

Robotique

PROJET : ETUDE ET COMMANDE D'UN ROBOT SCARA 2 AXES

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Modèle géométrique et cinématique | 2 |
| 2.1 | Modèle géométrique direct | 2 |
| 2.2 | Modèle géométrique inverse | 3 |
| 2.3 | Modèle cinématique direct | 4 |
| 2.4 | Modèle cinématique inverse | 4 |
| 2.5 | Suivi de trajectoire | 5 |
| 2.6 | Génération de mouvement | 6 |
| 3 | Modèle Dynamique | 7 |
| 4 | Commande | 8 |
| 4.1 | Commande linéaire Proportionnelle/Dérivée | 8 |
| 4.2 | Commande linéarisante | 9 |
| 4.3 | Ajout d'une masse m_c au niveau de l'organe terminal | 11 |
| 4.4 | Ajout d'une perturbation de couple | 13 |
| 5 | Conclusion | 13 |

1 Introduction

Nous réalisons dans ce projet l'étude analytique d'un robot Scara 2 axes (on ne considère que les 2 rotations). Les caractéristiques principales de ce robot sont données ci-dessous :

- deux bras (considérés comme des tiges) : $L_1 = 0.5m$, $L_2 = 0.4m$, $m_1 = 5kg$ et $m_2 = 4kg$
- deux moteurs GR80X80, de constante de temps électromécanique de 11.5 ms, d'inertie de rotation $J = 3200gcm^2$
- deux étages de réduction de rapport $n_1 = n_2 = 100$
- des butées utilisées tout au long du projet : θ_1 compris entre 0 et 270° et θ_2 compris entre -90° et 90°



FIGURE 1: Système étudié : Robot Scara

Nous verrons ainsi dans un premier temps la mise en équation des modèles géométrique, cinématique et dynamique du robot, via les variables articulaires et opérationnelles données dans l'énoncé. Nous pourrions alors visualiser les différents espaces de travail (suivant les butées proposées) et trajectoires souhaitées grâce au script *visualisation-trame* et toutes les fonctions mis à disposition. Nous pourrions également mettre en évidence certaines singularités de trajectoires et les contourner.

Dans un second temps, nous étudierons la commande de ce robot, via correcteur Proportionnel Dérivée et correcteur à commande linéarisante, afin de corriger les divergences et erreurs permanentes de trajectoires.

2 Modèle géométrique et cinématique

2.1 Modèle géométrique direct

Nous allons tout d'abord exprimer le modèle géométrique direct du robot. Pour cela, on cherche d'abord les paramètres de Denavit-Hartenberg.

| i | α_{i-1} | a_{i-1} | θ_i | d_i |
|---|----------------|-----------|------------|-------|
| 1 | 0 | L_1 | θ_1 | 0 |
| 2 | 0 | L_2 | θ_2 | 0 |

FIGURE 2: Tableau des paramètres de Denavit Hartenberg

On utilise la matrice de transformation homogène suivante deux fois :

$$T_j^{j-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & a_{j-1} \\ \cos(\alpha_{j-1})\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_{j-1})\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_{j-1}) & -d_j\sin(\alpha_{j-1}) \\ \sin(\alpha_{j-1})\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_{j-1})\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_{j-1}) & d_j\cos(\alpha_{j-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

On obtient alors la matrice de changement de repère entre les repères 2 et 0, telle que :

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{12}) & -\sin(\theta_{12}) & 0 & L_2\cos(\theta_{12}) + L_1\cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_{12}) & \sin(\theta_{12}) & 0 & L_2\sin(\theta_{12}) + L_1\sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Le modèle géométrique direct est ainsi donné par :

$$\begin{cases} x = L_2\cos(\theta_{12}) + L_1\cos(\theta_1) \\ y = L_2\sin(\theta_{12}) + L_1\sin(\theta_1) \end{cases}$$

Grâce à ce modèle, nous pouvons tracer l'espace atteignable du robot, en parcourant les bornes des variables articulaires q_1 et q_2 :

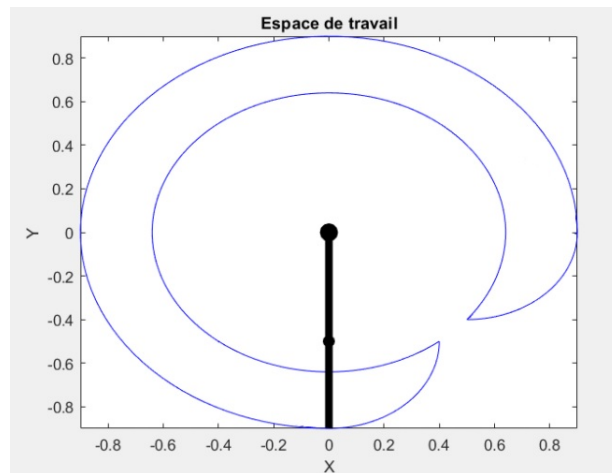


FIGURE 3: Espace atteignable de l'organe terminal du robot

2.2 Modèle géométrique inverse

On cherche maintenant à déterminer le modèle géométrique inverse pour obtenir l'expression des variables articulaires (θ_1, θ_2) en fonction des variables opérationnelles (x y) :

$$(1)^2 + (2)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2\cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

$$\sin(\theta_2) = \pm\sqrt{1 - \cos(\theta_2)^2}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{k_1x + k_2y}{2k_1k_2}$$

$$\begin{cases} k_1 = L_1 + L_2\cos(\theta_2) \\ k_2 = L_2\sin(\theta_2) \end{cases}$$

$$\sin(\theta_1) = \pm\sqrt{1 - \cos(\theta_1)^2}$$

On trouve θ_1 et θ_2 en utilisant la fonction *atan2*. En ce qui concerne l'existence de la solution, il est nécessaire que les coordonnées généralisées (x,y) prises comme cible soient comprises dans l'espace atteignable du robot sinon il n'y aura aucune solution. De plus pour certaines coordonnées généralisées la position est atteignable de plusieurs façons différentes.

