

*l'intégrale*

Jean-Dominique Mosser  
Yves Granjon  
Jacques Tanoh

# SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

I<sup>re</sup> année MPSI – PCSI – PTSI

**TOUT-EN-UN**

- ▶ Un cours conforme au programme
- ▶ Une synthèse des savoirs et savoir-faire
- ▶ De nombreux exercices avec corrigés détaillés

DUNOD

# **Sciences industrielles**

# **pour l'ingénieur**

**I<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI**

**Jean-Dominique Mosser**

*Professeur agrégé de sciences industrielles  
en classes préparatoires scientifiques  
au lycée Kléber à Strasbourg*

**Yves Granjon**

*Professeur et directeur de l'École Nationale  
Supérieure d'Électricité et de Mécanique à Nancy*

**Jacques Tanoh**

*Professeur agrégé de sciences industrielles  
en classes préparatoires scientifiques  
au lycée Kléber de Strasbourg*

**DUNOD**

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008  
ISBN 978-2-10-053788-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 3352 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Étude des systèmes</b>	<b>1</b>	
	<b>1.1</b>	Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes complexes	1
	<b>1.2</b>	Modèle	5
	<b>1.3</b>	Approche fonctionnelle	7
	<b>1.4</b>	Approche structurelle	11
<b>2</b>	<b>Mécanique – Les bases</b>	<b>17</b>	
	<b>2.1</b>	Orienter l'espace	18
	<b>2.2</b>	Définir un angle	20
	<b>2.3</b>	Les différents repères d'espace	22
	<b>2.4</b>	Vecteurs – Opérations sur les vecteurs	25
	<b>2.5</b>	Torseurs – Opérations sur les torseurs	29
	<b>2.6</b>	Dérivation vectorielle	33
	<b>Exercices d'application</b>	38	
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	39	
	<b>Solutions des exercices</b>	40	
<b>3</b>	<b>Mécanique Cinématique du solide indéformable</b>	<b>45</b>	
	<b>3.1</b>	Les mouvements	46
	<b>3.2</b>	Trajectoires et lois horaires	48
	<b>3.3</b>	Vecteurs position, vitesse et accélération	50
	<b>3.4</b>	Le solide indéformable	53
	<b>3.5</b>	Le champ des vecteurs vitesses	54
	<b>3.6</b>	Composition des mouvements	57
	<b>3.7</b>	Le champ des vecteurs accélérations	60
	<b>3.8</b>	Mouvements particuliers	62
	<b>Exercices d'application</b>	65	
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	67	
	<b>Solutions des exercices</b>	70	

<b>4 Mécanique – Contacts et liaisons</b>	<b>77</b>
4.1 Chaîne de solides	78
4.2 Les liaisons	79
4.3 Les contacts	89
4.4 Transmissions particulières	93
<b>Exercices d'application</b>	99
<b>Exercices d'approfondissement</b>	101
<b>Solutions des exercices</b>	106
<b>5 Mécanique – Actions mécaniques</b>	<b>115</b>
5.1 Concept d'action mécanique	116
5.2 Modèles d'actions mécaniques transmissibles	123
5.3 Les lois du frottement	130
<b>Exercices d'application</b>	135
<b>Exercices d'approfondissement</b>	138
<b>Solutions des exercices</b>	141
<b>6 Mécanique – Les lois de l'équilibre</b>	<b>149</b>
6.1 Théorèmes de l'équilibre	149
6.2 Méthodologie de résolution	152
6.3 Équilibres particuliers	157
<b>Exercices d'application</b>	164
<b>Exercices d'approfondissement</b>	167
<b>Solutions des exercices</b>	171
<b>7 Systèmes logiques combinatoires</b>	<b>181</b>
7.1 Introduction	181
7.2 Problématique générale	182
7.3 Mise en équation des fonctions logiques	185
7.4 Circuits logiques combinatoires	187
7.5 Simplification des fonctions logiques	190
7.6 Les 16 fonctions logiques de deux variables	191
7.7 Application au codage et au traitement de l'information	193
<b>Exercices d'application</b>	201
<b>Exercices d'approfondissement</b>	201
<b>Solutions des exercices</b>	203

<b>8 Systèmes discrets séquentiels</b>	<b>209</b>
8.1 Les systèmes logiques séquentiels	209
8.2 Le modèle GRAFCET	217
<b>Exercice d'application</b>	228
<b>Exercices d'approfondissement</b>	228
<b>Solutions des exercices</b>	230
<b>9 Modélisation et étude temporelle des systèmes continus</b>	<b>233</b>
9.1 Cadre général de l'étude des systèmes continus	233
9.2 La transformation de Laplace	236
9.3 Fonction de transfert d'un système linéaire	241
9.4 Étude temporelle des systèmes d'ordre 1	247
9.5 Étude temporelle des systèmes d'ordre 2	251
9.6 Identification d'un système	255
<b>Exercices d'application</b>	258
<b>Exercices d'approfondissement</b>	259
<b>Solutions des exercices</b>	260
<b>10 Étude fréquentielle des systèmes continus</b>	<b>265</b>
10.1 Étude harmonique des systèmes d'ordre 1	265
10.2 Étude harmonique des systèmes d'ordre 2	270
10.3 Approche métho-dique du tracé des diagrammes de Bode	275
10.4 Diagramme de Nyquist	282
<b>Exercices d'application</b>	286
<b>Exercices d'approfondissement</b>	286
<b>Solutions des exercices</b>	287
<b>Annexe 1</b>	<b>292</b>
<b>Annexe 2</b>	<b>293</b>
<b>Index</b>	<b>294</b>

# Pour bien utiliser

**Mécanique  
Contacts et liaisons**

**CHAPITRE 4**

**Plan**

- 4.1 Chaîne de solidés
- 4.2 Les liaisons
- 4.3 Les contacts
- 4.4 Transmissions particulières

**Exercices d'application**

**Exercices d'apprentissage**

**Solutions des exercices**

**Introduction**

Après le chapitre 2, synthétisez des outils mathématiques pour le mécanisme, et après le chapitre 3, associez ces concepts précis pour la chaîne de solides et aux solides mobiles. Ce chapitre s'intéresse à la description du réel et aux modèles utilisés à cet effet.

Parler de contacts et de liaisons revient à parler respectivement du réel et de modèles. Pour parler en phase avec l'entreprise, il est indispensable de bien saisir ces deux aspects : une prise de contact entre deux solides et leur dégagement. Ces modèles ne suffisent pas à lui donner un sens et se manipuler sans être déformés. Ainsi que le réel, il faut donner un regard différent pour poser des hypothèses et exprimer des conditions indispensables au fonctionnement d'un système.

Il existe également nécessaire de bien distinguer un mouvement possible d'un mouvement contraint. Cela passe par une analyse des liaisons et des contacts, mais aussi par une étude des mouvements possibles. Les mouvements réels sont quantifiés aux observés sur les systèmes réels ou calculés lors de leur résolution.

**Prérequis**

- Les deux chapitres précédents.

**Objectifs**

- Imager des mouvements dans un espace à six degrés de liberté ;
- Distinguer un mouvement possible d'un mouvement réel ;
- Distinguer un mouvement possible d'un mouvement d'ensemble ;
- Apprendre un ensemble de modèles de mouvement ;
- Rechercher des liaisons particulières de mécanisme ;
- Confronter résultats théoriques et résultats expérimentaux.

## La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.

**4.4 Transmissions particulières**

**> loi entre-sortie en cinématique**

Imaginez et modifiez les mouvements possibles au passage du contact des deux solides. Comme les deux solides possèdent pour qu'il y ait contact sans glissement des deux cycles de révolution principaux, on pose une théorie pourtant de déterminer directement le rapport de transmission.

**Théorème**

Sous des conditions dont la structure est une chaîne fermée de trois solides comprenant deux pivots et un contact d'entretoise :

Ainsi les axes de rotation des pivots sont immobiles dans le référentiel attaché au solide 1 et le rapport de transmission est donné par la formule

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

**Exemple**

On considère un référentiel à repas à angle schématisé sur la figure (4.13). Il est composé de trois éléments :

- un bâti, repère 1, auquel on associe un repère  $(A, \hat{z}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_2)$ ,
- un autre repère, repère 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \hat{x}_1)$  avec le bâti. Sur cet autre repère, on associe un autre couple de Zj qui pivote d'axe  $(A, \hat{x}_2)$  avec le bâti.
- un autre repère, repère 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \hat{x}_3)$  avec le bâti. Sur cet autre repère, on associe un autre couple de Zj qui pivote d'axe  $(A, \hat{x}_4)$  avec le bâti.

Le signe se détermine et se pose au cas par cas de manière élémentaire.

Figure 4.13 Référentiel à repas d'angle.

Les axes de rotation des pivots sont fixes dans le référentiel 1 et ont un ailes

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Le signe négatif estposé en imaginant une rotation 2/1 positive et en constatant une rotation 3/1 nulle négative.

## Les pictogrammes dans la marge



Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration...).



Indication du degré d'importance d'un résultat.



Mise en garde contre des erreurs fréquentes.



Rappel d'hypothèse ou de notation.

## Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.

La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.

**Chapitre 3 - Mécanique - Chapitre de synthèse**

**Définition**

On appelle vecteur instantané de rotation le point d'intersection de l'axe central de rotation mécanique avec le plan d'éclat des énoncés.

**Notation**

Le centre tangentiel de rotation est souvent dénoté par C.I.R. ou C.R. et par un symbole comme l'axe 1/1 ou note 1/1.

Les autres instants de rotation sont marqués par les positions des axes de rotation dans le plan d'éclat et sont reliés les uns aux autres par des conventions graphiques.

**Savoirs**

- savoir utiliser les outils de représentation :
- complémentaires :
- vecteurs :
- vecteur d'angle :
- repère d'espace :
- référentiel 1 :
- référentiel 2 :
- transformation :
- matrice :
- vecteur :
- les liaisons :
- tableau :
- vecteur position :
- vecteur vitesse :
- vecteur accélération :
- vecteur rotation :

**Savoir-faire**

- tracer un mouvement :
- définir le vecteur position :
- calculer un vecteur vitesse par dérivation :
- calculer un vecteur vitesse par une vecteur accélération par dérivation :
- calculer un vecteur vitesse par la nature de mouvement, soit la composition des vecteurs vitesse :
- tracer un vecteur vitesse en utilisant soit la nature de mouvement, soit la composition des vecteurs vitesse :

## La synthèse

En fin de chapitre, elle propose un récapitulatif des savoirs et savoir-faire indispensables.



# Avant-propos

Cet ouvrage est destiné au jeune bachelier scientifique et se propose de lui faire découvrir les sciences industrielles pour l'ingénieur en s'appuyant sur le programme officiel des classes préparatoires aux grandes écoles de première année.

Sa finalité est de donner outils et méthodes nécessaires à l'approche de réalisations industrielles selon un point de vue particulier : le calcul, la commande et le contrôle des mouvements.

Sa structure est ainsi logique :

- le premier chapitre présente les outils de description des systèmes et définit la frontière entre réel et modèle ;
- les cinq chapitres suivants initient à la mécanique, science des mouvements, en détaillant la cinématique et les actions mécaniques ;
- les quatre derniers posent les bases de l'automatique, science de la commande et du contrôle, sous les deux aspects continu et discret.

Cet ouvrage sollicite les capacités d'abstraction et les compétences scientifiques du public concerné, et les développe en vue de mettre en œuvre :

- des méthodes plus que des recettes ;
- de la réflexion plus que des calculs ;
- des clés plus que des solutions.

Le cours est concis, avec des notations simples et transversales. Il nécessite une lecture attentive. Les exercices sont tous corrigés de façon détaillée, pour offrir au lecteur le temps de forger ses propres convictions. De plus, dès lors que les compétences acquises le permettent, des résultats d'expérimentation sont joints aux exercices, afin de confronter les résultats théoriques calculés à la réalité constatée.

Les auteurs confient aux lecteurs la tâche de retourner remarques et suggestions en utilisant le courrier électronique à l'adresse [s3i@jdote.net](mailto:s3i@jdote.net) ou postal aux bons soins des éditions Dunod, et souhaitent à chacun d'eux une passionnante découverte des sciences pour l'ingénieur.

Jean-Dominique Mosser

## Plan

1.1 Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes complexes	1
1.2 Modèle	5
1.3 Approche fonctionnelle	7
1.4 Approche structurelle	11

## Introduction

« Le métier de base de l'ingénieur consiste à résoudre des problèmes de nature technologique, concrets et souvent complexes, liés à la conception, à la réalisation et à la mise en œuvre de produits, de systèmes ou de services. Cette aptitude résulte d'un ensemble de connaissances techniques d'une part, économiques, sociales et humaines d'autre part, reposant sur une solide culture scientifique. »

Cette définition du métier d'ingénieur est proposée par la Commission des Titres d'Ingénieur. Elle résume bien ce que l'on entend par « Étude des systèmes ». Ce chapitre s'attache à exposer les concepts de base associés, et à définir une partie du vocabulaire spécifique à cette activité.

## Prérequis

Ce chapitre d'introduction est construit sans prérequis disciplinaire, mais requiert néanmoins :

- le sens du concret ;
- de la rigueur et de la cohérence.

## Objectifs

- Acquérir le vocabulaire concernant les notions fondamentales relatives à l'étude de systèmes complexes ;
- S'entraîner aux changements d'approche et de point de vue ;
- Comprendre la notion de modèle ;
- S'approprier quelques outils de représentation.

## 1.1 Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes complexes

L'expression « système complexe » n'est pas à entendre dans ce chapitre au sens de difficile, mais au sens où la multitude des paramètres qui interviennent fait qu'un projet industriel n'a pas *une* solution unique. La solution adoptée est issue d'un ensemble de solutions possibles. Son choix est le résultat d'un compromis nécessaire entre des intérêts rarement convergents.



Un servomécanisme est un mécanisme dont au moins une grandeur est contrôlée, par exemple une position, une vitesse...

## 1.1.1 Système

### a) Système et milieu environnant

Le mot système est un de ces mots génériques que l'on trouve dans tous les domaines. Que l'on étudie un système solaire, un système sanguin, un système technique ou un système d'équations, on trouve toujours dans le thème abordé la racine grecque du mot signifiant *un assemblage* ou *une composition*.

#### Définition

Un **système** est un arrangement d'éléments en interaction, organisé en vue d'atteindre un ou plusieurs objectifs définis.

Les idées fondamentales exprimées par cette définition sont nombreuses :

- un système est un ensemble ;
- cet ensemble peut être décrit à partir d'éléments ;
- les éléments de cet ensemble sont en relation ;
- un système a une finalité exprimée.

On peut compléter ces propositions en constatant qu'un élément peut être lui-même un système, et un système peut-être lui-même un élément d'un système plus grand.

#### Exemples

- une **machine** est un système transformateur d'énergie ;
- un **mécanisme** est un élément de la classe des machines qui transforme de l'énergie mécanique en énergie mécanique, autrement dit un système de transformation de mouvement ;
- un **moteur** est un élément de la classe des machines qui fournit de l'énergie mécanique, à partir d'énergie électrique, thermodynamique ou chimique.

Toute analyse commence par la définition du système dont on parle :

Il s'agit de délimiter ce système, pour identifier son environnement.

On imagine pour cela une frontière fictive entourant le système. Tout ce qui n'appartient pas au système ainsi circonscrit et qui entre en contact ou en relation avec le système définit le milieu environnant.

#### Définition

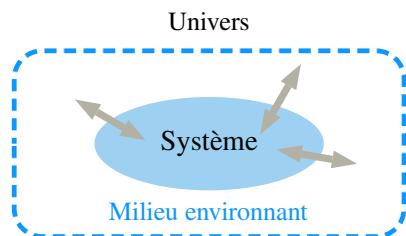
On appelle **milieu environnant** d'un système l'ensemble des éléments de l'univers en relation avec lui.

Les éléments du milieu environnant sont généralement classés dans quatre grandes familles :

- l'environnement humain ;
- l'environnement matériel ;
- l'environnement énergétique ;
- la matière d'œuvre.



Définition proposée par la norme ISO/IEC 15288:2002.



**Figure 1.1** Le milieu environnant d'un système.

### b) Matière d'œuvre et valeur ajoutée

#### Définition

On appelle **matière d'œuvre** d'un système tout élément modifié par son intervention.

Il existe trois grands types de matière d'œuvre :

- un produit ou une matière ;
- une énergie ;
- une information.

#### Définition

On appelle **valeur ajoutée** ce qui caractérise la modification des propriétés de la matière d'œuvre après passage dans le système.

Cette modification concerne la forme, la position ou l'état de la matière d'œuvre.

#### Exemple

On s'intéresse à un aspirateur ménagé. La matière d'œuvre est constituée de :

- l'air du lieu ;
- un sac filtre ;
- les éléments rencontrés par l'embout.

Entrent dans le système un sac *propre* et de l'air chargé de poussières et ressortent du système un sac de poussières et de l'air *propre*.

La valeur ajoutée peut être alors exprimée par la proposition : La poussière est transférée de l'air aspiré au filtre sans endommager son support initial.

### c) Cycle de vie

La notion de **cycle de vie** est indissociable d'un système technologique. Elle exprime les différentes étapes qui vont de sa conception initiale jusqu'au recyclage de ces constituants.

## 1.1.2

### Fonction d'un système

#### Définition

On appelle **fonction** d'un système ce pour quoi il a été conçu.

**Notation**

Une fonction s'énonce par une phrase commençant par un verbe à l'infinitif.

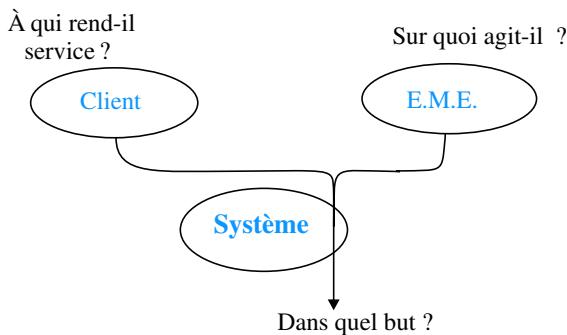
Il n'y a pas équivalence entre fonction et système. Un système remplit une fonction qui est directement liée à un besoin exprimé. Réciproquement, une fonction peut être réalisée par de multiples systèmes différents. Passer de l'objet à sa finalité permet de s'en détacher et ouvre ainsi le champ de l'innovation.

**1.1.3****Analyse et expression du besoin****a) Expression du besoin**

La première question à se poser lorsque l'on étudie ou l'on conçoit un système est : « Pourquoi le produit existe-t-il ? » Ce désir de comprendre et de justifier prend racine dans la volonté de satisfaire le besoin du « client ». La figure (1.2) diversifie la question initiale en demandant une réflexion autour de trois axes :

- À qui rend-il service ?
- Sur quoi agit-il ?
- Dans quel but ?

E.M.E.: acronyme de « Élément du Milieu Environnant ».



**Figure 1.2** Expression du besoin.

Deux questions sousjacentes complètent cette première recherche :

- Qu'est-ce qui pourrait faire évoluer le besoin ?
- Qu'est-ce qui pourrait faire disparaître le besoin ?

Le client est associé à cette démarche initiale pour qu'il puisse expliciter son besoin. La codification de son attente se fait en trois étapes :

- identifier les éléments du milieu environnant ;
- pour chacun d'eux, appliquer la grille précédente en vue d'énoncer la fonction correspondant au service rendu ;
- définir les critères que l'on applique pour évaluer la réalisation de la fonction.

Un **critère** est une règle que l'on définit en vue d'émettre une opinion ou de prendre une décision.

Une fonction ainsi énoncée est appelée **fonction de service**, et est souvent notée en abrégé *FS*.

**Exemple**

On reprend l'aspirateur ménager cité précédemment en s'intéressant à deux éléments particuliers du milieu environnant.



L'énoncé de la fonction commence par un verbe à l'infinitif.

- le sac filtre —> FS : Filtrer l'air aspiré

Critère	Valeur
diamètre des particules	> xxx $\mu m$
niveau sonore	< yy dB

- le sol —> FS : Ne pas abîmer le support

Critère	Valeur
présence de rayures	aucune

### b) Cahier des Charges Fonctionnel (CdCF)

On appelle **Cahier des Charges Fonctionnel** (CdCF) le document qui expose l'ensemble des caractéristiques attendues des fonctions de service. La figure (1.3) en donne l'allure générale.

N	Expression de la fonction FS	Critère	Niveau	Limite

**Figure 1.3** Cahier des Charges Fonctionnel.

Ce document sert de contrat entre le client et le fournisseur. Du point de vue du client, chaque ligne permet un contrôle de la prestation fournie, et du point de vue du fournisseur, chaque ligne induit un niveau d'exigence à la conception.

## 1.2 Modèle

### Définition

Un **modèle** est une description simplifiée du réel destinée à en représenter un des aspects.

Un modèle se doit de posséder quatre qualités essentielles :

- la simplicité, pour être facile à élaborer et à simuler ;
- la validité, pour assurer la cohérence entre les approches théorique et empirique ;
- l'exhaustivité, pour être transposable à d'autres systèmes ;
- la fécondité, pour générer de nouveaux modèles.

### 1.2.1

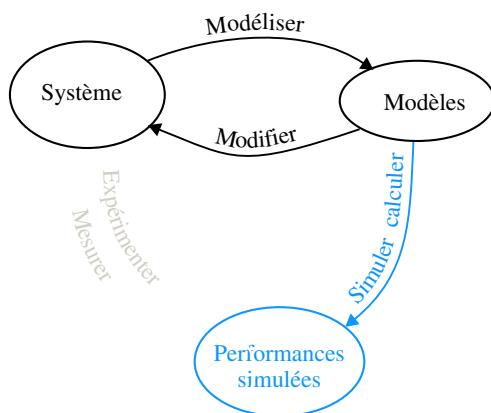
## Modélisation

### Définition

On appelle **modélisation** l'activité qui consiste à associer des modèles à un système.

Cette activité consiste en un va-et-vient permanent entre le réel et ses modèles, comme l'illustre la figure (1.4) :

- au système correspond le champ empirique, domaine de l'expérimentation et de la mesure ;
- aux modèles correspond le champ théorique, qui conduit aux calculs et à la simulation.



**Figure 1.4** Les activités associées à la modélisation.

La comparaison des performances mesurées et des performances simulées a trois conséquences :

- permettre la validation d'un modèle proposé ;
- provoquer la recherche de nouveaux modèles ;
- inciter à l'évolution du système étudié.

L'intérêt porté à un système technique se traduit souvent par des questions :

- à quoi ça sert ?
- comment ça marche ?
- comment c'est fait ?
- où trouve-t-on cela ?

Chacune de ces questions concerne une approche différente du système. Chacune de ces approches induit des modèles permettant de mettre en avant un aspect particulier du système, et chaque aspect est une spécialité dans laquelle on peut développer un niveau d'expertise.

## 1.2.2

### Différentes approches

Les quatre questions précédentes permettent de classer les modèles en fonction de l'approche adoptée, et ce classement est présenté sur la figure (1.5).

- Les noms en caractères droits sont des modèles abordés dans cet ouvrage ;
- Les noms des modèles écrits en italique sont donnés en complément à titre d'exemple.

Les outils concernant les approches comportementale et organisationnelle sont développés au cours des chapitres suivants. Cette section présente rapidement les points de vue qui ne sont pas développés par ailleurs.

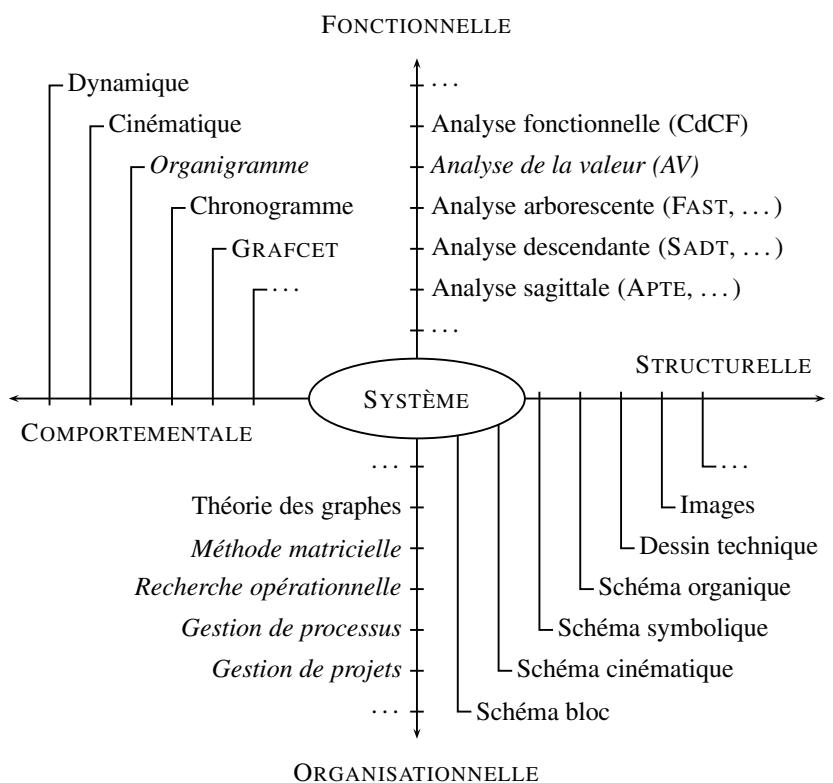


Figure 1.5 Différentes approches pour un système complexe.

## 1.3 Approche fonctionnelle

Lorsque l'on parle de boîte noire, on veut dire que l'on ne s'intéresse pas à son contenu.

Une idée directrice prédomine lors de l'étude de systèmes complexes. À tous les niveaux, un élément est considéré comme une boîte noire et le travail principal de l'*ingénieur-système* consiste à mettre en évidence de manière la plus exhaustive possible les relations entre les différentes boîtes posées.

### 1.3.1 Analyse sagittale

*L'analyse sagittale* consiste à exprimer les relations entre les éléments d'un ensemble.

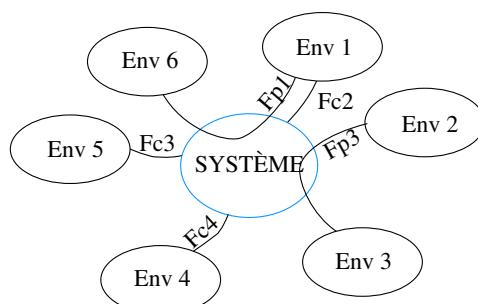


Figure 1.6 Structure d'un diagramme sagittal.

Env  $i$  est un des éléments du milieu environnant.



APTE : APplications des Techniques d'Entreprises.

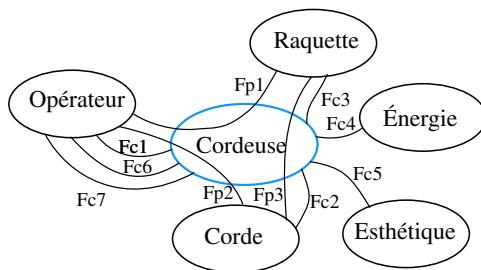
Le modèle APTÉ est issu d'une palette d'outils nécessaires à l'écriture du « Cahier des Charges Fonctionnel » présenté page 5. Il prolonge et met en forme l'expression des fonctions de service attendues, en analysant les interactions du produit ou du système avec son environnement.

Le diagramme de la figure (1.6) met en évidence, issus des fonctions de service, deux types de fonctions :

- les fonctions dites principales (FP) mettent en relation deux éléments du milieu environnant par l'intermédiaire du système étudié.
- les fonctions dites de contrainte (FC) expriment l'adaptation du système à son environnement.

### Exemple

Machine à corder des raquettes



**Figure 1.7** Diagramme sagittal d'une cordeuse de raquette.

Fonctions principales :

- Fp1 : Permettre à l'opérateur de fixer la raquette et de l'orienter ;
- Fp2 : Permettre à l'opérateur de fixer la corde sur le mors ;
- Fp3 : Tendre la corde sur le cadre de la raquette.

Fonctions contraintes :

- Fc1 : Acquérir la consigne de tension ;
- Fc2 : Maintenir la tension ;
- Fc3 : S'adapter à différents types de raquette ;
- Fc4 : Modifier l'énergie ;
- Fc5 : Être esthétique ;
- Fc6 : Être ergonomique ;
- Fc7 : Respecter les normes de sécurité.

## 1.3.2

### Analyse arborescente

L'*analyse arborescente* s'intéresse à la hiérarchisation des informations.

Dans le cadre de l'analyse fonctionnelle des systèmes, le modèle FAST propose une structure arborescente horizontale. Elle se ramifie de la gauche vers la droite, de la fonction initiale jusqu'aux solutions techniques de réalisation, en associant aux deux sens de lecture les questions « pourquoi ? » et « comment ? »

Tout déplacement vers la droite répond à la question : Comment réaliser cette fonction ?

- Comment est réalisée la fonction i ? Par la fonction k.

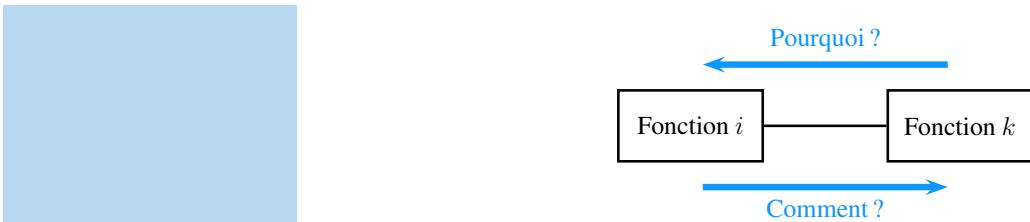
Tout déplacement vers la gauche répond à la question : Pourquoi réaliser cette fonction ?

- Pourquoi est réalisée la fonction k ? Parce qu'il faut réaliser la fonction i.

Il est complété vers le haut ou vers le bas pour définir les fonctions devant être assurées simultanément ou en alternative.



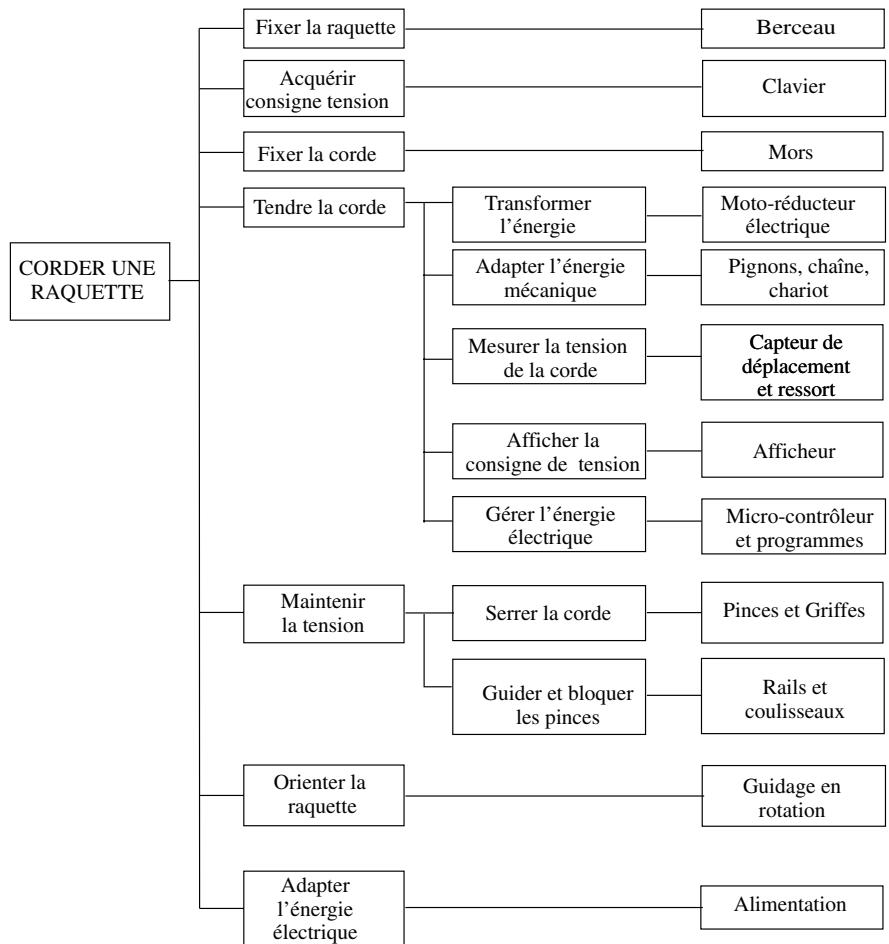
FAST : Function Analysis System Technic.



**Figure 1.8** Les deux sens de lecture pour le FAST.

### Exemple

La mise en pratique de cette analyse sur la cordeuse de raquette est présentée sur la figure (1.9)



**Figure 1.9** Un diagramme FAST concernant une cordeuse de raquette.

### 1.3.3

### Analyse descendante

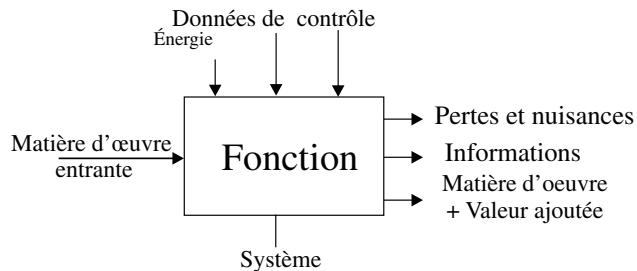
Le principe de l'*analyse descendante* est exprimé dans la définition même d'un système. L'étude interne du système se fait progressivement, structurée par niveaux, comme le montre la figure (1.11). Chaque niveau apporte les informations qui permettent

SADT : Structured Analysis for Design and Technic.

de comprendre la réalisation de la fonction dont il est issu, et les niveaux successifs amènent une connaissance de plus en plus fine des moyens mis en œuvre ;

On décrit ici un modèle inspiré de la méthode SADT.

L'élément de base est une boîte appelée actigramme, détaillée sur la figure (1.10) :

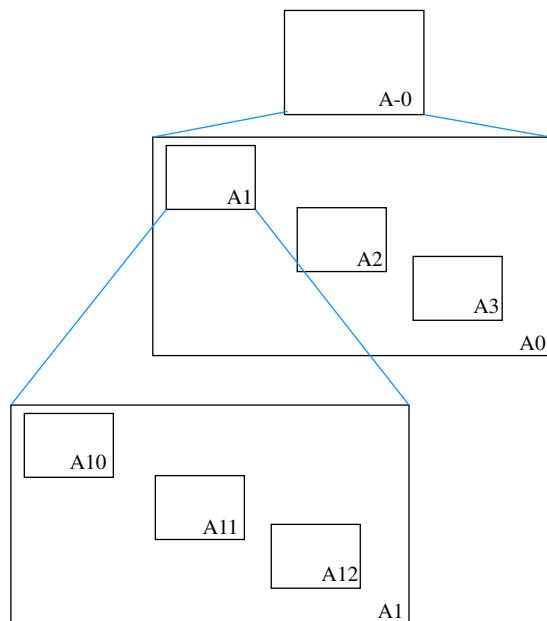


**Figure 1.10** Formalisme d'un actigramme.

La syntaxe à respecter est très précise :

- le contenu de la boîte se limite à l'énoncé de la fonction réalisée ;
- à gauche entre la matière d'œuvre ;
- à droite sort la matière d'œuvre modifiée, ainsi que toutes les productions dérivées, du message d'information jusqu'aux déchets produits ;
- par le haut arrivent les données dites de contrôle et l'énergie nécessaire au fonctionnement. Les données de contrôle comprennent les ordres et consignes de fonctionnement, ainsi que tous les paramètres de réglage concernant la fonction traitée ;
- est ajouté en bas le nom de l'objet technique remplissant la fonction.

La méthode est valide lorsque l'on veille à la cohérence des informations au changement de niveau. Tout ce qui franchit les frontières d'une boîte doit se retrouver à l'identique en changeant de niveau.



**Figure 1.11** Principe de l'analyse descendante.

Sur la figure (1.11) sont nommés les niveaux :

- le niveau A-0 représente la description la plus globale du système, par une seule boîte ;
- le niveau A0 commence à décomposer le système ;
- le niveau A1 détaille la première boîte posée au niveau précédent ;
- on détaille chaque niveau par un nombre de boîtes de préférence inférieur à cinq, de manière à conserver une lisibilité satisfaisante.

## 1.4 Approche structurelle

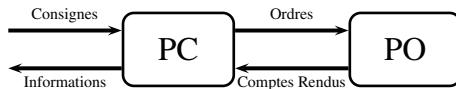
On s'intéresse dans cette section plus particulièrement à la description des systèmes automatisés.

### 1.4.1

#### Structure d'un système automatisé

##### Définition

Un système automatisé est un ensemble de moyens techniques interconnectés à des moyens de commande et de contrôle qui assure un fonctionnement reproductible plus ou moins indépendant des interventions humaines.



**Figure 1.12** Partie commande et partie opérative d'un système automatisé.

##### Partie Commande – PC

La **partie commande** d'un système automatisé est un ensemble capable de reproduire un modèle de fonctionnement exprimant le savoir-faire humain. Elle commande la partie opérative pour obtenir les effets voulus, par l'émission d'ordres en fonction d'informations disponibles, comptes rendus, consignes et du modèle construit. Elle peut échanger des informations avec l'opérateur ou d'autres systèmes.

Les principales fonctions assurées par la partie commande sont :

- échanger des informations avec l'opérateur ;
- échanger des informations avec d'autres systèmes ;
- acquérir les données ;
- traiter les données ;
- commander la puissance.

##### Partie Opérative – PO

La **partie opérative** d'un système automatisé assure la transformation des matières d'œuvre permettant l'élaboration de la valeur ajoutée.

Les principales fonctions assurées par la partie opérative sont :

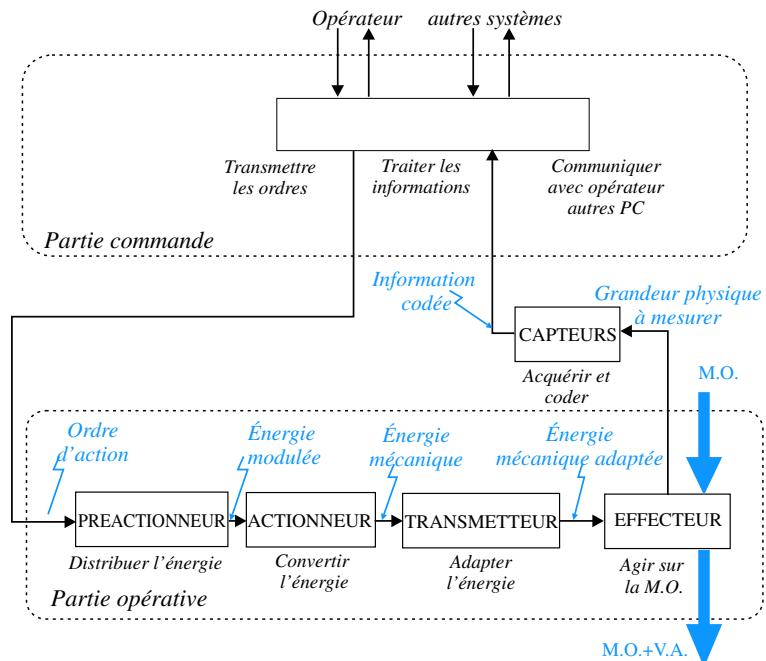
- distribuer l'énergie ;
- transformer l'énergie ;
- adapter l'énergie ;
- agir sur la matière d'œuvre.

## 1.4.2

# Constituants des chaînes fonctionnelles

La partie opérative d'un système automatisé peut être décrite en une ou plusieurs chaînes fonctionnelles, ces dernières comportant une chaîne d'action et une chaîne d'acquisition :

- une chaîne d'action est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de convertir un ordre émis par la partie commande en effet sur la matière d'œuvre ;
- une chaîne d'acquisition est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de prélever des grandeurs physiques sur la partie opérative ou sur l'environnement et de les convertir en signaux interprétables par la partie commande.



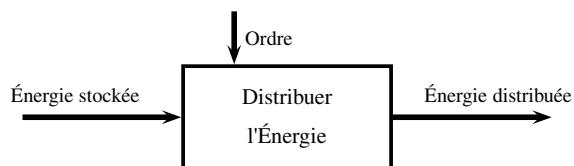
**Figure 1.13** Les constituants d'une chaîne fonctionnelle.

## Préactionneur

Un **préactionneur** est un constituant dont le rôle est de distribuer, sur ordre de la partie commande, l'énergie utile aux actionneurs.

Les préactionneurs les plus utilisés sont :

- les relais, les contacteurs, pour les actionneurs électriques ;
- les distributeurs, pour les actionneurs pneumatiques ou hydrauliques.



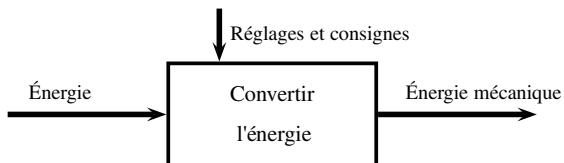
**Figure 1.14** Approche fonctionnelle d'un préactionneur.

## Actionneur

Un **actionneur** est un constituant qui transforme l'énergie disponible en énergie mécanique.

Les actionneurs les plus utilisés sont :

- les moteurs électriques, thermiques, pneumatiques ou hydrauliques ;
- les vérins électriques, pneumatiques ou hydrauliques.

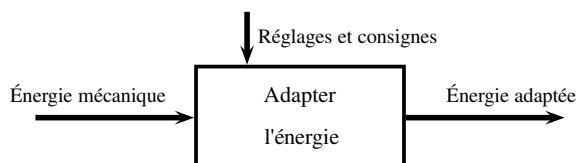


**Figure 1.15** Approche fonctionnelle d'un actionneur.

## Transmetteur

Un **transmetteur** est un constituant dont le rôle est d'adapter l'énergie mécanique pour la rendre utilisable par l'effecteur.

Tous les dispositifs de transformation de mouvements, tels des réducteurs, des variateurs, des systèmes à bielle-manivelle par exemple, sont des transmetteurs.



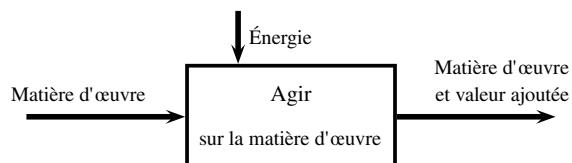
**Figure 1.16** Approche fonctionnelle d'un transmetteur.

## Effecteur

Un **effecteur** est un constituant dont le rôle est d'agir sur la matière d'œuvre afin de lui apporter sa valeur ajoutée.

Quelques exemples d'effecteurs :

- une pince de robot manipulateur ;
- un outil de fabrication ;
- un tapis roulant.



**Figure 1.17** Approche fonctionnelle d'un effecteur.

## Capteur

Un **capteur** est un élément qui transforme une grandeur physique quelconque en une grandeur physique exploitable par la partie commande.



Il ne faut pas confondre un capteur avec un détecteur, ce dernier ne délivrant qu'une information booléenne.

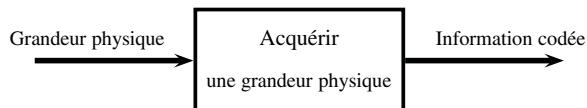


Figure 1.18 Approche fonctionnelle d'un capteur.

On peut citer quelques exemples de capteurs de grandeurs mécaniques :

- les capteurs de position
  - potentiomètre linéaires, rotatifs ;
  - codeurs, codeurs incrémentaux ;
  - règles magnétiques, cellules magnétorésistives, magnétostriktives.
- les capteurs de vitesse
  - tachymètre ;
  - génératrice tachymétrique.
- les capteurs d'accélération
  - accélémètres
- les capteurs de force
  - dynamomètre ;
  - jauge de déformation ;
  - cellules piezooélectriques ;
  - manomètre.
- les capteurs de débit
  - débitmètres.

### 1.4.3 Chaîne d'énergie et chaîne d'information

Après avoir identifié et nommé les constituants d'une chaîne fonctionnelle, on peut reprendre la figure (1.13) et la présenter en mettant en avant les fonctions génériques assurées par les différentes boîtes.

La figure (1.19) ainsi obtenue peut servir de grille fonctionnelle de référence pour l'approche d'un système automatisé.

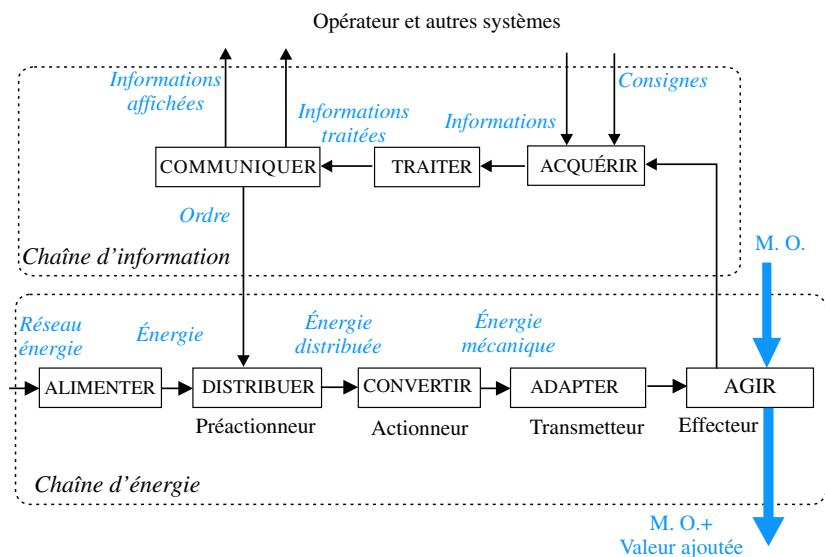


Figure 1.19 Chaîne d'énergie et chaîne d'information.

## Synthèse

### Savoirs

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- système - système complexe ;
  - mécanique ;
  - automatique ;
  - machine, mécanisme, servomécanisme ;
  - fonction, fonction de service ;
  - matière d'œuvre, valeur ajoutée ;
  - modèle ;
  - critère ;
  - partie commande et partie opérative.
- Je connais :
- les différentes approches d'un système ;
  - les outils d'expression APTÉ, FAST et SADT.

### Savoir-faire

#### Je sais

- hiérarchiser des fonctions ;
- décrire la constitution d'une chaîne d'énergie par une approche fonctionnelle ;
- nommer les constituants d'une chaîne d'énergie par une approche structurelle.



# Mécanique

## Les bases

CHAPITRE **2**

### Plan

<b>2.1</b> Orienter l'espace	18
<b>2.2</b> Définir un angle	20
<b>2.3</b> Les différents repères d'espace	22
<b>2.4</b> Vecteurs – Opérations sur les vecteurs	25
<b>2.5</b> Torseurs – Opérations sur les torseurs	29
<b>2.6</b> Dérivation vectorielle	33
Exercices d'application	38
Exercices d'approfondissement	39
Solutions des exercices	40

### Introduction

La mécanique du point est abordée en sciences physiques dès le lycée, et le vecteur est utilisé de manière élémentaire à cette occasion. Il sert pour imaginer le mouvement de points se déplaçant principalement dans des plans et pour poser des forces. L'élève travaille principalement à partir des coordonnées.

La mécanique du solide rend nécessaire trois progrès conséquents :

- d'une part acquérir une appréhension spatiale des problèmes ;
- d'autre part passer d'un vecteur à un ensemble de vecteurs ;
- enfin évoluer du calcul scalaire au calcul vectoriel.

Dans ce chapitre, il s'agit d'exposer les choix faits pour orienter l'espace et de mettre en place outils et techniques permettant de mener des calculs vectoriels méthodiques et efficaces.

### Prérequis

- Notion d'espace affine euclidien, d'espace vectoriel euclidien.
- Calculs vectoriels : Produits scalaire, vectoriel, mixte.
- Notion de taux de variation et de dérivation.
- Notion de fonction de plusieurs variables.

### Objectifs

- Orienter l'espace.
- Savoir définir un angle.
- Imaginer des mouvements.
- Acquérir les outils mathématiques pour les calculs vectoriels en mécanique.

## 2.1 Orienter l'espace



Cet espace est modélisé par un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3 et par l'espace vectoriel  $E$  associé.



Ces notions semblent tellement triviales que l'on n'y porte guère d'attention... Toute l'orientation de l'espace est basée sur ces définitions !

### 2.1.1

Qui s'intéresse à la mécanique doit apprendre à orienter l'espace géométrique dans lequel évoluent les objets, de manière à ce que quiconque ait la même interprétation.

#### Droite et gauche

Tout le monde fait la différence entre main droite et main gauche, et la surprise est grande quand on demande de définir la droite et la gauche... Pourquoi deux personnes se faisant face lèvent-elles la « bonne » main à la demande de lever la main droite ? Il est nécessaire de prendre du temps pour évoluer d'une perception qualitative de l'espace à une perception construite.

Concernant la droite et la gauche, c'est la première référence spatiale imaginée par l'homme et apprise de la même manière par tous qui pose les bases d'une interprétation commune :

- la « verticale », définie par le fil à plomb, est orientée du bas vers le haut ;
- le regard de l'observateur définit un « devant lui » et un « derrière lui » ;
- les côtés sont alors nommés à partir de cette verticale et de ce regard « droite » et « gauche ».

### 2.1.2

#### Direction

En mathématiques, le mot « direction » est souvent associé à un ensemble de droites affines parallèles, lesquelles ne sont pas orientées. Cette absence de sens est préjudiciable pour le mécanicien. Tel le voyageur se présentant à un carrefour, il a besoin de savoir si la direction à suivre est vers la droite ou vers la gauche. Sa destination finale en dépend. C'est pourquoi le mécanicien oriente une direction.

##### Définition

En mécanique, une **direction** est définie par un vecteur, que l'on peut tracer avec une flèche.



##### Remarque

Une direction **orientée** est préférable à ajouter un sens à une direction **non orientée**. En effet, parler de direction et de sens fait croire que l'on joue sur deux paramètres :

- je connais la direction, mais pas le sens ;
- je ne connais ni la direction, ni le sens.

Ces deux affirmations sont des exemples de propositions qui posent souci lors du décompte d'inconnues dans un problème. Y a-t-il une ou deux inconnues scalaires concernées par ces propositions ?

##### Exemple

En partant de l'affirmation « je connais la direction, mais pas le sens », le mécanicien raisonne de la manière suivante :

- la direction est connue, il trace donc une flèche pour la matérialiser et l'orienter ;
- il résout le problème et trouve un signe au résultat du calcul qu'il interprète par rapport à l'orientation posée :
  - le signe est positif, le résultat est donc dans le sens défini par la flèche ;
  - le signe est négatif, le résultat est donc dans le sens contraire à celui qui a été posé.

## 2.1.3

### Sens trigonométrique

En préliminaire, le lecteur ayant le « sens des aiguilles d'une montre » en tête doit réaliser que ce dernier ne convient pas dans l'espace. Il suffit pour cela de tracer un arc de cercle matérialisant ce sens sur une feuille transparente et de placer cette dernière entre deux observateurs se faisant face. En vision directe pour l'un et par transparence pour l'autre, ces deux observateurs ne voient pas le même sens horaire !

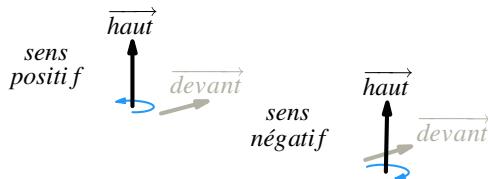
De plus, cette expérience met en évidence l'existence d'une droite particulière, perpendiculaire à la feuille et passant par le centre de l'arc de cercle.

#### Définition

On appelle **axe de rotation**, ou simplement **axe**, toute droite de l'espace affine autour de laquelle on tourne, ou autour de laquelle on peut tourner.

Soit alors un axe quelconque, que l'on oriente par une flèche. L'observateur se positionne parallèlement à cette droite, la tête du côté de la flèche que l'on appelle sur la figure ci-dessous *haut*. Son regard définit la direction notée *devant* dans laquelle il va avancer en tournant autour de cet axe. Il peut alors réaliser que seuls deux choix sont possibles :

- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa gauche ;
- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa droite.



**Figure 2.1** Les deux sens de rotation possibles autour d'une droite orientée.

#### Définition

On appelle sens **trigonométrique**, ou sens **direct**, ou sens **positif**, le sens de rotation qui laisse l'axe de rotation concerné sur la gauche lorsque l'on tourne autour.

## 2.1.1



Cette définition est à mettre en parallèle avec la « règle du bonhomme d'Ampère », la « règle du tire-bouchon » ou la « règle des trois doigts » du physicien. Elles donnent bien évidemment toutes le même résultat.



Peu importe le nom des vecteurs, c'est leur ordre qui est fondamental.

### Base vectorielle directe

Le choix d'une direction et du sens trigonométrique permet de construire une base orthonormée directe, très souvent notée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en mécanique.

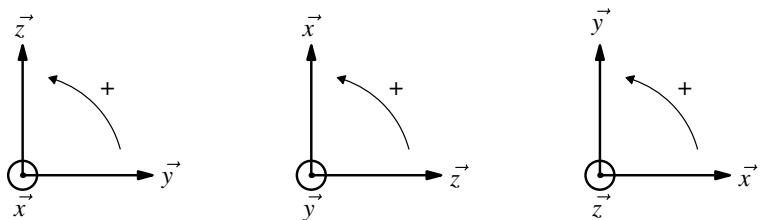
#### Remarque

La notation  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  n'est plus guère utilisée, car elle nécessite plus de caractères et met en indice les informations importantes.

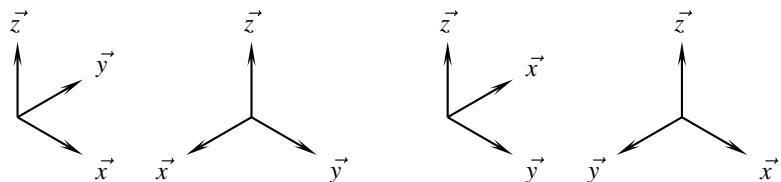
Pour une base vectorielle orthonormée directe  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , le sens positif se définit très simplement par permutation circulaire :

- autour de  $\vec{x}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{y}$  vers  $\vec{z}$  ;
- autour de  $\vec{y}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{z}$  vers  $\vec{x}$  ;
- autour de  $\vec{z}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{x}$  vers  $\vec{y}$  ;

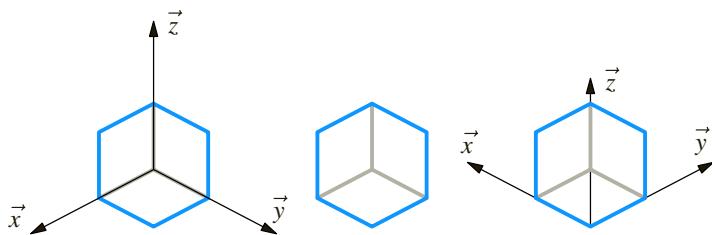
Les bases orthonormées directes sont omniprésentes en mécanique et il faut s'interdire l'emploi de bases indirectes sous peine d'erreurs fréquentes et de perte de temps à la lecture de documents.



**Figure 2.2** Les trois sens de rotation positifs, autour du vecteur qui sort de la feuille.



Les quatre figures ci-dessus permettent d'imaginer les perspectives parce que l'on sait que les bases sont directes.



**Figure 2.3** Interprétation des perspectives

Sur la figure centrale où aucune base n'est définie, on ne sait s'il s'agit d'un cube plein ou d'un trièdre creux, contrairement au cube de droite et au trièdre creux à gauche !

## 2.2 Définir un angle

Un angle est défini entre deux vecteurs. C'est donc une construction plane, dans le plan vectoriel défini par ces deux vecteurs.

La seule activité à savoir mener est ainsi de définir un angle entre deux bases vectorielles ayant un vecteur commun. Ce vecteur commun est bien évidemment le vecteur orthogonal au plan contenant l'angle à définir.

Supposons pour la suite de cette section que l'on ait à définir l'angle  $\alpha$  entre une base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et une base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , les vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  restant égaux à chaque instant.

### 2.2.1 Choix initial

Que ce soit l'enseignant au tableau ou l'étudiant devant sa feuille, il lui faut orienter son plan de travail, en choisissant soit une normale sortante, soit une normale entrante.

Les auteurs de cet ouvrage font et recommandent le choix de toujours orienter le plan de la feuille ou du tableau par la normale sortante.



Le fait que la base soit directe n'est pas précisé. Toutes les bases vectorielles le sont dans ce cours.

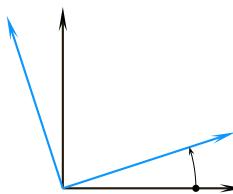


Au volant de son véhicule, un conducteur peut rouler sur la voie de gauche, rien ne l'en empêche. Il n'est juste pas difficile d'imaginer les possibles conséquences désastreuses de ce choix ! Il en est de même pour le choix de l'orientation de la feuille...

La définition d'un angle débute donc toujours par le dessin de l'empreinte suivante :



L'angle est petit, positif et orienté de la base noire vers la base bleue, pour définir l'angle de la base bleue par rapport à la base noire...



Le vecteur commun aux deux bases vectorielles sort de la feuille, et il doit en être toujours ainsi. Il n'est en conséquence pas nécessaire d'ajouter de symbole pour le préciser ! De même, il est toujours défini petit et positif, de manière à permettre des calculs trigonométriques rapides et sans erreur de signe.

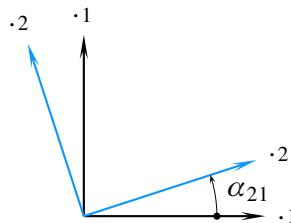
## 2.2.2

### La figure de définition

L'empreinte étant posée, il faut décider quel angle on définit :

- est-ce l'angle  $\alpha_{21}$  pour définir la position de la base 2 par rapport à la base 1 ?
- ou bien est-ce l'angle  $\alpha_{12}$  pour définir la position de la base 1 par rapport à la base 2 ?

Supposons pour la suite que ce soit l'angle  $\alpha_{21}$ . L'empreinte peut donc être annotée de la manière suivante



L'angle et les indices sont ainsi en correspondance.

Terminer la figure est possible dès que le vecteur commun aux deux bases est identifié. S'il s'agit comme supposé des vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$ , la figure finale est enfin



Se poser les questions :

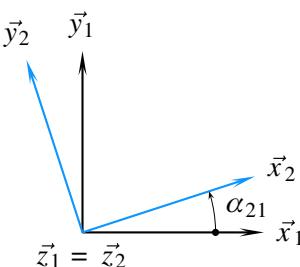
Le vecteur commun sort-il bien de la feuille ? L'angle est-il bien petit et positif ? Les indices sont-ils bien cohérents ?

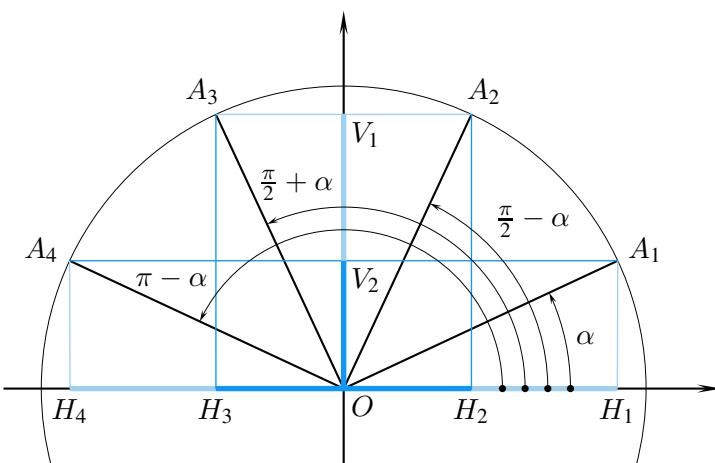
## 2.2.3

### Calculs de trigonométrie

La figure de définition d'un angle s'inspire du cercle trigonométrique et le mécanicien s'en sert pour trouver immédiatement et sans calcul les sinus et cosinus lors des produits scalaires et vectoriels, tel qu'exposé aux sections 2.4.2 et 2.4.3 à partir de la page 12.

Le tableau suivant résume quelques unes parmi les égalités remarquables que l'on peut immédiatement retrouver à partir d'un cercle trigonométrique.





$x$	$\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$
$f(x)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$

(1)

Pour la détermination de  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  par exemple, le rayon concerné est le segment  $[O, A_3]$ , et le cosinus de l'angle  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  est représenté par le segment  $[O, H_3]$ , dont la longueur est la même que celle du sinus de l'angle  $\alpha$ . De plus, l'orientation du segment  $[O, H_3]$  informe de sa valeur algébrique négative.

## 2.3 Les différents repères d'espace

L'espace géométrique est un espace de points.

Le repère d'espace de référence est un repère orthonormé direct construit à partir d'un point particulier et d'une base vectorielle.

Les axes du repère sont les droites issues du point origine et sont orientés par les vecteurs de la base.

Soient  $O$  un point pris comme origine et  $P$  le point courant que l'on veut repérer

### 2.3.1

#### Repérage cartésien

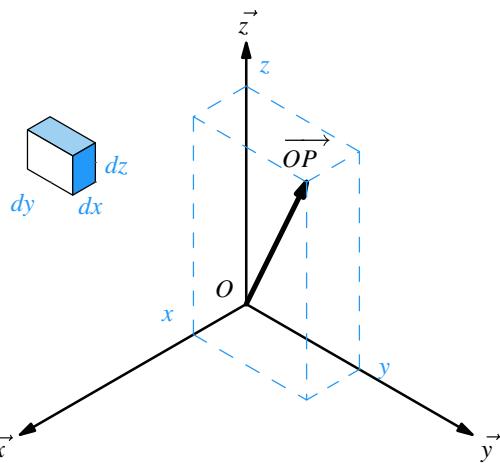
Le point  $P$  est repéré par trois longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \quad (2)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ .

Le mécanicien, dans un souci de rapidité, nomme  $\vec{x}$  à la fois la direction et le vecteur unitaire de l'axe  $(O, \vec{x})$ , et  $x$  l'abscisse du point courant sur cet axe.

! Ces homonymies sont parfois un peu déroutantes au début.



**Figure 2.4** Les trois coordonnées cartésiennes d'un point.

### 2.3.2



On parle également de repérage polaire, par extension de ce qui se fait dans un plan.

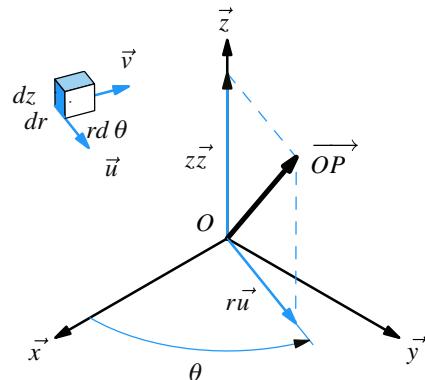
### Repérage cylindrique

Le point  $P$  est repéré par un angle et deux longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u} + z\vec{z} \quad (3)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dr$ ,  $r d\theta$  et  $dz$ . Son volume est ainsi  $dV = r dr d\theta dz$ .

Une surface rectangulaire élémentaire de normale  $\vec{u}$  autour du point  $P$  est d'aire élémentaire  $dS = r d\theta dz$ .



**Figure 2.5** Les trois coordonnées cylindriques d'un point.

### 2.3.3

### Repérage sphérique

Le point  $P$  est repéré par deux angles et une longueur algébrique :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u} \quad (4)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dr$ ,  $r d\varphi$  et  $r \sin \varphi d\theta$ .

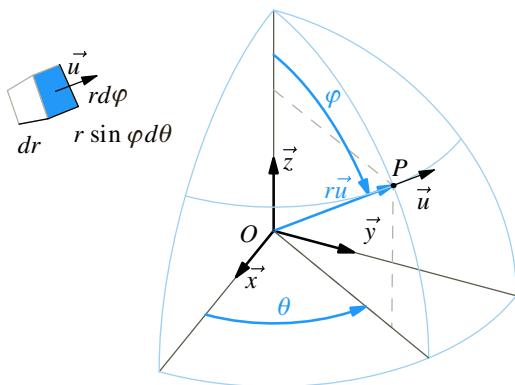


Figure 2.6 Les trois coordonnées sphériques d'un point.

## 2.3.4

### Les angles d'Euler

On ne peut terminer la section sur les différents systèmes de repérage sans s'intéresser au problème récurrent en mécanique de positionner une base vectorielle quelconque par rapport à une autre, sachant que l'on ne sait pas définir d'angle pour passer d'une base à une autre lorsqu'il n'y a pas de vecteur commun entre les deux.

Le principe des angles d'Euler résout ce problème de manière simple et efficace. Il s'agit de procéder à trois rotations successives, que l'on peut comprendre aisément en les présentant dans un ordre différent :

- la première, appelée **précession**, autour d'un des trois vecteurs de la première base, peu importe lequel ;
- la troisième, appelée **rotation propre**, autour d'un des vecteurs de la deuxième base ;
- enfin la deuxième, appelée **nutation**, autour d'un des deux vecteurs orthogonaux aux deux vecteurs précédemment choisis. Ce vecteur est appelé **vecteur nodal**.

Il est logique de présenter les angles d'Euler dans une section présentant les différents moyens pratiques pour définir des repères. Mais les outils vectoriels pour définir les bases intermédiaires ne sont pas encore exposés.

Ces angles seront donc repris et définis en application du produit vectoriel à la page 27.

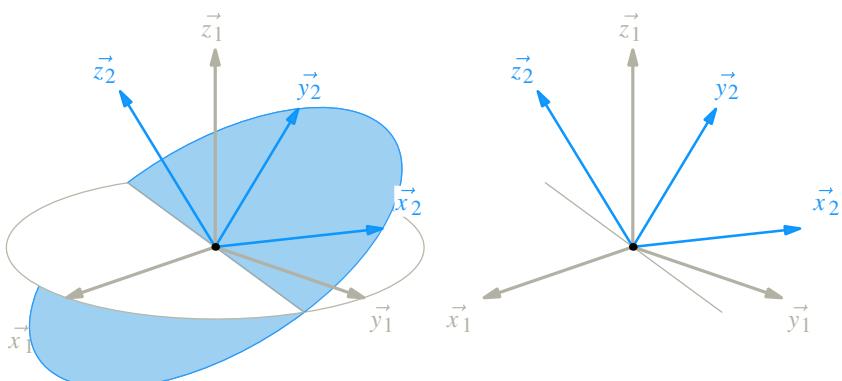


Figure 2.7 Les angles d'Euler.

La précession est ici autour de  $\vec{z}_1$ , la rotation propre autour de  $\vec{z}_2$ , et le vecteur nodal est suivant la droite d'intersection des deux plans illustrant les rotations

## 2.4 Vecteurs – Opérations sur les vecteurs

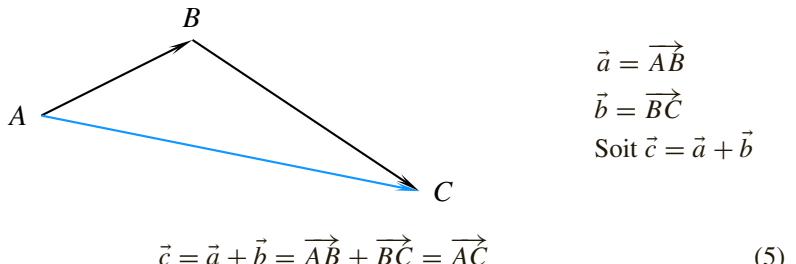
### 2.4.1 Vecteur

#### Définition

Cette définition est la plus simple à donner et elle convient fort bien.

Un **vecteur** est un élément d'un espace vectoriel.

Le mécanicien s'intéresse plus particulièrement aux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3. Ces vecteurs-là ont la particularité de se laisser représenter par des flèches, ce qui est commode pour dessiner des vitesses ou des forces. Une des propriétés remarquables de ces vecteurs « flèches » est qu'on peut les sommer en les dessinant bout à bout.



### 2.4.2 Produit scalaire

#### Définition

Orienter un angle devient vite un réflexe de mécanicien, même les rares fois où cela ne serait pas nécessaire, par exemple pour définir le produit scalaire.

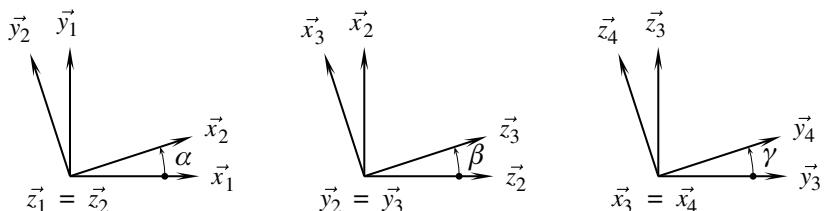
Le **produit scalaire** est une application qui à un couple de vecteurs associe un nombre réel égal au produit des normes et du cosinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \longmapsto \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Le produit scalaire est très rarement employé ainsi en mécanique. Les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont souvent unitaires et le cosinus est directement déterminé à partir des figures de définition des angles, comme cela a été expliqué sur le cercle trigonométrique de la page 22.

#### Exemple de calcul direct de produits scalaires



$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = \sin \beta$	$\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_4 = -\sin \gamma$
$\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_1 = \sin \beta \cos \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1 = \cos \beta \cos \alpha$	$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = \sin \beta \sin \alpha$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 =$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 =$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_4 =$
$\vec{x}_4 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_4 =$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_4 =$

Pour le produit scalaire  $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$ , les deux vecteurs apparaissent sur la première figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\alpha$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_3$ , les deux vecteurs apparaissent sur la deuxième figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\pi/2 - \beta$ , dont le cosinus vaut bien  $\sin \beta$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_4$ , les deux vecteurs apparaissent sur la troisième figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\pi/2 + \gamma$ , dont le cosinus vaut bien  $-\sin \gamma$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_1$ , les deux vecteurs n'apparaissent pas sur la même figure. Il est alors nécessaire de passer par l'intermédiaire de la base 2. Les deux raisonnements suivants sont équivalents

- on constate sur la deuxième figure que  $\vec{z}_3 = \cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{x}_2$  et on utilise ensuite la première figure
- on constate sur la première figure que  $\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x}_2 - \sin \alpha \vec{y}_2$  et on utilise ensuite la deuxième figure

La décomposition des vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{x}_1$  a été faite ici par écrit pour expliquer. C'est une activité à apprendre à mener de tête.

## 2.4.3 Produit vectoriel

### Définition

Il est indispensable d'orienter l'angle, sous peine de faire des erreurs de signes !

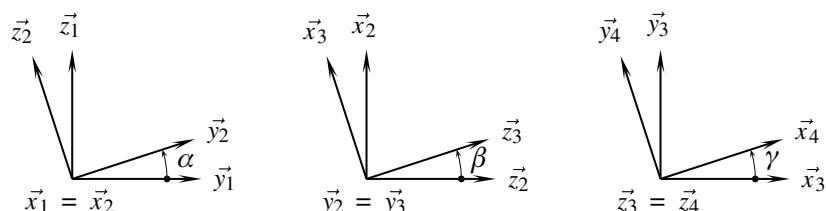
Le **produit vectoriel** est une application qui à un couple de vecteurs associe un vecteur porté par le vecteur unitaire **directement** orthogonal à ces deux vecteurs et de module égal au produit des normes et du sinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \longrightarrow E$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \longmapsto \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \sin(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \vec{n}$$

Comme pour le produit scalaire, la définition est très rarement utilisée en l'état. Le mécanicien apprend également à effectuer les produits vectoriels directement à partir des figures de définition des angles.

### Exemple de calcul direct de produits vectoriels



$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin \alpha \vec{x}_1$	$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3 = -\cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_4 = \vec{0}$
$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \vec{z}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \beta \vec{y}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_4 = \cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 =$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 =$	$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_4 =$
$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 =$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 =$	$\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_3 =$

Pour le produit vectoriel  $\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2$ , les deux vecteurs apparaissent sur la première figure et la rotation de  $\vec{y}_1$  vers  $\vec{y}_2$  est positive autour de  $\vec{x}_1$ , d'angle  $\alpha$ .

Pour le produit vectoriel  $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3$ , les deux vecteurs apparaissent sur la deuxième figure. Deux raisonnements équivalents permettent de conclure :

- le vecteur directement orthogonal en allant de  $\vec{x}_2$  vers  $\vec{z}_3$  est le vecteur  $-\vec{y}_2$  et l'angle non orienté entre  $\vec{x}_2$  et  $\vec{z}_3$  vaut  $\pi/2 - \beta$ , dont le sinus est égal à  $\cos \beta$  ;
- le résultat est porté par  $+\vec{y}_2$  et la rotation de  $\vec{x}_2$  vers  $\vec{z}_3$  dans le sens positif et d'angle orienté  $3\pi/2 + \beta$  dont le sinus est égal à  $-\cos \beta$ .

