Séries entières (3)

J. Ribault

17 mars 2017

Exemples

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^{p+1}}$ est développable en série entière sur $\left]-|a|\,,|a|\right[$ et :

$$\forall x \in \left]-|a|\,,|a|\right[, \quad \frac{1}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{a^{n+p+1}} \binom{n+p}{n} x^n$$

Ne pas apprendre ce résultat mais savoir le retrouver !

Proposition

Toute fonction rationnelle, n'admettant pas 0 pour pôle, est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence de son développement en série entière est égal au minimum des modules de ses pôles complexes.

Exemple

Ecrire le déveleppement en série entière de

$$f \;:\; x \longmapsto \frac{1}{x^2+x-6}$$

Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3,2\}$.

Soit F la fraction rationnelle : $F = \dfrac{1}{X^2+X-6} = \dfrac{1}{(X-2)(X+3)}$.

F admet pour pôles, dans $\mathbb{C}$, -3 et 2.

Donc $f : x \mapsto F(x)$ est développable en série entière sur $]-2,2[$.

Décomposition en éléments simples de F

On cherche α et β tels que :

$$\frac{1}{(X-2)(X+3)} = \frac{\alpha}{X-2} + \frac{\beta}{X+3}$$

$$\alpha = \left[(X-2)F\right]_{X=2} = \frac{1}{5}$$

$$\beta = \left[(X+3)F\right]_{X=-3} = \frac{-1}{5}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ f(x) = \boxed{\tfrac{1}{5}} \times \frac{1}{x-2} + \boxed{\tfrac{-1}{5}} \times \frac{1}{x+3}$$

DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-2,2[\,,\ \frac{x}{2} \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{x-2} &= \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} x^n
\end{aligned}$$

DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$

$$\forall x \in]-3,3[\,,\ \frac{-x}{3} \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-(\frac{-x}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n$$

CONCLUSION

f est donc développable en série entière et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-2,2[,\ f(x) &= \boxed{\frac{1}{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} x^n + \boxed{\frac{-1}{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5 \times 2^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{5 \times 3^{n+1}} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{5 \times 6^{n+1}} x^n
\end{aligned}$$