1 Introduction.

Définition 1.1. Structure de groupe.
Soit E, un ensemble non vide et muni d'une opération binaire, notée $*$ de façon infixée.
E est un *groupe* pour $*$ si et seulement si :
(1) $*$ est interne : $\forall x, y \in E,\ \ (x * y) \in E$
(2) $*$ est associative : $\forall x, y, z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z$
(3) E admet un élément neutre pour $*$: $\exists e \in E\ /\ \ \forall x \in E,\ \ e * x = x * e = x$
(4) tout élément de E admet un symétrique pour $*$: $\forall x \in E,\ \ \exists y \in E\ /\ \ y * x = x * y = e$.

De plus, si $*$ est commutative (*i.e.* : $\forall x, y \in E,\ \ x * y = y * x$) alors le groupe est dit commutatif.

On note : (E, *) ce groupe éventuellement commutatif.

Remarque 1.1. Vocabulaire et notations.
Usuellement, si l'opération est commutative alors elle est notée $+$. Dans ce cas :
- ⋆ $(E, +)$ est dit *groupe additif* ;
- ⋆ l'élément neutre est appelé *zéro* de E et noté 0_E ;
- ⋆ soit $x \in E$. Le symétrique de x est appelé *opposé de* x et est noté $(-x)$.

Si E est muni d'une deuxième opération de groupe, elle peut être notée $\times$. Dans ce cas :
- ⋆ $(E, \times)$ est dit *groupe multiplicatif* ;
- ⋆ l'élément neutre est appelé *unité* de E et noté 1_E ;
- ⋆ soit $x \in E$. Le symétrique de x est appelé *inverse de* x et est noté (x^{-1}).
- ⋆ Un groupe multiplicatif peut être ou non commutatif. Cela dépend.

Exemple 1.1. ... et contre-exemple.
$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathbb{R}[X], +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif .

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ non stable par $+$: $I_n + (-I_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Dans $\mathbb{N}$, 1 n'a pas d'opposé pour $+$.
Dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, seul 1 et -1 ont un inverse pour $\times$.
$(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe non commutatif.

Théorème 1.1. Groupes de référence
(1) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe commutatif avec :

$$\forall u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall v = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ u + v = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

(2) Soit E, F deux ensembles non vides. Soit $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications définies de E dans F.
Si $(F, +)$ est un groupe commutatif alors $(\mathcal{A}(E, F), \oplus)$ est un groupe commutatif avec :

$$\forall f \in \mathcal{A}(E, F),\ \ \forall g \in \mathcal{A}(E, F),\ \ \left(f \oplus g \left| \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. \right) \in \mathcal{A}(E, F)$$

Définition 1.2. Structure de corps.
Soit $\mathbb{K}$ un ensemble de nombres : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathbb{K}$ est muni des opérations usuelles d'addition (notée $+$) et de multiplication (notée $\times$).

(1) $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif ;
(2) $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif commutatif où $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$;
(3) $\times$ est distributive sur $+$.

On dit que $\mathbb{K}$ est un *corps commutatif* et l'on note : $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Définition 1.3.
Soit $\mathbb{K}$, un corps commutatif : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E, un ensemble non vide.
Une application définie de $\mathbb{K} \times E$ dans E et notée de façon infixée par $\cdot$ est appelée *opération externe*.

$$\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

2 Structure d'espace vectoriel.

Définition 2.1.
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$, un corps commutatif.
Soit $(E,+)$, un groupe commutatif muni d'une opération externe définie sur $\mathbb{K}\times E$ et notée $\cdot$.

E est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* si et seulement si :
(1) E est stable par $\cdot$. *i.e.* : $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\quad \lambda\cdot x\in E$;
(2) L'action de $1_{\mathbb{K}}$ est neutre. *i.e.* : $\forall x\in E,\ 1_{\mathbb{K}}\cdot x=x$;
(3) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+$. *i.e.* : $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x,y\in E,\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$;
(4) $\cdot$ est pseudo-distributive sur $+$. *i.e.* : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$;
(5) $\cdot$ est pseudo-associative. *i.e.* : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ (\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

On note : $(E,+,\cdot)$.