### Application du produit vectoriel

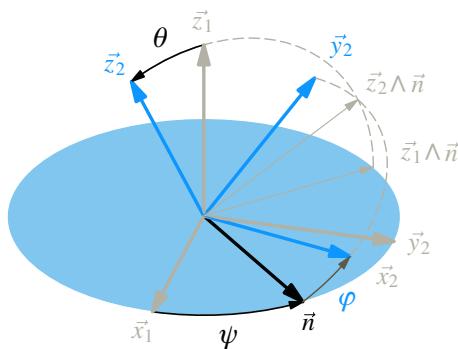
Une des applications du produit vectoriel est la construction de trièdres directs. Soit  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base orthonormée directe, on a les trois égalités immédiates

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} \quad \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{z} \quad \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x} \quad (6)$$

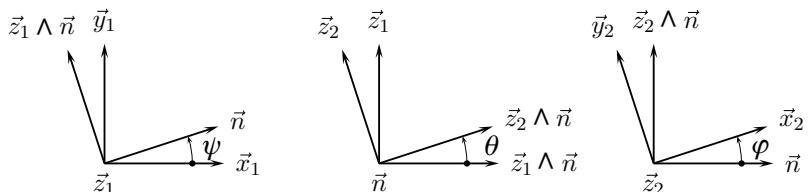
On dispose maintenant des outils pour définir proprement les angles d'Euler présentés page 24 à la section 2.3.4.

Le vecteur nodal  $\vec{n}$  est à poser orthogonal aux vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$ . En supposant ces derniers différents l'un de l'autre, il suffit de poser

$$\vec{n} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2\|}$$



**Figure 2.8** Les trois angles d'Euler.



## 2.4.4 Produit mixte

### Définition

Le **produit mixte** est une application qui à un triplet de vecteurs associe un nombre réel égal au produit scalaire du produit vectoriel des deux premiers avec le troisième.

$$E \times E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \mapsto (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3$$

La propriété importante du produit mixte est son invariance par permutation circulaire sur les vecteurs

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= (\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1) = (\vec{u}_3, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \\ (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 &= (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \cdot \vec{u}_1 = (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 \end{aligned} \quad (7)$$



**Exemple**

Si  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est une base orthonormée directe, le produit mixte  $(\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2) \cdot \vec{z}_1$  s'évalue rapidement par

$$(\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2) \cdot \vec{z}_1 = (\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_2 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2$$

Le produit mixte est un outil à privilégier lors des calculs à venir. Nombre de lois entrée-sortie recherchées s'expriment sous la forme d'une égalité de deux produits mixtes, et son emploi non seulement allège les écritures, mais limite bien des calculs.

**2.4.5**

La place des parenthèses dans le double produit vectoriel est importante.

**Double produit vectoriel**

Pour mémoire, il n'est pas inutile de rappeler ici la formule de développement du double produit vectoriel. Pour la retrouver rapidement, il suffit de réaliser que le résultat du double produit vectoriel  $\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3)$  est un vecteur défini dans le plan  $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$  et de respecter l'ordre dans lequel ces deux vecteurs apparaissent.

$$\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3)\vec{u}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_3 \quad (8)$$

Le double produit vectoriel est utile pour répondre aux deux questions suivantes :

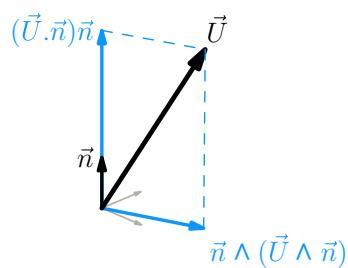
- comment décomposer un vecteur ?
- comment résoudre l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  ?

**a) Décomposer un vecteur**

On considère un vecteur  $\vec{U}$  quelconque, un plan  $(\Pi)$  quelconque et  $\vec{n}$  un vecteur orthogonal à ce plan.

On souhaite décomposer le vecteur  $\vec{U}$  en somme d'un vecteur porté par la normale  $\vec{n}$  et d'un vecteur du plan  $(\Pi)$ .

$$\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n}) \quad (9)$$



**Figure 2.9** Décomposition d'un vecteur.

**b) Résoudre l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$** 

L'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  n'admet de solution que si le vecteur  $\vec{a}$  est non nul et orthogonal au vecteur  $\vec{c}$ . La solution s'écrit alors

$$\vec{x} = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10)$$

## 2.5 Torseurs – Opérations sur les torseurs

### 2.5.1 Champ de vecteurs

#### Définition

On appelle **champ de vecteurs** une application qui à chaque point de l'espace affine associe un vecteur.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \vec{u}(P)\end{aligned}$$

Parmi les particularités possibles d'un champ de vecteurs, on en retient deux :

- champ de vecteurs **uniforme**

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \quad \vec{u}(A) = \vec{u}(B) \quad (11)$$

Les vecteurs sont identiques à chaque instant, ce qui ne présume pas de leur évolution au cours du temps.

- champ de vecteurs **équiprojectif**

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \quad \vec{u}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u}(B) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (12)$$

Les deux vecteurs  $\vec{u}(A)$  et  $\vec{u}(B)$  ont même projection orthogonale sur la direction  $\overrightarrow{AB}$ .

### 2.5.2 Torseur

#### Définition

Un **torseur** est un champ de vecteurs équiprojectif.

Le mot *torseur*, de la même famille que torsade, vient de la forme remarquable d'un champ de vecteurs équiprojectif. Cette forme est proposée un peu plus loin à la page 20.

Un champ de vecteurs équiprojectif a la propriété remarquable de correspondre à une application linéaire antisymétrique. Il existe un vecteur que l'on note  $\vec{r}$  et qui permet de changer facilement de points sur le champ de vecteur :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \quad \vec{u}(B) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (13)$$

#### Définitions

Le vecteur  $\vec{r}$  est appelé **vecteur résultante** du torseur.

Le vecteur  $\vec{u}(P)$  est appelé **vecteur moment** au point  $P$  du torseur.

Les deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(P)$  sont appelés **éléments de réduction** du torseur au point  $P$ . Ils sont habituellement présentés derrière une accolade ouvrante, en commençant toujours par le vecteur résultante.

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vecteur résultante} \\ \text{Vecteur moment au point } P \end{array} \right. \quad (14)$$



Cette formule 13 peut être appellée  
formule de changement de points.

**Remarque**

La terminologie employée, *torseur*, *résultante* et *moment* a des origines historiques. Les scientifiques ont si longtemps buté sur la modélisation des actions mécaniques que les termes issus de leurs préoccupations se sont ancrés aux objets mathématiques qui les modélisent. Aujourd’hui, ces objets modélisent bien d’autres choses que les actions mécaniques, mais ont gardé leurs noms originaux…

**2.5.3****Somme de deux torseurs**

Soient deux champs de vecteurs équiprojectif  $\vec{u}_1(P)$  et  $\vec{u}_2(P)$ . On construit un nouveau champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  défini par  $\forall P, \vec{u}(P) = \vec{u}_1(P) + \vec{u}_2(P)$ . Ce champ  $\vec{u}(P)$  est également un champ de vecteurs équiprojectif, dont les éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$  se déterminent simplement par

$$\begin{cases} \vec{r} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \\ \vec{u}(A) &= \vec{u}_1(A) + \vec{u}_2(A) \end{cases} \quad (15)$$

L’écriture torsorielle de la somme de deux champs de vecteurs équiprojectifs est élémentaire.

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \quad (16)$$

**2.5.4****Comoment – Automoment**

Soient deux champ de vecteurs équiprojectif  $\vec{u}_1(P)$  et  $\vec{u}_2(P)$  dont on détermine les éléments de réduction en un même point  $A$ .

$$\mathcal{T}_1 = \begin{cases} \vec{r}_1 \\ \vec{u}_1(A) \end{cases} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{cases} \vec{r}_2 \\ \vec{u}_2(A) \end{cases}$$

**Définition**

On appelle **comoment** des deux torseurs  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , que l’on note  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ , le nombre scalaire obtenu à partir des éléments de réduction de la manière suivante

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(A) + \vec{u}_1(A) \cdot \vec{r}_2 \quad (17)$$

Le comoment est indépendant du point de calcul.

Le comoment d’un torseur avec lui-même donne le double du produit scalaire de la résultante et du moment en un point quelconque.

**Définition**

On appelle **automoment** d’un torseur l’invariant scalaire obtenu lors du produit scalaire du vecteur résultante et du vecteur moment en un point quelconque.

**2.5.5****Axe central**

Pour un torseur à résultante non nulle, il existe une droite particulière de l’espace pour laquelle le vecteur moment est colinéaire au vecteur résultante.

Soit un torseur  $\mathcal{T}$  connu par ses éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$ . On recherche l’ensemble des points  $P$  vérifiant  $\vec{r} \wedge \vec{u}(P) = \vec{0}$ .

En utilisant la formule de changement de points  $\vec{u}(P) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AP}$  pour introduire le moment connu  $\vec{u}(A)$ , cela revient à chercher l’ensemble des points  $P$  vérifiant :

$$\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \overrightarrow{AP}) = -\vec{r} \wedge \vec{u}(A)$$

On retrouve le développement du calcul de l'exercice 2.7.15 où on recherche les solutions d'une équation de type  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$ . Comme ici le vecteur  $\vec{r} \wedge \vec{u}(A)$  est orthogonal au vecteur  $\vec{r}$ , la seule condition est d'avoir un vecteur résultante non nul pour une infinité de vecteurs solution de la forme :

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{\vec{r} \wedge \vec{u}(A)}{\vec{r}^2} + \lambda \vec{r} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### Définition

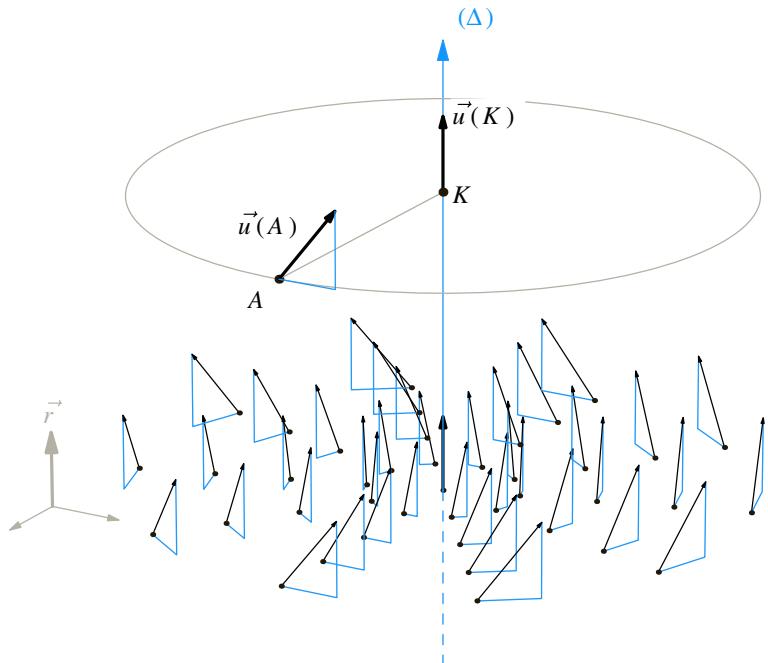
On appelle **axe central** d'un torseur la droite pour laquelle le vecteur résultante et le vecteur moment sont colinéaires. Cet axe central est défini dès que le vecteur résultante n'est pas nul.

Tracer ces propositions sur la figure 2.10.

La représentation graphique la plus remarquable d'un torseur est celle construite autour de l'axe central :

- l'axe central est orienté par le vecteur résultante ;
- tous les points de l'axe central ont le même moment, appelé **moment central** ;
- le moment central est colinéaire à la résultante ;
- le vecteur moment est invariant le long de toute droite parallèle à l'axe central ;
- deux plans perpendiculaires à l'axe central admettent la même répartition des vecteurs moments. Pour un plan perpendiculaire à l'axe central :

- un vecteur moment en un point quelconque  $Q$  est égal au moment central augmenté d'une composante orthogonale à la résultante et proportionnelle à la distance de l'axe central au point considéré ;
- pour tout point d'un cercle centré sur l'axe central, la composante additionnelle a le même module et est orthogonale au rayon.



**Figure 2.10** La répartition des vecteurs moments autour de l'axe central.

## 2.5.6

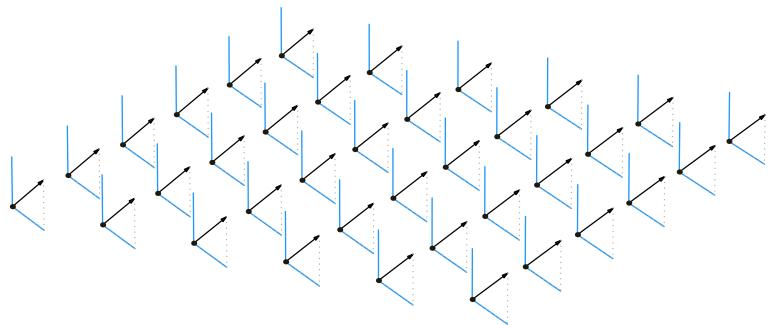
**Torseurs particuliers****a) Torseur nul****Définition**

Un **torseur nul** est un champ de vecteurs nul. Ses éléments de réduction sont les vecteurs nuls et on le note simplement  $\mathcal{O}$ .

**b) Torseur couple****Définition**

Un **torseur couple** est un champ de vecteurs uniforme non nul. Sa résultante est le vecteur nul.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\} \quad (18)$$

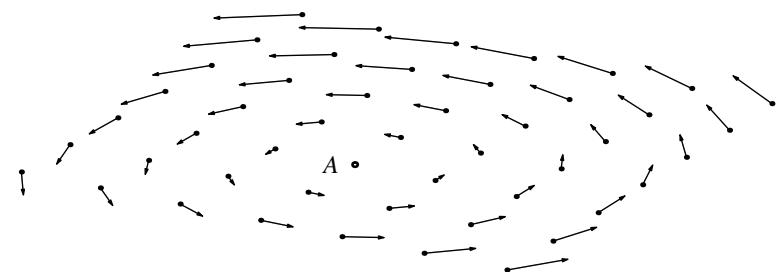


**Figure 2.11** Un champ de vecteurs uniforme non nul.

**c) Torseur glisseur****Définition**

Un **torseur glisseur** est un champ de vecteurs non nul à automoment nul. Le moment est nul en tout point de l'axe central.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \\ _A \vec{0} \end{array} \right\} \quad (19)$$



**Figure 2.12** Un champ de vecteurs non nul à automoment nul.

## 2.6 Dérivation vectorielle

Savoir décrire des positions est une compétence recherchée. Mais le mécanicien souhaite connaître également l'évolution de ces positions au cours du temps. Il est donc nécessaire de savoir décrire les variations d'un vecteur au cours du temps.

### Définition

La dérivée d'un vecteur  $\vec{U}$  dans une base  $k$  est un vecteur dont les composantes dans la base  $k$  sont les dérivées respectives des coordonnées de  $\vec{U}$  dans cette même base.

Cette définition est donnée ici pour mémoire uniquement et sans publicité supplémentaire, car il faut absolument éviter de l'utiliser. Cela conduit à des calculs fastidieux aux résultats peu exploitables.

Par contre, cette définition introduit bien le fait que dériver un vecteur implique une base d'observation. Une notation précisant cette base est quant à elle indispensable.

### Notation

La dérivée d'un vecteur  $\vec{U}$  par rapport au temps n'a de sens que relatif à une base vectorielle  $k$  et se note  $\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k$

### 2.6.1

## Règles pratiques de calcul

Démontrer toutes les propriétés de la dérivation vectorielle dépasse largement le cadre de cet ouvrage et est habituellement fait lors du cours de mathématique. On se contente ici d'énoncer les règles de calculs à mettre en œuvre en mécanique.

- Dérivée d'une somme

$$\left[ \frac{d(\vec{U} + \vec{V})}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k + \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (20)$$

- Dérivée d'un produit

$$\left[ \frac{d(\lambda \vec{U})}{dt} \right]_k = \frac{d\lambda}{dt} \vec{U} + \lambda \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \quad (21)$$

- Dérivée d'un produit scalaire

$$\frac{d(\vec{U} \cdot \vec{V})}{dt} = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (22)$$

- Dérivée d'un produit vectoriel

$$\left[ \frac{d(\vec{U} \wedge \vec{V})}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (23)$$

### 2.6.2

## Variation d'un vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1, donc constante. La seule évolution possible est un changement de direction qui ne peut être apprécié que par rapport à une base vectorielle d'observation.

Que se passe-t-il lorsque l'on souhaite changer de base d'observation ?

Répondre à cette question débouche sur la formule de changement de bases, appelée formule de dérivation vectorielle. C'est la formule fondamentale à utiliser pour tous les calculs de dérivation vectorielle.

### Définition

On appelle **formule de dérivation vectorielle** la formule de changement de bases d'observation. Elle s'exprime par

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_i + \vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{u} \quad (24)$$

Bien repérer l'ordre des indices  $i$  et  $k$  !

Le vecteur  $\vec{\Omega}(i/k)$  est appelé vecteur rotation de la base vectorielle  $i$  par rapport à la base vectorielle  $k$ , et cette formule permet de déterminer la dérivée d'un vecteur dans une base  $k$  à partir de la connaissance de sa dérivée dans une base  $i$ . Pour les calculs pratiques, il apparaît de suite judicieux de chercher à chaque fois une base  $i$  dans laquelle le vecteur  $\vec{u}$  ne bouge pas.

## 2.6.3

### Le vecteur rotation

Le vecteur rotation est bien évidemment en relation avec les angles que l'on définit pour passer d'une base vectorielle à une autre. On le construit en deux étapes, en commençant par le cas où deux bases vectorielles ont un vecteur commun.

### Notation

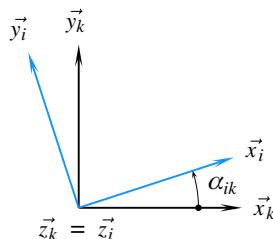
Pour accélérer les écritures, il est usuel de noter la dérivée première d'un paramètre scalaire par un point au dessus de ce paramètre à la place de la fraction  $d/dt$ . De même, la dérivée seconde est notée avec deux points consécutifs.

- exemple pour un angle :  $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$
- pour une longueur scalaire :  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Ces notations abrégées conviennent pour les scalaires, mais NE conviennent PAS pour les vecteurs !

### Définition

Soient deux bases vectorielles  $i$  et  $k$  ayant un vecteur commun. On appelle **vecteur rotation** de la base  $i$  par rapport à la base  $k$  le vecteur noté  $\vec{\Omega}(i/k)$ , porté par la direction commune aux deux bases et de valeur algébrique la dérivée scalaire de l'angle défini entre les deux bases.



Le vecteur rotation est défini par

$$\vec{\Omega}(i/k) = \dot{\alpha}_{ik} \vec{z}_k$$

Le terme  $\dot{\alpha}_{ik}$  est appelé **taux de rotation**, parfois vitesse de rotation, et a comme unité le radian par seconde.

## 2.6.4

### Composition des rotations

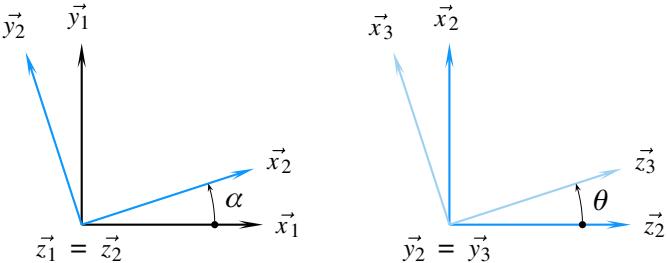
Lorsque les bases vectorielles n'ont pas de vecteurs communs, on s'attache à enchaîner des rotations élémentaires, comme pour les angles d'Euler, de manière à se retrouver dans la situation connue où deux bases vectorielles ont un vecteur commun.

La notion plus générale de composition des mouvements est reprise au chapitre suivant.

En supposant pouvoir décrire une rotation  $i/k$  en enchaînant deux rotations  $i/j$  et  $j/k$ , on obtient le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  par la somme des deux vecteurs rotation  $\vec{\Omega}(i/j)$  et  $\vec{\Omega}(j/k)$

$$\vec{\Omega}(i/k) = \vec{\Omega}(i/j) + \vec{\Omega}(j/k) \quad (25)$$

### Exemple



Ces deux figures permettent de poser  $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\alpha}\vec{z}_1$  et  $\vec{\Omega}(3/2) = \dot{\theta}\vec{y}_2$ .

Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(3/1)$  est obtenu par la composition des deux rotations élémentaires 3/2 et 2/1 et on obtient instantanément son expression par la somme des deux vecteurs rotation précédents

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(3/1) &= \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \\ &= \dot{\theta}\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.6.5

### Dérivation d'un vecteur quelconque

Soit  $\vec{U}(t) = \lambda(t)\vec{u}(t)$  un vecteur quelconque,  $\vec{u}(t)$  étant un vecteur unitaire. Toutes les quantités dépendent du temps, ce qui fait que la variable  $t$  est rarement explicitée et l'on se contente d'écrire : Soit  $\vec{U} = \lambda \vec{u}$  un vecteur quelconque,  $\vec{u}$  étant un vecteur unitaire.

Au cours du temps et par rapport à une base d'observation, le vecteur  $\vec{U}$  peut changer de module ou changer de direction, ce qu'exprime très bien la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

$$\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\lambda\vec{u}}{dt} \right]_k = \frac{d\lambda}{dt}\vec{u} + \lambda \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k \quad (27)$$

- le terme  $\frac{d\lambda}{dt}\vec{u}$  représente la vitesse de variation de module à direction constante ;
- le terme  $\lambda \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k$  représente la vitesse de variation de direction à module constant.

### Exemple

On reprend les figures de définition des angles  $\alpha$  et  $\theta$  de l'exemple précédent vu à la section 2.6.4, et on définit le vecteur  $\vec{AP} = \rho\vec{x}_2 + b\vec{x}_3$ , la longueur  $b$  restant constante au cours du temps. La dérivée de ce vecteur dans la base 1 se calcule par

$$\left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_1 = \dot{\rho}\vec{x}_2 + \rho \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_1 + b \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_1 \quad (28)$$

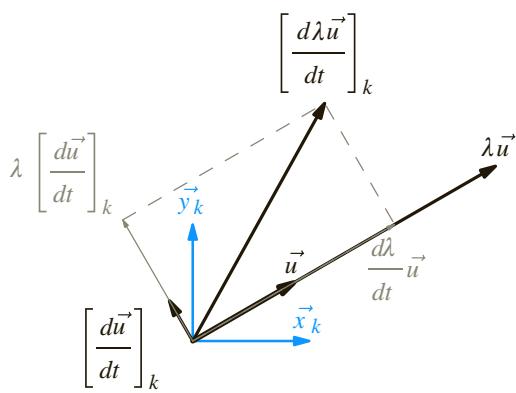


Figure 2.13 Interprétation graphique de la formule de dérivation.

Deux calculs indépendants sont à mener, en utilisant la formule de changement de base puis les figures de définition des angles

- d'une part

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_2 + \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \vec{x}_2 \\ &= \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ &= \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{aligned} \quad (29)$$

- d'autre part

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_3 + \overrightarrow{\Omega}(3/1) \wedge \vec{x}_3 \\ &= (\dot{\theta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_3 \\ &= -\dot{\theta} \vec{z}_3 + \dot{\alpha} \cos \theta \vec{y}_2 \end{aligned} \quad (30)$$

On en déduit, en mettant en facteur les vitesses angulaires

$$\left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_1 = \dot{\rho} \vec{x}_2 + \dot{\alpha}(\rho + b \cos \theta) \vec{y}_2 - \dot{\theta} b \vec{z}_3 \quad (31)$$

Le résultat du calcul est exprimé le plus simplement possible !

## Synthèse

### Savoirs

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- direction, axe ;
- droite, gauche ;
- sens trigonométrique, sens positif, sens direct ;
- repère d'espace ;
- angle ;
- angles d'Euler ;
- vecteur ;
- champ de vecteurs ;
- champ de vecteurs uniforme, équiprojectif ;
- torseur ;
- éléments de réduction d'un torseur, résultante et moment ;
- glisseur et couple ;
- automoment et comoment ;
- axe central ;
- vecteur rotation.

#### Je connais :

- la formule de changement de points ;
- la formule de dérivation vectorielle.

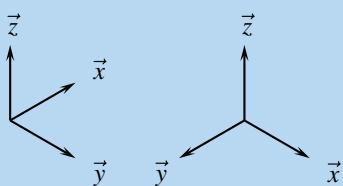
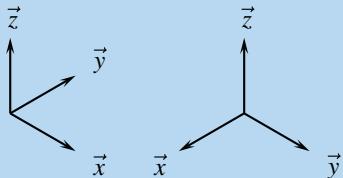
### Savoir-faire

#### Je sais :

- tracer la figure de définition d'un angle ;
- trouver un cosinus ou un sinus sur le cercle trigonométrique ;
- déterminer un produit scalaire ou un produit vectoriel à l'aide d'une figure de définition d'un angle ;
- permutez les vecteurs dans un produit mixte ;
- faire la somme de deux vecteurs ;
- faire la somme de deux torseurs ;
- dériver une combinaison linéaire de vecteurs ;
- dériver un produit scalaire ou vectoriel de vecteurs.

## Exercices d'application

- 2.1** Associer aux bases vectorielles directes ci-dessous des cubes opaques de manière à ce que les trois flèches se dessinent sur les arêtes de ces cubes.



- 2.2** Un automobiliste demande son chemin. Un passant lui faisant face lui dit que pour retrouver sa route, il doit tourner à droite après avoir reculé sur cent mètres.

1. Dans quel sens le conducteur tourne-t-il le volant après la marche arrière ?

- comme s'il allait en marche avant ?
- dans l'autre sens car la droite de son interlocuteur est à sa gauche ?

Le conducteur tourne-t-il à droite en marche avant ou en marche arrière ?

2. Proposer si nécessaire une réponse du passant plus explicite.

- 2.3** Tracer les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\varphi$  utilisés pour le repérage sphérique exposé à la section 2.3.3 page 23.

- 2.4** Définir un angle négatif.

- 2.5** En reprenant les angles d'Euler présentés figure 2.7 page 24 :

1. Définir les quatre bases vectorielles orthonormées directes utilisées.

2. Déterminer le vecteur rotation associé.

- 2.6** Définir les relations entre les coordonnées sphériques, cylindriques et cartésiennes.

- 2.7** Décrire un volume ou une surface met en œuvre trois objets :

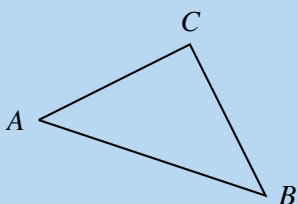
- un schéma pour poser les paramètres géométriques ;
- une formule de définition de l'élément géométrique élémentaire ;
- un tableau définissant les plages de variation des paramètres utilisés.

En vue de calculer le volume et l'aire d'une sphère en fonction de son rayon  $R$  :

1. Définir ces trois objets.

2. Déterminer les expressions recherchées en fonction du rayon  $R$  de la sphère étudiée.

- 2.8** Soit un triangle quelconque  $ABC$ . Les côtés opposés aux sommets sont respectivement de longueur  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les angles intérieurs au triangle sont respectivement notés  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .



1. Tracer les trois angles en prenant soin de les orienter.
2. Illustrer la relation scalaire sur les angles.
3. Trouver une relation entre les longueurs des côtés et le seul angle  $\beta$ .

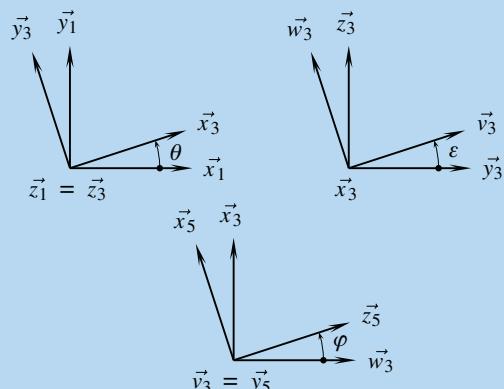
- 2.9** Définir les cas de nullité :

1. d'un produit scalaire ;
2. d'un produit vectoriel ;
3. d'un produit mixte.

- 2.10** Compléter les deux tableaux concernant :

- les produits scalaires, page 25
- les produits vectoriels, page 26

- 2.11** À partir des figures de définition des trois angles  $\theta$ ,  $\varepsilon$  et  $\varphi$ , compléter le tableau ci-dessous.



$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 =$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{x}_3 =$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{y}_3 =$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 =$	$\vec{w}_3 \wedge \vec{y}_3 =$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_5 =$
$(\vec{y}_1, \vec{w}_3, \vec{x}_1) =$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_3 =$	$(\vec{x}_5, \vec{w}_3, \vec{z}_5) =$
$\vec{x}_5 \wedge \vec{x}_3 =$	$(\vec{x}_5, \vec{y}_3, \vec{v}_3) =$	$(\vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_5) =$
$\vec{z}_5 \cdot \vec{z}_1 =$	$\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 =$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 =$

- 2.12** En utilisant le développement du double produit vectoriel, démontrer la formule de décomposition du vecteur  $\vec{U}$  présentée page 28.

- 2.13** Supposons un vecteur  $\vec{a}$  non nul et considérons l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  :

1. Montrer que cette équation n'admet pas de solution si les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  ne sont pas orthogonaux.
2. Montrer que si  $\vec{x}$  est solution de l'équation, alors le vecteur  $\vec{x} + \lambda \vec{a}$ , avec  $\lambda$  un réel quelconque, est également solution.
3. Effectuer le produit vectoriel à gauche par le vecteur  $\vec{a}$  et en déduire la solution.

**2.14** Montrer qu'un champ de vecteurs vérifiant la formule de changement de points est un champ de vecteurs équiprojectif.

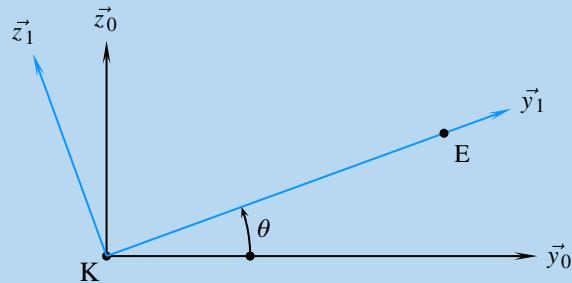
**2.15** Montrer que l'automoment d'un torseur est un invariant scalaire pour le torseur.

**2.16** Montrer que le comoment de deux torseurs est indépendant du point choisi pour le vecteur moment.

**2.17** Soit un vecteur unitaire  $\vec{u}$ . En considérant qu'à chaque instant le carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$  reste constant, montrer l'orthogonalité du vecteur  $\vec{u}$  et de son vecteur dérivé dans une base  $b$ .

## Exercices d'approfondissement

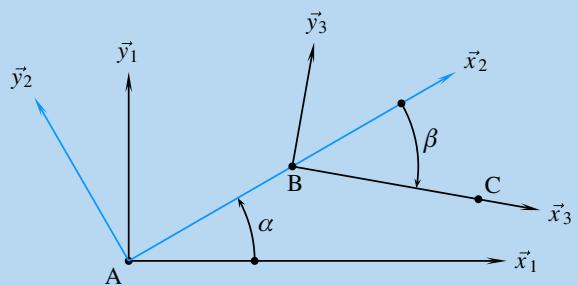
**2.18** Un manège pour enfant comporte un bras de longueur variable en rotation autour d'un axe. Le plan d'évolution du bras est un plan  $(K, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Un moteur actionne la rotation d'axe  $(K, \vec{x}_0)$  et un vérin fait varier la longueur  $\rho$  du bras défini par  $\overrightarrow{KE} = \rho \vec{y}_1$ .



1. Calculer  $\left[ \frac{d\overrightarrow{KE}}{dt} \right]_0$ .
2. Calculer  $\left[ \frac{d^2\overrightarrow{KE}}{dt^2} \right]_0$ .

**2.19** Soit la structure très simplifiée d'un bras de robot évoluant dans un plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ . Deux moteurs pilotent

les deux rotations possibles, respectivement autour des axes  $(A, \vec{z}_1)$  et  $(B, \vec{z}_2)$ .



On donne  $\overrightarrow{AB} = a \vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{BC} = b \vec{x}_3$ , les longueurs  $a$  et  $b$  étant constantes au cours du temps.

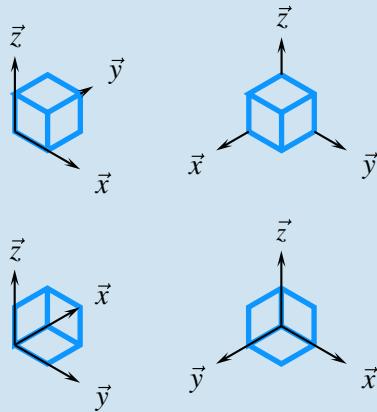
1. Tracer les figures de définition des deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. En déduire les expressions des vecteurs rotations  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  et  $\overrightarrow{\Omega}(3/2)$ .
3. Calculer  $\left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1$ .
4. Calculer  $\left[ \frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right]_2$ , puis  $\left[ \frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right]_1$ .
5. En déduire l'expression de  $\left[ \frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right]_1$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 2.1

C'est parce que les bases sont directes que l'on peut interpréter les perspectives

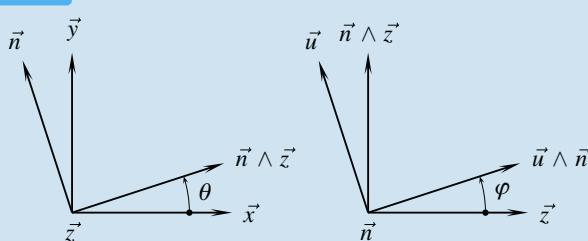


### 2.2

1. Cet énoncé illustre la nécessité d'orienter correctement l'espace. Il est en effet difficile de répondre aux questions posées, car toute proposition s'appuie sur un *a priori* concernant la référence. Entre autres, la droite citée est-elle celle du véhicule ou celle du passant ?

2. Une référence explicite est à insérer dans la réponse du passant, ce qui est fait par exemple avec une proposition telle que « Il vous faut reculer sur cent mètres, puis tourner en marche avant sur votre droite... »

### 2.3



### 2.4

Autant prendre une autoroute à contre sens. Parfois, on s'en sort...

### 2.5

1. Les quatre bases orthonormées directes utilisées sont :

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\psi} (\vec{n}, \vec{z}_1 \wedge \vec{n}, \vec{z}_1) \\ \xrightarrow{\theta} (\vec{n}, \vec{z}_2 \wedge \vec{n}, \vec{z}_2) \xrightarrow{\varphi} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

2. Les trois rotations se composent et le résultat est immédiat

$$\vec{\Omega}(2/1) = \psi \vec{z}_1 + \theta \vec{n} + \varphi \vec{z}_2$$

### 2.6

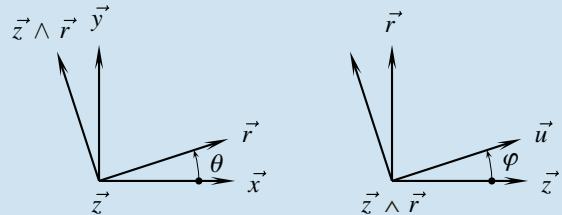
Il est nécessaire de commencer par différencier les vecteurs  $\vec{u}$  et les rayons  $r$  des coordonnées sphériques et cylindriques.

Soit  $\vec{r}$  le vecteur unitaire variable utilisé en coordonnées cylindriques et soit  $u$  le rayon utilisé en coordonnées sphériques.

Les trois descriptions possibles du vecteur  $\vec{OP}$  sont ainsi équivalentes :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} &= r\vec{r} + z\vec{z} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} &= u\vec{u} \end{aligned}$$

Les cinq produits scalaires possibles, respectivement par  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ,  $\vec{r}$  et  $\vec{u}$  donnent toutes les relations possibles. Pour les expliciter, il suffit d'utiliser les figures de définition d'angle



cartésien $\leftarrow$ cylindrique	cartésien $\leftarrow$ sphérique
$x = r \cos \theta$	$x = u \sin \varphi \cos \theta$
$y = r \sin \theta$	$y = u \sin \varphi \sin \theta$
$z = z$	$z = u \cos \varphi$

cylindrique $\leftarrow$ sphérique
$r = u \sin \varphi$
$\theta = \theta$
$z = u \cos \varphi$

### 2.7

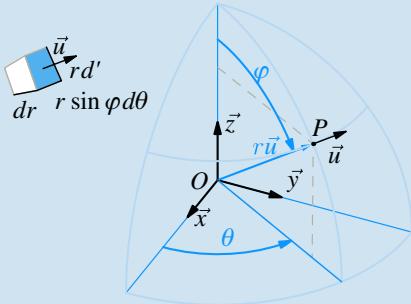
De nombreuses possibilités de descriptions sont possibles, la seule contrainte est de soigner la cohérence entre les trois objets requis. Le plus simple ici est de compléter le repérage sphérique proposé à la section 2.3.3.

Le volume élémentaire est définie par

$$dV = r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta$$

Trois plages de variation possibles sont exposées ici

$r$	$[0, R]$	$[0, R]$	$[-R, R]$
$\theta$	$[0, 2\pi[$	$[0, \pi[$	$[-\pi/2, +\pi/2]$
$\varphi$	$[0, \pi]$	$[-\pi, \pi]$	$[0, \pi]$



La surface extérieure élémentaire est quant à elle définie par

$$dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

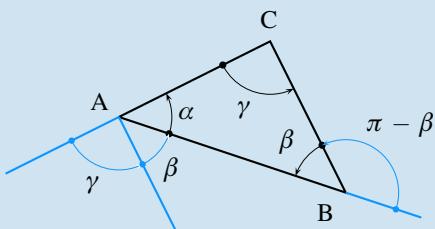
On retrouve ainsi les résultats classiques pour une sphère de rayon  $R$  :

$$\text{Volume} : \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Aire} : 4\pi R^2$$

## 2.8

1. Le vecteur normal à la feuille est choisi systématiquement sortant, ce qui permet de définir le sens positif sur la feuille de papier



2. La relation scalaire sur les angles est clairement  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

3. Pour trouver une relation entre les longueurs des côtés et le seul angle  $\beta$ , il suffit de décrire la vecteur  $\vec{AC}$  comme somme des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  et d'élever au carré scalaire chacun des membres de l'égalité

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2 \vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

Le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$  fait intervenir le cosinus de l'angle  $\pi - \beta$  et le résultat recherché est

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$$

## 2.9

1. Si le produit scalaire  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  est nul, alors :

- soit le vecteur  $\vec{x}$  est nul ;
- soit le vecteur  $\vec{y}$  est nul ;
- soit les deux vecteurs sont orthogonaux.

2. Si le produit vectoriel  $\vec{x} \wedge \vec{y}$  est nul, alors :

- soit le vecteur  $\vec{x}$  est nul ;
- soit le vecteur  $\vec{y}$  est nul ;
- soit les deux vecteurs sont colinéaires.

3. Si le produit mixte  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est nul, alors :

- soit au moins un des trois vecteurs est nul ;
- soit les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

Cette dernière proposition est équivalente à dire que les trois vecteurs sont coplanaires.

## 2.10

$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 = -\sin \beta$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 = 1$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_4 = 0$
$\vec{x}_4 \cdot \vec{y}_1 = \cos \beta \sin \alpha$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_4 = \cos \beta \cos \gamma$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_4 = \cos \beta \sin \gamma$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 = \cos \alpha \vec{x}_1$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 = -\vec{x}_3$	$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_4 = -\cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_2$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_3 = -\sin \gamma \vec{z}_3$

## 2.11

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = \sin \theta \vec{z}_1$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{x}_3 = -\sin \varphi$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 = \cos \theta$	$\vec{w}_3 \wedge \vec{y}_3 = -\cos \varepsilon \vec{x}_3$
$(\vec{y}_1, \vec{w}_3, \vec{x}_1) = \cos \varepsilon$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_3 = -\vec{x}_3$
$\vec{x}_5 \wedge \vec{x}_3 = -\sin \varphi \vec{y}_5$	$(\vec{x}_5, \vec{y}_3, \vec{v}_3) = \sin \varepsilon \cos \varphi$
$\vec{z}_5 \cdot \vec{z}_1 = \cos \varphi \cos \varepsilon$	$\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 = (*)$

$\vec{z}_5 \cdot \vec{y}_3 = -\cos \varphi \sin \varepsilon$
$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_5 = -\vec{z}_5$
$(\vec{x}_5, \vec{w}_3, \vec{z}_5) = 0$
$(\vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_5) = \cos \theta \cos \varepsilon \cos \varphi$
$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 = (**)$

(\*) Concernant le produit vectoriel  $\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1$ , les deux vecteurs n'apparaissent pas sur une même figure de définition d'angle, deux solutions sont dans ce cas possibles :

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{z}_5 \wedge (\sin \varepsilon \vec{v}_3 + \cos \varepsilon \vec{w}_3) \\ &= -\sin \varepsilon \vec{x}_5 - \cos \varepsilon \sin \varphi \vec{y}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 &= (\cos \varphi \vec{w}_3 + \sin \varphi \vec{x}_3) \wedge \vec{z}_5 \\ &= -\cos \varphi \sin \varepsilon \vec{x}_3 - \sin \varphi \vec{y}_3 \end{aligned}$$

(\*\*) Quant au produit vectoriel  $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5$ , encore plus de choix sont possibles. On ne donne ci-dessous qu'un seul exemple de calcul :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 &= (\cos \theta \vec{x}_3 - \sin \theta \vec{y}_3) \wedge \vec{x}_5 \\ &= \cos \theta \sin \varphi \vec{v}_3 + \sin \theta (\cos \varepsilon \vec{v}_3 - \sin \varepsilon \vec{w}_3) \wedge \vec{x}_5 \\ &= (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \varepsilon \cos \varphi) \vec{v}_3 - \sin \theta \cos \varepsilon \vec{z}_5 \end{aligned}$$

## 2.12

On part de l'écriture du double produit vectoriel  $\vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n})$  que l'on développe

$$\vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{U} - (\vec{n} \cdot \vec{U}) \vec{n}$$

Le produit scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{n}$  est égal à 1 et le produit scalaire  $\vec{U} \cdot \vec{n}$  s'interprète comme la projection orthogonale du vecteur  $\vec{U}$  sur la direction  $\vec{n}$ .

Si on soustrait au vecteur  $\vec{U}$  sa projection orthogonale sur une direction  $\vec{n}$ , le résultat est un vecteur orthogonal au vecteur  $\vec{n}$ .

## 2.13

1. Le résultat du produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{x}$  est orthogonal au vecteur  $\vec{a}$ . En effet,

$$(\vec{a} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{a}) = 0$$

En substituant le vecteur  $\vec{c}$  au produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{x}$ , cette égalité entraîne l'orthogonalité nécessaire des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$ .

$$(\vec{a} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. On en déduit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{a} \wedge (\vec{x} + \lambda \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$$

On déduit de cette propriété qu'à partir du moment où on trouve un vecteur  $\vec{x}$  solution, alors il en existe une infinité, de la forme  $\vec{x} + \lambda \vec{a}$ .

3. On effectue le produit vectoriel à gauche des deux membres de l'équation par le vecteur  $\vec{a}$

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Le développement du double produit vectoriel permet d'écrire

$$\vec{a}^2 \vec{x} - (\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Un rapide arrangement de cette équation permet d'écrire

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a}^2} + \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a}^2} \vec{a}}_{\lambda_p}$$

Apparaît ainsi la solution particulière  $\frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a}^2}$  orthogonale au vecteur  $\vec{a}$ , et un coefficient particulier  $\lambda_p$  qui peut être remplacé par un réel quelconque, comme on l'a vu précédemment. On en déduit l'expression finale de la solution

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## 2.14

Soit un champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  vérifiant la relation suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad \vec{u}(B) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On effectue le produit scalaire des deux membres de l'équation avec  $\overrightarrow{AB}$  et on obtient

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad \vec{u}(B) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u}(A) \cdot \overrightarrow{AB} + (\vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le produit mixte  $(\vec{r}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$  comporte deux vecteurs identiques et est donc nul. Le champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  est un champ de vecteurs équiprojectif.

## 2.15

L'automoment d'un torseur est le produit scalaire du vecteur résultante et d'un des vecteurs moment.

Soit un torseur  $\mathcal{T}$  déterminé par ses éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$ . Déterminons l'automoment pour un point  $Q$  quelconque

$$\vec{r} \cdot \vec{u}(Q) = \vec{r} \cdot (\vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{QA})$$

Le produit mixte  $(\vec{r}, \vec{r}, \overrightarrow{QA})$  qui apparaît alors comporte deux vecteurs identiques et est donc nul.

L'automoment d'un torseur ne dépend pas du point de calcul.

## 2.16

Supposons deux torseurs  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  connus par leurs éléments de réduction au même point A. Le comoment s'exprime par

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(A) + \vec{u}_1(A) \cdot \vec{r}_2$$

Appliquons la formule de changement de points sur chacun de ces champs de vecteurs équiprojectif pour exprimer le comoment à partir du moment en un point  $Q$  quelconque.

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot (\vec{u}_2(Q) + \vec{r}_2 \wedge \overrightarrow{QA}) + (\vec{u}_1(Q) + \vec{r}_1 \wedge \overrightarrow{QA}) \cdot \vec{r}_2$$

Les deux produits mixtes  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \overrightarrow{QA})$  et  $(\vec{r}_1, \overrightarrow{QA}, \vec{r}_2)$  sont opposés et leur somme s'annule. On en déduit bien

$$\forall Q \in \mathcal{E} \quad \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(Q) + \vec{u}_1(Q) \cdot \vec{r}_2 = cste$$

Le comoment de deux torseurs ne dépend pas du point de réduction.

## 2.17

La démonstration est immédiate à partir du calcul de la dérivée du carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$

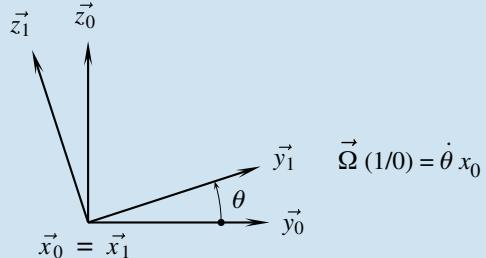
$$\forall t, \vec{u}^2 = 1 \Rightarrow \forall t, \vec{u} \cdot \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_b = 0$$

Les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_b$  sont à chaque instant orthogonaux.

## Exercices d'approfondissement

## 2.18

Bien que ce ne soit pas demandé, il est utile de faire la figure de définition de l'angle  $\theta$



1. On commence maintenant le calcul en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour trouver

$$\left[ \frac{d\vec{K}\vec{E}}{dt} \right]_0 = \dot{\rho} \vec{y}_1 + \rho \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0$$

La formule de changement de base permet de calculer  $\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0$

$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_1 + \vec{\Omega} (1/0) \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_0 \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Après substitution, on obtient la première expression recherchée

$$\left[ \frac{d\vec{K}\vec{E}}{dt} \right]_0 = \dot{\rho} \vec{y}_1 + \rho \dot{\theta} \vec{z}_1$$

2. On peut anticiper le calcul de la deuxième expression en commençant par

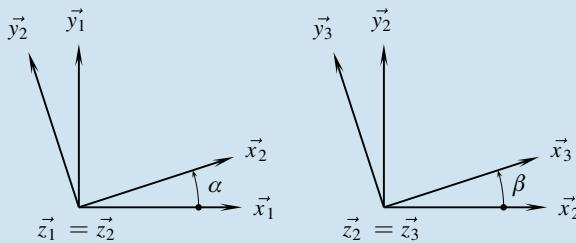
$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_1 + \vec{\Omega} (1/0) \wedge \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_0 \wedge \vec{z}_1 = -\dot{\theta} \vec{y}_1$$

On arrive ainsi rapidement au résultat

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2 \overrightarrow{KE}}{dt^2} \right]_0 &= \ddot{\rho} \vec{y}_1 + \dot{\rho} \left[ \frac{d \vec{y}_1}{dt} \right]_0 + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \ddot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \dot{\theta} \left[ \frac{d \vec{z}_1}{dt} \right]_0 \\ &= \ddot{\rho} \vec{y}_1 + 2\dot{\rho} \dot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \ddot{\theta} \vec{z}_1 - \rho \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \end{aligned}$$

## 2.19

1. Les figures de définition des angles sont à faire avec des angles petits et positifs pour éviter les problèmes ultérieurs de signes



2. On déduit des deux figures précédentes les expressions des vecteurs rotations

$$\overrightarrow{\Omega}(2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \quad \overrightarrow{\Omega}(3/2) = \dot{\beta} \vec{z}_2$$

3. Par substitution, le calcul à effectuer devient

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d a \vec{x}_2}{dt} \right]_1 = a \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_1$$

La formule de changement de base permet de dire

$$\left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_2 + \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \vec{x}_2$$

En remplaçant  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  par sa valeur  $\dot{\alpha} \vec{z}_1$  et en effectuant le produit vectoriel  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$  directement à partir de la figure de définition de l'angle  $\alpha$ , on obtient tout calcul fait

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = a \dot{\alpha} \vec{y}_2$$

4. Les étapes précédentes sont à suivre de la même manière pour obtenir tout d'abord

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{BC}}{dt} \right]_2 = b \dot{\beta} \vec{y}_3$$

La formule de changement de base permet ensuite d'écrire

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{AC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d \overrightarrow{BC}}{dt} \right]_2 + \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{BC}$$

Le produit vectoriel, après substitution, devient  $\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge b \vec{x}_3$  et son résultat se lit sur la figure de définition de l'angle  $\beta$ . On en déduit

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{AC}}{dt} \right]_1 = b(\dot{\beta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_3$$

5. En décomposant  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  et en utilisant les résultats précédents, on trouve finalement

$$\left[ \frac{d \overrightarrow{AC}}{dt} \right]_1 = \dot{\alpha}(a \vec{y}_2 + b \vec{y}_3) + \dot{\beta} b \vec{y}_3$$

L'intérêt de mettre les paramètres cinématiques  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  en facteur est vu au chapitre 3.



# Mécanique Cinématique du solide indéformable

CHAPITRE **3**

## Plan

<b>3.1</b>	Les mouvements	46
<b>3.2</b>	Trajectoires et lois horaires	48
<b>3.3</b>	Vecteurs position, vitesse et accélération	50
<b>3.4</b>	Le solide indéformable	53
<b>3.5</b>	Le champ des vecteurs vitesses	54
<b>3.6</b>	Composition des mouvements	57
<b>3.7</b>	Le champ des vecteurs accélérations	60
<b>3.8</b>	Mouvements particuliers	62
	Exercices d'application	65
	Exercices d'approfondissement	67
	Solutions des exercices	70

## Introduction

Lorsque l'on s'intéresse au mouvement d'un seul point par rapport à un repère, son vecteur vitesse noté simplement  $\vec{V}$  convient. À partir du moment où l'on se penche sur le cas des objets appelés **solides**, on constate d'une part que le nombre de points devient infini, d'autre part que l'on a rapidement trois, quatre, cinq solides et plus en mouvement relatif au sein d'un mécanisme. Ce chapitre s'appuie sur les outils vectoriels développés au chapitre précédent afin de :

- proposer des notations robustes pour savoir de quoi on parle ;
- mettre en évidence les propriétés cinématiques remarquables induites par les solides dits indéformables ;
- poser les lois de composition des mouvements.

## Prérequis

Ce chapitre nécessite les bases présentées au chapitre 2, à savoir :

- les outils de description, *vecteurs* et *torseurs* ;
- les outils de calcul, *calcul vectoriel*, *calcul torsoriel* et *dérivation vectorielle* ;
- l'orientation de l'espace.

## Objectifs

- Raisonner dans un espace à six degrés de liberté, parfois restreint à trois degrés de liberté ;
- Imaginer des mouvements ;
- Composer des mouvements ;
- Identifier un mouvement par une étude cinématique.

## 3.1 Les mouvements

Pour continuer à donner du sens aux différentes notions abordées, il est nécessaire d'ouvrir ce chapitre avec la définition du mot cinématique.



La définition du mot *cinématique*, comme beaucoup de définitions, introduit un nouveau terme qu'il est fondamental d'expliquer.

### Définition

La **cinématique** est l'étude des mouvements indépendamment de leurs causes.

La cinématique définit les outils et les méthodes pour décrire et étudier des déplacements relatifs sans se préoccuper de leur origine.

### 3.1.1 Mouvement

Un **mouvement** est un phénomène observable dans l'espace physique. Il met en jeu trois entités indissociables :

- l'objet observé ;
- un objet de référence ;
- le temps.



« Relatif » veut dire « l'un par rapport à l'autre ».



La mécanique classique, ou mécanique newtonienne, précède la mécanique relativiste, pour laquelle les concepts de masse et de temps sont beaucoup plus complexes.



On admet l'emploi du seul mot **repère** pour la notion de **repère d'espace**.



Solide, donc rigide, indéformable. Une définition propre à la mécanique est proposée page ???, à la section 3.4.1.

### Définition

On appelle **mouvement** le déplacement relatif de deux objets au cours du temps.

#### a) Le temps

Le temps est approché de manière intuitive par un nombre, et en mécanique classique, on admet que le temps s'écoule inexorablement et en chaque point de l'espace de la même manière. Sont associés au temps les deux mots-clés date et durée :

- une **date** caractérise un instant particulier ;
- une **durée** la différence entre les dates de deux instants successifs.

#### b) L'objet de référence

À l'objet de référence est associée la notion d'espace. C'est *un* espace d'observation supposé être un **espace euclidien**. On dit bien *un* espace car ils sont multiples. Celui qui roule sur une bicyclette n'a pas le même espace d'observation que celui qui reste sur le trottoir...

À cet objet de référence est également associé la notion de repère d'espace, qu'il n'est pas besoin de préciser plus que cela pour le moment.

L'étude des mouvements fait donc référence à un repère d'espace et à une échelle de temps, que l'on nomme ensemble référentiel.

### Définition

On appelle **référentiel** l'association d'un repère d'espace et d'une échelle de temps.

#### c) L'objet observé

Alors que la référence est un espace *solide*, l'objet observé peut être de diverses natures. Pour les dénombrer simplement, on prend le point comme objet élémentaire et il n'y a alors plus que deux catégories d'objets à considérer :

- un ensemble *solide* de points ;

- un ensemble de points quelconques. Cela peut être un point tout seul, un volume de gaz ou de liquide, un ensemble de solides, ou un mélange de divers éléments précités...

Avec ce classement, on se rend déjà compte que si parler du mouvement d'un vélo par rapport à la route a du sens, parler du mouvement du cycliste par rapport à son vélo n'en a pas, car le vélo n'est pas un espace *solide*.

#### Notation

Le mouvement d'un objet 2 par rapport à un objet 1 est noté 2/1.

### 3.1.2



Un exemple concret de roulement sans glissement concerne le contact entre une roue de bicyclette et le sol.

### Mouvement réciproque

Le mouvement réciproque d'un mouvement  $i/k$  est naturellement le mouvement  $k/i$ . Mais il faut faire attention : ce mouvement réciproque n'a de sens que si l'objet  $i$  est un objet *solide*.

C'est pourquoi il est indispensable, en mécanique du solide indéformable, de prendre l'habitude de noter systématiquement un mouvement  $i/k$ . Ainsi, on peut prendre le temps de définir l'objet observé  $i$  et d'identifier l'objet de référence  $k$ , voire de réaliser que le mouvement concerné est difficile à appréhender, comme dans le cas par exemple du roulement sans glissement.

### 3.1.3



Il est indispensable de ne pas limiter la notion de rotation à la notion de rotation autour d'un axe fixe par rapport à l'observateur.



Il est indispensable de ne pas limiter la notion de translation à la notion de translation rectiligne.

### Rotation - Translation

On ne peut terminer la définition d'un mouvement sans s'intéresser aux deux mouvements élémentaires fondamentaux que sont les mouvements de rotation et de translation.

Les outils vectoriels de description ne sont pas encore en place. Cela n'empêche pas une première définition géométrique de ces mouvements.

#### Définition

Un objet 2 est en **rotation** par rapport à un objet 1 si et seulement si il existe à chaque instant une droite de l'objet 2 immobile par rapport à l'objet 1.

Associée à la notion de rotation apparaît la notion d'axe de rotation, cette droite autour de laquelle un objet tourne par rapport à l'autre. Cet axe de rotation est souvent bien identifié, parfois difficile à localiser, car à chaque instant ne veut pas dire tout le temps.

#### Définition

Un objet 2 est en **translation** par rapport à un objet 1 si et seulement si toute droite de l'objet 2 conserve par rapport à l'objet 1 une direction constante au cours du temps.

Ces deux notions seront reprises d'un point de vue cinématique à la section 3.8 consacrée aux mouvements particuliers, page 62.

#### Exemple

Imaginons un cycliste en train de pédaler en ligne droite sur une route lisse. L'inventaire des pièces considérées de la bicyclette est fait sur la figure 3.1.3. La plupart des pièces sont *solides*, mais la chaîne ou les câbles de frein, par exemple, méritent une attention particulière. De plus, on considère que les pédales restent parallèles au sol.

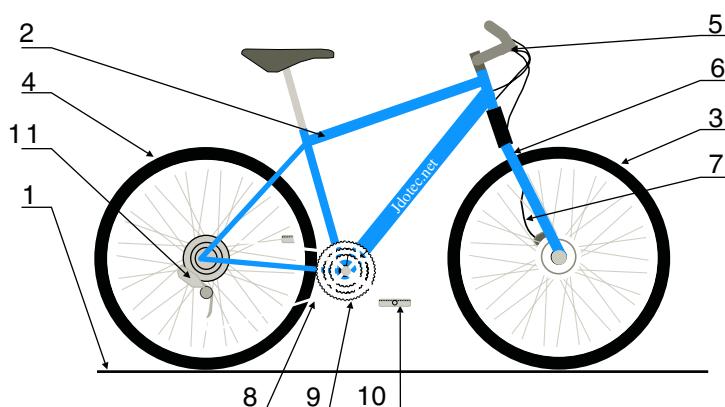


Figure 3.1 Une bicyclette en ligne droite... sans son pilote.

4	Roue arrière	8	Chaîne	11	Dérailleur
3	Roue avant	7	Gaine de frein avant	10	Pédale
2	Cadre	6	Fourche	9	Plateau
1	Sol	5	Guidon		

Le tableau ci-dessous considère un certain nombre de mouvements constatés. La case *Nature* est remplie avec une des trois lettres *T* pour « translation », *R* pour « rotation », *I* pour « immobile » et laissée vide quand le mouvement est quelconque. La case *Validité* contient *V* pour « toujours vraie » et reste vide lorsque le mouvement cité n'est valable que dans le cas considéré.

Mouvement	Nature	Validité	Mouvement	Nature	Validité
2/1	T		3/6	R	V
3/1	R		6/5	I	
10/9	R	V	9/2	R	V
10/2	T		10/1	T	
5/2	I		3/4		
8/2			4/2	R	V

Un mouvement possible n'est pas forcément un mouvement constaté !

La connaissance de la bicyclette permet par ailleurs de citer un certain nombre de mouvements possibles, telle la translation de la fourche avant par rapport au guidon ou la rotation du guidon par rapport au cadre.

## 3.2 Trajectoires et lois horaires

### 3.2.1

#### Point coïncidant

Considérons un point  $P$  en mouvement dans un espace  $\mathcal{E}$ . À chaque instant  $t$ , il existe un point  $M_t$  immobile dans cet espace confondu avec le point  $P$ . Le point  $P$  se déplace au cours du temps dans cet espace et c'est un nouveau point  $M_{t+dt}$  qui est confondu avec le point  $P$  à la date  $t + dt$ .



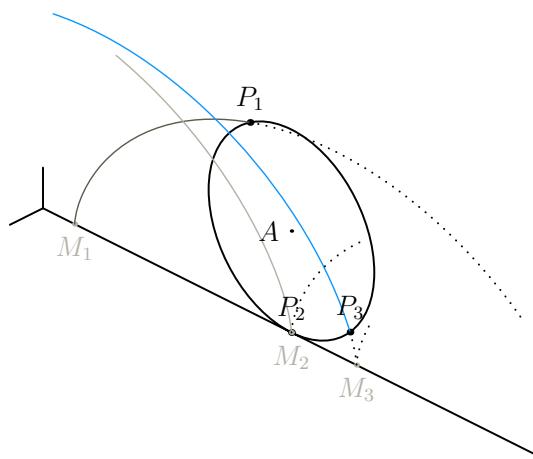
La compréhension des points coïncidants est une des notions difficiles à apprécier en mécanique. La composition des mouvements est un des chapitres fondamentaux pour avancer.

### Définition

On dit que deux points sont **coïncidants** à un instant  $t$  s'ils occupent la même position à la date considérée.

### Exemple

En reprenant l'exemple de la figure 3.1.3, on ne s'intéresse ici qu'au seul mouvement de la roue avant par rapport au sol. À chaque instant, un des points de la roue est en contact avec un des points du sol. La figure est dessinée à une date  $t_2$ . Il existe une date  $t_1$  à laquelle les deux points  $P_1$  et  $M_1$  ont été coïncidants. Il existe également une date  $t_3$  à laquelle les deux points  $P_3$  et  $M_3$  seront coïncidants. Ce qui est compréhensible pour les points de contact est généralisable à tous les points. Par exemple, à la date  $t_2$  de la figure, il existe un point de l'espace attaché au sol qui est coïncidant avec le point  $P_1$ .



**Figure 3.2** Points coïncidants

À l'instant  $t_2$  considéré, les points  $P_2$  et  $M_2$  sont coïncidants, les points  $P_1$  et  $M_1$ , les points  $P_3$  et  $M_3$  ne le sont pas.

## 3.2.2 Trajectoire

En mécanique, une trajectoire concerne un point, et seulement un point. Soit donc un point  $P$  tout seul en mouvement par rapport à un repère  $R$

### Définition

On appelle **trajectoire** du point  $P$  dans son mouvement par rapport à  $R$  l'ensemble des points coïncidants de l'espace d'observation.

### Remarque

Une trajectoire dépend du repère d'observation, et pour un point  $P$  donné, les trajectoires sont multiples, car elles dépendent du mouvement considéré.



Identifier et nommer les mouvements sont les clés de la compréhension !

### Exemple

En continuant l'exemple de la figure précédente 3.2.1 et en considérant également la fourche sur laquelle est montée la roue, toutes les propositions suivantes sont correctes :

- la trajectoire du point  $P_1$  dans le mouvement de la roue par rapport à la fourche est un cercle de centre  $A$  et de rayon  $AP_1$  ;
- la trajectoire du point  $A$  dans ce même mouvement se réduit à un point ;
- la trajectoire du point  $A$  dans le mouvement de la roue par rapport au sol est une droite parallèle à  $(M_1M_3)$  passant par  $A$  ;
- la trajectoire du point  $P_1$  dans ce même mouvement est une cycloïde.

## 3.2.3

### Lois horaires

Soit un point  $P$  et un mouvement 2/1. Comme son nom l'indique, une loi horaire est une loi qui dépend du temps.

#### Définition

On appelle **loi horaire** toute fonction scalaire dépendant du temps explicitant le déplacement du point  $P$  dans le mouvement considéré.

Sont par exemple des lois horaires toute coordonnée d'un vecteur position exprimée en fonction du temps, ainsi que toute fonction scalaire du temps précisant une position sur une trajectoire.

## 3.3 Vecteurs position, vitesse et accélération

### 3.3.1

#### Vecteur position

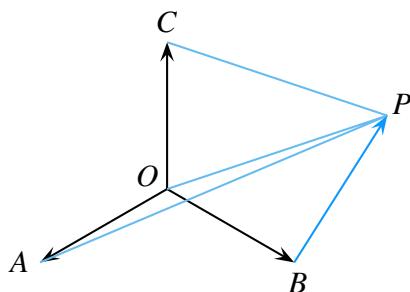
Soit un point  $P$  en mouvement dans un espace  $\mathcal{E}$  auquel est attaché un repère  $R$ .

#### Définition

On appelle **vecteur position** du point  $P$  dans  $R$  tout vecteur  $\overrightarrow{IP}$  construit à partir d'un point  $I$  fixe dans le repère d'étude  $R$ .

#### Remarques

Il y a autant de vecteurs positions pour un point  $P$  que de points fixes possibles dans  $R$ . Il y en a donc une infinité.



**Figure 3.3** Exemple de quatre vecteurs positions possibles pour un point  $P$ .

## 3.3.2 Vecteur vitesse

En mécanique du point, on considère un point  $P$  tout seul en mouvement par rapport à un repère  $R$ , et le mouvement est rarement noté. Quand il l'est, il est usuel de le renconter sous la forme  $P/R$ .

En mécanique du solide indéformable, il est indispensable d'avoir une notation qui soit sans ambiguïté. Le vecteur vitesse dépend de trois variables : le temps, le point considéré et le mouvement étudié. Une notation  $\vec{V}(t, P, 2/1)$  semble alors pertinente, mais comme le temps est le même pour tous les observateurs, la variable  $t$  n'est habituellement pas explicitée.

### Notation

 Le vecteur vitesse est à considérer comme une fonction de deux variables, et comme pour toute fonction de deux variables, on sait en fixer une pour faire évoluer la deuxième.

En mécanique du solide indéformable, le vecteur vitesse est noté  $\vec{V}(P, 2/1)$  et se lit « vecteur vitesse du point  $P$  dans le mouvement 2 par rapport à 1 ».

### Définition

On appelle **vecteur vitesse** du point  $P$  dans le mouvement 2/1 le vecteur dérivé par rapport au temps d'un vecteur position de ce point  $P$  dans la base d'observation.

$$\vec{V}(P, 2/1) = \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 \quad (1)$$

Il est à noter que la base de dérivation est obligatoirement liée à l'objet de référence. Réciproquement, une expression du style  $\left[ \frac{d\vec{KP}}{dt} \right]_3$  peut être interprétée comme un vecteur vitesse si le point  $K$  est un point immobile dans l'espace 3.

### Exemple

Soit un point  $P$  tournant autour d'un axe  $\Delta$ . L'angle  $\theta$  est défini par la rotation d'une base 2 par rapport à une base 1. Ces deux bases ont comme vecteur commun  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ . Soit  $I$  un point fixe dans 1 de telle sorte que l'on puisse poser comme vecteur position  $\vec{IP} = \rho \vec{x}_2$ . Le rayon  $\rho$  est supposé constant au cours du temps.

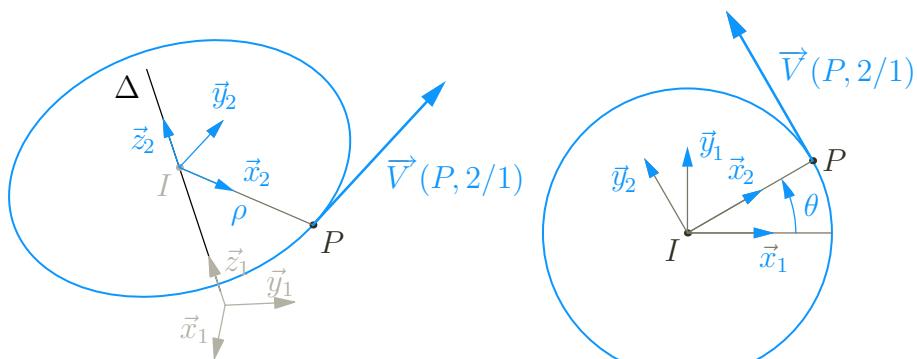


Figure 3.4 Le vecteur vitesse pour un point  $P$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$ .



Le produit vectoriel se calcule directement à partir de la figure de définition de l'angle.

### 3.3.3 Vecteur accélération

Le vecteur vitesse a par rapport au vecteur position l'immense avantage d'être indépendant de tout observateur. Il a comme limite de ne pas suffire pour une étude dynamique. Il est nécessaire de définir le vecteur dérivé du vecteur vitesse.

#### Définition

On appelle **vecteur accélération** du point  $P$  dans le mouvement 2/1 le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse de ce point  $P$  dans le même mouvement.

$$\vec{A}(P,2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d^2\vec{IP}}{dt^2} \right]_1 \quad (2)$$



Bien repérer le point  $P$ , le point  $I$ , le mouvement 2/1, la base de dérivation...

#### Remarque

Le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 2/1 est donc également la dérivée seconde par rapport au temps d'un des vecteurs position du point  $P$ .

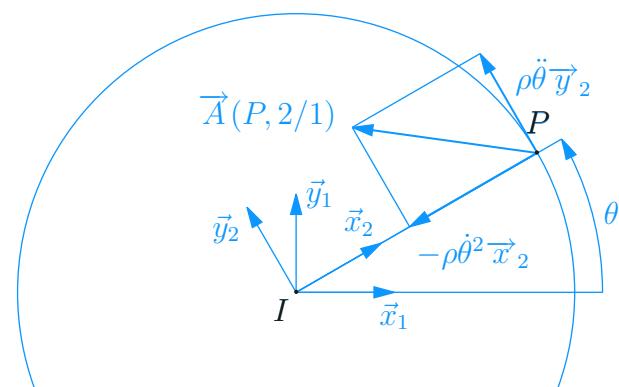
#### Exemple

En reprenant l'exemple précédent, et par définition du vecteur accélération, on obtient

$$\vec{A}(P,2/1) = \left[ \frac{d\rho\dot{\theta}\vec{y}_2}{dt} \right]_1 = \rho\ddot{\theta}\vec{y}_2 - \rho\dot{\theta}^2\vec{x}_2$$

Le terme  $\rho\ddot{\theta}\vec{y}_2$  correspond à l'accélération tangentielle, donc au taux de variation du module de la vitesse, à direction constante.

Le terme  $-\rho\dot{\theta}^2\vec{x}_2$  correspond à l'accélération centripète, donc à la variation de direction du vecteur vitesse, à module constant.



**Figure 3.5** Les vecteurs accélérations pour un point  $P$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

## 3.4 Le solide indéformable

### 3.4.1

#### Notion de solide indéformable

Un mouvement est défini comme le déplacement relatif de deux objets. Il est nécessaire de s'intéresser aux objets remarquables que sont les solides indéformables.

##### Définition

Un **solide indéformable** est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps.

Soient  $S$  un solide indéformable,  $A$  et  $B$  deux points quelconques de ce solide. La définition précédente se traduit par la proposition vectorielle

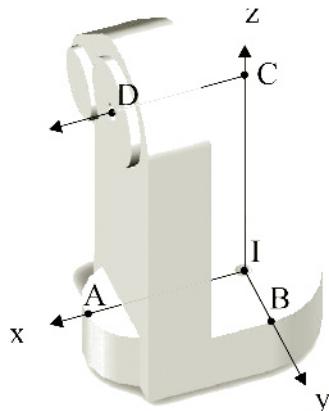
$$\forall A \in S, \forall B \in S, \overrightarrow{AB}^2 = cste/t \quad (3)$$

### 3.4.2

#### Équivalence solide – repère – espace

Définir un repère  $R$  attaché à un solide revient à définir un point particulier  $I$  sur ce solide et une base vectorielle  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit encore quatre points  $I, A, B$  et  $C$  tels que

$$R = (I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (I, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \quad (4)$$



**Figure 3.6** Équivalence solide – repère – espace  
La base vectorielle  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$  est sur cet exemple orthogonale et non normée...

Les quatre points ainsi considérés sont deux à deux équidistants : l'ensemble de ces quatre points forme donc un solide indéformable. De plus, il n'est pas difficile de construire l'ensemble des points fixes par rapport à un repère donné et de constater que l'on arrive à un espace affine.

##### Définition

On parle indifféremment d'un **solide**, d'un **repère** qui lui est attaché ou de tout l'**espace** des points fixes dans ce repère.

Cette équivalence a deux conséquences :

- Lorsque l'on a deux solides en mouvement relatif, les formes des solides n'ont aucune importance, car cela revient à considérer le mouvement relatif de deux espaces affines

On admet l'utilisation du seul mot *solide* pour l'expression *solide indéformable*.



Qu'il y ait de la matière ou non au niveau d'un point considéré n'a de fait aucune importance.

