1 Généralités.

Définition 1.1. Relation binaire sur un ensemble.
Soit E, un ensemble non vide. Soit $P(x,y)$, une proposition dépendant de deux éléments, x et y de E.
La partie de $E\times E$ dont les éléments (x,y) vérifient $P(x,y)$ est appelée ***relation binaire sur*** E :

$$\{(x,y)\in E\times E/\ P(x,y)\}.$$

Remarque 1.1. Notation d'une relation $\mathcal{R}$.
Plutôt que de décrire $\mathcal{R}$ en compréhension comme partie de $E\times E$, il est d'usage de décrire $\mathcal{R}$ par ses éléments :

$$\forall(x,y)\in E\times E\ \ (x\mathcal{R}y)\Leftrightarrow P(x,y).$$

Exemple 1.1. $\mathcal{R}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2/\det(u,v)=0\}$.
Soit $u\in\mathbb{R}^2$. On a : $(u,u)\in\mathcal{R}$ car $\det(u,u)=0$. On note $(u\mathcal{R}u)$.

Définition 1.2. Qualités d'une relation binaire sur un ensemble.
Soit E, un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$, une relation binaire sur E.
- La relation $\mathcal{R}$ sur E est **réflexive** si et seulement si : $\forall x\in E\ \ (x\mathcal{R}x)$.
- La relation $\mathcal{R}$ sur E est **symétrique** si et seulement si : $\forall x,y\in E\ \ (x\mathcal{R}y)\Rightarrow(y\mathcal{R}x)$.
- La relation $\mathcal{R}$ sur E est **antisymétrique** si et seulement si : $\forall x,y\in E\ \ [(x\mathcal{R}y)\ \ et\ \ (y\mathcal{R}x)]\Rightarrow(x=y)$.
- La relation $\mathcal{R}$ sur E est **transitive** si et seulement si : $\forall x,y,z\in E\ \ [(x\mathcal{R}y)\ \ et\ \ (y\mathcal{R}z)]\Rightarrow(x\mathcal{R}z)$.

Exemple 1.2. Soit E un ensemble non vide. Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}(E,E)$:

$$\forall f,g\in\mathcal{A}(E,E)\ \ (f\mathcal{R}g)\Leftrightarrow(\exists\varphi\in\mathcal{A}(E,E)\ /\ f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi).$$

$\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Mais $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. Exemple dans $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&3x^2\end{array}\right.;\ g\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}\right.\ \text{et}\ \varphi\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&3x\end{array}\right..$$

Remarque 1.2. ⚠ «relation symétrique»et «relation antisymétrique»ne sont pas logiquement contraires.

2 Relations d'équivalence.

Définition 2.1. Soit E, un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$, une relation binaire sur E.
$\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence sur** E si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 2.1. Relations d'équivalence de référence.
- Sur $\mathcal{A}(E,E)$, relation d'équivalence globale :

$$\forall f,g\in\mathcal{A}(E,E)\quad(f\mathcal{R}g)\Leftrightarrow\left(\exists\varphi\in\mathcal{A}(E,E)\quad f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi\right).$$

- Sur $\mathcal{A}(E,F)$, relation induite par une application $f:E\to F$ «**avoir la même image par** f **que**» :

$$\forall x,y\in E\quad(x\sim y)\Leftrightarrow(f(x)=f(y)).$$

- Sur $\mathbb{Z}$, relation «**avoir la même reste euclidien par** d »où d est un entier relatif non nul :

$$\forall n,p\in\mathbb{Z}\quad(n\equiv p\,[d])\Leftrightarrow(d|(n-p)).$$

- Sur $\mathcal{A}(]\,x_0-r,x_0+r\,[\ ,\ \mathbb{R})$, relation d'équivalence locale où x_0 est un réel et $r>0$ (cours d'analyse).

