# Électromagnétisme
# S03 Divergence, loi de Gauss forme locale

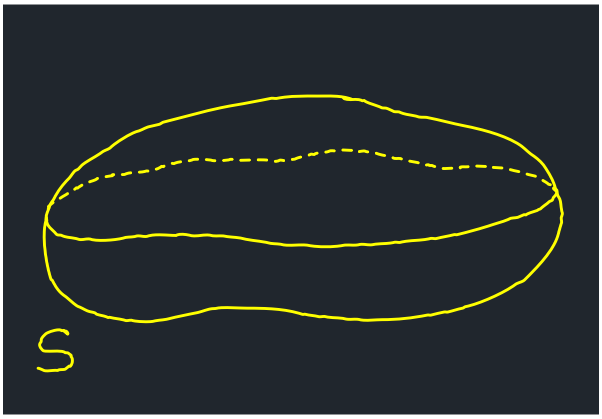
Iannis Aliferis

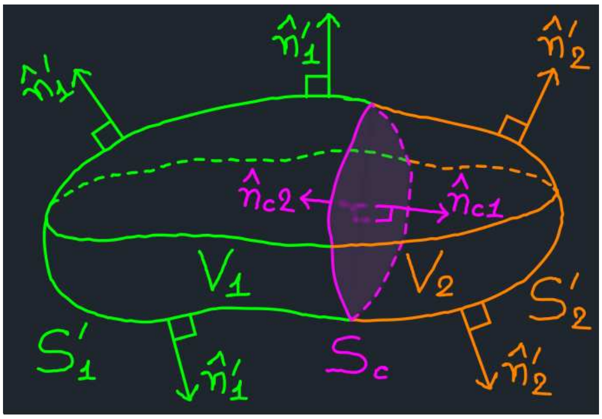
*Université Nice Sophia Antipolis*

# Divergence d'un champ vectoriel : introduction



## Couper un volume en deux. . .

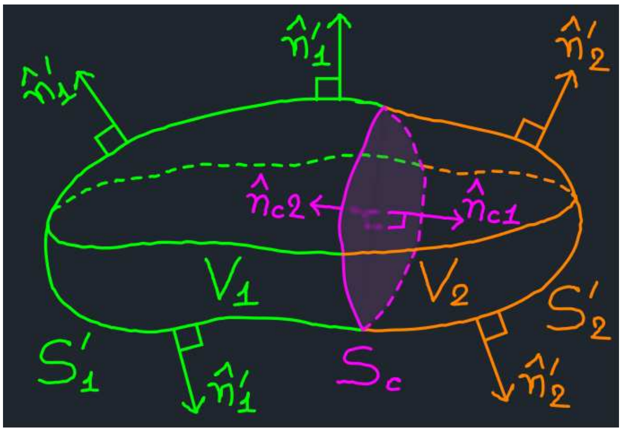



- Volume $\mathcal{V}$ entouré par $S$ (donc fermée)
- Partager $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, entourés par $S_1, S_2$
  [flux et lignes de champ]
- Flux à travers $S$ = Flux à travers $S'_1$+ flux à travers $S'_2$
- $S'_1$ ouverte ; $S'_1 \cup S_c = S_1$ fermée ; $S'_2$ ouverte ; $S'_2 \cup S_c = S_2$ fermée
- Deux orientations pour $S_c$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c2}} = -\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c1}}$
- Flux à travers $S_1$+ flux à travers $S_2$ = flux à travers $S$



## Couper un volume en deux : les calculs

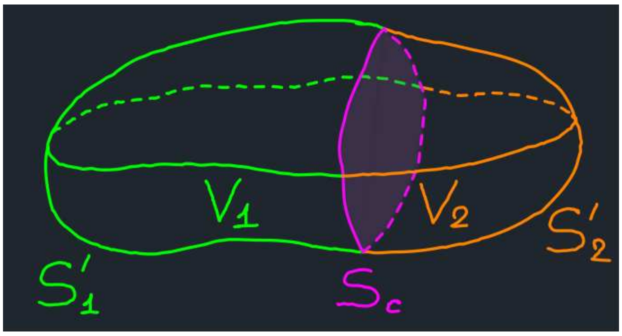



$$\oint_{S_1} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{1}} \, \mathrm{d}S = \int_{S'_1} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'_{\boldsymbol{1}} \, \mathrm{d}S + \int_{S_c} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c1}} \, \mathrm{d}S$$

$$\oint_{S_2} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{2}} \, \mathrm{d}S = \int_{S'_2} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'_{\boldsymbol{2}} \, \mathrm{d}S + \int_{S_c} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{c2}} \, \mathrm{d}S$$

Flux à travers $S_1$+ flux à travers $S_2$ = Flux à travers $S$

**Couper un volume en morceaux...**




$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1\, \mathrm{d}S + \oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_2\, \mathrm{d}S$$

- Continuer à couper...

