Contrôle Rattrapage : 22 janvier 2014

Documents et appareils électroniques non autorisés - Durée 1h15

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f,
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ (justifier) ?

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Déterminer le (ou les) extremum(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.
On considère l'application $\|.\|\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'application définie par

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|u\| = \max(|x+y|, |x-2y|).$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité fermée (boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1.