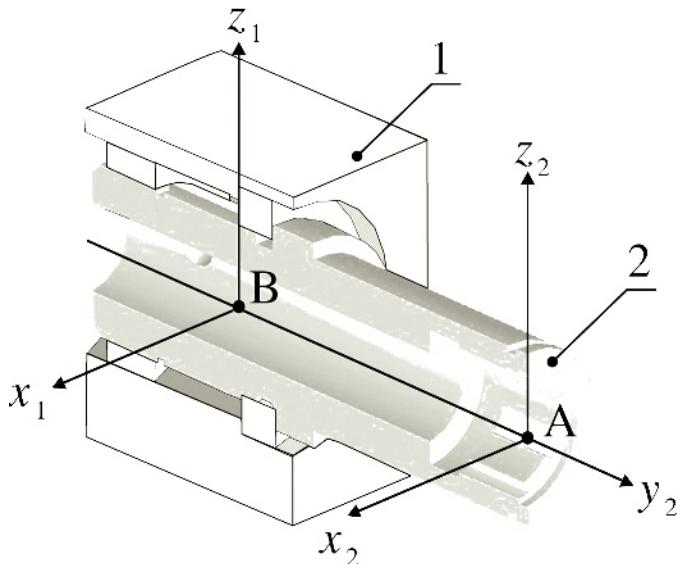


Ce n'est hélas pas suffisant pour que la notion devienne facilement compréhensible.

- Considérer le mouvement relatif de deux espaces affines rend triviale la notion de points coïncidants. N'importe quel point peut être attaché à l'un ou à l'autre de ces deux espaces. Autrement dit, derrière chaque point se cache au moins un point coïncidant.

### Exemple

Considérons un arbre de machine creux noté 2 guidé en rotation autour de son axe par rapport à un bâti 1.



**Figure 3.7** Exemple d'un arbre creux

Utiliser un point de l'axe alors qu'il n'y a pas de matière à cet endroit ne pose aucun souci. Bien au contraire, il est toujours utilisé le fait que les vecteurs vitesses  $\vec{V}(A, 2/1)$  et  $\vec{V}(B, 2/1)$  soient des vecteurs nuls.

## 3.5 Le champ des vecteurs vitesses

### 3.5.1

#### Champ des vecteurs vitesses

Soient deux objets, ou deux solides, ou deux repères, ou deux espaces affines en mouvement relatif.

##### Définition

On appelle **champ des vecteurs vitesses** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur vitesse correspondant au mouvement considéré.

$$\mathcal{E} \longrightarrow E$$

$$P \longmapsto \vec{V}(P, 2/1)$$

### 3.5.2

#### Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses

Comme un solide indéformable est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps, la distance entre deux points quelconques de ce solide ne varie pas au cours du temps, donc la dérivée temporelle de cette distance est nulle.

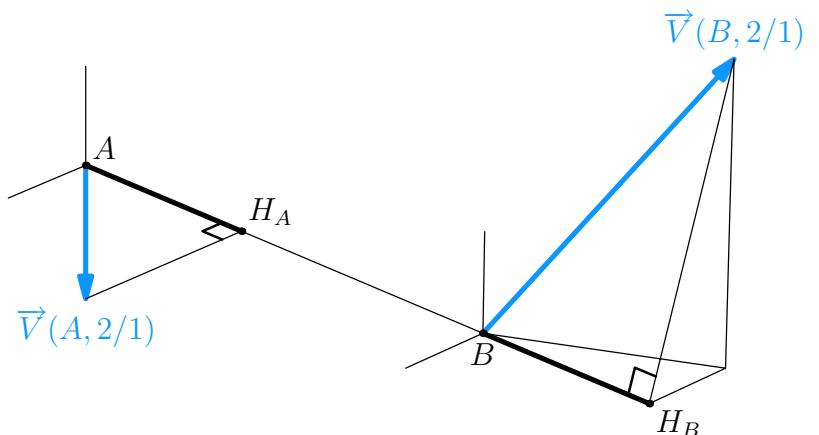
Soit un solide 2 en mouvement par rapport à un solide 1. Soient deux points  $A$  et  $B$  du solide 2. Vue depuis le solide 1, la distance au carré  $\overrightarrow{AB}^2$  est constante au cours du temps, ce qui se traduit par l'implication

$$\forall t, \overrightarrow{AB}^2 = cste \implies \overrightarrow{AB} \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = 0 \quad (5)$$

Pour pouvoir interpréter cette dernière équation, il suffit de considérer un point  $I$  fixe dans 1 et de poser  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}$  pour retrouver la définition d'un vecteur vitesse. On obtient ainsi

$$\overrightarrow{V}(B,2/1) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A,2/1) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (6)$$

Cette équation a une interprétation graphique remarquable : les projections orthogonales des vecteurs vitesses  $\overrightarrow{V}(A,2/1)$  et  $\overrightarrow{V}(B,2/1)$  sur la direction  $\overrightarrow{AB}$  sont égales. En s'appuyant sur l'exemple donné figure (3.5.2), l'égalité des projections orthogonales se traduit par l'égalité des valeurs algébriques  $\overline{AH_A} = \overline{BH_B}$ .



**Figure 3.8** Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses lors du mouvement d'un solide indéformable.

### Propriété fondamentale

Le champ des vecteurs vitesses du mouvement d'un solide indéformable par rapport à un repère est un champ de vecteurs équiprojectif.

Cette propriété se traduit par la proposition vectorielle

$$\forall i/k, \forall A \text{ et } \forall B, \overrightarrow{V}(B,i/k) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A,i/k) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (7)$$

### 3.5.3

Il s'agit bien du vecteur  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  car les points  $A$  et  $B$  sont fixes sur le solide 2.

### Changement de point - le vecteur rotation

La dérivée temporelle d'un vecteur de norme constante apparaît dans l'équation 5. Il a été vu au chapitre précédent l'existence d'un vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  avec lequel la dérivée temporelle s'exprime par

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (8)$$

Comme précédemment, il suffit de poser  $\vec{AB} = \vec{IB} - \vec{IA}$  pour retrouver la définition d'un vecteur vitesse et en déduire ainsi la formule de changement de points

$$\vec{V}(B,2/1) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{AB} \quad (9)$$

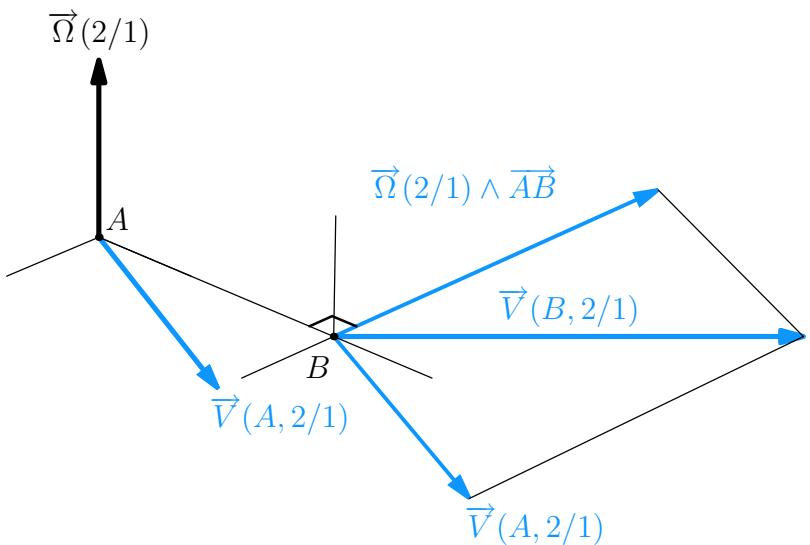
### Propriété fondamentale

Le champ des vecteurs vitesses du mouvement d'un solide indéformable se construit à partir de la formule de changement de points

$$\forall i/k, \forall A \text{ et } \forall B, \vec{V}(B,i/k) = \vec{V}(A,i/k) + \vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{AB} \quad (10)$$

 Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est indépendant de tout point et caractérise le changement d'orientation de l'objet  $i$  par rapport à l'objet  $k$ .

On peut tenter une interprétation de cette dernière équation. Le segment  $[AB]$  est de longueur constante au cours du temps. En prenant l'extrémité  $A$  comme point de référence, cela revient à constater que l'extrémité  $B$  ne peut se déplacer que sur la sphère de centre  $A$  et de rayon  $\|\vec{AB}\|$ . C'est ce qu'exprime l'équation 5 quand elle pose l'orthogonalité du vecteur  $\vec{AB}$  et du vecteur dérivé  $[d\vec{AB}/dt]_1$ . Comme le point  $A$  est maintenant mobile dans le repère  $k$ , c'est la différence des vecteurs vitesses  $\vec{V}(B,i/k) - \vec{V}(A,i/k)$  qui est orthogonale au vecteur  $\vec{AB}$ .



**Figure 3.9** Interprétation graphique de la formule de changement de points sur un mouvement donné.

### 3.5.4

## Le torseur cinématique

Un torseur est un champ de vecteurs équiprojectif. Le champ des vecteurs vitesses est un champ de vecteurs équiprojectif. On peut donc définir le torseur cinématique.

### Définition

On appelle **torseur cinématique** le champ des vecteurs vitesse défini pour un mouvement de solides indéformables.

### Notation

Pour un mouvement  $i/k$ , le torseur cinématique est noté simplement  $\mathcal{V}(i/k)$ , la lettre  $\mathcal{V}$  est choisie par référence au mot vitesse.

Les éléments de réduction de ce torseur en un point  $P$  sont respectivement

- $\vec{\Omega}(2/1)$  le vecteur rotation ;
- $\vec{V}(P,2/1)$  le vecteur vitesse calculé au point  $P$ .

Le champ des vecteurs vitesses se construit entièrement à partir des éléments de réduction du torseur

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(P,2/1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathcal{V}(2/1) = P \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(P,2/1) \end{cases} \quad (11)$$

 La résultante est toujours en première place derrière l'accolade

Le point de calcul  $P$  à la gauche de l'accolade est redondant dans l'écriture de droite. Mais un point à cet endroit est indispensable lorsque les éléments de réduction ne sont pas nommés. Le mécanicien débutant a intérêt à le mettre systématiquement, car un oubli est préjudiciable.

Supposons l'existence d'un point  $C$  de vecteur vitesse nul dans un mouvement 4/3. La notation suivante est correcte, complète et efficace.

$$\mathcal{V}(4/3) = C \begin{cases} \vec{\Omega}(4/3) \\ \vec{0} \end{cases} \quad (12)$$

Le vecteur vitesse nul donné concerne le calcul au point  $C$ , soit  $\vec{V}(C,4/3)$ .

## 3.6 Composition des mouvements



Le lecteur sait déjà faire la somme de vecteurs flèche, en les mettant bout à bout. Le résultat a comme origine la première des origines et comme extrémité la dernière des extrémités.



Il faut veiller à la cohérence des indices. Les mouvements 4/3 et 2/1 par exemple ne peuvent pas être composés.



Est-ce que les bases de dérivation correspondent aux mouvements ?  
Les points fixes choisis sont-ils compatibles avec les mouvements ?

### Définition

On appelle **composition des mouvements** l'activité qui consiste à les enchaîner.

Soient  $i, j$  et  $k$  trois objets en mouvements relatifs. Le mouvement  $i/k$  est le résultat de la composition des mouvements  $i/j$  et  $j/k$ .

Les outils vectoriels de description des mouvements étant en place, la suite de ce chapitre s'attache à mettre en place les relations mathématiques qui en découlent.

### Composition des vecteurs vitesses

Soient trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement immobiles sur trois solides 1, 2 et 3. Soit par exemple le point  $C$  que l'on suit dans les mouvements 3/1 et 3/2, ce qui est assez facile à concevoir. La définition d'un vecteur vitesse permet d'écrire

$$\vec{V}(C,3/1) = \left[ \frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 \quad \vec{V}(C,3/2) = \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 \quad (13)$$

Il est tentant de chercher à lier ces deux vecteurs vitesses, en décomposant  $\vec{AC}$  en  $\vec{AB} + \vec{BC}$  par exemple. On obtient ainsi

$$\vec{V}(C,3/1) = \left[ \frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 \quad (14)$$

Le premier terme  $\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1$  définit le vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$ .

Le deuxième terme  $\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1$  n'est pas un vecteur vitesse. Il est nécessaire de changer de base de dérivation pour que le point  $B$  y soit fixe

$$\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{BC} \quad (15)$$

En reconnaissant dans cette expression le vecteur vitesse  $\vec{V}(C,3/2)$ , on obtient

$$\vec{V}(C,3/1) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(B,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{BC} \quad (16)$$

d'où finalement, en reconnaissant la formule de changement de point sur le mouvement 2/1.

$$\vec{V}(C,3/1) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/1) \quad (17)$$

Alors que considérer le point  $C$  immobile dans 3 est évident, car il a été défini comme cela, la composition des vecteurs vitesses montre qu'il faut savoir changer de point de vue et imaginer le mouvement du point coïncidant attaché au solide 2.

### Définition

On appelle **composition des vecteurs vitesses** la relation entre les vecteurs vitesses calculés en un point concernant trois mouvements qui se composent.

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides, } \forall P, \vec{V}(P,i/k) = \vec{V}(P,i/j) + \vec{V}(P,j/k) \quad (18)$$

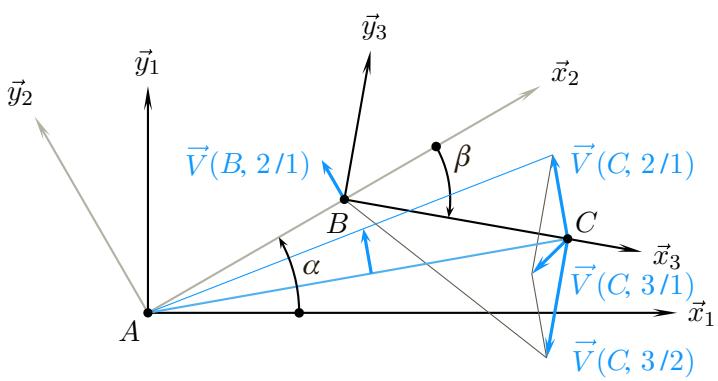
### Exemple

Soit un bras de robot comportant trois solides :

- un bâti 1 auquel on attache un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un bras 2 en mouvement de rotation par rapport à 1 autour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$ . On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec le vecteur  $\vec{z}_2$  confondu à chaque instant avec  $\vec{z}_1$ . On pose  $\vec{AB} = L_2 \vec{x}_2$  et  $\alpha$  l'angle  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  ;
- un avant bras 3 en mouvement de rotation par rapport à 2 autour de l'axe  $(B, \vec{z}_2)$ . On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , avec le vecteur  $\vec{z}_3$  confondu à chaque instant avec  $\vec{z}_2$ . On pose  $\vec{BC} = L_3 \vec{x}_3$  et  $\beta$  l'angle  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

 La compréhension du terme  $\vec{V}(C,2/1)$  est une des clés de la réussite en mécanique.

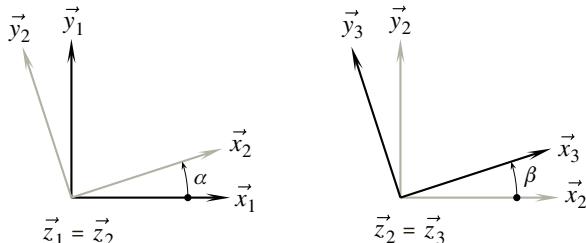
 Le point  $P$  est quelconque, mais fixé pour le changement de mouvement.



**Figure 3.10** Composition des vecteurs vitesses  $\vec{V}(C,3/2)$  et  $\vec{V}(C,2/1)$  pour déterminer  $\vec{V}(C,3/1)$ .

La description du mécanisme permet d'écrire les torseurs cinématiques associés aux mouvements 2/1 et 3/2

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) = B \begin{cases} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$$



Alors que l'observateur attache assez naturellement le point  $C$  au solide 3, il est nécessaire de faire l'effort d'imaginer le mouvement de ce point  $C$  lié au solide 2 en fixant l'angle  $\beta$  pour comprendre le vecteur  $\vec{V}(C,2/1)$ . Sans détailler ici les calculs, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{V}(C,3/2) &= \dot{\beta} L_3 \vec{y}_3 \\ \vec{V}(C,2/1) &= \dot{\alpha} (L_2 \vec{y}_2 + L_3 \vec{y}_3) \\ \vec{V}(C,3/1) &= \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/1) \end{aligned}$$

## 3.6.2 Composition des vecteurs rotations

Soient trois mouvements qui se composent, par exemple 3/2, 3/1 et 2/1, et deux points quelconques  $A$  et  $B$ .

Il est possible d'écrire deux relations de composition des vecteurs vitesses

$$\vec{V}(A,3/1) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{V}(A,2/1) \quad (19)$$

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(B,3/2) + \vec{V}(B,2/1) \quad (20)$$

et trois formules de changement de points, une par mouvement

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(A,3/1) + \vec{\omega}(3/1) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (21)$$

$$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{\omega}(3/2) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (22)$$

$$\vec{V}(B,2/1) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{\omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (23)$$

En remplaçant dans l'équation 20 les vecteurs vitesses à partir des trois équations 21, 22 et 23, puis en simplifiant grâce à l'équation 19, on obtient

$$\forall A, \forall B, \vec{\Omega}(3/1) \wedge \vec{AB} = (\vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1)) \wedge \vec{AB} \quad (24)$$

L'égalité des deux produits vectoriels est vérifiée quelques soient les points  $A$  et  $B$ , on en déduit la relation de composition des vecteurs rotations

$$\vec{\Omega}(3/1) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) \quad (25)$$

#### Définition

On appelle **composition des vecteurs rotations** la relation entre les vecteurs rotations de trois mouvements qui se composent.

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides}, \vec{\Omega}(i/k) = \vec{\Omega}(i/j) + \vec{\Omega}(j/k) \quad (26)$$

### 3.6.3

La somme des torseurs n'a de sens que si les mouvements se composent.



## Composition des torseurs cinématiques

À la vue des résultats des deux paragraphes précédents, on en déduit immédiatement que la composition des mouvements se traduit par une somme de torseurs cinématiques.

$$\mathcal{V}(3/1) = \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) \quad (27)$$

#### Définition

On appelle **composition des torseurs cinématiques** la relation torsorielle entre trois mouvements qui se composent

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides}, \mathcal{V}(i/k) = \mathcal{V}(i/j) + \mathcal{V}(j/k) \quad (28)$$

## 3.7 Le champ des vecteurs accélérations

### 3.7.1

#### Champ des vecteurs accélérations

Soient deux objets, ou deux solides, ou deux repères, ou deux espaces affines en mouvement relatif.

#### Définition

On appelle **champ des vecteurs accélérations** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur accélération correspondant au mouvement considéré.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \vec{A}(P,2/1) \end{aligned}$$

### 3.7.2

#### Propriété du champ des vecteurs accélérations

Soient un mouvement 2/1 et deux points quelconques  $P$  et  $Q$  fixes sur 2. La formule de changement de points sur le mouvement 2/1 s'écrit

$$\vec{V}(Q,2/1) = \vec{V}(P,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ} \quad (29)$$

Par définition du vecteur accélération, le point  $Q$  étant fixe à chaque instant dans 2

$$\vec{A}(Q,2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(Q,2/1)}{dt} \right]_1 \quad (30)$$

Par substitution, on en déduit

$$\vec{A}(Q,2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}}{dt} \right]_1 \quad (31)$$

Le point P a été choisi à chaque instant fixe dans 2, le premier terme s'interprète sans souci comme le vecteur accélération du point P dans le mouvement 2/1. Le second terme demande un calcul plus poussé

$$\left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1)}{dt} \right]_1 \wedge \vec{PQ} + \vec{\omega}(2/1) \wedge \left[ \frac{d\vec{PQ}}{dt} \right]_1 \quad (32)$$

Les points P et Q étant fixes dans 2, on a immédiatement

$$\left[ \frac{d\vec{PQ}}{dt} \right]_1 = \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{PQ} \quad (33)$$

Au bilan, la relation de changement de points sur le champ des vecteurs accélérations s'écrit

$$\vec{A}(Q,2/1) = \vec{A}(P,2/1) + \left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1)}{dt} \right]_1 \wedge \vec{PQ} + \vec{\omega}(2/1) \wedge (\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}) \quad (34)$$

En effectuant le produit scalaire des deux membres avec le vecteur  $\vec{PQ}$ , et en constatant que le terme  $\vec{\omega}(2/1) \wedge (\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}) \cdot \vec{PQ}$  n'est pas nul, on en déduit l'inégalité

$$\vec{A}(Q,2/1) \cdot \vec{PQ} \neq \vec{A}(P,2/1) \cdot \vec{PQ} \quad (35)$$

Le champ des vecteurs accélérations n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif.

### 3.7.3

 Le calcul détaillé est demandé lors de l'exercice 3.9.12 page ??.

 Le point P est quelconque, mais fixé pour le changement de mouvement.

## Composition des vecteurs accélérations

Les vecteurs accélération se composent, mais ne suivent pas la composition des mouvements comme les vecteurs vitesses. Il apparaît lors du calcul le terme complémentaire appelé **accélération de Coriolis**

### Définition

On appelle **composition des vecteurs accélérations** la relation entre les vecteurs accélérations calculée en un point concernant trois mouvements qui se composent.

$$\vec{A}(P,3/1) = \vec{A}(P,3/2) + \vec{A}(P,2/1) + 2\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2) \quad (36)$$

Les différents termes s'interprètent ainsi :

- $\vec{A}(P,3/1)$  : Vecteur accélération du point P dans le mouvement de 3 par rapport à 1 ;
- $\vec{A}(P,3/2)$  : Vecteur accélération du point P dans le mouvement de 3 par rapport à 2 ;
- $\vec{A}(P,2/1)$  : Vecteur accélération du point P dans le mouvement de 2 par rapport à 1, calculé comme s'il était immobile sur 2 ;
- $2\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2)$  : Accélération complémentaire de Coriolis, due au mouvement du point P par rapport au repère 2, lui-même en rotation par rapport au repère 1.

## 3.8 Mouvements particuliers

### 3.8.1

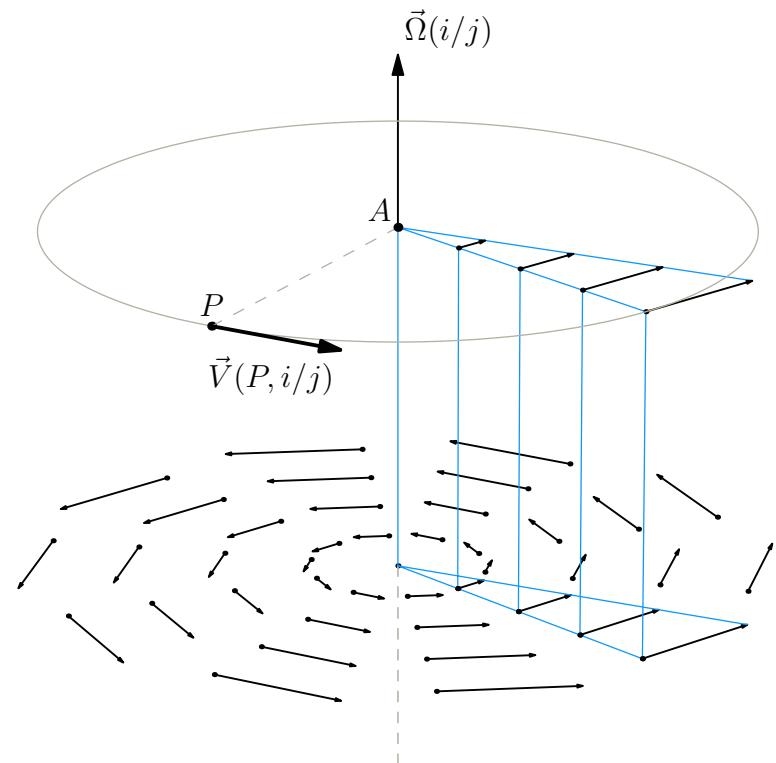
#### Mouvement de rotation

##### Définition

En mécanique du solide indéformable, un mouvement de **rotation** est un mouvement pour lequel il existe un point de vecteur vitesse nul.

$$\mathcal{V}(i/k) = P \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{0} \end{cases} \quad (37)$$

 Le moment central est en cinématique le vecteur vitesse d'un point quelconque de l'axe de rotation.



**Figure 3.11** Champ des vecteurs vitesses lors d'un mouvement de rotation  $i/j$  d'axe  $\Delta$  passant par un point  $A$ .

Le champ des vecteurs vitesses admet plusieurs propriétés remarquables :

- tout point  $P$  d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le point  $A$  voit son vecteur vitesse contenu dans ce plan ;
- le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, i/j)$  est orthogonal au rayon  $\vec{AP}$  ;
- le module du vecteur vitesse  $\vec{V}(P, i/j)$  est proportionnel au module du rayon ;

## 3.8.2

# Mouvement de translation

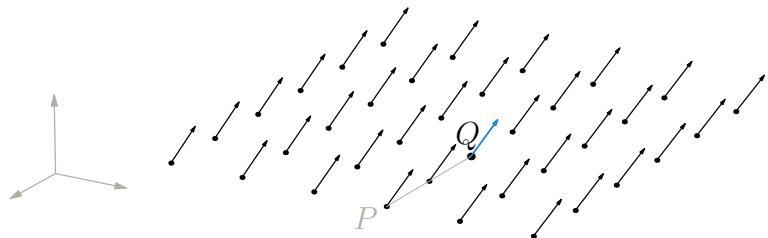
### Définition

En mécanique du solide indéformable, un mouvement de **translation** est un mouvement pour lequel le vecteur rotation est le vecteur nul.

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{V}(P,i/k) \end{cases} \quad (38)$$

Pour un mouvement de translation, le champ des vecteurs vitesses est un champ uniforme de vecteurs. Soit 2/1 un mouvement de translation, on a la propriété

$$\forall Q, \quad \vec{V}(Q,2/1) = \vec{V}(P,2/1) \quad (39)$$



**Figure 3.12** Champ uniforme des vecteurs vitesses lors d'un mouvement de translation.

## 3.8.3



Avant l'apparition des ordinateurs individuels, les ingénieurs utilisaient souvent et avec profit des techniques de résolution graphique pour les étudier...

# Mouvement plan

Une classe particulière de mécanisme est composée des mécanismes à évolution plane. Leur étude met en œuvre les concepts et les outils présentés jusqu'ici, ni plus, ni moins. Leur particularité est qu'ils n'imposent pas une appréhension tridimensionnelle de l'espace géométrique.

### Définition

Un mouvement  $i/k$  est appelé **mouvement plan** si et seulement si un plan de  $i$  reste à chaque instant confondu avec un plan de  $k$

Alors que dans l'espace sont concevables six mouvements indépendants entre deux solides, il n'en subsiste plus que trois pour les mouvements plans, à savoir la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan et les deux translations du plan.

Soit 2/1 un mouvement plan et  $\vec{z}_1$  un vecteur normal à ce plan. Dans ce cas, les éléments de réduction en un point  $P$  du torseur cinématique  $\mathcal{V}(2/1)$  admettent à chaque instant la forme particulière suivante

$$\mathcal{V}(2/1) = P \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 \end{cases} \quad (40)$$

Lors d'un mouvement plan, tous les axes de rotation, lorsqu'ils existent, sont perpendiculaires au plan d'évolution. Ceci entraîne que dans le cas d'un mouvement plan, l'automoment du torseur cinématique est toujours nul.

$$\forall P, \forall t, \quad \vec{\Omega}(2/1) \cdot \vec{V}(P,2/1) = 0 \quad (41)$$

Apparaissent alors des points particuliers : ce sont les points d'intersection des axes de rotation avec le plan d'évolution.



Si le mouvement est un mouvement plan, alors l'automoment du torseur cinématique est nul. Mais la réciproque est fausse !

**Définition**

On appelle **centre instantané de rotation** le point d'intersection de l'axe central du torseur cinématique avec le plan d'étude des mouvements.

**Notation**

Le centre instantané de rotation est usuellement abrégé en C.I.R. ou CIR et pour un mouvement  $i/k$  est noté  $I_{ik}$ .

Les centres instantanés de rotation matérialisent les positions des axes de rotation dans le plan d'évolution et sont utilisés lors des constructions graphiques.

**Synthèse****Savoirs****Je sais définir les mots ou expressions :**

- cinématique ;
- mouvement ;
- temps, date, durée ;
- repère d'espace ;
- référentiel ;
- point coïncidant ;
- trajectoire ;
- loi horaire ;
- vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération ;
- vecteur rotation ;

- solide indéformable ;
- translation, rotation ;
- composition des mouvements ;
- axe instantané de rotation, centre instantané de rotation ;
- mouvement plan.

**Je connais :**

- les trois formules de composition des mouvements ;
- la formule de changement de points sur un mouvement ;
- la formule traduisant l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses.

**Savoir-faire****Je sais**

- nommer un mouvement ;
- définir un vecteur position ;
- calculer un vecteur vitesse par changement de points ;
- calculer un vecteur vitesse ou un vecteur accélération par dérivation ;
- tracer un vecteur vitesse en utilisant soit la nature du mouvement, soit la composition des vecteurs vitesses.

## Exercices d'application

**3.1** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points définis sur un solide  $k$ , et  $Q$  un point quelconque mobile dans  $k$ .

1. Donner différents vecteurs positions possibles pour un point  $P$  suivi lors d'un mouvement  $i/k$ .

2. Montrer que le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,i/k)$  est indépendant du vecteur position choisi pour un calcul par dérivation.

3. Que représente le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_k$  ?

**3.2** On considère un solide 2 en mouvement de rotation par rapport à un solide 1.

Soient  $A$  un point de l'axe de rotation du mouvement 2/1 et ( $\Pi$ ) le plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le point  $A$ .

1. Montrer que pour tout point  $P$  du plan ( $\Pi$ ), le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,2/1)$  est tracé dans le plan ( $\Pi$ ) et est perpendiculaire au rayon  $\vec{AP}$ .

2. Déterminer l'ensemble des points  $Q$  du plan ( $\Pi$ ) ayant des vecteurs vitesses de même module.

3. Tracer sur une figure réalisée dans le plan ( $\Pi$ ) :

- un système d'axes ;
- le point  $A$  ;

- un point  $P$  ;
- le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,2/1)$  ;
- la répartition des vecteurs vitesses sur un rayon ;
- le lieu des points  $Q$  ;
- les vecteurs vitesses pour quelques points  $Q_i$ .

**4.** On considère un plan ( $\Pi_1$ ) parallèle au plan ( $\Pi$ ) et distant de  $\lambda$  de ce dernier, et on pose  $\vec{\delta}$  un vecteur unitaire orientant l'axe de rotation.

Montrer que les deux champs des vecteurs vitesses issus de ces deux plans sont identiques.

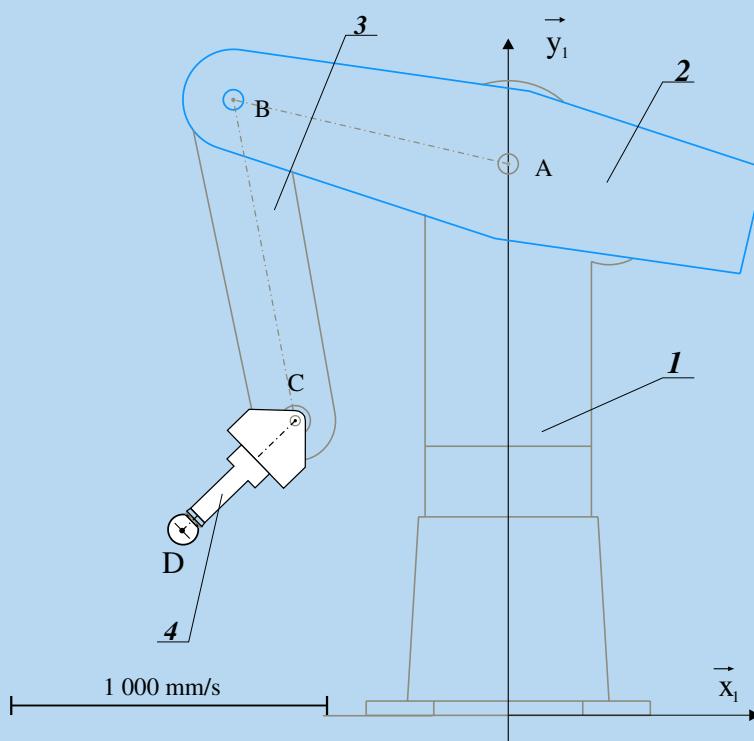
**3.3** On considère trois plans confondus en mouvements relatifs. Ces plans sont nommés respectivement 1, 2 et 3 et admettent le vecteur  $\vec{n}$  comme vecteur normal commun. On se propose de montrer que les trois centres instantanés de rotation  $I_{31}$ ,  $I_{32}$  et  $I_{21}$ , lorsqu'ils existent, sont à chaque instant alignés.

1. Expliciter la loi de composition des vitesses au point  $I_{31}$  par exemple.

2. En supposant les trois vecteurs rotations non nuls, expliciter chacun des termes précédents.

3. Conclure quant à l'alignement des trois centres instantanés de rotation.

### 3.4 Robot « Ericc »



Le robot « Ericc » équipé de l'outil « sphère ». Une figure à l'échelle 1:10 peut être téléchargée sur [www.jdotec.fr](http://www.jdotec.fr).

On considère le robot dans la position particulière définie sur la figure précédente :

- la chaise 1 est prise comme bâti et on lui associe le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- le bras 2 est en rotation par rapport à la chaise 1 autour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$ , avec un taux de rotation à l'instant considéré de  $\omega_{21} = 0,5 \text{ rad/s}$  ;
- l'avant-bras 3 est en rotation par rapport au bras 2 autour de l'axe  $(B, \vec{z}_1)$ , avec un taux de rotation à l'instant considéré de  $\omega_{32} = -1 \text{ rad/s}$  ;
- le poignet 4 peut tourner par rapport à l'avant-bras 3 autour de l'axe  $(C, \vec{z}_1)$ , mais il est à l'instant considéré sans mouvement par rapport à l'avant-bras.

Toutes les constructions sont à faire dans la position particulière de la figure jointe, en y relevant à la règle les dimensions utiles.

1. Déterminer graphiquement les vecteurs vitesses  $\vec{V}(C,3/2)$ ,  $\vec{V}(C,2/1)$  et  $\vec{V}(C,3/1)$ .
2. Déterminer la position du centre instantané de rotation  $I_{31}$ .
3. Déterminer graphiquement le vecteur vitesse  $\vec{V}(D,4/1)$ .
4. Sur une feuille vierge, tracer le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  et reporter à l'échelle 1 : 10 le point  $D$ . Imaginer les mouvements possibles concernant la position du point  $D$  dans le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ , puis construire les positions des points  $B$  et  $C$  telles que l'avant-bras 3 soit vertical, c'est-à-dire telles que les vecteurs  $\vec{CB}$  et  $\vec{y}_1$  soient colinéaires.
5. Dans cette nouvelle position, déterminer les valeurs des taux de rotation  $\omega_{43}$ ,  $\omega_{32}$  et  $\omega_{21}$  à imposer pour obtenir la rotation du poignet 4 par rapport à la chaise 1 autour de l'axe  $(D, \vec{z}_1)$  à une vitesse de  $2 \text{ rad/s}$ . Lors de ce mouvement, on concerne bien le point  $D$  immobile dans le mouvement de 4 par rapport à 1.

### 3.5 Mouvements particuliers

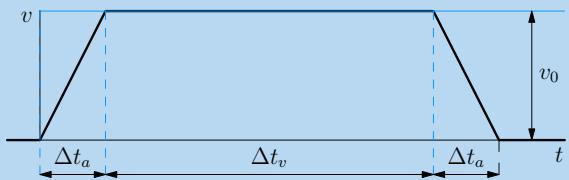
Quelles sont les natures possibles des mouvements pour lesquels l'automoment d'un torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  est à chaque instant nul ?

### 3.6 Lois de commande d'un moteur de robot

On considère un chariot de robot dont on commande le déplacement avec la loi en trapèze de vitesse donnée sur la figure ci-dessous.

- La vitesse nominale de déplacement vaut :  $v_0 = 2 \text{ m/s}$
- Le temps de montée est donné à :  $\Delta t_a = 100 \text{ ms}$ .

1. Calculer la valeur de  $\Delta t_v$  pour un déplacement total souhaité de  $\Delta x = 1 \text{ m}$ .
2. Superposer à la courbe définissant le trapèze de vitesse les allure des courbes de position et d'accélération.
3. Déterminer le déplacement minimum en dessous duquel la loi de commande devient particulière.



Loi de commande en trapèze de vitesse

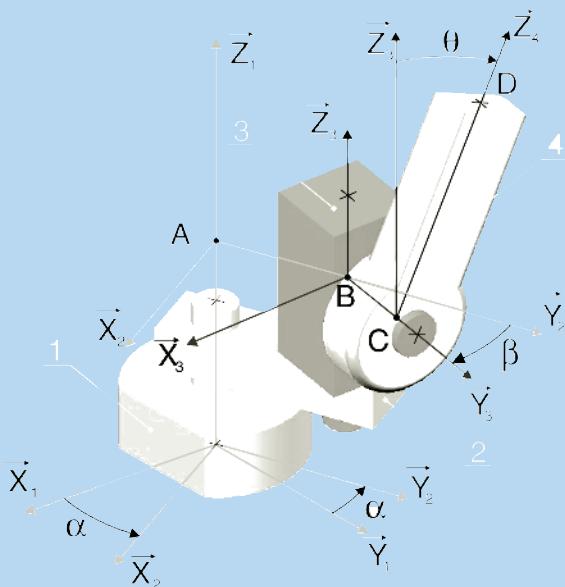
4. Pour amortir les chocs en fonctionnement, on souhaite commander le déplacement  $\Delta x$  du chariot à l'aide de trapèzes d'accélération. Construire le jeu de courbes position, vitesse, accélération et jerk sur une même figure. On appelle **jerk**, noté  $j$ , le taux de variation de l'accélération :  $j = \frac{da}{dt}$ .

### 3.7 Bras de robot

La figure suivante propose une architecture d'un bras de robot industriel. Ce dernier se compose de quatre pièces numérotées de 1 à 4, dont les assemblages autorisent trois mouvements de rotation. Le graphe de structure de ce mécanisme et les torseurs cinématiques correspondant aux mouvements autorisés sont donnés ci-dessous. On s'intéresse aux performances au niveau de l'extrémité  $D$  du bras de ce robot. Ce point est défini par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}, \text{ avec } \overrightarrow{AB} = a\vec{y}_2, \overrightarrow{BC} = b\vec{z}_3 \text{ et } \overrightarrow{CD} = c\vec{z}_4.$$

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \dot{\alpha}\vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) = B \begin{cases} \beta\vec{z}_2 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(4/3) = B \begin{cases} \dot{\theta}\vec{z}_3 \\ 0 \end{cases}$$



Architecture simplifiée d'un bras de robot.

1. Tracer les figures de définition des trois angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta$ .
2. Déterminer l'expression générale du vecteur vitesse  $\vec{V}(D,4/1)$ .
3. Dans le cas particulier où l'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  reste constant, mais non nul, identifier le mouvement particulier du bras 4 par rapport au bâti 1 et interpréter sur une figure tracée dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  le vecteur  $\vec{V}(D,4/1)$  correspondant. Il est demandé pour cette figure de choisir un angle  $\theta$  positif.

4. Dans le cas particulier où seul l'angle  $\beta$  reste constant et de valeur nulle, calculer le vecteur accélération  $\vec{A}(D,4/1)$ .

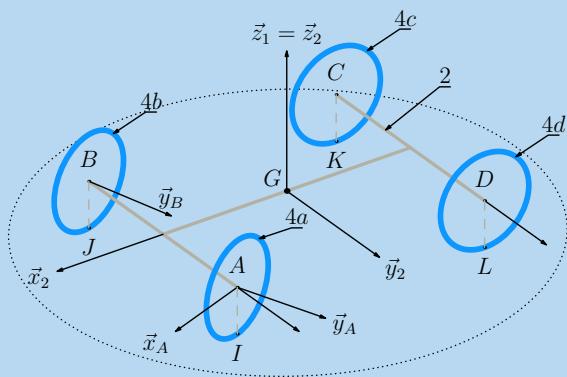
5. Dans le cas particulier où l'angle  $\theta$  est nul et les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  restent à chaque instant opposés, identifier la nature du mouvement du bras 3 par rapport au bâti 1.

Toujours dans ce cas, déterminer la nouvelle expression du vecteur accélération  $\vec{A}(D,4/1)$ .

## Exercices d'approfondissement

### 3.8 Comportement d'un véhicule en virage

On s'intéresse au véhicule schématisé sur la figure ci-dessous :



Le châssis et les quatre roues du véhicule étudié.

- le véhicule est posé sur un sol horizontal repéré 1, de normale orientée par le vecteur  $\vec{z}_1$  ascendant ;
- le châssis est modélisé par un rectangle horizontal (ABCD), de centre géométrique G. On lui associe un repère  $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $\vec{z}_2$  vertical ascendant et  $\vec{x}_2$  orientant la marche avant du véhicule. On pose

$$\begin{aligned}\vec{GA} &= L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 & \vec{GD} &= -L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 \\ \vec{GB} &= L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2 & \vec{GC} &= -L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2\end{aligned}$$

Le châssis reste horizontal au cours du temps. Il est donc en mouvement plan par rapport au sol 1 et on pose

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21}\vec{z}_2 \\ G \left\{ V_x \vec{x}_2 + V_y \vec{y}_2 \right. \end{cases}$$

- les roues sont modélisées par quatre disques de même rayon R définis dans des plans verticaux. Les axes de révolution sont ainsi dans le plan du châssis 2.

- les mouvements principaux des roues par rapport au châssis 2 sont des rotations autour de leurs axes de révolution ;
- les deux roues arrières 4c et 4d ont le même axe de révolution  $(C, \vec{y}_2) = (D, \vec{y}_2)$  ;
- la roue avant gauche 4a admet  $(A, \vec{y}_A)$  comme axe de révolution : cet axe est confondu avec  $(A, \vec{y}_2)$  en ligne droite et tourne autour de l'axe  $(A, \vec{z}_2)$  d'un angle  $\alpha_g$  en virage. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_{4a}, \vec{y}_A, \vec{z}_{4a})$  et on appelle  $\beta_g$  l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4a})$  ;
- la roue avant droite 4b admet  $(B, \vec{y}_B)$  comme axe de révolution : cet axe est confondu avec  $(B, \vec{y}_2)$  en ligne droite et tourne autour de l'axe  $(B, \vec{z}_2)$  d'un angle  $\alpha_d$  en virage. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_{4b}, \vec{y}_B, \vec{z}_{4b})$  et on appelle  $\beta_d$  l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4b})$  ;
- les quatre roues 4a, 4b, 4c et 4d sont en contact avec le sol 1 respectivement aux points I, J, K et L ;
- les roues roulent sans glisser sur le sol, ce qui traduit par un vecteur vitesse nul au point de contact dans le mouvement relatif de la roue concernée et du sol.

1. Tracer les figures de définition des angles  $\alpha_g$  et  $\beta_g$ , puis déterminer les éléments de réduction au point A du tour-seur  $\mathcal{V}(4a/2)$ .
2. Exploiter la définition du roulement sans glissement donnée pour calculer le vecteur vitesse  $\vec{V}(A,4a/1)$ , puis le vecteur vitesse  $\vec{V}(A,2/1)$ .
3. En exploitant et généralisant le résultat de la question précédente, tracer sur la figure page suivante les directions des vecteurs vitesses  $\vec{V}(A,2/1)$ ,  $\vec{V}(C,2/1)$  et  $\vec{V}(D,2/1)$ .
4. Déterminer la position du Centre Instantané de Rotation  $I_{21}$  du mouvement 2/1.
5. Mettre en place la direction du vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$  qui soit compatible avec le CIR  $I_{21}$ , puis proposer quatre vecteurs vitesses compatibles avec le mouvement 2/1.

6. Déterminer la relation entre  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  en fonction de  $a$  et  $L$ .

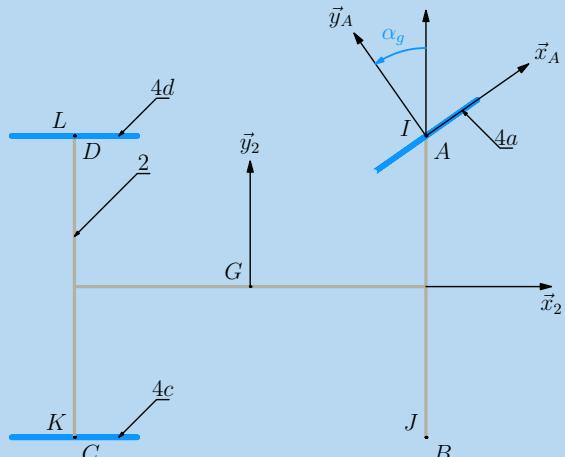
### 7. Applications numériques :

Un constructeur annonce parmi les caractéristiques d'un de ses véhicules :

- une voie  $2a = 1520 \text{ mm}$
- un empattement  $2L = 2850 \text{ mm}$
- un angle de braquage maximum en virage à gauche et en marche avant de  $\alpha_{gMAX} = 43^\circ$
- un demi-tour possible entre deux trottoirs parallèles distants de  $11,6 \text{ m}$

Déterminer l'angle  $\alpha_d$  correspondant.

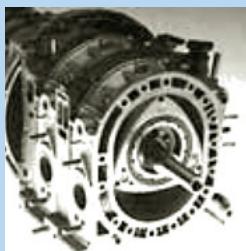
Vérifier la quatrième proposition.



Le document à compléter.

### 3.9 Moteur Wankel

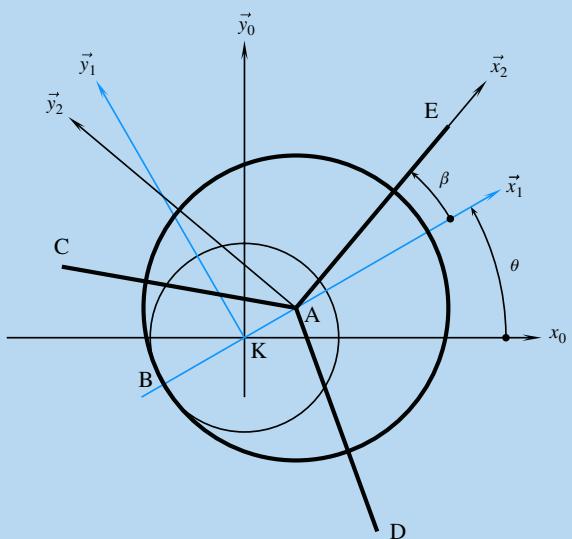
Des images en couleur sur [www.jdotec.fr](http://www.jdotec.fr), du côté de « Exercices & Corrigés ».



Aperçu d'un moteur à piston rotatif de type « Wankel »

Un tel moteur comporte trois pièces principales :

- un stator de forme *ovale*, repéré 0, auquel on associe un repère  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- un arbre moteur, repéré 1, auquel on associe le repère  $(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  ;
- une seule rotation d'axe  $(K, \vec{z}_0)$  est possible, notée  $\theta$  ;



• on définit un point  $A$  par  $\overrightarrow{KA} = e\vec{x}_1$ .

– un rotor de forme triangulaire faisant office de piston, repéré 2, auquel on associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  :

- une seule rotation d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  est possible, notée  $\beta$  ;
- de plus, ce rotor roule sans glisser en un point  $B$  sur un pignon fixe du stator ;
- la position du point  $B$  est caractérisée par le vecteur  $\overrightarrow{KB} = -b\vec{x}_1$ .

Les mouvements possibles sont ainsi caractérisés par deux torseurs cinématiques et un vecteur vitesse particulier.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(1/0) &= K \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} & \mathcal{V}(2/1) &= A \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \\ \vec{V}(B, 2/0) &= \vec{0}\end{aligned}$$

1. Tracer les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\beta$ .

2. Déterminer l'expression du vecteur rotation  $\vec{\omega}(2/0)$  et du vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/0)$ .

3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/0)$ .

4. En exploitant le roulement sans glissement au point  $B$  caractérisé par la nullité du vecteur  $\vec{V}(B, 2/0)$ , et en supposant qu'à l'instant  $t = 0$ , les angles  $\theta_0$  et  $\beta_0$  sont nuls, trouver une relation entre les angles  $\beta$  et  $\theta$ .

5. Soit  $E$  le point du rotor défini par  $\overrightarrow{AE} = d\vec{x}_2$ . Exprimer le plus simplement possible le vecteur vitesse  $\vec{V}(E, 2/0)$  en fonction des paramètres géométriques  $b$ ,  $d$ ,  $e$  et du seul paramètre cinématique  $\dot{\theta}$ .

6. Soient  $x_E$  et  $y_E$  les coordonnées du point  $E$  dans le plan  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Les exprimer en fonction de  $b$ ,  $d$ ,  $e$  et  $\theta$ .

7. On donne  $e = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$  et  $d = 100 \text{ mm}$ . Tracer dans le plan  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et à l'échelle 1:1 la trajectoire du point  $E$  dans le mouvement 2/0 définissant ainsi la forme de la courbe directrice du cylindre épitrochoïde.

**3.10** Loi de composition des accélérations : Soient trois mouvement qui se composent, par exemple 3/2, 2/1 et 3/1, et un point quelconque  $P$  immobile sur le solide 3.

1. Définir le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 3/1 et montrer que ce vecteur est à calculer

comme la somme des deux termes  $\left[ \frac{d \vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$  et  $\left[ \frac{d \vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1$ .

2. Expliquer pourquoi le premier terme  $\left[ \frac{d \vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$  n'est pas un vecteur accélération et transformer l'expression pour faire apparaître le vecteur  $\vec{A}(P,3/2)$ .

3. Le calcul du second terme  $\left[ \frac{d \vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1$  est plus délicat, car le point  $P$  n'est pas immobile à chaque instant sur le solide 2.

Introduire un point  $I$  immobile à chaque instant sur le solide 2 et comparer le résultat obtenu à la relation de changement de point (34) déterminée à la page 21.

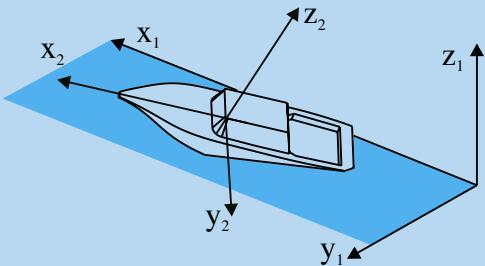
4. En regroupant les deux résultats, conclure quant à la loi de composition des accélérations.

**3.11** Pour décrire deux des mouvements particuliers d'un navire sont employés dans la marine les termes « roulis » et « tangage » :

- est appelé roulis le mouvement de rotation de la gauche vers la droite ;
- est appelé tangage le mouvement de rotation d'avant en arrière.

Ces deux rotations sont habituellement complétées par le mouvement de « lacet ». Ce dernier correspond à la rotation du navire lors d'un changement de cap.

Un repère de référence  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est posé, avec le vecteur  $\vec{z}_1$  vertical ascendant. Un repère  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est attaché au navire noté 2, avec le vecteur  $\vec{x}_2$  dans le sens de la



Un navire chahuté par la houle.

marche avant. Les deux bases vectorielles sont prises confondues lorsque le navire est au repos sur une mer calme.

Ces trois rotations sont généralement définies indépendamment les unes des autres par trois angles autour de chacun des vecteurs de la base de référence :

- l'angle associé au roulis est noté  $\alpha$  autour de  $\vec{x}_1$  ;
- l'angle associé au tangage est noté  $\beta$  autour de  $\vec{y}_1$  ;
- l'angle associé au lacet est noté  $\gamma$  autour de  $\vec{z}_1$ .

On se propose de montrer que ce choix pose souci en cinématique.

1. À quoi est attaché le repère de référence ?
2. Tracer les figures de définition des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .
3. Soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_x \vec{x}_1 + \omega_y \vec{y}_1 + \omega_z \vec{z}_1$ . Les trois coordonnées  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont-elles respectivement les dérivées scalaires des trois angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ? On choisit maintenant de nouvelles définitions pour les rotations :
  - le lacet par un angle  $\psi$  autour de  $\vec{z}_1$  ;
  - le roulis par un angle  $\varphi$  autour de  $\vec{x}_2$  ;
  - le tangage par un angle  $\theta$  autour d'un vecteur  $\vec{u}$ .
4. Proposer une expression du vecteur nodal  $\vec{u}$ .
5. Tracer les figures de définition des trois angles de telle manière que les mouvements se composent.
6. Donner la nouvelle expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1)$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 3.1

1. Avec les points proposés par l'énoncé, trois vecteurs positions sont possibles pour suivre un point  $P$  lors d'un mouvement  $i/k$  :  $\vec{AP}$ ,  $\vec{BP}$  et  $\vec{CP}$ .

2. Par définition, le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,i/k)$  est obtenu par dérivation d'un vecteur position du point  $P$  dans le référentiel d'observation. On choisit par exemple le point  $A$  pour définir le vecteur position. On a donc :

$$\vec{V}(P,i/k) = \left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_k.$$

On introduit un point  $I$  fixe dans le référentiel  $k$  en posant  $\vec{AP} = \vec{AI} + \vec{IP}$

$$\vec{V}(P,i/k) = \left[ \frac{d\vec{AI}}{dt} \right]_k + \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_k$$

En effet, le vecteur  $\vec{AI}$  est un vecteur immobile dans le référentiel  $k$ , donc de dérivée temporelle nulle dans  $k$ .

Le vecteur vitesse est bien indépendant du vecteur position choisi.

3. Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_k$  n'est pas un vecteur position du point  $P$  dans  $k$  car le point  $Q$  n'est pas immobile dans  $k$ . Soit  $\vec{QP} = \vec{AP} - \vec{AQ}$ . En utilisant la définition du vecteur vitesse, on obtient de suite

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_k &= \left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_k - \left[ \frac{d\vec{AQ}}{dt} \right]_k \\ &= \vec{V}(P,i/k) - \vec{V}(Q,i/k) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_k$  représente ainsi la différence des deux vecteurs vitesses  $\vec{V}(P,i/k) - \vec{V}(Q,i/k)$ .

### 3.2

Le point  $A$  est défini sur l'axe de rotation, et admet donc un vecteur vitesse nul dans le mouvement considéré. La formule de changement de point sur le mouvement 2/1 permet d'écrire alors

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{AP}$$

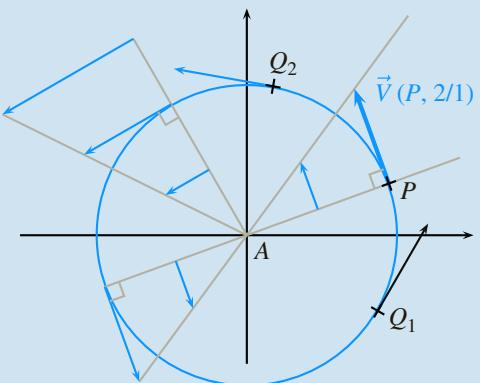
Le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,2/1)$  est de fait orthogonal au vecteur rotation  $\vec{\omega}(2/1)$  et est donc à tracer dans le plan  $(\Pi)$ .

De plus, le produit scalaire membre à membre à cette égalité avec le vecteur  $\vec{AP}$  permet de dire

$$\forall P, \vec{V}(P,2/1) \cdot \vec{AP} = 0$$

Aucun des deux vecteurs n'étant *a priori* nul, on en déduit que les deux vecteurs sont orthogonaux.

2. La formule de changement de points précédente  $\vec{V}(P,2/1) = \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{AP}$  permet de répondre à cette question. En effet, quelque soit le point  $P$  du plan  $(\Pi)$  considéré, les deux vecteurs  $\vec{\omega}(2/1)$  et  $\vec{AP}$  sont orthogonaux et on en déduit que dans ce cas très particulier, la norme du vecteur vitesse est égale au produit de leurs normes, c'est-à-dire  $\|\vec{V}(P,2/1)\| = \|\vec{\omega}(2/1)\| \|\vec{AP}\|$ .



Champ des vecteurs vitesses pour un mouvement de rotation.

À l'instant considéré, on souhaite une valeur constante pour le module du vecteur vitesse sachant que le module du vecteur rotation est indépendant du point  $P$ . L'ensemble des points  $Q$  solutions est donc le cercle du plan  $(\Pi)$  de centre  $A$  et de rayon la valeur du module  $\|\vec{AP}\|$  du point  $P$  choisi.

3. La figure (3) résume les propriétés mises en évidence lors des deux premières.

4. Soit le point  $P_1$  du plan  $(\Pi_1)$  défini tel que  $\vec{PP}_1 = \lambda \vec{\delta}$ . Le vecteur  $\vec{AP}_1$  se décrit donc aisément par  $\vec{AP}_1 = \vec{AP} + \lambda \vec{\delta}$ . On constate que le vecteur  $\vec{\delta}$  a été posé colinéaire au vecteur rotation  $\vec{\omega}(2/1)$  et on trouve ainsi immédiatement

$$\begin{aligned} \vec{V}(P_1,2/1) &= \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{AP}_1 \\ &= \vec{\omega}(2/1) \wedge (\vec{AP} + \lambda \vec{\delta}) \\ &= \vec{V}(P,2/1) \end{aligned}$$

Tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe de rotation admettent le même vecteur vitesse. On en déduit que les champs des vecteurs vitesses issus des deux plans  $(\Pi)$  et  $(\Pi_1)$  sont identiques.

### 3.3

1. La loi de composition des vitesses au point  $I_{31}$  s'écrit

$$\vec{V}(I_{31},3/1) = \vec{V}(I_{31},3/2) + \vec{V}(I_{31},2/1)$$

2. En supposant les vecteurs rotations non nuls, on se place sur chacun des trois mouvements pour écrire :

– le vecteur  $\vec{V}(I_{31},3/1)$  est nul ;

– sur le mouvement 3/2, on a  $\vec{V}(I_{31},3/2) = \omega_{32} \vec{n} \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{31}}$  ;

– sur le mouvement 2/1, on a  $\vec{V}(I_{31},2/1) = \omega_{21} \vec{n} \wedge \overrightarrow{I_{21}I_{31}}$  ;

Après substitution, on arrive alors au produit vectoriel nul suivant

$$\vec{n} \wedge \underbrace{\left( \omega_{32} \overrightarrow{I_{32}I_{31}} + \omega_{21} \overrightarrow{I_{21}I_{31}} \right)}_{\vec{u}} = \vec{0}$$

3. Le vecteur  $\vec{n}$  n'est pas nul et les deux vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux. Le seul cas de nullité du produit vectoriel est alors le vecteur  $\vec{u}$  nul, ce qui n'est possible que si les trois CIR sont alignés.

### 3.4

1. Le point  $B$  est CIR du mouvement de 3/2 et on relève comme longueur  $BC = 52 \text{ mm}$ . On en déduit le module du vecteur  $\vec{V}(C,3/2)$ , représenté par une flèche de  $26 \text{ mm}$ , que l'on peut tracer, en tenant compte du signe négatif du taux de rotation.

Le point  $A$  est CIR du mouvement de 2/1 et on relève comme longueur  $AC = 52 \text{ mm}$ . On en déduit le module du vecteur  $\vec{V}(C,2/1)$ , représenté par une flèche de  $13 \text{ mm}$ , que l'on peut tracer.

La composition des vecteurs vitesses au point  $C$  permet d'écrire

$$\vec{V}(C,3/1) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/1)$$

La construction graphique du vecteur  $\vec{V}(C,3/1)$  est alors immédiate.

2. Le CIR  $I_{31}$  est situé sur la droite passant par le point  $C$  et perpendiculaire au vecteur vitesse  $\vec{V}(C,3/1)$ . De plus, les trois CIR  $I_{31}$ ,  $I_{32}$  et  $I_{21}$  sont alignés, comme cela est vu à l'exercice. On en déduit la position du CIR  $I_{31}$ .

3. Le CIR  $I_{31}$  et le vecteur vitesse  $\vec{V}(C,3/1)$  sont connus. Le champ des vecteurs vitesses du mouvement 3/1 est donc entièrement connu. On reporte la longueur du vecteur vitesse  $\vec{V}(C,3/1)$  sur le rayon  $I_{31}D$  pour tracer  $\vec{V}(D,3/1)$ .

### 3.5

On commence par poser les éléments de réduction en un point  $P$  du torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  :

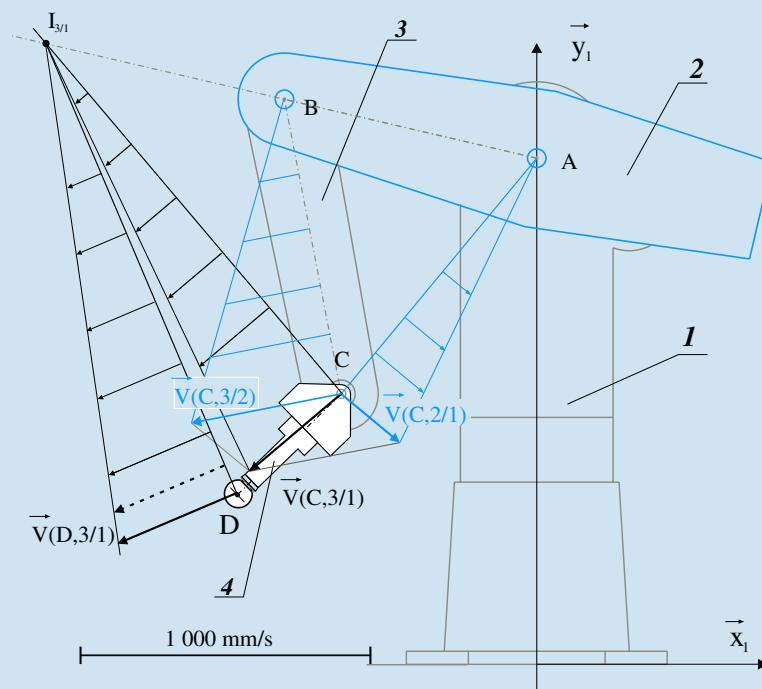
$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{V}(P,i/k) \end{cases}$$

L'automoment du torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  est l'invariant obtenu par le produit scalaire de la résultante et du moment exprimé en un point quelconque, et dans le cas présent où il est à chaque instant nul, on a l'égalité

$$\forall t, \quad \vec{\Omega}(i/k) \cdot \vec{V}(P,i/k) = 0$$

Trois cas sont à envisager :

– soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est nul, alors le mouvement  $i/k$  est un mouvement de translation, ou le mouvement nul si le torseur cinématique est le torseur nul ;



Le tracé de champs des vecteurs vitesses.

- soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  n'est pas nul et le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,i/k)$  est nul, alors le mouvement  $i/k$  est un mouvement de rotation dont l'axe de rotation passe à l'instant considéré par le point  $P$  ;
- soit les deux vecteurs ne sont pas nuls et sont orthogonaux. Dans ce cas, le mouvement est également un mouvement de rotation dont l'axe reste à déterminer.

En effet, l'axe central du torseur est défini dès que le vecteur résultante n'est pas nul et pour tout point de cet axe central, le vecteur vitesse est colinéaire au vecteur rotation. Si le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires est nul, alors nécessairement un des deux vecteurs est nul, et ce n'est pas par hypothèse le vecteur rotation...

### 3.6

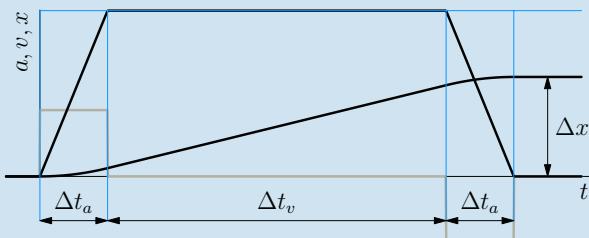
1. Le déplacement se décompose en trois phases :

- la phase de translation rectiligne uniformément accélérée pendant  $\Delta t_a$  provoque un déplacement de  $\Delta x_{ai} = \frac{1}{2}a_0 \Delta t_a^2 = \frac{1}{2}v_0 \Delta t_a$  ;
- la phase de translation rectiligne uniforme pendant  $\Delta t_v$  provoque un déplacement de  $\Delta x_v = v_0 \Delta t_v$  ;
- la phase de translation rectiligne uniformément décélérée pendant  $\Delta t_a$  provoque un déplacement  $\Delta x_{af}$  identique à  $\Delta x_{ai}$ .

On obtient finalement

$$\Delta x = v_0 (\Delta t_a + \Delta t_v)$$

2. Les courbes s'analysent en reprenant les trois phases identifiées à la question précédente.

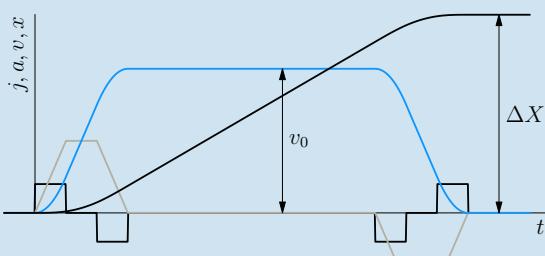


Les trois courbes accélération, vitesse et position en fonction du temps

3. La loi de commande devient particulière si la vitesse nominale n'est pas atteinte, ce qui correspond alors à

$$\Delta x_{min} = v_0 \Delta t_a$$

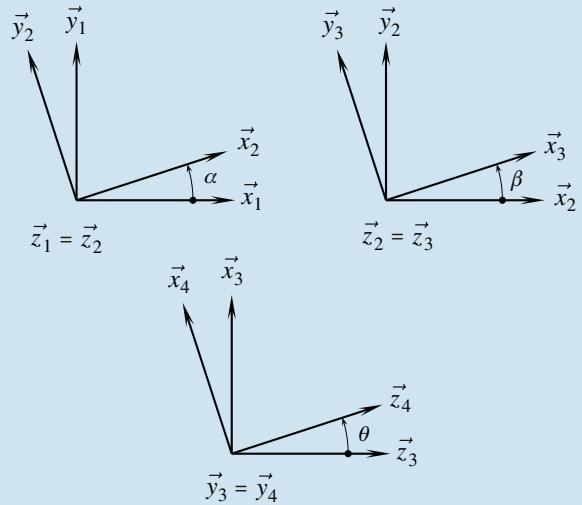
4. L'allure des quatre courbes est donnée sur la figure ci-dessous



Lois de commande en trapèzes d'accélération

### 3.7

1. Les figures de définition des angles sont à faire avec des valeurs petites et positives.



2. La composition des vitesses sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3 – 4 permet d'écrire

$$\vec{V}(D,4/1) = \vec{V}(D,4/3) + \vec{V}(D,3/2) + \vec{V}(D,2/1)$$

Il reste à utiliser la formule de changement de points sur chacun des trois mouvements :

- pour le mouvement 4/3, à partir des éléments de réduction en  $B$  du torseur  $V(4/3)$

$$\vec{V}(D,4/3) = \vec{V}(B,4/3) + \vec{\Omega}(4/3) \wedge \vec{BD}$$

Après substitution, on a alors deux produits vectoriels à calculer  $\vec{y}_3 \wedge (b\vec{y}_3 + c\vec{z}_4)$ , dont le premier est immédiatement nul. La figure de définition de l'angle  $\theta$  permet de trouver

$$\vec{V}(D,4/3) = \dot{\theta} b \vec{x}_4$$

– on recommence pour le mouvement 3/2

$$\vec{V}(D,3/2) = \dot{\beta} \vec{z}_2 \wedge (b\vec{y}_3 + c\vec{z}_4)$$

Le produit vectoriel  $\vec{z}_2 \wedge \vec{y}_3$  se lit sur la figure de définition de l'angle  $\beta$  et le résultat vaut  $-\vec{x}_3$ . Le produit vectoriel  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_4$  se lit sur la figure de définition de l'angle  $\theta$  et le résultat vaut  $\sin \theta \vec{y}_3$ . On en déduit

$$\vec{V}(D,3/2) = \dot{\beta} (-b\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$$

– enfin, le calcul à effectuer sur le mouvement 2/1 est

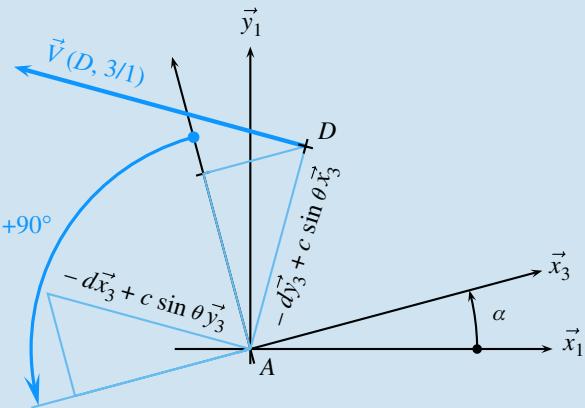
$$\vec{V}(D,2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge (a\vec{y}_2 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_4)$$

Les trois produits vectoriels se déterminent directement sur les figures de définition des angles et on trouve

$$\vec{V}(D,2/1) = \dot{\alpha} (-a\vec{x}_2 - b\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$$

On en déduit l'expression générale recherchée

$$\begin{aligned} \vec{V}(D,4/1) = & \dot{\alpha} (-a\vec{x}_2 - b\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) \\ & + \dot{\beta} (-b\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) \\ & + \dot{\theta} b \vec{x}_4 \end{aligned}$$



L'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  positif et constant

- 3.** Dans le cas particulier où l'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  reste constant, l'expression précédente se simplifie en  $\vec{V}(D, 3/1) = \dot{\alpha}(-d\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$ , avec la longueur  $d = a + b$ . Le bras 4 est en mouvement de rotation par rapport au bâti 1 auour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$ .

- 4.** Dans le cas particulier où seul l'angle  $\beta$  reste constant et nul, l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(D, 3/1)$  se simplifie en  $\vec{V}(D, 3/1) = \dot{\alpha}(-d\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) + \dot{\theta} b\vec{x}_4$ , avec la longueur  $d = a + b$ .

Le vecteur accélération  $\vec{A}(D, 3/1)$  se calcule par dérivation du vecteur vitesse  $\vec{V}(D, 3/1)$  dans la base 1. On peut anticiper le calcul en évaluant les dérivées dans 1 des trois vecteurs unitaires :

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_1 &= \vec{\omega}(3/1) \wedge \vec{x}_3 = \dot{\alpha} \vec{y}_3 \\ - \left[ \frac{d\vec{y}_3}{dt} \right]_1 &= \vec{\omega}(3/1) \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\alpha} \vec{x}_3 \\ - \left[ \frac{d\vec{x}_4}{dt} \right]_1 &= \vec{\omega}(4/1) \wedge \vec{x}_4 = -\dot{\theta} \vec{z}_4 + \dot{\alpha} \cos \theta \vec{y}_3 \end{aligned}$$

La suite du calcul ne fait intervenir que des dérivées de produits de fonctions

$$\begin{aligned} \vec{A}(D, 3/1) &= \ddot{\alpha}(-d\vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) + \ddot{\theta} b\vec{x}_4 \\ &\quad + \dot{\alpha}\dot{\theta} c \cos \theta \vec{y}_3 \\ &\quad - \dot{\alpha}^2(d\vec{y}_3 + c \sin \theta \vec{x}_3) - \dot{\theta}^2 b\vec{z}_4 + \dot{\alpha}\dot{\theta} b \cos \theta \vec{y}_3 \end{aligned}$$

- 5.** Dans le cas particulier où l'angle  $\theta$  est nul et les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  restent à chaque instant opposés, on détermine par composition des mouvements le torseur cinématique  $\mathcal{V}(3/1)$

$$\mathcal{V}(3/1) = \begin{cases} \vec{0} \\ -\dot{\alpha}a \vec{x}_2 \end{cases}$$

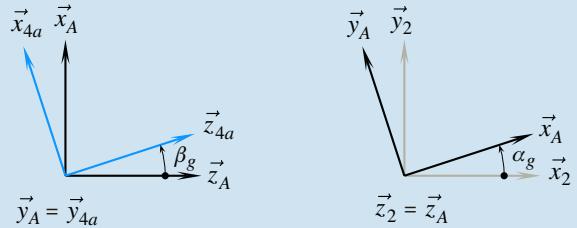
Le vecteur rotation  $\vec{\omega}(3/1)$  est à chaque instant nul, le mouvement de 3 par rapport à 1 est un mouvement de translation. Le point  $B$  a comme trajectoire pour ce mouvement le cercle de centre  $A$  et de rayon  $a$  : Le mouvement 3/1 est un mouvement de translation circulaire.

