

CONTROLE N°2 : 22 OCTOBRE 2015

Documents et tous types d'appareils électroniques non autorisés. Durée : 1h30.

Exercice 1. (4 pts)

Soit l'application $f: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, et soit $a \in V$.

- 1.1 Quand dit-on que f est différentiable au point a ?
- 1.2 Montrer que si f est différentiable au point a , alors f est continue au point a .
- 1.3 Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition de la dérivée partielle de f au point a suivant la direction v .
- 1.4 L'existence des dérivées partielles de f au point a suivant toutes les directions v , entraîne-t-elle la différentiabilité de f au point a ?

Exercice 2. (4 pts)

Etudier la nature de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Exercice 3. (4 pts)

On pose $I = [0,1]$ et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans \mathbb{R} . On munit l'espace E des normes $\mathcal{N}_1 = \|\cdot\|_1$ et $\mathcal{N}_\infty = \|\cdot\|_\infty$ et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions de E définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$ par :

$$\begin{cases} f_n(0) = n ; \\ f_n(t) = 0 \text{ pour } t \geq \frac{1}{n^2} ; \\ f_n \text{ affine sur } \left[0, \frac{1}{n^2}\right]. \end{cases}$$

- 1.1 Déterminer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$.
- 1.2 En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0_E pour $\|\cdot\|_1$ et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.
- 1.3 Ces normes sont-elles équivalentes sur E ? Justifiez clairement votre réponse.

Exercice 4. (4 pts)

La partie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$ est-elle ouverte, fermée ou ni l'un ni l'autre dans \mathbb{R}^3 ? Justifiez clairement votre réponse.

Exercice 5. (4 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{x^3 y^2 \cos(x^5 - y^2)}{x^4 + y^4}$.

- 4.1 Donner le domaine de définition de f .
- 4.2 Etudier la limite de f lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.