Pour tracer une trajectoire en cercle de l'organe terminal on écrit tout d'abord l'équation paramétrique d'un cercle contenu dans notre espace de travail. Comme exemple nous avons choisi un cercle de rayon 0,7 centré en (0,0)

$$\begin{cases} x(t) = 0,7\cos(t) \\ y(t) = 0,7\sin(t) \end{cases}$$

Grâce au modèle géométrique inverse on retrouve les valeurs des variables articulaires correspondantes pour réaliser cette trajectoire. On remarque sur la figure suivante que les positions sont continues pour tracer le cercle demandé ce qui a du sens puisque la valeur de θ_2 est constante car le rayon est constant et θ_1 varie linéairement pour compléter l'arc de cercle demandé.

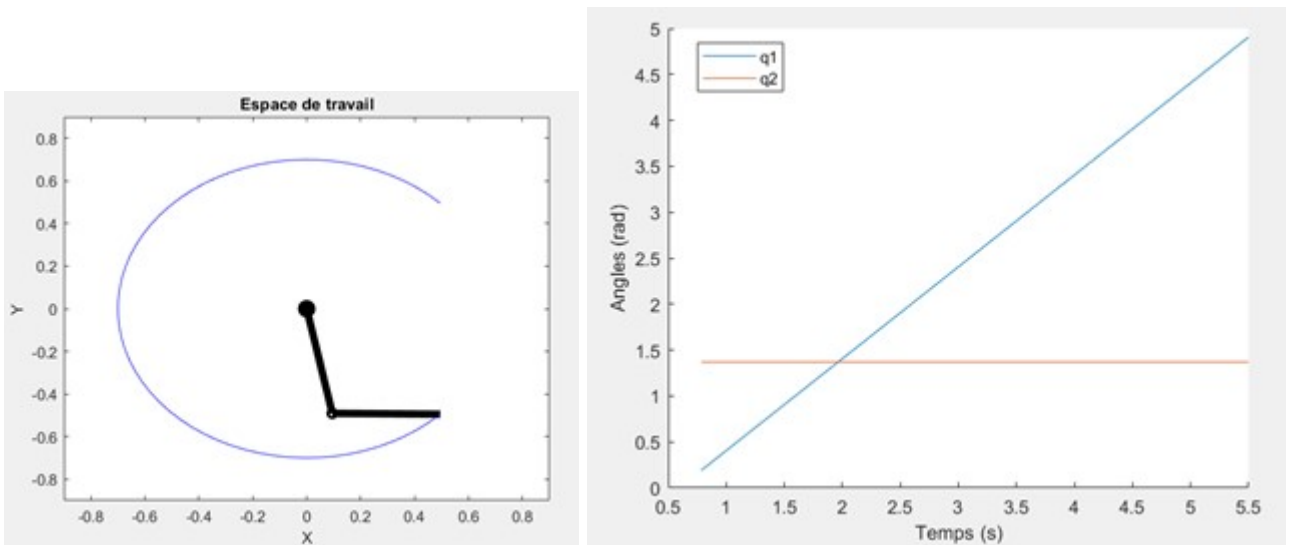


FIGURE 4: Analyse de la trajectoire en cercle

De la même manière pour réaliser une trajectoire rectiligne on écrit d'abord analytiquement l'équation paramétrique d'une droite. Par exemple la droite suivante :

$$\begin{cases} x(t) = 0,7t - 0,6 \\ y(t) = 0,6t \end{cases}$$

Puis on utilise à nouveau le modèle géométrique inverse pour obtenir les valeurs des variables articulaires pour tracer la trajectoire

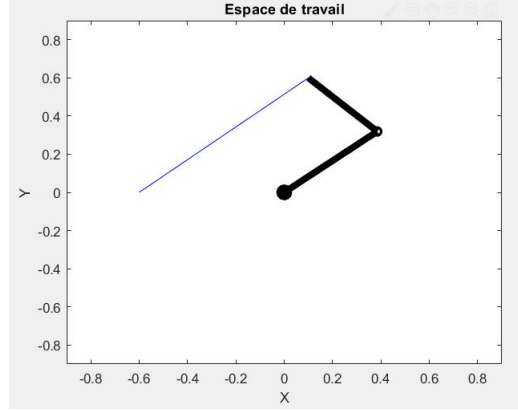


FIGURE 5: Trajectoire linéaire

2.3 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct exprime les vitesses des variables opérationnelles en fonction des vitesses des variables articulaires tel que $\dot{X} = J(q)\dot{q}$.

Pour obtenir le modèle cinématique direct on dérive le modèle géométrique direct. La matrice Jacobienne est donc donnée par les dérivées partielles successives par rapport aux variables articulaires :

$$\begin{cases} x = L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos(\theta_1) \\ y = L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin(\theta_1) \end{cases}$$

$$J(q) = \begin{pmatrix} -L_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.4 Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse exprime les vitesses articulaires en fonction de celles des coordonnées opérationnelles. Dans le cas régulier on le trouve en calculant l'inverse de la matrice Jacobienne $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X}$

Pour une matrice jacobienne carrée telle que trouvée précédemment, il est souhaitable d'étudier son rang et son déterminant, afin de mettre en évidence les éventuels points de singularité.

$$\det(J) = L_1 L_2 \sin(\theta_2)$$

$$\det(J) = 0 \rightarrow L_1 L_2 \sin(\theta_2) = 0 \rightarrow \theta_2 = 0[k\pi], k \in \mathbb{Z}$$

Nous avons donc des singularités aux valeurs de $\theta_2 = 0$ et π ainsi que leurs multiples. Cela signifie que si lors d'une trajectoire θ_2 s'approche de ces valeurs la vitesse articulaire tendra vers l'infini. Il faut donc les éviter.

2.5 Suivi de trajectoire

L'objectif est de suivre la trajectoire suivante :

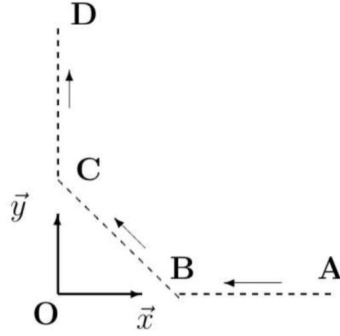


FIGURE 6: Trajectoire à suivre

Nous calculons dans un premier temps le nouvel espace de travail disponible, après modification des butées articulaires.

