1 Notion d'ensemble.

Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets.
Le plus souvent, les objets d'un ensemble, appelés *éléments*, ont une propriété commune.

Exemple 1.1.
- Un cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points équidistants de O de r.
- Les entiers relatifs multiples de 2 forment l'ensemble des nombres pairs.
- Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à acroissement proportionnel forment l'ensemble des fonctions affines.
- *etc.*

Théoriquement (notation : E désigne un ensemble).
Un ensemble est *vide* ou bien contient des *éléments.*
Un ensemble est un méta-objet : $(E \notin E)$ est toujours vraie.
Un ensemble à un élément ne se confond pas avec cet élément : $\forall x \in E \ (x \neq \{x\})$.
L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

2 Descriptions et désignation d'un ensemble.

Exemple 2.1. Les racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{C}$:

En extension : $\{1,\ e^{i2\pi/3},\ e^{-i2\pi/3}\}$ **En compréhension :** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ z^3 = 1\}$
Par remplacement : $\{e^{ik2\pi/3}/k \in \{0,1,2\}\}$ **Par un nom symbolique :** U_3.

$$U_3 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^3 = 1\} = \left\{1,\ e^{i2\pi/3},\ e^{-i2\pi/3}\right\} = \left\{e^{ik2\pi/3}/k \in \{0,1,2\}\right\}$$

Remarque 2.1. Lors d'une description en extension, chaque élément n'est cité qu'une fois ($\{a,a\} = \{a\}$) et l'ordre d'écriture n'importe pas ($\{a,b\} = \{b,a\}$).

3 Ensemble des parties d'un ensemble.

Définition 3.1. Soit E , un ensemble.
A est une partie de E si et seulement si tout élément de A est élément de E.

Vocabulaire et notations.
- On dit que A est ***inclus*** dans E ou encore que A est un ***sous-ensemble*** de E. On note : $A \subset E$.
- $\mathscr{P}(E)$ **désigne l'ensemble des parties de** E : $\mathscr{P}(E) = \{A/A \subset E\}$. A retenir : $(A \subset E) \Leftrightarrow (A \in \mathscr{P}(E))$.
  A est un ensemble et est aussi un élément de $\mathscr{P}(E)$.
- E est la **partie pleine** de E et $\emptyset$ est la **partie vide** de E ; E et $\emptyset$ sont les **parties propres** de E.
- Un **singleton** est un ensemble à un élément. ⚠Ne pas confondre les ensembles $\{0\}$ et $\emptyset$.
- Une **paire** est un ensemble à deux éléments. Exemple : $\{0,1\}$.

Exemple 3.1. si $E = \{a,b,c\}$ alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, E\}$

Définition 3.2. Soit E un ensemble non vide et A une partie non propre de E.
E est dit *fini* si et seulement si il existe un entier naturel n, non nul, tel qu'il existe une bijection définie de E dans $[\![1,n]\!]$.

Théorème 3.1. Soient E un ensemble et n un entier naturel.
Si E est fini tel que $\text{card}(E) = n$ alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\text{card}(E) = 2^n$.

Preuve par récurrence sur n, le nombre d'éléments de E.

Exercice 3.1. Application à la modélisation d'une expérience aléatoire.
On lance deux dés ordinaires. On observe les couples de nombres de points à chaque lancer.

1. Ecrire l'univers, U, ~~en compréhension.~~ par remplacement
2. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(U)$?
3. Ecrire en extension l'événement A : «la somme des nombres est 7».
4. Que peut-on dire de A par rapport à U ? de A par rapport à $\mathscr{P}(U)$?

4 Opérateurs fondamentaux.

Nous avons vu les opérateurs logiques fondamentaux notés *non*, *et*, *ou*, $\Rightarrow$.
Nous voyons à présent les opérateurs ensemblistes fondamentaux notés $\bar{}$, $\cap$, $\cup$, $\times$.
Un **opérateur ensembliste** crée un nouvel ensemble en opérant sur un ou deux ensembles.

Soient E, F deux ensembles ; soient A, B deux parties de E.
Complémentaire d'un ensemble(notation $\bar{}$) : $\overline{A} = \{x \in E/(x \notin A)\}$
Intersection de deux ensembles(notation $\cap$) : $A \cap B = \{x \in E/(x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$
Les parties A et B sont dites ***disjointes*** si et seulement si leur intersection est vide.
Union de deux ensembles(notation $\cup$) : $A \cup B = \{x \in E/(x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$
Produit cartésien deux ensembles(notation $\times$) : $E \times F = \{(x, y)/(x \in E) \text{ et } (y \in F)\}$

Exercice 4.1. $A = \left\{x \in \mathbb{R}/\cos(x) = \frac{1}{2}\right\}$ et $B = \mathbb{R}_+$, deux parties de $\mathbb{R}$. Décrire les ensembles $\overline{A}$ et $A \cap B$

Définition 4.1. Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n parties de E.
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une ***partition*** de E si et seulement si :

$$((\forall j, k \in \{1, 2, \cdots, n\} \, (i \neq j) \Rightarrow (A_j \cap A_k = \emptyset)) \text{ et } (\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E))$$

Exemple 4.1. $\forall r \in \{0, 1, 2\} \; A_r = \{3k + r, \; k \in \mathbb{Z}\}$. On a : $\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

Remarque 4.1. $\forall E \; E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$.
Pour toutes parties A, B de E, $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ forment une partition de A.

