Devoir surveillé n° 1/2

23 mars 2016

Nom .... Prénom .... Groupe de td...

Barème indicatif

— Dénombrement : 8 points.

— Opérations ensemblistes : 4 points.

— Question de cours *Un univers dénombrable infini peut-il être uniformément probabilisé ?* : 4 points.

— Conditionnement et variables aléatoires : 8 points.

— Urne de Polya : 4 points.

Note finale : ....../20

Exercice : dénombrement de numéros de téléphone.

Les questions suivantes sont indépendantes.

Indiquer les formules de dénombrement puis effectuer les calculs uniquement si cela est explicitement demandé.

Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 8 chiffres tels que :

(a) le numéro comporte trois occurrences du chiffre 1, trois occurrences du chiffre 3, deux occurrences du chiffre 0. *Effectuer le calcul.*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(b) le numéro est formé avec exactement deux chiffres distincts. *Effectuer le calcul.*

....

....

....

....

....

....

....

....

(c) le numéro comporte exactement trois occurrences du chiffre 1.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(d) la somme des chiffres du numéro est égale à 10.
Effectuer le calcul. On pourra utiliser : $17 \times 13 = (15 + 2) \times (15 - 2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice : langage des ensembles

Soient A, B, C trois événements d'un univers U.

Donner sans justifier une expression des événements suivants en fonction de A, B, C :

(1) aucun des événements A, B, C n'est réalisé.

(2) un seul des trois événements A, B ou C est réalisé.

(3) au moins deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.

(4) au plus deux des trois événements A, B ou C sont réalisés.

Question de cours.

Soit $(U, \mathcal{P}(U))$ un espace probabilisable.

On suppose que U est dénombrable infini : c'est-à-dire qu'on peut noter : $U = (e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Est-il possible de probabiliser $(U, \mathcal{P}(U))$ avec une probabilité uniforme ?

Justifier votre réponse.

Exercice : compteur de score déréglé.

Soient $q, a \in]0,\ 1[$
Robin tire sur une cible avec la probabilité q d'atteindre cette cible.
Il tire n fois de suite sur cette cible ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).
A l'issue des n tirs, un automate affiche un score.
L'automate se dérègle avec la probabilité a et dans ce cas, il affiche un résultat augmenté de 1 par rapport au score réalisé.

On note U l'ensemble des résultats et l'on considère l'espace probabilisé $(U, \mathcal{P}(U), p)$ et deux variables aléatoires définies sur $(U, \mathcal{P}(U), p)$:
- la variable aléatoire réelle X qui compte les touchers de cible effectifs ;
- la variable aléatoire réelle A donnant le score affiché.

(a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier votre réponse.

....

....

....

(b) On pose l'évènement D : «*l'automate se dérègle.* ». Déterminer les probabilités des événements suivants :

— $(A = 0)$: «*le score affiché est* 0 » ;
— $(A = 1)$: «*le score affiché est* 1 ».

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(c) Déterminer la probabilité d'avoir effectivement atteint la cible une fois sachant que l'automate indique un score de 1 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

(c) Donner $A(U)$ puis déterminer la loi de A.

(d) Construire la courbe de la fonction de répartition de A dans le cas où : $q = a = \frac{1}{2}$ et $n = 4$.
Pour les unités graphiques, prendre :

— 10 mm pour 1 unité sur l'axe des abscisses,

— 2 mm pour $\frac{1}{32}$ d'unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice : urne de Polya

Soient $b, r, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $b \neq r$.

Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges.

On tire dans celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète cette expérience indéfiniment.

(1) Déterminer U l'univers de cette expérience.

(2) On note $\mathcal{T}$ la tribu de U engendrée par les événements élémentaires. L'espace $(U, \mathcal{T}, p)$ est probabilisé ainsi : à chaque tirage, la probabilité de tirer une boule blanche est donnée par la proportion de boules blanches dans l'urne.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On nomme B_n l'événement : «*la n^e boule tirée est blanche*».

Déterminer les probabilités de B_1, de B_2, de B_3.

(3) On considère l'événement : E : « *au moins deux des boules parmi les trois premières sont blanches*».

Montrer en utilisant la méthode du crible de Poincaré que :

$$p(E) = p(B_1 \cap B_2) + p(B_2 \cap B_3) + p(B_3 \cap B_1) - 2\, p(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$