Documents et calculatrices non autorisés
La précision des raisonnements et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte dans la notation

Exercice 1
E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$

1. Soit $B \subset E$. Compléter :
$$B^{\perp} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x \in B^{\perp} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
2. Soient $f_1, f_2 \in E$ et $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$.
Montrer, uniquement en utilisant la définition de l'orthogonal d'un ensemble, que $F^{\perp} = \{f_1, f_2\}^{\perp}$.
3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
Soient u un vecteur non nul de E, $H = (\text{Vect}(u))^{\perp}$ et p la projection orthogonale sur H.
Soit $v \in E$. Déterminer une expression de $p(v)$ en fonction de v et de u.

Exercice 2
Soient $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que f est une projection orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F que vous préciserez.

Exercice 3
Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,1]$.
On considère l'application φ définie par :
$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 (fg + f'g').$$
Soient $g_1, g_2 \in E$ telles que $g_1 \,:\, x \mapsto e^x$ et $g_2 \,:\, x \mapsto e^{-x}$.
On considère les sous-espaces vectoriels F et G définis par :
$$F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}(g_1, g_2).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.

Dans la suite de l'exercice, on note ce produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on munit E de ce produit scalaire.

2. Soit $f \in E$. Montrer que :
$$(f|g_1) = ef(1) - f(0) \text{ et } (f|g_2) = -e^{-1}f(1) + f(0)$$
3. Montrer que $G^{\perp} = F$.
4. Soient p la projection orthogonale sur G et $h \in E$ telle que $h \,:\, x \mapsto 1$.
On va déterminer $p(h)$ par deux méthodes.
   (a) On note (a,b) le couple de coordonnées du vecteur $p(h)$ dans la base (g_1, g_2) de G.
      i. Montrer que le couple (a,b) est solution du système :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ea + e^{-1}b = 1 \end{cases}.$$
      ii. En déduire $p(h)$.
   (b) i. Montrer que la famille (g_1, g_2) est une famille orthogonale.
      ii. En déduire une base orthonormée de G.
      iii. Calculer $p(h)$.