Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Consignes et recommandations.

Justifier les résultats de façon concise.

Soigner l'écriture.

Rédiger dans l'espace réservé en dessous de chaque question.

Chaque question apporte un point si elle est correctement traitée.

La calculatrice programmable et quelques stylos sont autorisés. Les feuilles de brouillon sont fournies.

Eteindre les téléphones cellulaires.

Restitution de cours : propriété d'une probabilité (4 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{E}, p)$, un espace probabilisé.

Dans $\mathcal{E}$, on note $(A_k)_{k \in \mathrm{IN}^*}$, une suite croissante d'événements.

On veut établir la propriété suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$

1. Montrer que la suite $\left(p(A_n)\right)_{n \in \mathrm{IN}*}$ converge vers un réel qu'on appellera λ.

2. Définir dans $\mathcal{E}$, une suite notée $(B_k)_{k \in \mathrm{IN}^*}$, d'événements disjoints deux à deux telle que, pour tout entier naturel n, $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

3. Justifier que : $\forall n \in \mathrm{IN}\backslash\{0\}, \quad p(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p(B_k)$.

4. Déduire la propriété annoncée.

Exercice 1: cas d'un univers fini (8 points).

Dans un commissariat, on procède à une confrontation entre quatre témoins et dix suspects.

Les suspects sont numérotés de 0 à 9.

Chaque témoin doit, indépendamment des autres, désigner une personne parmi les dix suspects.

Pour les questions suivantes, les expressions non calculées suffisent.

1) Déterminer le nombre de 4-uplets constituant les réponses des quatre témoins.

2) Déterminer le nombre de 4-uplets formés exactement avec deux 1 et un 3.

3) Déterminer le nombre de 4-uplets formés avec exactement deux numéros distincts.

4) Le nombre de 4-uplets tels que la somme des numéros est 10 est $\binom{13}{3} - 4$.
   Expliquer cette formule de dénombrement.

5) On suppose à présent que les témoins répondent de façon indépendante les uns des autres et au hasard. On pose $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et l'on considère l'ensemble $\Omega_0 = \{0, a\}$, univers de la réponse d'un témoin quelconque.
   a) Indiquer alors la probabilité, q, que le suspect n°0 soit désigné.

   b) Décrire l'univers, Ω, des réponses des quatre témoins.

c) On nomme X, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le suspect n°0 a été désigné après que les quatre témoins ont répondu. Donner la loi de X.

d) Un suspect est inculpé s'il est désigné au moins trois fois au cours de la confrontation. Quelle est la probabilité que le suspect n° 0 soit inculpé ?

Exercice 2: probabilité dans un univers fini (5 points).

Soit n, un entier strictement supérieur à 1. On considère l'application de division euclidienne par n :

$d_n \left| \begin{array}{l} \mathrm{IN} \to \mathrm{IN} \times [\![0, n-1]\!] \\ a \longmapsto (q, r) \end{array} \right.$ où q et r désignent respectivement le quotient et le reste euclidiens de a par n ;

1) a) Vérifier que d_n est bijective.

b) On considère la suite finie $(a_k)_{0 \le k \le n-1}$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $d_n(a_k) = (k, k)$.
Montrer que $(a_k)_{0 \le k \le n-1}$ est la suite des n premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier terme et la raison sont à préciser.

2) La suite des quotients des termes de la suite $(a_k)_{0 \le k \le n-1}$ est : (0, 1, 2, …, n-1).

Dans une urne opaque U$_r$, on place n boules sur lesquelles sont inscrits les restes des termes de la suite $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$.

On tire n fois de suite, sans remise, une boule dans l'urne U$_r$. On obtient une suite (r_k) .

On calcule alors l'entier antécédent par d_n du couple (k, r_k).

Ω désignant l'ensemble fini des suites (r_k) , on considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ où p est la probabilité associant à tout événement élémentaire $\frac{1}{n!}$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note A_k, l'événement : «*l'antécédent de* (k, r_k) *par* d_n *est* a_k. »

Déterminer la probabilité de A_k .

3) Déterminer la probabilité de l'événement $(A_0 \cup A_1 \cup A_2)$.

4) On admet que la probabilité qu'au moins un terme de la suite $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$ soit reconstitué après l'expérience aléatoire est $p\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{k!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$.
Montrer que cette probabilité admet une limite quand n tend vers +∞. Déterminer cette limite.

Exercice 3 : fonctions de répartition de variables aléatoires (5 points).

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$). On tire simultanément trois jetons au hasard.

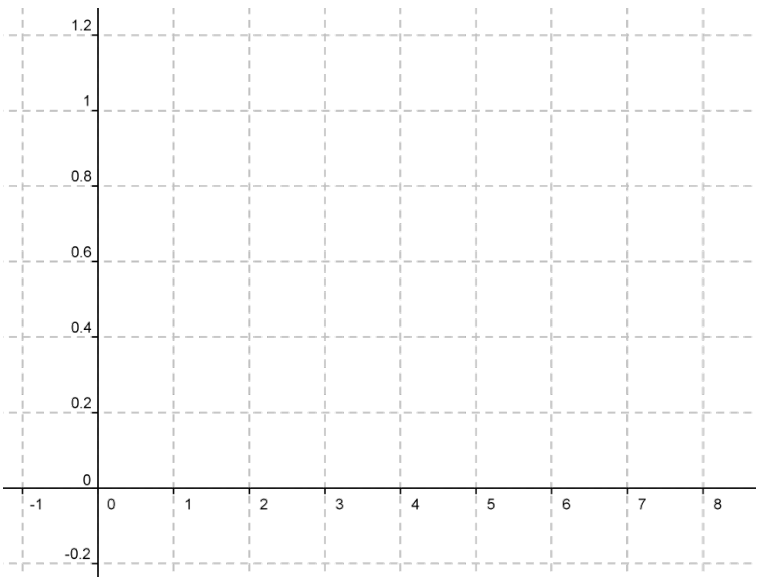
On appelle *X*, la variable aléatoire égale au plus grand des trois nombres lus sur les trois jetons.

On appelle *Y*, la variable aléatoire égale au nombre intermédiaire parmi les trois nombres lus sur les trois jetons.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

3) Dans le cas où n=5, représenter F, la fonction de répartition de X dans le dans le repère ci-dessous.



4) Dans le cas où n=5, on donne G, la fonction de répartition de Y : $G: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{10} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{10} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \end{array} \right.$.

Représenter G, la fonction de répartition de Y dans le dans le repère ci-dessus.

5) Dans le cas général ($n \geq 3$), les variables X et Y sont-elles indépendantes ?