DEVOIR SURVEILLÉ D'O.M.I.(partie analyse)

E.P.U. de Nice Sophia-Antipolis C.i.p.1

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

CALCULATRICES INTERDITES

Exercice I

Dérivation. 2 questions **indépendantes** :

1) On considère les 4 fonctions définies par :

$f_1(x) = \cos(x^5)$; $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^4}}$; $f_3(x) = \arctan(\sin x)$; $f_4(x) = \tan(\ln x)$.

a) Déterminer les 2 ensembles de définition de f_3 et de f_4.

b) Déterminer les 4 expressions des dérivées $f_k'(x)$.

2) Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, les 2 dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et la différentielle (totale) de f en (x,y).

b) Déterminer une fonction g de 2 variables vérifiant : $(\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f) \quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \quad (*)$.

Quelles sont alors toutes les solutions de $(*)$?

Exercice II

Intégration. 4 questions **indépendantes** :

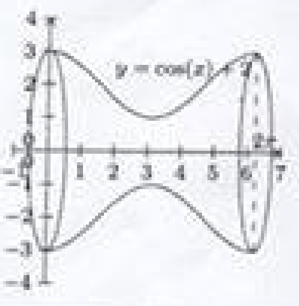
1) Essentiellement à l'aide d'un changement de variable, calculer :

$I_1 = \displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4+2)^5}\,dx$ $\quad I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\,dx$ $\quad I_3 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ $\quad F = \displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

2) Calculer $F = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx$; $G = \displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

3) Soit $u_n = \dfrac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$ ($k \in \mathbb{N}$ fixé). Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4)



Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution (récipient en forme de diabolo ci-contre) engendré par la rotation autour de $x'x$ de la partie du plan : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \cos x + 2 \right\}$.

"Application" (modeste) : l'unité étant le dm, pourra-t-on le remplir complètement si on dispose de 90 litres d'eau ?

[on donne : $\pi^2 < 10$]

Exercice III

Deux équations différentielles (les 2 questions sont indépendantes) :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' - 3y = \cos x \cdot e^{x}$. debut.

2) On considère l'équation différentielle : $x''(t) + ax'(t) + b^2 x(t) = c \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.

a) La résoudre pour $a = 0$; $b \neq 0$ et c quelconque.

b) La résoudre pour $a = b = 1$ et $c = 0$.

c) La résoudre pour $a = b = 0$ et c quelconque (sans rien savoir, évident avec programme de terminale).

OM2₁
04/10/10

Correction OM

Exercice 1 :

a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) $\forall (x,y) \in D_f \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (*)$

* Cas 1 : soit $y \neq 0$

La fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc les solutions sont exactement :

$$g(x,y) = \int \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\, dx = \int f(x,y)\, dx.$$

soit $t = x^2 + y^2$
$dt = 2x\, dx$

et $g(x,y) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C(y)$
$= \sqrt{x^2+y^2} + C(y)$

* Cas 2 $y = 0$.

La fonction $x \longmapsto f(x,0)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (respectivem $\mathbb{R}^{-*}$) donc les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc de la forme : $g(x,0) = \int f(x,0)\, dx$
$= \sqrt{x^2} + C_1 = x + C_1$
et sur $\mathbb{R}^{-*}$: $g(x,0) = -x + C_2$

L'ensemble des solutions de $(*)$ sont les fonctions du type

$$g(x,y)\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+C(y) \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \\ x+C_1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}\times\{0\} \\ -x+C_2 \text{ sur } \mathbb{R}^{-*}\times\{0\}\end{cases}$$

Avec $(C_1, C_2)\in\mathbb{R}^2$ et $C(y)$ une fonction quelquonque defini sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2

1) $I_1 = \int \frac{x^3}{(x^4+2)^3}\,dx$

$\rightarrow$ changement de variable

$u(x) = x^4+2$

$du = 4x^3\,dx$

$$I_1 = \frac{1}{4}\int\frac{du}{u^3} = \frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{u^4}+C$$

$$= -\frac{1}{16}\times\frac{1}{(x^4+2)^4}$$

$F = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

posons $t = \cos x$

$dt = -\sin x\,dx$

$$F = \int\frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(t)+C$$

$$= -\arctan(\cos x)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

04/10/10
om1₂.

$G = \int \arcsin x \, dx$.

IPP : $u' = 1$ $\quad v = \arcsin x$.
$u = x$ $\quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$G = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Soit $t = 1-x^2$
$dt = -2x\,dx$.