Le bras 4 est solidaire du bras 3 dans le cas étudié, donc le calcul du vecteur accélération  $\vec{A}(D, 3/1)$  est immédiat

$$\vec{A}(D, 3/1) = \vec{A}(D, 2/1) = -\ddot{\alpha}a \vec{x}_2 - \dot{\alpha}^2 a \vec{y}_2$$

### 3.8

- 1.** Le mouvement de la roue avant-gauche par rapport au chassis résulte de la composition des deux rotations définies par l'énoncé.



La forme du torseur cinématique  $\mathcal{V}(4a/2)$  s'obtient par composition des deux rotations précédentes, en prenant soin de vérifier que les deux axes de rotation passent bien par le point A.

$$\mathcal{V}(4a/2) = A \begin{cases} \dot{\alpha}_g \vec{z}_2 + \dot{\beta}_g \vec{y}_A \\ \vec{0} \end{cases}$$

- 2.** Le roulement sans glissement au point I de la roue 4a par rapport au sol 1 se traduit par

$$\vec{V}(I, 4a/1) = \vec{0}$$

La formule de changement de points sur le mouvement 4a/1 s'écrit

$$\vec{V}(A, 4a/1) = \vec{V}(I, 4a/1) + \vec{\omega}(4a/1) \wedge \vec{IA}$$

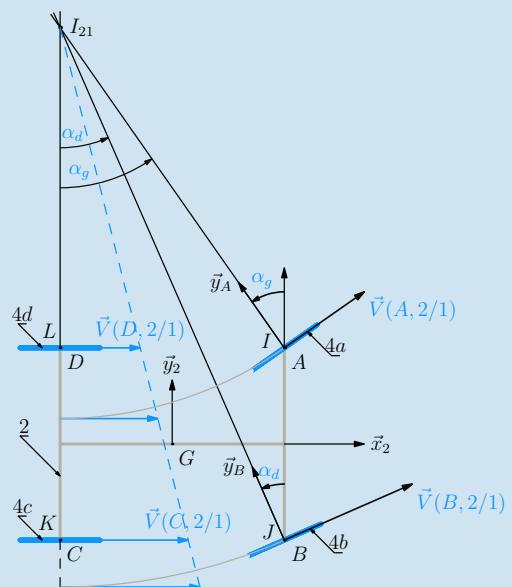
On calcule le vecteur rotation  $\vec{\omega}(4a/1)$  par composition des mouvements sur la chaîne 4a – 2 – 1 et on trouve  $\vec{\omega}(4a/1) = \omega_{21} \vec{z}_2 + \dot{\alpha}_g \vec{z}_2 + \dot{\beta}_g \vec{y}_A$ . Comme à chaque instant  $\vec{IA} = R \vec{z}_2$ , on en déduit l'expression cherchée

$$\vec{V}(A, 4a/1) = R \dot{\beta}_g \vec{x}_A$$

Le point A est à chaque instant sur l'axe de rotation du mouvement 4a/2, le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 4a/2)$  est donc nul, et on en déduit

$$\vec{V}(A, 2/1) = R \dot{\beta}_g \vec{x}_A$$

### 3.



En adaptant le résultat précédent à chacune des roues, on trouve le vecteur  $\vec{x}_2$  comme direction pour les vecteurs vitesses  $\vec{V}(C,2/1)$  et  $\vec{V}(D,2/1)$ .

**4.** Le CIR  $I_{21}$  est à l'intersection des rayons  $(C,\vec{y}_2)$  et  $(A,\vec{y}_A)$ .

**5.** Le vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$  est orthogonal au rayon  $\overrightarrow{I_{21}B}$ .

**6.** Pour trouver la relation entre les deux angles, deux triangles rectangles sont à considérer :

– sur le triangle  $(I_{21}CB)$ , on a  $\tan \alpha_d = \frac{CB}{I_{21}C} = \frac{2L}{I_{21}D + 2a}$  ;

– sur le triangle  $(I_{21}DA)$ , on a  $\tan \alpha_g = \frac{DA}{I_{21}D} = \frac{2L}{I_{21}D}$  ;

Il reste à éliminer la distance  $I_{21}D$  de ces deux équations pour trouver

$$\frac{1}{\tan \alpha_d} - \frac{1}{\tan \alpha_g} = \frac{a}{L}$$

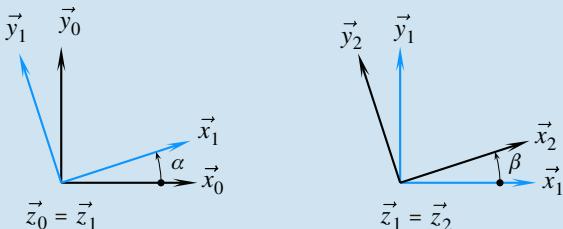
### 7. Applications numériques :

On trouve correspondant à  $\alpha_{gMAX}$  une valeur  $\alpha_d \approx 32^\circ$ .

Concernant la distance entre trottoirs, on constate que le plus grand rayon est parcouru par le point  $B$ . Sur le triangle  $(I_{21}CB)$ , on évalue  $I_{21}B = \frac{2L}{\sin \alpha_d}$ , ce qui donne un rayon de 5,39 m, soit une distance entre trottoirs de 10,8 m.

## 3.9

**1.** Les deux figures de définition des angles sont



**2.** La composition des vecteurs rotations donne directement

$$\vec{\omega}(2/0) = \vec{\omega}(2/1) + \vec{\omega}(1/0) = (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{z}_0$$

La composition des vecteurs vitesses permet d'écrire au point  $A$ .

$$\vec{V}(A,2/0) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{V}(A,1/0)$$

Sur le mouvement  $1/0$ , la formule de changement de points s'écrit

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{V}(K,1/0) + \vec{\omega}(1/0) \wedge \vec{KA}$$

Par substitution, on obtient

$$\vec{V}(A,1/0) = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge e \vec{x}_1$$

Le calcul du produit vectoriel se fait directement à partir des figures de définition des angles et on obtient, tout calcul fait

$$\vec{V}(A,2/0) = \dot{\theta} e \vec{y}_1$$

**3.** Le champ des vecteurs vitesses du mouvement  $2/0$  est entièrement défini par le calcul préliminaire des vecteurs  $\vec{\omega}(2/0)$  et  $\vec{V}(A,2/0)$ , et il suffit d'écrire sur ce mouvement

$$\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(A,2/0) + \vec{\omega}(2/0) \wedge \vec{AB}$$

Après substitution et calcul, on obtient

$$\vec{V}(B,2/0) = -(\dot{\beta}(b+e) + \dot{\theta}b) \vec{y}_1$$

**4.** Le roulement sans glissement au point  $B$  dans le mouvement  $2/0$  s'exprime par la relation  $\vec{V}(B,2/0) = \vec{0}$ . On déduit ainsi de l'équation trouvée à la question précédente la relation

$$\dot{\beta} = -\frac{b}{b+e} \dot{\theta}$$

Cette relation s'intègre immédiatement en

$$\beta - \beta_0 = -\frac{b}{b+e}(\theta - \theta_0)$$

**5.** Toujours sur le mouvement  $2/0$ , la formule de changement de points donne

$$\vec{V}(E,2/0) = \dot{\theta}e\vec{y}_1 + (\dot{\beta} + \dot{\theta})d\vec{y}_2$$

L'exploitation de la relation sur les taux de rotation permet de dire que

$$\dot{\beta} + \dot{\theta} = \frac{e}{b+e}\dot{\theta}$$

On obtient finalement la forme la plus simple du vecteur vitesse recherchée

$$\vec{V}(E,2/0) = \dot{\theta}e(\vec{y}_1 + \frac{de}{b+e}\vec{y}_2)$$

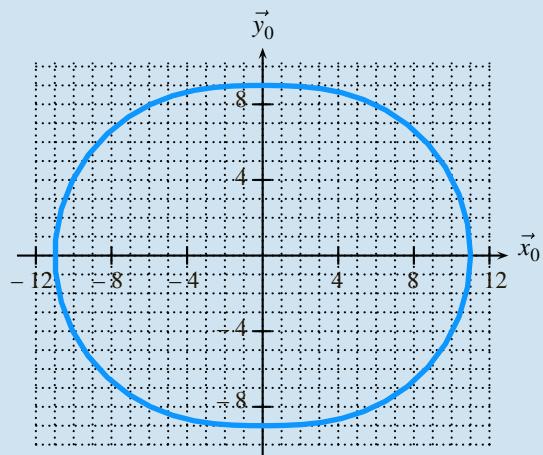
**6.** On recherche la trajectoire du point  $E$  dans le référentiel  $0$ . Les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\theta + \beta$  permettent de déterminer les composantes de ce vecteur dans la base  $0$ .

$$\begin{aligned} \vec{V}(E,2/0) &= -\dot{\theta}e \left( \sin \theta + \frac{d}{b+e} \sin \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \right) \vec{x}_0 \\ &\quad + \dot{\theta}e \left( \cos \theta + \frac{d}{b+e} \cos \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \right) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Par intégration des composantes, on obtient

$$\begin{aligned} x_E &= e \cos \theta + d \cos \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \\ y_E &= e \sin \theta + d \sin \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \end{aligned}$$

### 7. Tracé de la courbe



### 3.10

1. Par définition du vecteur accélération, on a

$$\vec{A}(P,3/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/1)}{dt} \right]_1$$

En utilisant la composition des vecteurs vitesses, puis la linéarité de l'opérateur de dérivation, on obtient l'expression de départ recherchée

$$\vec{A}(P,3/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1$$

2. La base de dérivation n'est pas associée au repère d'observation du mouvement, le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$  n'est donc pas un vecteur accélération. Il est nécessaire d'appliquer la formule de dérivation vectorielle pour écrire

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_2 \\ &\quad + \vec{\omega}(3/2) \wedge \vec{V}(P,3/2) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_2$  est par définition le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 3/2. On en déduit l'expression du premier terme calculé

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 = \vec{A}(P,3/2) + \vec{\omega}(3/2) \wedge \vec{V}(P,3/2)$$

3. Pour le calcul du second terme, on introduit un point  $I$  quelconque, mais immobile sur 2 à chaque instant, et on prend en référence la formule de changement de points (34) vue à la page 61, que l'on écrit de suite en adaptant les noms des points.

$$\begin{aligned} \vec{A}(P,2/1) &= \underbrace{\vec{A}(I,2/1)}_{\text{terme A}} \underbrace{\left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1)}{dt} \right]_1}_{\text{terme B}} \wedge \vec{IP} \\ &\quad + \underbrace{\vec{\omega}(2/1) \wedge (\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IP})}_{\text{terme C}} \end{aligned}$$

Cette relation est la relation valable pour deux points  $P$  et  $I$  immobiles à chaque instant sur 2. Le point  $P$  étant attaché au solide 3, il faut s'attendre à l'apparition d'un terme complémentaire.

Pour démarrer le calcul, la formule de changement de points sur le mouvement 2/1 et la linéarité de l'opérateur de dérivation permettent de mettre en évidence les deux nouveaux termes à calculer

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{V}(I,2/1)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IP}}{dt} \right]_1$$

Comme le point  $I$  est immobile à chaque instant sur 2 et par définition du vecteur accélération, on peut écrire le premier vecteur « terme A » recherché

$$\left[ \frac{d\vec{V}(I,2/1)}{dt} \right]_1 = \underbrace{\vec{A}(I,2/1)}_{\text{terme A}}$$

La formule de dérivation d'un produit fait apparaître deux vecteurs dont le « terme B » recherché

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IP}}{dt} \right]_1 &= \\ \underbrace{\left[ \frac{d\vec{\omega}(2/1)}{dt} \right]_1}_{\text{terme B}} \wedge \vec{IP} + \vec{\omega}(2/1) \wedge \underbrace{\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1}_{\text{terme D}} &= \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1$  n'est pas un vecteur vitesse, car le point

$I$  n'est pas immobile à chaque instant dans le référentiel 1. Il est nécessaire d'appliquer la formule de dérivation vectorielle pour écrire

$$\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_2 + \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IP}$$

Le point  $P$  attaché au solide 3 et le point  $I$  attaché au solide 2, le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_2$  est par définition le vecteur

vitesse  $\vec{V}(P,3/2)$  du point  $P$  dans le mouvement 3/2. On est maintenant en mesure de détailler le vecteur « terme D » et de faire apparaître le troisième vecteur « terme C ».

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(2/1) \wedge \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 &= \underbrace{\vec{\omega}(2/1) \wedge (\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IP})}_{\text{terme C}} + \underbrace{\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2)}_{\text{terme complémentaire}} \end{aligned}$$

Les différents morceaux sont regroupés et la forme finale du second terme recherché est ainsi

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 = \vec{A}(P,2/1) + \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2)$$

4. En remplaçant les deux termes dans l'expression vue à la première question, la relation de composition des accélérations est immédiate

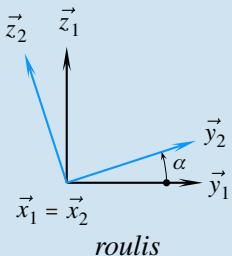
$$\begin{aligned} \vec{A}(P,3/1) &= \vec{A}(P,3/2) + \vec{A}(P,2/1) \\ &\quad + 2\vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2) \end{aligned}$$

### 3.11

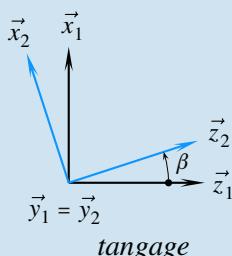
1. La première proposition est en général de parler du mouvement du navire par rapport à la mer. Cette dernière n'est pas *solide*, et ne convient donc pas. Il est nécessaire de réaliser que le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est attaché à la terre.

2. Avec la définition donnée, chacun des angles peut être défini lorsque l'on suppose les deux autres nuls.

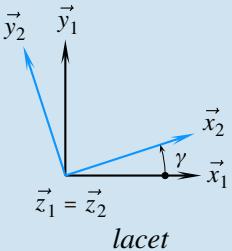
3. Les trois mouvements ainsi définis correspondent à des cas particuliers du mouvement général de 2 par rapport à 1. La composante  $\omega_x$  n'est la dérivée scalaire de l'angle  $\alpha$  que dans



*roulis*



*tangage*



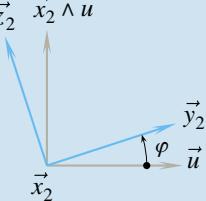
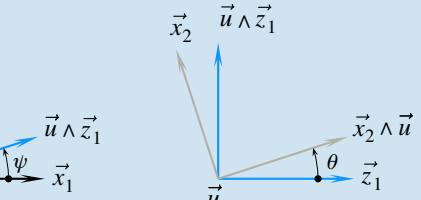
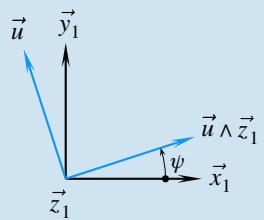
*lace*

le seul cas où les deux autres angles restent nuls ! Les trois rotations ne se composent pas et le vecteur rotation n'est pas défini à partir des dérivés scalaires des angles.

**4.** Pour pouvoir composer les mouvements, il est conseillé de s'inspirer de la méthode utilisée pour construire les angles d'Euler. Le vecteur nodal est ainsi choisi orthogonal aux vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{x}_2$ . On peut prendre par exemple

$$\vec{u} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2\|}$$

**5.** On obtient ainsi les trois nouvelles figures



**6.** Les trois rotations ainsi définies se composent et le vecteur rotation s'écrit simplement

$$\overrightarrow{\Omega}(2/1) = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{x}_2$$

# Mécanique Contacts et liaisons

CHAPITRE **4**

## Plan

<b>4.1</b> Chaîne de solides	78
<b>4.2</b> Les liaisons	79
<b>4.3</b> Les contacts	89
<b>4.4</b> Transmissions particulières	93
Exercices d'application	99
Exercices d'approfondissement	101
Solutions des exercices	106

## Introduction

Après le chapitre 2, synthèse des outils mathématiques pour le mécanicien, et après le chapitre 3, consacré aux concepts posés pour la cinématique du solide indéformable, ce chapitre s'intéresse à la description du réel et aux modèles utilisés à cet effet.

Parler de contacts et de liaisons revient à parler respectivement du réel et de modèles. Pour l'étudiant en phase d'apprentissage, il est indispensable de bien séparer ces deux aspects, sous peine de confusions permanentes et d'incompréhensions. Un modèle se suffit à lui-même et se manipule sans trop de précautions, alors que le réel nécessite un regard différent pour poser des hypothèses et exprimer les conditions induites.

Il est également nécessaire de bien distinguer un mouvement possible d'un mouvement constaté. En effet, le mécanicien s'attache toujours dans ses analyses à mettre en évidence des mouvements possibles. Les mouvements réels sont quant à eux observés sur les systèmes réels ou calculés lors de simulation.

## Prérequis

- Les deux chapitres précédents.

## Objectifs

- Imaginer des mouvements dans un espace à six degrés de liberté, parfois restreint à trois degrés de liberté ;
- Distinguer un mouvement possible d'un mouvement réel ;
- Appréhender un ensemble de modèles de comportement ;
- Rechercher des lois entrée-sortie de mécanisme ;
- Confronter résultats théoriques et résultats expérimentaux.

# 4.1 Chaîne de solides

L'étude des mécanismes s'appuie sur le parcours de chaînes de solides, sur lesquelles on compose les mouvements.

## 4.1.1 Graphe de structure

### Définition

On appelle **graphe de structure** une construction graphique constituée de sommets et d'arcs. En mécanique, les sommets sont des ensembles indéformables et les arcs sont soit des contacts, soit des liaisons.

L'objectif des graphes est de mettre immédiatement en évidence la structure. C'est pourquoi sont posées les règles de syntaxe suivantes, illustrées sur la figure 4.1 :

- les sommets se représentent par des points bien marqués ;
- les  $n$  ensembles indéformables représentés par les sommets sont numérotés de préférence de 1 à  $n$ , parfois de 0 à  $n - 1$  ;
- un arc relie nécessairement deux sommets et se représente sauf impossibilité par des segments de droite. Comme deux arcs (a) et (b) relient sur cet exemple les sommets 1 à 2, ils sont tracés en lignes courbes ;
- à l'intérieur d'un graphe apparaissent des boucles à dénombrer lors de la théorie des mécanismes. Il est ainsi important que deux arcs ne se croisent pas.

 La théorie des mécanismes est abordée en seconde année.

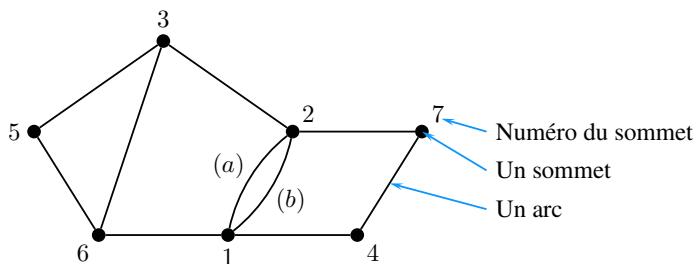


Figure 4.1 Syntaxe pour un graphe de structure.

Suivant la nature des arcs, ce graphe prend différents noms :

- **graphe des contacts** lorsque les arcs représentent des contacts ;
- **graphe des liaisons** lorsque les arcs représentent des liaisons ;
- un graphe dont les arcs ne sont pas caractérisés garde le nom de **graphe de structure**.

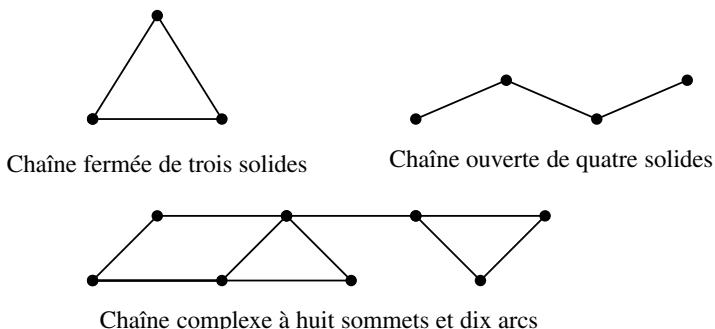
## 4.1.2

### Chaîne ouverte – chaîne fermée

Les graphes de structure sont une expression graphique des chaînes de solides, parmi lesquelles on distingue deux types différents :

- la **chaîne fermée**, pour laquelle en partant d'un sommet, on peut y revenir par un chemin différent de l'aller ;
- la **chaîne ouverte**, pour laquelle seul un retour en arrière permet de revenir au sommet de départ.

Enfin, on appelle **chaîne complexe** une chaîne composée de chaînes ouvertes et fermées. La figure (4.2) illustre la nature des chaînes de solides.



**Figure 4.2** Chaînes fermée, ouverte et complexe.

## 4.2 Les Liaisons

Le mot liaison est à réservier aux modèles de comportement cinématique. Il est trop souvent utilisé indifféremment pour les aspects théoriques et pour les aspects technologiques, et on ne sait alors plus trop ce qu'il représente, en aboutissant à des propositions du type : « Je modélise cette liaison par une liaison pivot ». Il faut admettre qu'il est difficile de modéliser un objet par lui même...

### 4.2.1

Un modèle, donc une construction abstraite représentant la réalité de manière simplifiée...

#### Liaison

##### Définition

En mécanique, une **liaison** est un modèle de comportement cinématique.

Une liaison s'attache à définir les possibilités de mouvements entre deux ensembles indéformables. On ne saurait trop insister en répétant qu'un mouvement possible n'est pas forcément un mouvement constaté.

### 4.2.2

#### Degré de liberté

Comme il a été vu au chapitre III, deux solides sans relation ont six mouvements relatifs indépendants possibles.

##### Définition

On appelle **degré de liberté** un des mouvements indépendants autorisés par une liaison.

Le nombre de degrés de liberté est alors le nombre de mouvements indépendants autorisés par une liaison, et deux solides sans relation ont six degrés de liberté l'un par rapport à l'autre. À l'opposé, deux solides fixés l'un par rapport à l'autre n'admettent aucun degré de liberté.



Usuel, oui, mais pas obligatoire ! Cette manière de faire n'est pas unique.



Parmi ces liaisons, neuf sont citées par la norme NF EN ISO 3952-1 de mai 1995.



« Aucune référence technologique » ne veut pas dire aucune référence géométrique...

## 4.2.3

### Liaisons usuelles

Une dizaine de modèles de comportement est posée sans aucune référence technologique, avec des noms plus ou moins explicites.

On rappelle que les liaisons définissent des mouvements possibles et ne donnent aucune indication quant à leur réalisation matérielle. Les formes réelles évoquées par leur appellation n'ont qu'une valeur d'image pour aider à la mémorisation et à la description de la géométrie associée.

#### Définition

On appelle **liaison usuelle** un modèle de comportement cinématique possible que l'on peut nommer sans aucune référence technologique.

À une liaison usuelle sont associées six caractéristiques :

- le nom ;
- la description géométrique, à attacher au nom lors de l'énoncé de la liaison ;
- les représentations 3D et 2D ;
- le nombre de degrés de liberté ;
- le paramétrage cinématique, effectué en posant le torseur cinématique ;
- le paramétrage géométrique, proposé de préférence sous la forme de figures.

Pour aborder leur présentation en suivant un ordre de difficulté croissant, on choisit ici de classer les liaisons usuelles en trois catégories, ce que résume le tableau de la figure (4.3).



La connaissance de ces dix liaisons est indispensable pour traiter efficacement un problème de mécanique.

Liaison à direction	Liaison à axe	Liaison à centre
Glissière Plane	Pivot Pivot glissant Hélicoïdale Cylindre plan	Sphérique Sphère plan Sphère cylindre Sphérique à doigt

**Figure 4.3** Les dix liaisons usuelles.

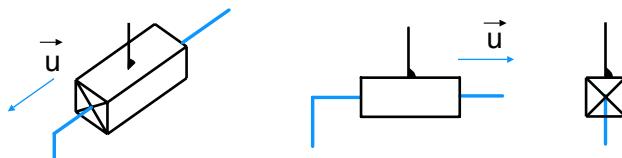
#### Les liaisons à direction

##### *Glissière*

Le nom *glissière* fait penser au verbe *glisser* : cette liaison comporte effectivement un degré de liberté en translation.

##### ➤ Aspect cinématique

Le vecteur rotation est nul. Le champ des vecteurs vitesses est uniforme. Le torseur cinématique est un torseur couple.

**Exemple :** Glissière de direction  $\vec{u}$ 

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{0} \\ V_{ik}\vec{u} \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable en n'importe quel point de l'espace.

$$\forall P, \vec{V}(P,i/k) = V_{ik}\vec{u}$$

**► Aspect géométrique**

Sur le solide  $i$  est définie une direction  $\vec{u}_i$ , sur le solide  $k$  est définie une direction  $\vec{u}_k$ , et ces deux directions restent à chaque instant égales.

$$\forall t, \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Le paramètre cinématique est la dérivée d'un paramètre de mise en position suivant  $\vec{u}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques pris respectivement sur  $i$  et sur  $k$ . On pose  $\vec{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  orthogonal à  $\vec{u}$ . Le vecteur  $\vec{AB}$  est un vecteur position du point  $B$  dans le repère  $i$  et on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda} &= V_{ik} \\ \dot{\mu} &= 0 \end{cases}$$

***Appui-plan ou plane***

Le mot ***appui-plan*** fait référence au *contact plan*. Cette liaison correspond au mouvement plan d'un solide par rapport à un autre et comporte trois degrés de liberté :

- la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan concerné ;
- les deux translations dans le plan.

**► Aspect cinématique**

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire suivant la normale au plan. Tous les vecteurs vitesses sont orthogonaux à la normale.

**Exemple :** Liaison plane de normale  $\vec{n}$ .

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \omega_{ik}\vec{n} \\ \vec{V}(A,i/k), \text{ avec } \vec{V}(A,i/k).\vec{n} = 0 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable en n'importe quel point de l'espace.

$$\forall P, \vec{V}(P,i/k) \cdot \vec{n} = 0$$

### ► Aspect géométrique

Sur le solide  $i$  est défini un plan de normale  $\vec{n}_i$ , sur le solide  $k$  est défini un plan de normale  $\vec{n}_k$ , et ces deux plans restent confondus à chaque instant.

### À propos des liaisons à direction

Chacune de ces deux liaisons est dite **liaison à direction** car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique est la même en tout point de l'espace.

En conséquence, le symbole cinématique se positionne n'importe où sur une figure, et l'unique contrainte est de respecter la direction posée.

### Les liaisons à axe

#### Pivot

Le nom **pivot** fait penser au verbe *pivoter* : cette liaison comporte un degré de liberté en rotation. Deux solides en liaison pivot peuvent tourner l'un par rapport à l'autre autour d'une droite.

### ► Aspect cinématique

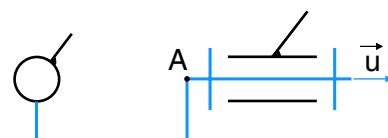
Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire.

#### Exemple : Pivot d'axe ( $A, \vec{u}$ )

Pivot d'axe



Norme ISO



Norme NF

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} \vec{u} \\ 0 \end{array} \right.$$

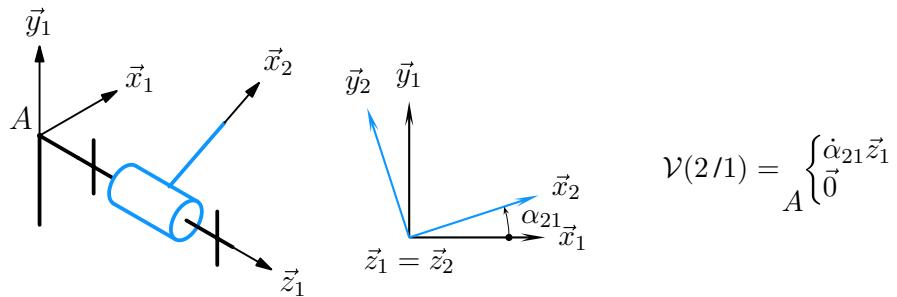
La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

$$\forall P \in (A, \vec{u}), \vec{V}(P, i/k) = \vec{V}(A, i/k) = \vec{0}$$

### ► Aspect géométrique

Le paramètre cinématique est la dérivée scalaire du paramètre angulaire de mise en position du solide  $i$  par rapport au solide  $k$ .

**Exemple :** Pivot d'axe ( $A, \vec{z}_1$ ) entre deux solides 2 et 1



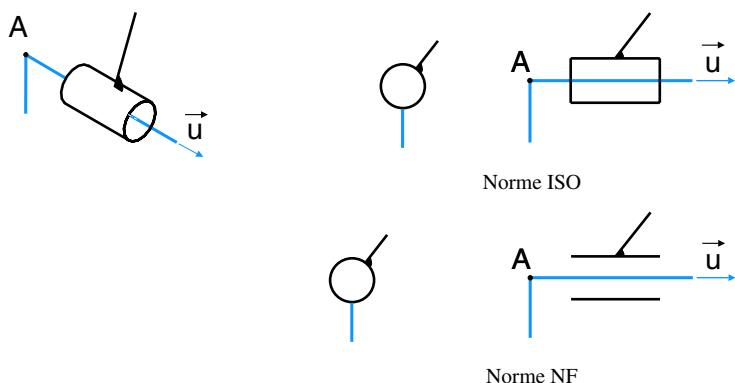
### Pivot-glissant

Le nom *pivot-glissant* combine les caractéristiques des mots pivoter et glisser. Cette liaison comporte deux degrés de liberté, une rotation et une translation orientées par un même vecteur.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire, ainsi que le vecteur vitesse d'un point de l'axe de rotation.

**Exemple :** Pivot-glissant d'axe ( $A, \vec{u}$ )



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \omega_{ik} \vec{u} \\ V_{ik} \vec{u} \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

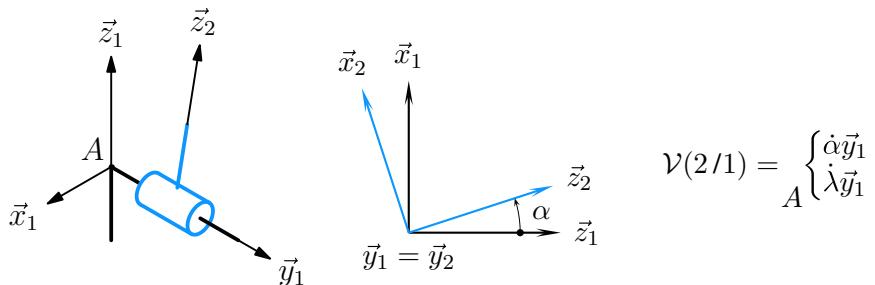
$$\forall P \in (A, \vec{u}), \overrightarrow{V}(P, i/k) = \overrightarrow{V}(A, i/k) = V_{ik} \vec{u}$$

#### ► Aspect géométrique

Sur chaque solide est définie une droite, et ces deux droites restent confondues au cours du temps.

**Exemple :** Pivot-glissant d'axe ( $A, \vec{y}_1$ ) entre deux solides 2 et 1.

Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques pris sur l'axe de rotation et attachés respectivement à 1 et à 2. On pose  $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{y}_1$  et on a



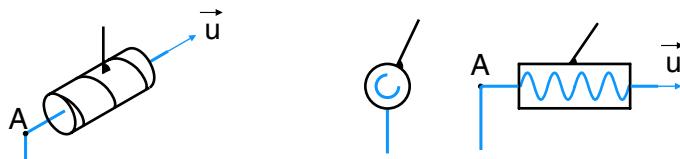
### Hélicoïdale

Le nom **hélicoïdale** est dérivé du mot hélice. Cette liaison comporte un seul degré de liberté, une rotation et une translation orientées par un même vecteur et combinées.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire, ainsi que le vecteur vitesse d'un point de l'axe de rotation. Ces deux composantes sont liées.

**Exemple :** Hélicoïdale d'axe ( $A, \vec{u}$ )



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} \vec{u} \\ p \omega_{ik} \vec{u} \end{array} \right., \text{ avec } p \text{ le pas de l'hélice}$$

L'hélice est à droite lorsque le pas est positif, à gauche lorsque le pas est négatif. Réciproquement, le pas est positif si l'hélice est à droite, négatif si l'hélice est à gauche.

La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

$$\forall P \in (A, \vec{u}), \overrightarrow{\mathcal{V}}(P, i/k) = \overrightarrow{\mathcal{V}}(A, i/k) = V_{ik} \vec{u} = p \omega_{ik} \vec{u}$$

#### ► Aspect géométrique

Sur chaque solide est définie une hélice de pas constant. Ces deux hélices sont semblables et restent à chaque instant confondues. Les paramètres de mise en position peuvent être définis comme pour la liaison pivot-glissant, et on ajoute la relation de dépendance.

### Cylindre-plan

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom **cylindre-plan** un cylindre de révolution à chaque instant sur un plan. Cette liaison autorise quatre degrés de liberté, qui ne sont pas très simples à décrire. Sont possibles :

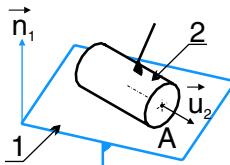
- les deux rotations suivant la normale au plan et suivant l'axe du cylindre de révolution ;
- les deux translations dans le plan.

L'unité du pas dans le système international est le mètre par radian [ $m \text{ rd}^{-1}$ ].

Imaginez une hélice à droite et le mouvement correspondant !

Imaginer et construire les trois bases vectorielles : celle attachée à 1, celle attachée à 2 et la base locale ( $\vec{n}_1, \vec{u}_2, \vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ ).

**Exemple :** Cylindre plan d'axe ( $A, \vec{u}_2$ ) et de normale  $\vec{n}_1$ .



$$\mathcal{V}(i/k) = A \begin{cases} \omega_n \vec{n}_1 + \omega_u \vec{u}_2 \\ \vec{V}(A, 2/1), \text{ avec } \vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}$$

Seuls les points de l'axe de rotation n'ont pas de composante de vitesse suivant  $\vec{n}_1$ .

### ► Aspect géométrique

Sur un des solides est définie une droite, sur le second est défini un plan, et la droite reste à chaque instant dans le plan.

### À propos des liaisons à axe

Chacune de ces quatre liaisons est dite **liaison à axe** car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique est la même en tout point de l'axe de la liaison. En conséquence, le symbole cinématique se positionne obligatoirement sur l'axe. Par contre la position du symbole sur cet axe reste libre.

### Les liaisons à centre

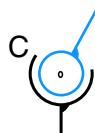
#### Sphérique

Le nom **sphérique** dérive du mot sphère, dont le centre matérialise le point immobile dans le mouvement relatif des deux solides. Cette liaison comporte trois degrés de liberté en rotation.

### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation est quelconque, le vecteur vitesse du centre est à chaque instant nul.

**Exemple :** Sphérique de centre  $C$ .



$$\mathcal{V}(i/k) = C \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{0} \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au centre  $C$ .

### ► Aspect géométrique

Sur chaque solide est défini un point, et ces deux points restent confondus au cours du temps.

#### Sphère-plan

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom **sphère-plan** une sphère en contact à chaque instant avec un plan. Cette liaison autorise cinq degrés de

liberté, les trois rotations et les deux translations dans le plan. Il est également possible de dire que la liaison sphère-plan empêche la seule translation suivant la normale au plan.

### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation est quelconque et le vecteur vitesse du centre de la sphère est orthogonal à la normale au plan.

**Exemple :** Sphère-plan de centre  $C_2$  et de normale  $\vec{n}_1$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = C \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(C,2/1), \text{ avec } \vec{V}(C,2/1) \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au centre  $C$ .

### ► Aspect géométrique

Sur un des solides est défini un point, sur l'autre un plan. À chaque instant, le point du premier solide reste sur le plan du second.

#### Sphère-cylindre

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom **sphère-cylindre** une sphère à chaque instant à l'intérieur d'un cylindre de révolution. Cette liaison autorise quatre degrés de liberté, les trois rotations et la translation suivant l'axe du cylindre de révolution.

### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation est quelconque et le vecteur vitesse du centre de la sphère n'a qu'une composante scalaire suivant l'axe de révolution.

**Exemple :** Sphère-cylindre de centre  $C_2$  et d'axe  $(C, \vec{u}_1)$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = C \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ V_{21}\vec{u}_1 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au point  $C$ .

### ► Aspect géométrique

Sur un des solides est défini un point, sur l'autre un axe. À chaque instant, le point du premier solide reste sur l'axe du second.

### Sphérique-à-doigt

Cette liaison est la seule dont le nom n'est pas entièrement explicite. En effet la liaison **sphérique-à-doigt** est une liaison sphérique sur laquelle on ajoute :

- sur le premier solide une droite passant par le centre de la sphère ;
- sur le second un plan contenant le centre de la sphère.

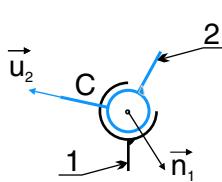
Cette liaison comporte deux degrés de liberté :

- la rotation autour de la droite ;
- la rotation suivant la normale au plan.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation admet deux composantes scalaires dans une base locale et le vecteur vitesse du centre de la sphère est nul.

**Exemple :** Sphérique-à-doigt de centre  $C$ , d'axe ( $C, \vec{u}_2$ ) et de normale  $\vec{n}_1$ .



Le symbole

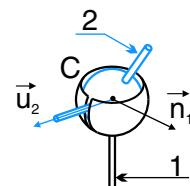


Image plus réaliste pour comprendre

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = C \begin{cases} \omega_u \vec{u}_2 + \omega_n \vec{n}_1 \\ 0 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au point  $C$ .

#### ► Aspect géométrique

Sur le premier solide est défini un point sur une droite, sur le second un point sur un plan. À chaque instant, les deux points restent confondus et la droite reste sur le plan.

#### À propos des liaisons à centre

Chacune de ces quatre liaisons est dite **liaison à centre** car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique n'est valable à chaque instant que pour le point donné. En conséquence, le symbole cinématique se positionne obligatoirement au point caractéristique, sans aucune autre possibilité.

#### Compléments concernant toutes les liaisons

- Pour les liaisons glissière, pivot, pivot-glissant, hélicoïdale et sphérique, les symboles semblent faire référence à un contenu et un contenant. Au risque de se répéter, cette distinction est purement symbolique et sans rapport avec quelque réalisation technologique que ce soit. C'est pourquoi les solides  $i$  et  $k$  sont pour ces liaisons indifféremment attachés aux traits noirs ou bleus, et le choix se fait lors de la réalisation d'un schéma cinématique en suivant des critères de lecture ou d'esthétique.
- Pour la liaison plane, le symbole est symétrique et les numéros s'échangent également sans souci.
- Un attention particulière doit être portée aux quatre dernières liaisons, pour lesquelles les caractéristiques géométriques ne sont pas les mêmes sur les deux solides :

- pour la liaison sphère-plan, il y a d'un côté une sphère, de l'autre un plan ;
- pour la liaison sphère-cylindre, il y a d'un côté une sphère et de l'autre un cylindre de révolution ;
- pour la liaison cylindre-plan, il y a d'un côté un cylindre de révolution et de l'autre un plan ;
- pour la liaison sphérique-à-doigt, il y a d'un côté un axe et de l'autre un plan.

C'est pourquoi les caractéristiques géométriques sont pour ces liaisons indiquées lors de la présentation des exemples.

## 4.2.4

### Liaison équivalente

Les liaisons usuelles sont des modèles dont les caractéristiques sont complètement déterminées, indépendamment de toute réalisation technologique. Il est donc possible de les combiner.

#### Définition

On appelle **liaison équivalente** une liaison que l'on pose entre deux solides et dont on détermine les caractéristiques par résolution de chaînes fermées.

On distingue :

- les liaisons en série, générant une chaîne ouverte de solides ;

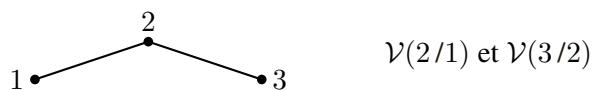


- les liaisons en parallèle, pour lesquelles on constate plusieurs arcs entre deux solides.

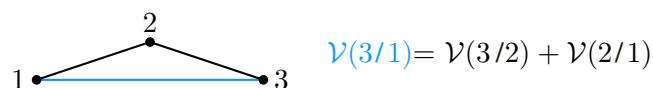


#### ► Liaison en série

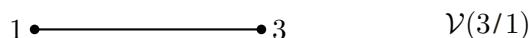
Soit par exemple une chaîne ouverte de solides 1 – 2 – 3 dont les deux liaisons sont supposées connues.



On pose la liaison équivalente recherchée entre 1 et 3, dont on détermine les six inconnues scalaires cinématiques par la résolution de la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1.



Cette liaison équivalente est ainsi connue, avec des caractéristiques exprimées en fonction des paramètres des liaisons 1 – 2 et 2 – 3.



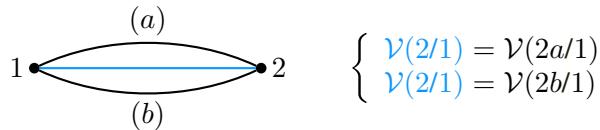
### ► Liaison en parallèle

Soit par exemple deux solides 1 et 2 reliés par deux liaisons connues.



$$\mathcal{V}(2a/1) \text{ et } \mathcal{V}(2b/1)$$

On pose la liaison équivalente recherchée entre 1 et 2, dont on détermine les six inconnues scalaires cinématiques par la résolution des deux chaînes fermées  $1 - 2a - 1$  et  $1 - 2b - 1$ .



$$\begin{cases} \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(2a/1) \\ \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(2b/1) \end{cases}$$

C'est ainsi que l'on obtient la liaison équivalente entre les deux solides 1 et 2. Elle cumule les caractéristiques des deux liaisons précédentes

$$1 \bullet \xrightarrow{\hspace{1cm}} \bullet 2 \quad \mathcal{V}(2/1)$$

## 4.3 Les contacts

On s'intéresse maintenant aux contacts réels entre solides, avec l'objectif d'associer aux différentes situations rencontrées des modèles de comportement cinématique.

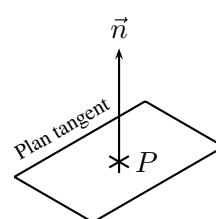
Pour toute cette section, il est supposé que le contact décrit est un contact observé à chaque instant. Des contacts temporaires, tels des butées de fin de course, limitent bien évidemment l'amplitude des mouvements, mais n'ont aucune influence sur leur nature.

### 4.3.1

#### Géométrie du contact ponctuel

Deux objets en contact le sont au moins au niveau d'un point, ou au niveau d'une surface suffisamment petite pour l'assimiler à un seul point.

Soient deux ensembles indéformables en contact en un point  $P$ . On s'intéresse au plan tangent au niveau du contact que l'on caractérise par son vecteur normal.



**Figure 4.4** Un point de contact  $P$  et sa normale  $\vec{n}$ .

Comme l'on passe sans arrêt de l'espace affine à l'espace vectoriel associé, le terme « normal » ou « normale » est utilisé à la fois pour parler du vecteur seul et de la droite définie par le vecteur et le point de contact.

## 4.3.2

### Cinématique du contact ponctuel

Soient deux solides  $i$  et  $k$  en contact en un point  $P$  et soit  $\vec{n}$  le vecteur normal au contact.

Le torseur cinématique caractérisant les mouvements possibles  $i/k$  est

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{V}(P,i/k), \text{ avec } \vec{V}(P,i/k) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Comme cela a été vu au chapitre II en application du double produit vectoriel, on décompose le vecteur rotation suivant la normale et sur le plan tangent

$$\vec{\Omega}(i/k) = \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}(i/k)}_{\text{pivotement}} \vec{n} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{n})}_{\text{roulement}} \quad (2)$$

La composante normale du vecteur rotation est appelée **pivotement** et la composante tangentielle **roulement**.

De même, on décompose le vecteur vitesse du point de contact suivant la normale et sur le plan tangent

$$\vec{V}(P,i/k) = \underbrace{\vec{V}(P,i/k) \cdot \vec{n}}_{\text{pénétration}} \vec{n} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{V}(P,i/k) \wedge \vec{n})}_{\text{glissement}} \quad (3)$$

Le contact ponctuel est caractérisé par une vitesse de pénétration nulle et la composante dans le plan tangent est appelé **vitesse de glissement**.

## 4.3.3

### Matérialiser les liaisons

Un premier exercice pour s'habituer à la manipulation des points de contact et de leur normale est de chercher à matérialiser les liaisons usuelles.

Le tableau de la figure (4.5) propose une solution pour quatre liaisons usuelles, en donnant le nombre minimum de points nécessaires et la propriété que doit vérifier les normales géométriques.

Liaison	Nb.	Propriété	Rque
sphère-plan	1		
sphère-cylindre	2	sécantes	(1)
sphérique	3	concourantes	(2)
plane	3	parallèles	(3)

Figure 4.5 Matérialisation de quelques liaisons.

Concernant les remarques :

- (1) ... et non confondues ;
- (2) ... et non coplanaires ;
- (3) ... et non coplanaires.

## 4.3.4

### Modéliser les contacts

L'art de la modélisation des contacts s'appuie sur leurs descriptions et requiert les réponses à deux questions :

- quelle est la nature géométrique de la famille de points de contact ?
- quelles sont les propriétés géométriques des normales aux contacts ?

Il est en général assez facile de répondre à la première question, un peu plus délicat de répondre à la seconde. La suite de la section propose du vocabulaire et décrit un certain nombre de configurations courantes, mais sans chercher à être exhaustif.

### a) Une ligne de contact

Deux configurations particulières sont à citer :

- un contact **linéaire rectiligne**, défini par exemple pour un cylindre de révolution sur un plan. Le contact a lieu suivant un segment de droite avec toutes les normales identiques.
- un contact **linéaire annulaire**, défini par exemple pour une sphère à l'intérieur d'un cylindre de révolution. La ligne de contact est un cercle avec toutes les normales coplanaires et concourantes.

### b) Une surface de contact

Deux surfaces génériques sont à connaître :

- les surfaces cylindriques, générées par la translation d'une droite ;
- les surfaces de révolution, générées par la rotation d'un courbe quelconque.

Le premier cas conduit à un modèle de liaison glissière, le second à un modèle de liaison pivot. Le cumul des deux propriétés, à savoir une surface de révolution, conduit à un modèle de liaison pivot-glissant.

## 4.3.5 Contacts particuliers

### a) Roulement sans glissement

Phénomène cinématique que l'on rencontre au contact entre une roue et le sol, et par extension au contact entre un élément roulant sur un autre.

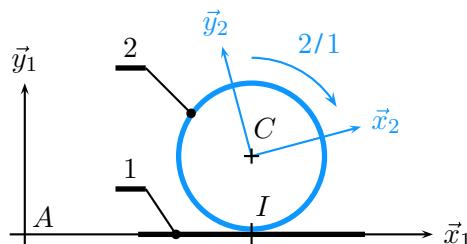
#### Définition

On appelle **roulement sans glissement** le phénomène au point de contact  $I$  entre deux solides 1 et 2 en mouvement relatif caractérisé par une vitesse de glissement nulle.

$$\vec{V}(I,2/1) = \vec{0}$$

#### Exemple

La figure (4.6) propose le roulement sans glissement d'une roue 2 de rayon  $R$  sur le sol 1.



**Figure 4.6** Une roue au contact du sol.

On constate le roulement sans glissement en  $I$  de la roue 2 sur le sol 1. Cette proposition se traduit par  $\vec{V}(I,2/1) = \vec{0}$  et en supposant la roue 2 évoluant dans le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ , le torseur cinématique du mouvement possible 2/1 est alors caractérisé par

$$\mathcal{V}(2/1) = I \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

### b) Contact par éléments roulants

Le frottement est défini au chapitre V.

Roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles sont des composants technologiques fréquemment utilisés pour substituer du frottement de roulement au frottement de glissement entre deux pièces en mouvement relatif. La cinématique d'un tel assemblage est complexe, comme l'exprime le graphe de structure de la figure (4.7).

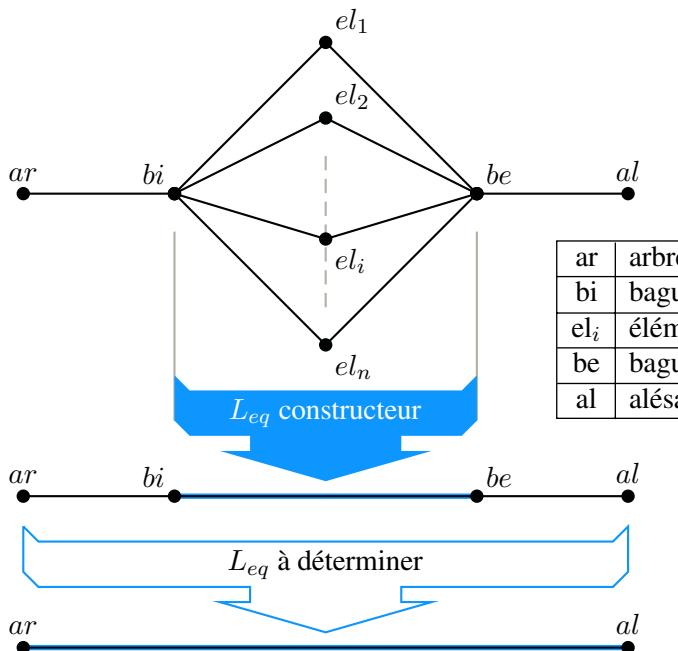
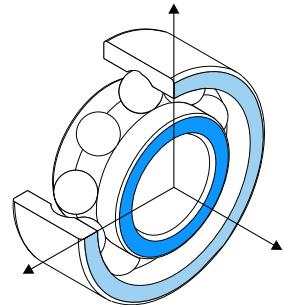


Figure 4.7 Graphe de structure pour un roulement.

Sur un sujet, le modèle à adopter est généralement proposé.

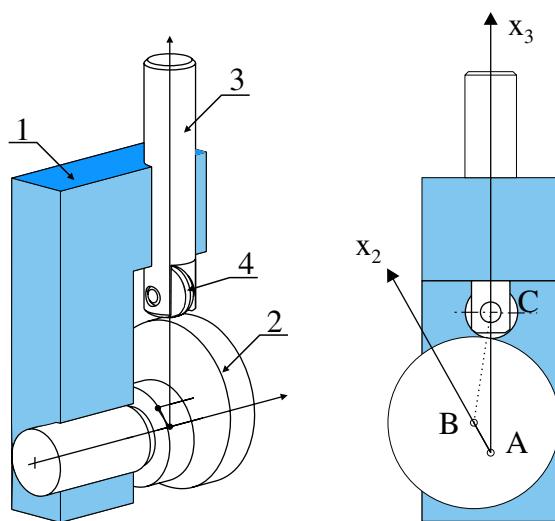
Les modèles de comportement à adopter entre la bague intérieure et la bague extérieure sont proposés par le fabricant du composant. Le technologue complète ce modèle avec les informations issues du montage du composant.

### c) Came

#### Définition

Une **came** est une pièce qui n'est pas de révolution, mais que l'on fait tourner autour d'un axe, en général pour définir une loi cinématique particulière pour la pièce entraînée.

Il n'y a pas de modèle global pour une came, les contacts sont à analyser au cas par cas.



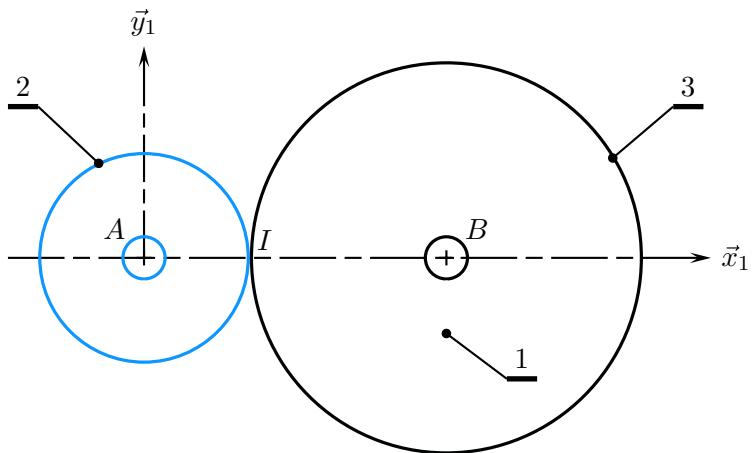
**Figure 4.8** Exemple de mécanisme à came.

## 4.4 Transmissions particulières

### 4.4.1 Roues de friction

On appelle **roues de friction** un mécanisme de transmission de puissance pour lequel deux roues lisses roulent sans glisser l'une sur l'autre. La figure (4.9) propose le schéma cinématique d'un tel mécanisme.

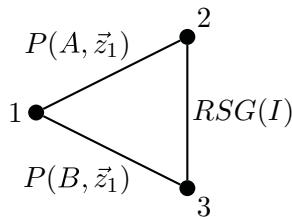
Ce mécanisme comporte trois ensembles :



**Figure 4.9** Roues de friction.

- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\overrightarrow{AB} = e\vec{x}_1$ .
  - une roue lisse motrice 2, de rayon  $R_2$ , en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti ;
  - une roue lisse réceptrice 3, de rayon  $R_3$ , en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti.
- Les deux roues sont en contact au point  $I$  et roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée de trois solides.



P(dte)	pivot d'axe (dte)
RSG(pt)	roulement sans glissement au point (pt)

Le souci principal concerne le décompte des inconnues cinématiques, qui dépend de la nature du contact. C'est pourquoi on se propose de trouver la loi  $\omega_{31} = f(\omega_{21})$ .



Les torseurs cinématiques des deux liaisons pivots s'écrivent simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{cases} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$$

On exprime le roulement sans glissement au point  $I$  pour le mouvement  $3/2$  par  $\vec{V}(I,3/2) = \vec{0}$ . La composition des vecteurs vitesses sur la chaîne fermée  $1 - 2 - 3 - 1$  donne

$$\vec{V}(I,3/2) = \vec{V}(I,3/1) - \vec{V}(I,2/1)$$

On s'intéresse alors à chacun des deux mouvements introduits :

– concernant le mouvement  $2/1$ , par la formule de changement de points

$$\vec{V}(I,2/1) = \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}$$

– de même pour le mouvement  $3/1$

$$\vec{V}(I,3/1) = \omega_{31} \vec{z}_1 \wedge \vec{BI}$$

Les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{BI}$  s'expriment à chaque instant par  $\vec{AI} = R_2 \vec{x}_1$  et  $\vec{BI} = -R_3 \vec{x}_1$ . On obtient alors, tout calcul fait

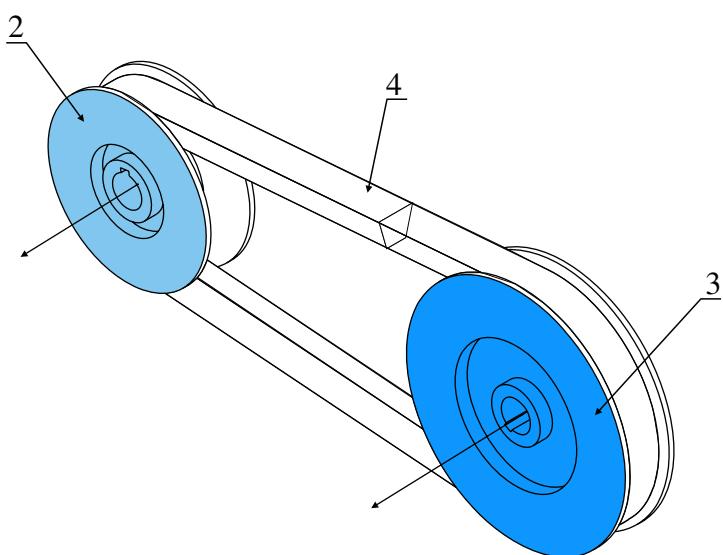
$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{R_2}{R_3}$$

C'est ainsi que l'on a calculé le rapport de transmission sans avoir eu à s'intéresser aux mouvements possibles entre les deux roues.

## 4.4.2

### Transmission par courroie

Un transmission par courroie est un mécanisme comportant deux ou plusieurs poulies sur lesquelles s'enroule une courroie de différents formes possibles. La figure (4.10) propose une image de deux poulies à gorge à section trapézoïdale.



**Figure 4.10** Exemple de transmission par courroie trapézoïdale.

Ce mécanisme comporte trois ensembles :

- un bâti, non représenté sur la figure ;
- une poulie motrice 2, de diamètre  $\varnothing_2$ , en liaison pivot avec le bâti ;
- une poulie réceptrice 3, de diamètre  $\varnothing_3$ , en liaison pivot avec le bâti. Les deux poulies sont reliées par une courroie repérée 4.

On suppose la courroie inextensible, infiniment flexible et s'enroulant sans glisser sur les poulies.

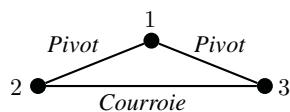
#### ► Loi entrée-sortie en cinématique

Le décompte des inconnues cinématiques pour le contact par courroie pose souci. C'est pourquoi on propose un théorème permettant de calculer directement le rapport de transmission.



#### Théorème

Soit un mécanisme dont la structure est une chaîne fermée de trois solides comportant deux pivots et une transmission de mouvements par courroie.



Alors les axes de rotation des poulies sont immobiles dans le référentiel attaché au solide 1 et le rapport de transmission est donné par la formule

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \pm \frac{\varnothing_2}{\varnothing_3}$$

Le signe se détermine et se pose au cas par cas de manière élémentaire

Il est indispensable d'identifier et de nommer les mouvements et de ne pas se contenter d'une expression du style  $\frac{\omega_s}{\omega_e}$ .

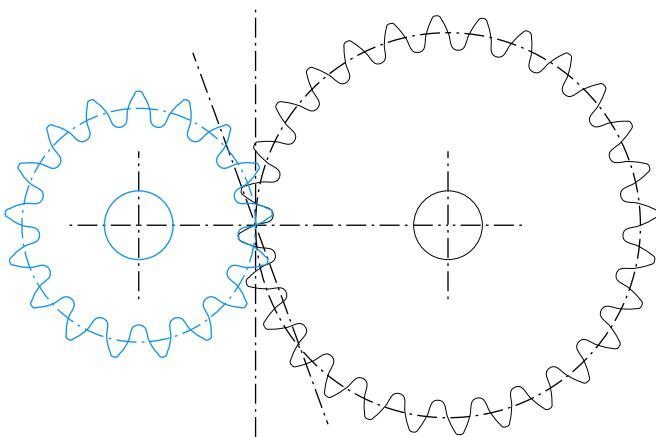
### 4.4.3

## Transmission par engrenage

Les transmissions de puissance par roues de friction et par courroie sont des solutions simples, mais pour lesquelles il est difficile d'empêcher le glissement au niveau du contact lorsque la puissance transmise augmente.

### Définition

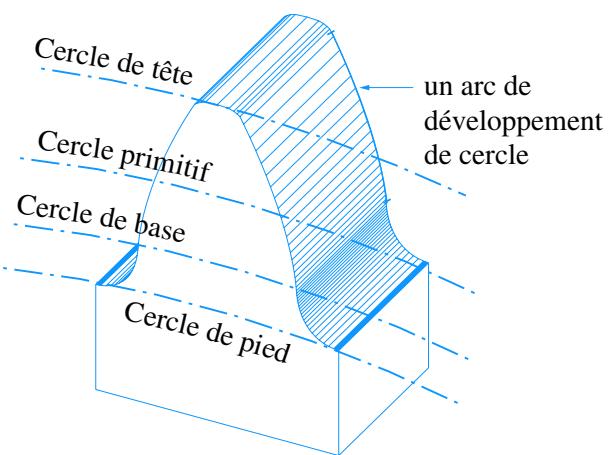
Un **engrenage** est l'association de deux roues dentées qui engrènent l'une avec l'autre.



**Figure 4.11** Un engrenage et ses deux pignons.

### ► Profil des dents

La figure (4.12) illustre le profil en développante de cercle des dents.



**Figure 4.12** Les cercles remarquables sur un pignon.

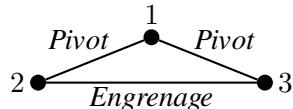
- le cercle de base est le cercle d'où sont issues les développantes de cercle ;
- le cercle de tête correspond au diamètre maximum du pignon ;
- le cercle de pied correspond au diamètre mesuré au fond des dentures ;
- enfin le cercle primitif qui n'existe qu'en fonctionnement et qui correspond au diamètre du cylindre de révolution qui roule sans glisser sur le cylindre primitif de l'autre pignon.

## ► Loi entrée-sortie en cinématique

Imaginer et modéliser les mouvements possibles au niveau du contact des dentures est difficile. Comme les dents sont taillées pour qu'il y ait roulement sans glissement des deux cylindres de révolution primitifs, on pose un théorème permettant de déterminer directement le rapport de transmission.

### Théorème

Soit un mécanisme dont la structure est une chaîne fermée de trois solides comportant deux pivots et un contact par engrenage.



Il est indispensable d'identifier et de nommer les mouvements et de ne pas se contenter d'une expression du style  $\frac{\omega_3}{\omega_e}$ .

Alors les axes de rotation des pignons sont immobiles dans le référentiel attaché au solide 1 et le rapport de transmission est donné par la formule

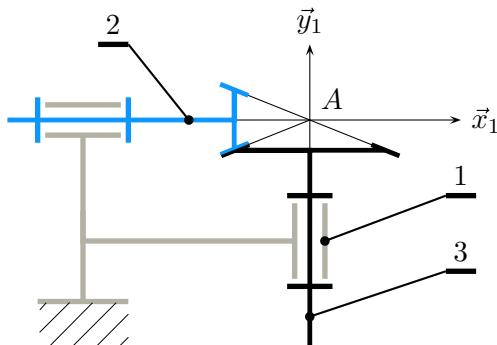
$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \pm \frac{Z_2}{Z_3}$$

Le signe se détermine et se pose au cas par cas de manière élémentaire

### Exemple

On considère un réducteur à renvoi d'angle schématisé sur la figure (4.13). Il est composé de trois ensembles :

- un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ;
- un arbre moteur, repéré 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti. Sur cet arbre est taillé un pignon conique de  $Z_2$  dents ;
- un arbre récepteur, repéré 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bâti. Sur cet arbre est monté un pignon conique de  $Z_3$  dents qui engrènent avec le pignon 2.



**Figure 4.13** Réducteur à renvoi d'angle.

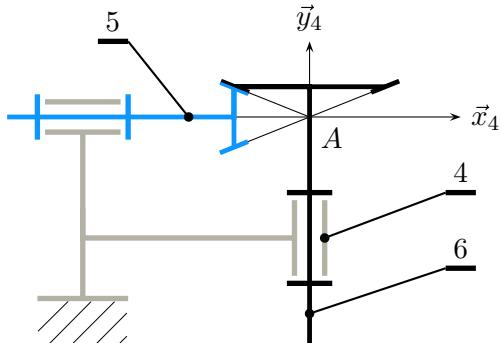
Les axes de rotation des pignons sont fixes dans le référentiel 1 et on a alors

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = - \frac{Z_2}{Z_3}$$

Le signe négatif est posé en imaginant une rotation 2/1 positive et en constatant une rotation 3/1 induite négative.

La figure (4.14) montre une configuration pour laquelle le signe est positif et on a dans ce cas

$$\frac{\omega_{64}}{\omega_{54}} = +\frac{Z_5}{Z_6}$$



**Figure 4.14** Réducteur à renvoi d'angle.

## Synthèse

### Savoirs

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- chaîne de solides ;
- chaîne ouverte, chaîne fermée, chaîne complexe ;
- liaison, contact ;
- graphe de structure, graphe des contacts, graphe des liaisons ;
- degré de liberté ;
- liaison équivalente ;

- pivotement, roulement, glissement ;
- roulement sans glissement ;
- engrenage.

#### Je connais :

- les dix liaisons usuelles ;
- le théorème pour les transmissions par engrenage ;
- le théorème pour les transmissions par courroie.

### Savoir-faire

#### Je sais

- caractériser une liaison usuelle par son nom, ses représentations 2D et 3D, ses degrés de liberté, ses propriétés géométriques et son torseur cinématique ;
- déterminer une liaison équivalente ;
- proposer des contacts simples pour illustrer les liaisons usuelles ;
- dénombrer les inconnues cinématiques d'un problème ;
- rechercher une équation scalaire évitant une inconnue cinématique donnée.

# Exercices d'application

## 4.1 Questions de cours

1. Classer la dizaine de liaisons usuelles dans le tableau suivant

Liaison à centre	Liaison à axe	Liaison à direction

2. Lister les dix liaisons dans l'ordre du nombre de degrés de liberté croissant.

3. Citer les liaisons autorisant 2 rotations, au moins 2 rotations.

4. Citer les liaisons autorisant 1 translation, au moins 1 translation.

5. Associer si possible un nom de liaison à chacun des torseurs cinématiques donnés, sachant que la forme proposée est valable à chaque instant.

a)  $\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega \vec{u}_1 \\ V \vec{u}_1 \end{cases}$       b)  $\mathcal{V}(2/1) = B \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{cases}$

c)  $\mathcal{V}(2/1) = C \begin{cases} \omega \vec{x}_1 \\ V \vec{y}_1 \end{cases}$       d)  $\mathcal{V}(2/1) = D \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ V \vec{u}_1 \end{cases}$

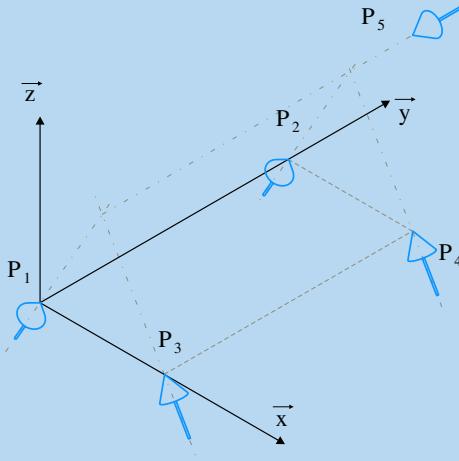
e)  $\mathcal{V}(2/1) = E \begin{cases} \omega \vec{x}_1 \\ V_y \vec{y}_1 + V_z \vec{z}_1 \end{cases}$

f)  $\mathcal{V}(2/1) = F \begin{cases} \omega \vec{z}_1 \\ p \omega \vec{z}_1 \end{cases}$       g)  $\mathcal{V}(2/1) = G \begin{cases} \omega \vec{x}_1 \\ a \omega \vec{z}_1 \end{cases}$

h)  $\mathcal{V}(2/1) = H \begin{cases} \vec{0} \\ V \vec{u}_1 \end{cases}$

## 4.2 Identifications de liaisons

On considère deux ensembles indéformables en contact. La figure ci-dessous positionne cinq points de contact envisagés et leur normale dessinée par une flèche.



Cinq points de contact et leur normale.

En fonction de la géométrie constatée et lorsque c'est possible, proposer les noms des liaisons usuelles que matérialisent les points de contact considérés. On suppose ces contacts conservés dans le temps.

Points de contact	Liaison usuelle
$\{P_1, P_3\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	
$\{P_2, P_3\}$	
$\{P_3, P_4\}$	
$\{P_1, P_2, P_5\}$	
$\{P_1, P_3, P_5\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$	

## 4.3 Table élévatrice

On s'intéresse à une table élévatrice telle que présentée sur la figure ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un quadrilatère déformable. Elle comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\overrightarrow{OC} = L_1 \vec{x}_1$  ;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_2$  et  $\vec{z}_1$  et on pose d'une part  $\alpha_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\overrightarrow{OA} = R_2 \vec{x}_2$  ;
- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le bras motorisé 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{z}_2$  et on pose d'une part  $\alpha_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ , d'autre part  $\overrightarrow{AB} = L_3 \vec{x}_3$  ;
- une jambe 4 de longueur  $R_4$ , en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti et en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_3)$  avec la plateforme 3.

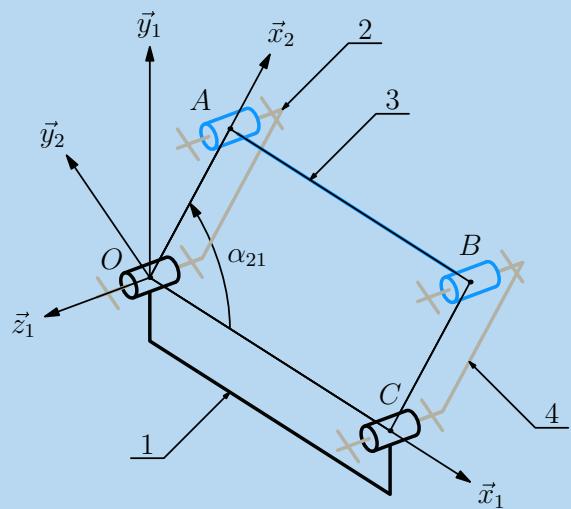


Schéma cinématique d'une table élévatrice.

L'objectif de cette étude est de caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 dans le cas particulier où le quadrilatère ( $OABC$ ) est un parallélogramme.

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Poser les torseurs cinématiques et tracer les figures de définition des deux angles définis.
3. Déterminer la relation  $f(\dot{\alpha}_{32}, \alpha_{32}, \dot{\alpha}_{21}, \alpha_{21}) = 0$ .
4. Intégrer cette relation, puis dans le cas particulier où  $L_3 = L_1 = L$ ,  $R_4 = R_2 = R$  et  $L \neq R$ , détailler les mouvements possibles.
5. Caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 lorsque  $\alpha_{32} = -\alpha_{21}$ .

#### 4.4 Bielle-manivelle

Les mécanismes de transformation de mouvements basés sur une architecture bielle-manivelle sont très nombreux. La figure ci-dessous propose un schéma cinématique de son principe de fonctionnement.

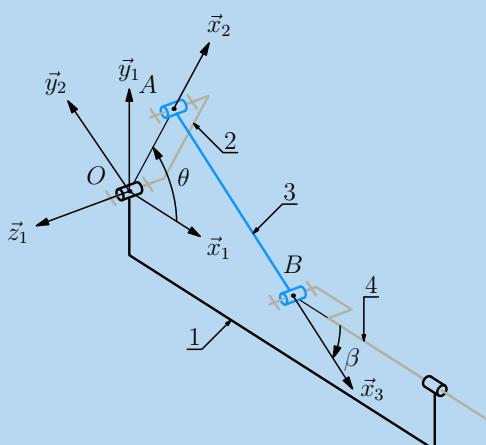


Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle.

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles :

- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- une manivelle, repérée 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , et on pose d'une part  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\overrightarrow{OA} = R\vec{x}_2$  ;
- un piston, repéré 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x}_1)$  avec le bâti. On pose  $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{x}_1$  ;
- une bielle repérée 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec la manivelle, et en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_3)$  avec le piston 4. On pose  $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_3$ .

L'objectif de cette étude est de trouver la loi  $\dot{\lambda} = f(\dot{\theta})$ .



1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.

2. Tracer un schéma cinématique de ce mécanisme dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .

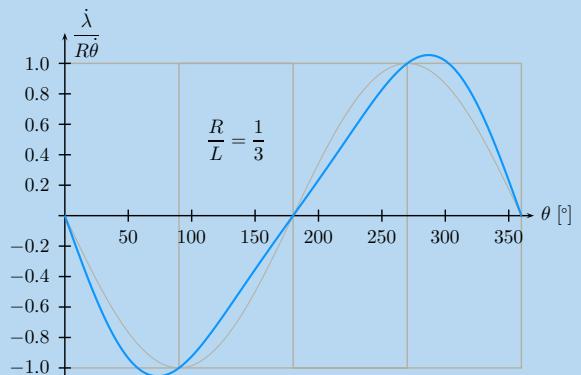
3. Détails la forme des torseurs cinématiques.

4. Proposer une équation scalaire qui évite les trois inconnues cinématiques que l'on ne souhaite pas voir dans la loi entrée-sortie, et détailler cette équation sous la forme  $f(\dot{\lambda}, \lambda, \dot{\theta}, \theta) = 0$ .

5. L'équation précédente peut-elle être également trouvée par l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses (3/1) ?

6. Intégrer l'équation différentielle obtenue par l'une des deux dernières questions.

7. La figure ci-dessous propose le tracé de la fonction  $\frac{\dot{\lambda}}{R\dot{\theta}}$ , superposé au tracé de la fonction  $-\sin \theta$ . Interpréter les points remarquables de cette courbe et les mettre en corrélation avec les configurations géométriques correspondantes.



