Partie 5 : espace euclidien orienté, isométries.

N.Auxire

25 avril 2017

Définition

Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $(\mathbb{R}^n, (.\mid.))$

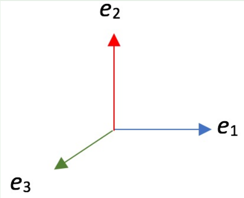
- ⋆ **Orienter** $\mathbb{R}^n$, c'est former le couple $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^n))$ tel que :

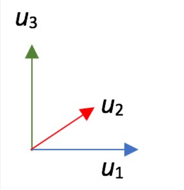
$$\forall \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}_0}(B) > 0$$

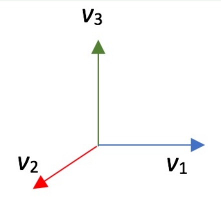
- ⋆ Si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ alors $\mathcal{B}$ est dite **base directe***i.e.* : orientée comme $\mathcal{B}_0$.
- ⋆ Si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ alors $\mathcal{B}$ est dite **base indirecte**.

Exemple

$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$







$$\det\left(Pass_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \text{ donc } \mathcal{B} \text{ directe.}$$

$$\det\left(Pass_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ donc } \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ d'orientation différente.}$$

Donc $\mathcal{B}'$ indirecte. **Vérification** : $\det\left(Pass_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

Définition

Soit $\mathcal{B} = (a, b, c)$ une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$.

(1) Le **produit vectoriel*** du couple (u_1, u_2) est le vecteur, noté $u_1 \wedge u_2$, tel que :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3 \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u) = (u_1 \wedge u_2 \mid u)}$$

(2) Notons $u_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $u_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Alors :

$$\boxed{u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} .a - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} .b + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} .c}$$

Exemple

Soient $u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

$$u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} .a - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} .b + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} .c$$

Définition

Soit $\mathcal{B} = (a, b, c)$ une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$. Soient $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$.

(1) Le **produit vectoriel*** du couple (u_1, u_2) est le vecteur, noté $u_1 \wedge u_2$, tel que :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3 \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u) = (u_1 \wedge u_2 \mid u)}$$

(2) Notons $u_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $u_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Alors :

$$\boxed{u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} .a - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} .b + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} .c}$$

Exemple

Soient $u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

$$u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} .a - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} .b + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} .c = -2.a + 2.b - 2.c$$

Théorème

Soient $\{u_1, u_2\}$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.

(1) $u_1 \wedge u_2$ *est unique.*

(2) $(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2)$ *est une base directe.*

(3) $u_1 \wedge u_2 \in Vect(u_1, u_2)^\perp$.

(4) $||u_1 \wedge u_2|| = ||u_1|| \, ||u_2|| \, |\sin(u_1, u_2)|$

(5) *Si* (u_1, u_2) *est o.n. alors* $(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2)$ *est une b.o.n. directe.*

Démonstration.

Posons : $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_1 \wedge u_2)$.

(1) $u_1 \wedge u_2$ **unique**. $\det_{\mathcal{B}}$ est une application.

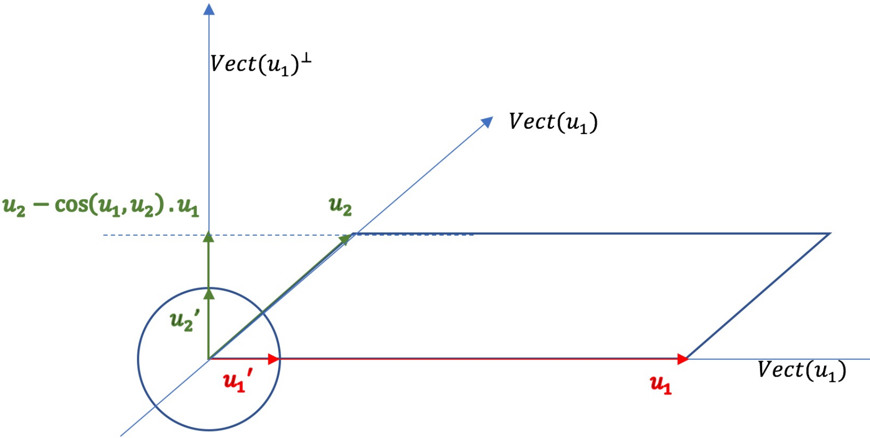
(2) $\det(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2) = \|u_1 \wedge u_2\|^2 > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est directe.}}$

