Électromagnétisme
S22 Du courant de déplacement aux ondes électromagnétiques

Iannis Aliferis

Université Nice Sophia Antipolis

Équations de Maxwell : régime quasi-statique

2

Les équations « de Maxwell »

Gauss	$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
—	$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
Faraday	$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Ampère	$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$
Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$	
Continuité de la charge	$\oint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

Valides *partout*, dans le vide et dans la matière (avec charges/courants liés)

3

Les équations « de Maxwell » dans la matière

Gauss	$\oint_S \vec{D}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{libres}}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = Q_{\text{int libre}}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{\text{libres}}$
—	$\oint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
Faraday	$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
Ampère	$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}l = \int_S \vec{J}_{\text{libres}}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = I_{\text{libre enlacé}}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}}$
Relations	$\epsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$	lhi : $\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$
constitutives	$\frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \vec{H} + \vec{M}$	lhi : $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$
Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$	

4

Vérifier les équations « de Maxwell » en régime quasi-statique

5

Appliquer des identités vectorielles

- [Maxwell quasi-statique] forme locale : divergences et rotationnels
- [identités vectorielles] : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$

Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{\partial t} = 0$$

Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \overset{\text{si } \partial\rho/\partial t = 0}{=} 0$$

Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}}$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{libres}} \overset{\text{si } \partial\rho_{\text{libres}}/\partial t = 0}{=} 0$$

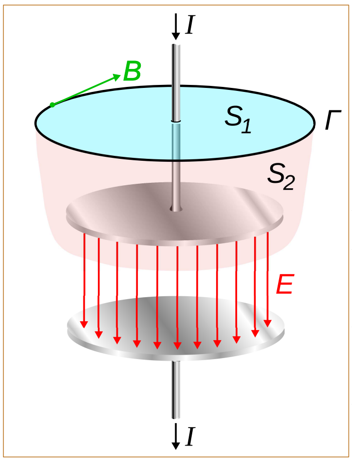
- Il y a un problème avec la loi d'Ampère !
- Pas valide dès que $\partial\rho/\partial t \neq 0$
- Exemple : [condensateur Ampère]

6

La loi d'Ampère appliquée à un condensateur

La contribution de Maxwell

- [vérifier Maxwell] : problème avec Ampère quand $\partial\rho/\partial t \neq 0$



- $\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}\, \mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$
- Γ cercle horizontal de rayon R_A centré sur l'axe Oz
  choisir $\hat{\boldsymbol{t}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
- S_1 disque de rayon R_A : $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_z$
  $I_{\text{enlacé}} = +I$
- S_2 « saladier » : $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_z$ entre les plaques
  $I_{\text{enlacé}} = 0$
- Ampère : « choisir n'importe quelle surface S associée à Γ »
- On n'est plus en magnétostatique : courant variable dans le temps
- Quel « courant » traverse S_2 ?
- $\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{Q/A}{\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_z$ (exact si $d \ll R$)
- $\int_{S_2} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \int_{S_2} \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}S = I$
- [courant de déplacement]

Le courant de déplacement

Le terme de Maxwell

- [vérifier Maxwell]

$$\text{Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \overset{\text{si } \partial\rho/\partial t = 0}{=} 0$$

$$\text{modifier : } 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- Les variations du champ électrique sont l'équivalent d'un courant...
- [condensateur Ampère]
- ...et créent un champ magnétique !

Le terme de Maxwell dans la matière

- [vérifier Maxwell]

$$\text{Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}}$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{libres}} \overset{\text{si } \partial\rho_{\text{libres}}/\partial t = 0}{=} 0$$

$$\text{modifier : } 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{libres}} + \frac{\partial \rho_{\text{libres}}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{libres}}}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Courant de déplacement

$$\vec{J}_d \triangleq \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1}$$

Pourquoi courant de « déplacement » ?

12

Qu'est-ce qui se déplace ?

