Électromagnétisme

TD 5
Diélectriques

Introduction : À partir d'une configuration de N charges q_i positionnées aux endroits $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$, on peut calculer le *moment dipolaire électrique* :

$$\vec{\boldsymbol{p}} \triangleq \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \tag{1}$$

et dans le cas spécial d'un dipôle électrique, constitué de deux charges opposées, $\pm q$, séparées d'une distance d, on obtient :

$$\vec{\boldsymbol{p}} = qd\hat{\boldsymbol{u}}_{-\to+} \tag{2}$$

Dans la matière, on trouve des dipôles *permanents*, dus à une asymétrie de répartition de la charge (p.ex. dans une molécule comme celle de l'eau), ou *induits*, créés par un champ électrique extérieur qui déplace légèrement les charges (p.ex. le nuage d'électrons autour du noyau d'un atome). Dans ce deuxième cas, le moment dipolaire induit (effet) est proportionnel au champ électrique appliqué (cause)

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \alpha\vec{\boldsymbol{E}} \tag{3}$$

où α est la polarisabilité de l'atome.

Afin de passer d'une vue *microscopique* (niveau atome, molécule) à une vue *macroscopique* où les détails fins de la structure de la matière sont lissés, on considère dans ce qui suit que même les volumes les plus petits (voire élémentaires) contiennent à peu près quelques milliers de dipôles. On définit alors à chaque point de l'espace, dans un volume élémentaire, le vecteur de polarisation $\vec{\boldsymbol{P}}$ comme la densité volumique du moment dipolaire :

$$\vec{\boldsymbol{P}} \triangleq \lim_{\Delta\mathcal{V}\to 0} \frac{1}{\Delta\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{p}} \quad (\mathrm{C\,m^{-2}}) \tag{4}$$

où $\vec{\boldsymbol{p}}$ est le moment dipolaire dans le volume $\Delta\mathcal{V}$. Ce volume, même en devenant « infiniment » petit, reste dans une échelle macroscopique.

On peut démontrer que l'effet de la polarisation (induite ou permanente) de la matière, c'est-à-dire l'effet de la présence du vecteur $\vec{\boldsymbol{P}}$, est la création de *charges de polarisation*, « liées » à la matière : elles ne sont pas libres à se déplacer et on ne peut pas les contrôler directement. Ce sont des charges surfaciques, de densité

$$\rho_{s\ \mathrm{pol}} = \vec{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \quad (\mathrm{C\,m^{-2}}) \tag{5}$$

et des charges volumiques, de densité

$$\rho_{\mathrm{pol}} = -\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{P}} \quad (\mathrm{C\,m^{-3}}) \tag{6}$$

Ces charges, localisées à l'intérieur et sur la surface d'un objet polarisé, créent le potentiel et le champ électrostatique de celui-ci, comme n'importe quelles autres charges électriques qu'on a déjà examinées. À l'intérieur de l'objet, le potentiel et le champ qu'on obtient correspondent à une *valeur moyenne*, calculée sur un volume macroscopique autour de chaque point.

En appliquant la loi de Gauss (forme locale) dans un diélectrique, où $\rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{libres}}$ (ici ρ_{libres} se réfère aux charges qu'on peut contrôler librement, à ne pas confondre avec des charges libres à se déplacer dans un conducteur...), on arrive à définir un nouveau champ vectoriel, le déplacement (ou induction) électrique

$$\vec{\boldsymbol{D}} \triangleq \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}} \tag{7}$$

dont la divergence est donnée par une sorte de loi de Gauss faisant intervenir *uniquement* les charges libres :

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_{\text{libres}} \qquad \text{et} \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = Q_{\text{int libres}} \tag{8}$$

On peut donc appliquer toutes les techniques développées autour de la loi de Gauss pour calculer le champ $\vec{\boldsymbol{D}}$ à partir des charges libres du problème, en exploitant les symétries.