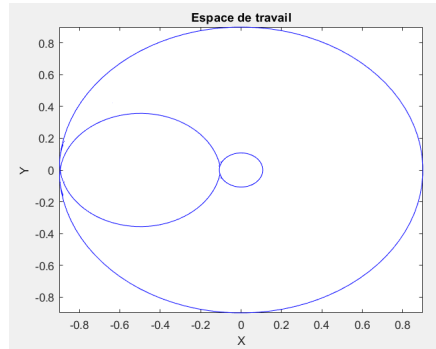


FIGURE 7: Nouvel espace de travail

Nous calculons les coordonnées opérationnelles des points de la trajectoire, par le modèle géométrique direct. Les coordonnées opérationnelles nous donnent des segments AB et CD non parallèles successivement à Ox et Oy. Il est donc nécessaire de modifier les coordonnées des points B et C afin d'éviter de sortir de l'espace de travail et de respecter l'asservissement en vitesse (c'est à dire une vitesse de norme 1 dirigée seulement sur x le long de AB et sur y le long de CD). Nous vérifions aussi que les points obtenus évitent les points de singularité, caractérisés par un angle θ_2 nul (pour les butées actuelles). Nous calculons les variables articulaires sur notre nouvelle trajectoire via le modèle géométrique inverse, ce qui nous permet donc d'obtenir les vitesses articulaires grâce à la relation du modèle cinématique inverse : $\dot{q} = J^{-1} \dot{X}$

Nous imposons donc les nouvelles coordonnées suivantes :

- $x'_B = 0.15$ et $y'_B = y_A$
- $x'_C = x_D$ et $y'_C = 0.15$

Nous pouvons alors tracer l'évolution des vitesses articulaires grâce au modèle cinématique inverse. Il est donc nécessaire de calculer l'inverse de la matrice jacobienne en fonction des variables articulaires.

$$J^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)} \begin{pmatrix} L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - L_1 \cos(\theta_1) & L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - L_1 \sin(\theta_1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

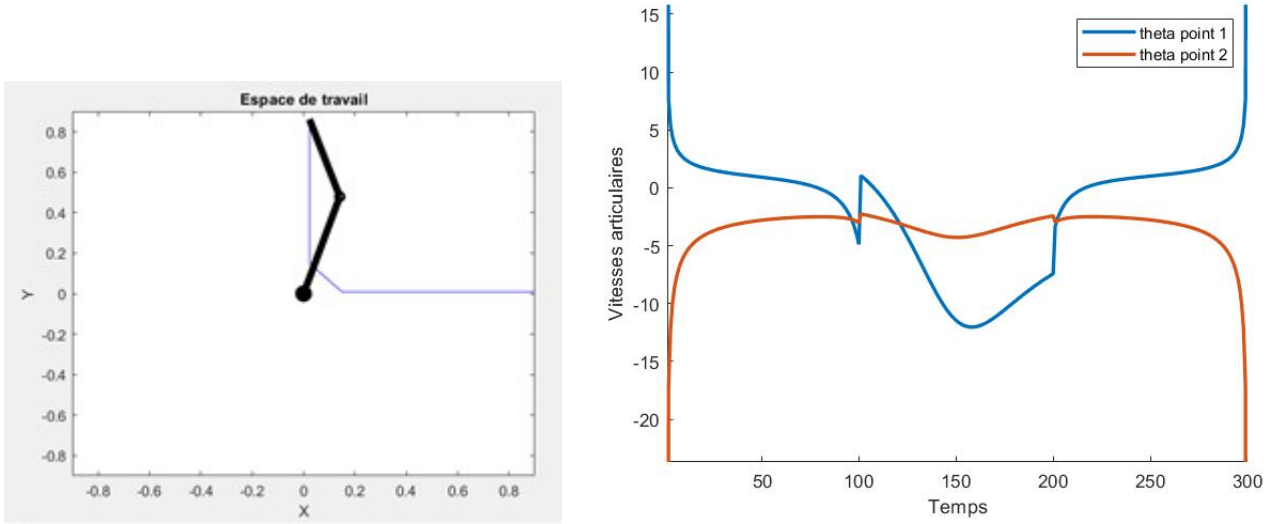


FIGURE 8: Trajectoire et vitesses articulaires associées

2.6 Génération de mouvement

Nous cherchons maintenant à suivre une trajectoire qui fait un aller et retour avec un temps de pause intermédiaire. Pour ce faire on définit un point de départ A ($q1(t_0) = 100^\circ$, $q2(t_0) = 50^\circ$) et un point d'arrivée B ($q1(t_f) = -20^\circ$, $q2(t_f) = 60^\circ$) ainsi que le temps de trajet $t_1 = 1s$ et de pause $t_2 - t_1 = 0,5s$. Les vitesses et accélérations initiales et finales sont nulles et les positions et vitesses doivent être continues.

Afin de respecter tous ces critères nous utilisons la méthode d'interpolation cubique qui permet de réaliser cette trajectoire en résolvant le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nous obtenons donc les coefficients (a_0, a_1, a_2, a_3) qui nous permettent de mettre en oeuvre la consigne des articulations 1 et 2 :