5 Propriétés des opérateurs fondamentaux.

Théorème 5.1. Propriétés de l'intersection.
L'intersection est **associative** : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$.
L'intersection est **commutative** : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)(A \cap B) = (B \cap A)$.
L'intersection est **distributive sur** l'union : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$.
La partie pleine est **neutre pour** l'intersection : $\forall A \in \mathscr{P}(E)(A \cap E) = A$.
La partie vide est **absorbante pour** l'intersection : $\forall A \in \mathscr{P}(E)(A \cap \emptyset) = \emptyset$.
Critère d'inclusion : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)(A \subset B) \Leftrightarrow ((A \cap B) = A)$.

Théorème 5.2. Propriétés de l'union.
L'union est **associative** : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C)$.
L'union est **commutative** : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)(A \cup B) = (B \cup A)$.
L'union est **distributive sur** l'intersection : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.
La partie pleine est **absorbante pour** l'union : $\forall A \in \mathscr{P}(E)(A \cup E) = E$.
La partie vide est **neutre pour** l'union : $\forall A \in \mathscr{P}(E)(A \cup \emptyset) = A$.
Critère d'inclusion : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)(A \subset B) \Leftrightarrow ((A \cup B) = B)$.

Théorème 5.3. Loi de Morgan. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)\overline{(A \cup B)} = (\overline{A} \cap \overline{B})$. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)\overline{(A \cap B)} = (\overline{A} \cup \overline{B})$.

6 Méthodes de comparaison de deux ensembles.

Soient A, B deux parties de E. **Méthodes pour montrer** : $A \subset B$.

Méthode 1 : soit $x \in A$. Montrer que $x \in B$. Méthode 2 : montrer que $A \cap B = A$.

Méthode 3 : montrer que $A \cup B = B$. Méthode 4 : montrer que $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Méthode pour montrer : $A = B$. Méthode de la double inclusion : montrer que $(B \subset A)$ et $(A \subset B)$.

Méthode des fonctions indicatrices : montrer l'égalité des applications (cours suivant).

7 Opérateurs dérivés.

Différence(notation \) : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)\ A \setminus B = \{x \in E/((x \in A) \text{ et } (x \notin B))\}$.

Différence symétrique(notation Δ) : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)\ A\Delta B = \{x \in E/((x \in (A \cup B) \text{ et } (x \notin (A \cap B))\}$.

Exercice 7.1. Montrer $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)\ (A\Delta B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

8 Exercices à préparer.

1. **Exercice : reconnaître $\{0\}$.**
   Parmi les ensembles d'entiers suivants, lesquels sont égaux au singleton $\{0\}$, lesquels sont différents et pourquoi ?
   (a) $\{n \in \mathbb{N},\ n \leq 1\}$: vrai- faux.
   (b) $\{n \in \mathbb{N},\ n < 1\}$: vrai- faux.
   (c) $\{n \in \mathbb{N},\ (n \leq 1) \text{ et } (2|n)\}$: vrai- faux.
   (d) $\{n \in \mathbb{N},\ 1 + n > 0\}$: vrai- faux.
   (e) $\{n \in \mathbb{N},\ 1 + n = 1\}$: vrai- faux.
   (f) $\{n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$: vrai- faux.
   (g) $\{n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, n < m\}$: vrai- faux.
   (h) $\{n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, n|m\}$: vrai- faux.
   (i) $\{n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, m|n\}$: vrai- faux.

2. **Exercice : ensemble des parties d'un ensemble.**
   On donne les ensembles suivants : $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{0, 1\}$ $C = \emptyset$.
   (a) Ecrire $\mathscr{P}(A), \mathscr{P}(B), \mathscr{P}(C)$ en extension.
   (b) Ecrire $A \times B$ comme union de deux produits cartésiens.
   (c) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 40.

3. **Exercice.**
   Soit n, p, deux entiers naturels distincts et supérieurs ou égaux à 2.
   L'ensemble $n\mathbb{Z}$ est défini ainsi : $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$.
   L'ensemble E est défini ainsi : $E = \{a + b, (a, b) \in 51\mathbb{Z} \times 9\mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que 3 appartient à E.
   (b) L'ensemble $51\mathbb{Z} \cup 9\mathbb{Z}$ est-il égal à E ?
   (c) Montrer que E est égal à $3\mathbb{Z}$.
   (d) Décrire l'ensemble $51\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$ en compréhension.

4. **Exercice : le complémentaire d'un ensemble.**
   Soient E un ensemble et A, B, C, des parties de E.
   (a) Montrer que : $[(A \cup B = A \cup C)$ et $(A \cap B = A \cap C)] \Rightarrow (B = C)$.
   (b) Montrer que : $(A \cup B = E) \Rightarrow (\overline{A} \subset B)$.
   (c) Déduire que : $[(A \cup B = E)$ et $A \cap B = \emptyset] \Rightarrow (B = \overline{A})$.

5. **Exercice : ensemble fini ou infini.**
   On considère les ensembles $E = \left\{x \in [0,\ 1] \,|\exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$ et $F = \left\{x \in [0,\ 1] \,|\forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$.
   (a) L'ensemble E est-il vide, fini ou bien infini ?
   (b) L'ensemble F est-il vide, fini ou bien infini ?