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \sum_i \left( \oint_{S_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_i\, \mathrm{d}S \right)$$

- [divergence]

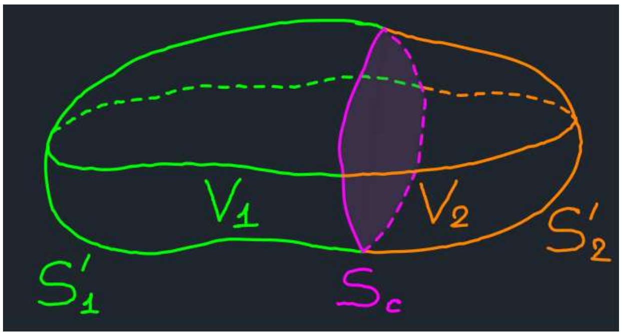
5

## Divergence d'un champ vectoriel

6

**Couper un volume en morceaux...**

[introduction divergence]




$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1\, \mathrm{d}S + \oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_2\, \mathrm{d}S$$

- Continuer à couper...

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \sum_i \left( \oint_{S_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_i\, \mathrm{d}S \right) \qquad (1)$$

- ...jusqu'où ?
- Surface fermée élémentaire

7

### Divergence

- Quel est le flux à travers une surface fermée élémentaire ?

$$\lim_{\Delta S \to 0} \oint_{\Delta S} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S = 0 \quad !!!$$

- Divergence $\triangleq$ flux surface fermée élémentaire / volume
-

$$\mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \triangleq \lim_{\Delta\mathcal{V} \to 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}} \oint_{\Delta S} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S \tag{2}$$

- surface, volume élémentaires $\longrightarrow$ un point $\vec{r}$ dans l'espace
- divergence : un champ *scalaire* ! $(> 0, < 0, = 0)$
- div $\vec{A}(\vec{r}) \propto$ flux à travers une surface fermée autour du point $\vec{r}$
- flux à travers une surface fermée $\propto$ sources à l'intérieur [flux]
- *La divergence du champ $\vec{A}(\vec{r})$ est proportionnelle à la densité volumique des sources qui le créent* [loi de Gauss locale]
- Pas de sources = divergence nulle

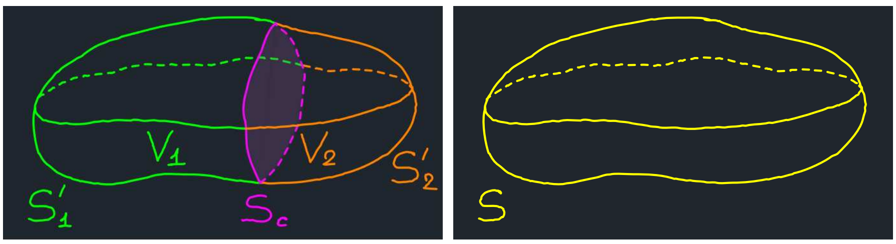


## Théorème de la divergence



### Couper un volume en morceaux...

[divergence]




$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S = \oint_{S_1} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_1 \, \mathrm{d}S + \oint_{S_2} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_2 \, \mathrm{d}S$$

$$= \sum_i \left( \oint_{S_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n}_i \, \mathrm{d}S \right) \overset{S_i \to 0}{=} \int_V \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \vec{A}(\vec{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3}$$

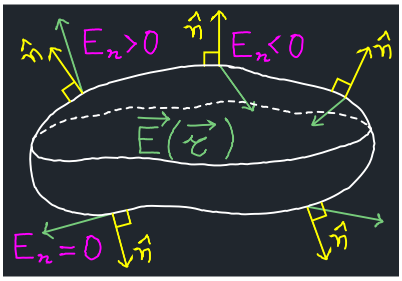
- Théorème de la divergence (ou de Gauss)

## Loi de Gauss, forme locale

11

### Loi de Gauss : intégrale vers locale

[gauss intégrale] $$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$




[théorème divergence] $$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

[charges électriques] $$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\epsilon_0}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\boxed{\text{div}\,\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\epsilon_0}} \quad \text{loi de Gauss, forme locale} \tag{4}$$