- [courant de déplacement] $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\vec{D}=\vec{P}+\epsilon_0\vec{E}}{=} \vec{J}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{J}_? = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_? = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{\partial t} \overset{\rho_{\text{pol}}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{=} -\frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} + \underbrace{\vec{J}_{\text{pol}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{courant de déplacement}}$$

- Déplacement des dipôles (*si il y en a*)
- Sinon, rien ne se déplace !

13

Les équations de Maxwell

14

Forme intégrale

Gauss	$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
—	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = 0$
Faraday	$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S$
Maxwell-Ampère	$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}l = \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S$
Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
Continuité de la charge	$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}\mathcal{V} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\mathrm{d}t}$

15

Forme locale

Gauss	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$
—	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$
Faraday	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left(\vec{\boldsymbol{J}} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \right)$
Continuité de la charge	$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

- Formes intégrale et locale :
  Valides *partout*, dans le vide et dans la matière (avec charges/courants liés)

16

Forme intégrale dans la matière

Gauss	$\oint_S \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{libres}} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = Q_{\text{int libres}}$
—	$\oint_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = 0$
Faraday	$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}l = -\int_S \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$
Maxwell-Ampère	$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \, \mathrm{d}l = \int_S \left(\vec{\boldsymbol{J}}_{\text{libres}} + \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$

17

Forme locale dans la matière

Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libres}}$
—	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Faraday	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Relations	$\epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$	lhi : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$
constitutives	$\dfrac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}$	lhi : $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

18

Ondes électromagnétiques

19

Le champ électromagnétique s'auto-alimente

Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$
—	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Faraday	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

- Faraday : les variations de $\vec{B}$ créent $\vec{E}$ (induction)
- Maxwell-Ampère : les variations de $\vec{E}$ créent $\vec{B}$ (courant de déplacement)
- Le champ *électromagnétique* se propage, loin des sources
- Il suffit d'avoir le changement du changement (dérivée seconde non nulle)

20

Les équations de Maxwell dans le vide

Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
—	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Faraday	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- [identités vectorielles] : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$
- $\vec{\nabla} \wedge$ Faraday : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \overset{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0}{=} -\vec{\nabla}^2 \vec{E}$
- $\vec{\nabla} \wedge$ Faraday : $\vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \overset{\text{M-A}}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- Même procédure pour le champ $\vec{B}$ à partir de Maxwell-Ampère

21

L'équation d'onde dans le vide

- Équation d'onde vectorielle

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{2}$$

- [laplaciens] : en cartésiennes $\vec{\nabla}^2 \vec{E} = (\nabla^2 E_x)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + (\nabla^2 E_y)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + (\nabla^2 E_z)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$
- Équation d'onde scalaire

$$\nabla^2 E_{x,y,z} = \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} \tag{3}$$

- $E_{x,y,z}$: une des composantes du champ $\vec{E}$
- p.ex. si $\vec{E} = E_z(x,t)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

- Solution générale : $E_z(x,t) = f(t - \frac{1}{c}x) + g(t + \frac{1}{c}x)$ (droite + gauche)
- Vitesse de propagation $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

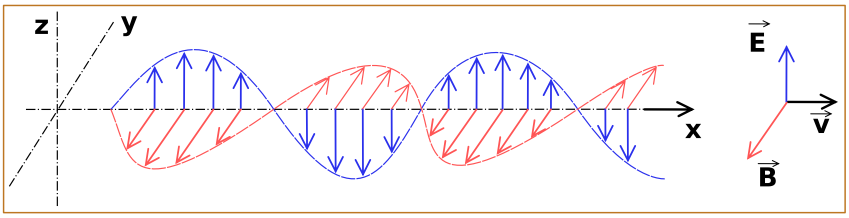
22

La lumière est une onde électromagnétique

- Vitesse de propagation

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}} \quad (4)$$

- *La vitesse des ondes électromagnétiques est presque celle de la lumière… ce qui donne une bonne raison de conclure que la lumière est en quelque sorte elle-même (en incluant le rayonnement de chaleur, et les autres radiations du même type) une perturbation électromagnétique qui se propage selon les lois de l'électromagnétisme.* (James Clerc Maxwell, 1864)



SuperManu CC-BY-SA

23