1 Vocabulaire.

Une **proposition** mathématique est une déclaration, énoncée en mots ou en code, qui a une valeur de vérité exclusive : *vrai* ou *faux*.
Une proposition a un sens sur un **domaine de définition**.
Une proposition est vraie sur un **domaine de validité**.

Exemple 1.1. x désignant un réel, donner **les** domaines de définition et de validité de chacune des propositions.

$$P : \frac{x^2}{x} = x\,; \qquad Q : x^2 = x\,; \qquad R : \sqrt{x} > 2.$$

2 Connecteurs logiques.

Un **connecteur logique** crée une nouvelle proposition en opérant sur une ou deux propositions.

Connecteur de *négation* (notation : *non* ou bien $\neg$)
La proposition (non P) est vraie si et seulement si P est fausse.
La proposition (non P) est fausse si et seulement si P est vraie.

Exemple 2.1. Etudier la négation de la proposition :
(P : le réel x vérifie ($|x-5| < 0.2$)) (domaines, négation).

Connecteur de *conjonction* (notation : *et* ou bien $\wedge$)
La proposition (P et Q) est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont vraies.
La proposition (P et Q) est fausse si et seulement si l'une au moins des propositions P ou Q est fausse.

Exemple 2.2. : étudier la proposition (($x < 5$) et ($\sqrt{x} > 1$)).

Connecteur de *disjonction*(notation : *ou* ou bien $\vee$)
La proposition (P ou Q) est vraie si et seulement si l'une au moins des propositions P ou Q est vraie.
La proposition (P ou Q) est fausse si et seulement si les deux propositions P et Q sont fausses.

Exemple 2.3. : quand la proposition (P et (non Q)) est-elle fausse ?

Connecteur d'*implication*(notation : $\Rightarrow$)
La proposition ($P \Rightarrow Q$) est vraie si et seulement si la proposition (P et (non Q)) est fausse.

Remarque 2.1. A propos de l'implication.
$\star$ **Cas d'une démonstration d'un théorème.**
Si le fait que P soit vraie entraîne que Q soit vraie alors ($P \Rightarrow Q$) est vraie.
On dit alors que P est *condition suffisante* et que Q est *condition nécessaire.*
$\star$ **Cas d'application d'un théorème.**
Dans le cas où l'on sait que P est vraie et que l'implication ($P \Rightarrow Q$) est vraie alors on déduit que Q est vraie.
Dans ce cas, on note : «P donc Q ».
$\star$ **A retenir** :
savoir que l'implication ($P \Rightarrow Q$) est vraie ne renseigne pas sur la valeur de vérité de P.

Exercice 2.1. Dans les propositions suivantes, identifier P, Q et les connecteurs éventuels.
(1) «Il n'y a pas d'omelette sans casser des oeufs ».
(2) Un nombre pair est nécessairement entier.
(3) Il est nécessaire et suffisant que x désigne un réel non nul pour pouvoir simplifier par x.

Théorème 2.1. (Lois de Morgan) : soient P et Q deux propositions sur le même domaine de définition.

(1) (non (P et Q)) = ((non P) ou (non Q)) (2) (non (P ou Q)) = ((non P) et (non Q)).

3 Types de raisonnement pour montrer une imlication $(P \Rightarrow Q)$.

On est ici dans le cas où on ne peut pas utiliser $(P \Rightarrow Q)$ puisqu'on veut en faire la démonstration.

Le raisonnement *direct* consiste à montrer que P est une condition suffisante :

on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Dans la table de vérité de $\Rightarrow$, on mobilise deux lignes :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F

Le raisonnement *par contraposée* consiste à montrer que Q est nécessaire :

on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.

Dans la table de vérité de $\Rightarrow$, on mobilise deux lignes :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	F	F
F	F	V

Le raisonnement *par l'absurde* consiste à exhiber une contradiction :
on suppose que P est vraie et que Q est fausse et on montre que ces deux hypothèses conduisent à une contradiction.