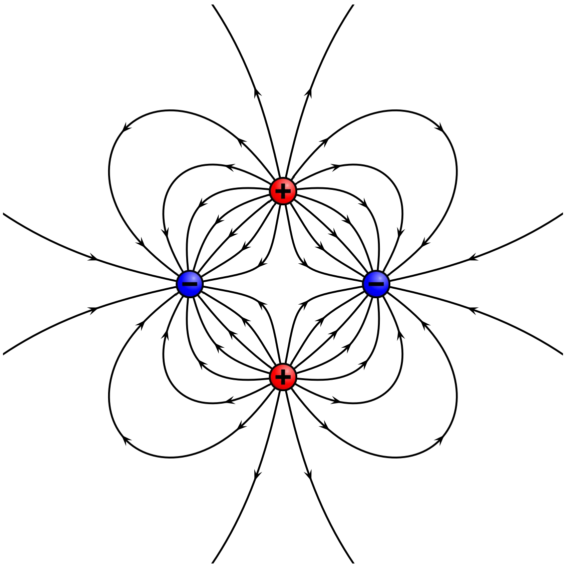
12

# Pourquoi « divergence » ? 



## Pourquoi « divergence » ?

- div $\vec{A}(\vec{r}) \propto$ flux à travers une surface fermée autour du point $\vec{r}$
- flux à travers une surface $\propto$ nombre de lignes [flux et lignes de champ]
- div $\vec{A}(\vec{r}) \propto$ nombre de lignes à travers une surface fermée autour du point $\vec{r}$




Auteur : Geek3 / CC-BY-SA 3.0

div : à un point
flux : autour d'un volume
lien : [théorème divergence]

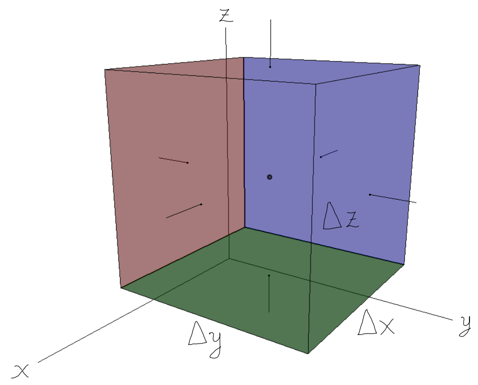
- Besoin d'une *formule* ! [divergence en cartésiennes]

## Formule de la divergence en coordonnées cartésiennes



### Flux par volume

- [divergence] Divergence $\triangleq$ flux surface fermée élémentaire / volume
- Système de coordonnées cartésiennes
- Surface élémentaire autour de $(x, y, z)$ :
  cube centré à $(x, y, z)$, de dimensions $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

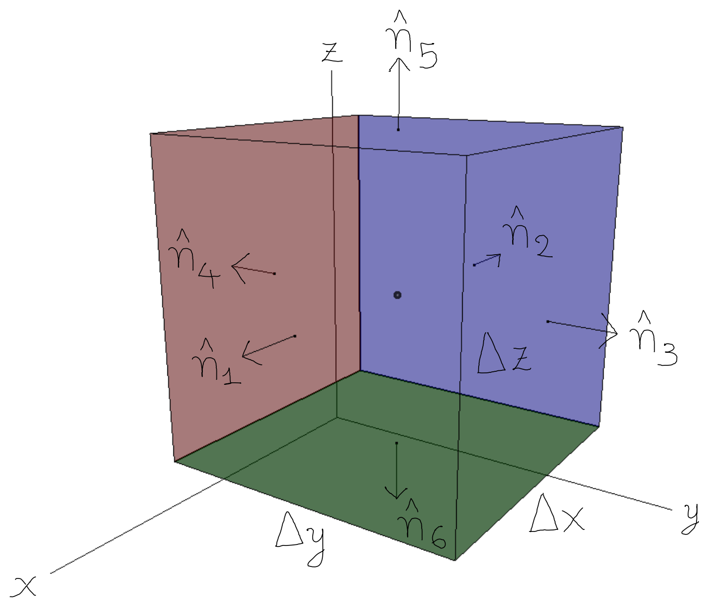



$$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\text{flux}}{\text{volume}}$$