Dans une catégorie de milieux qu'on appelle linéaires, homogènes et isotropes (lhi), le vecteur de polarisation est proportionnel au champ électrique

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{\boldsymbol{E}} \tag{9}$$

où χ_e est la susceptibilité électrique. Par conséquent,

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{\boldsymbol{E}} \triangleq \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\boldsymbol{E}} \triangleq \epsilon \vec{\boldsymbol{E}} \tag{10}$$

où $\epsilon_r \triangleq 1 + \chi_e$ est la permittivité relative (ou constante diélectrique) du milieu et $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ sa permittivité.

La loi de Gauss du champ $\vec{\boldsymbol{D}}$ donne alors dans un milieu lhi

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{D}} = \operatorname{div}(\epsilon_0 \epsilon_r \vec{\boldsymbol{E}}) = \epsilon_0 \epsilon_r \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} = \rho_{\text{libres}} \longrightarrow \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\rho_{\text{libres}}}{\epsilon_0} \tag{11}$$

ce qui signifie que le champ électrique dans un milieu lhi devient ϵ_r fois plus petit que celui créé par les mêmes charges dans le vide. La polarisation de la matière a donc un effet d'« étouffement » du champ électrique, alors que dans le cas des conducteurs on a une annulation totale du champ électrique à l'intérieur, due au repositionnement des charges du conducteur.

L'expression de l'énergie électrostatique (TD 3, éq. 5) se généralise dans le cas des diélectriques lhi, le terme $\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ devenant $\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$:

$$\mathcal{U}_{\text{e}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \, \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{12}$$

Notions : dipôle électrique, moment dipolaire électrique, polarisabilité, vecteur de polarisation, vecteur de déplacement, charges liées à la matière, milieu linéaire homogène isotrope, permittivité relative, constante diélectrique.

5.1 Potentiel et champ électrique d'un dipôle

Un dipôle électrique est constitué de deux charges, $-q$ et $+q$, placées à $z = -d/2$ et $z = +d/2$, respectivement. On veut obtenir le potentiel et le champ électrique créés par ce dipôle au point d'observation (r, θ, ϕ), situé à une distance r très grande par rapport à d. On note r_+ (r_-) la distance entre le point d'observation et la charge positive (négative).

a. Écrire, par superposition, une première expression de $V(\vec{r})$.

b. Appliquer la loi des cosinus et exprimer r_+ et r_- en fonction de d, r et θ.

c. Comme $d/r \ll 1$, on peut ignorer les termes en $(d/r)^2$ devant les termes en d/r.

d. Utiliser l'approximation $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ (valide quand $x \ll 1$) et obtenir l'expression finale de $V(\vec{r})$ en fonction du moment dipolaire $\vec{p}$ (remarque : $\cos\theta = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r$).

e. Obtenir le champ électrique à partir du potentiel.

Résultat:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}}{r^2} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta)$$

5.2 Polarisabilité atomique : un modèle simple

On veut calculer la polarisabilité d'un atome, α, en se servant d'un modèle simple de celui-ci. On considère que le nucléus (l'ensemble des protons) constitue une charge ponctuelle Q_0, au centre de l'atome, et que l'ensemble des électrons peut être modélisé comme une sphère de rayon R_0 autour du nucléus, chargée de façon homogène et de charge totale $-Q_0$.

Sous l'influence d'un champ électrique externe $\vec{E}$, le centre de la sphère et la charge ponctuelle se déplacent dans des directions opposées, se séparant ainsi d'une distance d. Ce déplacement étant très petit, on peut considérer que la sphère représentant le nuage des électrons ne se déforme pas.

a. Que se passe-t-il à l'état d'équilibre ?

b. Exprimer la polarisabilité atomique α en fonction du volume de l'atome.

c. Selon un modèle simple, l'atome d'hydrogène est une sphère de rayon 0.5 Å (rayon de Bohr). Calculer α.

