Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
On pose, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.
2. La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est-elle absolument convergente ? Justifier la réponse.
3. On note $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.
   On pose pour tout $n \geq 2$, $v_n = u_n + u_{n+1}$.
   (a) Calculer, pour $n \geq 1$, v_{2n}.
   (b) Soit $n \geq 1$. Exprimer S_{2n+1} comme somme de termes de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$.
   (c) En déduire, pour $n \geq 1$, la valeur S_{2n+1} puis l'expression de S_{2n} en fonction de n.
   (d) Déterminer $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$. Justifier la réponse.

Exercice 2
On définit, pour $n \geq 1$, $f_n : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx(1-x)^n \end{array}$.

1. Montrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers l'application nulle sur I.
2. (a) La suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1]$? Justifier la réponse.
   (b) Soit $a \in]0,1[$.
   Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 3

On définit, pour $n \geq 2$, $g_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \end{array}$.

1. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$.
   Justifier que : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.
   (b) Montrer que la suite d'applications $(g_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers une application g à préciser.
2. (a) **Question bonus -** Montrer que :
$$\forall n \geq 2, \forall x \in [1,+\infty[,\ |g_n(x)| \leq \frac{4}{x^2}.$$
   Indication : on pourra développer $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
   (b) Montrer que :
$$\forall n \geq 2, \forall x \in]0,1[,\ |g_n(x)| \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}.$$
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite d'applications $(g_n)_{n\geq 2}$ vérifie l'hypothèse de domination.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$. Justifier la réponse.