Université de Genève
Section de Mathématiques

18 octobre 2022

Probabilités - Statistiques
TP 1

1. **Lancé d'une pièce**
   On considère une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $p \in [0,1]$, et face avec probabilité $1-p$. On lance la pièce, et on gagne 1 point si l'on obtient pile, 0 point si l'on obtient face.
   (a) Écrire une fonction qui prend pour argument un réel $p \in [0,1]$, et qui simule ce lancé de pièce, c'est-à-dire qui renvoie 1 avec probabilité p ou 0 avec probabilité $1-p$. La fonction devra tester si p est bien dans $[0,1]$ et afficher un message d'erreur dans le cas contraire.
   (b) Simuler 10000 lancés de pièce en prenant $p = \frac{1}{4}$ et compter la proportion de cas pour lesquels on obtient 1. Vos résultats sont-ils cohérents ?
   (c) Écrire une fonction qui prend pour arguments un entier naturel n non nul, et un réel $p \in [0,1]$, et qui renvoie le nombre de points obtenus après n lancés.
   (d) On peut considérer le total de points après n lancés comme une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1,\ldots,n\}$. Quelle loi suit alors X ? Utiliser cette propriété pour écrire une autre fonction permettant de renvoyer le nombre de points obtenus après n lancés.
   (e) Vérifier que les deux fonctions précédentes permettent bien de modéliser la même variable aléatoire.
2. **Lancé de dés**
   On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 »
   (a) Écrire une fonction qui simule cette expérience et qui renvoie `True` si l'évènement A se produit, et `False` sinon.
   (b) Écrire une fonction qui simule cette expérience et qui renvoie `True` si l'évènement B se produit, et `False` sinon.
   (c) Écrire une fonction qui simule cette expérience et qui renvoie `True` si l'évènement C se produit, et `False` sinon.
   (d) En déduire une fonction qui renvoie `True` si un des trois évènements A, B ou C se produit, et `False` sinon.
   (e) Calculer (théoriquement) $P(A \cup B \cup C)$. En répétant un grand nombre de fois l'expérience numérique précédente, vérifier qu'on retrouve bien le résultat attendu.
3. **Loi binômiale et loi de Poisson**
   Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binômiale $B(n,p)$. On rappelle que dans ce cas :
   $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$
   (a) Écrire une fonction qui prend pour arguments p et n, et qui modélise la variable aléatoire X.
   (b) Soit $\lambda > 0$. On considère maintenant une variable aléatoire Y qui suit la loi binômiale $B(n, p_n)$, avec $p_n := \frac{\lambda}{n}$. Écrire une fonction qui prend pour arguments λ et n, et qui modélise Y. Pour $\lambda = 2$ et $n = 50$, simuler 10000 réalisations de Y et représenter leurs proportions sur un histogramme. Même question pour $n = 100$, et $n = 200$.
   (c) Soit maintenant une variable aléatoire Z qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Écrire une fonction qui prend pour argument λ et qui modélise Z. Pour $\lambda = 2$, simuler 10000 réalisations de Z et représenter leurs proportions sur un histogramme en ignorant les réalisations de l'évènement $(Z > 200)$.
   (d) Comparer les histogrammes obtenus aux questions (b) et (c). Que remarque-t-on ? Montrer théoriquement que ce résultat était attendu (cf Exercice 5.5 du cours).