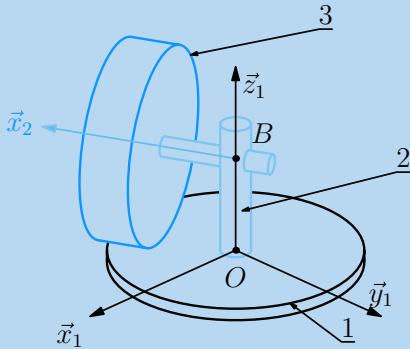
Vitesse du piston  $\dot{\lambda}$   
pour un tour de manivelle.

#### 4.5 Meule à grains

Nos ancêtres utilisaient pour moudre le grain des meules en pierre entraînées en rotation par des animaux. La figure ci-après présente au tel dispositif.

On décrit le mécanisme par trois ensembles :

- le sol, plan horizontal repéré 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{z}_1$  orientant la verticale ascendante et  $O$  un point du plan ;
- un chariot 2, en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le sol. On choisit un point  $B$  tel que  $\overrightarrow{OB} = z\vec{z}_1$  et on associe au chariot un repère  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en prenant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ . On pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .



Meule à grain : schéma de principe.

- la meule en pierre repérée 3, en liaison pivot d'axe ( $B, \vec{x}_2$ ) avec la chariot 2. Cette meule est cylindrique de révolution, de rayon  $R$  et en contact avec le sol suivant un segment  $[J, K]$

dont un point courant  $I$  est paramétré par  $\vec{OI} = \lambda \vec{x}_2$ . On associe à la meule un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , en prenant  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$ . On pose  $\beta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ .

L'objectif de cette étude est de caractériser le comportement cinématique au niveau du segment de contact entre la meule et le sol.

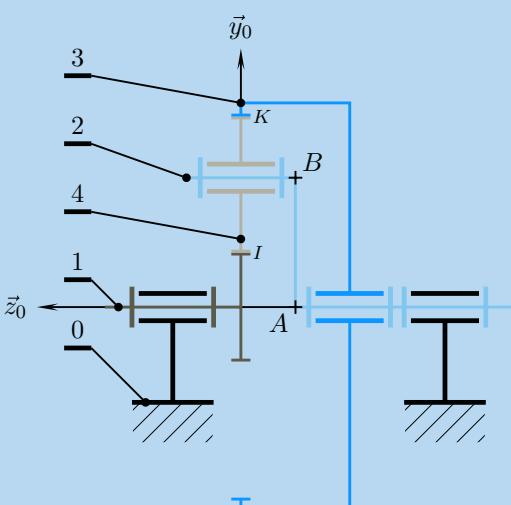
1. Tracer un graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Proposer un schéma cinématique
3. Par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3, déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(I, 3/1)$ .
4. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(I, 3/1)$  trouvé à la question précédente est-il compatible avec le contact meule-sol ?
5. Le roulement sans glissement au point  $I$  dans le mouvement de la meule par rapport au sol est-il possible ?
6. Si on généralise ce résultat au contact d'une roue de véhicule avec le sol, que peut-on déduire de cette étude ?

## Exercices d'approfondissement

### 4.6 Train épicycloïdal

La figure ci-dessous propose le schéma cinématique d'un train épicycloïdal sous une forme très générale. Ce mécanisme comprend :

- un bâti 0 auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;



Structure d'un train épicycloïdal.

- un planétaire 1, muni d'un pignon de  $Z_1$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- un porte satellite 2, sur lequel on pose  $\vec{AB} = R\vec{y}_2$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- une couronne 3 de  $Z_3$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- un ou plusieurs satellites 4 de  $Z_4$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le porte-satellite 2. Le satellite représente engrène avec le planétaire 1 et avec la couronne au point  $K$ .

Ce mécanisme comporte dans cette configuration trois entrées-sorties, et est utilisé en pilotant deux entrées, par exemple  $\omega_{10}$  et  $\omega_{30}$ .



1. Tracer en vue de gauche, donc dans le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  :
  - les cercles primitifs du planétaire et de la couronne ;
  - en filigrane le cercle primitif d'un satellite dans le cas particulier initial où  $\vec{y}_2 = \vec{y}_0$  ;
  - ce même cercle primitif en supposant d'une part que le planétaire a tourné par rapport au bâti dans le sens positif, d'autre part que la couronne reste immobile par rapport au bâti ;

– les deux points de roulement sans glissement  $I$  et  $K$  et le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  dans la nouvelle position.

**2.** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

**3.** Justifier la contradiction apparente entre le texte de l'énoncé et le schéma cinématique donné concernant la liaison entre la couronne et le bâti.

**4.** Dans quel référentiel tous les axes de rotation sont-ils fixes ?

**5.** Déterminer la loi  $f(\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) = 0$ , et détailler le rapport de transmission dans le cas usuel où la couronne est immobile par rapport au bâti.

**6.** Pourquoi qualifie-ton ce mécanisme d'épicycloïdal ?

**7.** En exploitant la définition d'un entraxe, trouver une relation entre les nombres de dents  $Z_1$ ,  $Z_4$  et  $Z_3$ .

#### 4.7 Transmission par courroie

La figure ci-dessous propose une architecture combinant deux mouvements de rotation à partir d'un seul moteur.

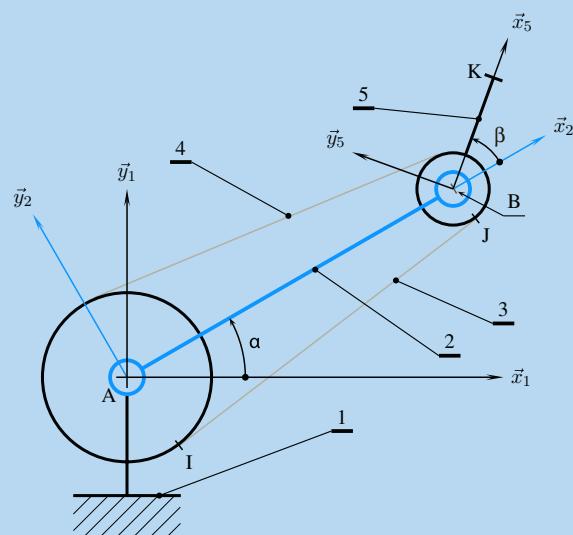


Schéma cinématique du bras manipulateur.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

– un bâti 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , et sur lequel est fixée une poulie d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  et de rayon  $R_1$  ;

– un bras 2 motorisé, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , ainsi que  $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_2$ .

– un poignet 5, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  avec le bras 2. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  en choisissant  $\vec{z}_5 = \vec{z}_2$  et on pose  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_5)$ , ainsi que  $\overrightarrow{BK} = b\vec{x}_5$ . Sur ce poignet est montée une poulie d'axe  $(B, \vec{z}_5)$  et de rayon  $R_5$ .

– une courroie inextensible et infiniment souple est tendue autour des deux poulies 1 et 5. Les deux brins sont repérés 3 et 4.

L'objectif de cet étude est de caractériser différents mouvements à partir de l'expression paramétrique de la trajectoire du point  $K$  dans le référentiel 1.

**1.** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

**2.** Tracer les figures de définition des deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

**3.** Déterminer la relation  $\dot{\beta} = f(\dot{\alpha})$ .

**4.** Écrire les expressions les plus simples des vecteurs vitesses  $\vec{V}(K, 5/2)$  et  $\vec{V}(K, 5/1)$ .

**5.** En prenant comme condition initiale  $\beta = \beta_0$  pour  $\alpha = 0$ , donner l'expression paramétrique de la trajectoire du point  $K$  dans le référentiel 1 en fonction de l'angle  $\alpha$ .

**6.** Déterminer la nature de cette trajectoire dans les cas particuliers suivants :

–  $R_1 = R_5$ ,  $b = 2a$  et  $\beta_0 = 0$  ;

–  $R_1 = 2R_5$ ,  $b = a$  et  $\beta_0 = 0$  ;

–  $R_1 = 4R_5$ ,  $b = \frac{a}{2}$  et  $\beta_0 = 180^\circ$ .

#### 4.8 Réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme

Le réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme est obtenu par les rotations opposées de deux ailettes par rapport au corps de la fusée. Le mécanisme de réglage utilise un servomoteur. Sur l'arbre moteur de celui-ci est lié un plateau moteur 2 qui entraîne deux bielles 4 liées chacune à un plateau récepteur. Les ailettes sont fixées sur ces derniers.

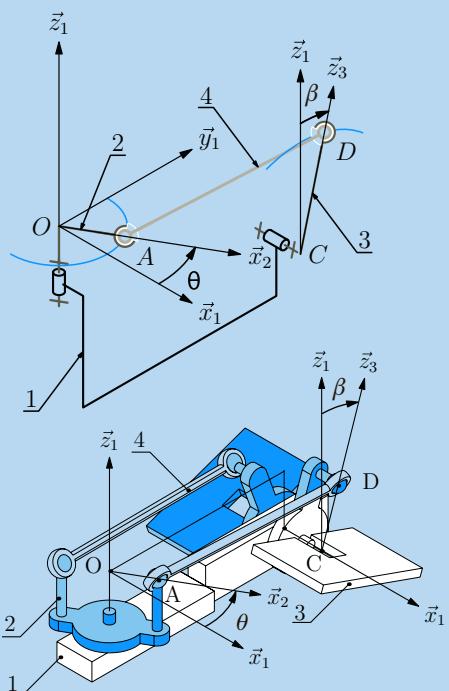


Schéma cinématique et vue d'ensemble du mécanisme.

On modélise un demi-mécanisme avec quatre solides :

- un support 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- On pose  $\overrightarrow{OC} = a\vec{x}_1 + L\vec{y}_1 - b\vec{z}_1$  ;
- le plateau moteur 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\theta$  ;
  - on définit le point A par  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_2$ .
- un plateau récepteur 3, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\beta$  ;
  - on définit le point D par  $\overrightarrow{CD} = b\vec{z}_3$ .
- une biellette 4 en liaison sphérique de centre A avec le plateau moteur 2 et en liaison sphérique de centre D avec le plateau récepteur 3. On pose  $\overrightarrow{AD} = L\vec{u}_4$ .

L'objectif de ce problème est de trouver une relation entre  $\beta$  et  $\theta$ .



1. Réaliser le graphe de liaison du mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Définir les torseurs cinématiques associés aux liaisons et tracer les figures de définition des angles  $\beta$  et  $\theta$ .
3. Trouver une équation scalaire qui évite les inconnues cinématiques des deux liaisons sphériques.
4. En déduire l'expression de  $\dot{\beta}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ , a, b, L,  $\theta$  et  $\beta$ .
5. Simplifier cette expression lorsque les angles  $\theta$  et  $\beta$  restent petits devant 1.

#### 4.9 Pompe de préparation

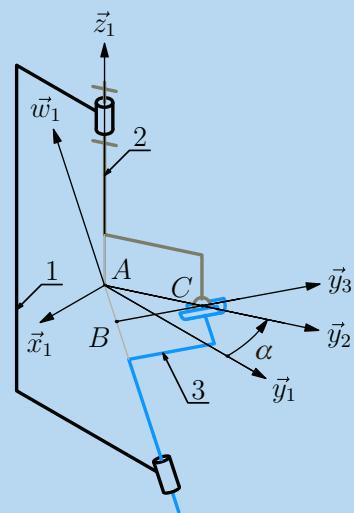
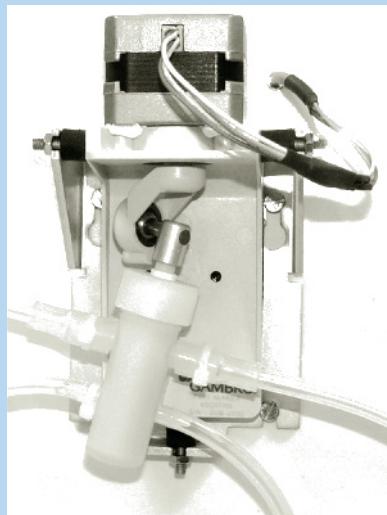
Le principe de fonctionnement de la pompe de préparation photographié est présenté sur le schéma ci-dessous. La rotation d'un arbre est transformée en translation rectiligne alternative d'un piston sans pièce intermédiaire.

- Au bâti 1 est associé le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On définit dans le plan  $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  la droite  $(A, \vec{w}_1)$  orientée par l'angle  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{w}_1)$ .
- L'arbre moteur 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti.

Le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est attaché à 2 tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .

Enfin, on définit sur cet arbre un point C et on pose  $\overrightarrow{AC} = r\vec{y}_2$ .

Le piston 3 est lié au bâti 1 par une liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{w}_1)$ .



Le repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est attaché à 3 tel que  $\vec{z}_3 = \vec{w}_1$  et on pose  $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ .

La position du point B est repérée dans 1 par le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{w}_1$ .

Ce piston 3 est également lié à l'arbre 2 par une liaison sphère-cylindre de centre C et d'axe  $(B, \vec{y}_3)$ , et on pose  $\overrightarrow{BC} = \mu \vec{y}_3$ .

1. Réaliser le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Définir les torseurs cinématiques associés aux différentes liaisons.
3. Réaliser les figures de définition des angles  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\theta$ .
4. Écrire la fermeture cinématique de cette chaîne pour exprimer la relation  $\dot{\lambda} = f(\dot{\alpha}, \alpha, \theta, r)$ .
5. Superposer sur un même schéma réalisé à l'échelle 2 : 1 dans le plan  $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  les positions particulières obtenues pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$ .

On donne  $r = 20\text{ mm}$ ,  $\theta = 20^\circ$  et  $\tan(20) = 0,36$ .

- 6.** Quelle valeur pour la course du piston peut-on lire sur le schéma précédent ?  
Peut-on trouver ce résultat par le calcul ?

#### 4.10 Chaîne fonctionnelle MAXPID

Le mécanisme étudié est la partie opérative d'un axe asservi pour le contrôle d'un angle.

Le mécanisme est composé de cinq ensembles :

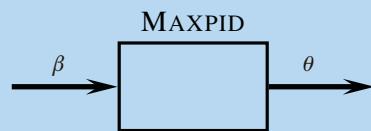
- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , le vecteur  $\vec{y}_1$  orientant la verticale ascendante. On pose  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{OB} = b\vec{y}_1$ .
- un bras 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\overrightarrow{AC} = c\vec{x}_2$ . L'angle  $\theta$  est la grandeur asservie et on constate deux directions privilégiées du bras par rapport au bâti :

  - la direction définie pour  $\theta = 0^\circ$  et nommée horizontale ;
  - la direction orthogonale définie pour  $\theta = 90^\circ$ , et donc nommée verticale.

- une noix 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  avec le bras 2.
- un moteur électrique, dont le carter 5 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  en choisissant  $\vec{z}_5 = \vec{z}_1$  et on pose  $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_5)$ .

– une vis 3, solidaire de l'arbre du moteur. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en choisissant  $\vec{x}_3$  suivant l'axe de rotation du moteur électrique confondu avec  $\vec{x}_5$ . Cette vis est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_3)$  avec le carter 5 et on pose  $\beta = (\vec{y}_5, \vec{y}_3)$ . Elle est également en liaison hélicoïdale de pas  $p$  et d'axe  $(C, \vec{x}_3)$  avec la noix 4.

L'objectif de ce problème est de déterminer la loi entrée-sortie  $\dot{\theta} = f(\dot{\beta})$ .



- 1.** Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.

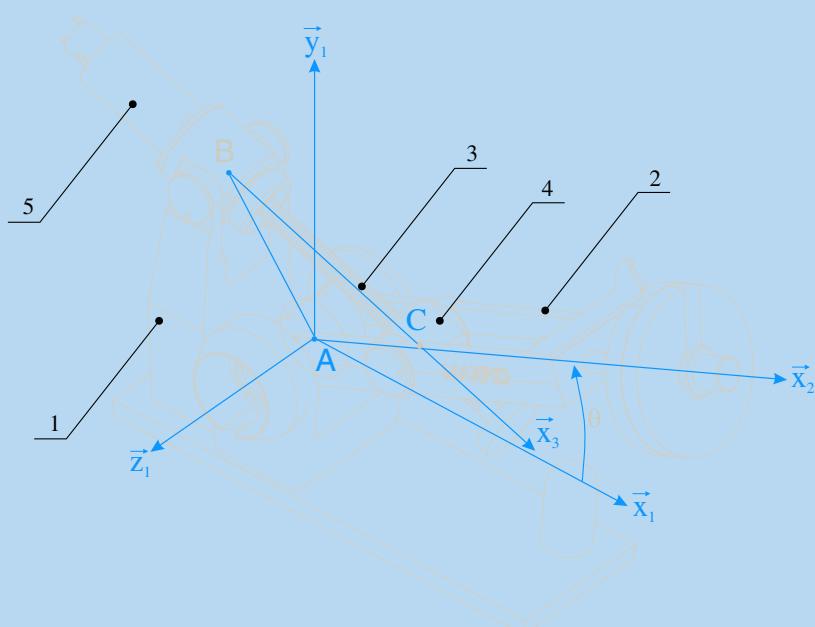
Tracer les figures de définition des angles concernés par la loi entrée-sortie recherchée.

- 2.** Proposer un schéma cinématique tracé dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .

- 3.** On pose  $\overrightarrow{BC} = \lambda \vec{x}_3$ . Trouver une relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\beta}$ .

- 4.** Déterminer la relation liant  $\dot{\theta}$  à  $\dot{\lambda}$ , et intégrer l'équation différentielle obtenue.

- 5.** Un relevé géométrique sur le système réel donne les valeurs suivantes



Vue d'ensemble du mécanisme « MAXPID ».

$\beta [tr]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\theta [^{\circ}]$	0	3,6	8,7	13,6	18,2	22,5	26,5	30,4	34,2	37,9

$\beta [tr]$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\theta [^{\circ}]$	41,4	45,0	48,2	51,5	54,7	58,0	61,0	64,1	67,1	70,1

$\beta [tr]$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$\theta [^{\circ}]$	73,2	76,0	79,1	82,0	84,8	87,5	89,9	91,2	91,2	

On donne par ailleurs les valeurs numériques trouvées dans une documentation technique :

a	b	c	p
70 mm	80 mm	80 mm	4 mm/tr

Superposer le tracé théorique et les points expérimentaux de la fonction  $\theta = g(\beta)$ . Commenter les courbes obtenues.

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 4.1

1. L'ordre des liaisons à l'intérieur d'une colonne n'a aucune importance.

Liaison à centre	Liaison à axe	Liaison à direction
Sphérique	Pivot	Glissière
Sphérique à doigt	Pivot glissant	Plane
Sphère cylindre	Hélicoïdale	
Sphère plan	Cylindre plan	

2. Les liaisons à même nombre de degrés de liberté peuvent être citées dans un ordre quelconque.

- 1 DDL : pivot, glissière, hélicoïdale ;
- 2 DDL : pivot glissant, sphérique à doigt ;
- 3 DDL : sphérique, plane ;
- 4 DDL : sphère-cylindre, cylindre-plan ;
- 5 DDL : sphère-plan.

3. Deux liaisons autorisent 2 et seulement 2 rotations : sphérique à doigt et cylindre plan.

Cinq liaisons autorisent au moins 2 rotations : les deux citées précédemment, ainsi que sphérique, sphère-cylindre et sphère-plan.

4. Quatre liaisons autorisent 1 et seulement 1 translation : glissière, hélicoïdale, pivot glissant, sphère-cylindre.

Sept liaisons autorisent au moins 1 translation : les quatre citées précédemment, ainsi que cylindre-plan et sphère plan.

5. Sept liaisons peuvent être nommées :

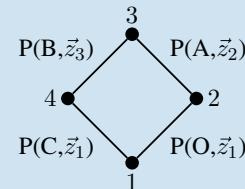
- (a) : pivot glissant d'axe ( $A, \vec{u}_1$ ) ;
- (b) : sphérique de centre  $B$  ;
- (c) : n'existe pas ;
- (d) : sphère cylindre de centre  $D$  et d'axe ( $D, \vec{u}_1$ ) ;
- (e) : plane de normale  $\vec{x}_1$  ;
- (f) : hélicoïdale d'axe ( $F, \vec{z}_1$ ) et de pas  $p$  ;
- (g) : pivot d'axe ( $A, \vec{x}_1$ ), avec  $\vec{AG} = a\vec{y}_1$  ;
- (h) : glissière de direction  $\vec{u}_1$ .

### 4.2

Points de contact	Liaison usuelle
$\{P_1, P_3\}$	Sphère-cylindre
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	Pivot-glissant
$\{P_2, P_3\}$	
$\{P_3, P_4\}$	Cylindre-plan
$\{P_1, P_2, P_5\}$	Sphérique
$\{P_1, P_3, P_5\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$	Pivot

### 4.3

1. Le graphe des liaisons comporte 4 sommets et 4 arcs

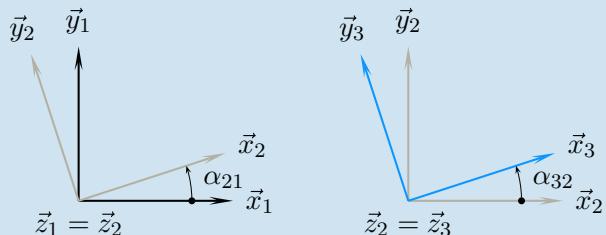


2. On compte quatre inconnues scalaires cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = O \begin{cases} \dot{\alpha}_{21}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/2) = A \begin{cases} \dot{\alpha}_{32}\vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{V}(4/1) = C \begin{cases} \omega_{41}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/4) = B \begin{cases} \omega_{34}\vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Les deux angles définis sont les angles  $\alpha_{21}$  et  $\alpha_{32}$ .



3. La composition des mouvements sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 4 – 1 s'écrit par exemple

$$\mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(4/1)$$

La composition des vecteurs vitesses au point  $B$  évite l'inconnue  $\omega_{34}\vec{z}_3$ . Cette même équation scalaire  $\vec{CB}$  annule le produit vectoriel  $\omega_{41}\vec{z}_1 \wedge \vec{CB}$  et évite ainsi l'inconnue  $\omega_{41}\vec{z}_1$ . On obtient alors

$$(\omega_{32}\vec{z}_2 \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{CB} + (\omega_{21}\vec{z}_1 \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{CB} = 0$$

On décrit  $\vec{CB}$  par  $\vec{CO} + \vec{OA} + \vec{AB}$  et on utilise les propriétés du produit mixte pour transformer l'équation précédente

$$\omega_{32} (\vec{AB} \wedge \vec{CA}) \cdot \vec{z}_1 + \omega_{21} (\vec{OB} \wedge \vec{CD}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Il reste à détailler le calcul des deux produits vectoriels :  
– concernant le premier :

$$L_3\vec{x}_3 \wedge (-L_1\vec{x}_1 + R_2\vec{x}_2)$$

$$= (L_3L_1 \sin(\alpha_{32} + \alpha_{21}) - L_3R_2 \sin \alpha_{32}) \vec{z}_1$$

– quant au second :

$$(R_2\vec{x}_2 + L_3\vec{x}_3) \wedge -L_1\vec{x}_1$$

$$= (R_2L_1 \sin \alpha_{21} + L_3L_1 \sin(\alpha_{32} + \alpha_{21})) \vec{z}_1$$

On obtient après arrangement

$$\begin{aligned} & R_2 L_1 \dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{21} \\ & -R_2 L_3 \dot{\alpha}_{32} \sin \alpha_{32} \\ & +L_3 L_1 (\dot{\alpha}_{32} + \dot{\alpha}_{21}) \sin (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = 0 \end{aligned}$$

**4.** Cette dernière équation différentielle s'intègre par rapport au temps en

$$\begin{aligned} R_2 L_1 \cos \alpha_{21} - R_2 L_3 \cos \alpha_{32} + L_3 L_1 \cos (\alpha_{32} + \alpha_{21}) \\ = cste \end{aligned}$$

On choisit  $L_3 = L_1 = L$  et  $R_4 = R_2 = R$ . Ces valeurs autorisent comme conditions initiales  $\alpha_{32} = \alpha_{21} = 0$ .

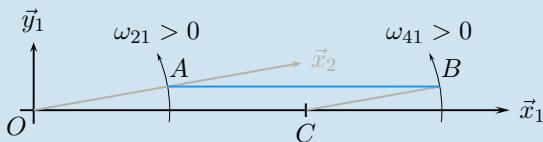
On obtient alors l'équation suivante

$$R \cos \alpha_{21} - R \cos \alpha_{32} + L \cos (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = L \quad (1)$$

Si on suppose  $L \neq R$ , l'équation (1) admet deux solutions. En effet, lorsque les quatre points  $O, A, C$  et  $B$  sont alignés, deux possibilités de mouvements existent pour la jambe 4 par rapport au bâti 1 :

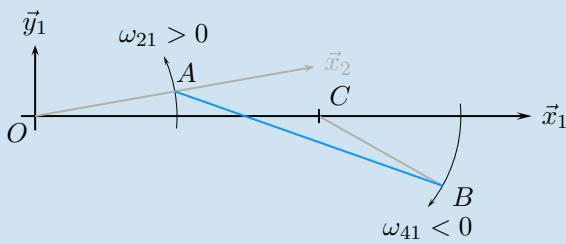
– la jambe 4 tourne dans le sens positif par rapport au bâti, et dans ce cas :

$$\alpha_{32} = -\alpha_{21}$$



– la jambe 4 tourne dans le sens négatif par rapport au bâti, et dans ce cas :

$$\alpha_{32} = \arctan \left( \frac{(L^2 - R^2) \sin (\alpha_{21})}{(2LR - \cos (\alpha_{21})R^2 - \cos (\alpha_{21})L^2)} \right)$$



### Remarques

- Les configurations singulières pour lesquelles les points sont alignés sont à proscrire sur un système réel !
- Un exemple de résolution de l'équation (1) est donné avec le logiciel MAPLE :

```
[> restart :  
[> deg:=Pi/180 ;  
[> eq:=R*cos(alpha21)-  
R*cos(alpha32)+L*cos(alpha21+alpha32)=L;  
[> solve(eq,alpha32);
```

**5.** On conserve comme solution  $\alpha_{32} = -\alpha_{21}$  et par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1-2-3, on trouve alors :

– concernant les vecteurs rotations,

$$\vec{\Omega}(3/1) = \dot{\alpha}_{32} \vec{z}_2 + \dot{\alpha}_{21} \vec{z}_1 = \vec{0}$$

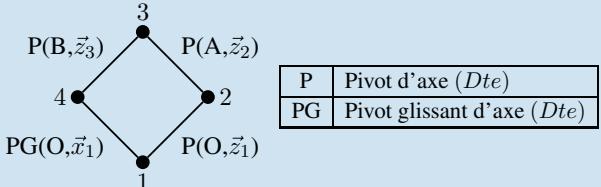
– concernant le champ des vecteurs vitesses,

$$\vec{V}(A,3/1) = R \dot{\alpha}_{21} \vec{y}_2$$

Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(3/1)$  est le vecteur nul, le mouvement (3/1) est donc un mouvement de translation. La trajectoire du point  $A$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  dans le mouvement (3/1), on en déduit que le mouvement (3/1) est un mouvement de translation circulaire.

### 4.4

Le graphe des liaisons comporte 4 sommets et 4 arcs



**2.** Le schéma cinématique se trace en dessinant dans l'ordre :

- le repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  ;
- le repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  et l'angle  $\theta$  ;
- l'arc de cercle de rayon  $R$  issu du point  $O$ , trajectoire du point  $A$  dans le mouvement 2/1 ;
- l'arc de cercle de rayon  $L$  issu du point  $A$ , pour définir la position du point  $B$  sur  $(O, \vec{x}_1)$  ;
- les symboles des liaisons en couleur ;
- les traits joignant les symboles ;
- les écritures.

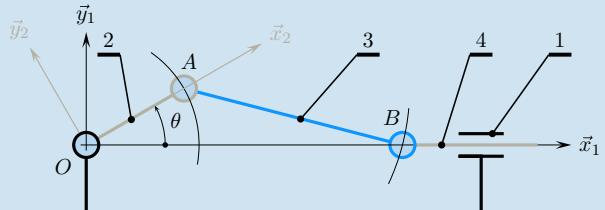


Schéma cinématique du système bielle-manivelle.

**3.** On compte cinq inconnues scalaires cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = O \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(3/2) = A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{V}(4/1) = B \left\{ \begin{array}{l} \omega_{41} \vec{x}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_1 \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(4/3) = B \left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

**4.** La composition des mouvements sur la chaîne fermée 1-2-3-4-1 s'écrit par exemple

$$V(4/1) = \mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1)$$

Les trois inconnues à éviter sont  $\omega_{32}$ ,  $\omega_{41}$  et  $\omega_{43}$ .

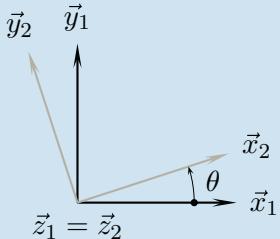
La composition des vecteurs vitesses au point  $B$  évite les deux inconnues  $\omega_{43}$  et  $\omega_{41}$ . Cette même équation scalaire  $\vec{AB}$  annule le produit vectoriel  $\omega_{32} \vec{z}_2 \wedge \vec{AB}$  et évite ainsi l'inconnue  $\omega_{32}$ . On obtient alors

$$\lambda \vec{x}_1 \cdot \vec{AB} = (\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = 0 \quad (2)$$

On décrit  $\overrightarrow{AB}$  par  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$  et on utilise les propriétés du produit mixte pour transformer l'équation précédente

$$\dot{\lambda}\vec{x}_1 \cdot (\lambda\vec{x}_1 - R\vec{x}_2) = \dot{\theta}(\lambda\vec{x}_1 \wedge -R\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1$$

Il reste à détailler le calcul vectoriel à partir de la figure de définition de l'angle  $\theta$



On obtient ainsi

$$\dot{\lambda}\lambda - \dot{\lambda}R\cos\theta + \lambda R\dot{\theta}\sin\theta = 0 \quad (3)$$

**5.** Sur le champ des vecteurs vitesses (3/1), la relation d'équiprojectivité entre les points  $A$  et  $B$  s'écrit

$$\overrightarrow{V}(A,3/1).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(B,3/1).\overrightarrow{AB}$$

– Le torseur cinématique  $\mathcal{V}(3/2)$  donne le vecteur  $\overrightarrow{V}(A,3/2)$  nul à chaque instant. On en déduit

$$\overrightarrow{V}(A,3/1) = \overrightarrow{V}(A,2/1) = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{OA}$$

– Le torseur cinématique  $\mathcal{V}(4/3)$  donne le vecteur  $\overrightarrow{V}(B,4/3)$  nul à chaque instant. On en déduit

$$\overrightarrow{V}(B,3/1) = \overrightarrow{V}(B,4/1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1$$

On retrouve ainsi l'équation (2) de la question précédente.

**6.** L'équation (3) s'intègre en remarquant que  $\dot{\lambda}\lambda$  est la dérivée de  $\frac{1}{2}\lambda^2$  et que  $-\dot{\lambda}R\cos\theta + \lambda R\dot{\theta}\sin\theta$  est la dérivée de  $-\lambda R\cos\theta$ . On a donc

$$\lambda^2 - 2\lambda R\cos\theta = cste$$

La constante d'intégration se trouve le plus facilement en reconnaissant le développement de l'égalité géométrique écrite sur le triangle  $(OAB)$

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})^2$$

Après substitution et développement, on arrive à l'équation finale

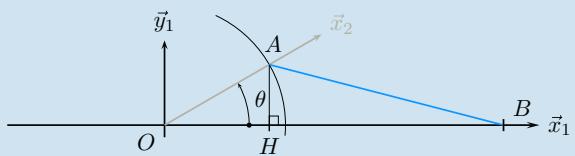
$$L^2 = R^2 + \lambda^2 - 2R\lambda\cos\theta$$

Pour une valeur de l'angle  $\theta$  donné, deux solutions sont possibles pour  $\lambda$  :

– la première correspond au point  $B$  d'abscisse positive

$$\lambda_1 = R\cos\theta + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2\theta}$$

Soit le point  $H$  projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(O,\vec{x}_1)$ . On constate que  $OH = R\cos\theta$  et  $AH = R\sin\theta$ . L'interprétation géométrique du résultat analytique est possible à partir de la somme  $\lambda = OB = OH + HB$ .



– la seconde correspond à un point  $B_2$  d'abscisse négative

$$\lambda_2 = R\cos\theta - \sqrt{L^2 - R^2\sin^2\theta}$$

Cette configuration est dans les faits la même que la précédente, obtenue en changeant  $\theta$  en  $\pi - \theta$  et  $\vec{x}_1$  en  $-\vec{x}_1$ .

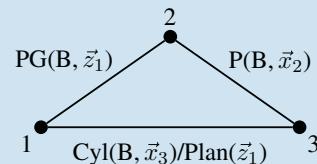
**7.** La lecture de la courbe fournie induit les remarques suivantes :

- les positions extrêmes sont obtenues pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ , lorsque les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés ;
- lorsque l'angle  $\theta$  va de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , l'abscisse du point  $B$  diminue, du fait du signe constant de la vitesse sur cet intervalle ;
- la courbe grise correspond à la vitesse scalaire du point  $H$  sur l'axe  $(O,\vec{x}_1)$ , obtenue par le produit scalaire  $\overrightarrow{V}(A,2/1).\vec{x}_1$  ;
- la longueur  $HB$  diminue de  $\theta = 0^\circ$  jusqu'à  $\theta = 90 - \arctan \frac{R}{L}$ , valeur pour laquelle le triangle  $(OAB)$  est droit en  $A$ . Ceci explique pourquoi la vitesse scalaire du point  $B$  suivant  $-\vec{x}_1$  augmente plus vite que celle du point  $H$  sur cet intervalle ;
- les vitesses des points  $H$  et  $B$  sont égales pour  $\theta = \pm 90^\circ$ , ce qui se montre aisément en utilisant l'équiprojectivité du champ des vitesses (3/1).

Pour mieux comprendre ces propositions, il n'est pas inutile de leurs associer le tracé des figures géométriques correspondantes. Il reste ensuite à valider par le calcul les points de vitesse maximale et à comprendre les points d'inflexion de part et d'autre de la position  $\theta = 180^\circ$ .

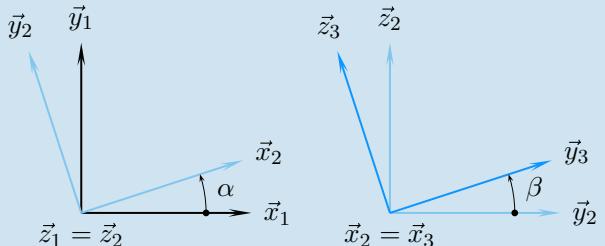
#### 4.5

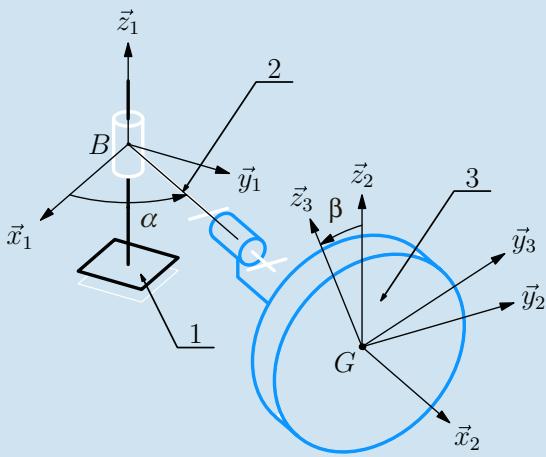
**1.** Cette structure comporte une chaîne fermée de trois solides. La meule est cylindrique de révolution et est posée sur un plan : la liaison cylindre-plan est conçue pour modéliser ce contact.



Il est immédiat de poser les torseurs cinématiques associés aux liaisons pivot et pivot glissant, ainsi que les figures de définition des deux angles correspondants

$$\mathcal{V}(2/1) = B \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}\vec{z}_1 \\ \vec{z}_1 \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(3/2) = B \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$





Proposition de schéma cinématique.

La liaison cylindre-plan est une liaison à quatre degrés de liberté, cette structure comporte donc six inconnues cinématiques.

2. La figure ci-dessus est une proposition de schéma cinématique.
3. Par composition des vecteurs vitesses au point  $I$  sur la chaîne ouverte  $1 - 2 - 3$ , on a

$$\vec{V}(I,3/1) = \vec{V}(I,3/2) + \vec{V}(I,2/1) \quad (4)$$

Sur le mouvement  $3/2$ , on utilise la formule de changement de points

$$\vec{V}(I,3/2) = \dot{\beta} \vec{x}_2 \wedge \vec{BI} \quad (5)$$

Le point  $I$  est un des points de contact entre la meule et le bâti. Ce point est à chaque instant repéré dans  $2$  par le vecteur position  $\vec{BI} = \vec{OI} - \vec{OB} = \lambda \vec{x}_2 - z \vec{z}_2$ .

On trouve donc après calcul

$$\vec{V}(I,3/2) = z \dot{\beta} \vec{y}_2 \quad (6)$$

– On procède de même sur le mouvement  $2/1$  pour trouver

$$\vec{V}(I,2/1) = \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_2 + z \vec{z}_1 \quad (7)$$

La somme des équations (6) et (7) permet de proposer

$$\vec{V}(I,3/1) = (z \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha}) \vec{y}_2 + z \vec{z}_1 \quad (8)$$

4. Le contact cylindre-plan impose  $\vec{V}(I,3/1) \cdot \vec{z}_1 = 0$ . On en déduit que le vecteur défini par l'équation (8) n'est pas compatible avec ce contact. Ce dernier impose  $\dot{z} = 0$ . La cote  $z$  du point  $B$  dans le mouvement de  $2$  par rapport à  $1$  est donc une constante que l'on détermine égale à  $R$ . Le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,3/1)$  à retenir finalement est alors

$$\vec{V}(I,3/1) = (R \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha}) \vec{y}_2 \quad (9)$$

5. S'il y a roulement sans glissement de la meule par rapport au bâti au point  $I$ , alors le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,3/1)$  est le vecteur nul, et l'équation (9) impose la relation scalaire

$$R \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha} = 0 \quad (10)$$

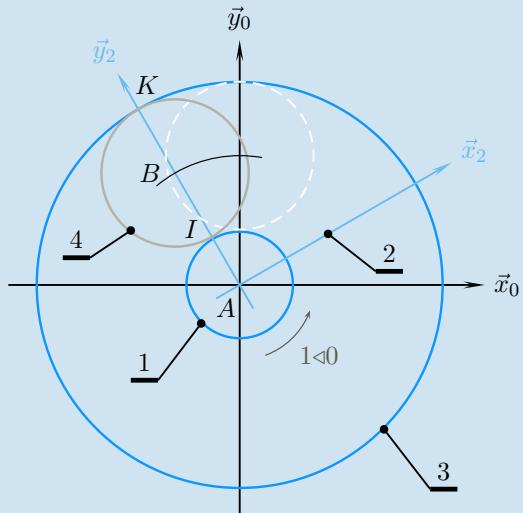
Le non-glissement est donc possible pour une valeur unique  $\lambda_0$  vérifiant la relation (10). Le non-glissement est impossible pour tous les autres points du segment de contact  $[J,K]$ .

6. Une roue d'un véhicule, qu'elle soit directrice ou non, se comporte de la même manière lors d'un virage, et cette étude montre qu'il ne peut y avoir roulement sans glissement qu'en un seul point. On en déduit que les virages accélèrent l'usure des pneumatiques.

## Exercices d'approfondissement

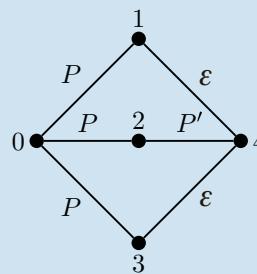
### 4.6

1. On trace sur la figure ci-dessous le schéma demandé dans le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .



Le train épicycloïdal en vue de gauche.

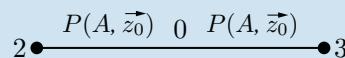
2. Le mécanisme comporte 5 ensembles et 6 liaisons



P	Pivot d'axe ( $A, \vec{z}_0$ )
P'	Pivot d'axe ( $B, \vec{z}_0$ )
ε	Engrenage

Graphe des liaisons du train épicycloïdal.

3. Le texte de présentation présente une liaison pivot d'axe ( $A, \vec{z}_0$ ) entre la couronne 3 et le bâti 0, alors que le schéma cinématique pose cette liaison entre la couronne 3 et le portesatellite 2. Il est nécessaire de s'intéresser aux liaisons équivalentes pour lever cette contradiction apparente.

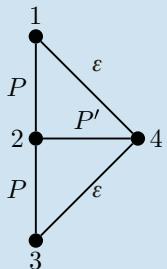


Par composition des mouvements sur la chaîne ouverte  $2 - 0 - 3$  :

– concernant le vecteur rotation,  $\vec{\omega}(3/2) = \omega_{30} \vec{z}_0 - \omega_{20} \vec{z}_0$  et on pose  $\omega_{32} = \omega_{30} - \omega_{20}$  ;

– concernant le champ des vecteurs vitesse,  $\vec{V}(A, 3/2) = \vec{0}$ . La liaison équivalente entre 3 et 2 est une liaison pivot d'axe ( $A, \vec{z}_0$ ).

**4.** L'étude des liaisons équivalentes entre 3 et 2, ainsi qu'entre 1 et 2, montre que tous les axes de rotation sont immobiles dans le référentiel lié au porte satellite, et on peut considérer le graphe des liaisons équivalent suivant



P	Pivot d'axe ( $A, \vec{z}_0$ )
P'	Pivot d'axe ( $B, \vec{z}_0$ )
ε	Engrenage

Graphe des liaisons équivalentes du train épicycloïdal

**5.** Dans le référentiel lié au porte-satellite, les axes de rotation sont immobiles et on a

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = \frac{\omega_{32}}{\omega_{42}} \frac{\omega_{42}}{\omega_{12}} = \frac{Z_4}{Z_3} \left( -\frac{Z_1}{Z_4} \right) = -\frac{Z_1}{Z_3}$$

On reprend la composition des vecteurs rotations pour écrire finalement

$$\frac{\omega_{30} - \omega_{20}}{\omega_{10} - \omega_{20}} = -\frac{Z_1}{Z_3}$$

Dans le cas particulier où la couronne est fixe par rapport au bâti, on trouve alors

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

**6.** La trajectoire d'un point du satellite par rapport au planétaire est une *épicycloïde*, la trajectoire de ce même point par rapport à la couronne est une *hypocycloïde*...

**7.** Si on appelle  $R_{p1}$ ,  $R_{p4}$  et  $R_{p3}$  les rayons primitifs respectivement du planétaire 1, du satellite 4 et de la couronne 3, on a la relation

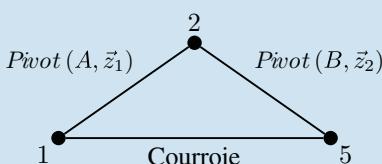
$$R_{p3} = 2R_{p4} + R_{p1}$$

Le module  $m$  caractérise un engrenage avec la relation  $\phi_{pi} = mZ_i$ , on en déduit la relation sur les nombres de dents

$$Z_3 = Z_1 + 2Z_4$$

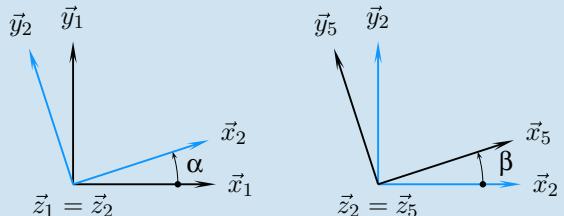
## 4.7

**1.** Cette structure comporte une chaîne fermée composée de trois solides



**2.** Les torseurs cinématiques associés aux deux liaisons pivots sont

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(5/2) = B \begin{cases} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ 0 \end{cases}$$



**3.** Les axes des rotations des poulies sont immobiles dans le référentiel attaché au bras 2 et on a immédiatement

$$\frac{\omega_{52}}{\omega_{12}} = +\frac{R_1}{R_5}$$

On en déduit la relation recherchée

$$\dot{\beta} = -\frac{R_1}{R_5} \dot{\alpha}$$

Cette relation s'intègre immédiatement en

$$\beta - \beta_0 = -\frac{R_1}{R_5} (\alpha - \alpha_0)$$

**4.** Sur le mouvement (5/2), on utilise la formule de changement de points pour écrire

$$\vec{V}(K, 5/2) = \dot{\beta} \vec{z}_5 \wedge b \vec{x}_5 = \dot{\beta} b \vec{y}_5$$

La composition des vitesses sur la chaîne 5 – 2 – 1 permet de proposer

$$\vec{V}(K, 5/1) = \vec{V}(K, 5/2) + \vec{V}(K, 2/1)$$

Sur le mouvement (2/1), on utilise à nouveau la formule de changement de points pour écrire

$$\vec{V}(K, 2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge (a \vec{x}_2 + b \vec{x}_5) = \dot{\alpha} (a \vec{y}_2 + b \vec{y}_5)$$

En regroupant les termes et en substituant à  $\dot{\beta}$  sa valeur, on obtient

$$\vec{V}(K, 5/1) = \dot{\alpha} \left( a \vec{y}_2 + b \left( 1 - \frac{R_1}{R_5} \right) \vec{y}_5 \right)$$

**5.** Il est nécessaire d'exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(K, 5/1)$  dans la base liée à 1 pour atteindre la trajectoire dans ce même référentiel. Soit alors  $\vec{V}(K, 5/1) = V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1$ . On pose de plus  $\rho = \left( 1 - \frac{R_1}{R_5} \right)$  et on obtient

$$\begin{cases} V_x = -\dot{\alpha} (a \sin \alpha + \rho b \sin (\rho \alpha + \beta_0)) \\ V_y = \dot{\alpha} (a \cos \alpha + \rho b \cos (\rho \alpha + \beta_0)) \end{cases}$$

On pose  $\vec{AK} = x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1$  et on intègre les deux équations précédentes

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \alpha + b \cos (\rho \alpha + \beta_0) \\ y = y_0 + a \sin \alpha + b \sin (\rho \alpha + \beta_0) \end{cases}$$

**6.** Il s'agit de calculer les valeurs des paramètres pour chacun des cas.

– Si  $R_1 = R_5$ , alors  $\rho = 0$  et comme  $\beta_0 = 0$ , on a

$$\begin{cases} x = 2a + a \cos \alpha \\ y = a \sin \alpha \end{cases}$$

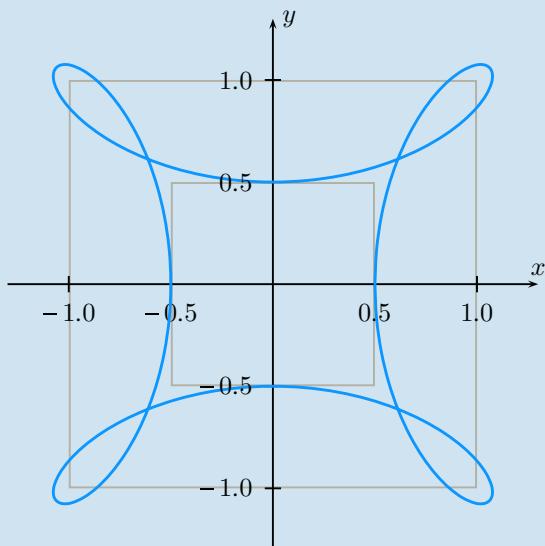
La trajectoire du point  $K$  est un cercle de rayon  $a$  et de centre le point de coordonnées  $(2a, 0)$ . Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(5/1)$  est le vecteur nul, le poignet 5 est en translation circulaire par rapport à 1.

– Si  $R_1 = 2R_5$ , alors  $\rho = -1$  et comme  $b = a$  et  $\beta_0 = 0$ , on a

$$\begin{cases} x = 2a \cos \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

Le point  $K$  se déplace sur la droite  $(A, \vec{x}_1)$

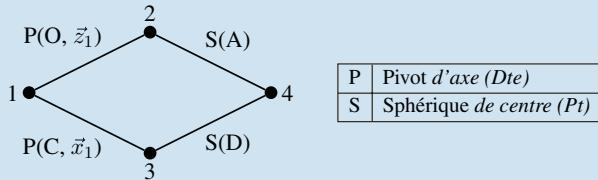
– Si  $R_1 = 4R_5$ , alors  $\rho = -3$  et en prenant  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$  et  $\beta_0 = 180^\circ$ , on trace la trajectoire du point  $K$  dans le repère lié au bâti



Trajectoire du point  $K$  pour un tour du bras 2.

## 4.8

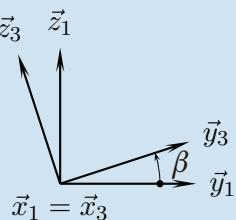
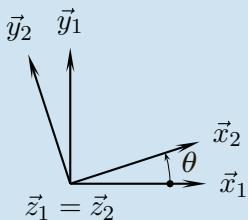
1. Le mécanisme comporte une chaîne fermée de solides



La composition des mouvements sur la chaîne fermée de solides  $1 - 2 - 4 - 3 - 1$  donne six équations scalaires pour huit inconnues scalaires dénombrées.

2. On pose quatre torseurs cinématiques et deux figures de définition des angles

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(2/1) &= O \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. & \mathcal{V}(3/1) &= C \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \\ \mathcal{V}(4/2) &= A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(4/2) \\ \vec{0} \end{array} \right. & \mathcal{V}(4/3) &= D \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(4/3) \\ \vec{0} \end{array} \right. \end{aligned}$$



3. Les torseurs  $\mathcal{V}(4/2)$  et  $\mathcal{V}(4/3)$  concentrent les inconnues indésirables. La composition des vitesses au point  $A$  évite les trois inconnues scalaires du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/2)$ . Cette même équation scalaire  $\vec{AD}$  élimine le terme  $\vec{\Omega}(4/3) \wedge \vec{DA}$ , donc évite également les trois inconnues scalaires du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/3)$ .

4. La forme la plus condensée de la loi entrée-sortie recherchée est obtenue par l'égalité de deux produits mixtes

$$(\dot{\theta} \vec{z}_1, \vec{OA}, \vec{AD}) = (\dot{\beta} \vec{x}_1, \vec{CA}, \vec{AD})$$

Les vecteurs sont à décrire de manière à ne faire intervenir que des angles connus lors du calcul.

– le premier terme s'explique en remplaçant  $\vec{AD}$  par  $\vec{AO} + \vec{OC} + \vec{CD}$

$$(\dot{\theta} \vec{z}_1, \vec{OA}, \vec{OC} + \vec{CD}) = a\dot{\theta} (\vec{z}_1, \vec{x}_2, a\vec{x}_1 + L\vec{y}_1 + b\vec{z}_3)$$

$$\bullet a(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1) = -a\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = -a \sin \theta$$

$$\bullet L(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1) = L\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = L \cos \theta$$

$$\bullet b(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{z}_3) = b(\cos \theta \vec{y}_1 - \sin \theta \vec{x}_1) \cdot \vec{z}_3 = -b \sin \beta \cos \theta$$

– le second terme s'explique en remplaçant  $\vec{AD}$  par  $\vec{AC} + \vec{CD}$  et en détaillant  $\vec{CA}$

$$\dot{\beta} (\vec{x}_1, \vec{CA}, \vec{CD}) = b\dot{\beta} (\vec{x}_1, -L\vec{y}_1 + b\vec{z}_1 + a\vec{x}_2, \vec{z}_3)$$

$$\bullet -L(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_3) = -L\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = -L \cos \beta$$

$$\bullet b(\vec{x}_1, \vec{z}_1, \vec{z}_3) = -b\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_3 = b \sin \beta$$

$$\bullet a(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z}_3) = a \sin \theta \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = a \sin \theta \cos \beta$$

On obtient finalement

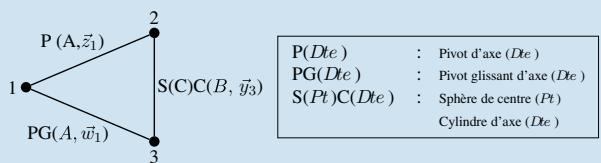
$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} = \frac{a}{b} \frac{(L - b \sin \beta) \cos \theta - a \sin \theta}{(a \sin \theta - L) \cos \beta + b \sin \beta}$$

5. En supposant que les angles  $\theta$  et  $\beta$  restent petit devant 1, on pose les approximations courantes  $\sin u \approx u$  et  $\cos u \approx 1$  pour proposer

$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \approx -\frac{a}{b}$$

## 4.9

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



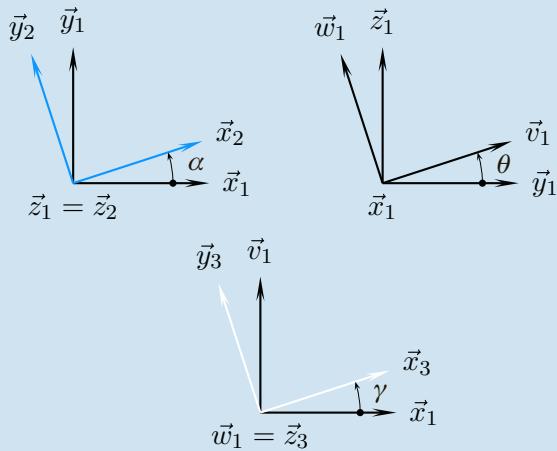
Ce graphe comporte une chaîne fermée de solides, et on compte sept inconnues cinématiques.

2. Toutes les liaisons sont des liaisons usuelles : Les torseurs cinématiques s'écrivent directement

$$\mathcal{V}(2/1) = A \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(3/1) = A \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma} \vec{w}_1 \\ \lambda \vec{w}_1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{V}(2/3) = C \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/3) \\ \mu \vec{y}_3 \end{array} \right.$$

3. En vue des calculs à faire à la question suivante, il est indispensable de tracer les figures de définition des trois angles donnés par l'énoncé



4. La loi entrée-sortie recherchée met en œuvre deux inconnues cinématiques sur les sept du mécanisme. Sur la chaîne fermée  $1 - 2 - 3 - 1$ , la composition des vitesses au point  $C$  évite les trois inconnues du vecteur  $\vec{\omega}(2/3)$ . Cette composition peut s'écrire par exemple  $\vec{V}(C,2/1) = \vec{V}(C,2/3) + \vec{V}(C,3/1)$ , que l'on détaille alors

$$\alpha \vec{z}_1 \wedge \vec{AC} = \dot{\mu} \vec{y}_3 + \dot{\lambda} \vec{w}_1 + \dot{\gamma} \vec{w}_1 \wedge \vec{AC}$$

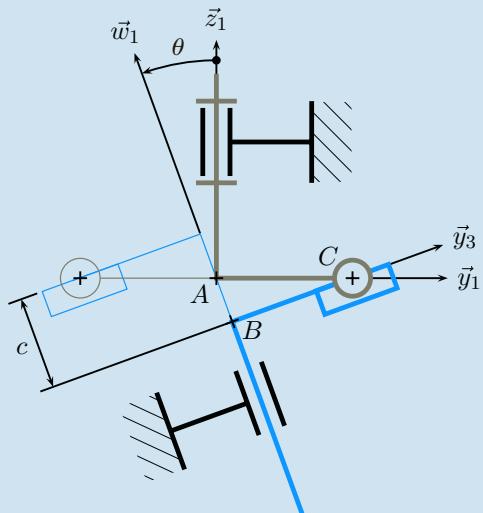
Le produit scalaire de cette équation avec un vecteur orthogonal à  $\vec{y}_3$  évite l'inconnue  $\dot{\mu}$ . Il se trouve que la vecteur  $\vec{w}_1$  convient et permet de plus d'éviter l'inconnue  $\dot{\gamma}$ . En exprimant alors le vecteur  $\vec{AC} = r \vec{y}_2$ , la loi entrée-sortie recherchée s'écrit très simplement par

$$\alpha r (\vec{z}_1, \vec{y}_2, \vec{w}_1) = \dot{\lambda} \quad (16)$$

Le calcul du produit mixte se fait à partir des figures de définition des angles pour trouver finalement

$$\dot{\lambda} = r \alpha \sin \alpha \sin \theta \quad (17)$$

5. On superpose les deux positions demandées sur un même schéma réalisé ici à l'échelle 1 : 1



6. Sur le schéma précédent, on peut imaginer les mouvements et constater que les deux positions demandées correspondent aux positions extrêmes du piston 3 par rapport au bâti 1. Il suffit alors de mesurer directement la course  $c$  et on trouve  $c = 13,5 \text{ mm}$ .

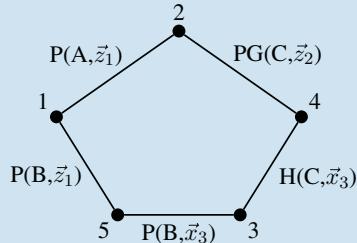
La relation (17) trouvée à la question (4) s'intègre en

$$\lambda = -r \sin \theta \cos \alpha \quad (18)$$

La course se calcule par  $c = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  et on trouve  $c = 2r \sin \theta$ . Le résultat numérique donne  $c = 13,7 \text{ mm}$ .

## 4.10

Le graphe des liaisons comporte 5 sommets et 5 arcs

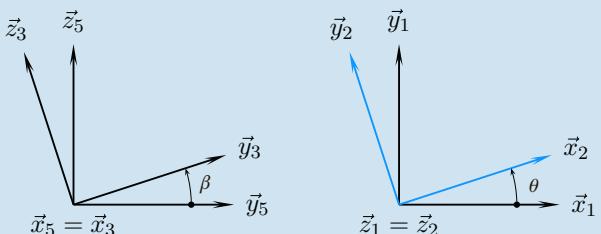


Graphe des liaisons du MAXPID.

Ce mécanisme admet six inconnues cinématiques que l'on pose en écrivant les cinq torseurs cinématiques

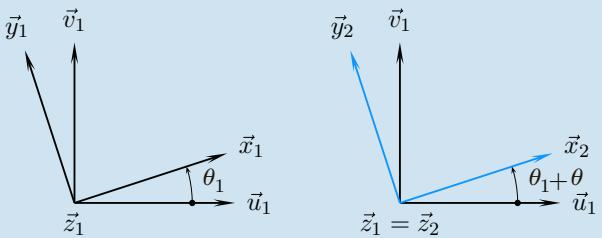
$$\begin{aligned} \mathcal{V}(2/1) &= A \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\} & \mathcal{V}(2/4) &= C \left\{ \begin{array}{l} \omega_{24} \vec{z}_2 \\ V_{24} \vec{z}_2 \end{array} \right\} \\ \mathcal{V}(4/3) &= C \left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} \vec{x}_3 \\ p \omega_{43} \vec{x}_3 \end{array} \right\} & \mathcal{V}(3/5) &= B \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{x}_3 \\ 0 \end{array} \right\} \\ \mathcal{V}(5/1) &= B \left\{ \begin{array}{l} \omega_{51} \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

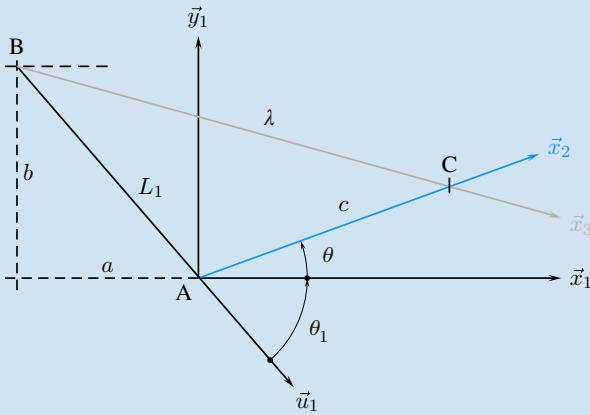
Les angles concernés par la loi entrée-sortie sont les angles  $\beta$  et  $\theta$



2. Le schéma cinématique se trace en trois étapes :

- choix du bras horizontal,  $\theta = 0$ , comme position de référence. Les bases vectorielles  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  sont confondues dans cette position, ainsi que les bases  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ,  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  et  $(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ .





### Épure du schéma cinématique du MAXPID.

- mise en place de la géométrie du mécanisme sur une épure, comme le propose la figure ci-dessus. On complète alors les figures de définition des angles avec la définition des angles  $\theta_1$  et  $\theta_1 + \theta$
- habillage de l'épure avec les symboles cinématiques.

**3.** Le vecteur  $\vec{BC} = \lambda \vec{x}_3$  est un des vecteurs positions pour le point  $C$  dans un repère lié à 3. On en déduit que

$$V_{43} = p\omega_{43} = \dot{\lambda}$$

Le mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, sur laquelle l'équation de fermeture cinématique s'écrit par exemple

$$\mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(2/4) + \mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/5) + \mathcal{V}(5/1) \quad (19)$$

L'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_3$  donne

$$\omega_{43} + \dot{\beta} = 0 \quad (20)$$

soit, après substitution

**4.** L'équation de fermeture cinématique (19) définit un système de six équations scalaires à six inconnues.

La loi de composition des vitesses en B évite  $\vec{\Omega}(5/1)$ . Cette même loi scalaire  $\vec{BC}$  évite de plus  $\vec{\Omega}(2/4)$ , et on obtient

$$(\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{BC} = \vec{V}(B, 4/3) \cdot \vec{BC}$$

Pour éviter les angles indésirables, le vecteur  $\vec{BC}$  est respectivement pris égal à  $\vec{BA} + \vec{AC}$  et  $\lambda \vec{x}_3$ . Ceci donne, après substitution

$$(\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge -L_1 \vec{u}_1) \cdot c \vec{x}_2 = \dot{\lambda} \vec{x}_3 \cdot \lambda \vec{x}_3$$

Le résultat est immédiat avec une figure de définition de l'angle  $\theta_1 + \theta$

$$-\dot{\theta} c L_1 \sin(\theta_1 + \theta) = \dot{\lambda} \lambda \quad (21)$$

Cette équation différentielle (21) s'intègre pour donner

$$c L_1 \cos(\theta + \theta_1) = \frac{1}{2} \lambda^2 + cste$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on reconnaît une partie du développement de l'égalité géométrique  $\vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2$  écrite sur le triangle (ABC) et on obtient finalement

$$\lambda^2 = L_1^2 + c^2 + 2c L_1 \cos(\theta_1 + \theta) \quad (22)$$

**5.** L'équation (20) s'intègre également rapidement

$$\lambda - \lambda_0 = -p(\beta - \beta_0)$$

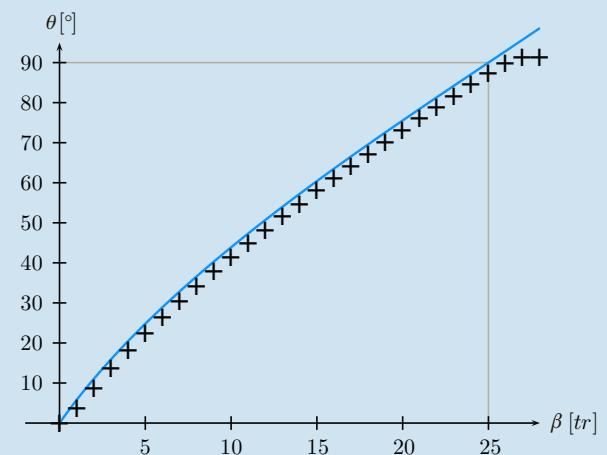
Pour déterminer la constante d'intégration, on choisit  $\beta_0 = 0$  pour  $\theta = 0$ , et dans cette configuration,  $\lambda_0 = \sqrt{b^2 + (a + c)^2}$ , soit  $\lambda_0 = 170 \text{ mm}$ . L'équation finale est ainsi

$$\theta = \arccos\left(\frac{(\lambda_0 - p\beta)^2 - L_1^2 - c^2}{2c L_1}\right) - \theta_1 \quad (23)$$

On trace la courbe correspondante et on lui superpose les points expérimentaux

La lecture de ces courbes permet de remarquer :

- une saturation du capteur après  $90^\circ$  ;
- une linéarisation possible pour les valeurs de  $\theta$  supérieures à  $\approx 40^\circ$  ;
- un décalage systématique entre les courbes réelles et théoriques, qui incite à vérifier sur le système réel les valeurs numériques données.



Superposition de la courbe théorique et des points expérimentaux.



# Mécanique

# Actions mécaniques

CHAPITRE 5

## Plan

5.1	Concept d'action mécanique	116
5.2	Modèles d'actions mécaniques transmissibles	123
5.3	Les lois du frottement	130
	Exercices d'application	135
	Exercices d'approfondissement	138
	Solutions des exercices	141

## Introduction

Ce chapitre s'attaque au domaine apparemment le plus délicat de la mécanique, celui des actions mécaniques. En effet, la notion de force est connue depuis la nuit des temps, avec comme image associée une flèche. Cette force pousse, et peut créer du mouvement, voire déformer. Là où cela se complique, c'est qu'une même force peut suivant les cas provoquer une translation ou une rotation ! De telles situations surprenantes sont à modéliser.

Au cours de la longue histoire des sciences, la flèche est devenue un vecteur, mais ce dernier ne suffit pas pour expliquer. Il faut au moins un point, le point d'application du lycéen. L'alliance improbable d'un vecteur et d'un point a fait long feu et a rapidement laissé la place au torseur. Les actions mécaniques sont un des domaines qui ont le plus tracassé ingénieurs et chercheurs, au point qu'une grande partie de la terminologie employée encore aujourd'hui vient de cette préoccupation. Torseur, glisseur, couple sont des exemples immédiats de cet héritage.

Aujourd'hui, entre « réalité invisible » et « idée géniale » pour définir une action mécanique, les auteurs de cet ouvrage choisissent sans hésitation la deuxième proposition.

## Prérequis

- La cinématique du solide indéformable ;
- Les outils de calculs vectoriels ;
- Notion de milieu environnant ;
- Notion de puissance.

## Objectifs

- Appréhender une action mécanique ;
- Savoir distinguer l'approche locale de l'approche globale ;
- Savoir proposer des modèles dans les situations courantes ;
- Savoir modéliser le phénomène de frottement.

# 5.1 Concept d'action mécanique

## Définition

Un concept est une représentation mentale abstraite.

Une **action mécanique** est un concept construit par dualité avec la cinématique, pour simuler et expliquer déformations et mouvements, pour dimensionner les composants.

Cette définition veut clairement dire qu'il est illusoire

- de vouloir montrer une action mécanique ;
- de poser l'action mécanique comme cause de déplacements ou de déformations.

Bien au contraire, c'est parce que le mécanicien enregistre une modification de mouvement ou un maintien d'équilibre qu'il utilise des outils de description construits en corrélation avec ce qu'il voit pour essayer de simuler les constatations expérimentales.

Ce que l'on voit est raconté par la cinématique...

## Exemple

Pour savoir si un bagage inconnu est lourd, le plus simple est de le prendre et de le soulever. Si cette opération est facile, on dira qu'il est léger. Dans le cas contraire, on dira qu'il est lourd.

Cette expérience entraîne plusieurs remarques :

- sans tentative de mise en mouvement, personne ne peut formuler d'avis ;
- la mise en mouvement est faite dans la direction de la pesanteur ;
- l'évaluation du poids se fait par corrélation entre le mouvement généré ou empêché et l'énergie mise en œuvre pour cela ;
- la mise en mouvement ou le maintien en position résulte donc d'une dépense d'énergie.

On peut en complément constater qu'il n'existe pas de capteur pour des mesures *directes* d'efforts. Les différentes technologies exploitent des déplacements induits par la déformation de ressorts, de jauge de déformation ou de cellules piézo-électriques.

### 5.1.1

## Notation

En cinématique, un mouvement est noté  $i/k$ , ce qui se lit le mouvement de  $i$  par rapport à  $k$ .

L'indice  $i$  désignant l'objet étudié, l'action mécanique à considérer est l'action qui s'exerce sur cet objet  $i$ . Si son origine est désignée par  $j$ , l'action mécanique de  $j$  sur  $i$  se note très facilement  $j/i$ .

Néanmoins, la ressemblance de l'action mécanique  $j/i$  avec le mouvement  $j/i$  est grande et les confusions qui s'ensuivent sont nombreuses. Cette notation est donc à résserver à l'expert et le débutant adopte avec profit la notation construite autour d'une flèche  $j \rightarrow i$ .

## Exemple

- action de la pesanteur sur 3 :  $p \rightarrow 3$
- action de la pièce 4 sur 2 :  $4 \rightarrow 2$
- action d'un moteur  $m$  sur l'arbre  $k$  :  $m \rightarrow k$
- action d'un ressort  $r$  sur un solide  $s$  :  $r \rightarrow s$



« De qui sur qui ? » est la question à laquelle il faut savoir à chaque instant répondre !

## 5.1.2

# Théorème des actions réciproques

### Définition

Soit  $j \rightarrow i$  l'action mécanique d'un élément  $j$  sur un élément  $i$ . On appelle **action réciproque** de  $j \rightarrow i$  l'action mécanique  $i \rightarrow j$  de l'élément  $i$  sur l'élément  $j$ .

Dans l'attente du cours de dynamique, on pose pour cette année le théorème suivant :

### Théorème

Une force  $\vec{F}(i \rightarrow j)$  posée de  $i$  sur  $j$  est opposée à l'action réciproque  $\vec{F}(j \rightarrow i)$

$$\vec{F}(i \rightarrow j) = -\vec{F}(j \rightarrow i) \quad (1)$$

## 5.1.3

# Point de vue local

Le point de vue local concerne le modèle proposé pour un point. Ainsi, soit  $P$  un point concerné par l'action mécanique d'un élément 1 sur un élément 2.

Le modèle d'action mécanique retenu est une force élémentaire notée  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ , dont la forme varie en fonction du domaine  $D$  sur lequel est défini le point courant  $P$ , ce que résume le tableau ci-dessous

Nature du domaine	Élément géométrique différentiel	Nom	Unité	Force élémentaire $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$
Point	1	Force $\vec{F}$	[N]	$\vec{F}$
Ligne	dl	Force linéaire $\vec{q}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	$\vec{q}dl$
Surface	dS	Force surfacique $\vec{q}$	[Pa]	$\vec{q}dS$
Volume	dV	Force volumique $\vec{q}$	[Nm <sup>-3</sup> ]	$\vec{q}dV$



Le suffixe en « -ique » signifie par unité de.

### Exemple 1 Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort de longueur à vide  $a$  et de raideur  $k$  monté entre deux solides. Le physicien propose une loi de comportement formulée ainsi : « Un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement. »

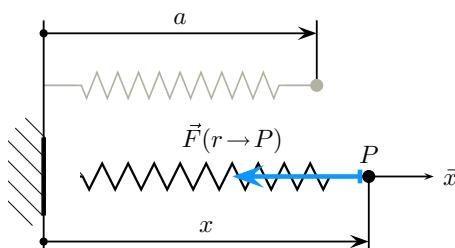


Figure 5.1 La force de rappel d'un ressort.



Il est nécessaire de pouvoir s'adapter à toutes les situations. C'est pourquoi la méthode est plus importante que la formule !

Par exemple, la figure (5.1) propose une masse accrochée à un ressort au point  $P$ . Pour traduire la proposition du physicien en équation, il est nécessaire de procéder méthodiquement :

- l'allongement est orienté par le vecteur  $\vec{x}$  ;
- l'action mécanique évaluée est la force de rappel exercée par le ressort sur la masse en  $P$ , soit  $\vec{F}(r \rightarrow P)$  ;
- l'allongement est égale à la différence entre la longueur courante notée ici  $x$  et la longueur à vide  $a$ .

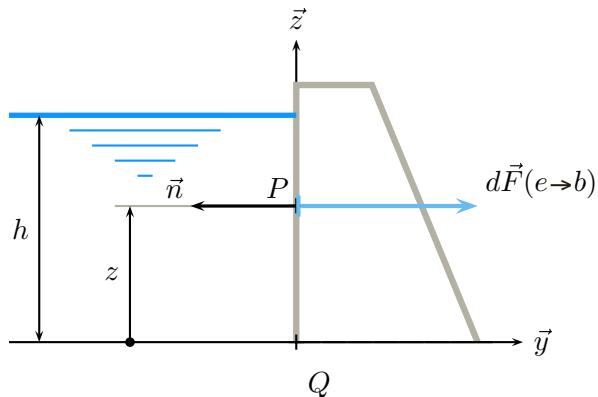
C'est ainsi que l'on peut écrire l'expression de la force de rappel

$$\vec{F}(r \rightarrow P) = -k(x - a)\vec{x} \quad (2)$$

### Exemple 2 Force de pression hydrostatique

Soit une retenue d'eau de hauteur  $h$  matérialisée par un barrage noté  $b$  de largeur  $L$  supposée constante :

- on s'intéresse au point courant  $P$  situé à la cote  $z$  et on pose  $dS$  la surface de barrage élémentaire prise autour de ce point ;
- les lois de l'hydrostatique proposent une répartition linéaire de pression depuis la surface, soit  $p(z) = \rho_e g(h - z)$ , avec  $\rho_e$  la masse volumique du fluide considéré, ici de l'eau ;
- on pose  $\vec{n}$  la normale sortante à la paroi au point  $P$ , donc dirigée du barrage vers l'eau.