(3) $(u_1 \wedge u_2 \mid u_1) = \det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_1) = 0$. De même : $(u_1 \wedge u_2 \mid u_2) = 0$.
Donc : $\boxed{u_1 \wedge u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)^{\perp}}$.

(4) Posons : $u_1 = \|u_1\|.u_1'$, $u_2 = \|u_2\|.u_2'$, $u_1 \wedge u_2 = \|u_1 \wedge u_2\|.u_3'$ avec
$\mathcal{B}'' = (u_1', u_2', u_3')$ base normée directe.
D'une part : $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2) = \|u_1 \wedge u_2\|^2$
D'autre part : $\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2) = \|u_1\| \, \|u_2\| \, \|u_1 \wedge u_2\| \times |\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}'')|$

$$\begin{aligned}
\left|\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}'')\right| &= \left|\det(u_1', {\color{red}u_2' - (u_2'|u'1).u_1'}, u_3')\right| \\
&= \left|\det(u_1', u_2' - \cos(u_1, u_2).u_1', u_3')\right| \text{ (det alterné et multilinéaire)} \\
&= |\sin(u_1, u_2)| \text{ donc : } \boxed{\|u_1 \wedge u_2\| = \|u_1\| \, \|u_2\| \, |\sin(u_1, u_2)|}
\end{aligned}$$

(5) Si (u_1, u_2) est o.n. alors $\|u_1 \wedge u_2\| = \|u_1\| \, \|u_2\|$et $\mathcal{B}'$ est b.o.n. directe.


$Vect(u_1)^\perp$
$Vect(u_1)$
$u_2 - \cos(u_1, u_2).u_1$
u_2
u_2'
u_1'
u_1
$Vect(u_1)$

Définition

Soit $(\mathbb{R}^n, (.\mid.))$. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

- ⋆ Si $(\mathbb{R}^n, (.\mid.))$ est orienté alors f est appelé **isométrie vectorielle***.
- ⋆ Si f transforme toute b.o.n. directe en une b.o.n. directe alors f est une **isométrie directe** ou positive*.
  On note : $f \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^n)$ ou bien $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$.
- ⋆ Sinon f est dite **indirecte** ou négative*.
  On note : $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^n)$ ou bien $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme

$\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ est sous-groupe commutatif de $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration.

On a déjà justifié $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ est sous-groupe de $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$.
Montrons que la multiplication est commutative sur $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$.
Soient A , $B \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$:
$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a^2 + b^2 = 1$ et $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (§ cours précédent).
$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \alpha^2 + \beta^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & -a\beta - b\alpha \\ b\alpha + a\beta & -b\beta + a\alpha \end{pmatrix} \\ &= BA \end{aligned}$$

□

Théorème

(1) *f est une isométrie directe de $\mathbb{R}^2$*

ssi : $\exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ a^2 + b^2 = 1 \quad et \quad \forall \mathcal{B}$ *b.o.n. directe* $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\star$ *f est **l'identité** si $a = 1$*

$\star$ *f est la **rotation** d'angle de mesure* $\begin{cases} \pm\pi/2 \ si \ b = \pm 1 \\ \arctan(b/a) \ si \ b \ de \ même \ signe \\ \arctan(b/a) + \pi \ si \ b \ de \ signe \ opposé \\ \pi \ si \ a = -1 \end{cases}$

(2) *f est une isométrie indirecte de $\mathbb{R}^2$*

ssi : $\forall \mathcal{B}$ *b.o.n. directe* $\exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ a^2 + b^2 = 1 \quad et \quad Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

ssi : $\exists \mathcal{B}_f$ *b.o.n. directe* $/ \ Mat_{\mathcal{B}_f}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\star$ *f est la **réflexion** par rapport* $\ker(f - id_{\mathbb{R}^2})$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la b.o.n. canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto \left(\dfrac{2x-y}{\sqrt{5}}, \dfrac{x+2y}{\sqrt{5}} \right) \end{array} \right.$$

(1) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

(2) $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)\right) = \dfrac{1}{5} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ donc $f \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$.

