Devoir surveillé n° 3/4

6 mars 2016

Nom . . . . Prénom . . . . Groupe de td. . .

Barème indicatif

— Elévation d'une matrice à une puissance entière : 10 points.

— Résolution d'une équation matricielle : 10 points.

Note finale : . . . . . . /20

POUR CE PREMIER EXERCICE, UTILISER UNE PREMIERE COPIE.

Exercice 1 : puissance matricielle

On donne la définition suivante de la puissance négative d'une matrice inversible :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \qquad M^n = (M^{-1})^{-n}}$$

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier que A est inversible puis calculer A^{-1}.

(2) Calculer A^3 et A^{-3}.

(3) On pose : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que N est nilpotente. Préciser son indice de nilpotence.

(b) Donner $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A = x \cdot I_2 + y \cdot N$.
En déduire, pour tout entier n strictement positif, une expression de la matrice A^n en fonction de I_2 et de N.

(b) Donner $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A^{-1} = x \cdot I_2 + y \cdot N$.
En déduire, pour tout entier n strictement négatif, une expression de A^n en fonction de I_2 et de N.

(4) Pour conclure : soit $n \in \mathbb{Z}$, expliciter les coefficients de A^n en fonction de n.

POUR CE SECOND EXERCICE, UTILISER UNE SECONDE COPIE.

Exercice 2 : équation matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $(\star)$: $A\,X - X\,A = 0_3$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(1) On nomme $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\star)$.

(a) Justifier que $\mathcal{S}$ est un ensemble infini.

(b) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire. Cela signifie qu'il faut montrer :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad M, N \in \mathcal{S} \Rightarrow (\lambda \cdot M + \mu \cdot N) \in \mathcal{S}$$

(2) On donne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P est inversible.
(b) Déterminer l'inverse de P.
(c) Calculer $P^{-1}\,A\,P$.

(3) Soient M une solution de $(\star)$ et $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une matrice telle que $M' = P^{-1}\,M\,P$.

(a) Déduire la matrice triangulaire supérieure T telle que :

$$AM - MA = 0_3 \Leftrightarrow TM' - M'T = 0_3.$$

(b) Résoudre alors l'équation matricielle $TM' - M'T = 0_3$. Pour cela, poser : $M' = \begin{pmatrix} a & i & p \\ b & j & q \\ c & k & r \end{pmatrix}$.

Préciser le nombre d'inconnues et le rang du système linéaire associé à cette équation.

(c) Déduire que M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2j & 2a-2j & -a+j+2q \\ -a+j & 2a-j & -a+j+q \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}.$$

(d) Déduire les matrices $X_1,\ X_2,\ X_3$ telles que :

$$\mathcal{S} = \{\ a \cdot X_1 +\ j \cdot X_2 +\ q \cdot X_3,\ \ a,\ j,\ q \in \mathbb{R}\}$$