Exemple 2.1. A savoir et savoir montrer.
Soit n,un entier naturel non nul. Pour les opérations usuelles, les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

- ⋆ $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ $\mathbb{R}[X]$;
- ⋆ $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des applications définies sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ l'ensemble des applications définies d'un ensemble non vide dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 2.2. Vocabulaire d'espace vectoriel.
Un *vecteur* est un élément d'un ensemble structuré en espace vectoriel.
Un *scalaire* est un élément d'un corps commutatif opérant sur un espace vectoriel.
Une *combinaison linéaire de vecteurs* est un vecteur qui est la somme d'un nombre fini de vecteurs.

$$\forall(x_k)_{1\le k\le n}\in E^n,\ \forall(\lambda_k)_{1\le k\le n}\in\mathbb{K}^n,\qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot x_k}_{\text{combinaison linéaire de vecteurs}}$$

Deux vecteurs sont *linéairement dépendants* s'il existe deux scalaires de $\mathbb{K}$, λ,μ, non tous nuls tels que $\lambda\cdot x+\mu.y=0_E$.
Deux vecteurs sont *colinéaires* s'ils sont linéairement dépendants.
⚠La notion de colinéarité s'applique à la relation entre **exactement** 2 vecteurs.

Théorème 2.1. relatif au vecteur nul.
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$, un corps commutatif et soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(1) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\quad (\lambda=0_{\mathbb{K}}\text{ ou }x=0_E)\Rightarrow\lambda\cdot x=0_E$;
(2) $\forall x\in E,\ (-1)\cdot x=(-x)$;
(3) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ \lambda\cdot x=0_E\Rightarrow(\lambda=0_{\mathbb{K}}\text{ ou }x=0_E)$;
(4)$\{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.1. Vérifier la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On définit :
- l'addition interne sur E ainsi : $\forall(x,y),(x',y')\in E,\forall\lambda\in\mathbb{R},(x,y)+(x',y')=(xx',y+y')$.
- l'opération externe sur $\mathbb{R}\times E$ ainsi : $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in E,\ \lambda\cdot(x,y)=(x^{\lambda},\lambda y)$.

3 Sous-espace vectoriel (s-e-v).

Définition 3.1.
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$, un corps commutatif et $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F, une partie non vide de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 3.1. Sous-espace vectoriel.
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y - z = 0\}$: F est s-e-v de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ est s-e-v de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.
Par convention, le polynôme nul est de degré égal à $-\infty$.

Théorème 3.1. Caractérisation de sous-espace vectoriel.
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$, un corps commutatif.
Soit $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F, une partie de E.
F, un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(1) F est un sous-groupe de $(E, +)$. *i.e.* : $(F \neq \emptyset)$ et $(\forall x, y \in F, x - y \in F)$
(2) F est stable par la loi externe $\cdot$. *i.e.* : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in F, \ \lambda \cdot x \in F$.

Remarque 3.1.
Pour caractériser F comme sous-espace vectoriel de E, il est équivalent de montrer :
$F \subset E$ **et** $F \neq \emptyset$ **et** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in F, \ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.
Le théorème précédent permet de caractériser un ensemble comme un espace vectoriel en le considérant comme sous-ensemble d'un espace vectoriel de référence.

Exercice 3.1. Montrer que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-e-v.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y\}$
$E_2 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' - 4f' + 4f = \tilde{0}\}$
$E_3 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M = {}^t M\}$

Théorème 3.2. Théorème de la famille génératrice.
Soit $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit n, un entier naturel non nul.
Soit $\mathcal{F} = \{x_k, 1 \leq k \leq n\}$, une famille de vecteurs de E.
(1) L'ensemble des combinaisons linéaires formées avec les éléments de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Cet espace est noté $Vect(\mathcal{F})$. $\mathcal{F}$ est dite *famille génératrice* de cet espace.
(2) $Vect(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant $\mathcal{F}$.

Définition 3.2. Plan et droite vectoriels.
Soit $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un e-v engendré par un vecteur non nul est appelé *droite vectorielle* de E.
Un e-v engendré par deux vecteurs non nuls et non colinéaires est appelé *plan vectoriel* de E.

