POLYTECH
NICE-SOPHIA

Algèbre : devoir surveillé n°4.

Nom et prénom :	Groupe de TD :
Total :	Note sur 20 :

Joindre obligatoirement la feuille d'énoncé à la copie.

Utiliser une copie par exercice.

N.Auxire

13 mai 2015

1. **Cours**. Soient $(E,+)$ et $(F,\oplus)$ deux groupes commutatifs. Soit $\phi : E \to F$ un morphisme de groupes.
   On note 0_E et 0_F les éléments neutres respectivement pour $+$ et $\oplus$. Montrer que 0_E est un antécédent de 0_F par ϕ.

2. **Exercice : sous-groupe multiplicatif de matrices d'ordre 3.**
   On note : $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   On considère l'ensemble E : $E = \{I_3 + m.J \ / \ m \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que E est une partie de $\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) Soit m, un réel.
   Justifier qu'une identité remarquable très familière permet de déduire l'inverse de $I_3 + m.J$ dans $\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que $(E,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.
   (e) Le sous-groupe $(E,\times)$ est-il commutatif ? Justifier la réponse.
   (f) Montrer que l'application $f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \to & (E,\times) \\ m & \mapsto & I_3 + m.J \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.
   (g) Vérifier que le morphisme f est bijectif.

3. **Exercice : endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.**
   Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ g(u) = (-2x + 5y + 2z, -x + 4y + 2z, 2x - 10y - 5z).$$

   (a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.
   On pose : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = A$. Déterminer A.
   (b) Enoncer le théorème caractérisant l'injectivité d'une application linéaire puis déterminer si g est injective ou non.
   (c) Calculer les images par g des vecteurs suivants : $a = 5 \cdot e_1 + e_2$ et $b = 2 \cdot e_1 + e_3$.
   La famille $\{a, g(a)\}$ est-elle liée ? La famille $\{b, g(b)\}$ est-elle liée ? Justifier brièvement.
   (d) Déterminer si la famille $\{e_1, a, b\}$ est libre ou liée.
   (e) On admet que : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1) + \mathrm{Vect}(a,b)$.
   Déduire que $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathrm{Vect}(a,b)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (f) On nomme $\mathcal{B}'$ la base (e_1, a, b). On considère l'application linéaire, notée h, définie par :

$$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ h(u) = (x,y,z).$$

   On pose : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(h) = P$. Vérifier que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (g) Calculer P^{-1}.
   (h) Calculer le produit matriciel : $A' = P^{-1}AP$. Interpréter, en justifiant, chaque colonne de A'.
   Quel est l'intérêt d'utiliser A' plutôt que A ?

repère	éléments attendus	barème	évaluation
COURS	si f morphisme alors $f(0_E) = 0_F$		
	0_E neutre dans E	0.5	
	f morphisme	1	
	th. simplification dans F	0.5	
EXERCICE 2	morphisme de groupes		
(a)	**E partie de $\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$**		
	critère (rang, déterminant)	1	
	calcul (max, non nul)	1	
	inclusion	1	
(b)	**Calcul de J^2**	1	
(c)	**Inverse de $I_3 + m \cdot J$**		
	Identité et (a-b)(a+b) dans l'anneau des matrices	1	
	Développement littéral	1	
(d)	**E sous-groupe de $(\mathscr{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$**		
	$E \subset \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ par (a)	1	
	$E \neq \emptyset$ car $I_3 = I_3 + 0 \cdot J$	1	
	E stable par multiplication : $m + n \in \mathbb{R}$	1	
	E stable par passage à l'inverse par(c) : $-m \in \mathbb{R}$	1	
(d)	**E sous-groupe commutatif de $(\mathscr{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$**		
	$(\mathbb{R}, +)$ commutatif donc oui	1	
(e)	**Morphisme de groupes**	1	
(f)	**Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$**		
	injectivité	1	
	surjectivité	1	

EXERCICE 2	morphisme de e.v.		
(a)	Matrice de f dans $\mathcal{B}$		
	$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)$	1.5	
	matrice	0.5	
(b)	f injective ssi $\ker(f) = \{0\}$	1	
	système de Cramer vérifié	1	
(c)	**calcul d'images**		
	Calcul numérique		
	$f(a) = -a \quad f(b) = -b$	1	
(d)	**Famille libre**		
	$\{a, b, e_1\}$ libre	1	
(e)	**Espaces supplémentaires**		
	Lien intersection/ liberté	1	
	Caractérisation somme directe	1	
(f)	**Matrice de $id_{\mathbb{R}^3}$ dans $\mathcal{B}'$**	1	
	Référence au (a) pour $g(e_1)$	0.5	
	Référence au (c) pour $g(a), g(b)$	0.5	
(g)	$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	
(h)	**Changement de base**		
	Calcul de $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	
	Interprétation des colonnes de A'	1	
	Intérêt de A'	1	