$$q_i^d(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (6)$$

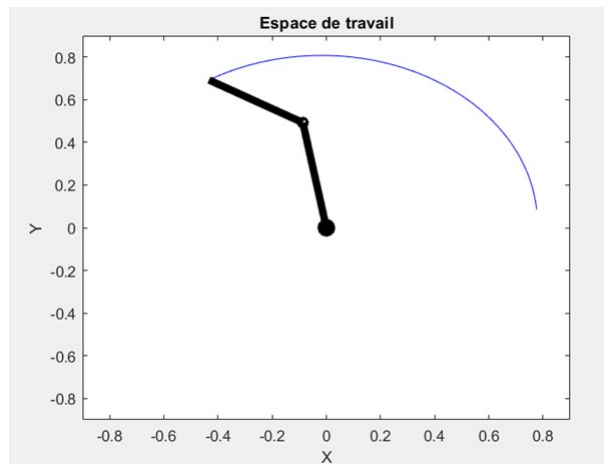


FIGURE 9: Génération de mouvement aller et retour par interpolation cubique

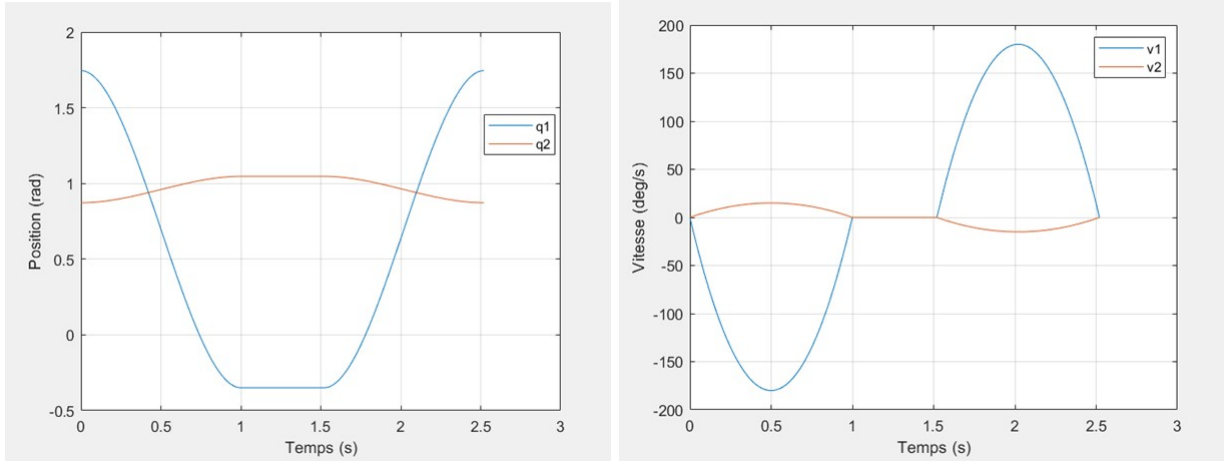


FIGURE 10: Analyse du mouvement d'aller et retour

Sur la figure 10, on vérifie bien que les conditions de positions et vitesses continues sont respectées.

3 Modèle Dynamique

On cherche maintenant à écrire le modèle dynamique direct du robot suivant :

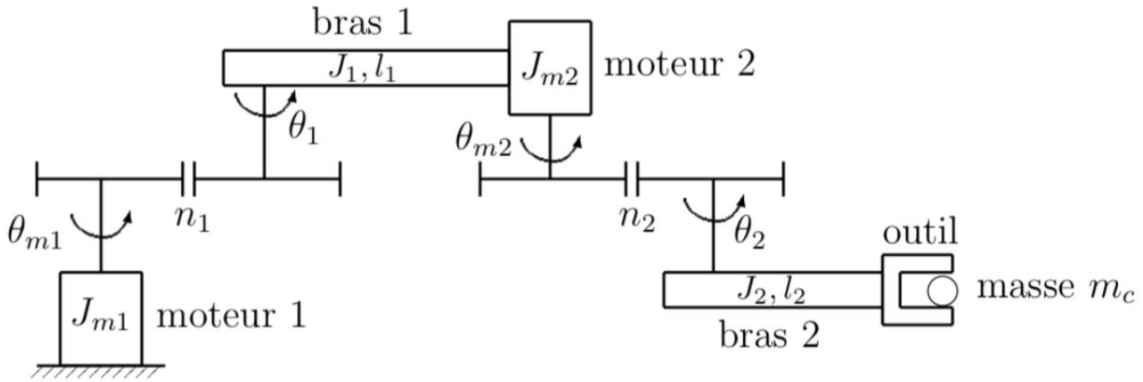


FIGURE 11: Schéma de fonctionnement - Modèle dynamique

Nous utilisons le formalisme de Lagrange qui repose sur le calcul de l'énergie pour déterminer ce modèle en fixant $m_c = 0$. On commence par l'énergie cinétique :

$$k_{m1} = \frac{1}{2} J_{m1} \dot{\theta}_{m1}^2 \quad (7)$$

$$k_{m2} = \frac{1}{2} J_{m2} \dot{\theta}_{m2}^2 \quad (8)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^T \vec{v}_1 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 \vec{z}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{l_1^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{l_1^2}{6} \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 \vec{z}) = \frac{5}{24} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (9)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^T \vec{v}_2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \frac{l_2^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \frac{l_2^2}{6} \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) \quad (10)$$

Étant donné que le robot est plan, il n'y a pas d'énergie potentielle à considérer. On obtient le modèle dynamique inverse avec la formule suivante :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial k}{\partial q} \quad (11)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial k_2}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} ; \quad \frac{\partial k_{mot}}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial k_{mot}}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{J_{m1}}{n_1} \ddot{\theta}_1 \\ \frac{J_{m2}}{n_2} \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k_1}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial k_2}{\partial \dot{q}} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + m_2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Après le calcul des dérivées partielles on peut réécrire les équations obtenues sous forme de système matriciel suivant qui représente aussi le modèle dynamique indirect :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) \quad (14)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \frac{J_{m1}}{n_1} + \frac{5}{12} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) & m_2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) \\ m_2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) & \frac{J_{m2}}{n_2} + m_2 (l_1^2 + \frac{5}{12} l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2)) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$et \quad H = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -\frac{m_2}{2} l_1 l_2 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

4 Commande

Le but de cette partie est de comparer plusieurs lois de commande. Nous allons commencer par construire le modèle dynamique de notre robot sur Simulink. Pour ce faire, nous utilisons le modèle dynamique direct défini par :

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(\Gamma - H(q, \dot{q})) \quad (17)$$

Bien évidemment, sans correction, les variables articulaires tendent à diverger puisqu'on ne fait qu'ajouter en entrée des couples constants.

