Séries numériques (4)

J. Ribault

4 novembre 2016

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **alors** $\sum u_n$ est convergente.

- VRAI
- FAUX

QCM

Soient $M \in \mathbb{R}$ et $\sum u_n$ une série numérique.
Si $\sum u_n$ est divergente **alors** $\sum Mu_n$ est divergente.

- VRAI
- FAUX

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs telle que :

$$nu_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- $\sum u_n$ est convergente
- $\sum u_n$ est divergente
- On ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs telle que :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- $\sum u_n$ est convergente
- $\sum u_n$ est divergente
- On ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

QCM

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs telle que :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

- $\sum u_n$ est convergente
- $\sum u_n$ est divergente
- On ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

QCM

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^2} \text{ est}$$

- convergente
- divergente

QCM

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln n} \text{ est}$$

- convergente
- divergente

QCM

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ est}$$

- convergente
- divergente

QCM

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

- $u_n = \underset{+\infty}{O}(v_n)$.
- $\sum v_n$ est divergente

- $\sum u_n$ est convergente
- $\sum u_n$ est divergente
- on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$.

Séries numériques de références

- Séries géométriques
- Séries télescopiques
- Series de Riemann
- Séries de Riemann alternées
- Séries de Bertrand

Critères de convergence ou de divergence

- Critère grossier de divergence
- Critère spécial pour les séries alternées
- Critères de comparaison pour les séries à termes positifs
  - Comparaison à une intégrale
  - critère « $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ »
  - critère « $u_n = O(v_n)$ »
  - critère « $u_n \sim v_n$ »
  - critère « $n^\alpha u_n$ »
  - règle de Cauchy
  - règle de d'Alembert

Exercice

Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$, avec : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln n}$

On remarque que $\sum u_n$ n'est pas à termes de signe constant.

- $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs.
- $|u_n| = \dfrac{1}{(-1)^n + \ln n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}$.

La série $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 0 < 1$ (et $\beta = 1$),
elle est donc divergente.
On déduit du critère « $u_n \sim v_n$ » que $\sum |u_n|$ est divergente.
On en déduit que $\sum u_n$ n'est pas **absolument convergente**.

- $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ est une série alternée.
  La suite $(|u_n|)_{n\geqslant 3}$ n'est pas décroissante.
  On ne peut pas appliquer le critère des séries alternées.
- On peut faire un développement asymptotique de u_n et conclure...

Développement asymptotique de u_n avec un reste en « grand O »

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2\ ,\ u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\ln n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (1+x)^{-1} = 1 + \underset{0}{O}(x) \end{array}\right\} \text{ donc } \left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)^{-1} = 1 + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1+\underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n} + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)\end{aligned}$$

On remarque que $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 0 < 1$ (et $\beta = 2$).
Elle est donc divergente.
On ne peut donc pas conclure sur la nature de $\sum \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$.
Si on poursuit le DA avec un reste en « grand O », on obtient :

$$u_n = \ldots + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^k}\right)$$

Or, $\sum \frac{1}{(\ln n)^k}$ est divergente,

on ne peut donc pas conclure sur la nature de $\sum \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^k}\right)$.

Développement asymptotique de u_n avec un reste en « petit o »

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (1+x)^{-1} = 1 - x + \underset{0}{o}(x) \end{array}\right\} \text{ donc } \left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)^{-1} = 1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln n}}_{=v_n} - \underbrace{\frac{1}{(\ln n)^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)}_{=w_n} \end{aligned}$$

On a : $u_n = v_n - w_n$.

$\sum v_n$ est convergente :

- $\sum v_n$ est une série alternée
- $(|v_n|)$ est décroissante
- $|v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

On déduit du critère spécial sur les séries alternées que $\sum v_n$ est convergente.

$\sum w_n$ est divergente :

$w_n = \dfrac{1}{(\ln n)^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(\ln n)^2}\right)$, donc $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\ln n)^2}$.

$\sum \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ est une série à termes positifs.

On déduit du critère « $u_n \sim v_n$ » que

les séries $\sum w_n$ et $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ sont de même nature.

Or $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 0 < 1$ (et $\beta = 2$).

Elle est donc divergente.

Donc $\sum w_n$ est divergente.

CONCLUSION

- $u_n = v_n - w_n$ (au vois. de $+\infty$)
- $\sum v_n$ est convergente
- $\sum w_n$ est divergente

On en déduit que $\sum u_n$ est divergente.