Exemple 3.2. Quelques familles génératrices.
Les matrices canoniques $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent le plan vectoriel des matrices diagonales dans le $\mathbb{R}$-e-v $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Les matrices canoniques $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ engendrent le plan vectoriel des matrices diagonales dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_2(\mathbb{R})$, lui-même s-e-v de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $Vect(\{0_E\}) = \{0_E\}$;
$\mathbb{R}^3 = Vect(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$;
$\mathbb{C} = Vect(\{1, i\}) = Vect(\{1\}) = Vect(\{i\})$.

Théorème 3.3. Intersection, union, somme de sous-espaces vectoriels.
Soit $(E, +, \cdot)$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F_1 et F_2, deux sous-espaces vectoriels de E.
(1) $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Si $F_1 \setminus F_2$ et $F_2 \setminus F_1$ sont non vides alors $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
(3) L'ensemble $F_1 + F_2 = \{y \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 / y = x_1 + x_2\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, contenant $F_1 \cup F_2$.
Cet ensemble est appelé **somme** de F_1 et F_2.

Exemple 3.3. Quelques somme d'espaces vectoriels.
Considérons trois s-e-v de $\mathbb{R}^3$: un plan $P = Vect((1,2,3),(1,0,0)$ et deux droites vectoriels $D_1 = Vect((0,1,0))$ et $D_2 = Vect((0,2,3))$.
En tant que s-e-v, ce plan et ces droites contiennent le vecteur nul $(0,0,0)$. Donc leur intersections deux à deux n'est jamais vide.
Par ailleurs :
$D_1 \cap D_2 = \{(0,0,0)\}$ donc : $D_1 + D_2$ est un plan vectoriel : $D_1 + D_2 = Vect((0,1,0),(0,2,3))$.
$D_1 \cap P = \{(0,0,0)\}$ donc :$D_1 + P = Vect((1,2,3),(1,0,0),(0,1,0)) = \mathbb{R}^3$.
$D_2 \cap P = D_2$ donc : $D_2 + P = Vect((1,2,3),(1,0,0)) = P$.

4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Définition 4.1. Somme directe de sous-espaces vectoriels.
Soit E, un $\mathbb{K}$-e-v. Soient F_1, F_2, deux s-e-v de E. On considère le s-e-v $F_1 + F_2$.
(1) On dit que F_1 et F_2 sont en *somme directe* si et seulement si tout vecteur de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.
On note alors $F_1 \oplus F_2$.
(2) On dit que F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E si et seulement si F_1 et F_2 sont en somme directe et si $E = F_1 + F_2$.
On note alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Théorème 4.1. relatif à la somme directe de sous-espaces Vectoriels.
Soit E, un $\mathbb{K}$-e-v. Soient F_1, F_2, des s-e-v de E.
(1) F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
(2) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $(E = F_1 + F_2)$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
(3) Si F_1 est distinct de E alors F_2, supplémentaire de F_1 dans E, n'est pas unique.

Exemple 4.1. Soient les s-e-v de $\mathbb{R}^3$:
$P = Vect((1,0,0),(0,1,0))$, $D_1 = Vect((0,0,1))$, $D_2 = Vect((1,0,1))$ et $Q = Vect((1,0,0),(0,0,1))$.
On déduit :
$P \oplus D_1 = \mathbb{R}^3$, $P \oplus D_2 = \mathbb{R}^3$, $D_1 \oplus D_2 = Vect((1,0,0),(0,0,1))$, $Q + D_1 = Q$, $Q + D_2 = Q$ et $P + Q = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.1.

1. On pose : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = {}^t M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = -{}^t M\}$.
Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P = P \circ (-X)\}$ et $G = \left\{XP / P \in \mathbb{R}\left[X^2\right]\right\}$.
Montrer que : $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

3. On pose : $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f = f \circ (-id_{\mathbb{R}})\}$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f = -f \circ (-id_{\mathbb{R}})\}$.
$\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

4. Montrer que : $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}\left(\tilde{1}\right)$ avec $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f = 0\right\}$.

