n°8 p.23. **Corrigé : linéarité d'une application entre deux espaces euclidiens ?**
Soient E, F deux espaces euclidiens et $f : E \to F$ une application telle que :

$$\forall u, v \in E \ \ \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\| \text{ et } f(0) = 0$$

Il s'agit de montrer que f est linéaire.

(1) On dire que f est injective.En effet : soient $u, v \in E$ ayant la même image par f.
Montrons que u et v sont égaux.
$f(u) = f(v)$ donc $f(u) - f(v) = 0_E$
donc $\|f(u) - f(v)\| = 0$
donc $\|u - v\| = 0$ donc $u - v = 0_E$.

(2) On ignore si f est linéaire donc on ne peut pas utiliser le théorème du rang.

(3) On peut dire que f conserve la norme euclidienne. En effet : soit $u \in E$.
$\|f(u)\| = \|f(u) - f(0_E)\| = \|u - 0_E\| = \|u\|$.

(4) Montrons que f conserve le produit scalaire à l'aide d'une des identités de polarisation. Soient $u, v \in E$.

$$\begin{aligned}(f(u) \mid f(v)) &= \frac{1}{2}(\|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2) \\ &= (u \mid v).\end{aligned}$$

(5) $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si f vérifie :

$$\forall u, v \in E \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \star \underbrace{f(u+v) - f(u) - f(v) = 0_F}_{\text{linéarité additive}} \qquad \star \underbrace{f(\lambda.u) - \lambda.f(u) = 0_F}_{\text{linéarité multiplicative}}$$

Montrons la linéarité additive de f : $\forall u, v \in E \ \ \|f(u+v) - f(u) - f(v)\|^2 = 0$.
Soient $u, v \in E$.

$$\begin{aligned}\|f(u+v) - f(u) - f(v)\|^2 &= (f(u+v) - f(u) - f(v) \mid f(u+v) - f(u) - f(v)) \\ &= \|f(u+v)\|^2 + \|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 - 2(f(u+v) \mid f(u)) - 2(f(u+v) \mid f(v)) + 2(f(u) \mid f(v)) \\ &= \|u+v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u+v \mid u) - 2((u+v) \mid v) + 2(u \mid v) \\ &= \|u+v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u+v \mid u+v) + 2(u \mid v) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u+v\|^2 + 2(u \mid v) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(6) Il reste à montrer la linéarité multiplicative de f : $\forall u \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \|f(\lambda.u) - \lambda.f(u)\|^2 = 0$.
Soient $u \in E$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\|f(\lambda.u) - \lambda f(u)\|^2 &= (f(\lambda.u) - \lambda f(u) \mid f(\lambda.u) - \lambda f(u)). \\ &= \|f(\lambda.u)\|^2 + \lambda^2 \ \|f(u)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda.u) \mid f(u)). \\ &= \|\lambda.u\|^2 + \lambda^2 \ \|u\|^2 - 2\lambda(\lambda.u \mid u). \\ &= 0.\end{aligned}$$

Erratum § Définition 2.1.1
Axiome (4) d'un produit scalaire:

$$\phi \text{ est définie} \quad i.e.: \ \forall u \in E \qquad \phi(u,u) = 0 \ \Rightarrow u = 0_E$$