DEVOIR SURVEILLÉ

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Les questions sont totalement indépendantes.

1) **Continuité** : retraiter l'exercice de cours prouvant qu'une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ continue admet au moins un point fixe dans $[a,b]$.

2) **Notion de dérivée :**

a) Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x}$.

b) Prouver que $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{continue en } 0 \\ \text{dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et donner } f' \\ \text{non dérivable en } 0 \end{cases}$.

3) **Théorème de Rolle ; des accroissements finis ; quelques applications.**

a) Enoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissement finis (avec un dessin l'illustrant).

b) **Applications :**

Pour $0 \leqslant a < b$, prouver : $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leqslant \arctan b - \arctan a \leqslant \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

c) Enoncer **et redémontrer** le corollaire donnant une condition **suffisante** classique pour qu'une fonction $f : I$ intervalle de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **dérivable** soit k-lipschitzienne. En déduire rapidement que $\sin$; $\arctan$; th sont 1-lipschitziennes.

4) **Fonctions usuelles**(reprise de 2 exercices donnés en préparation et corrigés en TD)

a) Prouver : $(\forall x \in [0,1]) \quad \arccos(1-x) = 2 \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

b) Soit $f : x \mapsto (\mathrm{th}x)^{\mathrm{sh}x}$. Donner $\mathcal{D}_f$.

Traiter uniquement le problème suivant : prouver que f est prolongeable par continuité en 0 ;
ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice II

Soit $f : x \to (\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{x}} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \ldots$.

1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ; quelle parité a u ?

En déduire que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

2) Ensemble de continuité et de dérivabilité de f.

Prouver que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) \quad \mathrm{sgn}(f'(x)) = \mathrm{sgn}(u'(x)) = \mathrm{sgn}(g(x))$ où $g(x) = x\mathrm{th}x - \ln(\mathrm{ch}x)$.

Etudier g et en déduire finalement le signe de f'.

3) Prouver clairement : $\ln(\mathrm{ch}x) \underset{+\infty}{\sim} x$ et en déduire :

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis, en utilisant la propriété du 1) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Prouver clairement : $\ln(\mathrm{ch}x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\widetilde{f}$.

Prouver enfin que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0.

5) Donner le tableau de variation de $\widetilde{f}$.

[Pour des raisons de temps, on se dipensera exceptionnellement de tracer sa représentation graphique]

Exercice III

Soit $f_n : x \mapsto x^{n-1} \ln x \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_{f_n}$ ainsi que f_1', f_2''.

2) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f_{n+1}(x) = x f_n(x)$ et en déduire, en utilisant la formule de Leibniz :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$.

3) Prouver finalement : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$. (on rappelle que, par convention : $0! = 1$)