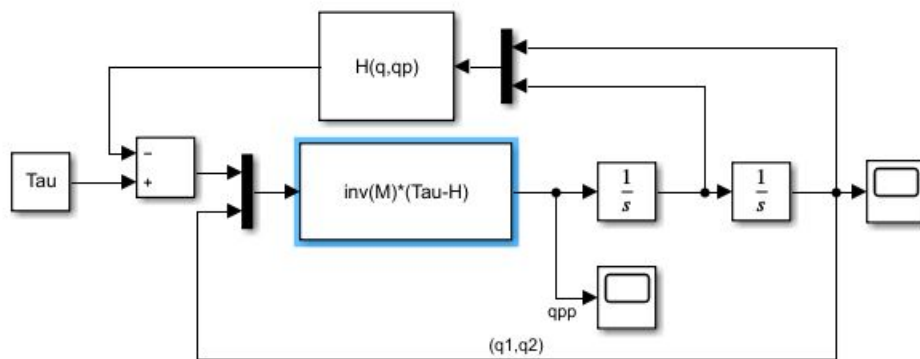


FIGURE 12: Modèle dynamique du robot Scara

4.1 Commande linéaire Proportionnelle/Dérivée

Nous ajoutons ensuite une loi de commande linéaire proportionnelle/dérivée afin de répondre au cahier des charges. Le correcteur proportionnel permet de stabiliser le système, d'augmenter la vitesse et de réduire l'erreur. On ajoute à cela un correcteur dérivé pour diminuer les oscillations. Le critère principal de rapidité va être limité par la constante de temps électromécanique des moteurs du robot de 11,5 ms. Nous donnons en entrée la position

ainsi que les vitesses souhaitées : par exemple la trajectoire linéaire déterminée précédemment (paragraphe 2.2). Et nous appliquons des gains $K_p=[1e3, 1e3]$ et $K_d=[20, 20]$ afin de respecter au mieux le cahier des charges (suivi le plus rapide et oscillations les plus petites possibles). L'équation de la commande est :

$$\Gamma(t) = K_P(q^s(t) - q(t)) + K_D(\dot{q}^s(t) - \dot{q}(t)) \quad (18)$$

Ce qui correspond au schéma Simulink suivant :

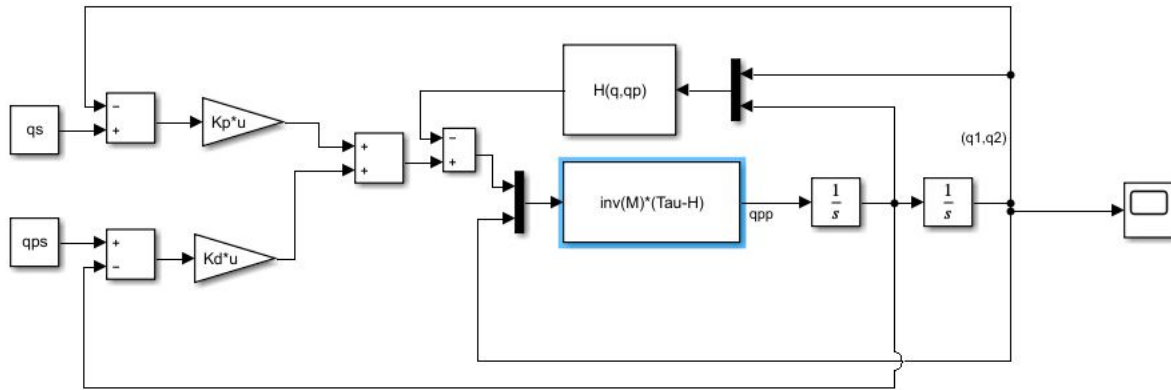


FIGURE 13: Commande linéaire Proportionnelle/Dérivée

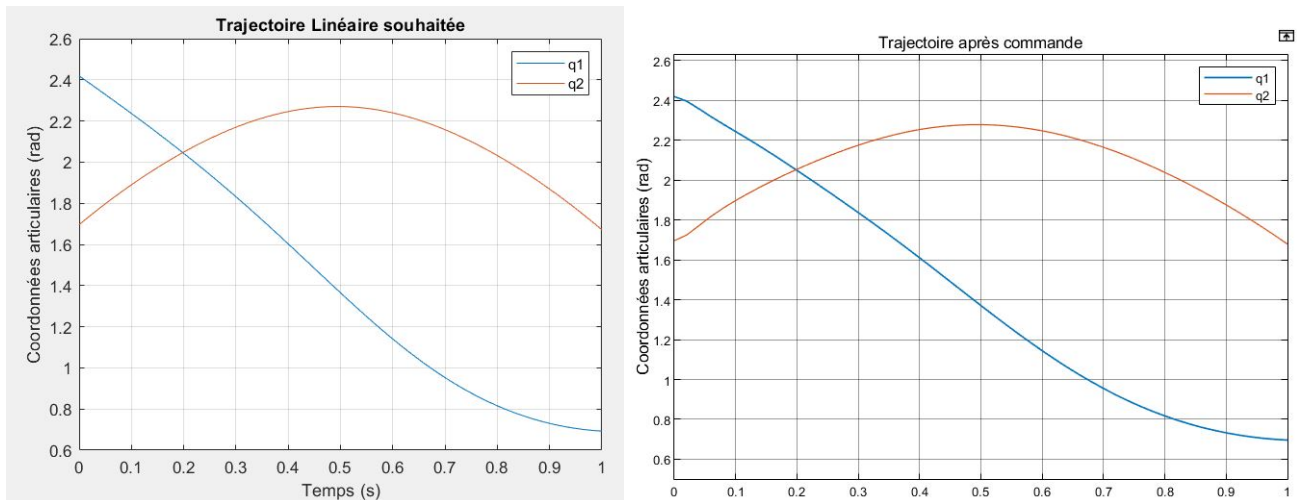


FIGURE 14: Trajectoire souhaitée à gauche - Résultats de la commande à droite

Sur la figure 14 on peut voir que la commande P/D est efficace puisque la trajectoire obtenue est identique à celle souhaitée.