5 Indépendance linéaire.

5.1 Généralités.

Définition 5.1. Famille libre de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n\}$, une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{F}$ est celle dont tous les scalaires sont nuls.

$$\mathcal{F} \text{ libre } \Leftrightarrow \left[\forall\,(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) = 0_E \Rightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}})\right]$$

Définition 5.2. Famille liée de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n\}$, une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est liée si et seulement si au moins une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{F}$ a un scalaire non nul.

$$\mathcal{F} \text{ liée } \Leftrightarrow \left[\exists\,(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) = 0_E \text{ et } (\exists k \in \{1, \cdots, n\}, \lambda_k \neq 0_{\mathbb{K}})\right]$$

Remarque 5.1. Les deux définitions précédentes se déduisent l'une de l'autre.

Exemple 5.1. Famille libre, famille liée ?
(1)Soient $u = (2, -1, 1),\ v = (1, 2, 1),\ w = (-3, 4, 2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{La famille } \{u, v, w\} \text{ est } \textbf{libre}.}$$

Preuve : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3} (\star)$. Montrons que nécessairement : $a = b = c = 0$.

$$(\star) \Leftrightarrow a \cdot (2, -1, 1) + b \cdot (1, 2, 1) + d \cdot (-3, 4, 2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a + b - 3c &=& 0 \\ -a + 2b + 4c &=& 0 \\ a + b + 2c &=& 0 \end{array}\right. .$$

On résout le système linéaire :

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode utilise le rang matriciel ou le déterminant, la matrice étant ici carrée. En effet :

$(\star)$ admet l'unique solution $(0, 0, 0)$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
si et seulement si le rang de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est maximal égal à 3,
si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ est non nul dans $\mathbb{R}$.

(2) Soient $u = (1, 1, 0),\ v = (0, 1, 1),\ w = (1, -1, -2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Une combinaison linéaire est évidente : $u - 2v = w$. La famille $\{u, v, w\}$ est donc **liée**.

Théorème 5.1.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(1) Une famille de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linaire des autres.
(2) Si une famille est liée alors toute sur-famille est liée.
(3) Si une famille est libre alors toute sous-famille est libre.

Démonstration.
Soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$, une famille de n vecteurs de E.

(1) Supposons $\{x_1, \cdots, x_n\}$ liée.

Par définition, il existe n scalaires réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ **non tous nuls** tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0_E (\star)$.

On peut poser : $\lambda_1 \neq 0$ quitte à ré-indicer les vecteurs.

Donc : $(\star) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot x_1 = -\left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \cdot x_k\right)$.

Donc : $(\star) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \cdot x_k\right) = \left(\sum_{k=2}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot x_k\right)$.

i.e. : l'un des vecteurs, ici x_1, s'exprime comme CL des $(n-1)$ autres vecteurs.

(2) Supposons $\{x_1, \cdots, x_n\}$ liée.

Par (1), au ré-indiçage près, il existe $(n-1)$ scalaires réels $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que : $x_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \cdot x_k$

Á la famille initiale, adjoignons un vecteur noté x_{n+1} et posons : $\lambda_{n+1} = 0$.

L a CL est conservée : $x_1 = \left(\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k \cdot x_k\right)$.

i.e. : $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est liée.

(3) Déduisons : Si une famille est libre alors toute sous-famille est libre.

On prend la contraposée de (2).

□

5.2 Rang d'une famille de vecteurs.

Définition 5.3. Rang d'une famille de vecteurs.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E.
On appelle *rang de* $\mathcal{F}$, le nombre maximal de vecteurs libres qu'on peut extraire de $\mathcal{F}$.

$$0 \leq \text{rg}(\mathcal{F}) \leq n.$$

Remarque 5.2. A savoir ♡.
Une famille de vecteurs est libre si et seulement si son rang est maximal, égal au nombre de vecteurs de la famille.
Une famille de vecteurs est liée si et seulement si son rang est strictement inférieur au nombre de vecteurs de la famille.

Exercice 5.1.
Soit $\{u, v\}$, une famille libre d'un $\mathbb{K}$- e-v.

1. $\text{rg}(\{u, 2v\}) =?$
2. $\text{rg}(\{u, v, u+2v\}) =?$
3. Combien de familles libres peut-on extraire de $\{u, v, u+2v\}$?

Définition 5.4.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit F, un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$ une famille génératrice de F : $F = Vect(x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n)$.

(1) La dimension de F est égale au rang de $\mathcal{F}$. On note : $\dim(F) = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$.
Par convention, la dimension de $\{0_E\}$ est 0.