Définition 2.2. Soit $\mathcal{R}$, une relation d'équivalence définie sur un ensemble E. Soit x_0 un élément de E.
Les éléments de E en relation avec x_0 par $\mathcal{R}$ forment un ensemble appelé ***classe d'équivalence de*** x_0 :

$$\{x\in E/(x_0\mathcal{R}x)\}.$$

La classe de x_0 par $\mathcal{R}$ est souvent notée $C_{\mathcal{R}}(x_0)$ ou, plus simplement, $C(x_0)$ ou $\overline{x_0}$.

Théorème 2.1. Théorème de partition d'un ensemble.
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.
(1)Une classe d'équivalence n'est pas vide.
(2)Deux classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ sont disjointes ou confondues.
(3)Les classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ forment une partition de E.

Exemple 2.2. Classes d'équivalence.
- Les classes de congruences de $\mathbb{Z}$ modulo 3 : $\overline{r} = \{3k + r \quad k \in \mathbb{Z}\}$ où $r = 0, 1, 2$.
- Les classes d'éléments de E ayant la même image par une application $f \in \mathcal{A}(E, F)$.

Exemple : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f((x, y)) = x - y$.
Les classes de la relation induite par f sont de la forme : $C((a, b)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / y = (x - a) + b\}$.
En particulier $C((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / y = x\}$.
- Les classes des injections de $\mathcal{A}(\{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\})$, ayant le même ensemble image.

3 Relations d'ordre.

Définition 3.1. Soit E, un ensemble non vide. Soit $\mathcal{R}$, une relation binaire sur E.
$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre sur** E si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 3.1. Relations d'ordre référence.
- Relation d'ordre alphabétique sur l'ensemble des mots d'une même langue.
- Relation «**être inférieur ou égal à**»sur $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y) \Leftrightarrow ((y - x) \in \mathbb{R}_+)$.

⚠ : $<$ n'est pas réflexive sur $\mathbb{R}$; $\leq$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$.
- Relation «**être inclus dans** »sur $\mathcal{P}(E)$: $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in E \quad (x \in A) \Rightarrow (x \in B))$.
- Relation «**être diviseur de** »sur $\mathbb{N}$: $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad (b|a) \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{N} \ / \ a = bq)$.

⚠ : $|$ n'est pas antisymétrique sur $\mathbb{Z}$; $|$ n'est pas définie sur $\mathbb{Q}$.

Définition 3.2. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E et A, une partie de E.
- A est dite **majorée** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si : $\exists M \in E \ / \ \forall x \in A \quad (x\mathcal{R}M)$.

M est un majorant de A par $\mathcal{R}$.
- A est dite **minorée** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si : $\exists m \in E \ / \ \forall x \in A \quad (m\mathcal{R}x)$.

m est un minorant de A par $\mathcal{R}$.
- A admet un **plus grand élément** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si A est majorée par l'un de ses éléments.

S'il existe, le plus grand élément de A est noté **max**(A).
- A admet un **plus petit élément** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si A est minorée par l'un de ses éléments.

S'il existe, le plus petit élément de A est noté **min**(A).
- A admet une **borne supérieure** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément. Si elle existe, la borne supérieure de A est notée **sup**(A).
- A admet une **borne inférieure** dans E par $\mathcal{R}$ si et seulement si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément. Si elle existe, la borne inférieure de A est notée **inf**(A).

Exemple 3.2. 0 minorant et majorant de $\mathbb{N}$.
0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ pour la relation $\leq$. 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ pour la relation $|$.

Théorème 3.1. Soit E, un ensemble ordonné par la relation d'ordre $\mathcal{R}$.Soit A, une partie de E.
(1)Si A admet un plus grand (plus petit) élément alors celui-ci est unique.
(2)Si A admet une borne supérieure (inférieure)alors celle-ci est unique.

4 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Axiome : soit A, une partie de $\mathbb{R}$ totalement ordonné par la relation d'ordre $\leq$.
Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.

Théorème 4.1. Caractérisation de la borne sup.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure pour la relation d'ordre usuelle $\leq$.
Soit M un majorant de A pour $\leq$.
M est la borne supérieure de A si et seulement si : $\forall \epsilon > 0, \ \exists a \in A \ / \ M - \epsilon < a \leq M$.