**Figure 5.2** Force de pression hydrostatique sur une paroi.

On modélise l'action mécanique  $(e \rightarrow b)$  de l'eau sur le barrage par une force élémentaire  $d\vec{F}(e \rightarrow b)$  au point courant  $P$  de la paroi dont on peut écrire l'expression à partir des différentes données

$$d\vec{F}(e \rightarrow b) = -p(z) dS \vec{n} \quad \text{avec} \begin{cases} p(z) = \rho_e g(h - z) \\ dS = L dz \end{cases} \quad (3)$$

### Exemple 3 Force de pesanteur

Soit un corps pesant noté 2, homogène, de masse volumique  $\rho$ , soumis à un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  orienté par le vecteur  $-\vec{z}$  : le point courant  $P$  de volume élémentaire  $dV$  est soumis à l'action élémentaire suivante

$$d\vec{F}(p \rightarrow 2) = -\rho g dV \vec{z} \quad (4)$$

## 5.1.4

### Point de vue global

En mécanique du solide indéformable, le modèle retenu pour décrire les mouvements possibles est le torseur. Par dualité, c'est donc ce même modèle, un torseur, qui est posé pour les actions mécaniques transmissibles.

#### Notation

Le champ des vecteurs vitesses étant nommé  $\mathcal{V}$ , en lettre cursive majuscule, il est donc judicieux de noter  $\mathcal{F}$  le torseur des actions mécaniques, également en lettre cursive majuscule.

#### Définition

On appelle **torseur des actions mécaniques** exercées par un objet  $i$  sur un objet  $k$  le torseur construit par dualité avec la cinématique pour exprimer la puissance développée lors d'un mouvement  $k/j$ .

$$\mathcal{F}(i \rightarrow k) = \begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{M}(Q, i \rightarrow k) \end{cases} \quad (5)$$

Le vecteur résultante  $\vec{R}(i \rightarrow k)$  et le vecteur moment  $\vec{M}(Q, i \rightarrow k)$  sont les éléments de réduction de ce torseur au point  $Q$ .

La puissance comme somme de deux torseurs  $\mathcal{F}(i \rightarrow k) \otimes \mathcal{V}(k/j)$  est une notion développée lors du cours de dynamique en deuxième année.

Le domaine  $D$  est soit un point, une ligne, une surface ou un volume...

## 5.1.5

### Du point de vue local au point de vue global

Soit une action mécanique de 1 sur 2 décrite du point de vue local sur un domaine  $D$  par la force élémentaire  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ .

Soient  $P$  le point courant et  $Q$  un point quelconque, mais constant une fois choisie. Le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 se détermine à partir de la force élémentaire posée au point  $P$  par les relations

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_D d\vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(Q, 1 \rightarrow 2) = \int_D \vec{QP} \wedge d\vec{F}(1 \rightarrow 2) \end{cases} \quad (6)$$

L'expression ainsi construite prend tout son sens lorsque l'on réalise que l'action mécanique élémentaire posée avec une force ne comporte pas de composante associée à une rotation.

Appelons  $1_P \rightarrow 2$  l'action mécanique en se limitant au domaine du seul point  $P$ . On pose ainsi de manière implicite :

- une résultante  $d\vec{F}(1_P \rightarrow 2) = d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$  ;
- un moment  $\vec{M}(P, 1_P \rightarrow 2) = \vec{0}$ .

La formule de changement de points donne à partir de ces deux vecteurs la forme recherchée.

$$\vec{M}(Q, 1_P \rightarrow 2) = \vec{M}(P, 1_P \rightarrow 2) + d\vec{F}(1_P \rightarrow 2) \wedge \vec{PQ}$$



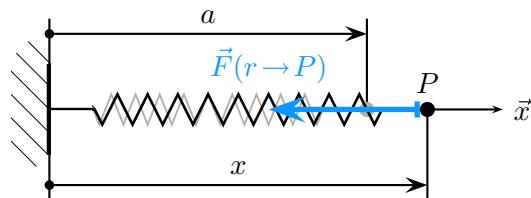
C'est le principe même de la somme de torseurs !

Il suffit alors de sommer toutes les actions mécaniques ( $1_P \rightarrow 2$ ) pour trouver l'action mécanique globale de ( $1 \rightarrow 2$ ). Autrement dit, l'action mécanique globale ( $1 \rightarrow 2$ ) est la somme de toutes les contributions en prenant soin de prendre un point d'observation  $Q$  quelconque, mais unique !

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \sum_P \mathcal{F}(1_P \rightarrow 2)$$

### Exemple 1 Force de rappel d'un ressort

Soit le ressort présenté précédemment sur la figure (5.1).



**Figure 5.3** La force de rappel d'un ressort.

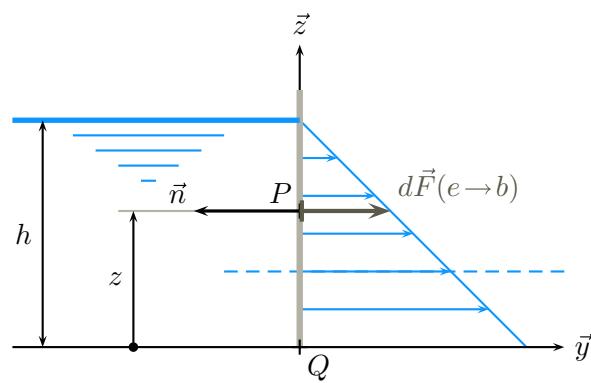
Le domaine n'est constitué que du seul point  $P$  et la force de rappel  $\vec{F}(r \rightarrow P)$  y est posée par  $\vec{F}(r \rightarrow P) = -k(x - a)\vec{x}$

L'expression du torseur des actions mécaniques est alors immédiate : c'est un glisseur d'axe central passant par le point  $P$

$$\mathcal{F}(r \rightarrow P) = \begin{cases} \frac{-k(x - a)}{P} \vec{x} \\ 0 \end{cases} \quad (7)$$

### Exemple 2 Force de pression hydrostatique

Soit le barrage défini précédemment sur la figure (5.3).



**Figure 5.4** Force de pression hydrostatique sur une paroi.

Le domaine est constitué de la surface de contact entre l'eau et le barrage, et la force élémentaire au point courant  $P$  de la paroi a été posée égale à  $d\vec{F}(e \rightarrow b) = -p(z)dS\vec{n}$ , avec  $p(z) = \rho_e g(h - z)$  et  $dS = Ldz$

– pour la résultante :

$$\vec{R}(e \rightarrow b) = - \int_0^h \rho_e g(h - z)Ldz \vec{n}$$

– pour le moment au point  $Q$  :

$$\vec{M}(Q, e \rightarrow b) = \int_0^h z \vec{z} \wedge -\rho_e g (h-z) \vec{n} L dz$$

On en déduit l'expression du torseur  $\mathcal{F}(e \rightarrow b)$  au point  $Q$

$$\mathcal{F}(e \rightarrow b) = Q \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_e g L h^2 \vec{y} \\ -\frac{1}{6} \rho_e g L h^3 \vec{x} \end{cases} \quad (8)$$

### Exemple 3 Force de pesanteur

Soit le corps pesant 2 du troisième exemple. On le suppose de masse totale  $m$ .

La masse volumique  $\rho$  et l'accélération de la pesanteur  $g$  sont supposées constantes : l'intégrale  $\int_V -\rho g dV$  se calcule immédiatement en  $-\rho g V$ , soit encore  $-mg$ . Par définition du centre de masse  $G$ , l'intégrale  $\int_V \rightarrow GP \wedge d\vec{F}(p \rightarrow 2)$  est nulle. L'action de la pesanteur est modélisée par un glisseur dont l'axe central passe par  $G$ .

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{cases} -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} \quad (9)$$

Il n'y a pas équivalence entre le point de vue local et le point de vue global :

- les trois exemples de descriptions locales proposés donnent dans les cas envisagés des glisseurs ;
- ces trois descriptions locales sont différentes.

Plusieurs exercices en fin de chapitre proposent des configurations moins triviales.

## 5.1.6

### Dessiner une action mécanique

Soit un torseur d'action mécanique  $\mathcal{F}(i \rightarrow k)$  dont on connaît les éléments de réduction en un point  $P$ . Il est toujours possible de décomposer ce torseur en somme d'un torseur-glissoir et d'un torseur-couple.

$$\begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{M}(P, i \rightarrow k) \end{cases} = P \begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{0} \end{cases} + \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{M}(P, i \rightarrow k) \end{cases} \quad (10)$$

Le glisseur est le modèle global d'actions mécaniques associé à une force, et comme cela se fait sans hésiter avec la pesanteur pour dessiner le vecteur-poids issu du centre de masse, il est intéressant de pouvoir dessiner le vecteur-résultante  $\vec{R}(i \rightarrow k)$  de ce glisseur sur son axe central, voire ses composantes lors d'une recherche systématique d'actions mécaniques.

De la même manière, il peut être intéressant de dessiner le vecteur-couple  $\vec{M}(P, i \rightarrow k)$  par une flèche habituellement dessinée sur l'axe de rotation.

### Exemple

Soit par exemple un arbre de transmission monté entre un moteur et un récepteur. Le mécanisme est schématisé sur la figure (5.5) et comprend :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\overrightarrow{CA} = L_1 \vec{z}_1$ .
- un arbre 2, guidé en rotation par deux roulements à billes dont le montage induit comme modèle de comportement cinématique deux liaisons en parallèle :

 La résultante n'est pas nulle, l'automoment est nul, le torseur  $\mathcal{F}(e \rightarrow b)$  est un glisseur :

Vérifiez que l'axe central est une droite horizontale située au tiers de la hauteur !

 On déduit le torseur des actions mécaniques à partir de la description locale. La réciproque est fausse !

 Une image vaut mille mots, dit-on, et ces représentations sont effectivement commodes, mais un torseur ne peut pas être assimilé à ces images !

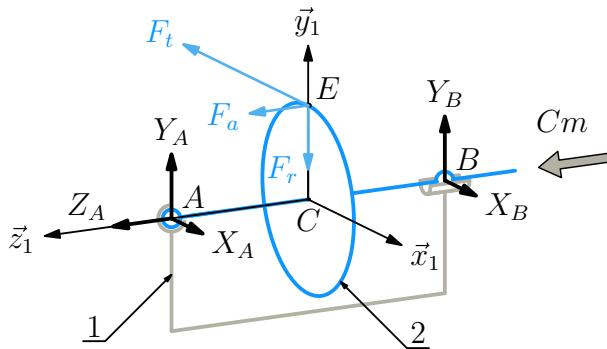


Cet exemple, pour être significatif, anticipe des propositions exposées dans la section suivante pour les liaisons et l'engrenage et dans le chapitre suivant pour le couple moteur...

- une liaison sphérique de centre  $A$  ;
- une liaison sphère cylindre, de centre  $B$  et d'axe  $(A, \vec{z}_1)$ , avec  $\|\overrightarrow{AB}\| = L_2$ .

Cet arbre comporte un pignon à denture hélicoïdale qui engrène avec un pignon récepteur  $r$  au point  $E$ . Enfin, il est entraîné en rotation par un moteur  $m$ .

D'un point de vue cinématique, les trois points  $A$ ,  $B$  et  $E$  sont immobiles à chaque instant dans le mouvement de 2 par rapport à 1.



**Figure 5.5** Dessiner des actions mécaniques ?

Concernant les actions mécaniques, on suppose connue la seule action mécanique  $r \rightarrow 2$  :

- le pignon récepteur  $r$  engrène au point  $E$  et le glisseur  $\mathcal{F}(r \rightarrow 2)$  est supposé connu. Comme le point  $E$  est immobile dans le mouvement de 2 par rapport à 1, les trois composantes de la résultante sont données dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et sont respectivement :
  - une composante tangentielle  $F_t$ , supposée négative, suivant  $\vec{x}_1$  ;
  - une composante radiale  $F_r$ , toujours négative, suivant  $\vec{y}_1$  ;
  - une composante axiale  $F_a$ , supposée positive, suivant  $\vec{z}_1$ .

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 2) = E \begin{cases} -F_t \vec{x}_1 - F_r \vec{y}_1 + F_a \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$$

- l'action du moteur sur 2 est un couple de moment  $Cm \vec{z}_1$ , où  $Cm$  est l'inconnue scalaire appelé couple moteur que l'on pose alors positif.

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ Cm \vec{z}_1 \end{cases}$$

- les actions mécaniques transmissibles par les deux liaisons sphériques et sphère-cylindre sont des glisseurs dont les actions centraux passent respectivement par les centres  $A$  et  $B$ . Les cinq inconnues scalaires correspondantes sont posées positives.

$$\mathcal{F}(1_A \rightarrow 2) = A \begin{cases} X_A \vec{x}_1 + Y_A \vec{y}_1 + Z_A \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1_B \rightarrow 2) = B \begin{cases} X_B \vec{x}_1 + Y_B \vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$

## 5.2 Modèles d'actions mécaniques transmissibles

De la même manière que l'on s'intéresse aux mouvements *possibles* en cinématique, et que l'on définit la forme possible des torseurs cinématiques, on s'intéresse aux particularités des torseurs des actions mécaniques *transmissibles* par les liaisons usuelles d'une part, et lors de contacts particuliers d'autre part.

### 5.2.1 Liaisons usuelles

 Le frottement est abordée à la section 5.3.1 à la page 130.

 Cette expression sera justifiée lors du cours sur la dynamique.

 Le symbole  $\mathcal{F}$  est à lire « torseur des actions mécaniques transmissibles » dans le cas des liaisons et des contacts.

 Pour une liaison à centre, le symbole cinématique se dessine au centre de la liaison et la forme du torseur cinématique est donnée pour ce point. Il en est de même pour le torseur des actions mécaniques transmissibles.

#### Liaisons usuelles

La forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison usuelle est *a priori* connue dans le cas où l'on ne tient pas compte du phénomène de frottement. En effet, en l'absence de frottement, la puissance dissipée par effet Joule au niveau de la liaison est supposée nulle. On admet dans ce chapitre l'expression de la puissance développée au niveau de la liaison entre deux solides 1 et 2, qui s'écrit simplement

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) \quad (11)$$

Le comment défini ci-dessus se détaille à partir des éléments de réduction des deux torseurs. On obtient ainsi la somme nulle de deux produits scalaires indépendants.

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) = \vec{R}(1 \rightarrow 2). \vec{V}(Q,2/1) + \vec{M}(Q,1 \rightarrow 2). \vec{\omega}(2/1) = 0 \quad (12)$$

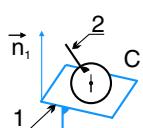
Le détail de ces deux produits scalaires conduit à la somme de six termes scalaires indépendants. Ils sont de plus tous de même signe. On en déduit la forme duale des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement :

- pour chaque degré de liberté supprimé, on pose une inconnue scalaire d'actions mécaniques transmissibles ;
- réciproquement, aucune composante d'action mécanique n'est transmissible là où une composante de mouvement est possible.

#### Les liaisons à centre

- **Sphère Plan** de centre  $C_2$  de normale  $\vec{n}_1$ .

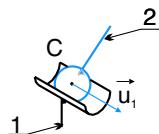
Cette liaison admet 5 degrés de liberté, empêche une seule translation. La résultante du torseur d'actions mécaniques transmissibles par la liaison *parfaite* ne comporte qu'une seule composante scalaire non nulle suivant la normale  $\vec{n}_1$  et le moment calculé au centre de la liaison est nul.



$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = C_2 \begin{cases} F_{12} \vec{n}_1 \\ 0 \end{cases}$$

- **Sphère Cylindre** de centre  $C_2$  et d'axe  $(C_1, \vec{u}_1)$

Cette liaison admet quatre degrés de liberté. Seule la résultante comporte deux composantes indépendantes et le moment est nul au centre de la liaison. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(C,2/1)$  est suivant  $\vec{u}_1$ , donc la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$  est orthogonale à  $\vec{u}_1$ .



$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = C_2 \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2), \text{ avec } \vec{R}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- **Sphérique** de centre  $C$

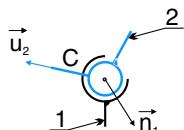
Cette liaison admet trois degrés de liberté en rotation : le moment est nul au centre de la liaison et la résultante est quelconque.



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = C \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{0} \end{cases}$$

- **Sphérique à doigt** de centre  $C$ , d'axe  $(C, \vec{u}_2)$  et de normale  $\vec{n}_1$

Cette liaison admet deux degrés de liberté en rotation, à savoir la rotation d'axe  $(C, \vec{u}_2)$  et autour de la droite  $(C, \vec{n}_1)$ . La résultante est ainsi quelconque est le moment au centre de la liaison n'a qu'une composante suivant  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

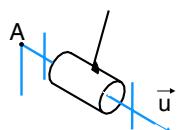


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = C \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ M_{ki} \vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2 \end{cases}$$

### Les liaisons à axe

- **Pivot d'axe** ( $A, \vec{u}$ )

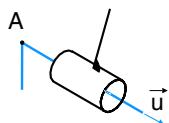
Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté en rotation. Le vecteur rotation  $\vec{\omega}(i/k)$  est suivant  $\vec{u}$ , donc le moment en un point  $A$  de l'axe  $\vec{M}(A, k \rightarrow i)$  est orthogonale à  $\vec{u}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

- **Pivot glissant d'axe** ( $A, \vec{u}$ )

Cette liaison admet deux degrés de liberté, la translation suivant  $\vec{u}$  et la rotation d'axe  $(A, \vec{u})$ . Résultante et moment en un point de l'axe sont donc orthogonaux à  $\vec{u}$ .



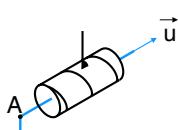
$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

- **Hélicoïdale d'axe** ( $A, \vec{u}$ )

Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté, la translation suivant  $\vec{u}$  étant lié à la rotation d'axe  $(A, \vec{u})$ . Le calcul mérite alors d'être détaillé : On cherche la forme de  $\mathcal{F}(k \rightarrow i)$ , sachant que

$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) \otimes \mathcal{V}(i/k) = 0, \text{ avec } \mathcal{V}(i/k) = A \begin{cases} \omega_{ik} \vec{u} \\ p \omega_{ik} \vec{u} \end{cases}$$

Le détail du comoment donne  $\vec{R}(k \rightarrow i) \cdot p\omega_{ik}\vec{u} + \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \omega_{ik}\vec{u} = 0$ , et on peut simplifier cette expression en factorisant  $\omega_{ik}$  qui n'a aucune raison d'être nul.

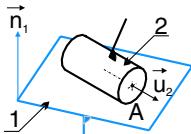


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i) \end{cases}$$

$$\text{avec } p\vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} + \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0$$

- **Cylindre d'axe ( $A, \vec{u}_2$ ) Plan de normale  $\vec{n}_1$**

Cette liaison admet quatre degrés de liberté. La translation annulée est suivant  $\vec{n}_1$  et la rotation impossible est orientée par  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ . En conséquence, la résultante et le moment en un point de l'axe sont respectivement suivant  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

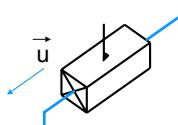


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = A \begin{cases} F_{ki}\vec{n}_1 \\ M_{ki}\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2 \end{cases}$$

### Les liaisons à direction

- **Glissière de direction  $\vec{u}$**

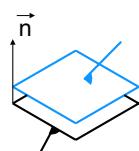
Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté en translation. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(Q, i/k)$  est suivant  $\vec{u}$ , donc la résultante est orthogonale à  $\vec{u}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{M}(Q, k \rightarrow i) \end{cases}$$

- **Appui plan de normale  $\vec{n}$**

Cette liaison admet trois degrés de liberté. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(Q, i/k)$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , donc la résultante est suivant  $\vec{n}$ . Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est suivant  $\vec{n}$ , donc le moment en un point  $Q$  quelconque  $\vec{M}(Q, k \rightarrow i)$  est orthogonale à  $\vec{n}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} F_{ki}\vec{n} \\ \vec{M}(Q, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(Q, k \rightarrow i) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

## 5.2.2

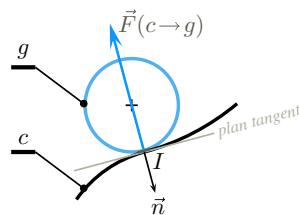
### Contact ponctuel

Comme on l'a vu lors de l'exposé du point de vue local à la page 4, le modèle d'actions mécaniques le plus élémentaire posé est une force associée à un point, dont le modèle global correspondant est un glisseur.

À chaque fois que l'on assimile un contact réel à un point, le modèle d'action mécanique transmissible peut être immédiatement posé en tant que glisseur, avec néanmoins une précaution à prendre : la force  $\vec{F}(i \rightarrow k)$  posée au point de contact réel ne peut être dirigée que de l'objet  $i$  vers l'objet  $k$ .

**Exemple**

Soit un galet  $g$  au contact d'une came  $c$  en un point  $I$ . On cherche à modéliser l'action mécanique de  $c$  sur  $g$ .



**Figure 5.6** L'action mécanique à poser lors d'un contact ponctuel.

Une fois définie la normale sortante  $\vec{n}$  du galet au point  $I$ , on pose

$$\mathcal{F}(c \rightarrow g)_I = \begin{cases} -F_{cg}\vec{n}, & \text{avec } F_{cg} \geq 0 \\ \vec{0} & \end{cases}$$

- Le signe négatif traduit le sens *a priori* connu pour l'action de  $c$  sur  $g$  suivant  $-\vec{n}$ .
- La composante  $F_{cg}$  positive ou nulle traduit la conservation du contact au cours du temps.

En définitive, il convient de rester rigoureux et méthodique en toute circonstance. En effet, il est toujours possible de définir par exemple la normale  $\vec{n}_{cg} = -\vec{n}$ , orientée de  $c$  vers  $g$ . Dans ce cas, le torseur à poser est alors

$$\mathcal{F}(c \rightarrow g) = \begin{cases} F_{cg}\vec{n}_{cg}, & \text{avec } F_{cg} \geq 0 \\ \vec{0} & \end{cases}$$

- Le signe positif traduit le sens *a priori* connu pour l'action de  $c$  sur  $g$  suivant  $\vec{n}_{cg}$ .
- La composante  $F_{cg}$  positive ou nulle traduit la conservation du contact au cours du temps.

**5.2.3**

La traction consiste à tirer sur les extrémités du câble. Pousser ou tordre ne permettent pas d'entraîner une charge...

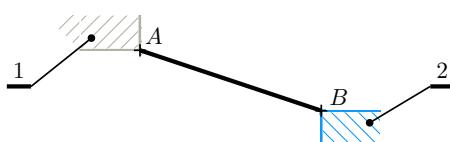
**Câbles**

Un câble supposé sans masse, inextensible et infiniment flexible ne peut-être sollicité qu'en traction.

Dès lors, le brin tendu du câble est assimilable à une droite et l'action mécanique transmissible est modélisable par un glisseur d'axe central le brin tendu. On appelle **tension** le module de la résultante du glisseur ainsi posé.

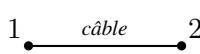
**Exemple**

Soient deux solides 1 et 2 reliés par un câble tendu, comme schématisé sur la figure (5.7).



**Figure 5.7** Un câble tendu entre deux solides 1 et 2.

Les deux solides 1 et 2 sont en liaison et on pose alors comme torseur des actions mécaniques transmissibles par 1 sur 2 un glisseur d'axe central la droite ( $AB$ ).



$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = B \begin{cases} k \overrightarrow{BA}, & \text{avec } k \geq 0 \\ \vec{0} & \end{cases}$$

- L'action mécanique posée est celle de 1 sur 2, donc la résultante est orientée de  $B$  vers  $A$ , donc par le vecteur  $\overrightarrow{BA}$ .
- Le coefficient  $k$  est l'inconnue scalaire, en Newton par mètre [ $N/m^{-1}$ ], nécessairement positive.
- La tension dans le câble est donnée par le produit  $k \|\overrightarrow{AB}\|$ .

#### Remarque

Poser  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|}$  comme vecteur unitaire est possible, mais très fortement déconseillé, car ce choix conduit à des expressions très lourdes !



## 5.2.4 Courroies

Une transmission par courroie comporte au moins une poulie menante et une poulie mené, donc un brin tendu et un brin dit « mou », parfois néanmoins tendu au repos. Le modèle défini au paragraphe précédent pour les câbles est à utiliser pour chaque brin tendu.

#### Exemple

Soient deux poulies 2 et 3 reliées par une courroie lisse mise en tension par un galet tendeur 4. Cette configuration est schématisée sur la figure (5.8) :

- La poulie 2, de rayon  $R_2$ , est en liaison pivot d'axe ( $A, \vec{z}_1$ ) avec un bâti 1. On la suppose motrice et tournant dans le sens positif par rapport au bâti.
- La poulie 3, de rayon  $R_3$ , est en liaison pivot d'axe ( $B, \vec{z}_1$ ) avec le bâti. On la suppose réceptrice.
- Le galet tendeur 4, de rayon  $R_4$ , est en liaison pivot avec un dispositif non représenté. La mise en tension de la courroie est obtenue par la translation suivant  $\vec{y}_1$  de ce dernier par rapport au bâti.
- On nomme  $H_{ik}$  le point d'enroulement sur la poulie  $i$  de la courroie vers la poulie ou le galet  $k$ .

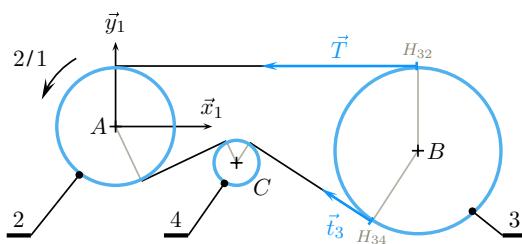


Figure 5.8 Une transmission par courroie.

D'un point de vue cinématique, on pose les inconnues cinématiques pour les deux liaisons pivot et la résolution de la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1 est immédiate

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{cases} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \text{ avec } \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = +\frac{R_2}{R_3}$$

Concernant les actions mécaniques de la courroie  $c$  sur la poulie réceptrice 3, les deux brins sont tendus. En appelant  $c2$  et  $c4$  les brins dirigés respectivement vers la poulie 2 et le galet 4, on pose alors  $\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = \mathcal{F}(c2 \rightarrow 3) + \mathcal{F}(c4 \rightarrow 3)$ , avec

$$\mathcal{F}(c2 \rightarrow 3) = H_{32} \begin{cases} \vec{T} \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{F}(c4 \rightarrow 3) = H_{34} \begin{cases} \vec{t}_3 \\ 0 \end{cases}$$

On choisit assez naturellement le point  $B$  de l'axe de rotation du mouvement 3/1 pour calculer les moments :

- action  $c2 \rightarrow 3$  :  $\vec{M}(B, c2 \rightarrow 3) = \overrightarrow{BH}_{32} \wedge \vec{T} = TR_3 \vec{z}_1$ , avec  $T \geq 0$ .
- action  $c4 \rightarrow 3$  :  $\vec{M}(B, c4 \rightarrow 3) = \overrightarrow{BH}_{34} \wedge \vec{t}_3 = -t_3 R_3 \vec{z}_1$ , avec  $t_3 \geq 0$ .

On obtient ainsi finalement

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = B \begin{cases} \vec{T} + \vec{t}_3 \\ (T - t_3) R_3 \vec{z}_1 \end{cases} \text{ avec } T \geq 0 \text{ et } t_3 \geq 0$$

Le calcul de la résultante  $\vec{T} + \vec{t}_3$  est à mener ensuite au cas par cas, suivant les paramètres disponibles.

## 5.2.5

### Engrenages

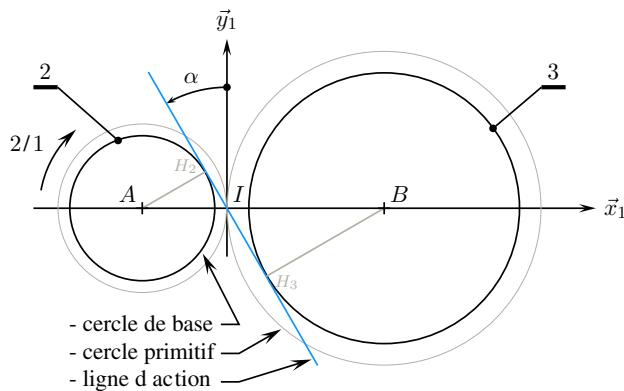
#### Cas des dentures droites

Le modèle cinématique ayant permis la génération des dentures en développante de cercle est à reprendre.

#### Exemple

Soit un engrenage composé de deux pignons 2 et 3 à denture droite et profil en développante de cercle. Il est schématisé sur la figure (5.9) :

- on associe à un bâti 1 le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\overrightarrow{AB} = e\vec{x}_1$  ;
- le pignon 2 supposé moteur, de rayon de base  $Rb_2$  comporte  $Z_2$  dents et est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1 ;



**Figure 5.9** Transmission par engrenage.

- le pignon 3 supposé récepteur, de rayon de base  $Rb_3$  comporte  $Z_3$  dents et est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.

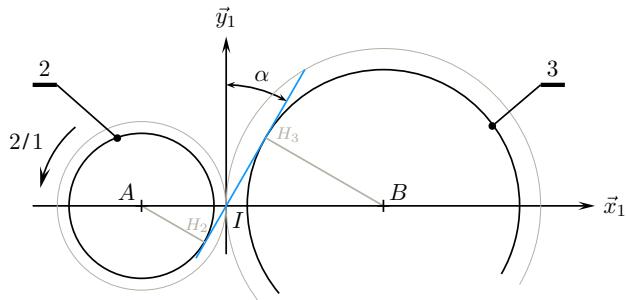
D'un point de vue cinématique, on pose les inconnues cinématiques pour les deux liaisons pivot et la résolution de la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1 a été étudiée au chapitre précédent, en partant du fait que l'engrenage est conçu pour que son comportement cinématique soit le roulement sans glissement des deux cercles primifs au point de contact  $I$ .

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{cases} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \text{ avec } \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_3}$$

De plus, on a constaté qu'au cours de l'engrènement, les points de contact successifs se déplaçaient sur le segment  $[H_2 H_3]$  tangent aux deux cercles de base, avec une normale au contact à chaque instant dirigé par le vecteur  $\overrightarrow{H_2 H_3}$ . On pose alors comme action mécanique transmissible un glisseur d'axe central la droite définie par le segment  $[H_2 H_3]$ . Cette droite est habituellement nommée *ligne d'action*.

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = I \begin{cases} F \cos \alpha \vec{y}_1 - F \sin \alpha \vec{x}_1, \text{ avec } F \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

- Comme une dent de 2 ne peut que « pousser » une dent de 3,  $F$  est le module de la résultante, nécessairement positif.
- La composante  $F_t = F \cos \alpha$  est appelée composante tangentielle.
- La composante  $F_r = F \sin \alpha$  est appelée composante radiale.
- En cas d'inversion du sens de rotation, la ligne d'action change et devient la droite symétrique par rapport à l'axe  $(I, \vec{y}_1)$ .



**Figure 5.10** En cas d'inversion du sens de rotation.

Le torseur d'actions mécaniques à poser devient alors

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = I \begin{cases} -F \cos \alpha \vec{y}_1 - F \sin \alpha \vec{x}_1, \text{ avec } F \geq 0 \\ 0 \end{cases}$$

### Autres cas

Le cas des dentures hélicoïdales et toutes les configurations particulières dépassent le cadre de cet ouvrage. Il est raisonnable qu'un énoncé propose au cas par cas le modèle d'actions mécaniques à utiliser.

## 5.3 Les lois du frottement

### 5.3.1

#### Le frottement

Le phénomène de frottement est omniprésent dans la vie de tous les jours. Ce phénomène est utile lorsqu'il s'agit d'accélérer ou de freiner, exploité lorsqu'il s'agit par exemple de laver, de poncer, de peindre. Ses conséquences peuvent être également coûteuses lorsqu'il s'agit d'usure ou d'échauffement.

On peut en donner une définition assez générale, valable pour des corps solides ou non.

##### Définition

Le **frottement** est un phénomène dissipateur d'énergie observé au niveau du mouvement relatif entre deux éléments.

Le frottement transforme de l'énergie mécanique en chaleur, et est donc cause d'irréversibilité.

La modélisation des phénomènes élémentaires mis en jeu est très difficile, car ces phénomènes font intervenir :

- la résistance des matériaux, pour les lois de déformation locale ;
- le génie des matériaux, pour leurs propriétés physicochimiques et leurs traitements, à cœur ou en surface ;
- la mécanique des fluides, dans les cas d'une lubrification des contacts ;
- la thermochimie, pour les éventuelles réactions aux interfaces dues à l'élévation de la température ;
- ...

Cette dernière liste n'est pas exhaustive : L'étude des frottements est depuis une quarantaine d'année une science à part entière appelée **tribologie**.

Cette section est modeste et n'a comme ambition que de mettre en place un modèle macroscopique en se restreignant aux frottements constatés au niveau des surfaces de contact de solides.

### 5.3.2

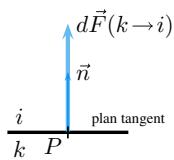
#### Le frottement entre solides

Concernant les solides, le mouvement relatif est à observer au niveau du contact entre ces éléments, et il est donc nécessaire de se placer au niveau local, au niveau d'un point de contact pour modéliser ce que l'on relève.

Soit alors un point de contact  $P$  entre deux solides  $i$  et  $k$ . On suppose s'intéresser à l'action de  $k \rightarrow i$  et on définit la normale au plan tangent  $\vec{n}$  dirigée de  $k$  vers  $i$ .



La composante  $N_{ki}$  est la composante normale de la force élémentaire  $d\vec{F}(k \rightarrow i)$ , dirigée de  $k$  vers  $i$ .



En l'absence de frottement, l'action mécanique est modélisée par une force élémentaire  $d\vec{F}(k \rightarrow i)$  portée par la normale  $\vec{n}$  au contact. On pose ainsi

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n}, \text{ avec } N_{ki} \geqslant 0$$

### 5.3.3 Cas du glissement

Lorsqu'il y a glissement au point  $P$  de  $i$  par rapport à  $k$ , la conséquence du phénomène de frottement est modélisée par une composante tangentielle d'action mécanique qui s'oppose au point d'étude à la vitesse de glissement constatée. On pose donc

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n} + \vec{T}(k \rightarrow i) \quad (13)$$

avec comme conditions pour la composante tangentielle  $\vec{T}(k \rightarrow i)$

$$\begin{cases} \vec{T}(k \rightarrow i) \wedge \vec{V}(P, i/k) = \vec{0} \\ \vec{T}(k \rightarrow i) \cdot \vec{V}(P, i/k) \leqslant 0 \end{cases} \quad (14)$$

- le produit vectoriel  $\vec{T}(k \rightarrow i) \wedge \vec{V}(P, i/k)$  nul exprime la colinéarité de la composante tangentielle  $\vec{T}(k \rightarrow i)$  et du vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P, i/k)$  ;
- le produit scalaire  $\vec{T}(k \rightarrow i) \cdot \vec{V}(P, i/k)$  négatif ou nul exprime la dissipation d'énergie au niveau du contact.

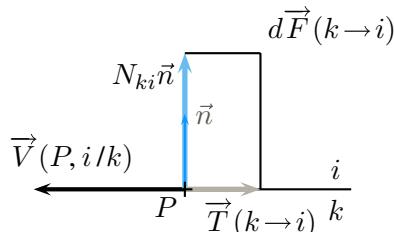
Soit de plus  $\vec{t}$  le vecteur unitaire du plan tangent tel que  $\vec{T}(k \rightarrow i) = T_{ki} \vec{t}$ . Dans le cas du glissement, la composante tangentielle est proportionnelle à la composante normale et on pose

$$\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| = f_g \quad (15)$$

Bien repérer l'ordre des indices : on s'intéresse à l'action de  $k$  sur  $i$  lors de l'étude du mouvement de  $i$  par rapport à  $k$  !

Le modèle développé est souvent appelé **modèle de Coulomb**.

Pour que la composante tangentielle soit non nulle, il faut un effort normal non nul. Autrement dit, la composante tangentielle est nulle si la composante normale est nulle !



**Figure 5.11** La force élémentaire transmissible dans le cas du glissement.

Le coefficient de proportionnalité  $f_g$  est appelé **coefficient de frottement de glissement**. La valeur de ce coefficient dépend, par ordre d'importance décroissant :

- du couple de matériaux en contact ;
- de la lubrification ;
- de l'état de surface des matériaux ;
- de la température...

La valeur d'un coefficient de frottement ne dépend pas :

- de la nature géométrique et de l'aire de la surface de contact ;
- de l'intensité de l'effort normal.

Couples de matériaux	Coefficient de frottement	Exemples
acier/acier	0,15	Variateurs à friction
acier/téflon ( <i>PTFE</i> )	0,05	Paliers lisses
acier/caoutchouc	0,25 à 0,45	Courroies
acier/garnitures	0,20 à 0,50	Freins, embrayage

**Figure 5.12** Quelques valeurs approximatives de coefficient de frottement de glissement.

### 5.3.4



Il est indispensable d'avoir bien compris le cas du glissement avant d'aborder celui de l'adhérence !

## Cas de l'adhérence

Dans le cas de l'adhérence, il n'y a pas de mouvement relatif au niveau du point de contact  $P$  considéré.

La première question à se poser est : « En l'absence de frottement, y aurait-il mouvement ? » Les trois cas suivants sont donc envisageables :

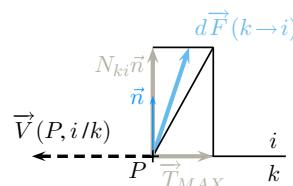
### Il n'y a pas de glissement en l'absence de frottement

Dans ce cas, une composante tangentielle n'a pas lieu d'être posée, car elle serait calculée nulle !

Un exemple est donné lors de l'exercice (5.6) à la page 137.

### Il y a glissement en l'absence de frottement

Dans ce cas, les propositions énoncées lors du glissement sont valables en considérant le vecteur vitesse qui apparaîtrait en l'absence de frottement

**Figure 5.13** La force élémentaire transmissible dans le cas de l'adhérence.

On part de la force élémentaire transmissible dans le cas du contact sans frottement et on pose une composante tangentielle opposée au vecteur vitesse de glissement qui apparaîtrait en l'absence de frottement.

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n} + \vec{T}(k \rightarrow i) \quad (16)$$

Soit de plus  $\vec{t}$  le vecteur unitaire du plan tangent tel que  $\vec{T}(k \rightarrow i) = T_{ki} \vec{t}$ . Dans le cas de l'adhérence, la composante tangentielle est inconnue, mais majorée par une composante tangentielle maximale  $T_{MAX}$  proportionnelle à la composante normale. On pose alors

$$\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| \leq f_a \quad (17)$$

Le coefficient  $f_a$  est appelé **coefficient de frottement d'adhérence**. La valeur de ce coefficient est généralement constatée légèrement supérieure à la valeur du coefficient de frottement de glissement  $f_g$ .

**Remarques**

- L'inégalité (17) peut être prolongée par les expressions écrites avec la composante tangentielle  $T_{MAX}$

$$\left| \frac{T_{MAX}}{N_{ki}} \right| = f_a \quad \left| \frac{T_{ki}}{T_{MAX}} \right| \leqslant 1 \quad (18)$$

- Vue l'incertitude autour des valeurs numériques à prendre pour les coefficients de frottement de glissement et d'adhérence, il n'est pas rare de les confondre en première approche, donc de constater  $f_g \approx f_a$  et de poser un coefficient de frottement  $f$  unique, sans distinguer les deux cas.

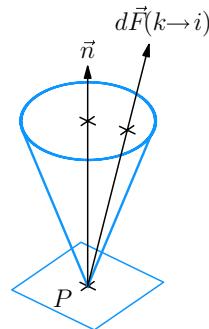
- Le fait de poser une composante tangentielle ajoute une inconnue au total obtenu avec les liaisons *parfaites*, et cela sans ajouter d'équation supplémentaire. Un problème n'admet ainsi rapidement plus de solution unique. C'est pourquoi il est fréquent de s'intéresser au cas où on suppose être à la **limite du glissement**, pour lequel la composante tangentielle est supposée à sa valeur maximale.

L'inéquation donnée  $\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| \leqslant f_a$  majore la composante tangentielle  $T_{ki}$  qui reste inconnue.

À la limite du glissement,  $T_{ki} = T_{MAX} = f_a N_{ki}$  !

**On ne sait pas s'il y a glissement en l'absence de frottement**

C'est le cas le plus délicat à traiter. Néanmoins, ce que l'on met en œuvre est la synthèse de tout ce qui a été dit précédemment :



**Figure 5.14** Le cône de frottement.

- on prend comme référence le contact supposé sans frottement

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n}$$

- on pose une composante tangentielle  $\vec{T}$  *a priori* quelconque, ce qui ajoute deux inconnues scalaires, et l'inégalité majorant son module

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n} + \vec{T}_{ki}, \text{ avec } \frac{\|\vec{T}_{ki}\|}{|N_{ki}|} \leqslant f_a$$

La résolution peut se poursuivre en gardant à l'esprit les propositions suivantes :

- il est nécessaire d'avoir une composante normale non nulle pour avoir une composante tangentielle non nulle ;
- la composante tangentielle n'est pas nécessairement non nulle ;
- il faut supposer être à la limite du glissement pour faire baisser le nombre d'inconnues, mais ce n'est pas toujours possible ;
- une fois la composante tangentielle  $\vec{T}_{ki}$  trouvée non nulle, elle vérifie les expressions vectorielles posées avec le vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P,i/k)$  qui apparaîtrait en l'absence de frottement.

$$\begin{cases} \vec{T}_{ki} \wedge \vec{V}(P,i/k) = \vec{0} \\ \vec{T}_{ki} \cdot \vec{V}(P,i/k) \leqslant 0 \end{cases} \quad (19)$$

### 5.3.5

## Modélisation globale

La résolution des problèmes concernant les solides est efficace avec l'utilisation des torseurs, mais la modélisation du phénomène de frottement se fait nécessairement au point de vue local.

De fait, la modélisation des actions mécaniques lors de la prise en compte du phénomène de frottement se fait systématiquement en quatre étapes :

- modélisation géométrique de la surface de contact par des points, des lignes ou des surfaces ;
- paramétrage de la position du point courant ;
- écriture de la force élémentaire au point courant ;
- détermination du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Pour une zone de contact assimilée à un contact ponctuel, aucune somme n'est à faire et c'est le seul cas où l'on peut proposer directement un modèle global.

### Exemple

Soient deux solides 1 et 2 en contact, ce contact étant assimilé à un point  $P$  avec une normale  $\vec{n}$  que l'on dirige de 1 vers 2. En l'absence de frottement est posé le glisseur suivant

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = P \begin{cases} N_{12} \vec{n}, \text{ avec } N_{12} \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases} \quad (20)$$

### Cas du glissement

On suppose connu le vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P, 2/1)$  et on pose alors une composante tangentielle  $T_{12}\vec{t}$  opposée à ce vecteur vitesse. Le torseur des actions mécaniques transmissibles de 1 vers 2 s'écrit alors

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = P \begin{cases} N_{12} \vec{n} + T_{12} \vec{t}, \text{ avec } \left| \frac{T_{12}}{N_{12}} \right| = f_g \\ \vec{0} \end{cases} \quad (21)$$

Comme à chaque instant  $|T_{12}| = f_g |N_{12}|$ , il n'y a pas d'inconnue supplémentaire au problème.

### Cas de l'adhérence

Dans le cas le plus défavorable, on ne sait rien du comportement cinématique au niveau du contact et on se contente de poser

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = P \begin{cases} N_{12} \vec{n} + \vec{T}_{12}, \text{ avec } \frac{\|\vec{T}_{12}\|}{|N_{12}|} \leq f_a \\ \vec{0} \end{cases} \quad (22)$$

Deux inconnues scalaires supplémentaires sont posées, les deux composantes de  $\vec{T}_{12}$  dans le plan tangent.

Il est nécessaire d'essayer de ce placer à la limite du glissement pour réduire le nombre d'inconnues.

## Synthèse

### Savoirs

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- action mécanique ;
- action réciproque ;
- force, force élémentaire ;
- torseur des actions mécaniques ;
- torseur des actions mécaniques transmissibles ;
- glisseur, couple ;
- frottement ;

- glissement, adhérence ;
- cône de frottement ;
- coefficient de frottement de glissement ;
- coefficient de frottement d'adhérence.

#### Je connais :

- les quatre éléments géométriques différentiels ;
- le théorème des actions réciproques ;
- les lois de Coulomb.

### Savoir-faire

#### Je sais

- définir une action mécanique élémentaire ;
- calculer le torseur des actions mécaniques transmissibles à partir d'une description locale ;
- proposer une action mécanique élémentaire compatible avec une action globale donnée ;
- dessiner une action mécanique élémentaire ;
- proposer une image associée à un glisseur, à un couple ;
- poser l'action mécanique élémentaire pour un ressort ;
- donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par les liaisons usuelles ;
- proposer le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison par câble, par une transmission par engrenage ;
- poser l'action mécanique élémentaire pour un contact ponctuel, avec ou sans frottement.

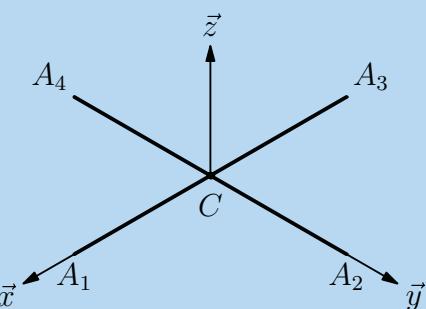
## Exercices d'application

### 5.1 Pales d'hélicoptère

On s'intéresse à un hélicoptère en vol stationnaire, donc lors d'une phase de vol où il est immobile par rapport au sol :

- La verticale ascendante du lieu géographique est orientée par le vecteur  $\vec{z}$ .
- Lors du mouvement étudié, le rotor  $R$  tourne par rapport à un repère sol noté  $S$  autour d'un axe ( $C, \vec{z}$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$ .
- Le rotor  $R$  est composé de quatre pales  $p_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ , modélisées par quatre segments de même longueur  $L$ , à savoir  $CA_1, CA_2, CA_3$  et  $CA_4$ .

On modélise l'action mécanique exercée par l'air sur la pale  $p_1$  par une force linéaire  $\vec{q}$  proportionnelle au carré de la fréquence de rotation et au carré du rayon  $x$  :



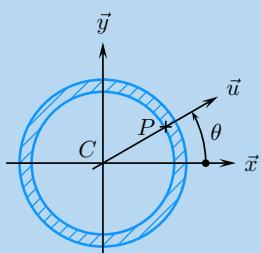
Les quatre pales simplifiées d'un hélicoptère

$$\vec{q} = (\omega x)^2 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z})$$

- Les coefficients  $k_y$  et  $k_z$  sont des constantes positives. Donner leur unité.
- Déterminer le torseur modélisant l'action mécanique de l'air sur la pale  $p_1$  noté  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$ .
- Montrer que  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  est un glisseur et trouver  $B_1$  le point de la pale par lequel passe l'axe central.
- Proposer une représentation graphique de ce glisseur en décomposant la résultante en une composante de portance notée  $F_P$  suivant  $\vec{z}$  et une composante de traînée notée  $F_T$  suivant  $\vec{y}$ . Généraliser cette représentation pour chacune des trois autres pales en utilisant les symétries du rotor.
- Déterminer le torseur des actions mécaniques exercées par l'air sur le rotor  $\mathcal{F}(a \rightarrow R)$  et détailler les effets de la portance et de la traînée.
- Quel est à votre avis le sens de rotation du rotor par rapport à la cabine ?

## 5.2 Pression dans un tube

Soit un tube  $t$  de rayon intérieur  $R$ , dans lequel circule un fluide  $f$  à la pression uniforme  $p$ . On s'intéresse à l'action mécanique ( $f \rightarrow t$ ) du fluide sur le tube pour un morceau rectiligne d'épaisseur  $dL$ .



Section droite du tube.

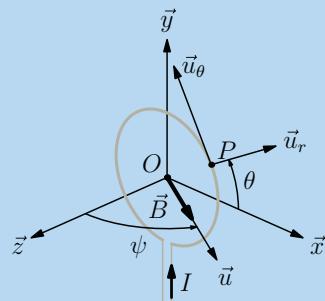
**Lexique :** Une **section droite** du tube est l'intersection de ce tube avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

- Quel élément géométrique différentiel prendre au niveau du point courant  $P$  ?
- Déterminer au point courant  $P$  la force élémentaire  $d\vec{F}(f \rightarrow t)$ .
- Déterminer le torseur des actions mécaniques du fluide sur la portion rectiligne de tube  $\mathcal{F}(f \rightarrow t)$ .
- Ce résultat signifie-t-il que le tube peut supporter n'importe quelle valeur de pression ?
- Quand on met un tuyau d'arrosage sous pression, un brin courbé a tendance à se redresser. Sans calcul supplémentaire, est-il possible d'expliquer qualitativement ce phénomène ?

## 5.3 Action mécanique d'origine électro-magnétique

On considère une spire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$ , située dans un plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  :

- cette spire est parcourue par un courant  $I$  ;
- elle est placée dans un champ magnétique supposé uniforme et défini par  $\vec{B} = B\vec{u}$  où le vecteur  $\vec{u}$  est dans le plan  $(\vec{z}, \vec{x})$  et orienté par l'angle  $\psi = (\vec{z}, \vec{u})$  ;
- on pose  $\overline{OP} = R\vec{u}_r$ , avec  $\theta = (\vec{x}, \vec{u}_r)$ .



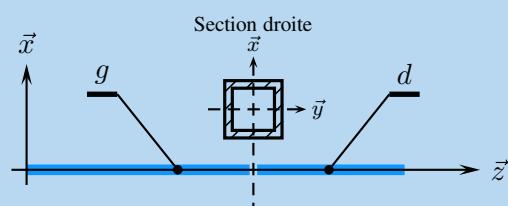
Effet d'un champ magnétique sur une spire parcourue par du courant.

La force élémentaire d'origine électromagnétique, appelée force de Laplace, s'exerce sur l'élément de circuit  $d\vec{l}$  au point courant  $P$  et s'exprime par  $d\vec{F}(b \rightarrow s) = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

- Exprimer la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$  en fonction de  $B$ ,  $R$ ,  $I$ ,  $\theta$  et  $\psi$
- Déterminer le torseur des actions mécaniques d'origine électro-magnétique sur l'ensemble de la spire dont on néglige l'ouverture.

## 5.4 Poutre sollicitée en flexion

On considère une poutre creuse à section carrée sollicitée en flexion, que l'on scinde mentalement en deux au niveau d'une section droite. On s'intéresse à l'action mécanique de la partie droite  $d$  sur la partie gauche  $g$ .

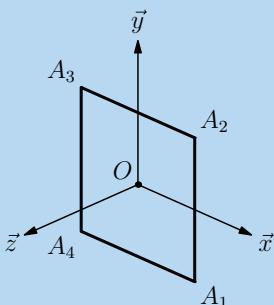


La poutre scindée mentalement en deux parties :  $d$  et  $g$ .

**Lexique**

- Une **poutre** est un solide dont une des dimensions, ici suivant  $\vec{z}$ , est très grande devant les deux autres.
- On appelle **section droite** l'intersection de la poutre avec un plan perpendiculaire à sa longueur.
- La **flexion** est une des quatre sollicitations envisagées en résistance des matériaux, celle pour laquelle la partie droite  $d$  tend à tourner autour d'un axe transversal par rapport à la partie gauche  $g$ .

La section droite de la poutre est modélisée par le milieu curviligne décrit sur la figure ci-dessous : un cadre carré de centre  $O$  et d'arête de longueur  $2a$  dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . L'action mécanique ( $d \rightarrow g$ ) est modélisée par une force linéaire  $\vec{q} = -kx \vec{z}$ , avec  $k$  une constante.



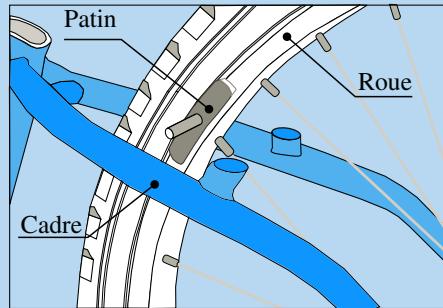
La section droite de la poutre.

1. Représenter graphiquement cette force linéaire le long du cadre de la section droite.
2. Donner l'unité de la constante  $k$ .
3. Définir la force élémentaire  $d\vec{F}(d \rightarrow g)$  à associer au point courant  $P$  de coordonnées  $(x, y, 0)$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
4. Déterminer les torseurs associés aux actions mécaniques exercées par  $d$  sur  $g$  pour chacune des quatre arêtes du cadre.
5. Déterminer le torseur des actions mécaniques transmissibles  $\mathcal{F}(d \rightarrow g)$ .

### 5.5 Frein de bicyclette

On s'intéresse au contact entre un patin de frein et la jante d'une roue arrière d'une bicyclette lors de la phase de freinage. La figure ci-après localise le patin de frein par rapport au cadre et à la roue de la bicyclette.

1. La roue arrière est repérée 2. Elle est assimilée à un disque de centre  $C$ . On lui associe un repère  $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $(C, \vec{x}_2)$  l'axe de révolution du disque.
  2. Le cadre de la bicyclette est repéré 3. Il est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_2)$  avec la roue 2.
  3. Le patin de frein 4 est supposé à chaque instant immobile par rapport au cadre 3 et en contact avec la jante de roue 2. Ses dimensions sont suffisamment petites pour que le contact avec la jante soit assimilable à un point  $P$ . Le coefficient de frottement correspondant est noté  $f$ .
- On souhaite modéliser l'action mécanique du patin 4 sur la roue 2 lors de la phase de freinage.
1. Tracer sur une même figure le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/4)$  et les composantes normale et tangentielle de la force  $\vec{F}(4 \rightarrow 2)$ .



Un des deux patins de frein.

2. En l'absence d'effort normal de freinage, que vaut la composante tangentielle ?
3. Un dispositif de freinage comporte deux patins pour une roue, un patin droit  $4d$  et un patin gauche  $4g$ . Que peut-on appeler le couple de freinage ?

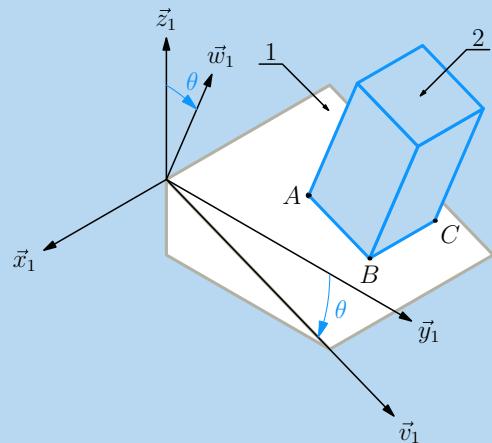
### 5.6 Tapis roulant

On s'intéresse à un tapis roulant lisse déplaçant des colis au sein d'une entreprise :

- La verticale ascendante du lieu est orientée par un vecteur  $\vec{z}_1$ , et on pose un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- Le tapis est assimilable à un plan :
  - horizontal lors des déplacements usuels ;
  - incliné par rapport à l'horizontal lors d'un changement d'étage par exemple. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{w}_1)$  et on pose l'angle  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{w}_1)$ .

Le déplacement du tapis roulant par rapport au sol est assimilable au niveau d'un colis transporté à une translation rectiligne suivant  $\vec{v}_1$ .

- Un colis est assimilé à un parallélépipède rectangle homogène de centre de masse  $G$  le centre géométrique de la forme. Il est supposé de base carrée  $(ABCD)$  de longueur d'arête  $2b$  et de hauteur  $2h$ . Le colis est posi-



Un colis sur un tapis roulant lisse incliné.

tionné sur le tapis roulant de telle sorte que l'arête  $\overrightarrow{AB}$  restent colinéaire à  $\vec{v}_1$  au cours du temps.

- Les colis restent immobiles par rapport au tapis, et le contact est caractérisé par un coefficient de frottement noté  $f$ .

D'un point de vue cinématique, le tapis se déplace par rapport au sol à une vitesse uniforme.

Du point de vue des actions mécaniques, le colis est soumis à l'action de la pesanteur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  et à l'action du tapis  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ . On admet pour cet exercice les deux propositions issues des lois de l'équilibre exposées au chapitre suivant :

- si le colis est constaté immobile par rapport au tapis, alors  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  ;
- si  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) + \mathcal{F}(p \rightarrow 2) \neq \mathcal{O}$ , alors le colis se met en mouvement par rapport au tapis.

Par ailleurs et pour simplifier les représentations, on suppose que la distribution des actions mécaniques est la même dans tous les plans de normale  $\vec{x}_1$ .

1. Modéliser le contact entre un des colis et le tapis roulant, puis proposer la forme du torseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf)$  des actions

mécaniques transmissibles par le contact supposé sans frottement.

2. On suppose le tapis dans le plan horizontal, donc l'angle  $\theta$  nul. Proposer et dessiner deux répartitions de pression possibles au contact de 2 sur 1, en faisant apparaître les composantes normales et tangentielles dues au frottement.

On suppose pour les questions suivantes le tapis incliné.

3. L'équilibre est-il possible en négligeant le phénomène de frottement ?

4. On constate le colis immobile par rapport au tapis. Représenter un colis sur un tapis incliné dans le plan  $(\vec{y}_1, \vec{z}_1)$  en choisissant un angle  $\theta$  positif et représenter l'action du tapis sur le colis.

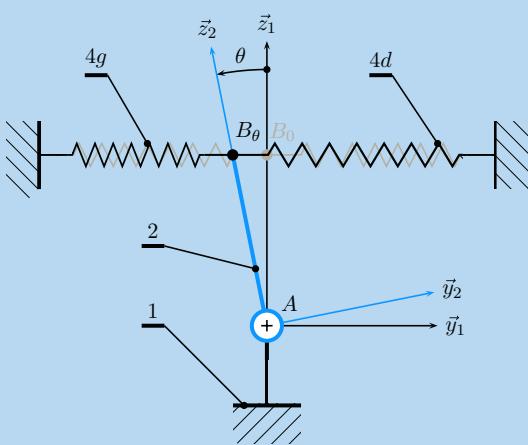
5. Y a-t-il un angle d'inclinaison du tapis au-delà duquel le colis glisse ? Expliquer de manière qualitative pourquoi on peut raisonner sur la résultante.

6. En chaque point de contact, la composante normale de l'action du tapis sur le colis est nécessairement suivant  $+\vec{w}_1$ . En étudiant le signe de  $\tilde{M}(A, 1 \rightarrow 2). \vec{x}_1$ , déterminer les conditions sur les dimensions  $b$  et  $h$  pour qu'il n'y ait pas basculement du colis.

## Exercices d'approfondissement

### 5.7 Dispositif de rappel à deux ressorts

On considère le dispositif de rappel à deux ressorts proposé sur la figure (ci-dessous). Il est constitué :



Dispositif de rappel à deux ressorts.

– d'un bâti 1 auquel on associe le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;  
– d'un balancier 2 en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti. On lui associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de conserver  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On définit également le point  $B$  par  $\overrightarrow{AB} = h\vec{z}_2$  ;

– de deux ressorts identiques  $4g$  et  $4d$ , de longueur à vide  $L_0$  et de raideur  $k$ , accrochés de part et d'autre du point  $B$  suivant  $\vec{y}_1$ . Au repos, les ressorts sont en extension à la même longueur  $L$ .

Pour tout cet exercice, on fait l'hypothèse que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du temps.

1. En utilisant une approximation à justifier, exprimer le déplacement du point  $B$  lors d'une toute petite rotation de 2 par rapport à 1.

2. Définir les forces élémentaires  $\vec{F}(4g \rightarrow 2)$  et  $\vec{F}(4d \rightarrow 2)$ .

3. Définir la force de rappel due aux deux ressorts  $\vec{F}(4 \rightarrow 2)$ .

4. En déduire alors l'expression du torseur  $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2)$ .  
 5. Calculer la composante scalaire du moment au point  $A$   $\vec{x}_2, \vec{M}(A, 4 \rightarrow 2)$ .

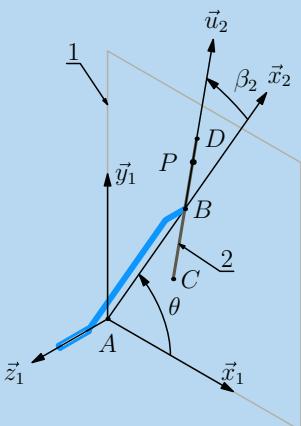
### 5.8 Essuie-glace

On s'intéresse au contact d'un balai d'essuie-glace sur un pare-brise :

- le pare-brise repéré 1 est modélisé par un plan de normale nommée  $\vec{z}_1$  et on lui associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- l'essuie-glace repéré 2 se décrit en deux parties :
  - le bras est assimilé à un segment  $[AB]$  en rotation par rapport au pare-brise autour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$  caractérisée par la vitesse  $\omega_{21} > 0$ . On lui associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\overrightarrow{AB} = R\vec{x}_2$  et  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .
  - le balai est assimilé au segment  $[CD]$  en contact avec le pare-brise. On lui associe le repère  $(B, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_2)$  et on pose  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} = L\vec{u}_2$  et  $\beta_2 = (\vec{x}_2, \vec{u}_2)$ .

On considère le point courant  $P$  du balai caractérisé par  $\overrightarrow{BP} = x \vec{u}_2$ .

Le contact pare-brise balai est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .



L'essuie-glace en situation.

On souhaite déterminer partiellement l'action du pare-brise sur l'essuie-glace.

1. Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de l'essuie-glace par rapport au pare-brise au point  $P$ .
2. On suppose que la répartition linéaire d'effort normal de 1 sur 2 est constante sur le segment  $[CD]$  et notée  $q$ . Représenter sur un même schéma la vitesse de glissement  $\vec{V}(P, 2/1)$  et les composantes  $d\vec{N}_{12}$  et  $d\vec{T}_{12}$  de la force élémentaire  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$  au point  $P$ .

3. Determiner une forme intégrale de l'expression  $\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2), \vec{z}_1$ , quantité scalaire que l'on pourrait appeler couple de freinage de l'essuie-glace par le pare-brise.

### 5.9 Couple transmissible par un embrayage

On considère le mécanisme d'embrayage schématisé sur la figure suivante.

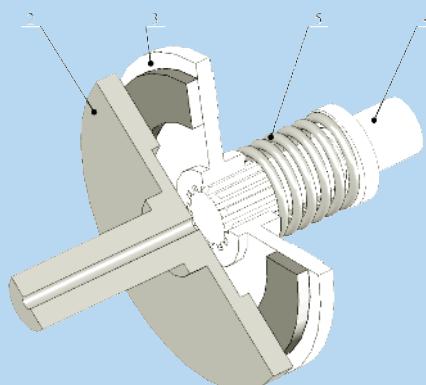
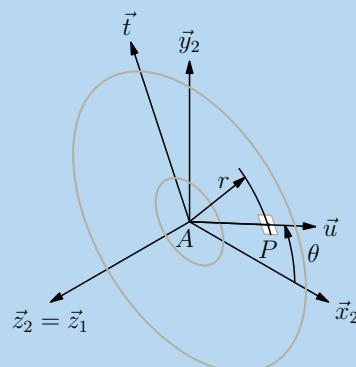


Schéma de principe d'un embrayage.



Paramétrage.

- Il est constitué de cinq ensembles distincts :
- un bâti 1 non représenté auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
  - un arbre 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1, dont la rotation possible (4/1) est générée dans le sens positif par un moteur ;
  - le disque d'embrayage 3, de rayon intérieur  $R_i$ , de rayon extérieur  $R_e$ , et en liaison glissière de direction  $\vec{z}_1$  avec l'arbre 4 ;
  - un plateau récepteur 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  ;
  - un ressort 5 prend appui sur l'arbre 4 pour plaquer le disque d'embrayage 3 sur le plateau 2.
- Le coefficient de frottement du couple de matériaux en contact est noté  $f$  ;

- Le point courant  $P$  de la surface de contact du plateau 2 est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta, 0)$  dans le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme, et proposer un modèle de liaison pour le contact entre le disque 3 et l'arbre récepteur 2.
2. En l'absence de frottement, le disque 3 peut-il entraîner en rotation le plateau 2 par rapport au bâti 1 ? Déterminer dans ce cas la direction éventuelle du vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/3)$ .

3. En tenant compte du phénomène de frottement, proposer un modèle pour l'action mécanique élémentaire  $d\vec{F}(3 \rightarrow 2)$  au point courant  $P$ .

4. En supposant la pression de contact normale  $p$  uniforme au contact entre le disque 3 et la plateau 3, déterminer le torseur des actions mécaniques  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$ .

5. Soit  $F$  l'effort de poussée du disque 3 sur le plateau 2. Exprimer le couple maximale  $C_{MAX}$  transmissible par l'embrayage en fonction de cet effort  $F$ .

# Solutions des exercices

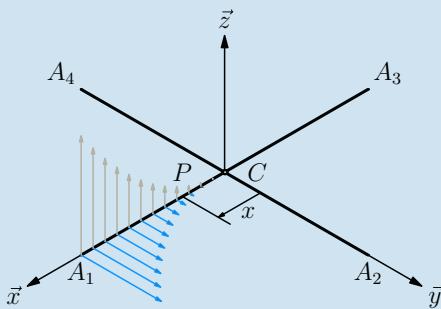
## Exercices d'application

### 5.1 Pales d'hélicoptère

1. Une force linéaire est une force par unité de longueur, donc en Newton par mètre [ $Nm^{-1}$ ]. Le terme  $(\omega x)^2$  s'exprime en mètre carré par seconde carré [ $m^2 s^{-2}$ ]. Un Newton est égal à un kilogramme mètre par seconde carrée. On en déduit l'unité des coefficients  $k_y$  et  $k_z$  en kilogramme par mètre carré.

$$k_y \text{ et } k_z \text{ en } [kg \cdot m^{-2}]$$

2. Soit  $P$  le point courant d'abscisse  $x$  sur la pale  $p_1$  et  $dx$  l'élément différentiel de longueur.



Répartition de la force linéaire sur la pale  $CA_1$ .

La force élémentaire au point  $P$  s'exprime par

$$d\vec{F}(a \rightarrow p_1) = (\omega x)^2 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) dx$$

On choisit de calculer les éléments de réduction du torseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  au point  $C$  :

– pour la résultante

$$\begin{aligned} \vec{R}(a \rightarrow p_1) &= \int_0^L d\vec{F}(a \rightarrow p_1) \\ &= \int_0^L x^2 dx \omega^2 k_y \vec{y} + \int_0^L x^2 dx \omega^2 k_z \vec{z} \\ &= \omega^2 \frac{L^3}{3} (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) \end{aligned}$$

– pour le moment au point  $C$

$$\begin{aligned} \vec{M}(C, a \rightarrow p_1) &= \int_0^L \vec{CP} \wedge d\vec{F}(a \rightarrow p_1) \\ &= \int_0^L x^3 dx \omega^2 k_y (\vec{x} \wedge \vec{y}) \\ &\quad + \int_0^L x^3 dx \omega^2 k_z (\vec{x} \wedge \vec{z}) \\ &= \omega^2 \frac{L^4}{4} (k_y \vec{z} - k_z \vec{y}) \end{aligned}$$

En définitive, le torseur de l'action de l'air sur la pale  $p_1$  est

$$\mathcal{F}(a \rightarrow p_1) = C \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \omega^2 L^3 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) \\ \frac{1}{4} \omega^2 L^4 (k_y \vec{z} - k_z \vec{y}) \end{array} \right.$$

3. On calcule l'automoment de ce torseur  $\vec{R}(a \rightarrow p_1) \cdot \vec{M}(C, a \rightarrow p_1)$  et on le trouve nul. Comme la résultante n'est pas nulle, ce torseur est un glisseur.

Soit  $B_1$  un point de la pale. On pose  $\vec{CB}_1 = x \vec{x}$ . Ce point  $B_1$  appartient à l'axe central si le moment  $\vec{M}(B_1, a \rightarrow p_1)$  est nul : le calcul débute en utilisant la formule de changement de points

$$\vec{M}(B_1, a \rightarrow p_1) = \vec{M}(C, a \rightarrow p_1) + \vec{R}(a \rightarrow p_1) \wedge \vec{CB}_1$$

Après substitution, on recherche l'existence d'une solution en  $x$  pour l'équation

$$\frac{x}{3} \vec{x} \wedge (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) = \frac{L}{4} (k_y \vec{z} - k_z \vec{y})$$

Une solution apparaît, le point  $B_1$  existe et se situe au trois quart de la pale

$$\vec{CB}_1 = \frac{3L}{4} \vec{x}$$

4. On pose comme composantes :

$$- \text{ pour la portance } F_P = \frac{1}{3} \omega^2 L^3 k_z$$

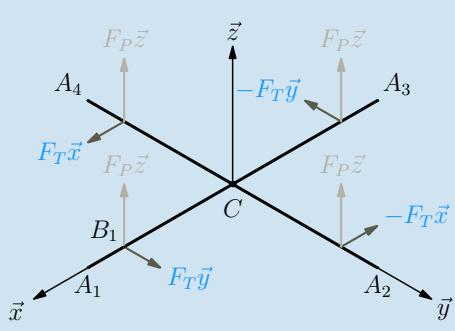
$$- \text{ pour la traînée } F_T = \frac{1}{3} \omega^2 L^3 k_y.$$

Le glisseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  s'écrit alors simplement

$$\mathcal{F}(a \rightarrow p_1) = \begin{matrix} F_T \vec{y} + F_P \vec{z} \\ B_1 \{ \vec{0} \} \end{matrix}$$

Un glisseur se représente de manière commode en dessinant le vecteur résultante en un point de l'axe central.

La figure suivante propose les composantes de portance et de traînée pour chacune des pales.



Les composantes de portance et de traînée.

**5.** Le torseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow R)$  se détermine en faisant la somme des actions mécaniques sur chacune des quatre pales

$$\mathcal{F}(a \rightarrow R) = \sum_{i=0}^4 \mathcal{F}(a \rightarrow p_i)$$

On calcule les éléments de réduction au point  $C$  :

- pour la résultante, les composantes de traînée s'annulent deux à deux et il vient alors

$$\vec{R}(a \rightarrow R) = 4F_P \vec{z}$$

- pour le moment au point  $C$ , les produits vectorielles contenant les termes de portance s'annulent deux à deux et on obtient

$$\vec{M}(C, a \rightarrow R) = 4F_T \frac{3L}{4} \vec{z}$$

On peut donc décrire l'action de l'air sur le rotor comme somme de deux termes

$$\mathcal{F}(a \rightarrow R) = C \left\{ \begin{array}{l} 4F_P \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ 3F_T L \vec{z} \end{array} \right.$$

Ces deux termes correspondent aux deux phénomènes constatés :

- la portance se modélise par un glisseur de résultante  $4F_P \vec{z} = \frac{4}{3}\omega^2 L^3 k_z \vec{z}$  et d'axe central passant par  $C$  ;
- la traînée se modélise par un couple de moment  $3F_T L \vec{z} = \omega^2 L^4 k_x \vec{z}$ .

Le couple de traînée induit la présence sur les hélicoptères d'un rotor secondaire d'axe horizontal généralement placé à l'arrière ou de deux rotors identiques tournant en sens contraire.

**6.** La traînée d'un fluide sur un objet s'oppose au déplacement de cet objet par rapport au fluide. Le couple de traînée de l'air sur le rotor est positif, on en déduit que le rotor tourne par rapport à la cabine dans le sens négatif.

## 5.2

1. On considère autour du point courant  $P$  la surface élémentaire  $dS$

$$dS = Rd\theta dL$$

2. Au point courant  $P$  de position  $\theta$ , la normale sortante au tube est dirigée suivant  $-\vec{u}$ . On en déduit l'expression de la force élémentaire

$$d\vec{F}(f \rightarrow t) = pRd\theta dL \vec{u}$$

Cette force élémentaire est bien homogène à des Newton [ $N$ ].