(2) Une famille libre et génératrice de E est appelée *base* de E.

Théorème 5.2.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F, un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Toute famille génératrice de F a un rang égal à la dimension de F.
Autrement dit, la dimension de F ne dépend pas de la famille considérée comme génératrice de F.

Exemple 5.2. Bases dites *bases canoniques.*

$\star$ Espaces de n-uplets.
$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. La base *canonique* de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B}_0 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.
$\mathbb{K}^n (n \geq 1)$ est de dimension n. La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $\mathcal{B}_0 = (e_k, \cdots, e_n)$ où e_k est le k-uplet de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la k^e qui est égale à $1_{\mathbb{K}}$.

$\star$ Espaces de polynômes.
$\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B}_0 = \left(\tilde{1}, X, X^2\right)$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B}_0 = \left(\tilde{1}, X, \cdots, X^n\right)$.

$\star$ Espaces de matrices.
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2. Sa base canonique constituée de n^2 matrices canoniques.

Théorème 5.3. ADMIS
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E.
(1) $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
(2) Si $\mathcal{F}$ libre alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
(3) Si $\mathcal{F}$ génératrice alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
(4) Toute base de E a n vecteurs.
(5) Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
(6) Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.
(7) Soit F un s-e-v de E. Toute base de F peut être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète).
(8) Soient F, G deux s-e-v de E. F, G verifient la relation dimensionnelle : $\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$.

Exemple 5.3. Base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, x_3\}$, une famille de $\mathbb{R}^3$ où $x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,0), x_3 = (1,1,1)$.
$\star \{x_1, x_2\}$ est libre comme sous-famille de la base canonique mais non génératrice de $\mathbb{R}^3$.
$\star \{x_1, x_2, x_3 - x_2 - x_1\}$ libre : c'est la base canonique.
$\star \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est libre.

Remarque 5.3. Notation et vocabulaire dans une base finie.
Soit E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_k, \cdots e_n\}$, une base de E.
A condition d'indicer les vecteurs de base $\mathcal{B}$, il existe une bijection définie de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{array} \right.$$

- Les coefficients de $\Phi(x)$ sont appelés *coordonnées* de x dans $\mathcal{B}$ (et non plus composantes).
- La base est notée comme un n-uplet $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_k, \cdots e_n)$ (et non plus comme une famille).
- Ne pas confondre un vecteur et l'une de ses matrices colonnes selon une base donnée.

Exemple 5.4. Soient $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique et $\mathcal{B}_1 = (\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{u_1}, \underbrace{e_1}_{u_2}, \underbrace{e_2}_{u_3})$, une autre base $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur $x = (2, 3, -1)$ est représenté par deux matrices colonnes différentes : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$.

Explication.

$\star$ Dans $\mathcal{B}_0$, $x = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3$. Donc : $\boxed{x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}}$

$\star$ Déterminons les coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$.

Posons $x = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3$. *i.e.* : $x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$

On a donc : $a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3$.

Donc : $a \cdot (e_1 + e_2 + e_3) + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3$.

Donc : $(a + b - 2) \cdot e_1 + (a + c - 3) \cdot e_2 + (a + 1) \cdot e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Or : $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre, en tant que base. Donc : $\left\{ \begin{array}{rcl} a + b - 2 & = & 0 \\ a + c - 3 & = & 0 \\ a + 1 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 3 \\ c & = & 4 \end{array} \right.$

$$i.e. : \boxed{x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}}$$

Exercice 5.2. Méthode d'étude du rang d'une famille.

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, on considère : $u = (1, 2, 0, 1), v = (2, 1, 3, 1), w = (2, 4, 0, 2)$.
   A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $(u, v - 2u)$ ou (u, v) sont des bases de $\text{Vect}(\{u, v, w\})$.
2. Dans l'espace de dimension infinie $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f_1 = \tilde{1}, f_2 = \sin, f_3 = \sin^2, f_4 = \cos^2, f_5 = \cos \circ (2 \cdot id_{\mathbb{R}})$.
   Montrer que (f_1, f_2, f_3) ou (f_2, f_3, f_4) sont des bases de $\text{Vect}(\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\})$.