À titre d'exemple, voici quelques valeurs expérimentales de $\alpha/(4\pi\epsilon_0)$ en $10^{-30}\,\mathrm{m}^3$: H 0.667, He 0.205, Li 24.3, C 1.76, Na 24.1, K 43.4.

5.3 Force entre une charge et un atome

Une charge Q se trouve a une grande distance r d'un atome neutre, de polarisabilité α.

Obtenir une expression :

a. du moment dipolaire électrique $\vec{p}$ de l'atome.

b. de la force $\vec{F}_a$ exercée par l'atome sur la charge ponctuelle.

Résultat:

$$a.\ \vec{p} = \frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{u}_{q\to a} \qquad b.\ \vec{F}_a = 2\alpha\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^5}\hat{u}_{q\to a}$$

5.4 Charges de polarisation dans la matière neutre

On considère un volume $\mathcal{V}$ de matériau diélectrique neutre mais polarisé (vecteur de polarisation $\vec{\boldsymbol{P}}$). Montrer que malgré l'apparition de charges de polarisation (volumiques et surfaciques), le matériau reste neutre. (Penser à utiliser le théorème de la divergence dans les calculs.)

5.5 Une sphère uniformément polarisée

Une sphère de rayon R_0, centrée à l'origine, est polarisée de façon homogène. Le vecteur de polarisation est donné par $\vec{\boldsymbol{P}} = P\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$.

a. Obtenir l'expression des charges de polarisation (surfaciques et volumiques).

b. Calculer le potentiel à partir de ces charges.

c. Obtenir l'expression du champ électrique.

Remarque : le potentiel d'une sphère de rayon R_0, neutre à l'intérieur et $\rho_S(\vec{\boldsymbol{r}}) = a\cos\theta$ (où a une constante en ($\mathrm{C\,m^{-2}}$)) est donné par $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho_s r}{3\epsilon_0}$ à l'intérieur et $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho_s R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}$ à l'extérieur.

Résultat:
a. $\rho_{pol} = 0,\ \rho_{s\ pol}(r = R_0) = P\cos\theta,$
b. $V = \frac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta,\ r \le R_0\ ;\ V = \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R_0^3}{r^2}\cos\theta,\ r \ge R_0$
c. $E = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{\boldsymbol{P}},\ r \le R_0$; $E =$ *champ d'un dipôle à l'origine*, $\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \vec{\boldsymbol{P}},\ r \ge R_0.$

5.6 Couche diélectrique sur une sphère métallique chargée

Une sphère métallique de rayon R_a porte une charge totale de Q_0 et est entourée par une couche diélectrique (milieu lhi, permittivité ϵ) d'épaisseur $R_b - R_a$.
Calculer :

a. Le champ $\vec{\boldsymbol{D}}$ partout dans l'espace.

b. Le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ partout dans l'espace.

c. Le potentiel au centre de la sphère (référence à l'infini).

d. Les charges liées à la matière. Vérifier en appliquant la loi de Gauss (forme intégrale) sur le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$, les résultats obtenus à la question b.

e. L'énergie électrostatique.

Comparer les résultats avec ceux de la sphère sans diélectrique (ex. 4.2).

Résultat:
a. $\vec{\boldsymbol{D}} = \frac{Q_0}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}},\ r \ge R_a,$
b. $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}},\ R_a \le r \le R_b\ ;\ \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}},\ r \ge R_b,$
c. $V = \frac{Q_0}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0 R_b} + \frac{1}{\epsilon R_a} - \frac{1}{\epsilon R_b}\right),$
d. $\rho_{pol} = 0,\ \rho_{s\ pol}(r = R_b) = \frac{\epsilon_0\chi_e Q_0}{4\pi\epsilon R_b^2},\ \rho_{s\ pol}(r = R_a) = \frac{-\epsilon_0\chi_e Q_0}{4\pi\epsilon R_a^2},$
e. $\mathcal{U}_e = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0(1+\chi_e)}\left(\frac{1}{R_a} + \frac{\chi_e}{R_b}\right)$