Exemple 4.1. Une application de ce théorème est le théorème de convergence uniforme dans l'ensemble des suites réelles.

Exercice 4.1.
Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \ / \ x^2 < 2\}$.

1. Soit $x \in A$. Montrer qu'il existe n tel que : $x + \dfrac{1}{n} \in A$.
2. Déduire que A n'a pas de plus grand élément.

5 Exercices à préparer.

1. **Exercice : des relations d'équivalence.**
   $\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence sur un ensemble E et x étant un élément de E, on note $C(x)$, la classe d'équivalence de x, c'est à dire l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathcal{R}y$.
   Les questions sont indépendantes.
   (a) Considérons $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = x - y\}$.
      i. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
      ii. Déterminer $C(0)$ et $C(\frac{1}{2})$.
      iii. Soit x, un réel. Déterminer $C(x)$.
   (b) On note $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   On note B, la partie de E dont les éléments sont des bijections.
   Dans E, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall f, g \in E$, $(f\mathcal{R}g) \Leftrightarrow (\exists \phi \in B / \ \ \phi \circ f = g \circ \phi)$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. **Exercice : ordre sur des ensembles de nombres.**
   Les questions sont indépendantes.
   (a) **La relation «divise».**
   Soit $E = \{1, 2, 3, 7, 14, 15, 21, 42\}$. On munit E de la relation usuelle *divise* notée $|$.
   Compléter, quand c'est possible, le tableau suivant :

Partie de E	Ensemble des minorants	Borne inférieure	Plus petit élément	Ensemble des majorants	Borne supérieure	Plus grand élément
$\{2, 3\}$						
$\{15, 21, 3\}$						

   (b) **Intervalles et suite réelle.**
   L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, est muni de la relation d'ordre usuelle $\leq$.
   Soient I, J, S, trois parties de $\mathbb{R}$: $I = [\,0, 1\,[$; $J =]\,0, +\infty\,[$ et la suite $S = (\dfrac{n - 1/n}{n + 1/n})_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
   Compléter, quand c'est possible, le tableau suivant :

Partie de $\mathbb{R}$	Ensemble des minorants	Borne inférieure	Plus petit élément	Ensemble des majorants	Borne supérieure	Plus grand élément
I						
J						
S						

3. **Exercice : symétrie et antisymétrie.**
   Les trois questions principales sont indépendantes.
   (a) Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x^2 | y)$.
   On rappelle que l'expression $(x^2|y)$ signifie «x^2 *divise* y ».
      i. Donner un contre- exemple évident au fait que $\mathcal{R}$ soit symétrique.
      ii. Donner un contre- exemple évident au fait que $\mathcal{R}$ soit antisymétrique.

(b) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E telle que $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique.
Soit x un élément de E. Déterminer l'ensemble $C(x) = \{y \in E \ / \ (x\mathcal{R}y)\}$.

(c) Soit E un ensemble sur lequel on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ transitive et irréflexive (i.e. : aucun élément de E n'est en relation avec lui-même).
On définit la relation $\mathcal{R}'$: $\forall x, y \in E \ \ (x\mathcal{R}'y) \Leftrightarrow [(x\mathcal{R}y) \text{ ou } (x = y)]$.

i. Montrer que $\mathcal{R}'$ est réflexive et transitive. Est-elle une relation d'équivalence ?

ii. La relation $\mathcal{R}'$ est-elle une relation d'ordre ?

4. **Exercice : relation sur $\mathbb{Z}$.**
Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{Z} \ \ (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (2|(x+y))$.
On rappelle que l'expression $(2|(x+y))$ signifie «2 *divise la somme de x et y* ».

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

5. **Exercice : reconnaître une relation d'équivalence.**
Soit E un ensemble non vide et soit x un élément de E.
Les relations $\mathcal{R}$ définies par les assertions suivantes sont-elles des relations d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$?

(a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (x \in A \cup B)$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (x \in A \cap B)$ ou $(x \in \overline{A} \cap \overline{B})$