4.2 Commande linéarisante

Nous souhaitons comparer la commande Proportionnelle/Dérivée à une autre loi de commande non linéaire cette fois : une commande linéarisante. Cette commande consiste à imposer une dynamique sur l'erreur e (erreur par rapport à une trajectoire de référence). Cette dynamique est donnée par l'équation :

$$\ddot{e} = [M(q)]^{-1}(\Gamma - H(q, \dot{q})) - \ddot{q}_{ref} \quad \text{et} \quad \ddot{e} = S\dot{e} - Pe \quad (19)$$

En inversant cette équation pour retrouver l'entrée de commande, il vient :

$$\Gamma = [M(q)](\ddot{e} + \ddot{q}_{ref}) + H(q, \dot{q}) \quad (20)$$

Nous pouvons ainsi régler \ddot{e} afin d'assurer la stabilité et les performances de suivi de trajectoire en jouant sur les gains S et P. Nous donnons en entrée de notre système les mêmes vecteurs q_s et q_{ps} que précédemment afin de pouvoir comparer les deux lois de commande et nous réglons les gains à $S=[1e2, 1e2]$ et $P=[1e2, 1e2]$ afin de répondre au même cahier des charges et suivre la même trajectoire. Pour simplifier la représentation, nous prenons une consigne d'accélération des variables articulaires nulle.

Nous obtenons alors bien la trajectoire souhaitée via la commande :

$X=visualisation(out.commandelin(:,2)',out.commandelin(:,3)',t1);$

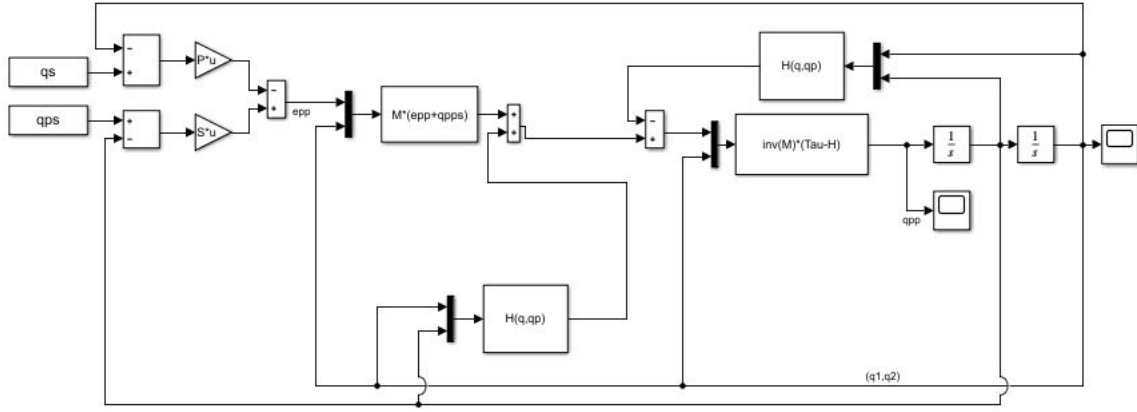


FIGURE 15: Commande linéarisante

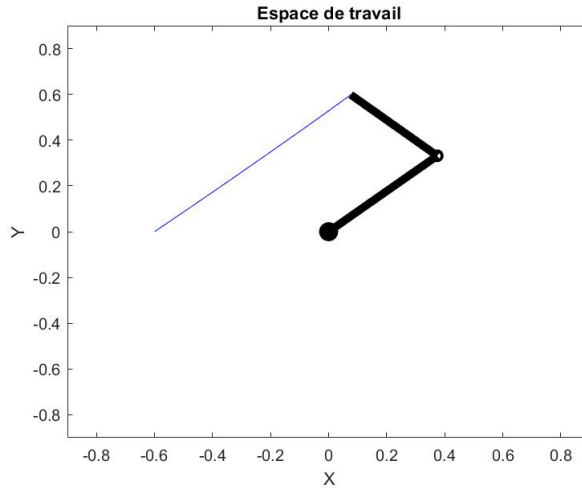


FIGURE 16: Trajectoire obtenue

Nous allons maintenant tester notre loi de commande P/D pour faire réaliser à notre robot une trajectoire en cercle de centre $(0,7;0)$ et de rayon 0,05. De la même manière que dans le paragraphe 2.2 on écrit d'abord notre système d'équations paramétriques dans l'espace opérationnel :

$$\begin{cases} x(t) = 0,7 + 0,05\cos(t) \\ y(t) = 0,05\sin(t) \end{cases}$$

Puis on utilise le modèle géométrique inverse pour construire le vecteur contenant la trajectoire souhaitée q_s . Nous avons aussi besoin de donner en entrée de notre correcteur la vitesse souhaitée q_{ps} . Elle est obtenue grâce au modèle

cinématique inverse. Enfin on règle les gains pour se rapprocher au plus de la trajectoire souhaitée ici $K_p = \text{diag}([110, 110])$ et $K_d = \text{diag}([2, 2])$