(3) $\mathrm{Inv}(f) = \{0\}$ (pas de valeur propre).

(4) Soit $\mathcal{B}$ une autre b.o.n. **directe**.

Donc $Q = Pass_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) Q \\ &= {}^tQ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) Q \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)\, {}^tQ Q \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) \end{aligned}$$

f est la rotation d'angle de mesure $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$$g \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto \left(\dfrac{2x+y}{\sqrt{5}}, \dfrac{x-2y}{\sqrt{5}} \right) \end{array} \right.$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

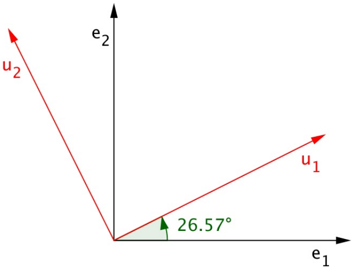
$\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g)\right) = \dfrac{1}{5} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(g) \notin \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ donc g isom. négative.

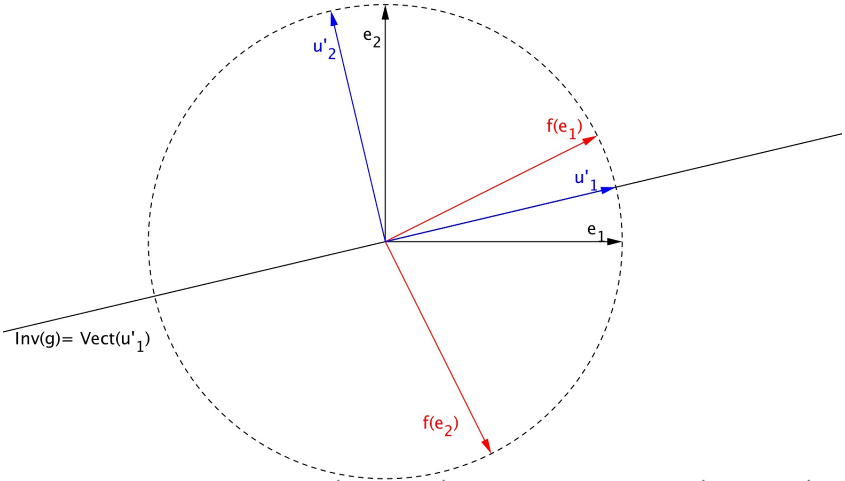
Déterminons $\mathrm{Inv}(g)$. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} u \in \ker(g - id_{\mathbb{R}^2}) &\Leftrightarrow \\ x - (2+\sqrt{5})y = 0 &\Leftrightarrow \\ u \in \mathrm{Vect}(u_1) / \ u_1 = (2+\sqrt{5}, 1) &\Leftrightarrow \\ u \in \mathrm{Vect}(u_1') / \ u_1' = \frac{1}{\|u_1\|}.u_1 & \end{aligned}$$

g est la réflexion par rapport $\mathrm{Vect}(u_1')$.



$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}(f) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(g) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{(u'_1,u'_2)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lemme

Soit $(\mathbb{R}^3, (. \mid .))$ orienté.
Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.
Il existe $\mathcal{B}$ une b.o.n. directe de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Démonstration.

