Eléments de Correction du Test du 24 Mai 2016

Exercice 1 :

On pose pour tout n non nul : $a_n = \frac{n}{3^n+1}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons, pour $n \geq 1$

$$u_n = \left|\frac{n}{3^n+1} z^{4n-1}\right| = \frac{n}{3^n+1}|z|^{4n-1} \neq 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}+1} \times \frac{3^n+1}{n} \times \frac{|z|^{4n+3}}{|z|^{4n-1}}$$

Puis, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}|z|^4$

- Cas : $|z| < 3^{1/4}$

  $\frac{1}{3}|z|^4 < 1$

  La règle de D'Alembert pour les séries numériques permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.
  On en déduit que la série $\sum a_n z^{4n-1}$ est absolument convergente et donc convergente.

- Cas : $|z| > 3^{1/4}$

  $\frac{1}{3}|z|^4 > 1$
  La règle de D'Alembert pour les séries numériques permet également de conclure dans ce cas : $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n z^{4n-1} \neq 0$
  Donc la série $\sum a_n z^{4n-1}$ est divergente.

  On a montré que :

- $\forall z \in \mathbb{C}\ t.q\ \ |z| < 3^{1/4}$, $\sum a_n z^{4n-1}$ est convergente et donc $R \geq 3^{1/4}$
- $\forall z \in \mathbb{C}\ t.q\ \ |z| > 3^{1/4}$, $\sum a_n z^{4n-1}$ est divergente et donc $R \leq 3^{1/4}$

  Conclusion : $\boldsymbol{R = 3^{1/4}}$

Exercice 2 :

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = F(n) = \frac{1}{n^2+5n+6}$
   F est une fraction rationnelle non nulle, donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)| = \frac{1}{n^2+5n+6}$

A l'infini, $\|f_n\|_\infty$ est donc équivalent à $\frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Par le critère des « équivalents », on déduit la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$. La série $\sum f_n$ converge donc normalement sur $[-1,1]$.

3. a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-1,1]$.
La série $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$.
La fonction f est donc continue sur $[-1,1]$ comme limite uniforme d'une série de fonctions continues sur $[-1,1]$.

b) Par une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2 + 5X + 6} = \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X+3}$$

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^n$

- **Calcul de $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n$**

Pour x non nul, $S_1(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} x^p = \frac{1}{x^2}(-\ln(1-x) - x)$

- **Calcul de $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^n$**

Pour x non nul,

$$S_2(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+3} x^{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{p=3}^{+\infty} \frac{1}{p} x^p = \frac{1}{x^3}(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2})$$

On a donc, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si \quad x = 0 \\ \frac{1}{x^2}(-\ln(1-x) - x) - \frac{1}{x^3}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) & si \ x \neq 0 \end{cases}$$

c) La fonction f étant continue sur $[-1,1]$, on a :

$A = f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = -2\ln 2 + \frac{3}{2}$; $B = f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

Exercice 3 :

1. Graphe : en fait $g(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$
2. Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction g. Les coefficients b_n sont nuls car la fonction g est paire.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)t + \sin(\frac{1}{2}-n)t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)t}{\frac{1}{2}+n} + \frac{-\cos\left(\frac{1}{2}-n\right)t}{\frac{1}{2}-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+2n}+\frac{2}{1-2n}\right) = \frac{-4/\pi}{4n^2-1}$$

La série de Fourier trigonométrique de g est alors :

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{-4/\pi}{4n^2-1}\cos nt$$

Avec $\alpha = \frac{2}{\pi}$ et $\beta = -\frac{4}{\pi}$

3. La fonction g est **continue sur** $\mathbb{R}$; $\boldsymbol{2\pi}$ **–périodique** ; de **classe $\boldsymbol{C^1}$ par morceaux sur** $\mathbb{R}$. La série de Fourier de g converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme vaut g.
   On a alors :
   $$\forall t \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ S(t) = g(t)$$
   C'est-à-dire :
   $$\forall t \in \mathbb{R}\ \ ;\ \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{-4/\pi}{4n^2-1}\cos nt = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

4. a) $S(\pi) = g(\pi) \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
   $$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

   b) La fonction g est **$\boldsymbol{2\pi}$–périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, en appliquant la formule de Parseval :**
   $$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|f|^2$$

Calcul de $I = \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = 2\int_0^{\pi} sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \int_0^{\pi}(1-\cos t)dt$

$$= [t - sint]_0^{\pi} = \pi$$

On aura donc :

$$\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 D = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow D = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$