3. Déterminons les éléments de réduction du torseur au centre  $C$  de la section droite.

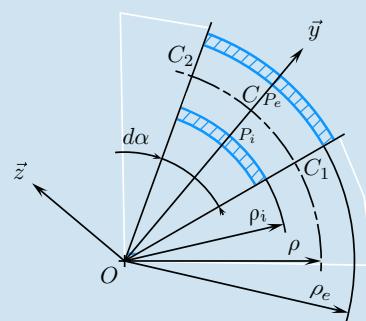
- pour la résultante, on constate que les forces élémentaires pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  sont opposées. On en déduit que la résultante  $\vec{R}(f \rightarrow p)$  est nulle.
- pour le moment calculé au point  $C$ , on constate la nullité de tous les produits vectoriels  $\vec{CP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow t)$ , donc du moment  $\vec{M}(C, f \rightarrow p)$ .

Le torseur des actions mécaniques du fluide sur le tube est le torseur nul

$$\mathcal{F}(f \rightarrow t) = \mathcal{O}$$

**4.** Le résultat précédent semble surprenant, mais il correspond bien au point de vue global, ce dernier ne décrivant pas les particularités locales. Il est nécessaire d'étudier l'équilibre d'un petit arc de tube pour se rendre compte que le tube ne résisterait pas à une pression infinie.

**5.** Lorsque le tuyau se courbe, l'épaisseur  $dL$  d'une portion de tube n'est plus la même sur toute la section. La figure ci-dessous schématisé une portion de tuyau courbé entre deux sections droites de centres  $C_1$  et  $C_2$ .



Forces élémentaires au niveau d'un brin courbé.

Les points  $P_i$  et  $P_e$  sont diamétralement opposés et les forces élémentaires ne s'annulent plus :

- au point  $P_i$  :  $d\vec{F}(f_i \rightarrow t) = -p\rho_i d\alpha R d\theta \vec{y}$
- au point  $P_e$  :  $d\vec{F}(f_e \rightarrow t) = +p\rho_e d\alpha R d\theta \vec{y}$

La somme de ces deux forces élémentaires donne

$$d\vec{F}(\{f_i, f_e\} \rightarrow t) = p(\rho_e - \rho_i) R d\theta d\alpha \vec{y}$$

Le fluide pousse sur le tuyau suivant  $\vec{y}$ , ce qui tend à redresser le tuyau.

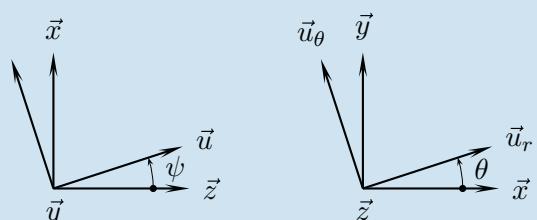
## 5.3

1. En substituant aux vecteurs  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  leurs expression respectives  $B\vec{u}$  et  $Rd\theta \vec{u}_\theta$ , on obtient

$$d\vec{F}(b \rightarrow s) = IBRd\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}$$

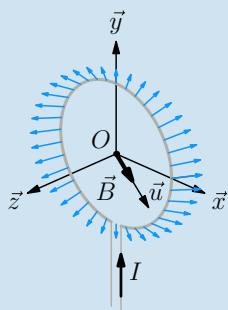
Le produit vectoriel  $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}$  s'évalue à partir des figures suivantes de définitions des angles  $\psi$  et  $\theta$ . Les deux vecteurs n'apparaissent pas sur une même figure : on choisit alors d'exprimer  $\vec{u} = \cos \psi \vec{z} + \sin \psi \vec{x}$  pour en déduire

$$d\vec{F}(b \rightarrow s) = IBRd\theta (\cos \psi \vec{u}_r - \sin \psi \cos \theta \vec{z})$$



Figures de définitions des angles  $\psi$  et  $\theta$ .

La figure ci-dessous représente la distribution de la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$  le long de la spire.



Représentation de la distribution de la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$ .

2. Le torseur d'actions mécaniques exercée par le champ magnétique sur la spire s'évalue par intégration :

– pour la résultante :

$$\vec{R}(b \rightarrow s) = \int_{-\pi}^{\pi} IBR (\cos \psi \vec{u}_r - \sin \psi \cos \theta \vec{z}) d\theta$$

Le vecteur  $\vec{u}_r$  dépend de l'angle  $\theta$ . Il est alors nécessaire de le décomposer en  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$  pour pouvoir calculer l'intégrale. C'est ainsi que l'on trouve

$$\vec{R}(b \rightarrow s) = \vec{0}$$

– pour le moment calculé au point  $O$ , on commence par évaluer le produit vectoriel  $\vec{OP} \wedge d\vec{F}(b \rightarrow s)$

$$\begin{aligned} R\vec{u}_r \wedge IBR (\cos \psi \vec{u}_r - \sin \psi \cos \theta \vec{z}) d\theta \\ = IBR^2 \sin \psi \cos \theta \vec{u}_\theta d\theta \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{u}_\theta$  dépend de l'angle  $\theta$ . Il est alors nécessaire de le décomposer en  $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{x}$  pour pouvoir calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, b \rightarrow s) &= \int_{-\pi}^{\pi} IBR^2 \\ &\quad \sin \psi (\cos^2 \theta \vec{y} - \cos \theta \sin \theta \vec{x}) d\theta \end{aligned}$$

On obtient ainsi tout calcul fait

$$\mathcal{F}(b \rightarrow s) = O \left\{ \vec{0} \right. \\ \left. B I \pi R^2 \sin \psi \vec{y} \right\}$$

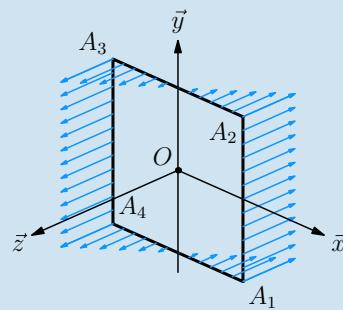
#### Remarque

On définit le moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  d'une spire par l'expression  $\vec{M} = IS\vec{z}$ , avec  $S$  l'aire de la surface de la spire. Le résultat trouvé s'exploite alors pour retrouver l'expression vue en cours de physique.

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, b \rightarrow s) &= \pi R^2 IB \sin \psi \vec{y} \\ &= \pi R^2 I \vec{z} \wedge B \vec{u} \\ &= \vec{M} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

#### 5.4

1. Représentation de la distribution de force linéaire sur le cadre.



2. Une force linéaire s'exprime en Newton par mètre [ $Nm^{-1}$ ], la constante  $k$  est donc homogène à une pression et son unité est le Pascal [ $Pa$ ].

3. On parcourt les quatre segments pour décrire les forces élémentaires correspondantes

– segment  $[A_1A_2]$  :

La force élémentaire est constante et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[12]} \rightarrow g) = -ka dy \vec{z}$$

– segment  $[A_2A_3]$  :

La force élémentaire dépend de l'abscisse  $x$  et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[23]} \rightarrow g) = -kx dx \vec{z}$$

– segment  $[A_3A_4]$  :

La force élémentaire est constante et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[34]} \rightarrow g) = ka dy \vec{z}$$

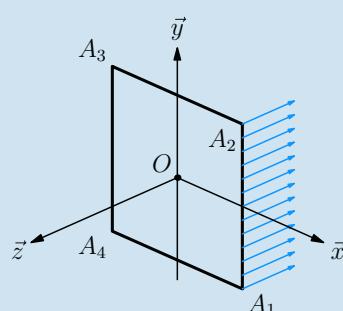
– segment  $[A_4A_1]$  :

La force élémentaire dépend de l'abscisse  $x$  et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[41]} \rightarrow g) = kx dx \vec{z}$$

4. En regardant la symétrie de la distribution des actions mécaniques élémentaires, seuls deux calculs sont à mener :

– segment  $[A_1A_2]$  :



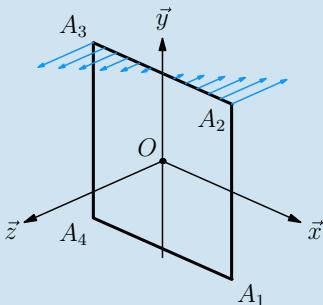
– pour la résultante

$$\vec{F}(d_{[12]} \rightarrow g) = \int_{-a}^a -ka dy \vec{z} = -2ka^2 \vec{z}$$

- pour le moment au point  $O$

$$\begin{aligned}\vec{M}(O, d_{[12]} \rightarrow g) &= \int_{-a}^a (a\vec{x} + y\vec{y}) \wedge -ka dy \vec{z} \\ &= ka^2 \int_{-a}^a dy \vec{y} - ka \int_{-a}^a y dy \vec{x} \\ &= 2ka^3 \vec{y}\end{aligned}$$

- segment  $[A_2 A_3]$  :



- pour la résultante

$$\vec{F}(d_{[23]} \rightarrow g) = \int_{-a}^a -kx dx \vec{z} = \vec{0}$$

- pour le moment au point  $O$

$$\begin{aligned}\vec{M}(O, d_{[23]} \rightarrow g) &= \int_{-a}^a (a\vec{y} + x\vec{x}) \wedge -kx dx \vec{z} \\ &= -ka \int_{-a}^a x dx \vec{x} + k \int_{-a}^a x^2 dx \vec{y} \\ &= \frac{2}{3}ka^3 \vec{y}\end{aligned}$$

- Le torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}(d \rightarrow g)$  s'obtient par somme des quatre torseurs trouvés

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(d \rightarrow g) &= \mathcal{F}(d_{[12]} \rightarrow g) + \mathcal{F}(d_{[23]} \rightarrow g) \\ &\quad + \mathcal{F}(d_{[34]} \rightarrow g) + \mathcal{F}(d_{[41]} \rightarrow g)\end{aligned}$$

Ce qui donne, tous calculs faits :

$$\mathcal{F}(d \rightarrow g) = O \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{16}{3}ka^3 \vec{y} \end{array} \right.$$

## 5.5

1. La normale au contact au point  $P$  est dirigée par le vecteur  $\vec{x}_2$  que l'on suppose orienté de la roue 2 vers le patin 4.

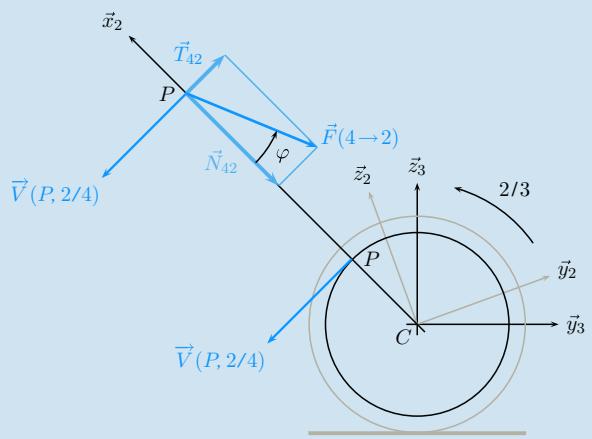
Le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/4)$  est dans le plan  $(\vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et orthogonal au rayon  $\vec{CP}$ . En effet :

- Le patin 4 est supposé immobile par rapport au cadre 3 : on en déduit l'égalité

$$\vec{V}(P, 2/4) = \vec{V}(P, 3/4)$$

- La roue 2 tourne par rapport au cadre 3 et on a

$$\vec{V}(P, 3/4) = \omega_{34} \vec{x}_2 \wedge \vec{CP}$$



Le plan contenant  $\vec{x}_2$  et  $\vec{V}(P, 2/4)$ .

On pose ainsi

$$\vec{F}(4 \rightarrow 2) = -N_{42} \vec{x}_2 + \vec{T}_{42}, \quad \text{avec } \frac{\|\vec{T}_{42}\|}{|N_{42}|} = f = \tan \varphi$$

2. En l'absence de composante normale, la composante tangentielle est nulle. La bicyclette n'est pas freinée, malgré le contact du patin sur la jante !

3. L'action du frein sur la roue est la somme des actions au niveau des deux patins

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \mathcal{F}(4g \rightarrow 2) + \mathcal{F}(4d \rightarrow 2)$$

On souhaite ralentir la rotation autorisée par la liaison pivot d'axe ( $C, \vec{x}_2$ ) entre la roue 2 et le cadre 3. On peut alors appeler couple de freinage la composante scalaire d'action mécanique du frein sur la roue suivant cette rotation, donc  $\vec{M}(C, 4 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2$

## 5.6

1. Le contact entre un colis et le tapis est modélisable par une liaison plane de normale  $\vec{w}_1$ , et en l'absence de frottement, le torseur des actions mécaniques transmissibles par le contact parfait est de la forme

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf) = \begin{cases} Z\vec{w}_1, \text{ avec } Z \geq 0 \\ \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2sf), \\ \text{tel que } \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2sf) \cdot \vec{w}_1 = 0 \end{cases}$$

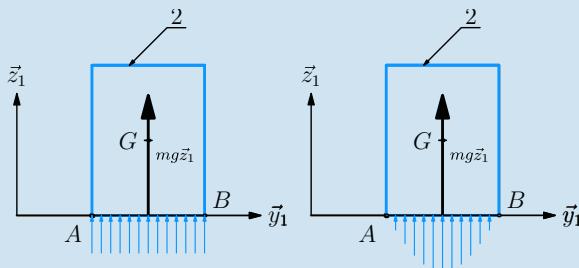
La résultante suivant  $+\vec{w}_1$  traduit la conservation du contact.

2. Le colis est immobile par rapport au tapis, on utilise alors l'égalité proposée par l'énoncé  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  et on en déduit

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = G \left\{ \begin{array}{l} mg \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Le tapis est horizontal, donc l'angle  $\theta$  est nul et  $\vec{w}_1 = \vec{z}_1$ . Le torseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$  trouvé est compatible avec la forme possible donnée par  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf)$ . Cette constatation est à mettre en corrélation avec le non glissement du colis en l'absence de frottement. Il n'y a pas de composante tangentielle d'action mécanique à poser.

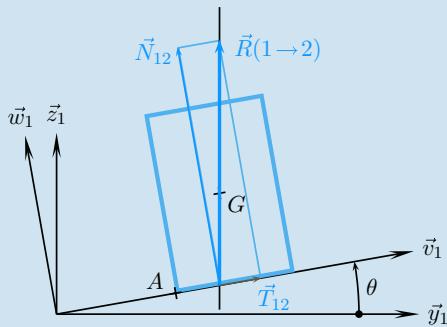
La figure ci-dessous propose deux parmi une infinité de répartitions de pression possibles.



Le tapis roulant est horizontal.

**3.** On considère le tapis incliné et le contact sans frottement. La somme des résultantes  $Z\vec{w}_1 - mg\vec{z}_1$  ne peut pas être nulle, le colis se met à glisser...

**4.** On considère le tapis incliné et on constate l'immobilité du colis par rapport au tapis. L'action mécanique  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$  est un glisseur dont l'axe central passe par le point  $G$ . On décompose sur la figure ci-dessous, la résultante suivant la normale et dans le plan tangent.



Un colis sur un tapis incliné.

**5.** Si le colis glisse par rapport au tapis, la composante tangentielle est en chaque point de contact proportionnelle à la composante normale, quelle que soit sa valeur. En sommant toutes les composantes normales et toutes les composantes tangentielles, cette proportionnalité se retrouve sur les composantes de la résultante. En généralisant ce raisonnement à la limite du glissement, on applique alors le modèle local à la résultante du glisseur. On pose

$$\begin{aligned}\vec{R}(1 \rightarrow 2) &= mg\vec{z}_1 \\ &= mg \cos \theta \vec{w}_1 + mg \sin \theta \vec{v}_1 \\ &= N_{12} \vec{w}_1 + T_{12} \vec{v}_1 \\ &= \vec{N}_{12} + \vec{T}_{12}\end{aligned}$$

La condition de non glissement est alors

$$|\tan \theta| \leq f$$

Il est à remarquer que le raisonnement ne peut pas être mené à partir du cas général de l'adhérence, car on n'a aucune idée de la distribution des actions mécaniques locales.

**6.** Le moment en  $A$  des actions mécaniques de 1 sur 2 suivant  $\vec{x}_1$  s'écrit simplement

$$\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{R}(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{GA}) \cdot \vec{x}_1$$

Cette composante scalaire s'annule si  $A$  est sur l'axe central du glisseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ .

Cette condition est obtenue lorsque le rapport  $b/h$  est égal à la tangente de l'angle  $\theta$ . La condition de non-basculement s'exprime alors

$$|\tan \theta| \leq \frac{b}{h}$$

Comment raisonner finalement ? On compare tout d'abord les valeurs du rapport  $\frac{b}{h}$  et du coefficient de frottement  $f$  :

- si  $\frac{b}{h} < f$ , le premier phénomène à intervenir est le basculement lorsque l'angle  $\theta$  augmente ;
- si  $f < \frac{b}{h}$ , le premier phénomène qui se manifeste est le glissement.

## 5.7

**1.** En supposant l'angle  $\theta$  toujours petit au cours du temps, on considère que le point  $B_\theta$  se déplace sur la droite  $(B_0, \vec{y}_1)$  d'une longueur  $h\theta$ , approximation de  $h \tan \theta$ .

**2.** Pour un ressort, la force de rappel est proportionnelle à la différence entre la longueur courante et la longueur à vide.

- pour le ressort 4g, l'allongement est orienté par  $+\vec{y}_1$  et la longueur courante vaut  $L - h\theta$  ;

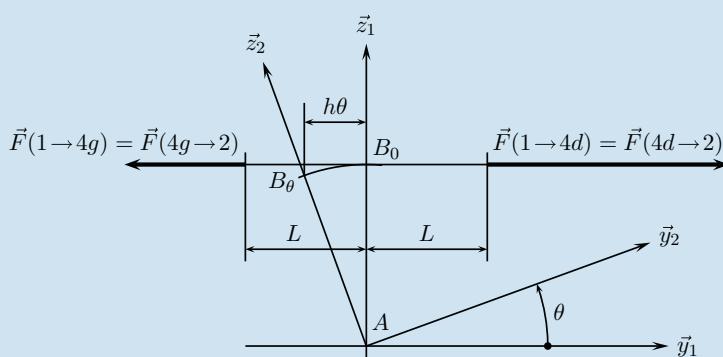


Schéma de mise en situation.

- pour le ressort 4d, l'allongement est orienté par  $-\vec{y}_1$  et la longueur courante vaut  $L + h\theta$ .

Ces réflexions préliminaires permettent de poser les deux expressions des forces de rappel

$$\begin{aligned}\vec{F}(4g \rightarrow 2) &= -k((L - h\theta) - L_0)\vec{y}_1 \\ \vec{F}(4d \rightarrow 2) &= -k((L + h\theta) - L_0)(-\vec{y}_1)\end{aligned}$$

**3.** On en déduit l'expression de la force de rappel due aux deux ressorts

$$\vec{F}(4 \rightarrow 2) = \vec{F}(4g \rightarrow 2) + \vec{F}(4d \rightarrow 2) = 2kh\theta \vec{y}_1$$

**4.** Le torseur des actions mécaniques de 4 sur 2 est alors un glisseur d'expression

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} 2kh\theta \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

**5.** Par changement de point sur le champ des vecteurs moments, on trouve la valeur de la composante recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{M}(A, 4 \rightarrow 2) = -2kh^2\theta$$

## 5.8

**1.** La vitesse de glissement au point  $P$  se détermine par changement de points sur le mouvement (2/1)

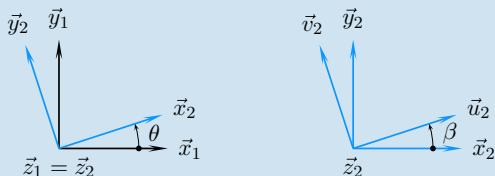
$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AP},$$

$$\text{avec } \vec{AP} = R\vec{x}_2 + x\vec{u}_2$$

Les deux produits vectoriels sont immédiats avec les figures de définition des angles et on obtient

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} (R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)$$

Le vecteur  $R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2$  est bien sûr orthogonal au rayon  $\vec{AP}$ .



**2.** Par application du cours, on pose comme expression pour la force élémentaire au point  $P$

$$d\vec{F}(1 \rightarrow 2) = dN_{12} \vec{z}_1 + d\vec{T}_{12},$$

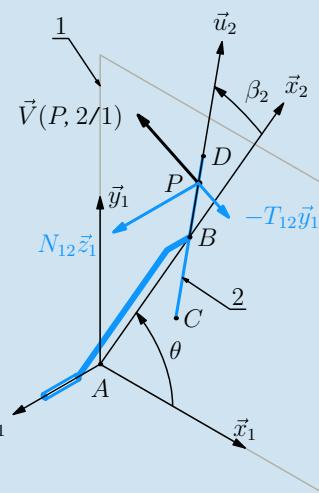
$$\text{avec } \begin{cases} d\vec{T}_{12} \wedge \vec{V}(P, 2/1) = \vec{0} \\ d\vec{T}_{12} \cdot \vec{V}(P, 2/1) \leqslant 0 \\ \frac{\|d\vec{T}_{12}\|}{|dN_{12}|} = f \end{cases}$$

La figure ci-contre présente les différents vecteurs.

**3.** On exploite la connaissance du vecteur  $\vec{V}(P, 2/1)$  orienté par le vecteur  $R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2$  et on pose

$$d\vec{F}(1 \rightarrow 2) = qdx \vec{z}_1 - k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2), \text{ avec } k \geqslant 0$$

Le coefficient  $k$  vérifie  $k\|R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2\| = f q dx$ .



Composantes d'actions mécaniques au point  $P$ .

Pour le calcul du couple de freinage, il est judicieux de commencer par le produit scalaire pour constater

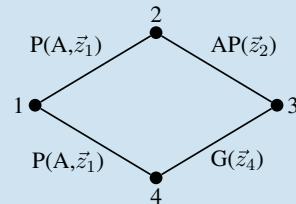
$$\begin{aligned}d\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 &= ((R\vec{x}_2 + x\vec{u}_2) \wedge -k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)) \cdot \vec{z}_1 \\ &= -k(R^2 + 2Rx \cos \beta + x^2) \\ &= -k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)^2 \\ &= -k\|R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2\|^2\end{aligned}$$

On en déduit une forme intégrale de la composante suivant  $\vec{z}_1$  du moment en A de l'action mécanique du pare-brise sur l'essieu-glace

$$\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = -qf \int_{-L}^L \sqrt{R^2 + 2Rx \cos \beta + x^2} dx$$

## 5.9

**1.** Le ressort n'est pas un solide indéformable et n'apparaît donc pas sur le graphe des liaisons



P(Dte)	:	Pivot d'axe (Dte)
AP(Vec)	:	Appui Plan de normale (Vec)
G(Vec)	:	Glissière de direction (Vec)

Graphe des liaisons de l'embrayage.

La surface de contact entre le disque d'embrayage 3 est le plateau 2 est un plan de normale  $\vec{z}_2$ . On propose alors comme modèle de comportement cinématique une liaison plane de même normale.

**2.** Une étude cinématique rapide est nécessaire. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides et six inconnues cinématiques que l'on pose en écrivant les quatre torseurs cinématiques.

$$\mathcal{V}(4/1) = A \begin{cases} \omega_{41}\vec{z}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{V}(3/4) = \begin{cases} \vec{0} \\ V_{34}\vec{z}_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega_{21}\vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{V}(2/3) = \begin{cases} \omega_{23}\vec{z}_2 \\ \vec{V}(P,2/3), \text{ avec } \vec{V}(P,2/3).\vec{z}_2 = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à la composition des mouvements sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 4 – 1 :

- l'équation de composition des vitesses au point A scalaire  $\vec{z}_1$  donne immédiatement  $V_{34} = 0$  ;
- cette même composition des vitesses en A donne alors  $\vec{V}(A,2/3) = \vec{0}$  ;
- la composition des rotations scalaire  $\vec{z}_1$  donne immédiatement  $\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{41}$  ;
- les deux autres équations scalaires de la composition des rotations donnent des équations  $0 = 0$ .

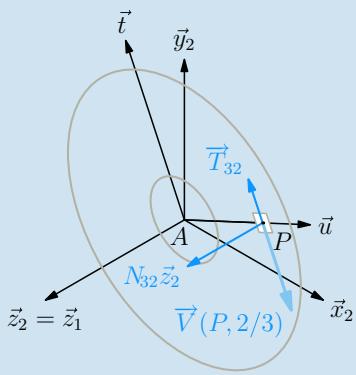
Sur les six équations scalaires issues de la fermeture cinématique, seules quatre sont utiles pour trouver trois inconnues scalaires nulles et une quatrième en fonction de deux paramètres, par exemple  $\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{41}$ . La solution  $\omega_{21} = 0$  est donc possible, le plateau 2 n'est pas entraîné par l'arbre moteur 4. La formule de changement de point sur le mouvement (2/3) donne

$$\vec{V}(P,2/3) = \omega_{23}\vec{z}_2 \wedge \vec{AP}, \text{ avec } \vec{AP} = r\vec{u}$$

On en déduit  $\vec{V}(P,2/3) = r\omega_{23}\vec{t}$ , et si on suppose le plateau 2 immobile par rapport au bâti 1, on obtient

$$\vec{V}(P,2/3) = -r\omega_{41}\vec{t}, \text{ avec } \omega_{41} \geq 0$$

**3.** Le vecteur  $\vec{z}_2$  correspond à une normale dirigée de 3 vers 2. On pose ainsi une composante normale  $N_{32}$  suivant  $\vec{z}_2$ , une composante tangentielle  $\vec{T}_{32}$  opposée à la vitesse de glissement  $\vec{V}(P,2/3)$  qui apparaîtrait en l'absence de frottement



Les composantes de la force élémentaire au point courant P.

On connaît ici la direction de la composante tangentielle et on pose alors

$$d\vec{F}(3 \rightarrow 2) = N_{32}\vec{z}_2 + T_{32}\vec{t}, \text{ avec } \left| \frac{T_{32}}{N_{32}} \right| \leq f$$

On suppose la pression de contact normale  $p$  uniforme sur tout le disque. En conséquence, on suppose les deux composantes  $N_{32}$  et  $T_{32}$  uniformes et on pose :

$$\begin{cases} N_{32} = pdS, \text{ avec } dS = rd\theta dr \\ T_{32} = qdS, \text{ avec } |q| \leq f|p| \end{cases}$$

On choisit de calculer les éléments de réduction du torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$  au point A :

- pour la résultante, on constate que les forces élémentaires pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  ont leurs composantes tangentielles qui s'annulent et il reste donc

$$\begin{aligned} \vec{R}(3 \rightarrow 2) &= \int_S d\vec{F}(3 \rightarrow 2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} prdrd\theta \vec{z}_2 \\ &= p\pi(R_e^2 - R_i^2) \vec{z}_2 \end{aligned}$$

– pour le moment calculé au point A, on pose  $\vec{AP} = r\vec{u}$  et on constate que les produits vectoriels  $\vec{u} \wedge \vec{z}_2$  pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  s'annulent, que le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{t} = \vec{z}_2$  est valable pour tous les points et il reste alors

$$\begin{aligned} \vec{M}(A,3 \rightarrow 2) &= \int_S \vec{AP} \wedge d\vec{F}(3 \rightarrow 2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} qr^2 drd\theta \vec{z}_2 \\ &= \frac{2}{3}q\pi(R_e^3 - R_i^3) \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Le torseur d'actions mécaniques transmissibles du disque 3 sur le plateau 2 est finalement

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = A \begin{cases} p\pi(R_e^2 - R_i^2) \vec{z}_2 \\ \frac{2}{3}q\pi(R_e^3 - R_i^3) \vec{z}_2, \text{ avec } \left| \frac{q}{p} \right| \leq f \end{cases}$$

**5.** Il est utile de comparer le torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$  trouvé à la question précédente avec le torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2sf)$  des actions mécaniques transmissibles par le même contact plan sans frottement :

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2sf) = \begin{cases} F\vec{z}_2, \text{ avec } F \geq 0 \\ \vec{M}(A,3 \rightarrow 2sf), \end{cases}$$

$$\text{avec } \vec{M}(A,3 \rightarrow 2sf).\vec{z}_2 = 0$$

– les deux résultantes sont compatibles, et on pose ainsi

$$F = p\pi(R_e^2 - R_i^2)$$

– concernant le moment au point A, les deux composantes scalaires transmissibles par le contact parfait sont ici nulles et apparaît la composante scalaire supplémentaire suivant  $\vec{z}_2$  due au phénomène de frottement. On pose  $C$  le couple transmissible par l'embrayage et on l'exprime en fonction de l'effort de poussée  $F$

$$C = \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} F \frac{q}{p}, \text{ avec } \left| \frac{q}{p} \right| \leq f$$

Le couple maximale transmissible par l'embrayage pour un effort de poussée  $F$  donné est celui obtenu à la limite du glissement, lorsque  $q = fp$  :

$$C_{MAX} = fF \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$



# Mécanique

## Les lois de l'équilibre

CHAPITRE **6**

### Plan

<b>6.1</b>	Théorèmes de l'équilibre	149
<b>6.2</b>	Méthodologie de résolution	152
<b>6.3</b>	Équilibres particuliers	157
	Exercices d'application	164
	Exercices d'approfondissement	167
	Solutions des exercices	171

### Introduction

Évaluer la puissance transmise par un mécanisme, dimensionner et choisir un composant, calculer les déformations induites par un chargement... Autant d'activités de bureau d'étude qui nécessitent la détermination d'actions mécaniques.

Ce chapitre expose les théorèmes utilisables en *statique*, lorsque l'on constate des situations d'équilibres, et pose bases, principes et méthodes pour une résolution efficace des problèmes de mécanique à partir d'un exemple très détaillé.

### Prérequis

- Cinématique des solides indéformables ;
- Concept d'actions mécaniques, exposé au chapitre précédent ;
- Notion de résolution des systèmes d'équations linéaires.

### Objectifs

- Comprendre un équilibre comme un mouvement particulier ;
- Différencier actions mécaniques extérieures et actions mécaniques intérieures ;
- Acquérir une méthode efficace de résolution des problèmes.

## 6.1 Théorèmes de l'équilibre

### Notation

Pour tout ce chapitre :

- $S$  est un solide indéformable ;
- $\Sigma$  est un système matériel quelconque ;
- $Rg$  représente un référentiel galiléen.

## 6.1.1

# Équilibre – Statique

### Définition

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

Dans le cas d'un système matériel quelconque, un mouvement nul se traduit par un champ de vecteurs vitesses nul.

Dans le cas d'un solide indéformable, ce mouvement particulier est caractérisé par un torseur cinématique nul.

### Définition

On appelle **statique** la branche de la mécanique qui s'intéresse aux états d'équilibre.

Le terme « statique des solides » est souvent employé, mais le lecteur est alors détourné de ce qui doit être sa seule préoccupation du moment, à savoir l'identification de mouvements. Ce n'est qu'en abordant ultérieurement la résistance des matériaux ou la fabrication d'une pièce qu'un solide est abordé avec profit hors de son contexte cinématique.

## 6.1.2



Pour le spécialiste des mécanismes, un repère lié à la terre convient souvent comme repère galiléen.

# Repère galiléen

Un **repère galiléen** est le repère de référence en mécanique newtonienne. Il est supposé exister lors de l'énoncé du principe fondamental de la dynamique, mais on n'en connaît que des approximations plus ou moins fines. Ce sont les repères :

- héliocentrique, d'origine le centre du soleil et comportant trois directions d'étoiles ;
- géocentrique, d'origine le centre de la terre et comportant trois directions d'étoiles ;
- terrestre.

## 6.1.3



Un objet réel, par opposition à un objet imaginaire.

# Système matériel

### Définition

On appelle **système matériel** un ensemble d'objets réels.

Le plus petit objet du mécanicien est le point matériel, c'est-à-dire un volume solide suffisamment petit pour être modélisable par un point.

Un élément d'un système matériel est caractérisé par sa nature – liquide, solide, gazeuse, ... – et par des grandeurs attachées à sa géométrie et à sa masse.

Le mécanicien a comme objet de référence le solide indéformable, avec en tout premier lieu celui qui sert de repère ! La distinction entre le solide  $S$  et un système  $\Sigma$  quelconque est faite pour distinguer les lois générales des expressions propres au solide indéformable.

## 6.1.4

# Action mécanique extérieure – intérieure

Soit  $\Sigma$  un système matériel quelconque. On appelle  $\bar{\Sigma}$ , ce qui se lit «  $\Sigma$  barre », l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à ce système :

- décrire un système  $\Sigma$  revient à détailler les éléments de ce système ;
- décrire  $\bar{\Sigma}$  revient à lister les éléments extérieurs à ce système.

**Remarque**

Comme le reste de l'univers est grand, on reprend la notion de milieu environnant vue au chapitre I pour ne lister pour  $\bar{\Sigma}$  que les éléments retenus comme ayant une influence sur le comportement de  $\Sigma$ .

**Définitions**

On appelle **action mécanique extérieure** à un système  $\Sigma$  une action mécanique posée d'un élément de  $\bar{\Sigma}$  sur un des éléments de  $\Sigma$ .

On appelle **action mécanique intérieure** à un système  $\Sigma$  une action mécanique posée entre deux éléments de  $\Sigma$ .

**Notation**

Le torseur des actions mécaniques extérieures à un système quelconque  $\Sigma$  est noté  $\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$ .

**Exemple**

Soit un système  $\Sigma = \{i, k, m\}$  composé de trois objets. On retient comme milieu environnant  $\bar{\Sigma} = \{1, 2, 3, 4\}$  quatre objets ou phénomènes :

- $(i \rightarrow k), (i \rightarrow m)$  sont des actions mécaniques intérieures à  $\Sigma$  ;
- $(2 \rightarrow i), (3 \rightarrow m)$  sont des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$  ;
- $(2 \rightarrow 3), (3 \rightarrow 4)$  ne rentrent dans aucune des deux catégories, ce sont des actions mécaniques qui ne concernent pas ce système  $\Sigma$ .

Le torseur des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$  s'évalue par

$$\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_{j=1}^4 \mathcal{F}(j \rightarrow \Sigma)$$

**Équilibre d'un système matériel quelconque**

Soit un système matériel  $\Sigma$  dont on constate ou on souhaite l'équilibre par rapport à un référentiel galiléen  $Rg$ .

**Théorème**

S'il existe un référentiel galiléen  $Rg$  dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un système matériel  $\Sigma$ , alors le torseur des actions mécaniques extérieures au système  $\Sigma$  est à chaque instant le torseur nul.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}(P, \Sigma/Rg) = \vec{0} \implies \forall t, \quad \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O} \quad (1)$$

**Solide indéformable**

Soit un solide indéformable  $S$  dont on constate ou on souhaite l'équilibre dans un référentiel galiléen.

**Théorème**

S'il existe un référentiel galiléen  $Rg$  dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un solide indéformable  $S$ , alors le torseur des actions mécaniques extérieures au solide  $S$  est à chaque instant le torseur nul.

$$\forall t, \quad \mathcal{V}(S/Rg) = \mathcal{O} \implies \forall t, \quad \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \mathcal{O} \quad (2)$$

**6.1.5**

 La compréhension du sens de l'implication est fondamentale... C'est parce qu'il y a équilibre que le torseur des actions mécaniques extérieures est nul !

**6.1.6**

 C'est la même implication !

## 6.1.7 Réciproque

L'équilibrage d'un solide en rotation est étudié en seconde année. On admet ici qu'il tourne sans générer de vibration.

La réciproque des théorèmes de l'équilibre est fausse. Un solide  $S$  parfaitement équilibré, entretenu par un moteur en rotation uniforme dans un repère galiléen  $R_g$ , admet un torseur des actions mécaniques extérieures nul alors que le torseur cinématique  $\mathcal{V}(S/R_g)$  n'est pas le torseur nul.

Une seule proposition peut être énoncée : elle concerne tous les systèmes matériels, solides ou quelconques.

### Proposition

Si, à chaque instant, le torseur des actions mécaniques extérieures de toute partie d'un système matériel  $\Sigma$  est le torseur nul, alors il existe un référentiel galiléen dans lequel ce système matériel  $\Sigma$  est en équilibre.

$$\forall t, \forall \Sigma_i \subset \Sigma, \mathcal{F}(\bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i) = \mathcal{O} \implies \exists Rg \mid \forall t, \forall P, \vec{V}(P, \Sigma/Rg) = \vec{0} \quad (3)$$

Cette proposition est dans les faits peu exploitable, car la nullité du torseur des actions mécaniques extérieures doit être vérifiée quelle que soit la partie incluse...

## 6.2 Méthodologie de résolution

### 6.2.1 Les différentes étapes

 Les compétences acquises en cinématique donnent les clés de l'efficacité...

#### Résoudre un problème de statique se fait en plusieurs étapes :

- lecture et décodage.

Les auteurs constatent que l'étudiant moderne a tendance à *zapper* cette étape. Il n'est pas besoin d'être expert pour constater rétrospectivement que les principales difficultés rencontrées sont issues de défaillances lors de cette première étape.

- inventaire du milieu environnant.

En complément de la compréhension du mécanisme étudié, il s'agit à cette étape de faire la recherche exhaustive de tous les éléments extérieurs au système qui sont en relation avec lui. Le résultat de cette recherche est la liste des objets et des phénomènes dont il faut tenir compte lors de l'étude, sans chercher à ce stade à modéliser de manière systématique les actions mécaniques induites !

- décompte du nombre d'inconnues d'action mécanique et du nombre d'équations que l'on a à disposition.

Ces dénombrements ont pour objectifs :

- de se faire une opinion sur la faisabilité de la résolution ;
- de localiser les inconnues recherchées, bien sûr, mais surtout de dénombrer les inconnues que l'on souhaite éviter pour accélérer la résolution.

- mise en place d'une stratégie de résolution ;

Cette étape est complexe, au sens du premier chapitre où la *solution* n'est pas unique !

- modélisation des actions mécaniques utiles à la résolution ;
- résolution effective.

 En fonction de son niveau de difficulté, un énoncé de problème donne plus ou moins de coups de pouce lors de l'une ou l'autre des étapes.

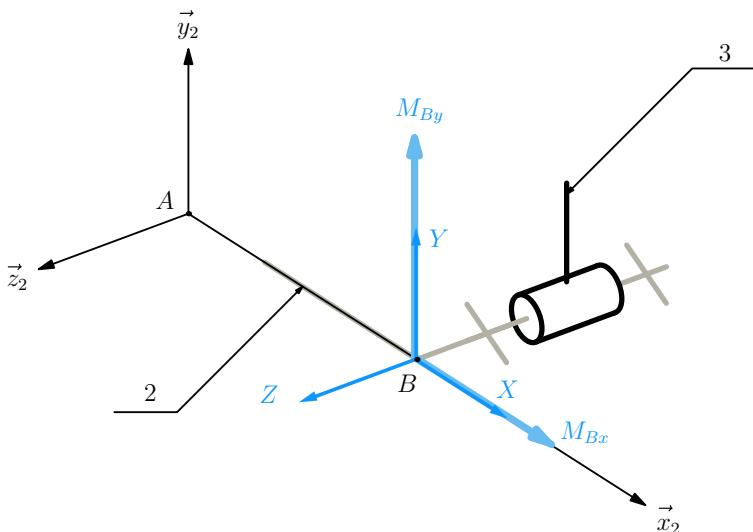
## 6.2.2

### Anticiper un résultat

Une condition apparaît indispensable avant de commencer : il est nécessaire de connaître suffisamment les liaisons usuelles pour pouvoir imaginer immédiatement la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles !

Pour arriver à mettre en place une stratégie de résolution de manière efficace, il est nécessaire d'arriver à anticiper le résultat d'un calcul vectoriel, notamment de prévoir si une composante va apparaître ou non lors de telle ou telle équation scalaire issue d'un équilibre.

Le travail d'imagination à mener est exposé sur un exemple. On suppose étudier l'équilibre d'un solide 2 par rapport à 1 et on s'intéresse à la contribution des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe ( $B, \vec{z}_2$ ) entre deux solides 2 et 3.



**Figure 6.1** Les composantes dessinées au point  $B$ .

La résultante transmissible  $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$  est quelconque, le moment  $\vec{M}(B, 3 \rightarrow 2)$  n'a pas de composante suivant  $\vec{z}_2$  et on pose

$$\begin{aligned}\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= X & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= Y & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= Z\end{aligned}$$

Ces composantes sont dessinées issues du point  $B$  sur la figure ci-dessus. On ajoute un point  $A$  défini par  $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_2$ .

On rappelle la formule de changement de points pour calculer le moment de l'action mécanique  $(3 \rightarrow 2)$  au point  $A$

$$\vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) = \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) \wedge \overrightarrow{BA}$$

Si ce calcul est mené avec les composantes posées, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} - LZ \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= +LY\end{aligned}$$

On oublie provisoirement ce résultat et on regarde la figure. Trois propositions peuvent être formulées :

- la composante  $Z$  tend à faire tourner 2 autour de la droite  $(A, \vec{y}_2)$  dans le sens négatif, ce qui est confirmé par le calcul.

$$L\vec{x}_2 \wedge Z\vec{z}_2 = -LZ\vec{y}_2$$



Anticiper un calcul vectoriel revient à remplacer le calcul par un travail d'imagination de mouvements !

- la composante  $Y$  tend à faire tourner 2 autour de la droite  $(A, \vec{z}_2)$  dans le sens positif

$$L\vec{x}_2 \wedge Y\vec{y}_2 = +LY\vec{z}_2$$

- la droite  $(B, \vec{x}_2)$  passe par le point  $A$ . La composante  $X$  ne provoque aucune rotation autour du point  $A$

$$L\vec{x}_2 \wedge X\vec{x}_2 = \vec{0}$$

Ce travail d'imagination est utile pour savoir quelles inconnues scalaires fait intervenir telle ou telle équation. On termine ainsi l'exemple précédent avec les six propositions concernant l'influence des composantes transmissibles par la liaison pivot entre 2 et 3 sur l'équilibre de 2/1

- l'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_2$  fait intervenir  $X$ , et uniquement  $X$  ;
- l'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_2$  contient  $Y$  ;
- l'équation de résultante scalaire  $\vec{z}_2$  contient  $Z$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{x}_2$  contient  $M_{Bx}$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{y}_2$  fait intervenir  $M_{By}$  et  $Z$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_2$  ne fait intervenir que  $Y$  ;

Ces six propositions sont bien évidemment complétées par une septième

- l'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{z}_2$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot.

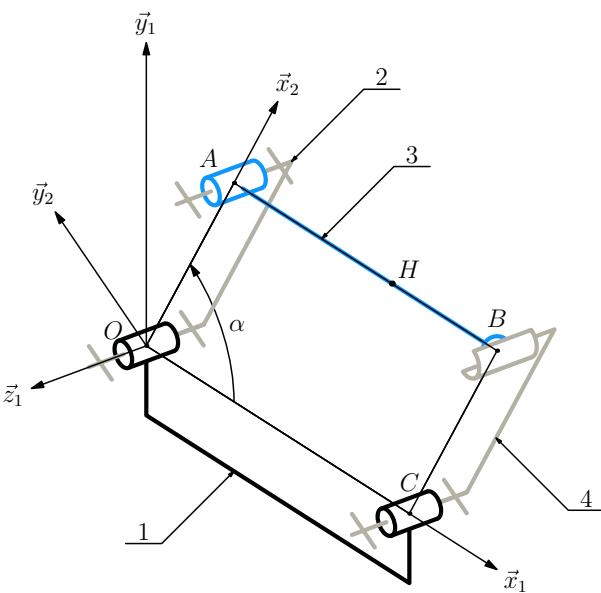
### 6.2.3

## Mise en œuvre sur un exemple détaillé

On se propose d'illustrer une stratégie de résolution à partir d'un exemple représentatif.

On considère l'élévateur présenté sur la figure ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un parallélogramme déformable. Il comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\overrightarrow{OC} = L\vec{x}_1$  ;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un



**Figure 6.2** Schéma cinématique de l'élévateur.

repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_2$  et  $\vec{z}_1$  et on pose d'une part  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\overrightarrow{OA} = R\vec{x}_2$  ;

- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le bras motorisé 1. On pose  $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{x}_1$ .
- une jambe 4 de même longueur que le bras 2, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti et en liaison sphère-cylindre de centre  $B_3$  et d'axe  $(B_4, \vec{z}_4)$  avec la plateforme 3.

Concernant la modélisation des actions mécaniques, on considère les hypothèses suivantes :

- l'action de la charge sur la plateforme est modélisée par un glisseur d'axe central la droite  $(H, \vec{y}_1)$  ;

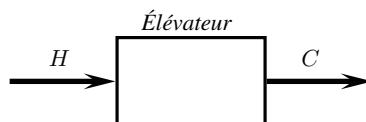
$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = H \begin{cases} -H\vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$

- l'action du moteur sur le bras motorisé est modélisée par un couple ;

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C\vec{z}_1 \end{cases}$$

- les poids des différentes pièces sont négligés devant l'intensité de la charge supportée ;
- les liaisons sont toutes supposées sans frottement.

En vue de dimensionner l'actionneur, on souhaite établir la relation entre le couple moteur  $C$  et la charge  $H$  lors d'une configuration d'équilibre.



### Lecture et décodage

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il n'est jamais inutile de détailler le contenu d'un **énoncé**, qui comporte :

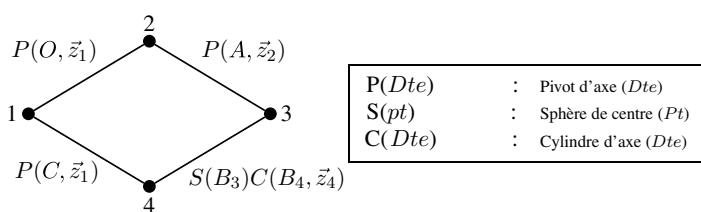
- un titre, souvent un terme spécialisé ou une marque commerciale ;
- une description fonctionnelle, accompagnée de figures et d'images ;
- une description structurelle, accompagnée de schémas ;
- un jeu d'hypothèses en général simplificatrices ;
- une ou plusieurs questions dans le cadre d'une problématique.



L'incompréhension d'un titre est fréquente, et la description fonctionnelle est là pour expliquer...



C'est le temps investi lors de cette étape qui élève le niveau d'efficacité lors de la résolution !



**Figure 6.3** Graphe des liaisons de l'élévateur.



Ne sont pas retenues dans ce cas les influences de la pesanteur et de l'air...



On extrait donc de l'ensemble des dix huit équations un système de trois équations à quatre inconnues !



Si ces propositions apparaissent bien mystérieuses, il faut revenir à la section précédente, et ne pas hésiter à refaire schémas et graphes...

Après le constat des éléments présents ou absents peut débuter l'analyse du mécanisme. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comprenant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons.

### Inventaire du milieu environnant

Avec les hypothèses de l'énoncé, on retient pour le milieu environnant :

- la charge ;
- le moteur.

### Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

Que ce soit du point de vue de la cinématique ou des actions mécaniques, il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée pour résoudre le problème. Si on considère le bâti 1 comme repère galiléen, trois équilibres sont à écrire pour la résolution : ce serait par exemple de manière systématique les équilibres 2/1, 3/1 et 4/1.

Ces trois équilibres donnent 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte trois liaisons pivot et une liaison sphère-cylindre, donc admet 17 inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement.

Au bilan, la résolution semble possible avec un système de 18 équations pour 19 inconnues ! À la condition que le rang de ce système de 18 équations soit égal à 18, on peut déterminer les 17 inconnues de liaison et le couple moteur  $C$  en fonction de la charge  $H$ , cette dernière inconnue devenant paramètre une fois basculée dans le second membre.

### Stratégie de résolution

De nombreuses possibilités de résolution existent. L'analyse préliminaire permet de borner ces possibilités :

- au minimum, trois équilibres sont à envisager, on ne peut donc probablement pas descendre en dessous de trois équations scalaires à écrire ;
- au maximum, l'écriture systématique de toutes les dix-huit équations doit donner la solution.

Dans l'hypothèse où on arrive à résoudre avec trois équations scalaires, cela signifie que l'on détermine deux inconnues de liaison et le couple moteur  $C$  en fonction de la charge  $H$ .

C'est ainsi que l'on peut décider de garder pour ces deux inconnues celles de la liaison sphère-cylindre. En conséquence, la stratégie est alors de chercher à éviter les quinze inconnues des trois liaisons pivot, et les trois équations scalaires à écrire sont alors :

- équilibre de 4 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 4 ;
- équilibre de 3 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_3$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 3 ;
- équilibre de l'ensemble {2,3} par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 2.

Arriver en autonomie à ces propositions est un des objectifs. Pour aider à y parvenir, le tableau (6.4) propose les différentes combinaisons de solides possibles lors des choix d'équilibre, dénombre en deuxième colonne les inconnues scalaires de liaison et liste en dernière colonne les inconnues scalaires d'actions mécaniques supplémentaires.



Un tel tableau n'est pas à produire de manière systématique. Il résume néanmoins les pensées du mécanicien qui balaye mentalement l'ensemble des possibilités...



L'exploit est remarquable, et l'intérêt est de le remarquer, mais il n'y a hélas pas de médaille...



Le premier exercice d'application permet de poursuivre la réflexion sur cet exemple ! Et de résoudre...

Équilibre	Nb. inc. liaison	Inc. autres
2/1	10	C
3/1	7	H
4/1	7	
{2, 3}/1	7	C, H
{2, 4}/1	17	C, H
{3, 4}/1	10	H
{2, 3, 4}/1	10	C, H

**Figure 6.4** Les différents équilibres envisageables.

L'observation de ce tableau invite aux réflexions suivantes :

- l'étude de l'équilibre de l'ensemble {2, 4}/1 est possible et permet de faire intervenir toutes les inconnues du problème dans six équations. On se garde bien de poursuivre.
- la stratégie proposée s'appuie sur les trois lignes où apparaissent sept inconnues de liaison, à savoir à chaque fois les deux inconnues de la liaison sphère plan et cinq inconnues scalaires des différentes liaisons pivots.
- l'équilibre de 4 par rapport à 1 est particulier et mérite d'être repéré : il ne fait intervenir que deux éléments du milieu environnant.
- pour les lignes à dix inconnues de liaison, elles font intervenir deux liaisons pivot d'axes parallèles, et il est donc possible dans ce cas de proposer une équation scalaire évitant huit des dix inconnues.

## 6.3 Équilibres particuliers

### 6.3.1

#### Résolutions triviales

##### Système soumis à l'action de deux glisseurs

###### Théorème

Si un système  $\Sigma$  est en équilibre dans un référentiel galiléen sous l'action de deux glisseurs, alors ces deux glisseurs sont opposés.

Le résultat se généralise à tout équilibre ne faisant intervenir que deux éléments du milieu environnant.

###### Théorème

Si un système  $\Sigma$  est en équilibre dans un référentiel galiléen sous les actions issues de deux éléments, alors les deux torseurs d'actions mécaniques correspondants sont opposés.



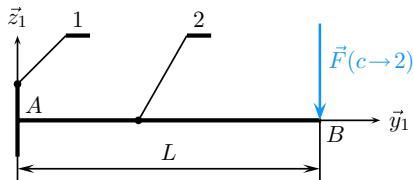
Le sens de l'implication est fondamental, la réciproque est fausse !

##### Exemple Poutre encastrée

On considère une poutre 2 de longueur  $L$  encastrée à une de ses extrémités dans un bâti 1 :

- on associe au bâti 1 un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- la poutre 2 reste immobile au cours du temps par rapport au bâti 1 et on pose  $\overrightarrow{AB} = L\vec{y}_1$ .

Une charge  $c$  est accrochée à l'extrémité  $B$  de la poutre et on modélise l'action de cette charge par une force au point  $B$  définie par  $\vec{F}(c \rightarrow 2) = -F\vec{z}_1$ .



**Figure 6.5** Une poutre encastrée à une de ses extrémités.

Un seul équilibre est à étudier, celui de 2 par rapport à 1 supposé galiléen. L'inventaire du milieu environnant permet de ne retenir que les deux éléments principaux :

- la charge  $c$  ;
- le bâti 1.

On dénombre six inconnues de liaison issues de l'encastrement de 2 sur 1 et la charge  $F$  pour six équations qu'il n'est pas utile d'écrire. En effet, la résolution est immédiate

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$$

Il n'est besoin que de préciser le glisseur  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  pour détailler  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = B \begin{cases} -F\vec{y}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = B \begin{cases} F\vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$

Le point  $A$  sur le schéma est symbolique, et y calculer les éléments de réduction ne présente aucun intérêt à ce stade.

### Système soumis à l'action de trois glisseurs

#### Théorème

Soit un système quelconque soumis à l'action de trois glisseurs.

Si ce système est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors les trois axes centraux des glisseurs sont coplanaires, et sont de plus soit parallèles, soit concourants.

Ce théorème est utile lors de résolution graphique

#### Exemple

On utilise en exemple la démonstration du théorème. Soit un système  $\Sigma$  en équilibre dans un référentiel galiléen soumis à l'action de trois glisseurs  $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$ ,  $\mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma)$  et  $\mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma)$ . On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) = A \begin{cases} \vec{R}_1 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) = B \begin{cases} \vec{R}_2 \\ 0 \end{cases} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = C \begin{cases} \vec{R}_3 \\ 0 \end{cases}$$

Les lois de l'équilibre annoncent  $\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$ , équation qui se détaille par

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$$

Concurrents signifie sécants en un même point.



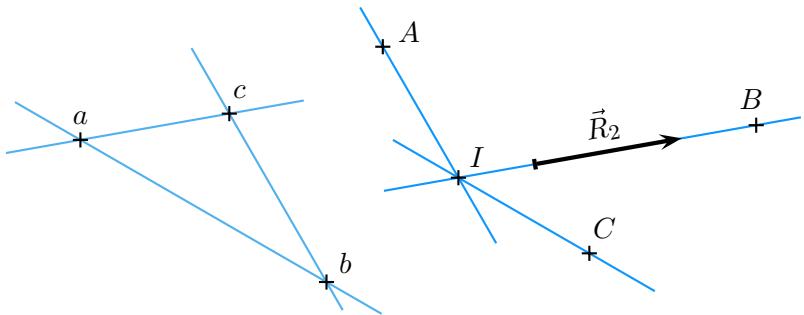
L'équation de moment au point  $A$  pour éviter  $\vec{R}_1$ , scalaire  $\overrightarrow{AB}$  pour éviter  $\vec{R}_2$ , donne un produit mixte nul  $(\vec{R}_3, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 0$

On suppose les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés et on en déduit que le vecteur  $\vec{R}_3$  peut être exprimé comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs et qu'il est donc dans le plan  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ .

Ce raisonnement est recommandé deux fois pour montrer que les deux autres résultantes  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  sont également dans le plan  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ . Les trois axes centraux sont ainsi nécessairement coplanaires, dans le plan  $(ABC)$ .

Soit de plus  $I$  le point d'intersection des droites  $(A, \vec{R}_1)$  et  $(B, \vec{R}_2)$ . L'équation de moment en ce point donne  $\vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0}$

La résultante  $\vec{R}_3$  est nécessairement colinéaire au vecteur  $\overrightarrow{CI}$  et les trois axes centraux sont bien concourants, ou parallèles dans le cas où le point  $I$  est rejeté à l'infini.



**Figure 6.6** Construction graphique dans le plan  $(ABC)$ .

Les constructions de la figure ci-dessus illustrent le résultat et méritent d'être refaites dans un ordre logique, à partir de la situation de départ suivante :

- on pose les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , non alignés ;
- on suppose connue la résultante  $\vec{R}_2$  et on propose une longueur de 20 mm pour  $\|\vec{R}_2\|$  ;
- on suppose connue la direction de l'axe central de  $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$ , que l'on trace à partir du point  $A$ .

À partir de là, la construction se fait en deux étapes :

- (1) sur la figure géométrique amorcée, la nécessaire concourance des trois axes centraux permet d'identifier le point d'intersection  $I$  et de tracer la droite  $CI$ .
- (2) il reste maintenant à exploiter l'équation de résultante  $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0}$  dans un plan pour lequel on pose une « échelle des forces »
  - on trace une parallèle à la droite  $(IB)$  sur laquelle on pose un segment  $[ac]$  de 20 mm ;
  - on trace issue du point  $a$  une parallèle à la droite  $(IC)$  ;
  - on trace issue du point  $c$  une parallèle à la droite  $(IA)$  et on identifie le point d'intersection  $b$  ;

Sur un énoncé, une échelle des longueurs est nécessaire pour respecter les positions relatives des différents éléments géométriques.

- comme on a posé  $\vec{R}_2 = \vec{ac}$ , on en déduit  $\vec{cb} = \vec{R}_1$  et  $\vec{ba} = \vec{R}_3$  ;
- on mesure environ 25,5 mm pour  $\|\vec{R}_1\|$ , environ 37,5 mm pour  $\|\vec{R}_3\|$  et ces longueurs restent à convertir.

## 6.3.2 L'arc-boutement

Un tiroir qui bloque, un serre-joint qui serre. Voici deux nouveaux exemples de manifestation du phénomène de frottement, néfaste dans le premier cas, utile dans le second !

Un premier mot s'impose pour décrire ces équilibres particuliers : l'arc-boutement.

### Définition



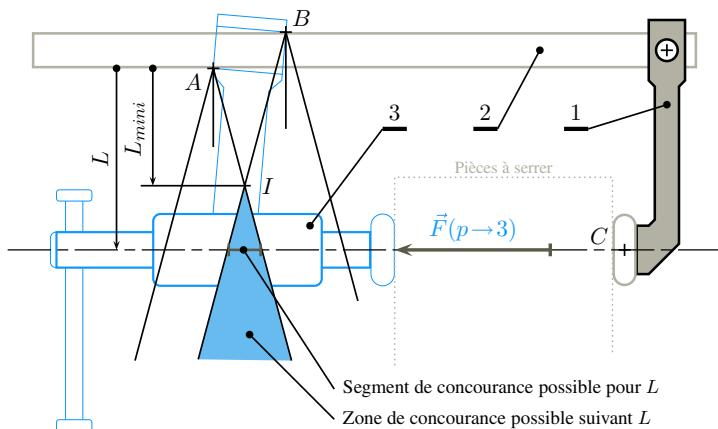
En l'absence de frottement, il ne peut y avoir arc-boutement.

On appelle **arc-boutement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité d'un effort qui tend à le rompre.

Autrement dit, si un équilibre est possible, il se réalise et dans le cas de l'arc-boutement, tout effort dépensé pour une mise en mouvement n'est pas suivi d'effet. On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un serre-joint présenté sur la figure ci-dessous, sur lequel on peut distinguer quatre ensembles :

- un mors fixe repéré 1, que l'on prend comme référence ;
- une tige repérée 2, encastrée sur le mors fixe 1 ;
- un mors mobile repéré 3, dessiné en filigrane, qui peut coulisser le long de la tige 2 en l'absence de serrage ;
- les pièces à serrer, prises entre les deux mors.

Le contact entre la tige 2 et le mors mobile 3 est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .



**Figure 6.7** Modélisation d'un serre-joint.

Lors du serrage, le mors mobile peut légèrement basculer par rapport à la tige et le contact se fait en deux points nommés A et B. Trois actions mécaniques extérieures à 3 sont retenues pour caractériser son équilibre constaté par rapport à l'ensemble {1,2} que l'on considère comme galliléen :

- l'action des pièces à serrer, modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$  ;
- l'action de la tige sur 3 au point A, modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(2_A \rightarrow 3)$  d'axe central la droite  $(A, \vec{R}(2_A \rightarrow 3))$  ;

Le cône de frottement est de demi angle au sommet  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = f$ .

- l'action de la tige sur 3 au point  $B$ , modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(2_B \rightarrow 3)$  d'axe central la droite  $(B, \vec{R}(2_B \rightarrow 3))$ .

En l'absence de frottement, les deux droites  $(A, \vec{R}(2_A \rightarrow 3))$  et  $(B, \vec{R}(2_B \rightarrow 3))$  sont parallèles et l'équilibre de 3/1 ne peut pas être expliqué. Issus des points  $A$  et  $B$  sont alors dessinés les *cônes de frottement*. Une zone d'intersection de ces cônes apparaît, à partir d'un point nommé  $I$ . Différents comportements sont à envisager :

- l'utilisateur prend en main le mors mobile à une distance de la tige 2 inférieure à  $L_{mini}$  et l'équilibre n'est pas possible. Le mors peut coulisser le long de la tige.
- dès l'apparition de l'effort de poussée  $\vec{F}(p \rightarrow 3)$ , le contact est réalisé aux points  $A$  et  $B$  et comme l'équilibre est possible, le mors mobile ne peut plus bouger par rapport à la tige, quelle que soit l'intensité de l'effort  $\|\vec{F}(p \rightarrow 3)\|$ .
- dès que l'effort de poussée s'annule, le mouvement du mors mobile par rapport à la tige est à nouveau possible.

### 6.3.3

## Le coincement

Le phénomène de coincement s'appuie sur les mêmes bases que le phénomène d'arc-boutement. Mais alors que l'arc-boutement disparaît dès la fin de l'effort qui tend à rompre l'équilibre, le coincement subsiste.

### Définition

On appelle **coincement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre persiste sous des actions mécaniques indéterminées alors même que la cause de l'équilibre a disparu.

Autrement dit, il faut dépenser de l'énergie pour « décoincer » un objet coincé, opération inutile pour l'arc-boutement.

On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un pousseur présenté sur la figure ci-dessous. Ce mécanisme est conçu pour bloquer des pièces sur un bâti et comporte trois ensembles :

- un bâti repéré 1 supposé galiléen, auquel on associe une base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un coin 2, en liaison glissière de direction  $\vec{z}_1$  avec le bâti 1. On lui associe une base vectorielle  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  confondue avec celle du bâti et une base vectorielle  $(\vec{x}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$  en posant  $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{v}_2)$ . Sur ce coin est fabriqué un plan de normale  $\vec{v}_2$  et on appelle  $A$  un point de ce plan.
- un pousseur repéré 3, en liaison glissière de direction  $\vec{y}_1$  avec le bâti 1. Sur ce pousseur est fabriquée une calotte sphérique de centre  $C$ . Elle est en contact avec le plan du coin 2 en un point  $I$ , contact caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .

Concernant les actions mécaniques à modéliser :

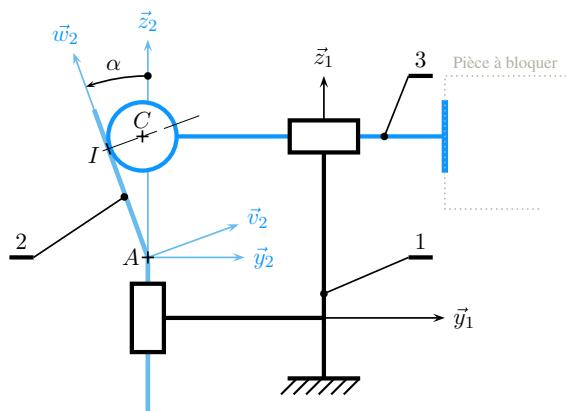
- Un vérin déplace le coin 2 suivant  $\vec{z}_1$  par rapport au bâti, et on pose

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 2) = A \begin{cases} F_{v2} \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$$

- Le pousseur se déplace suivant  $\vec{y}_1$  par rapport au bâti jusqu'à être en butée contre la pièce à bloquer, et l'action mécanique de cette dernière sur le pousseur est représentée par un torseur quelconque  $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$ .
- Les actions de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques.



En l'absence de frottement, il ne peut y avoir coincement.



**Figure 6.8** L'équilibre possible d'un coin en l'absence de poussée.

On s'intéresse à l'équilibre possible du coin 2 par rapport à 1 en l'absence de poussée du vérin, et les seules actions mécaniques extérieures à retenir sont issues :

- du bâti 1 ;
- du pousseur 3.

On pose alors

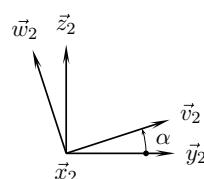
$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = I \begin{cases} -N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}, \text{ avec } N_{32} \geq 0 \text{ et } \frac{\|\vec{T}_{32}\|}{|N_{32}|} \leq f \\ \vec{0} \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation de résultante scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison glissière et on obtient

$$(-N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (4)$$

Pour poursuivre le raisonnement, on suppose la composante de  $\vec{T}_{32}$  suivant  $\vec{x}_2$  nulle et on pose  $\vec{T}_{32} = T_{32}\vec{w}_2$ . On trace la figure de définition de l'angle  $\alpha$  pour effectuer les calculs de trigonométrie.

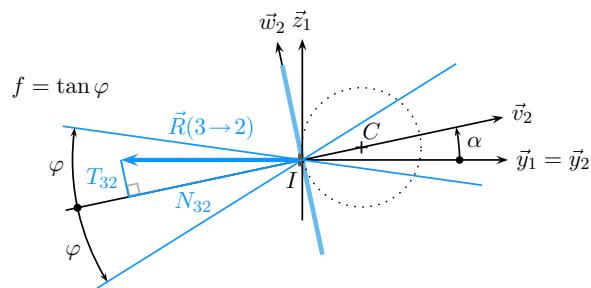
L'équation scalaire (4) s'explicite alors par :



$$\frac{T_{32}}{N_{32}} = \tan \alpha \quad (5)$$

Cette dernière équation permet de conclure quant aux possibilités d'équilibre :

- soit  $\tan \alpha \leq f$ , c'est-à-dire  $\alpha \leq \varphi$ , et l'équilibre est possible ;
- soit  $\tan \alpha > f$ , c'est-à-dire  $\alpha > \varphi$ , et l'égalité de l'équation (5) ne peut être satisfaite, l'équilibre du coin 2 par rapport au bâti 1 est alors impossible.



**Figure 6.9** Configuration géométrique de coincement possible.

La résolution ne peut pas être menée plus loin, vu le trop grand nombre d'inconnues par rapport au nombre d'équations. En effet, le problème comporte 13 inconnues de liaison et 7 inconnues pour les actions du vérin et de la pièce à bloquer pour deux équilibres possibles, soit 12 équations scalaires.

Plusieurs remarques peuvent néanmoins être formulées :

- On arrive à montrer que l'équilibre de 2 par rapport à 1 est possible, mais on ne peut déterminer la valeur du module de la résultante  $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$  par les seules lois de l'équilibre.
- L'hypothèse que la composante tangentielle  $\vec{T}_{32}$  suivant  $\vec{x}_2$  est nulle ne peut être vérifiée, même si elle reste plausible car le mécanisme n'autorise pas de glissement suivant cette direction. En conséquence, si l'on souhaite le coïncement effectif de 2, il ne faut pas choisir l'angle  $\alpha$  trop proche de l'angle  $\varphi$ .
- La composante normale  $N_{32}$  est positive, l'équation (5) donne alors une composante  $T_{32}$  également positive.

On en déduit qu'en l'absence de frottement, une vitesse de glissement apparaît au point  $I$ , caractérisée par le vecteur  $\vec{V}(I, 2/3)$  suivant  $-\vec{w}_2$ , car opposée au vecteur  $\vec{T}_{32}$ . L'action de 3 sur 2 provoquerait le déplacement de 2 par rapport à 1 suivant  $-\vec{z}_1$ .

## Synthèse

### Savoirs

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- équilibre ;
- repère galiléen ;
- système matériel ;
- actions mécaniques extérieures, intérieures ;
- arc-boutement, coïncement.

#### Je connais :

- le théorème de l'équilibre pour un solide indéformable ;
- le théorème de l'équilibre pour un système matériel quelconque ;
- la réciproque du théorème de l'équilibre ;
- le contenu type d'un énoncé.

### Savoir-faire

#### Je sais

- faire un inventaire exhaustif du milieu environnant, en ne nommant que des objets ou des phénomènes ;
- proposer des modèles d'actions mécaniques pour les liaisons usuelles ;
- compter le nombre d'inconnues d'un problème ;
- identifier un système soumis à l'action de deux glisseurs, de trois glisseurs.

## Exercices d'application

### 6.1 Table élévatrice

À partir de l'exemple de la table élévatrice présentée sur la figure 6.2 à la page ??, on se propose de rechercher d'autres stratégies de résolution.

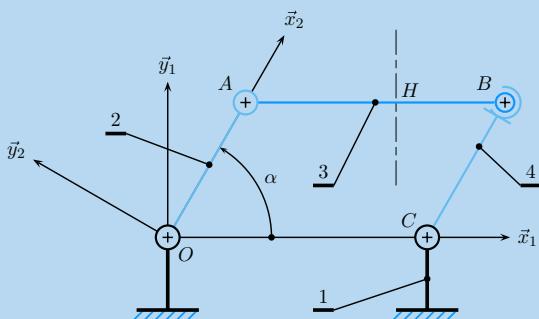


Schéma plan de l'élévateur.

Le lecteur est invité à reprendre la description des pages ?? à ??.

**1.** Quelle stratégie de résolution permet d'éviter :

- les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1 ;
- les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 2 ;
- les deux inconnues de la liaison sphère cylindre entre 4 et 3 ;
- trois des cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 4 et 1.

**2.** Un étudiant propose :

- équilibre de 3 par rapport à 1 : équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$  pour avoir  $H$  ;
- équilibre de 2 par rapport à 1 : équation de moment en  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour avoir  $C$  ;

Combien d'inconnues de liaisons fait-il intervenir ? A-t-il des chances de résoudre avec une troisième équation ? Proposer une ou plusieurs équations complémentaires ?

**3.** Avec une stratégie à choisir, déterminer la relation recherchée  $C = f(H)$ .

### 6.2 Couple moteur, couple résistant ?

On se propose de définir les deux termes « couple moteur » et « couple résistant » à partir de la description d'un moteur électrique.

Un moteur électrique est constitué principalement de quatre pièces :

- un carter repéré 1 ;
- un arbre repéré 2, en contact avec le carter par l'intermédiaire de deux roulements à billes 3 et 4 ;
- un rotor  $r$  solidaire de l'arbre ;
- un stator  $s$  solidaire du carter.

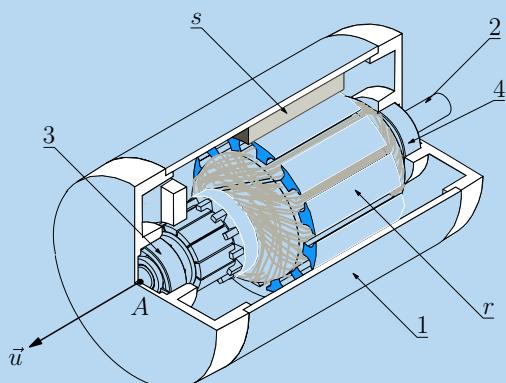


Schéma simplifié d'un moteur électrique.

On suppose le moteur en situation, entraînant une charge en rotation. On modélise l'action de cette charge sur l'arbre par un torseur  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  indéterminé.

**1.** Tracer le graphe des liaisons, et proposer un modèle de comportement pour le contact entre l'arbre 2 et le carter 1.

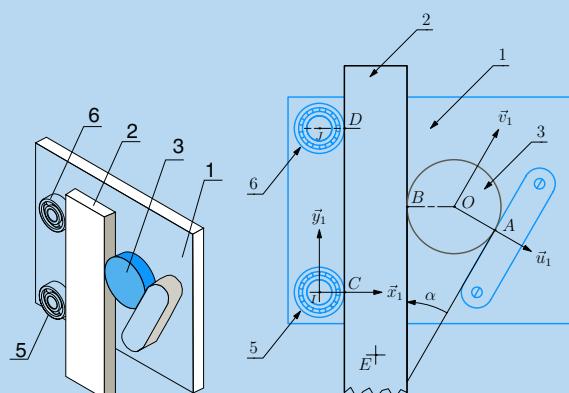
**2.** Faire l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur l'arbre 2.

**3.** L'arbre est supposé parfaitement équilibré et en rotation uniforme par rapport au carter, ce qui permet de lui appliquer les lois de l'équilibre. Quel est l'intérêt d'écrire l'équation de moment au point A scalaire  $\vec{u}$  ?

**4.** En exploitant l'équation précédente, proposer une définition d'un couple moteur  $C_m$ , d'un couple résistant  $C_r$ .