5.3 Application aux applications linéaires.

Définition 5.5.
Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f, une application de E dans F.
f est linéaire si et seulement si l'image par f de toute combinaison linéaire dans E est la combinaison linéaire des images dans F.
Autrement dit : $\boxed{f \text{ linéaire } \Leftrightarrow \forall x, x' \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x').}$

Exemple 5.5. ... et contre-exemple.

$\star f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, y, x + y) \end{array} \right.$ est linéaire.

Preuve.

Soient $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Comparons $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$ et $\lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')) \\
&= (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y') \\
&= (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda(x + y) + \mu(x' + y')) \\
&= (\lambda x, \lambda y, \lambda(x + y)) \quad + \quad (\mu x', \mu y', \mu(x' + y')) \\
&= \lambda \cdot (x, y, (x + y)) \quad + \quad \mu \cdot (x', y', (x' + y')) \\
&= \lambda \cdot f((x, y)) \quad + \quad \mu \cdot f((x', y')) \\
&= \lambda \cdot f(u) \quad + \quad \mu \cdot f(v)
\end{aligned}$$

$\star \mathrm{tr} \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j}) \mapsto \mathrm{tr}(M) = m_{1,1} + m_{2,2} + m_{3,3} \end{array} \right.$ est linéaire.

$\star \det \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j}) \mapsto \det(M) \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.

Preuve.
$\det(2 \cdot I_3) = 2^3 = 8$ et $2 \det(I_3) = 2 \times 1 = 2$. Donc $\det(2 \cdot I_3) \neq 2 \det(I_3)$.

Théorème 5.4. Indépendance linéaire via une application linéaire.
Soit E, F, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f, une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$, une famille de E et $\mathcal{F}' = \{f(x_1), \cdots, f(x_k), \cdots f(x_n)\}$, la famille des images par f de F.

(1) L'image du vecteur nul de E par f est le vecteur nul de F. i.e : $f(0_E) = 0_F$.

(2) Si la famille $\mathcal{F}$ est liée alors la famille des images $\mathcal{F}'$ est liée dans F.

(3) Si la famille $\mathcal{F}'$ est libre dans F alors la famille $\mathcal{F}$ est libre dans E.

(4) Si f est injective alors, si la famille $\mathcal{F}$ est libre dans E alors la famille $\mathcal{F}'$ est libre dans F.

Démonstration.
(1) $f(0_E) = 0_F$.

Soit $u \in E$.

$f(u + 0_E) = f(u)$.

Or f est linéaire donc : $f(u) + f(0_E) = f(u)$.

Or F est un $\mathbb{K}$-e.-v. donc $-f(u)$ existe.

Donc : $f(u) + f(0_E) = f(u) \Leftrightarrow \underbrace{(-f(u) + f(u))}_{0_F} + f(0_E) = \underbrace{(-f(u) + f(u))}_{0_F}$

i.e. : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

(2) Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$ une famille liée dans E.

Donc il existe $\lambda_1, \cdots, , \lambda_n$ non tous nuls dans $\mathbb{K}$ tels que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0_E$.

Donc, par linéarité de f et par (1), $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(x_k) = f(0_E) = 0_F$.

Les λ_k étant non tous nuls, on déduit que la famille $\{f(x_1) \cdots f(x_n)\}$ est liée dans F.

(3) Si la famille $\mathcal{F}\,'$ est libre dans F alors la famille $\mathcal{F}$ est libre dans E.

On applique la contraposée du (2).

Si une famille d'images par f est libre dans F alors la famille des antécédents est libre dans E.

(4) Supposons f injective et la famille $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_k, \cdots x_n\}$ libre dans E.

Par l'absurde : supposons de plus $\mathcal{F}' = \{f(x_1), \cdots f(x_n)\}$ liée dans F.

Donc il existe $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ non tous nuls dans $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(x_k) = 0_F$.

Donc, par linéarité de f : $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k) = 0_F$.

Donc, par injectivité de f, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k = 0_E$.

Donc, par liberté de $\mathcal{F}$, $\forall k \in [\![1,\ n]\!] \quad \lambda_k = 0$: CONTRADICTION.

A retenir : Une application linéaire injective conserve la dimension de tout s.-e.-v. de l'espace de départ.