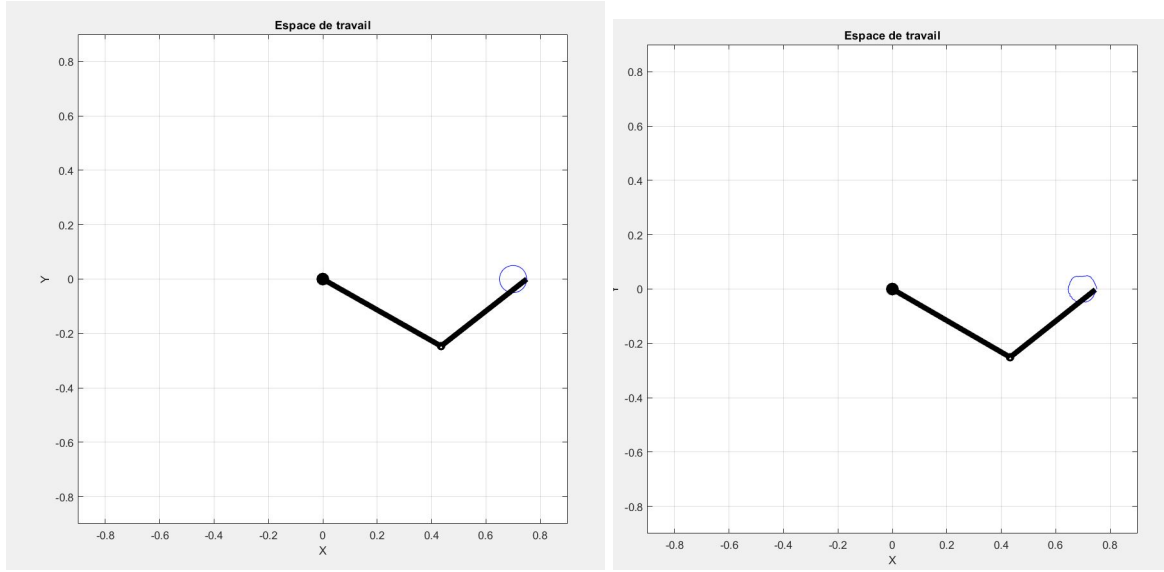


FIGURE 17: Trajectoire souhaitée à gauche - Résultats de la commande à droite

On remarque que la trajectoire ne dessine pas un cercle parfait, cela est sûrement dû au fait que la commande P/D n'est pas la plus efficace pour réaliser ce genre de correcteur. Nous avons essayé de comprendre pourquoi la trajectoire rectiligne était parfaitement suivie et pas celle en cercle et nous avons trouvé plusieurs explications possibles : tout d'abord la trajectoire souhaitée pour le cercle est très petite afin de rester dans l'espace de travail donc il faut beaucoup plus de précision et les gains maximum applicables sont plus petits car si on les augmente plus le modèle diverge.

4.3 Ajout d'une masse m_c au niveau de l'organe terminal

Nous voulons maintenant considérer que le robot déplace un objet d'une masse m_c que nous considérons comme étant une masse ponctuelle. Le modèle dynamique est donc modifié car il faut ajouter un terme d'énergie cinétique pour cette masse :

$$k_{m_c} = \frac{1}{2} m_c \vec{v}_c^T \vec{v}_c + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z} \begin{bmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_c \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z} \quad (21)$$

$$\text{avec} \quad \vec{v}_c = -l_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_1 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 \quad (22)$$

$$k_{m_c} = \frac{1}{2} m_c (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 [1 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)] \quad (23)$$

Afin de trouver les termes manquants de la matrice d'inertie M et la matrice H correspondants à l'ajout de la masse m_c nous devons calculer les dérivées partielles de ce nouveau terme d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial k_{m_c}}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_c l_1 l_2 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_{m_c}}{\partial \dot{q}} = m_c [1 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k_{m_c}}{\partial \dot{q}} = m_c [1 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - 2m_c l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Donc les matrices complètes M et H sont :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{J_{m1}}{n_1} + \frac{5}{12}m_1l_1^2 + m_2(l_1^2 + \frac{5}{12}l_2^2 + l_1l_2\cos(\theta_2)) & m_2(l_1^2 + \frac{5}{12}l_2^2 + l_1l_2\cos(\theta_2)) \\ m_2(l_1^2 + \frac{5}{12}l_2^2 + l_1l_2\cos(\theta_2)) & \frac{J_{m2}}{n_2} + m_2(l_1^2 + \frac{5}{12}l_2^2 + l_1l_2\cos(\theta_2)) \end{bmatrix} + m_c((1+l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos(\theta_2)) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$et \quad H = \begin{bmatrix} -l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_2)(m_2 + 2m_c) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -l_1l_2\sin(\theta_2)(\frac{m_2}{2} + m_c) (\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2) \end{bmatrix} \quad (26)$$

On utilise maintenant ce modèle dynamique dans notre modèle Simulink en faisant varier la masse m_c afin d'en voir l'effet sur nos lois de commande et suivi de notre trajectoire rectiligne.

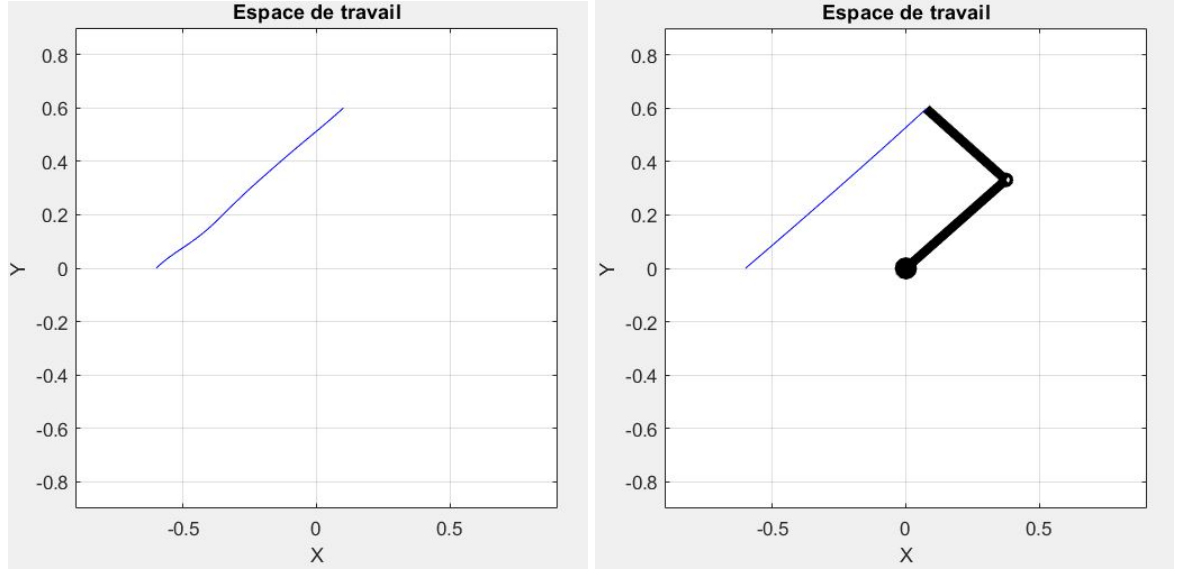


FIGURE 18: (a) Correcteur Proportionnel/Dérivé (b) Commande linéarisante pour une masse $m_c = 1kg$