Le raisonnement *par disjonction de cas* consiste à remplacer P par un système équivalent de propositions

$P_1, ..., P_n$ deux à deux exclusives et à montrer que $((P_1 \Rightarrow Q)$ et $(P_2 \Rightarrow Q)$ et $...(P_n \Rightarrow Q))$ est vraie.

Exercice 3.1. : soient P, Q, R des propositions.
Donner successivement la négation, la contraposée, la réciproque de $((\text{ non } P) \Rightarrow (Q \text{ ou } R))$.

Le raisonnement par récurrence.
Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.
D'abord, on montre que la proposition est vraie au moins une fois, c'est-à dire qu'il existe n_0, un entier naturel tel que $P(n_0)$ est vraie (initialisation).
Ensuite, on montre que pour un entier n fixé et supérieur ou égal à n_0, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie (récurrence).
On conclut :
d'une part la proposition $P(n_0)$ et, d'autre part, l'implication $[\forall n \geq n_0 \ \ (P(n)\, vraie \Rightarrow P(n+1)\, vraie)]$ sont vraies.
Donc : pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie .

Exemple 3.1. $\forall n \geq 2 \ \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \ \ ((\sum_{k=1}^n a_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sum_{1 \leq j < k \leq n} a_j a_k)$

4 Exercices à préparer.

1. **Exercice : condition nécessaire.**

   Dans cet exercice, x, n, f désignent respectivement un réel, un entier naturel et une application numérique. Pour chaque couple de propositions, indiquer laquelle est nécessaire à l'autre.

   (a) $P : (x \geq 3)$; $Q : (x \geq -1)$.

   (b) $P : ((x-1)(x-3) \geq 0)$; $Q : (x \geq 4)$.

   (c) $P : (n$ pair$)$; $Q : (n^2$ pair$)$.

   (d) $P : (f$ continue$)$; $Q : (f$ dérivable$)$.

   (e) $P : (\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ 2x-3y & = & 8 \end{array} \right.) ; Q : (\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -2 \end{array} \right.)$.

2. **Exercice : quelques propriétés des opérateurs fondamentaux.**

   Soient $*, \circ$ deux opérateurs propositionnels.

   L'opérateur $*$ est dit *associatif* si et seulement si, pour toutes propositions P, Q, R, les propositions $(P * (Q * R))$ et $((P * Q) * R)$ ont la même valeur de vérité.

   L'opérateur $*$ est dit *distributif* sur l'opérateur $\circ$ si et seulement si, pour toutes propositions P, Q, R, les propositions $(P * (Q \circ R))$ et $(P * Q) \circ (P * R)$ ont la même valeur de vérité.

   (a) Etudier la distributivité de l'opérateur *et* sur l'opérateur *ou* en complétant la table ci-après :

P	Q	R	$(P$ et $Q)$	$(P$ et $R)$	$(P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$	$(P$ et $(Q$ ou $R))$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

   Les expressions ((P et Q) ou (P et R)) et (P et (Q ou R)) sont équivalentes
   Donc l'opérateur "et" est distributif par rapport à "ou"

   (b) Etudier la distributivité de l'opérateur *ou* sur l'opérateur *et*.

   (c) Etudier l'associativité de l'opérateur *implication*.

3. **Exercice : connecteur de Scheffer.**

   Soient P, Q deux propositions sur le même domaine de définition.
   On définit un nouveau connecteur noté | ainsi :

$$(P|Q) = \neg(P \wedge Q).$$

   Ce connecteur est aussi appelé *connecteur de Scheffer* ou encore *NAND* pour «not and ».

   (a) Dresser la table de vérité de la proposition $(P|Q)$.

   (b) Définir le connecteur de négation en fonction de |.

   (c) Déduire la définition du connecteur d'implication en fonction de |.

4. **Exercice : théorèmes de Pythagore.**

   (a) Énoncer séparément les deux théorèmes de Pythagore en utilisant les quantificateurs.

   (b) Le triangle MNP tel que MN = 8 cm , NP = 6 cm et MP = 5 cm est-il rectangle ?
   Quel théorème utilise-t-on pour répondre à cette question ?