Soit $\chi_f \in \mathbb{R}_3[X]$ le polynôme caractéristique de f et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
$\chi_f \in \mathbb{R}_3[X]$ a au moins une racine réelle λ (tvi sur fonction polynomiale).
Or f orthogonal donc $\lambda = \pm 1$. D'où les formes possibles de χ_f.
Par le th. CH et le fait que $M^{-1} = {}^tM$, on montre que $M \pm I_3$ ne peut pas être nilpotente d'indice 2 ou 3.On connaît donc les dimensions des espaces propres éventuels.

Forme de χ_f	$\dim(Inv(f))$	**Type de f**
$(X-1)^3$	3	$id_{\mathbb{R}^3}$
$(X-1)^2(X+1)$	2	réflexion par rapport à $Inv(f)$
$(X-1)[(X-a)^2+b^2]$ irréductible si $b \neq 0$	1	rotation* d'axe $Inv(f)$
$(X+1)^3$	0	$-id_{\mathbb{R}^3}$
$(X+1)^2(X-1)$	1	rotation d'axe $Inv(f)$
$(X+1)[(X-a)^2+b^2]$ irréductible si $b \neq 0$	0	anti-rotation** d'axe $Inv(-f)$

* : rotation d'axe orienté par un vecteur propre a associé à 1, base de $Inv(f)$.
** : anti-rotation i.e. : composée commutative d'une rotation d'axe orienté par a et de la symétrie orthogonale par rapport à $Inv(f)^{\perp}$. □

Théorème

Soit $r(\theta, u_1)$ la rotation de mesure d'angle θ et d'axe orienté par le vecteur unitaire u_1 dans $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{r(u) = (u \mid u_1)(1 - \cos(\theta)).u_1 + \cos(\theta).u + \sin(\theta).(u_1 \wedge u)}$$

- ⋆ On complète $\{u_1\}$ en une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ orthonormée directe.

$$u_3 = u_1 \wedge u_2$$

- ⋆ Soit u un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ décomposé dans $\mathcal{B}$:

$$u = (u \mid u_1).u_1 + (u \mid u_2).u_2 + (u \mid u_3).u_3$$

- ⋆ On déduit les coordonnées de $(u_1 \wedge u)$ dans $\mathcal{B}$:

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad u \begin{pmatrix} (u \mid u_1) \\ (u \mid u_2) \\ (u \mid u_3) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad u_1 \wedge u \begin{pmatrix} 0 \\ -(u \mid u_3) \\ (u \mid u_2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- ⋆ Par linéarité de r et avec $\mathrm{Vect}(u_1) = Inv(r)$:

$$r(u) = (u \mid u_1).u_1 + (u \mid u_2).r(u_2) + (u \mid u_3).r(u_3)$$

Notations usuelles dans les exemples.

- $\star$ $(.\mid .)$: produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$.
- $\star$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$: b.o.n. canonique de $\mathbb{R}^3$.
- $\star$ $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$: b.o.n. montrant les paramètres de f.
- $\star$ f : endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- $\star$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

2 types de questions.

f isométrie connue	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ connue
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$	Caractériser f

Exemple 1

f est la rotation d'axe orienté par $a = (1,2,2)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
Déterminons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

(1) $v_1 = \frac{1}{3}.(1,2,2)$ normalisé de a.

(2) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(u) = (u \mid v_1)(1-\cos(\theta)).v_1 + \cos(\theta).u + \sin(\theta).(v_1 \wedge u)$$

$$f(u) = \frac{x+2y+2z}{18}.(e_1 + 2.e_2 + 2.e_3) + \frac{1}{2}.(x.e_1 + y.e_2 + z.e_3) + \frac{\sqrt{3}}{6}.((2z-2y).e_1 + (2x-z).e_2 + (y-2x).e_3)$$

- ⋆ $f(e_1) = \frac{1}{18}.(e_1 + 2.e_2 + 2.e_3) + \frac{1}{2}.e_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}.(2.e_2 - 2.e_3)$
- ⋆ $f(e_2) = \frac{2}{18}.(e_1 + 2.e_2 + 2.e_3) + \frac{1}{2}.e_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}.(-2.e_1 + e_3)$
- ⋆ $f(e_3) = \frac{2}{18}.(e_1 + 2.e_2 + 2.e_3) + \frac{1}{2}.e_3 + \frac{\sqrt{3}}{6}.(2.e_1 - e_2)$

(3) On construit $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$**(à vérifier *a posteriori*).**

$$\boxed{A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) f est-il un endomorphisme orthogonal ?