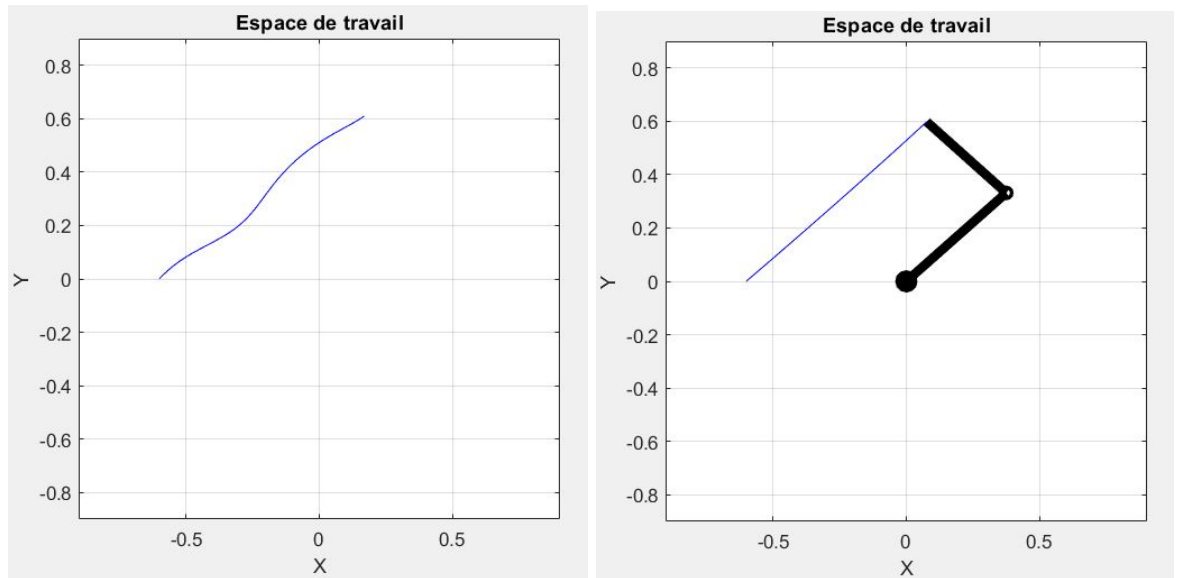


FIGURE 19: (a) Correcteur Proportionnel/Dérivé (b) Commande linéarisante pour une masse $m_c = 5kg$

Nous pouvons remarquer que la loi de commande linéarisante n'est pas du tout impactée par l'ajout de masse alors que la commande P/D y est elle très sensible. Nous pouvons donc en conclure que la commande linéarisante est plus robuste que le correcteur P/D ce qui paraît cohérent puisque c'est un modèle beaucoup plus simple.

4.4 Ajout d'une perturbation de couple

Enfin, nous vérifions la régulation de perturbation en entrée du système (frottement moteurs, effet magnétiques..). Il nous paraît clair que pour des perturbations du même ordre de grandeur que les couples nominaux des moteurs, la régulation de perturbation est plutôt efficace. Certes, nous retrouvons des écarts notamment pour la seconde variable articulaire, mais dans l'ensemble, ces perturbations n'ont pas de grands impacts. Pour plus de précisions, nous pourrions ajouter à notre modèle un bloc de rejet de perturbation si les couples venaient à augmenter.

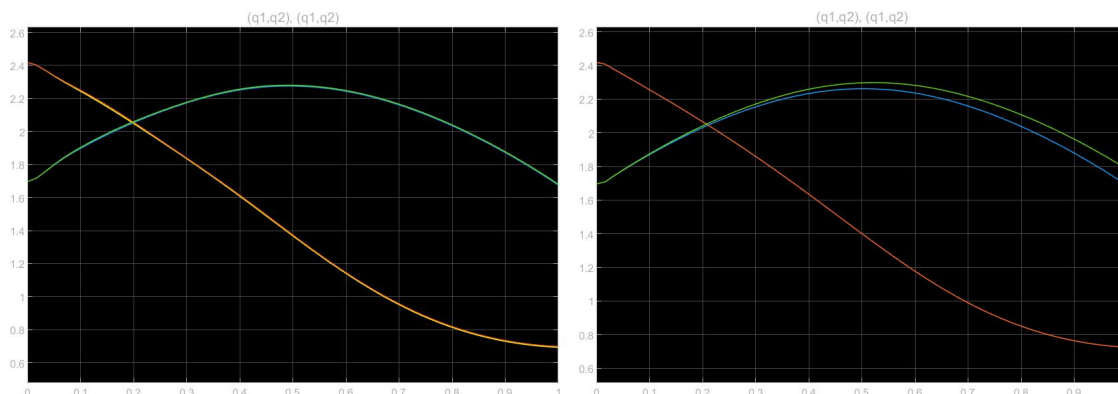


FIGURE 20: Rejet de perturbations (a) Proportionnel Dérivée (b) Commande Linéarisante

Nous pouvons voir sur la figure 20 que le correcteur P/D donne une meilleure trajectoire que la commande linéarisante. Pour faire le choix de correcteur il faudra donc faire un compromis entre différents facteurs : la commande linéarisante résiste mieux aux variations de masse de l'objet déplacé mais moins bien que la loi de commande P/D pour ce qui est de la gestion de perturbations.

5 Conclusion

Ce projet nous a permis de réaliser une étude complète d'un robot en construisant petit à petits les modèles nécessaires à la programmation du robot. Cela nous a appris à poser et trouver à la main les différents modèles : géométriques, cinématiques et dynamiques. Si ce robot avait une structure simple (que nous avons d'ailleurs simplifiée encore plus en ne prenant pas en compte la dernière liaison) ce n'est pas le cas de la majorité des robots aujourd'hui. C'est pour cela qu'il existe des logiciels qui permettent d'obtenir facilement un modèle dynamique puisque nous avons pu réaliser que le développement des calculs était assez long et fastidieux.

Pour ce qu'il en est du suivi de trajectoire, de la génération de mouvement et du contournement de singularités ce projet était vraiment complet et nous a permis de mettre en oeuvre toutes les techniques théoriques du cours ce qui était un bon exercice pour améliorer notre compréhension de ces nouveaux outils.

La partie commande a été celle où nous avons rencontré le plus de difficultés surtout pour la mise en place de la loi de commande linéarisante puisque c'était un principe tout à fait nouveau pour nous alors que nous avions déjà des connaissances sur les correcteurs P/D. Globalement, nous sommes tout de même satisfaits de notre étude et de nos différents résultats obtenus.