$$\text{volume} = \Delta x \Delta y \Delta z$$

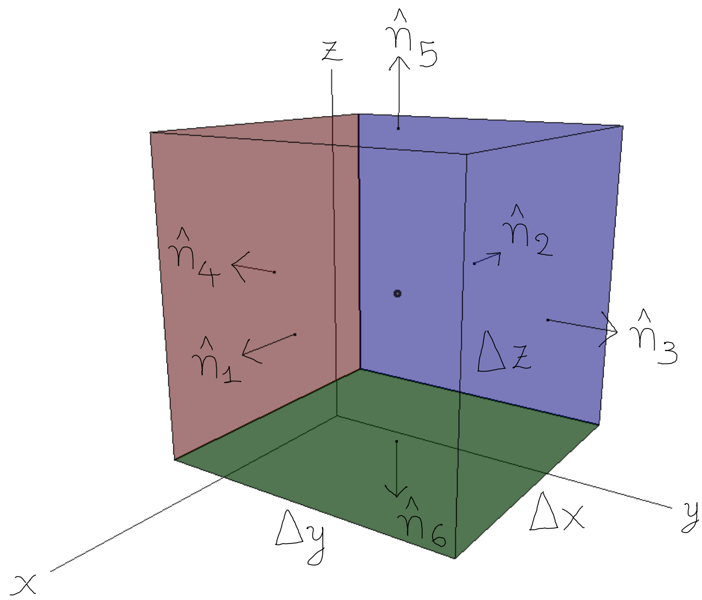


### Décomposer la surface fermée




$$\oint_S \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \overset{S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_6}{=} \int_{S_1} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_\mathbf{1}\,\mathrm{d}S + \ldots + \int_{S_6} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_\mathbf{6}\,\mathrm{d}S$$

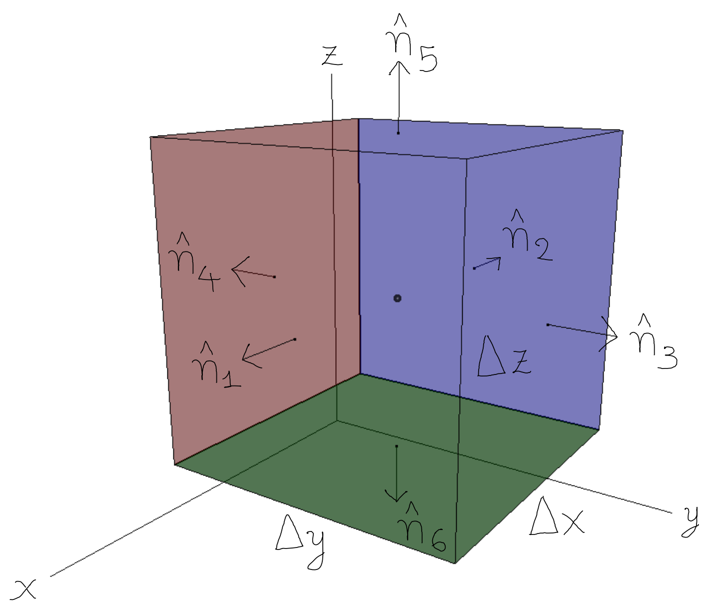
## Approximation volume élémentaire




- Champ $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ constant sur une face, égal à $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre}})$
- Flux $\int_{S_i} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}} \, \mathrm{d}S = \int_{S_i} A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}S \approx A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{i}}) \times$ aire $S_i$

18

## Faces avant/arrière




- $S_1$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{1}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, centre à $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$, aire : $\Delta y \Delta z$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{1}}) = A_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$
- $S_2$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{2}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$, centre à $(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$, aire : $\Delta y \Delta z$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \boldsymbol{2}}) = -A_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$

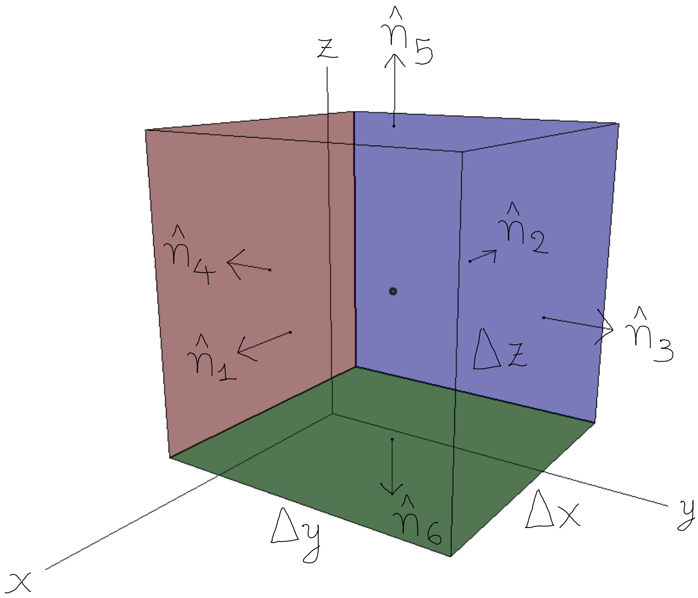
19

## Calcul du flux

| face $i$ | $\hat{\boldsymbol{n}}_i$ | centre | aire | flux |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ | $(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)$ | $\Delta y\Delta z$ | $A_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$ |
| 2 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_x$ | $(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)$ | $\Delta y\Delta z$ | $-A_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$ |