□

6 Exercices à préparer.

1. **Exercice : reconnaître la structure d'espace vectoriel.**
   (a) $(\mathbb{K},+,\times)$ désigne un corps de nombres.
   Sur $\mathbb{K}^2$, on définit une loi interne notée $\oplus$ et sur $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^2$, on définit une loi externe notée ..
   Dans chaque cas, déterminer si ces deux lois définissent ou non sur $\mathbb{K}^2$, une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   — $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2,\forall(x',y')\in\mathbb{K}^2,\forall\lambda\in\mathbb{K},\ (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$ et $\lambda.(x,y)=(\lambda\times x,0)$.
   — $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2,\forall(x',y')\in\mathbb{K}^2,\forall\lambda\in\mathbb{K},\ (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')$ et $\lambda.(x,y)=(\lambda\times x,\lambda\times y)$.

   (b) Sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites réelles, on définit une loi interne notée $\oplus$ et sur $\mathbb{R}\times\mathscr{S}$, on définit une loi externe notée . ainsi :
   $$\forall(x_i)_{i\in\mathbb{N}},\forall(y_i)_{i\in\mathbb{N}},\forall\lambda\in\mathbb{R},(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\oplus(y_i)_{i\in\mathbb{N}}=(x_i+y_i)_{i\in\mathbb{N}}\text{ et }\lambda.(x_i)_{i\in\mathbb{N}}=(\lambda\times x_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$
   — Montrer que $(\mathscr{S},\oplus,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   — On note $\mathscr{S}_b$ et $\mathscr{S}_c$, respectivement, l'ensemble des suites réelles bornées et l'ensemble des suites réelles convergentes. Ces ensembles sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Quelle est leur relation ?

2. **Exercice : familles génératrices.**
   (a) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels, F et G.
   — Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.
   — Formuler les contraposées de cette équivalence.

   (b) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1),a=e_1+e_3,b=e_2+e_3$.
   On note : $F=Vect(e_1,e_2)$ et $G=Vect(a,b)$.
   — Rappeler pourquoi F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   — Déterminer $F\cap G$.
   — $F\cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

3. **Exercice : déterminer si une famille libre ou liée.**
   (a) On considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, $\mathbb{K}-$ étant un corps.
      i. Donner, formellement, la définition d'une famille libre de n vecteurs de E.
      ii. Exprimer, verbalement, ce qu'est une famille liée de n vecteurs de E.
      iii. Donner, formellement, la définition d'une famille liée de n vecteurs de E.

   (b) Soient les vecteurs $v_1=(2,1,1),v_2=(1,3,1),v_3=(-2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer si la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$.

   (c) Soient les vecteurs $v_1=(1,0,3),v_2=(0,1,2),v_3=(2,-3,0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer si la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^3$.

   (d) Soient les vecteurs $v_1=(0,5,2,-1),v_2=(-1,2,0,1),v_3=(-3,1,0,4),v_4=(0,0,-4,0)$ de $\mathbb{R}^4$.
   Déterminer si la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, est libre ou liée dans $\mathbb{R}^4$.

4. **Exercice : famille d'applications *sinus*.**
   (a) On considère la suite d'applications $\left(f_k\ \middle|\ \begin{array}{l}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sin(x)^k\end{array}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
   Pour n prenant les valeurs 0,1,2 et 3, montrer que la famille $\{f_0,f_1,\cdots,f_n\}$ est libre.

   (b) On considère la suite d'applications $\left(g_k\ \middle|\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sin(kx)\end{array}\right)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
   Pour n prenant les valeurs 1,2 et 3, montrer que la famille $\{g_1,\cdots,g_n\}$ est libre.

5. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^4$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   $$F = Vect((0,0,1,-1),(-1,1,-3,5)) \text{ et } G = Vect((3,-2,10,-16),(4,-7,-1,-7))$$
   (b) **Vrai-Faux** : pour tous vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 de $\mathbb{R}^4$, la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est génératrice de l'espace vectoriel $Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_3, u_4)$.
   (c) L'ensemble $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;/\;\; z = 0\right\}$ est-il un plan vectoriel ou une droite vectorielle ?
   (d) **Vrai-Faux** : pour toute famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ liée de $\mathbb{R}^4$, il existe un supplémentaire de $Vect(u_1, u_2, u_3)$ contenant u_4.

6. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) **Vrai-faux** : un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(-1,-1,1)$ est : $\left\{\begin{array}{rcl} -2x + y - z & = & 0 \\ 12x - 6y + 6z & = & 0 \end{array}\right.$.
   (b) Soient F et G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, d'équations cartésiennes respectives : $4x + 4y - z = 0$ et $12x + 12y - 3z = 0$.
   Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 4y - z & = & 0 \\ 12x + 12y - 3z & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes du sous-espace $F + G$?
   (c) Soit $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\;/\;\; 2x - y + z = 0\right\}$.
   Peut-on trouver u_1, u_2, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ tels que G et $Vect(u_1, u_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

7. **Exercice : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.**
   Les questions sont indépendantes. Justifier les réponses.
   (a) **Vrai-faux** : les composantes x, y, z, t des vecteurs de la droite vectorielle engendrée par $(-1,-4,1,1)$ vérifient le système : $z + x = y - 4x = 0$.
   (b) **Vrai-faux** : les sous-espaces vectoriels $F = Vect((2,-1,1,0),(-4,-5,7,1))$ et $G = Vect((9,4,-3,0),(-4,-2,2,0))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
   (c) L'ensemble $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\;/\;\; \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 2y - 2z + t & = & 0 \\ 8z + 8y - 8x & = & 0 \end{array}\right.\right\}$ est-il une droite vectorielle ? un plan vectoriel ? un hyperplan vectoriel [1] ?

1. Un hyperplan de de $\mathbb{R}^4$ est un s-e-v de dimension 3.

8. **Exercice : espace des matrices d'ordre 3.**
Les matrices qui interviennent dans le problème appartiennent à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Toute matrice M est notée :$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$.
La base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est notée $\mathscr{B} = (E_k)_{1\leq k\leq 9}$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matice M peut donc être décomposée de façon unique dans $\mathscr{B}$:

$$M = a.E_1 + b.E_2 + c.E_3 + k.E_4 + l.E_5 + m.E_6 + r.E_7 + s.E_8 + t.E_9.$$

(a) Matrices symétriques ou antisymétriques.
On note $\mathscr{S}$,le sous-espace vectoriel des matrices symétriques : $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^3)/{}^tM = M\right\}$.
On note $\mathscr{A}$,le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques : $\mathscr{A} = \left\{M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^3)/{}^tM = -M\right\}$.

i. Donner, sans justifier, un exemple d'élément de $\mathscr{S}$ puis un exemple d'élément de $\mathscr{A}$.
ii. Montrer que la famille,$\{E_1,\ E_2 + E_4,\ E_3 + E_7,\ E_5,\ E_6 + E_8,\ E_9\}$ est génératrice de $\mathscr{S}$.
iii. Sans faire de calcul, justifier que cette famille est libre.
iv. En procédant de façon analogue, donner, sans justifier, une base de $\mathscr{A}$.

(b) On considère l'application linéaire *trace*, notée *tr* et définie par : $tr \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix} & \mapsto & a+l+t \end{array}\right.$

On note $\mathscr{T}$,l'ensemble des matrices de trace nulle : $\mathscr{T} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})/a+l+t=0 \right\}$.

i. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
ii. Déterminer le rang du système $a + l + t = 0$ à résoudre dans $\mathbb{R}^9$. Déduire le rang d'une famille génératrice de $\mathscr{T}$.
iii. Le plan $\langle E_1 - E_5,\ E_9 - E_5\rangle$ est -il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{T}$?

(c) On note $\mathscr{V}$,la droite vectorielle de base $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Justifier que $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}$ et $\mathscr{V}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{S}$.

ii. Déterminer l'intersection de $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}$ et $\mathscr{V}$.

(d) Quelques propriétés de l'application linéaire *trace* dans $\mathscr{S}$.
i. La restriction de *tr* à $\mathscr{S}$,notée $tr_{|\mathscr{S}}$, est-elle injective ?

ii. La restriction de *tr* à $\mathscr{V}$,notée $tr_{|\mathscr{V}}$, est-elle injective ?

iii. Déterminer, $tr_{|\mathscr{S}}^{-1}(\{3\})$, c'est à dire l'ensemble des antécédents symétriques de 3 par $tr_{|\mathscr{S}}$.