DEVOIR SURVEILLÉ

La présentation et la rédaction interviennent pour une part importante dans la notation.

Exercice I

Questions rapides de cours et exercices basiques : les questions sont indépendantes

1) **Notion de limite : :**

•**Notion de limite d'une fonction : :**

a) Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction ; $a \in \overline{\mathcal{D}}$. Rappeler la définition de : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$:

- avec des "ϵ" - puis en termes d'intervalles.

b) Une application : Soient $f, g : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fonctions ; $a \in \overline{\mathcal{D}}$.

Redémontrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$ alors : ($\exists I_a$intervalle ouvert de centre a) tel que : $(\forall x \in I_a \cap \mathcal{D}_f) \quad 0 < f(x)$.

•**Notion de limite d'une suite** : u une suite définie sur $\mathbb{N}$. Rappeler la définition de : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Donner un exemple de suite divergeant vers $+\infty$ sans être croissante à partir d'un certain rang.

2) **Suites particulières :**

a) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = n^2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*; q \in \mathbb{R}$.

Que vaut $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$?

A quelle condition nécessaire et suffisante S est-elle convergente et vers quoi ?

c) On a vu en TD différentes propriétés de la suite de Fibonacci définie par : $\begin{cases} F_0 = 0\,;F_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

En voici une autre ; prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.

Exercice II

Etude d'une suite définie par une relation de récurrence.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$.

1) 1ère méthode.

a) Donner $\mathcal{D}_f$ et étudier f seulement **sur** $]-2, +\infty[$.

Etudier le(s) point(s) fixes de f sur $]-2, +\infty[$.

b) Représenter **soigneusement** f, la droite d'équation $y = x$, ainsi que la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(en l'absence de machine, on rappelle : $\sqrt{2} \approx 1,41$)

c) Etudier classiquement la suite.

2) **Question subsidiaire, hors barème** 2ième méthode.

Soit $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$. Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = qv_n$ avec $q = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et retrouver le résultat du 1).

Exercice III

Négligeabilité et équivalence au voisinage d'un point : les questions sont indépendantes.

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(\sin 2x)(\tan 3x)}{1-\cos x}$.

2) **Redémontrer** que : si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ avec $g > 0$ au voisinage de a, alors, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$.

Prouver que si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ on n'a pas nécessairement $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$ en donnant un contre-exemple.

3) Donner un équivalent (le plus simple possible) :

a) au voisinage de $+\infty$ de : $x^5 + 3^x + (\ln x)^{10} + 2$. b) au voisinage de $+\infty$ de : $\ln\left(e^{2x} + x^2 + x + 1\right)$

c) au voisinage de 0 de : $e^{\arcsin x} - 1$ d) au voisinage de $+\infty$ de : $1 + 2 + \ldots + n$.

4) Déterminer les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ (discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$) b) $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin(x^2)}\right)}$ c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^x - 1}{x}$.

5) Deux fonctions qui tendent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$, quand x tend vers a, sont-elles équivalentes au voisinage de a ?
