Polytech' Nice Sophia – Antipolis PeiP 2

2016/2017 **FEUILLE DE T.D. 3**

EXERCICES D'ANALYSE – Intégration et Convergence d'intégrales généralisées. Cas des fonctions de signe quelconque.

Exercice 1.

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx \quad ; \quad B = \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx \quad ; \quad C = \int_{0}^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$$

Exercice 2.

Soit à étudier la nature de l'intégrale impropre : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. Montrer, par un prolongement par continuité que la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est localement intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrer par une I.P.P que I est convergente.
3. Montrer, également par une I.P.P que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente.
4. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq sin^2 t = \frac{1-cos\ 2t}{2} \leq |sin\ t|$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.
6. Conclure.

Exercice 3.

Montrer que l'intégrale suivante est semi-convergente :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$