Exercice 3

a)

P	Q	(P|Q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Soit P une proposition

b) $\neg P = (P|P)$

$= \neg(P \wedge P)$

Soient P, Q deux propositions

c) $P \Rightarrow Q = \neg(P \wedge \neg Q)$

$= (P | \neg Q)$

$= \neg(P \wedge (Q|Q))$

$= P | (Q|Q)$

Exercice 2

b)

P	Q	R	(P ou Q)	(P ou R)	(P ou Q) et (P ou R)	P ou (Q et R)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Les expressions ((P ou Q) et (P ou R)) et (P ou (Q et R)) sont équivalentes. Le "ou" est distributif sur le "et"

c)

P	Q	R	P => Q	Q => R	P => (Q => R)	(P => Q) => R
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F

"=>" n'est pas associatif
Il existe un triplet de valeurs logiques pour (P, Q, R) montrant que le connecteur "=>" n'est pas associatif

Par HR

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j}^{\text{Par HR}} + 2\sum_{i=1}^{n} a_i \times a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_i a_j$$

$P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie

Conclusion : $\forall n \geqslant 2$, $P(n)$ est vraie

Exercice 1

a) Si $x \geqslant 3$ alors $x \geqslant -1$

Si P alors Q

Donc P : CS et Q : CN

b) ~~P a un sens sur $\mathbb{R}$~~

~~P est vraie pour l'ensemble $\{1,3\}$ $]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$~~

$(x-1)(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $x-3=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$

$(x-1)(x-3)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus]1,3[$

Si $\underbrace{x\geqslant 4}_{Q\,:\,CS}$ alors $\underbrace{x\in\mathbb{R}\setminus]1,3[}_{P\,:\,CN}$

c) Montrons que si n est pair alors n^2 est pair

Soit $n=2k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$n^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$ avec $2k^2\in\mathbb{Z}$

donc n^2 pair si n pair

Si $\underbrace{n \text{ est pair}}_{P\,:\,CS}$ alors $\underbrace{n^2 \text{ est pair}}_{Q\,:\,CN}$

Montrons que si n^2 est pair alors n est pair

Raisonnons par contraposée

Montrons que si n impair alors n^2 impaire

Soit $n=2k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ avec $2k^2+k\in\mathbb{Z}$

donc n^2 impair si n est impair

Conclusion : Soit $n\in\mathbb{Z}$

n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair

$(Q\Rightarrow P)\equiv(\neg P\Rightarrow\neg Q)$

Exercice 4

a) * ~~Dans un~~ Pour tout triangle rectangle, la somme des carrés des deux côtés est égal au carré de l'hypoténuse

* ~~Si dans un~~ Pour tout triangle, le ~~hypoténuse~~ côté le plus long au carré est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle

b) $MN^2=8^2=64$

$NP^2+MP^2=6^2+5^2=36+25=61$

$MN^2\neq NP^2+MP^2$

Donc le triangle MNP n'est pas rectangle

~~On a utilisé la réciproque du théorème de Pythagore~~

Soit P : $MN^2=NP^2+MP^2$ et Q : MNP est rectangle

Si P alors Q

Si $\neg P$ alors $\neg Q$ (contraposée)

Si $MN^2\neq NP^2+MP^2$ alors MNP n'est pas rectangle

Pour tout triangle ABC, avec AC le côté le plus long
Si $AC^2 = AB^2 + BC^2$
alors ABC est un triangle rectangle en B

Posons : P : $AC^2 = AB^2 + BC^2$
Q : ABC triangle rectangle
$P \Rightarrow Q$

Pour tout triangle ABC
Si le triangle ABC est rectangle en B
alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$
$Q \Rightarrow P$

(ici on montre une implication)

Ex 3.1 preuve par récurrence

. Soit $P(n)$, une proposition dépendant d'un entier naturel n.
. Il s'agit de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n.
Initialisation : on montre que $P(0)$ est vraie
. Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie
Montrons que $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie
(on raisonne directement pour montrer l'implication)
. Conclusion : $P(0)$ est vraie
et $\forall n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie.

