Corrigé de l'exercice 9 p.6.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

(a) Déterminer le nombre de couples $(A,\ B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $: A \subset B$.

Méthode 1 avec les ensembles.

Soit un couple $(A,\ B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que : $A \subset B$.

On peut partitionner B en fonction de A : $B = A \sqcup (B \setminus A)$ avec $(B \setminus A) \in \mathcal{P}(\overline{A})$.

Dénombrer les couples $(A,\ B)$ tels que $(A \subset B)$ équivaut à dénombrer les couples (A, X) tels que $X \in \mathcal{P}(\overline{A})$.

On cherche donc le cardinal de l'ensemble F tel que : $F = \{(A, X) \in \mathcal{P}(E)^2 / X \in \mathcal{P}(\overline{A})\}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Posons F_k tel que : $F_k = \{(A, X) \in F / \mathrm{card}(A) = k\}$.

On a :

$$F = \bigsqcup_{k=0}^{n} F_k$$

Donc :

$$\mathrm{card}(F) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(F_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

Méthode 2 avec les applications.

Soit un couple $(A,\ B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que : $A \subset B$.

La fonction indicatrice de B est : $f_B \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$.

Par construction, la restriction de f_B à A est constante égale à 1.

Dénombrer les couples $(A,\ B)$ tels que $(A \subset B)$ équivaut à dénombrer les couples (A, f_B).

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si $\mathrm{card}(A) = k$ alors une application f_B peut être notée par une $n-$liste dont les k premières composantes valent 1.

A étant fixée, il y a 2^{n-k} fonctions indicatrices valant 1 sur A. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir A et, par suite, $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ façons de choisir (A, f_B) ou encore (A, B). Donc il y a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

(b) Déterminer le nombre de couples $(A,\ B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $: A \cap B = \emptyset$.

Même analyse et même réponse qu'au (a).