DS 1 2016-2017 ALGÈBRE

1 1) $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in Ker(f) \iff \begin{cases} -x - 2y - 4z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ 2y = -x - 4z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{3}{2}z \end{cases}$

donc $Ker(f) = \{(-z, -\frac{3}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$

$= Vect(\underbrace{(-1, -\frac{3}{2}, 1)}_{v_1})$

$dim(Ker(f)) = 1$

donc $Ker(f)$ est bien une droite vectorielle.

3) $dim(Ker(f)) = 1 \neq 0 \implies f$ non injective

donc f non bijective

4) $(f - t\,Id_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (-x - 2y - 4z - tx, x + z - ty, x + 2y + 4z - tz)$

$= (-x(1+t) - 2y - 4z, x - yt + z, x + 2y + z(4-t))$

donc $Mat_{\mathcal{B}}(f - t\,Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -1-t & -2 & -4 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 2 & 4-t \end{pmatrix}$

Calculons le déterminant pour trouver une condition sur t et que la matrice soit inversible (équivalent à dire que $f - t\,Id_{\mathbb{R}^3}$ est bijectif)

$$\begin{vmatrix} -1-t & -2 & -4 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 2 & 4-t \end{vmatrix} = (-1-t)\begin{vmatrix} -t & 1 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-t)(-4t+t^2-2) - (\cancel{-8}+2t\cancel{+8}) + (-2-4t)$$

$$= \cancel{4t} - t^2 \cancel{+2} + 4t^2 - t^3 \cancel{+2t} \cancel{-6t} \cancel{-2}$$

$$= 3t^2 - t^3$$

Il faut alors résoudre : $3t^2 - t^3 = 0$

$\Leftrightarrow t^2(3-t) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = 0$ ou $t = 3$

$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 3$

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$, $f - t\,Id_{\mathbb{R}^3}$ est un isomorphisme

5) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in Ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y - 4z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\underset{\substack{l_1 \leftrightarrow l_3 \\ l_3 \leftarrow \frac{l_3}{2}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 2l_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -5y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$

donc $Ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^3}) = \{(-z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\}$
$= Vect(\underbrace{(-1,0,1)}_{v_2})$

6) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$

$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ donc $\{v_1, v_2\}$ libre

7) Il suffit de trouver un vecteur libre par rapport à v_1 et v_2.

Prenons par exemple $v_3 = (-1, \frac{3}{2}, 0)$ et vérifions que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

$$\begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha = -\beta \\ \alpha = \gamma \\ \alpha = -\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc (v_1, v_2, v_3) "$\mathcal{B}$" forme une base de $\mathbb{R}^3$

8) $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$
$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

$f(v_1) = (0,0,0)$

$f(v_2) = (-3,0,3) = 0(-1,-\frac{3}{2},1) + 3(-1,0,1) + 0\times(-1,\frac{3}{2},0)$

$f(v_3) = (-2,-1,2) = (-1,-\frac{3}{2},1) + (-1,0,1) + (-1,\frac{3}{2},0)$

(2) $F = \mathrm{Vect}\big(\underset{}{\overset{u_1}{(0,-1,1,1)}}, \overset{u_2}{(2,1,-1,1)}, \overset{u_3}{(1,1,-1,0)}\big)$

$G = \mathrm{Vect}\big(\underset{v_1}{(1,0,0,1)}, \underset{v_2}{(2,4,-2,2)}, \underset{v_3}{(-1,2,1,-1)}\big)$

1) On remarque que $u_1 = u_2 - 2u_3$

donc $F = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$

Vérifions que $\{u_2, u_3\}$ est libre

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha u_2 + \beta u_3 = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$ donc $\{u_2, u_3\}$ libre

Concl: (u_2, u_3) est une base de F

On remarque aussi que $v_2 = -2v_3$
donc $G = \text{Vect}(v_1, v_3)$
Vérifions que $\{v_1, v_3\}$ est libre
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$ donc $\{v_1, v_3\}$ libre

Ccl: (v_1, v_3) est une base de G

De plus, $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 2$

2) Soit $V = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
$V \in G$ ssi $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_3 = V$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -2\beta = y \\ \beta = z \\ \alpha - \beta = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - t = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Voici une représentation cartésienne de G

3) Soit $V = (x, y, z, t) \in F$
$\exists ! (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha u_2 + \beta u_3 = V$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x \\ \alpha + \beta = y \\ -\alpha - \beta = z \\ \alpha = t \end{cases}$$

$$F = \{(2\alpha + \beta, \alpha + \beta, -\alpha - \beta, \alpha), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

4) $F \cap G$?

"On injecte la représentation paramétrique de F dans la représentation cartésienne de G"

$F = \{(2\alpha+\beta, \alpha+\beta, -\alpha-\beta, \alpha), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \ x-t=0 \text{ et } y-2z=0\}$

$\begin{cases} 2\alpha+\beta-\alpha = 0 \\ \alpha+\beta-2(-\alpha-\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\beta+2\alpha+2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

Ainsi $F \cap G = \{(\alpha, 0, 0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$
$= \text{Vect}((1,0,0,1))$

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F\cap G$
$= 2+2-1 = 3$

Or $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$
donc F et G ne sont pas supplémentaires de $\mathbb{R}^4$

3) $f : P \longmapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$

1) $f(1) = 0 \qquad f(X) = 2X \qquad f(X^2) = 6X^2 - 2 \qquad f(X^3) = 12X^3 - 6X$

2) $\text{Mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$

3) Soit $u = (x, y, z, t) \in Ker(f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ 2y - 6t = 0 \\ 6z = 0 \\ 12t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$Ker(f) = \{(x, 0, 0, 0),\ x \in \mathbb{R}[X]\}$$
$$= Vect((1, 0, 0, 0))$$
$$= Vect(\tilde{1})$$

4) f surjective $\Leftrightarrow rg(f) = \dim F$ (pour $f : E \to F$)

d'après le théorème du rang :

$\dim(Im(f)) = \dim E - \dim(Ker f) = 4 - 1 = 3$

de plus $\dim F = \dim E = 4 \neq 3$

donc f n'est pas surjective

4