20

## Faces droite/gauche




- $S_3$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_y$, centre à $(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)$, aire : $\Delta x \Delta z$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } 3}) = A_y(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)$
- $S_4$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_4 = -\hat{\boldsymbol{e}}_y$, centre à $(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)$, aire : $\Delta x \Delta z$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } 4}) = -A_y(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)$

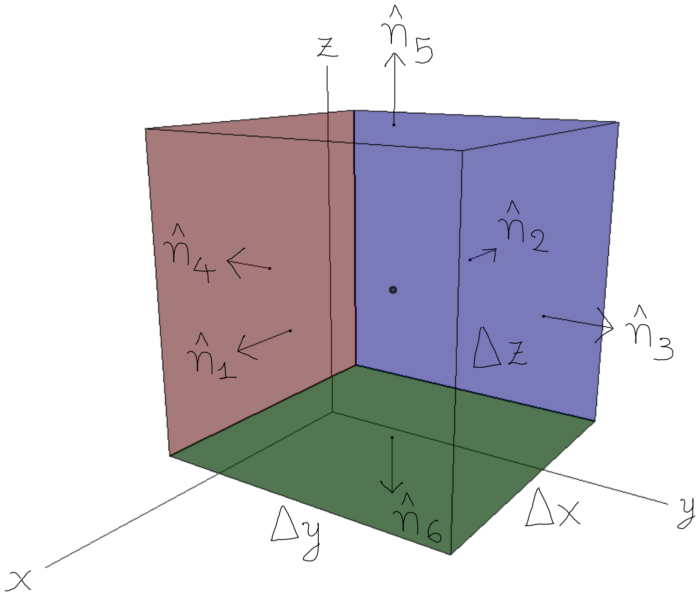
21

## Calcul du flux

| face $i$ | $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}}$ | centre | aire | flux |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ | $(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)$ | $\Delta y \Delta z$ | $A_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z$ |
| 2 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ | $(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)$ | $\Delta y \Delta z$ | $-A_x(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z$ |
| 3 | $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ | $(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)$ | $\Delta x \Delta z$ | $A_y(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z$ |
| 4 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ | $(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)$ | $\Delta x \Delta z$ | $-A_y(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z$ |

22

## Faces supérieure/inférieure




- $S_5$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{5}} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, centre à $(x, y, z+\frac{\Delta z}{2})$, aire : $\Delta x \Delta y$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{5}}) = A_z(x, y, z+\frac{\Delta z}{2})$
- $S_6$ : $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{6}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$, centre à $(x, y, z-\frac{\Delta z}{2})$, aire : $\Delta x \Delta y$
  $A_{\text{nor}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{centre } \mathbf{6}}) = -A_z(x, y, z-\frac{\Delta z}{2})$

23

### La divergence en coordonnées cartésiennes

| face $i$ | $\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i}}$ | centre | aire | flux |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ | $(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)$ | $\Delta y\Delta z$ | $A_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$ |
| 2 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ | $(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)$ | $\Delta y\Delta z$ | $-A_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)\Delta y\Delta z$ |
| 3 | $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ | $(x,y+\frac{\Delta y}{2},z)$ | $\Delta x\Delta z$ | $A_y(x,y+\frac{\Delta y}{2},z)\Delta x\Delta z$ |
| 4 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ | $(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)$ | $\Delta x\Delta z$ | $-A_y(x,y-\frac{\Delta y}{2},z)\Delta x\Delta z$ |
| 5 | $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ | $(x,y,z+\frac{\Delta z}{2})$ | $\Delta x\Delta y$ | $A_z(x,y,z+\frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$ |
| 6 | $-\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ | $(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})$ | $\Delta x\Delta y$ | $-A_z(x,y,z-\frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$ |

$$\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\text{flux}}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\left(\frac{A_x(x+\frac{\Delta x}{2},y,z)-A_x(x-\frac{\Delta x}{2},y,z)}{\Delta x}+\dots\right)$$

$$\boxed{\text{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}} \qquad (5)$$

24