(2) f est-il une isométrie positive ?

(3) Quelle est la dimension de $\mathrm{Inv}(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$?

(4) Caractériser f.

(5) Conclure.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) f est-il un endomorphisme orthogonal ?

i.e. : $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est-elle une famille orthonormée ?

Conservation de l'orthogonalité

$$(f(e_1) \mid f(e_2)) = 0$$

$$(f(e_2) \mid f(e_3)) = 0$$

$$(f(e_3) \mid f(e_1)) = \frac{12-12}{5} = 0$$

Conservation des normes

$$(f(e_1) \mid f(e_1)) = \frac{9+16}{25} = 1$$

$$(f(e_2) \mid f(e_2)) = \frac{25}{25} = 1$$

$$(f(e_3) \mid f(e_3)) = \frac{16+9}{25} = 1$$

Remarque : on peut aussi vérifier : ${}^tAA = I_3$.

(2) f est-il une isométrie positive ?

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{5^3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$\det_{\mathcal{B}}(f) = 1$ donc $f \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$.

f est distincte de l'identité. Donc f est une rotation.

(3) Quelle est la dimension de $\mathrm{Inv}(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$?

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et X sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$$u \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2z & = & 0 \\ -y + z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow u = z.(2, 1, 1)$$

Posons $u_1 = (2, 1, 1)$ vecteur qui oriente l'axe de f : $\mathrm{Vect}(u_1)$.

(4) Déterminer θ une mesure de l'angle de f.

Les matrices de f relatives à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont semblables :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)} = \underbrace{Pass_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}}_{\in\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})} \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{A} Pass_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

(4-a) En identifiant leur polynômes caractéristiques respectifs, en X^2 :

$$2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{tr}(A) = 3/5 \text{ donc } \boxed{\cos(\theta) = -1/5}$$

(4-b) Pour le signe de θ, on utilise le produit mixte appliqué à un vecteur quelconque hors de l'axe $\mathrm{Vect}(u_1)$, par exemple e_1.

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, e_1, f(e_1)) = (u_1 \wedge e_1 \mid f(e_1)) = (u_1 \wedge e_1 \mid \sin(\theta).(u_1 \wedge e_1)) = \sin(\theta) \|(u_1 \wedge e_1)\|^2$$

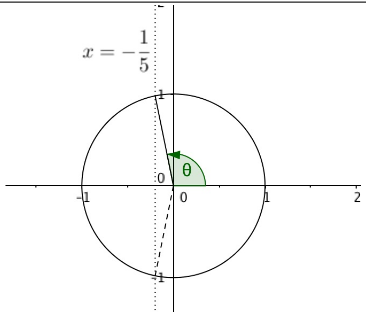
$$\text{A.N. : } \det_{\mathcal{B}}(u_1, e_1, f(e_1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4/5 > 0$$

Conclusion.

$$\text{Étant donné } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

f est la rotation

- ⋆ d'axe orienté par $u_1 = (2, 1, 1)$
- ⋆ de mesure d'angle $\mathrm{Acos}(-1/5)$



Exemple 3

Soit f la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}((-2,1,0),(-2,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) On complète $((-2,1,0),(-2,0,1))$ en une b.o.n. directe $\mathbb{R}^3$.

1^{er} vecteur	2^{e} vecteur	3^{e} vecteur
$(-2,1,0)$	$(-2,0,1)-\frac{4}{5}.(-2,1,0)$ $=\frac{1}{5}.(-2,-4,5)$	
$v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}.(-2,1,0)$	$v_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}.(-2,-4,5)$	$v_3=v_1\wedge v_2$ $=\frac{1}{3}.(1,2,2)$

$$\boxed{\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)}$$

(2) On construit $A\in\mathcal{O}_3(\mathbb{R})\setminus\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Méthode par calcul des $f(e_k)$

Méthode par changement de b.o.n.

