Polytech' Nice Sophia – Antipolis PeiP 2

2016/2017 **FEUILLE DE T.D. 1**

EXERCICES D'ANALYSE – Intégration et Convergence d'intégrales généralisées.

Exercice 1.

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\boldsymbol{I_1 = \int_{-1}^{1} xe^{3x}\,dx}$; $I_2 = \int_0^1 (t^2+t)e^{2t}\,dt$; $I_3 = \int_1^e u^n \ln u\,du$; $I_4 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln v}{v}\,dv$;

$I_5 = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\,dx$; $I_6 = \int_1^e \ln y\,dy$.

Exercice 2.

En utilisant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes:

$I_1 = \int_0^1 t\sqrt{3t+1}\,dt$; $\boldsymbol{I_2 = \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt}$; $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$; $I_4 = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t(t+1)} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) dt$;

$I_5 = \int_0^3 \frac{t\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,dt$.

Exercice 3.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^1 \ln x\,dx$; $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Exercice 4. (Intégrales de Riemann)

Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel α, la convergence de :

$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$; $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Exercice 5. (DM à rendre le 15/9/16)

La fonction Gamma d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

1°) Montrer que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est convergente.

2°) Montrer que, pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_0^a t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

En déduire le domaine de définition de la fonction Γ.

3°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4°) Calculer $\Gamma(1)$ puis déterminer $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.