DOCUMENTS ET CALCULATRICES NON AUTORISÉS
LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS ET LE SOIN APPORTÉ À LA RÉDACTION SERONT PRIS EN COMPTE DANS LA NOTATION

Exercice 1
Déterminer la nature de la série numérique $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sin^2 n}$.
2. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.
   On peut s'intéresser à la limite de $n^\alpha u_n$ où α est un réel à préciser.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - 2\ln n}$.

Exercice 2
On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2$.

1. (a) Montrer que :
$$\forall n \geq 2, \int_1^n (\ln t)^2 \mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_1^{n+1} (\ln t)^2 \mathrm{d}t.$$
   (b) Soit $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^n (\ln t)^2 \mathrm{d}t$ puis donner la valeur de $\displaystyle\int_1^{n+1} (\ln t)^2 \mathrm{d}t$.
   (c) Déduire des questions précédentes que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha (\ln n)^\beta$, où α et β sont des réels à déterminer.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 3

Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Question préliminaire - Justifier que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

1. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$) la suite des sommes partielles associée à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$).
   (a) Exhiber une série divergente $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ soit convergente.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer S_n puis T_n comme somme des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que **si** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente **alors** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.
   (d) Montrer que **si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente **alors** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.
2. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$.
   (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{\sin(\ln(2n))}{2n(2n+1)} + \frac{\sin(\ln(2n)) - \sin(\ln(2n+1))}{2n+1}$$
   (b) Déduire de la question préliminaire et de la question précédente que : $v_n = \underset{+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum u_n$. Justifier soigneusement la réponse.