$G = x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} + C$
$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

3) $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k$

Introduisons la fonction : $f(x) = x^k$

Les $\left(\frac{i}{n}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ decrivent une subdivision régulière de $[0,1]$

f C^0 sur $[0,1]$.

donc $\lim_{x\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$.

4) $V = \pi\int_0^{2\pi}(\cos x + 2)^2\,dx$

$= \pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2} + 4\cos x + 4\right)dx$

$= \pi\left[\frac{9x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + 4\sin x\right]_0^{2\pi} = 9\pi^2\,dm^3$
$= 9\pi^2\,L$.

$9\pi^2 < 9 \times 10 = 90L$.

On peut donc le remplir completement.

<u>Exercice 1</u> :

a) $f_4(x) = \tan(\ln x)$

• $\ln$ est defini sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\tan$ est defini sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\ln x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x \neq e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

donc $D_{f_4} = \mathbb{R}^{+*} \setminus \{e^{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Exercice 2</u> :

$F = \int \frac{(x+5)}{x^2+x+1} dx$

$\Delta = 1 - (4)(1)(1) = -3 < 0$

$\frac{x-5}{x^2+x-1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

$F = \frac{1}{2}(\ln(x^2+x+1)) + \frac{9}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)\right) + cte$

04/10/16. Exercice III.

CM1₁

1) $y''+2y'-3y = \cos x = Re(e^{ix})$ (E)

Eq Homogène :

$y''+2y'-3y = 0$ (EH)

$r^2+2r-3 = 0$ (EC)

$\Delta = 4-4(-3) = 16 = 4^2$

donc $r_1 = -\dfrac{2-4}{2} = -3$

$r_2 = 1$

Donc les solutions de (EH) sont de la forme.

$g(x) = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^x$; $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $y''+2y'-3y = e^{ix}$ ($\star$)

recherchons des solutions de ($\star$) de la forme

$y(x) = \alpha \cdot e^{rx}$.

Corrigé - Ex. III - DS OMI du 4/10/2010.

1. $y'' + 2y' - 3y = \cos(x)$.

- Résolution de l'équation homogène : $y''+2y'-3y=0$
On cherche $y \in C^2(\mathbb{R})$ sous la forme $y : x \mapsto e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$.
D'où $r^2 + 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow r = -3$ ou $r = 1$.
La solution générale est de la forme : $y : x \mapsto \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{x}$
où λ_1, λ_2 sont des réels.

- Recherche d'une solution particulière y_0 vérifiant $y''+2y'-3y = \cos$
On cherche y_0 dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sous la forme $y_0 : x \mapsto k e^{ix}$ où $k \in \mathbb{C}$
Donc : $(-k + 2ki - 3k)e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow 2k(-2+i) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{-2-i}{10}$

Par projection dans $\mathbb{R}$, on a : $Re(y_0(x)) = -\frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$.

- Conclusion : les solutions de $y''+2y'-3y = \cos$ dans $C^2(\mathbb{R})$ sont de la forme : $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{x} - \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)}$

2. a) $x'' + b^2 x = c$ $b \neq 0$,

- Solution générale de la forme $t \mapsto \lambda_1 \cos(bt) + \lambda_2 \sin(bt)$ avec λ_1, λ_2, réels.
- Solution particulière sous forme $t \mapsto k$ (constante).
Il vient alors $b^2 k = c$ d'où $k = \frac{c}{b^2}$.

- Conclusion : les solutions de $x'' + b^2 x = c$ sont de la forme :
$\boxed{t \mapsto \lambda_1 \cos(bt) + \lambda_2 \sin(bt) + \frac{c}{b^2}}$

2. b) $x'' + x' + x = 0$.

- Solution générale de la forme $x : t \mapsto e^{rt}$; $r \in$ ..., $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
D'où : $r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
On obtient : $x(t) = e^{-t/2} \times (\lambda_1 e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \lambda_2 e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t})$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Par projection dans $\mathbb{R}$, on a : $\boxed{t \mapsto e^{-t/2} \times \left(\alpha_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$
où α_1, α_2 sont réels.

2. c) $x''(t) = c$ donc $x'(t) = ct + b$ où $b \in \mathbb{R}$
donc $\boxed{x(t) = \frac{c}{2}t^2 + bt + a}$ où $a \in \mathbb{R}$