$P(n)$: $(a_1 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Initialisation : pour $n=2$ soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)^2 = (a_1 + a_2)^2$$
$$= a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$$
$$= \sum_{i=1}^{2} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2} a_i a_j$$

Donc $P(2)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \geq 2$, supposons que $P(n)$ soit vraie
Montrons que $P(n+1)$ est vraie
Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times a_{n+1} + (a_{n+1})^2$$

P	Q	P => Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	7Q	7P	7Q => 7P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

A savoir (7Q) => (7P) est appelée "contraposée" de (P => Q)

(2) Si $\underbrace{\text{n est pair}}_{P}$ alors $\underbrace{\text{n est entier}}_{Q}$

P: CS

Q: CN

Contraposée: Si n n'est pas un entier alors n n'est pas pair

La réciproque de (P => Q) est fausse

On exhibe un contre exemple

3 est un entier et 3 n'est pas pair

$\overline{P.Q}$

$= \overline{P} + \overline{Q}$

$\overline{P+Q}$

$= \overline{P}.\overline{Q}$

Th. 2.1 (Lois de De Morgan)

(1) : non (P et Q) = (non P) ou (non Q)

P	Q	P et Q	non (P et Q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	non P	non Q	(non P) ou (non Q)
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Les propositions non (P et Q) et [(non P) ou (non Q)] sont équivalentes.

Montrons (2) : Transformons [(non P) et (non Q)]

On utilise : $\forall R \quad 7(7R) = R$

. [(non P) et (non Q)] ≡ non [non[(non P) et (non Q)]]

≡ non [P ou Q] en appliquant (1)

3 - Types de raisonnement pour montrer une $\Rightarrow$

↳ R. direct : Supp P vraie

Donc Q vraie

↳ R. par contraposée : Supp Q fausse

Donc P fausse

↳ R par l'absurde : Supp P vraie et Q fausse

Contradiction concernant Q conduisant à Q vraie

Exercice 3.1 : Considérons la proposition
$[(\text{non } P) \Rightarrow (Q \text{ ou } R)]$

. Exprimons la négation de cette implication

$$\text{non}\,[(\text{non } P) \Rightarrow (Q \text{ ou } R)] \equiv (\text{non } P) \text{ et non } (Q \text{ ou } R)$$
$$\equiv (\text{non } P) \text{ et } [(\text{non } Q) \text{ et } (\text{non } R)]$$

$a \Rightarrow b$
a et non b
$\text{non } b \Rightarrow \text{non } a$

. Exprimons la contraposée de cette implication

$$[(\text{non } P) \Rightarrow (Q \text{ ou } R)] \equiv [\text{non } (Q \text{ ou } R) \Rightarrow \text{non}(\text{non } P)]$$
$$\equiv [(\text{non } Q \text{ et non } R) \Rightarrow P]$$

$(P \Rightarrow Q)$ se lit : (Si P alors Q)

* Cas où l'on veut montrer un théorème de la forme $(P \Rightarrow Q)$
2 types de raisonnements :
① - soit on suppose que P est vraie : il suffit de montrer
② soit on suppose que Q est fausse } que Q est vraie :
P est donc "condition ~~nécessaire~~ suffisante" (CS)
② ↳ il suffit de montrer que P est fausse : P est "condition suffisante" (CS), Q est "condition nécessaire" (CN)

* Cas où l'on utilise une implication qu'on sait ê vraie
. Supposons P soit vraie
. On sait que $(P \Rightarrow Q)$ vraie
. Donc Q est vraie
ou encore
. On déduit que Q est vraie

Exercice 2.1

(1) Si $\underbrace{\text{aucun oeuf n'est cassé}}_{P}$ alors $\underbrace{\text{il n'y a pas d'omelette}}_{Q}$

P : CS $\qquad P \Rightarrow Q$
Q : CN

S'$\underbrace{\text{il existe une omelette}}_{\neg Q}$ alors $\underbrace{\text{il existe au moins 1 oeuf cassé}}_{\neg P}$