Méthode par calcul des $f(e_k)$

Soit $u \in \mathbb{R}^3$

$$u = (u \mid v_1).v_1 + (u \mid v_2).v_2 + (u \mid v_3).v_3$$

$$f(u) = \underbrace{(u \mid v_1).v_1 + (u \mid v_2).v_2}_{\in \mathrm{Inv}(f)} - \underbrace{(u \mid v_3).v_3}_{\in \mathrm{Inv}(f)^{\perp}}$$

$$f(e_1) = \frac{1}{9}.(7, -4, -4)$$

$$f(e_2) = \frac{1}{9}.(-4, 1, -8)$$

$$f(e_3) = \frac{1}{9}.(-4, -8, 1)$$

Méthode par changement de b.o.n.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$$

$$Pass_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})}$$

$$A = Pass_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \ {}^t Pass_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie : $A^2 = A$ et $A =^t A$.

Exemple 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) f est-il un endomorphisme orthogonal ?

Conservation de l'orthogonalité

$$(f(e_1) \mid f(e_2)) = \frac{-4+2+2}{3} = 0$$

$$(f(e_2) \mid f(e_3)) = \frac{2+2-4}{3} = 0$$

$$(f(e_3) \mid f(e_1)) = 0$$

Conservation des normes

$$(f(e_1) \mid f(e_1)) = \frac{4+4+1}{9} = 1$$

$$(f(e_2) \mid f(e_2)) = \frac{4+1+4}{9} = 1$$

$$(f(e_3) \mid f(e_3)) = 1$$

(2) f est-il une isométrie positive ?

$$\det_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

f est donc soit une réflexion, soit une anti-rotation.

(3) Déterminons l'espace des invariants par f : $\mathrm{Inv}(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et X sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$$u \in \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y + z = 0$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport au plan d'équation } x + 2y + z = 0.}$

Posons :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \qquad v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$$

$$\boxed{\text{Dans la b.o.n. directe } \mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) : \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exemple 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) f est-il un endomorphisme orthogonal ? Vérifier : $f(\mathcal{B})$ est b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) f est-il un endomorphisme orthogonal ? Vérifier : $f(\mathcal{B})$ est b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.

$A\,{}^tA = I_3$.

(2) f est-il une isométrie positive ? Calculer puis interpréter $\det(A)$.

$$\det(A) = \frac{1}{(\sqrt{6})^3} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{(\sqrt{6})^3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc f est une réflexion ou une anti-rotation.

(3) Quelle est la dimension de $\mathrm{Inv}(f)$? Déterminer $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$.

On trouve : $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Donc f est une anti-rotation.

(4) Caractériser f.

Déterminer $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ b.o.n. directe telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s \circ r) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r \circ s)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \neq 0[\pi]$$

Il apparaît :

$\star$Vect(v_1)est l'unique espace propre associé à -1

$\star(v_1, \theta)$ caractérise la rotation $(-f)$.

(4) Caractériser $(-f)$.

$\star$ $\ker((-f) - id_{\mathbb{R}^3}) = \ker(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1, 1-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2})}_{u_1})$.

$\star$ u_1 oriente les axes de $(-f)$ et f.

$$\star \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(-A) \\ \\ \det(v_1, e_1, v_1 \wedge e_1) = \sin(\theta) \|v_1 \wedge e_1\|^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2\sqrt{6}} \\ \\ \sin(\theta) > 0 \end{array} \right.$$

(4) Conclusion : f est l'anti-rotation

$\star$ d'axe orienté par u_1

$\star$ de mesure d'angle $\theta = \underbrace{\mathrm{Acos}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2\sqrt{6}}\right)}_{\sim 42.7^\circ}$.