ensembles sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Quelle est leur relation ?

2. **Exercice : familles génératrices.**
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels, F et G.
   — Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   — Déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$ alors $(F \cup G) \neq E$.

   (b) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), a = e_1 + e_3, b = e_2 + e_3$.
   On note : $F = Vect(e_1, e_2)$ et $G = Vect(a, b)$.
   — Rappeler pourquoi F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   — Déterminer $F \cap G$.
   — $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

3. **Exercice : déterminer si une famille libre ou liée.**
   (a) On considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, $\mathbb{K}-$ étant un corps.
      i. Donner, formellement, la définition d'une famille libre de n vecteurs de E.
      ii. Exprimer, verbalement, ce qu'est une famille liée de n vecteurs de E.
      iii. Donner, formellement, la définition d'une famille liée de n vecteurs de E.

   (b) Soient les vecteurs $v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (1, 3, 1), v_3 = (-2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Soient les vecteurs $v_1 = (1, 0, 3), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (2, -3, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$.

   (d) Soient les vecteurs $v_1 = (0, 5, 2, -1), v_2 = (-1, 2, 0, 1), v_3 = (-3, 1, 0, 4), v_4 = (0, 0, -4, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.
   Déterminer si la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^4$.

4. **Exercice : famille d'applications *sinus*.**
   (a) On considère la suite d'applications $\left(f_k \middle| \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)^k \end{array} \right)_{k\in\mathbb{N}}$.
   Pour n prenant les valeurs 0,1,2 et 3, montrer que la famille $\{f_0, f_1, \cdots, f_n\}$ est libre.

   (b) On considère la suite d'applications $\left(g_k \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(kx) \end{array} \right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
   Pour n prenant les valeurs 1,2 et 3, montrer que la famille $\{g_1, \cdots, g_n\}$ est libre.

5. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^4$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   $$F = Vect((0,0,1,-1),(-1,1,-3,5)) \text{ et } G = Vect((3,-2,10,-16),(4,-7,-1,-7))$$
   (b) **Vrai-Faux** : pour tous vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 de $\mathbb{R}^4$, la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est génératrice de l'espace vectoriel $Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_3, u_4)$.
   (c) L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0\}$ est-il un plan vectoriel ou une droite vectorielle ?
   (d) **Vrai-Faux** : pour toute famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ liée de $\mathbb{R}^4$, il existe un supplémentaire de $Vect(u_1, u_2, u_3)$ contenant u_4.

6. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) **Vrai-faux** : un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1,-1,1)$ est : $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y-z & = & 0 \\ 12x-6y+6z & = & 0 \end{array}\right.$.
   (b) Soient F et G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, d'équations cartésiennes respectives : $4x+4y-z=0$ et $12x+12y-3z=0$.
   Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+4y-z & = & 0 \\ 12x+12y-3z & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes du sous-espace $F+G$?
   (c) Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x-y+z=0\}$.
   Peut-on trouver u_1, u_2, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ tels que G et $Vect(u_1, u_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

7. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) **Vrai-faux** : les composantes x, y, z, t des vecteurs de la droite vectorielle engendrée par $(-1,-4,1,1)$ vérifient le système : $z+x=y-4x=0$.
   (b) **Vrai-faux** : les sous-espaces vectoriels $F = Vect((2,-1,1,0),(-4,-5,7,1))$ et $G = Vect((9,4,-3,0),(-4,-2,2,0))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   (c) L'ensemble $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y-2z+t & = & 0 \\ 8z+8y-8x & = & 0 \end{array}\right.\right\}$ est-il une droite vectorielle ? un plan vectoriel ? un hyperplan vectoriel [1] ?

1. Un hyperplan de de $\mathbb{R}^4$ est un s-e-v de dimension 3.

8. **Exercice : espace des matrices d'ordre 3.**
Les matrices qui interviennent dans le problème appartiennent à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Toute matrice M est notée :$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$.
La base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est notée $\mathscr{B} = (E_k)_{1\leq k\leq 9}$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matice M peut donc être décomposée de façon unique dans $\mathscr{B}$:

$$M = a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + k.E_4 + l.E_5 + m.E_6 + r.E_7 + s.E_8 + t.E_9.$$

(a) Matrices symétriques ou antisymétriques.
On note $\mathscr{S}$,le sous-espace vectoriel des matrices symétriques : $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^3)/{}^tM = M\right\}$.
On note $\mathscr{A}$,le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques : $\mathscr{A} = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^3)/{}^tM = -M\right\}$.

i. Donner, sans justifier, un exemple d'élément de $\mathscr{S}$ puis un exemple d'élément de $\mathscr{A}$.
ii. Montrer que la famille,$\{E_1,\ E_2 + E_4,\ E_3 + E_7,\ E_5,\ E_6 + E_8,\ E_9\}$ est génératrice de $\mathscr{S}$.
iii. Sans faire de calcul, justifier que cette famille est libre.
iv. En procédant de façon analogue, donner, sans justifier, une base de $\mathscr{A}$.

(b) On considère l'application linéaire *trace*, notée *tr* et définie par : $tr \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix} & \mapsto & a+l+t \end{array}\right.$

On note $\mathscr{T}$,l'ensemble des matrices de trace nulle : $\mathscr{T} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})/a+l+t=0 \right\}$.

i. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
ii. Déterminer le rang du système $a + l + t = 0$ à résoudre dans $\mathbb{R}^9$. Déduire le rang d'une famille génératrice de $\mathscr{T}$.
iii. Le plan $\langle E_1 - E_5,\, E_9 - E_5\rangle$ est -il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{T}$?

(c) On note $\mathscr{V}$,la droite vectorielle de base $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Justifier que $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}$ et $\mathscr{V}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{S}$.

ii. Déterminer l'intersection de $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}$ et $\mathscr{V}$.

(d) Quelques propriétés de l'application linéaire *trace* dans $\mathscr{S}$.
i. La restriction de *tr* à $\mathscr{S}$,notée $tr_{|\mathscr{S}}$, est-elle injective ?

ii. La restriction de *tr* à $\mathscr{V}$,notée $tr_{|\mathscr{V}}$, est-elle injective ?

iii. Déterminer, $tr_{|\mathscr{S}}^{-1}(\{3\})$, c'est à dire l'ensemble des antécédents symétriques de 3 par $tr_{|\mathscr{S}}$.