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Les propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont équivalentes : cela signifie qu'elles ont la m̂ table de vérité

2. Connecteurs logiques

- Analogie avec les nombres

$$\underbrace{4}\ \underbrace{+}_{\text{opérateur entre 2 nombres}}\ 7 = \underbrace{11}_{\text{nombre résultant}}$$

- Avec des propositions

$$(P \underbrace{*}_{\text{connecteur entre propositions}} Q) \equiv \underbrace{R}_{\text{proposition résultante}}$$

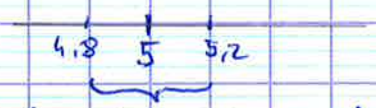
- Négation (connecteur unaire)

Soit P une proposition

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ex 2.1 : Soit x un réel

$P : (x \text{ vérifie } |x-5| < 0,2)$



domaine d'appartenance de x

$P : (x \in]4,8 ; 5,2[)$

$\neg P : (x \notin]4,8 ; 5,2[)$

$\neg P : (x \in]-\infty ; 4,8] \cup [5,2 ; +\infty[$

$\neg P : (x \text{ vérifiant } |x-5| \geq 0,2)$

- Conjonction (connecteur binaire)

Soient P, Q : deux propositions définies sur le m̂ domaine

P	Q	$(P \text{ et } Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ex. 2.2 : $P : (x < 5)$ et $Q : (\sqrt{x} > 1)$

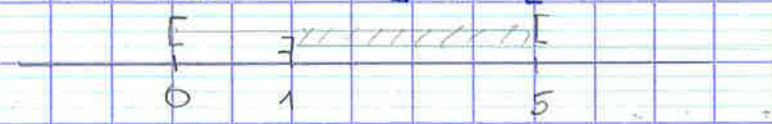
P définie sur $\mathbb{R}$ et Q définie sur $\mathbb{R}_+$

On considère $(P \text{ et } Q)$ sur $\mathbb{R}_+$

$(P \text{ et } Q)$ vraie ssi $(P \text{ vraie})$ et $(Q \text{ vraie})$

ssi $(x \in [0,5[)$ et $(x \in]1,+\infty[)$

ssi $x \in]1,5[$



- Disjonction (connecteur binaire)

Soient P, Q définies sur le m̂ domaine

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex 2.3 : - Considérons la prop (P et (¬Q))
- Déterminons les cas où (P et (¬Q)) est fausse

1er cas : P est fausse et (¬Q) est fausse

i-e : P est fausse et Q est vraie

i-e est c'est-à-dire

2^{e} cas : [P est fausse et (¬Q) est vraie] ou [P est vraie et (¬Q) est fausse]

i-e : [P est fausse et (¬Q) est vraie] ou [P et Q sont vraie]

P	Q	¬Q	P et (¬Q)
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

• Implication (connecteur binaire)
Soient P, Q définies chacune sur leur domaine

P	Q	P et (¬Q)	P ⇒ Q
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Chap. 1 : Eléments de logique

1. Voc

Ex 1.1

P : $\left(\frac{x^2}{x} = x\right)$

P a un sens sur le domaine de déf : $\mathbb{R}^*$
P est vraie sur le domaine : $\mathbb{R}^*$
Dans ce cas, le domaine de validité est confondu avec le dom. de déf

Q : $(x^2 = x)$

Q est définie sur $\mathbb{R}$
Q est vraie sur $\{0, 1\}$
Ici, le domaine de validité est strict^t inclus dans le dom. déf
Preuve $x^2 = x \iff x^2 - x = 0$
$\iff x(x-1) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = 1$

R : $(\sqrt{x} > 2)$

R est définie $\mathbb{R}_+$
R est vraie sur $]4, +\infty[$
Ici : $]4, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$

Pve : $\sqrt{x} > 2 \iff x > 4$ car $t \mapsto t^2$ croît strict^t sur $\mathbb{R}_+$
$\iff x \in]4, +\infty[$