### 6.3 Dispositif autobloquant

On considère le mécanisme autobloquant représenté sur la figure ci-dessous



Dispositif autobloquant.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

- une plaque plane 1 que l'on oriente en posant  $\vec{z}_1$  orthogonal au plan. Sur cette plaque est fixée une rampe et sont montés deux roulements à billes dont les bagues extérieures 5 et 6 sont avec la plaque en liaison pivot respectivement d'axes  $(I, \vec{z}_1)$  et  $(J, \vec{z}_1)$ . On pose  $\vec{y}_1$  orientant la droite joignant les centres géométriques des deux roulements et la base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est ainsi définie. On associe à la plaque une deuxième base vectorielle  $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$  en orientant le vecteur  $\vec{u}_1$  suivant la normale à la rampe et on pose  $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{x}_1)$  ;
- un barreau parallélépipédique 2 de centre géométrique  $E$ , en appui sur les roulements de la plaque 1 ;
- un galet mobile 3 cylindrique de révolution, de centre géométrique  $O$ , logé entre le barreau 2 et la rampe 1.

Ce mécanisme est dit « autobloquant » car on constate le phénomène remarquable suivant :

- on peut translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant  $\vec{y}_1$  ;
- on ne peut pas translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant  $-\vec{y}_1$ , quelle que soit l'effort mis en œuvre pour cela.

Les contacts plans entre le barreau et la plaque, le galet et la plaque sont conservés à chaque instant et sont supposés sans frottement. On ne s'intéresse ainsi qu'aux trois degrés de liberté des mouvements dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  et les différents contacts sont assimilés à des points :

- contact aux points  $C$  et  $D$  entre le barreau 2 et les roulements à billes 5 et 6 du plateau 1 ;
- contact au point  $B$  entre le barreau 2 et le galet 3 ;
- contact au point  $A$  entre le galet 3 et la rampe 1.

Concernant les actions mécaniques :

- le contact au point  $A$  est caractérisé par un coefficient de frottement  $f_{13}$  et on pose  $\tan \varphi_{13} = f_{13}$  ;
- le contact au point  $B$  est caractérisé par un coefficient de frottement  $f_{23}$  et on pose  $\tan \varphi_{23} = f_{23}$  ;
- les contacts aux points  $C$  et  $D$  sont caractérisés par un coefficient de frottement  $f$  ;
- les deux liaisons pivot sont supposées sans frottement ;
- les actions mécaniques de pesanteur sont négligées devant les actions mécaniques de contact ;
- le référentiel lié à la plaque est supposé galiléen ;
- l'action mécanique extérieure qui tend à déplacer le barreau 2 par rapport au bâti 1 est modélisée par un glisseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = E \begin{cases} \pm F \vec{y}_1, & \text{avec } F > 0 \\ \vec{0} & \end{cases}$$

L'objectif de cette étude est de trouver les conditions géométriques sur l'angle  $\alpha$  pour que le fonctionnement décrit soit possible, et de caractériser l'action mécanique entre le barreau 2 et le galet 3.

1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues d'actions mécaniques.

Une étude systématique nécessite l'étude de quatre équilibres. En déduire le nombre d'équations scalaires à disposition et évaluer les chances de réussite pour la résolution du problème.

2. Par l'étude de l'équilibre du galet 5 par rapport à 1, montrer que le phénomène de frottement n'a pas d'influence sur l'action mécanique  $\mathcal{F}(2 \rightarrow 5)$ .

3. Étudier l'équilibre du galet 3 par rapport à la plaque 1 et déterminer les conditions sur l'angle  $\alpha$  qui permettent le blocage du barreau.

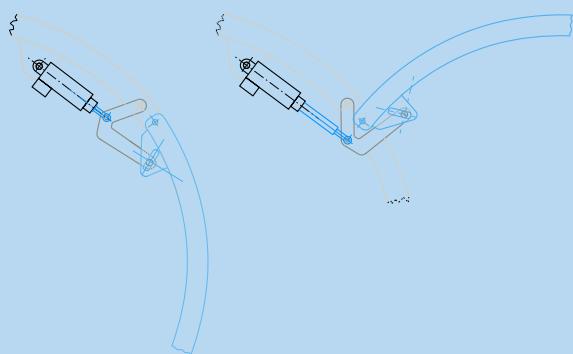
4. On suppose l'effort de poussée suivant  $-\vec{y}_1$ , soit  $\vec{R}(e \rightarrow 2) = -F \vec{y}_1$ .  
Déterminer la relation entre l'effort de poussée  $F$  et les actions s'appliquant au galet 3.

5. On suppose l'effort de poussée suivant  $\vec{y}_1$ , soit  $\vec{R}(e \rightarrow 2) = +F \vec{y}_1$ .  
L'équilibre du barreau 2 par rapport à la plaque 1 est-il possible ?

6. Comment peut-on appeler le phénomène mis à profit par ce dispositif ?

#### 6.4 Porte cargo d'un ATR42

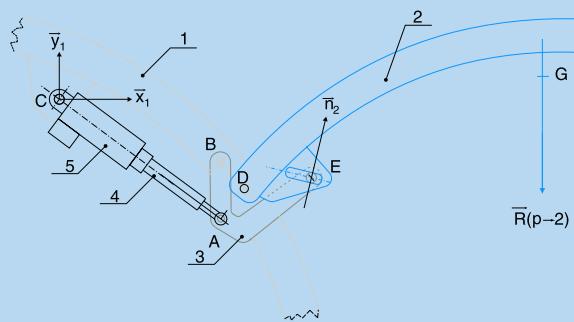
On se propose d'étudier le mécanisme de manœuvre de la porte cargo de l'avion ATR42. Les deux configurations extrêmes – porte ouverte et porte fermée – sont représentées sur la figure ci-dessous.



La porte d'accès à la soute à bagage.

Le mécanisme comporte cinq ensembles, repérés sur la figure suivante :

- Le fuselage de l'avion 1, auquel on associe un repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- la porte cargo 2, en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  avec le fuselage. Cette porte de masse  $m_2 = 100 \text{ kg}$  admet le point  $G$  comme centre de gravité et comporte une rainure oblongue définissant la direction  $\vec{n}_2$  ;
- une équerre 3, en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  avec le fuselage et en liaison sphère-plan de centre E et de normale  $\vec{n}_2$  avec la porte cargo 2 ;



Paramétrage du mécanisme.

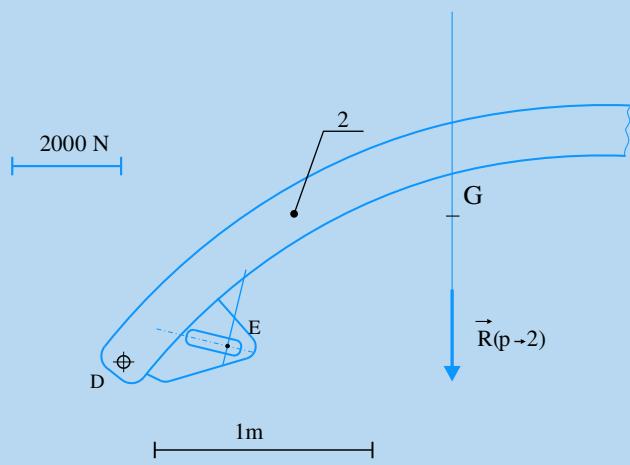
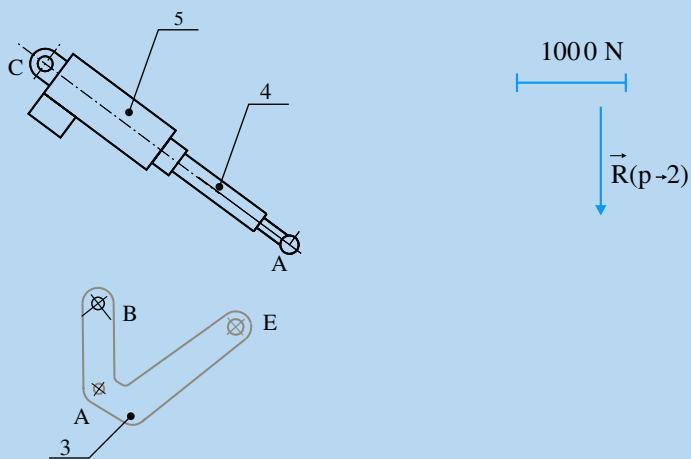
- un vérin, dont le corps 5 est en liaison sphérique de centre C avec le fuselage et dont la tige 4 est en liaison sphérique de centre A avec la bride 3, et en liaison pivot glissant d'axe (AC) avec le corps de vérin 5.

Concernant les actions mécaniques :

- le référentiel attaché au fuselage est assimilable à un référentiel galiléen ;
- la pesanteur est orientée par  $-\vec{z}_1$  et on prend  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  ;
- toutes les masses non citées sont négligées devant celle de la porte ;
- toutes les liaisons sont supposées sans frottement ;
- on se limite aux mouvements dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  et les actions mécaniques sont ainsi toutes modélisables par des glisseurs dont les axes centraux sont dans le plan d'étude.

L'objectif de l'étude est de déterminer par une méthode graphique l'effort développé par le vérin dans la position porte ouverte de la figure ci-dessus. Toutes les dimensions utiles sont à relever sur la feuille réponse donnée ci-dessous, sur laquelle sont également données les échelles des forces à adopter.

### Feuille pour les constructions graphiques



1. Sachant qu'une étude systématique de ce mécanisme requiert quatre équilibres, évaluer les chances de réussite lors de la résolution.

2. Quel intérêt y a-t-il à commencer par l'équilibre du vérin  $\{4,5\}/1$  ?

3. Étudier l'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1 et déterminer l'action mécanique exercée par l'équerre 3 sur la porte 2.

4. Étudier l'équilibre de l'équerre 3 par rapport au fuselage 1 et déterminer l'effort de poussée du vérin.

## Exercices d'approfondissement

### 6.5 Poutrelle haubannée

On s'intéresse aux différentes possibilités de mise en place pour deux câbles qui supportent une poutrelle. Le dispositif étudié, schématisé sur la figure ci-dessous, est constitué de quatre ensembles :

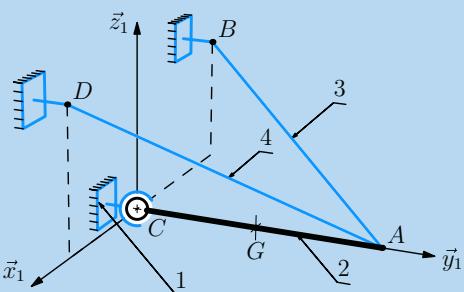
– le bâti est repéré 1 et on lui associe le repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{z}_1$  orientant la verticale ascendante du lieu. On pose

- $\overrightarrow{CB} = b\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$
- $\overrightarrow{CD} = c\vec{x}_1 + e\vec{z}_1$

– la poutrelle, repérée 2, est de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ . Elle est supposée horizontale, immobile par rapport au bâti et on pose  $\overrightarrow{CA} = a\vec{y}_1$ . Elle est en liaison sphérique de centre  $C$  avec le bâti 1. La poutrelle est supposée homogène, on pose donc  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ .

– un câble 3 sans masse, inextensible mais infiniment flexible, est accroché entre les points  $A$  et  $B$ .

– un câble 4 identique est accroché entre les points  $A$  et  $D$ .



Une poutrelle haubannée.

1. Tracer le graphe des liaisons.

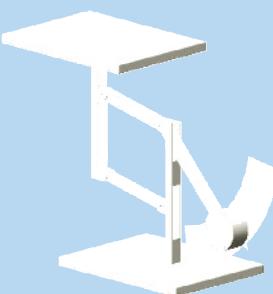
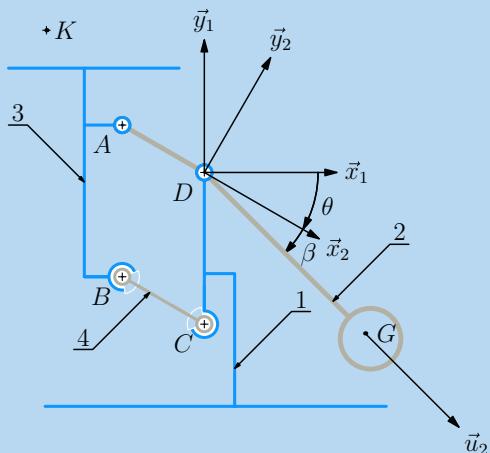
2. Détailler l'ensemble des actions mécaniques extérieures à poser pour l'étude de l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au bâti 1 supposé galiléen et dénombrer les inconnues scalaires de liaison.

3. Déterminer les expressions des tensions dans les câbles 3 et 4 en fonction de la masse  $m$  de la poutrelle et des grandeurs géométriques posées.

4. Quelles conditions a-t-on sur les coordonnées  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  des points  $B$  et  $D$  pour garantir l'équilibre.

### 6.6 Pèse-lettre mécanique

On considère le pèse-lettre mécanique schématisé ci-dessous. Lorsqu'un objet est posé sur le plateau, le mécanisme prend une nouvelle position d'équilibre caractérisée par un angle  $\theta$ , dont la valeur est relevée par le biais d'un index placé devant une graduation.



Un pèse-lettre mécanique.

Le pèse-lettre étudié comporte quatre ensembles :

– un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère  $(D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{y}_1$  orientant la verticale ascendante.

On pose  $\overrightarrow{CD} = a\vec{y}_1$

– un balancier, repéré 2, est assimilable à une ligne brisée  $ADG$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.

On lui associe un repère  $(D, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose

- l'angle  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  pour la mise en position de 2 par rapport à 1;
- le rayon  $\overrightarrow{DA} = -b\vec{x}_2$  ;
- le repère  $(D, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_2)$  défini par l'angle  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{u}_2)$  ;
- la bras  $\overrightarrow{DG} = c\vec{u}_2$ .

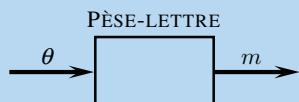
Une masse est accrochée à l'extrémité du balancier. Le centre de gravité de cet ensemble est situé au point  $G$  et la masse totale est notée  $M$ .

- un plateau repéré 3 de masse  $m_3$  supporte l'objet dont on veut évaluer la masse  $m_o$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le balancier. On pose le point  $B$  tel que  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = a$ . La masse de l'ensemble {3, objet} est notée  $m$  et l'on a bien évidemment  $m = m_o + m_3$ .
- une bielle repérée 4 est en liaison sphérique de centre  $B$  avec le plateau et de centre  $C$  avec le bâti. Sa longueur  $\|\overrightarrow{BC}\|$  est prise égale à  $b$ . Sa masse est négligée devant celle du plateau 3.

Les liaisons sont supposées sans frottement et l'accélération de la pesanteur est prise égale à  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$ .

Le référentiel lié au bâti 1 est assimilable à un référentiel galiléen.

On recherche la relation exprimant la valeur de la masse  $m$  en fonction de l'angle  $\theta$  et des paramètres  $\beta$ ,  $M$ ,  $a$  et  $b$ .



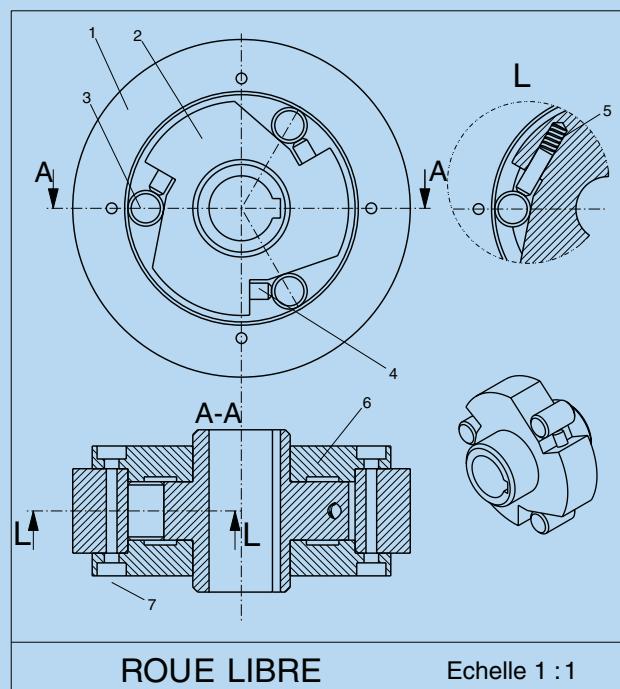
Déterminer la relation  $m = f(\theta)$  et montrer que la position du centre de masse  $K$  de l'ensemble {3, objet} n'a pas d'influence sur le résultat de la mesure.

## 6.7 Roue libre

Une roue libre est un dispositif qui n'autorise la rotation relative de deux solides que dans un seul des deux sens possibles. La figure ci-dessous présente un modèle de roue-libre à galets, dont le fonctionnement s'appuie sur le phénomène d'arc-boutement. Le paramétrage adopté est illustré sur la figure suivante.

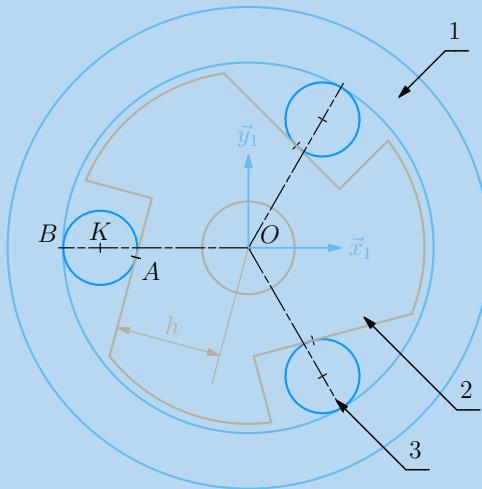
Le mécanisme étudié comprend :

- une bague repérée 1 que l'on prend comme référence. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on note la présence d'une forme cylindrique de révolution creuse d'axe  $(0, \vec{z}_1)$  et de rayon  $R$ .
- un arbre 2 que l'on considère en liaison pivot d'axe  $(0, \vec{z}_1)$  avec la bague 1 et sur lequel sont usinés trois plans parallèles à l'axe de rotation et disposés à  $120^\circ$ . On note  $h$  la distance entre les plans et l'axe de rotation.



Dessin d'ensemble d'un modèle de roue-libre à trois galets.

- trois galets 3 de rayon  $r$ , logés entre la forme cylindrique de révolution creuse de la bague et les plans de l'arbre.
- trois plots 4, poussés par les ressorts 5, maintiennent en permanence les galets en contact avec la bague et l'arbre.



Paramétrage de la roue-libre.

Concernant les actions mécaniques :

- toutes les pièces sont en acier et les contacts du galet avec la bague et l'arbre sont caractérisés par un coefficient de frottement noté  $f$  ;
- les ressorts sont de raideur suffisamment petite pour que l'on néglige leurs actions mécaniques devant les actions de contact ;
- la masse des galets 3 n'est pas prise en compte pour cette étude, ce qui permet de considérer le référentiel attaché à la bague comme galiléen.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont semblables, et on cherche à définir dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  les conditions géométriques à respecter pour que le fonctionnement souhaité soit possible.

- Peut-on anticiper le sens la rotation bloqué ?

- Définir les conditions géométriques entre les trois paramètres  $R$ ,  $r$  et  $h$  garantissant d'une part l'équilibre possible du galet 3 par rapport à la bague 1, d'autre part le montage possible du galet entre la bague et l'arbre.

- À partir des résultats précédents, justifier le sens de rotation bloqué.

## 6.8 Maxpid

On se propose de reprendre le mécanisme « Maxpid » présenté au chapitre IV à la page ??.

Le mécanisme est composé de cinq ensembles :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{OB} = b\vec{y}_1$ .
- un bras 2, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = c\vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AD} = d\vec{x}_2$ .
- une noix 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  avec le bras 2.
- un moteur électrique, dont le carter 5 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.
- une vis 3, solidaire de l'arbre du moteur. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en choisissant  $\vec{x}_3$  suivant l'axe de rotation du moteur électrique. Cette vis est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_3)$  avec le carter 5 et en liaison hélicoïdale de pas  $p$  et d'axe  $(C, \vec{x}_3)$  avec la noix 4.

Concernant les actions mécaniques :

- le référentiel lié au bâti 1 est supposé galiléen ;
- l'accélération de la pesanteur est caractérisée par  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$  ;
- toutes les liaisons sont supposées sans frottement ;
- une charge est accrochée à l'extrémité du bras 2, et cet ensemble est de masse totale  $M$ , de centre de masse le point  $D$ . On modélise ainsi cette action mécanique sur 2 par un glisseur :

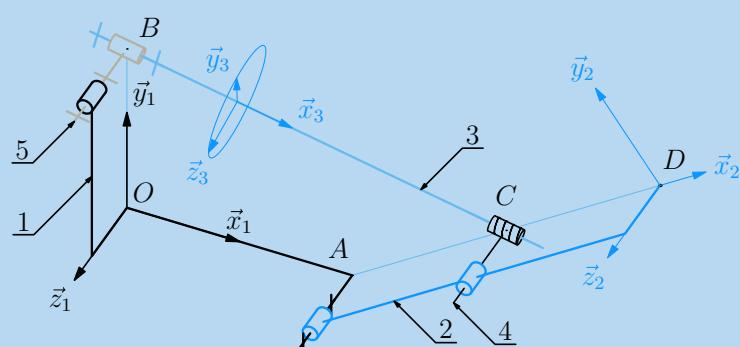


Schéma cinématique du mécanisme « Maxpid ».

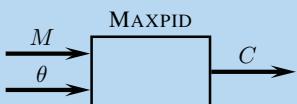
$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = D \begin{cases} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

– le stator du moteur électrique  $5m$  exerce sur le rotor  $3$  un couple noté  $C$  suivant  $\vec{x}_3$  et on pose alors

$$\mathcal{F}(5m \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{0} \\ C\vec{x}_3 \end{cases}$$

– le poids des différentes pièces est négligé devant l'action de la charge.

L'objectif de cette étude est de trouver le couple moteur nécessaire au maintien du bras  $2$  en équilibre par rapport au bâti  $1$  en fonction de la masse  $M$  de la charge et de la position  $\theta$  du bras par rapport au bâti.



**1.** Dénombrer les inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

**2.** Proposer une stratégie de résolution pour trouver la relation  $C = f(M, \theta)$ .

**3.** Mettre en œuvre cette stratégie et exprimer cette relation.

**4.** On relève pour différentes positions d'équilibre l'intensité du courant traversant le moteur. La constante de couple est égale à  $52,5 \text{ mN/A}$  et on obtient après conversion le tableau suivant :

$\theta [^\circ]$	5,9	14,8	39,9	50,7	60,9	70,1	80	89,8
$C [\text{mNm}]$	65,65	60,35	34,15	28,85	21,00	13,15	5,25	2,65

Tracer et superposer pour  $\theta$  de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  cette courbe à la courbe théorique obtenue en prenant comme valeurs numériques :

$$\begin{aligned} a &= 70 \text{ mm} & b &= 80 \text{ mm} & c &= 80 \text{ mm} & d &= 190 \text{ mm} \\ p &= 4 \text{ mm/tr} & M &= 1.9 \text{ kg} & g &= 9.81 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 6.1

1. La stratégie induite est de déterminer les deux inconnues scalaires de la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$  dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  :
- équilibre de  $4/1$  : équation de moment en  $B$  pour éviter les deux inconnues de la liaison sphère cylindre, scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter trois des cinq inconnues de la liaison pivot entre  $4$  et  $1$ . Les deux inconnues qui apparaissent sont les deux inconnues scalaires de la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$  dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  ;
  - équilibre de l'ensemble  $\{3,4\}$  par rapport à  $1$  : équation de moment en  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre  $2$  et  $3$  ;
  - équilibre de  $\{2,3\}/1$  : équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre  $1$  et  $0$ .

Que ce soit la stratégie vue en cours ou celle-ci, il est à remarquer qu'elles s'appuient toutes les deux sur l'identification de l'objet  $4$  qui n'est soumis qu'aux actions mécaniques issues de deux éléments.

2. L'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$ , issue de l'équilibre de  $3$  par rapport à  $1$ , fait intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- la composante suivant  $\vec{y}_1$  de la résultante  $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$  ;
- la composante suivant  $\vec{y}_1$  de la résultante  $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$ .

L'équation de moment en  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$ , issue de l'équilibre de  $2$  par rapport à  $1$ , fait également intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- les deux composantes dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  de la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ .

On a donc à ce stade un système de deux équations à cinq inconnues –  $C, H$  et trois inconnues de liaison – à traiter. Il manque deux équations scalaires pour arriver à un système de quatre équations à cinq inconnues. Ces deux équations ne doivent bien évidemment pas faire intervenir d'autres inconnues scalaires ! Elles existent, ce sont par exemple :

- équation de moment en  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de l'ensemble  $\{3,4\}/1$  ;
- équation de moment en  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de  $3$  par rapport à  $1$  ;

Le réflexe de l'étudiant qui se focalise uniquement sur les grandeurs recherchées le conduit à devoir écrire un plus grand nombre d'équations. Ceci dit, dans le cas où on ne trouve pas de chemin plus court, il est toujours possible d'écrire les dix huit équations scalaires !

3. La stratégie suivante reprend les trois équilibres proposés dans le cours :

- équation de moment au point  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de  $4$  par rapport à  $1$ , pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre  $1$  et  $4$

$$(\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{CB}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{CB}$  est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = k_{34} \vec{CB}$$

- équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_3$  issue de l'équilibre de  $3$  par rapport à  $1$ , pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre  $2$  et  $3$

$$(-k_{34} \vec{CB} \wedge \vec{BA} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{HA}) \cdot \vec{z}_3 = 0 \quad (1)$$

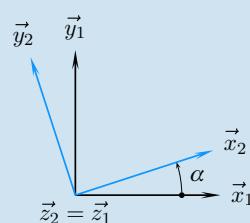
- équilibre de l'ensemble  $\{2,3\}$  par rapport à  $1$  et écriture de l'équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre  $1$  et  $2$ .

$$(-k_{34} \vec{CB} \wedge \vec{BO} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{HO} + C \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (2)$$

Les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{CB}$  sont à chaque instant égaux, ainsi que les vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{z}_1$ . On décompose dans l'équation (2) le vecteur  $\vec{BO}$  en  $\vec{BA} + \vec{AO}$  et on calcule alors la différence des deux dernières équations (2) – (1) pour trouver

$$(-H \vec{y}_1 \wedge \vec{AO} + C \vec{z}_1) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

On rappelle  $\vec{OA} = R \vec{x}_2$  et on trace la figure de définition de l'angle  $\alpha$ .

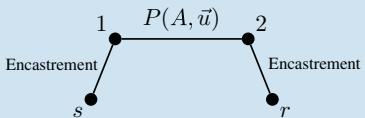


Cette figure permet d'évaluer  $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos \alpha \vec{z}_1$ , et on en déduit finalement la relation recherchée

$$C = HR \cos \alpha$$

### 6.2

1. On propose comme modèle de comportement pour le contact entre l'arbre et le carter une liaison pivot d'axe ( $A, \vec{u}$ ). Le moteur est constitué d'une chaîne ouverte de solides. Il n'y a surtout pas contact entre le rotor et le stator !



**2.** Le milieu environnant retenu pour l'ensemble {arbre, rotor} est constitué :

- du carter, par l'intermédiaire de la liaison pivot ;
- du stator, pour les phénomènes d'origine électromagnétique ;
- de la charge, pour l'énergie nécessaire à son mouvement.

Cet inventaire aboutit à cinq inconnues scalaires de liaison et à *a priori* douze inconnues scalaires pour les actions mécaniques issues de la charge et du stator.

**3.** L'équation de moment au point A scalaire  $\vec{u}$  permet d'éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot. Il est nécessaire pour poursuivre de paramétriser les actions mécaniques  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  et  $\mathcal{F}(s \rightarrow r)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(c \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(s \rightarrow r) = \begin{cases} \vec{R}(s \rightarrow r) \\ \vec{M}(A, s \rightarrow r) \end{cases}$$

Une fois ces torseurs posés, l'équation scalaire proposée donne alors

$$\vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u} + \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u} = 0$$

**4.** On appelle couple moteur l'action mécanique d'origine électro-magnétique filtrée par la liaison pivot.

$$Cm = \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u}$$

On appelle couple résistant le moment scalaire exercé par le récepteur suivant l'axe de rotation

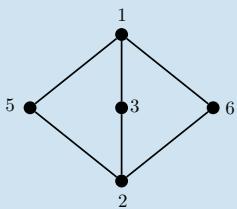
$$Cr = \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u}$$

Il faut garder à l'esprit que les grandeurs scalaires habituellement posées cachent une problématique bien plus complexe :

- on ne perçoit les effets que d'une partie des actions d'origine électromagnétique ;
- les liaisons *encaissent* toutes les composantes suivant les degrés de liberté supprimés.

### 6.3

**1.** Le graphe des liaisons comporte cinq sommets et six arcs



En ce limitant aux mouvements dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ , on dispose de douze équations scalaires issues des quatre équilibres à étudier :

- en supposant les contacts sans frottement, on compte deux inconnues scalaires par liaison pivot et une inconnue par contact, soit huit inconnues scalaires de liaison, auxquelles il faut ajouter  $F$  ;

- en supposant les contacts avec frottement, il faut ajouter au décompte précédent une inconnue tangentielle par contact, et on dénombre au total douze inconnues scalaires de liaison et  $F$  ;

Résoudre un système de douze équations à douze inconnues en prenant  $F$  comme paramètre est *a priori* possible.

**2.** La bague extérieure du roulement 5 est en équilibre par rapport à 1 sous l'action du bâti et du barreau :

Écrire l'équation de moment au point I scalaire  $\vec{z}_1$  évite les deux inconnues scalaires de la liaison pivot et on obtient

$$(\vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{CI}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{CI}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut pas être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{CI}$  est ainsi nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose

$$\vec{R}(2 \rightarrow 5) = R_{25} \vec{x}_1, \text{ avec } R_{25} \leqslant 0$$

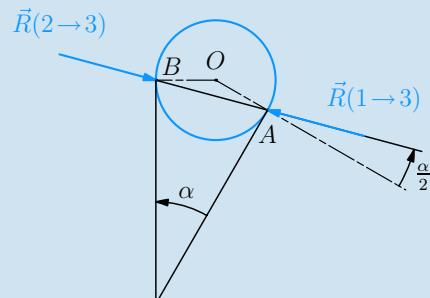
La composante tangentielle en C est à chaque instant nulle. Le phénomène de frottement n'a pas d'influence au niveau des contacts entre le barreau et les deux roulements à billes 5 et 6.

**3.** Équilibre du galet 3 par rapport à 1 :

Le galet 3 est soumis à deux actions mécaniques extérieures : celle de la rampe et celle du barreau. On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 3) = \begin{cases} -N_{13} \vec{u}_1 + T_{13} \vec{v}_1, & \text{avec } N_{13} \geqslant 0 \text{ et } \left| \frac{T_{13}}{N_{13}} \right| \leqslant f_{13} \\ \vec{0} & \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} N_{23} \vec{x}_1 + T_{23} \vec{y}_1, & \text{avec } N_{23} \geqslant 0 \text{ et } \left| \frac{T_{23}}{N_{23}} \right| \leqslant f_{23} \\ \vec{0} & \end{cases}$$



Équilibre du galet 3 par rapport au bâti 1.

L'équilibre de 3 sous l'effet des deux glisseurs entraîne que :

- les deux glisseurs ont le même axe central : la droite (AB) ;
- les deux résultantes sont opposées :

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(2 \rightarrow 3) = \vec{0}$$

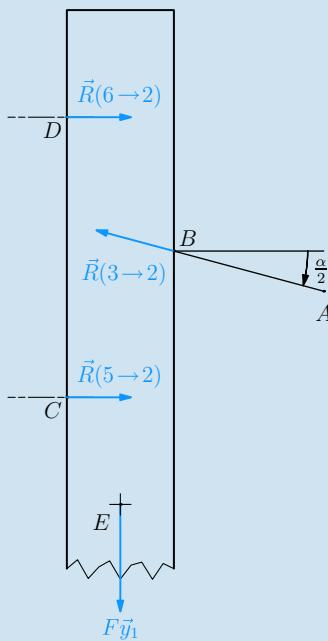
Les deux vecteurs  $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$  et  $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$  sont inclinés d'un angle  $\frac{1}{2}\alpha$  par rapport aux normales aux contacts.

Étant en situation d'adhérence, cela impose alors que :

$$\bullet \frac{1}{2}\alpha \leqslant \varphi_{23}$$

$$\bullet \frac{1}{2}\alpha \leqslant \varphi_{13}$$

4. La relation recherchée se détermine à partir de l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1. Ce dernier est soumis à quatre actions mécaniques extérieures :



– le roulement 5 ;

$$\mathcal{F}(5 \rightarrow 2) = C \begin{cases} R_{52}\vec{x}_1 \\ 0 \end{cases}$$

– le roulement 6 ;

$$\mathcal{F}(6 \rightarrow 2) = D \begin{cases} R_{62}\vec{x}_1 \\ 0 \end{cases}$$

– le galet 3 ;

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$$

– le dispositif de poussée.

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = E \begin{cases} -F\vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$

L'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$  évite les actions des deux roulements 5 et 6 et on obtient :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| \sin \frac{1}{2}\alpha = F$$

d'où :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = \frac{F}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

Conclusion :

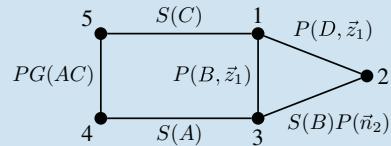
- pour obtenir un système autobloquant, on choisit  $\alpha \leq 2 \min(\varphi_{13}, \varphi_{23})$ , mais sans le prendre trop petit...
- en effet, plus l'angle  $\alpha$  est petit, plus le module de la résultante  $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$  augmente, au risque de devenir disproportionné par rapport aux autres actions mécaniques.

5. La condition sur la composante normale  $N_{32}$  entraîne un produit scalaire  $\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_1$  toujours positif. L'équation de résultante précédente ne peut donc pas être nulle lors d'une poussée  $F$  positive. Dès lors, l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1 ne peut être réalisé.

6. Le phénomène qui apparaît au niveau de ce dispositif est l'arc-boutement.

## 6.4

1. Ce mécanisme comporte cinq solides et six liaisons, ce qu'il illustre la figure ci-dessous.



Graphe des liaisons du mécanisme de l'ATR42.

Une étude systématique nécessite quatre équilibres qui fournissent 12 équations scalaires lorsque l'on se limite aux mouvements plans.

Toujours dans le plan, on dénombre 2 inconnues scalaires par liaison pivot (P), 2 par sphérique (S), 2 pour la liaison pivot glissant (PG) et 1 pour la sphère plan (SP), soit un total de 11 inconnues scalaires de liaison.

Déterminer onze inconnues de liaison en fonction du poids de la porte 2 à partir de douze équations est *a priori* faisable.

2. Le vérin {4,5} est en équilibre sous l'action de deux glisseurs  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 5)$  et  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 4)$ .

– ces deux glisseurs ont alors pour axe central la droite ( $AC$ ) ;

– et les deux résultantes sont opposées

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = -\vec{R}(1 \rightarrow 5).$$

La direction de l'effort de poussée recherché  $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$  est ainsi déjà connue.

3. L'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1 met en œuvre les actions mécaniques extérieures issues de trois éléments du milieu environnant :

- la pesanteur, dont l'action  $(p \rightarrow 2)$  est entièrement connue ;
- le fuselage, dont l'action  $(1 \rightarrow 2)$  admet deux inconnues ;
- l'équerre, dont l'action  $(3 \rightarrow 2)$  ne comporte qu'une inconnue.

On rencontre parfois des tableaux pour faire la synthèse des inconnues. Ces tableaux ne doivent comporter que trois colonnes pour que le décompte des inconnues soit correct.

Action mécanique	Un point de l'axe central	Direction	Valeur algébrique
$(p \rightarrow 2)$	G	$-\vec{y}_1$	$1 kN$
$(1 \rightarrow 2)$	D		
$(3 \rightarrow 2)$	E	$\vec{n}_2$	

On dispose de trois équations pour trois inconnues, on peut donc résoudre.

On est en présence de trois glisseurs dont deux ont leurs axes centraux sécants. L'équilibre impose que l'axe central du troisième passe aussi par ce point, et on peut tracer l'axe central du glisseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ .

La somme issue de l'équation de résultante se trace en respectant l'échelle des forces :

$$\vec{R}(p \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) + \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$$

Cette somme permet de déterminer graphiquement  $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$  et  $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ .

On relève sur la figure  $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = 3,4 \text{ kN}$  et  $\|\vec{R}(1 \rightarrow 2)\| = 2,4 \text{ kN}$ .

**4.** La méthode appliquée pour l'équilibre de 2/1 est reprise pour l'équilibre de l'équerre 3 par rapport au fuselage 1. Trois éléments du milieu environnant sont à évoquer :

- la porte cargo : l'action mécanique  $\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$  est entièrement connue ;
- le fuselage :  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 3)$  est un glisseur d'axe central passant par le point  $B$  ;
- la tige du vérin :  $\mathcal{F}(4 \rightarrow 3)$  est un glisseur d'axe central la droite ( $AC$ ) .

À nouveau trois inconnues pour trois équations, la résolution est possible. Deux des axes centraux sont sécants, donc les trois axes centraux sont concourants et la somme des résultantes est nulle.

On relève sur la figure  $\|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\| = 6,7 \text{ kN}$  et  $\|\vec{R}(4 \rightarrow 3)\| = 5,3 \text{ kN}$ .

### Conclusion

L'effort de poussée du vérin s'élève à  $5,3 \text{ kN}$ .

#### Remarque 1

Le tableau de synthèse des inconnues recensées à la deuxième question s'écrit

Action mécanique	Un point de l'axe central	Direction	Valeur algébrique
(1 → 5)	C		
(3 → 4)	A		

On compte quatre inconnues pour trois équations. Ceci explique pourquoi la résolution ne peut être que partielle. Mais si cette résolution partielle n'est pas faite en préliminaire, c'est à la quatrième question que l'on ne peut pas résoudre !

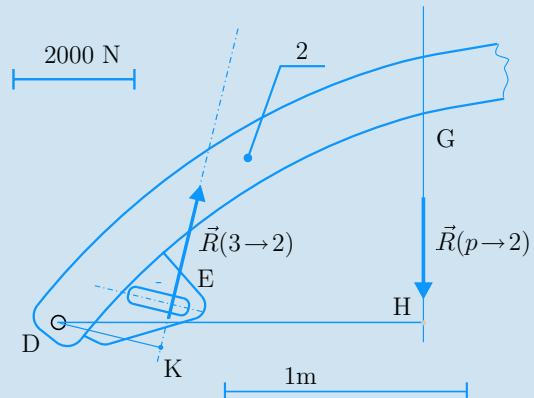
#### Remarque 2

Lors de l'équilibre de la porte 2 par rapport au fuselage 1, il est possible de ne s'intéresser qu'à l'équation de moment au point  $D$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les deux inconnues scalaires de l'action du fuselage :

$$(\vec{R}(p \rightarrow 2) \wedge \overrightarrow{GD}) \cdot \vec{z}_1 + (\vec{R}(3 \rightarrow 2) \wedge \overrightarrow{ED}) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (3)$$

La figure ci-dessous définit les points  $H$  et  $K$  qui caractérisent les *bras de levier*, c'est-à-dire les distances des axes centraux au point de calcul des moments. On décompose les deux vecteurs  $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}$ ,  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KD}$  et l'interprétation graphique de l'équation (3) permet d'écrire

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = \frac{DH}{DK} \|\vec{R}(p \rightarrow 2)\|$$



Interprétation graphique des moments au point  $D$ .

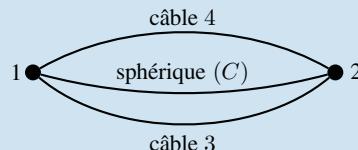
Il suffit alors de mesurer sur le plan les distances  $KD$  et  $HD$  sans se soucier de conversion, car elles sont relevées à la même échelle.

Synthèse des constructions graphiques (voir ci-contre).

## Exercices d'approfondissement

### 6.5

**1.** Pour le graphe des liaisons, les câbles ne sont pas des solides.



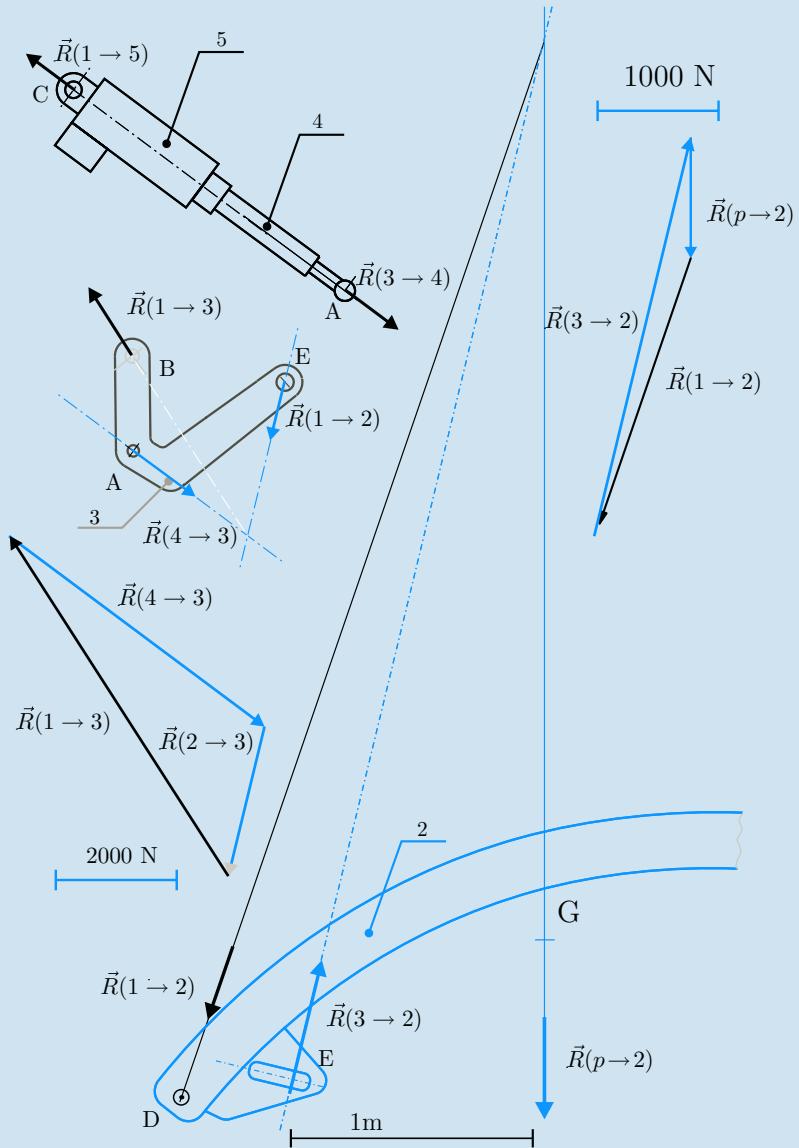
**2.** On s'intéresse à l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au support 1 supposé galiléen. Concernant l'inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur 2, on retient comme éléments du milieu environnant :

- le bâti 1     $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = C \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ 0 \end{cases}$
- le câble 3     $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = A \begin{cases} k_3 \vec{AB}, \text{ avec } k_3 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$
- le câble 4     $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = A \begin{cases} k_4 \vec{AD}, \text{ avec } k_4 \geq 0 \\ 0 \end{cases}$
- la pesanteur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{cases} -mg \vec{z}_1 \\ 0 \end{cases}$

Au bilan, on a cinq inconnues de liaison pour six équations scalaires, et le poids comme paramètre : Une solution devrait être possible !

**3.** Pour trouver la valeur de la tension dans le câble 3, il suffit d'écrire :

## Synthèse des constructions graphiques



- l'équation de moment en  $C$  pour éviter les trois inconnues de la liaison sphérique ;
- cette équation scalaire  $\overrightarrow{AD}$  pour éliminer le terme  $k_4 \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

On obtient alors l'égalité de deux produits mixtes

$$k_3 (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = mg (\overrightarrow{z}_1, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD})$$

Le premier produit mixte se transforme en utilisant successivement les cas de nullité d'un produit mixte, les permutations circulaires et l'antisymétrie du produit vectoriel

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) \\ &= (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= (cd - be)a \end{aligned}$$

Le deuxième produit mixte se traite de la même manière

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{z}_1, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{z}_4) \cdot \overrightarrow{GC} \\ &= \frac{1}{2}ac \end{aligned}$$

On déduit de ces deux calculs la valeur du coefficient  $k_3$

$$k_3 = \frac{mgc}{2(cd - be)}$$

Un raisonnement analogue et des calculs similaires conduisent à la détermination du coefficient  $k_4$

$$k_4 = \frac{-mgb}{2(cd - be)}$$

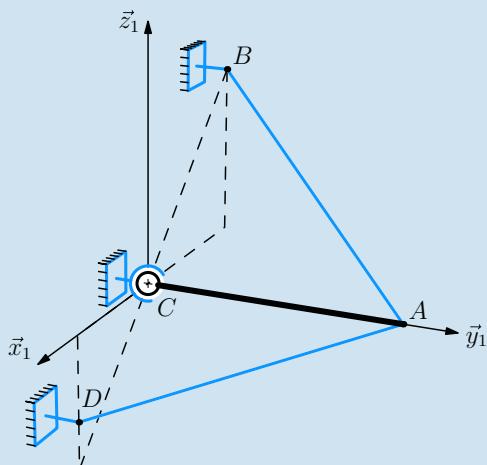
Les tensions dans les câbles sont obtenues en multipliant les coefficients  $k_3$  et  $k_4$  respectivement par les normes des vecteurs  $\|\overrightarrow{AB}\|$  et  $\|\overrightarrow{AC}\|$ .

4. Les conditions d'équilibre ont été énoncées lors du paramétrage des actions mécaniques. Il est nécessaire que les coefficients  $k_3$  et  $k_4$  soient tous les deux positifs ou nuls. On constate que le quotient  $k_3/k_4$  est égal à  $-c/b$ . Les valeurs de  $b$  et de  $c$  doivent donc être de signes opposés. En s'inspirant de la figure proposée, on peut choisir  $c$  positif et  $b$  négatif.

Le choix du signe de  $c$  étant fait, le terme  $(cd - be)$  doit être positif. Ce terme est issu du produit vectoriel  $\vec{CB} \wedge \vec{CD}$  et indique que l'angle entre  $\vec{CB}$  et  $\vec{CD}$ , compté de  $\vec{CB}$  vers  $\vec{CD}$  dans le sens positif, doit être compris entre  $+0^\circ$  et  $+180^\circ$ .

Le produit vectoriel doit également être non nul, les trois points  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne doivent donc pas être alignés.

La figure ci-dessous définit une configuration d'équilibre possible, avec le point  $D$  en dessous de la poutrelle.

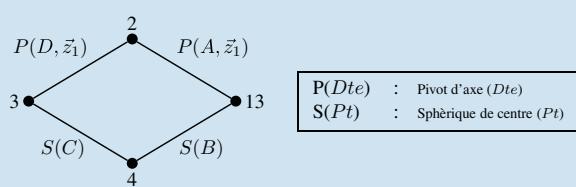


Une configuration d'équilibre possible.

## 6.6 Lecture et décodage

D'un point de vue géométrique, on constate après montage que le quadrilatère  $(ABCD)$  est un parallélogramme déformable.

Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comportant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons suivant.



Graphe des liaisons du pèse-lettre.

## Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

L'étude systématique de ce mécanisme nécessite trois équilibres, ce qui donne 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte deux liaisons pivot et deux liaisons sphériques, et admet donc 16 inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement. La masse  $m$  de l'ensemble {plateau, objet} est également une inconnue du problème. On a donc un total de 17 inconnues.

Exprimer dix-sept inconnues en fonction du paramètre  $M$  à partir de dix-huit équations devrait être possible.

## Stratégie de résolution

Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée de solides pour résoudre, ce qui entraîne l'écriture d'au moins trois équations scalaires :

- la bielle 4 est soumise à l'action de deux glisseurs, donc l'équation de moment au point  $C$  donne la direction de la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ , tout en évitant les trois inconnues scalaires de la liaison sphérique entre la bielle et le bâti ;
- l'équation de moment au point  $A$  issue de l'équilibre du plateau 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le plateau et le balancier ;
- l'équation de moment au point  $D$  issue de l'équilibre de l'ensemble {2, 3} par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le balancier et le bâti.

## Résolution

### Équilibre de la bielle 4 par rapport au bâti 1

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer : celle de 3 sur 4 et celle de 1 sur 4. Les deux liaisons concernées sont des liaisons sphériques de centres respectifs  $B$  et  $C$ . L'équation de moment au point  $C$  s'écrit alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{BC} = \vec{0}$$

On en déduit que la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$  est colinéaire au vecteur  $\vec{BC}$ , et on pose, en utilisant les propriétés des parallélogrammes

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = B \begin{cases} R_{34}\vec{x}_2 \\ 0 \end{cases}$$

### Équilibre du plateau 3 et de l'objet pesé par rapport au bâti 1

Trois actions mécaniques extérieures sont à considérer :

- action de la pesanteur

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) = K \begin{cases} -mg\vec{y}_1 \\ 0 \end{cases}$$

- action de la bielle 4, dont la forme a été trouvé précédemment

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = -\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = B \begin{cases} R_{43}\vec{x}_2 \\ 0 \end{cases}$$

- enfin l'action du balancier 2 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = A \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3), \end{cases}$$

avec  $\vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = 0$

L'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  donne alors une somme nulle de deux produits mixtes

$$(-mg\vec{y}_1, \overrightarrow{KA}, \vec{z}_1) + (R_{43}\vec{x}_2, \overrightarrow{BA}, \vec{z}_1) = 0 \quad (4)$$

Il est judicieux d'attendre l'équation issue du dernier équilibre avant de traiter les produits mixtes.

*Équilibre de l'ensemble {2 + 3} par rapport au bâti 1*

Quatre actions mécaniques extérieures sont à considérer :

- action de la pesanteur sur le plateau 3 et l'objet pesé
- action de la pesanteur sur le balancier 2

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{cases} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- action de la biellette 4

- action du bâti 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

L'équation de moment au point  $D$  scalaire  $\vec{z}_1$  donne alors une somme nulle de trois produits mixtes

$$\begin{aligned} (-mg\vec{y}_1, \overrightarrow{KD}, \vec{z}_1) + (-Mg\vec{y}_1, \overrightarrow{GD}, \vec{z}_1) \\ + (R_{43}\vec{x}_2, \overrightarrow{CD}, \vec{z}_1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

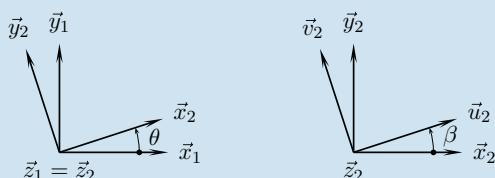
*Calcul effectif*

Les deux vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont à chaque instant égaux. On effectue alors la différence des deux équations (4) – (5) pour obtenir immédiatement

$$m(\vec{y}_1, \overrightarrow{DA}, \vec{z}_1) + M(\vec{y}_1, \overrightarrow{GD}, \vec{z}_1) = 0$$

Après substitution, permutation et échange de signe, le résultat recherché s'exprime par

$$m = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2} \frac{c}{b} M$$



Les figures de définition des angles permettent d'évaluer les deux produits scalaires et on obtient finalement

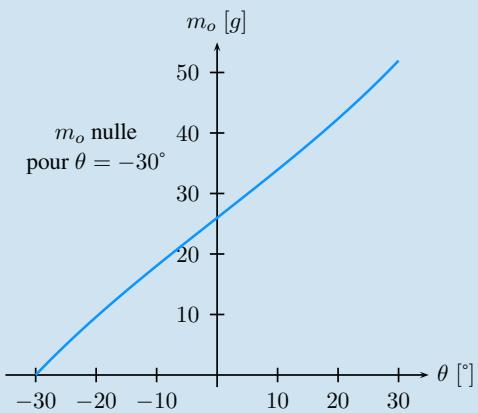
$$m = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos(\theta)} \frac{c}{b} M$$

## Conclusions

Trois remarques s'imposent :

- le résultat ne dépend pas de la position de l'objet pesé sur le plateau ;
- la graduation n'est pas linéaire ;
- la balance ne donne aucun résultat si l'angle  $\beta$  est nul.

La figure ci-après donne un exemple de courbe caractéristique obtenue avec un angle  $\beta = -30^\circ$  et un contrepoids  $M$  d'une centaine de gramme.



Courbe caractéristique  $m_o = f(\theta)$ .

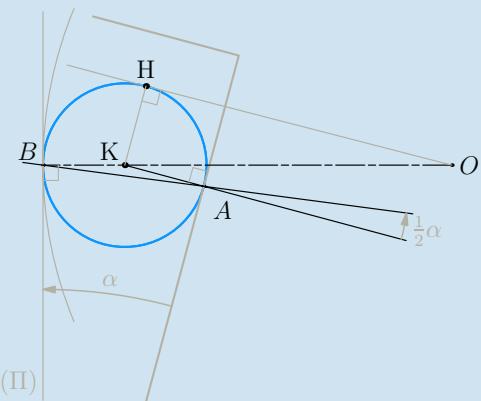
## 6.7

1. Il faut imaginer les mouvements des pièces à partir de la figure « Paramétrage de la roue libre » de l'énoncé pour anticiper le résultat :

- Lors d'une rotation de 2/1 dans le sens positif, ce sont les plots 4 qui entraînent les galets. Si on les supprime, on peut imaginer le mouvement de 2/1 en les laissant au contact de la bague et en constatant la rupture du contact avec l'arbre.
- Une rotation de 2/1 dans le sens négatif tend à écraser les galets entre arbre et bague...

En conséquence, le sens de rotation impossible de 2/1 est le sens négatif.

2. On s'intéresse à l'équilibre d'un des galet 3 par rapport à la bague 1.



Particularités géométriques au niveau d'un galet.

La figure ci-dessus, tracée dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  illustre le raisonnement mené :

- on trace  $(\Pi)$  le plan tangent au point  $B$  et on pose  $\alpha$  l'angle entre les deux plans tangents aux contacts.
- si le galet 3 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, alors les axes centraux sont confondus et sont caractérisés par la droite  $(AB)$ .

– pour que l'équilibre soit possible, il est nécessaire d'avoir un angle  $\alpha$  suffisamment petit, ce qui est exprimé par les lois de frottement

$$\tan \frac{\alpha}{2} \leqslant f$$

– dans le triangle  $(K O H)$ , droit au point  $H$ , on a

$$\cos \alpha = \frac{h+r}{R-r}$$

– on connaît la relation entre le cosinus et la tangente d'un angle

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}$$

En définitive, deux conditions géométriques sont à considérer :

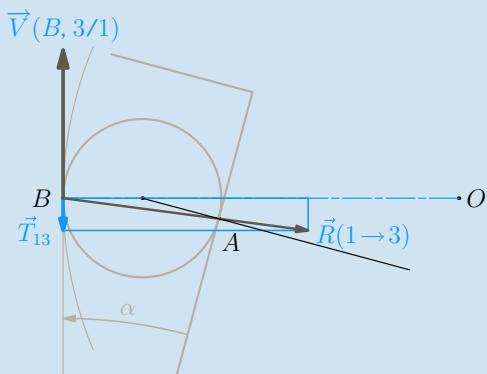
– Il faut pouvoir monter le galet entre le l'arbre et la bague, ce qui se traduit par

$$2r + h \leqslant R$$

– l'arc boutement est possible si l'angle  $\alpha$  reste suffisamment petit, sa valeur ne dépendant que de  $R$  et de  $h$

$$\frac{R-h}{R+h} \leqslant f$$

**3.** Un raisonnement cinématique consiste à imaginer solidaire l'arbre et le galet. On utilise alors le fait qu'au point de contact  $B$ , la composante tangentielle  $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$  s'oppose au vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(B,3/1)$  qui apparaît en l'absence de frottement.



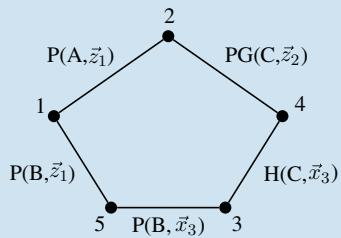
Vitesse de glissement virtuelle au point  $B$ .

Le vecteur vitesse tracé sur la figure ci-dessus correspond au cas où la rotation virtuelle de  $2/1$  est négative. Envisager le vecteur vitesse opposé entraîne le changement de signe pour la composante tangentielle  $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$ , donc une résultante d'actions mécaniques également opposée, ce qui est incompatible avec le contact bague-galet.

On peut compléter ce raisonnement en considérant le moment au point  $O$  suivant  $\vec{z}_1$  des différentes actions mécaniques exercées par le bâti 1 sur l'ensemble  $\{2,3_i\}$ . Il ne peut être que positif !

## 6.8

**1.** Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de cinq solides.



Une étude systématique consiste à étudier quatre équilibres, ce qui donne vingt quatre équations scalaires.

On identifie trois liaisons pivot, une liaison pivot glissant et une liaison hélicoïdale, ce qui permet de dénombrer vingt quatre inconnues de liaison.

**2.** Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée. On peut donc difficilement espérer résoudre le problème avec moins de quatre équations scalaires. Ces dernières font intervenir le couple moteur et trois inconnues de liaison. Reste à déterminer lesquelles choisir :

– la liaison hélicoïdale permet la conversion du mouvement de rotation du moteur par rapport au carter 5 en translation suivant  $\vec{x}_3$  de la noix 4 par rapport à 3. On décide alors de prendre comme première inconnue les deux composantes de la liaison hélicoïdale suivant  $\vec{x}_3$ . Elles sont reliées par la relation

$$\vec{M}(C,3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = -p \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3$$

– la rotation du bras 2 par rapport au bâti 1 est empêchée par la noix 4. On choisit alors comme deux autres inconnues les composantes de la résultante  $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$ .

Ces trois inconnues étant choisies, il faut trouver quatre équations scalaires évitant les vingt-et-un autres inconnues scalaires de liaison :

**Eq1** : l'ensemble de pièces  $\{3,4,5\}$  n'a dans son environnement que deux éléments. L'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de cet ensemble  $\{3,4,5\}$  par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 5 et 1 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

**Eq2** : l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de 2 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1, ainsi que les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

**Eq3** : l'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{x}_3$  issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 5, ainsi que les quatre inconnues que l'on veut éviter pour la liaison hélicoïdale entre 3 et 4.

**Eq4** : l'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_3$  issue de l'équilibre de 4 par rapport à 1 évite les quatre inconnues indésirables de la liaison hélicoïdale entre 3 et 4 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

**3.** L'équilibre **Eq4** ne fait intervenir que deux actions mécaniques extérieures :

- la vis 3 sur la noix 4 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

On en déduit alors l'équation scalaire citée

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 + \vec{R}(2 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad (6)$$

L'équilibre **Eq3** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le carter 5 sur la vis 3 ;
- la noix 4 sur la vis 3 ;
- le stator du moteur 5m sur le rotor 3.

L'équation scalaire proposée s'exprime alors

$$(\vec{M}(B,4 \rightarrow 3) + \vec{M}(B,5m \rightarrow 3)) \cdot \vec{x}_3 = 0$$

Après substitution, on obtient

$$C = p \vec{R}(4 \rightarrow 3) \cdot \vec{x}_3 \quad (7)$$

Les deux équations (6) et (7) permettent d'écrire

$$C = -p \vec{R}(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_3 \quad (8)$$

Le premier équilibre **Eq1** proposé fait intervenir deux actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le carter 5 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

L'équation recherchée donne alors

$$(\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{C}\vec{B}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{C}\vec{B}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{C}\vec{B}$  est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose au choix

$$\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{C}\vec{B} = X_{42} \vec{x}_3 \quad (9)$$

Les équations (8) et (9) permettent d'écrire

$$X_{42} = -k_{42} \|\vec{C}\vec{B}\| = -\frac{C}{p} \quad (10)$$

Le dernier équilibre **Eq2** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le bras 2 ;
- la noix 4 sur le bras 2 ;
- la charge  $c$  sur le bras 2.

L'équation scalaire recherchée s'exprime alors

$$(\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{C}\vec{A}) \cdot \vec{z}_1 + (\vec{R}(c \rightarrow 2) \wedge \vec{D}\vec{A}) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Pour éviter les angles indésirables, le premier produit mixte s'évalue en prenant  $\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{C}\vec{B}$  et en décomposant  $\vec{C}\vec{B}$  en  $\vec{C}\vec{A} + \vec{A}\vec{B}$ . On obtient ainsi

$$k_{42} ((b\vec{y}_1 - a\vec{x}_1) \wedge -\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = k_{42} c(b \cos \theta + a \sin \theta).$$

Le second produit mixte donne  $(Mg\vec{y}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = -Mgd \cos \theta$  et on en déduit

$$k_{42} = \frac{mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (11)$$

Les deux dernières équations (10) et (11) permettent d'écrire

$$C = p \|\vec{C}\vec{B}\| \frac{Mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (12)$$

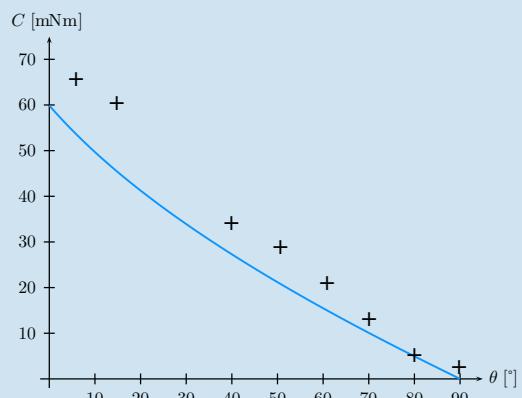
Il reste à exprimer  $\|\vec{C}\vec{B}\|$  en fonction de  $\theta$  et des grandeurs géométriques

$$\begin{aligned} \vec{C}\vec{B} &= \vec{C}\vec{A} + \vec{A}\vec{B} \\ &= -c\vec{x}_2 - a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 \\ \vec{C}\vec{B}^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression recherchée

$$C = pMg \frac{d \cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta}}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (13)$$

**4.** On trace la courbe obtenue et on lui superpose les points expérimentaux



Superposition de la courbe théorique et des points expérimentaux.



## Plan

7.1	Introduction	181
7.2	Problématique générale	182
7.3	Mise en équation des fonctions logiques	185
7.4	Circuits logiques combinatoires	187
7.5	Simplification des fonctions logiques	190
7.6	Les 16 fonctions logiques de deux variables	191
7.7	Application au codage et au traitement de l'information	193
	Exercices d'application	201
	Exercices d'approfondissement	201
	Solutions des exercices	203

## Introduction

Bon nombre de systèmes industriels sont pilotés par et/ou délivrent des informations discontinues dans le temps. Ces systèmes sont qualifiés de discrets au sens où ils véhiculent et traitent des informations qui ne sont pas des fonctions continues du temps mais qui n'existent qu'à des instants particuliers.

Différents outils permettent d'appréhender de tels dispositifs. Nous consacrons ce chapitre aux systèmes logiques combinatoires qui figurent parmi les plus simples à analyser et à mettre en œuvre.

## Prérequis

- À part de bonnes dispositions à raisonner « logiquement », il n'existe pratiquement aucun prérequis à l'étude de ce chapitre.

## Objectifs

- Aborder quelques outils élémentaires permettant de décrire les systèmes combinatoires.
- Analyser et réaliser, à partir de ces outils, quelques dispositifs simples.

## 7.1 Introduction

Les *systèmes logiques combinatoires* sont des dispositifs qui, d'une manière générale, sont sollicités par des signaux d'entrée qui ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes. Leur comportement, identifiable par ce que l'on peut considérer comme des signaux de sortie, ne dépend alors que de l'état de ces signaux d'entrée.

On considère une centrale d'alarme qui recueille un ensemble de signaux en provenance de capteurs situés sur quatre portes d'entrée d'un bâtiment. Chacun des quatre capteurs délivre une information très simple signalant si la porte correspondante est ouverte ou fermée (on supposera, évidemment, qu'il n'existe que ces deux états). Ces

signaux sont tout à fait binaires car ils ne peuvent prendre que deux valeurs différentes que nous pouvons par exemple nommer :

- **vrai ou 1** pour une porte ouverte et d'autre part ;
- **faux ou 0** pour une porte fermée.

Si l'on souhaite par exemple déclencher l'alarme lorsque 2 au moins des 4 portes sont ouvertes, le dispositif est chargé de réagir en fonction de la combinaison des signaux d'entrée. C'est en ce sens qu'il est dit **combinatoire**. Son signal de sortie, qui correspond au déclenchement (ou non) d'une sirène, est tout aussi binaire que ses signaux d'entrée. La manière dont il sera conçu (ou programmé) devra correspondre à ce qu'on attend de lui, en l'occurrence un déclenchement si au moins deux portes sont ouvertes. La figure 7.1 présente le schéma de principe du dispositif, avec ses 4 entrées et son unique sortie dont l'état dépend bien de la combinaison des 4 signaux d'entrée.

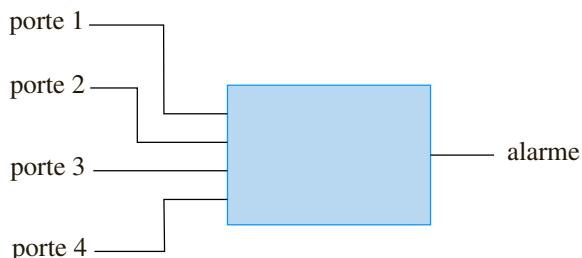


Figure 7.1

## 7.2 Problématique générale

### Définition

Un **système logique combinatoire** est un dispositif qui possède un nombre d'entrées logiques (binaires)  $n$  donné, soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$  et on suppose, pour simplifier, qu'il dispose d'une sortie  $s$  unique, binaire elle aussi, qui peut être considérée comme une fonction des variables logiques d'entrée :

Soit

$$s = f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

La figure 7.2 représente le schéma générique d'un tel système logique.

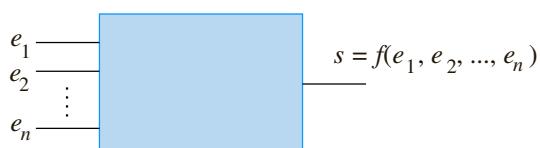


Figure 7.2

L'ensemble  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est appelé **combinaison d'entrée** du système. On utilise également parfois le terme de **vecteur d'entrée**.

## 7.2.1

### Notion de table de vérité

Pour les systèmes comportant un nombre réduit d'entrées (elles seront limitées à 4 dans le cadre de la présentation qui suit), il est relativement facile d'établir la liste exhaustive de toutes les combinaisons d'entrée possibles et, pour chacune d'entre elles, de préciser la valeur de la fonction logique réalisée par le système. On présente alors ces résultats dans un tableau appelé **table de vérité**. Dans le cas d'un système à 4 entrées, il y a 16 combinaisons possibles à l'entrée ( $2^4$ ) que l'on peut représenter par les nombres binaires ordonnés de 0000 à 1111.

#### Exemple

En reprenant l'exemple du paragraphe 7.1, on peut expliciter les valeurs de la fonction  $f(a,b,c,d)$ , comme cela est représenté sur la figure 7.3, en fonction des 16 combinaisons possibles. La fonction d'alarme prenant la valeur 1 lorsqu'au moins deux des variables d'entrée sont égales à 1, il suffit de placer la valeur 1 sur chaque ligne correspondante et 0 partout ailleurs.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Figure 7.3

## 7.2.2

### Algèbre de Boole

George Boole, mathématicien et philosophe britannique autodidacte du XIX<sup>e</sup> siècle a débuté sa carrière comme instituteur avant d'obtenir une chaire de mathématiques au Queen's College de Cork. Il est certes le fondateur, avec De Morgan, de la logique moderne mais on lui doit bon nombre de travaux sur les équations différentielles et sur les probabilités.

Un système logique étant représenté par une fonction logique, la mise en équation d'une telle fonction constitue le modèle de fonctionnement du système. Il convient par ailleurs de rechercher systématiquement à exprimer la fonction de sortie  $f$  en fonction des variables d'entrée ( $a,b,c,d$ ) du système.

C'est l'algèbre de Boole qui fournit le formalisme nécessaire à cette mise en équation.

### Définition

L'algèbre de Boole est l'ensemble  $B = \{0; 1\}$  muni de la loi « OU » notée «  $x + y$  », de la loi « ET » notée «  $xy$  » et de la négation « NON » notée «  $\bar{x}$  », où  $x$  et  $y$  sont deux éléments de l'ensemble  $B$ . Les éléments 0 et 1 de  $B$  peuvent être appelés *vrai* ou *faux*, *oui* ou *non*.

Ces lois sont définies par :

- $x \cdot y = 1$  si et seulement si  $x = 1$  et  $y = 1$ .
- $x + y = 1$  si et seulement si l'une au moins des deux variables vaut 1.
- $\bar{x} = 1$  si et seulement si  $x = 0$  et réciproquement (lire «  $x$  barre »).

Compte tenu de la taille de l'ensemble  $B$  et de la simplicité de ces lois élémentaires, il est très facile d'établir leurs tables de vérité (figure 7.4).

$x$	$y$	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

loi OU

$x$	$y$	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

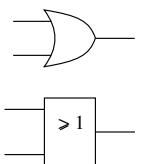
loi ET

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

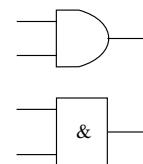
négation

Figure 7.4

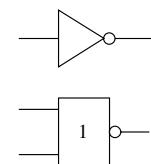
Par ailleurs, il est d'usage de représenter schématiquement les opérateurs élémentaires ET, OU et NON, selon des conventions qui s'avéreront fort utiles par la suite. La figure 7.5 présente ces schémas normalisés (norme anglo-saxonne en haut et norme française en bas).



loi OU



loi ET



négation

Figure 7.5

Ce formalisme de Boole, ainsi que l'ensemble des propriétés qui lui sont associées, est très utile pour mettre en équation les systèmes logiques car toute fonction logique combinatoire peut s'exprimer sous la forme de combinaisons des variables d'entrées utilisant les lois élémentaires ET, OU et NON.

### 7.2.3

## Propriétés fondamentales de l'algèbre de Boole

Les lois ET et OU possèdent un certain nombre de propriétés qui confèrent à l'ensemble  $B$  sa structure d'algèbre :

- Commutativité des deux lois : 
$$\begin{cases} x + y = y + x \\ xy = yx \end{cases}$$
- Associativité des deux lois : 
$$\begin{cases} x + (y + z) = (x + y) + z \\ x(yz) = (xy)z \end{cases}$$
- Éléments neutres : 
$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x \cdot 1 = x \end{cases}$$
- Éléments absorbants et symétriques : 
$$\begin{cases} x + 1 = 1 & x + \bar{x} = 1 \\ x \cdot 0 = 0 & x \cdot \bar{x} = 0 \end{cases}$$
- Idempotence : 
$$\begin{cases} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{cases}$$
- Distributivité de chacune des lois : 
$$\begin{cases} x \cdot (y + z) = xy + xz \\ x + (yz) = (x + y) \cdot (x + z) \end{cases}$$

**Remarque :** La manipulation des opérateurs booléens élémentaires peut s'avérer déroutante de prime abord. Pour mieux visualiser leur fonctionnement, il est conseillé, au début, tout du moins, de faire l'effort, dans ces équations, de lire « ET » à la place de « . » et « OU », à la place de « + ». De même, on pourra substituer la grandeur vrai au « 1 » et la grandeur faux au « 0 ». Par exemple, dans l'équation mettant en évidence l'élément absorbant de la loi OU, l'écriture peut paraître hermétique. Elle l'est beaucoup moins si on lit :  $x \text{ OU vrai} = \text{vrai}$ . En effet (et c'est particulièrement visible si on se réfère à la table de vérité de la loi OU), quelque soit la valeur de  $x$  (vrai ou faux), la combinaison de  $x$  avec la grandeur vrai donne toujours le résultat vrai.

## 7.2.4 Lois de De Morgan

Outre les propriétés fondamentales regroupées au paragraphe précédent, deux autres lois sont à considérer comme essentielles ; il s'agit des lois de De Morgan qui s'expriment ainsi :

$$\text{Première loi de De Morgan : } \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\text{Deuxième loi de De Morgan : } \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Ces deux égalités, qui sont très utiles dans le calcul des expressions booléennes, sont facilement vérifiables par l'intermédiaire des tables de vérité des différentes expressions (figure 7.6).

$x$	$y$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$x$	$y$	$\overline{x+y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Figure 7.6

## 7.3 Mise en équation des fonctions logiques

Dans l'étude d'un système logique, la mise en équation de la fonction logique correspondante est une étape primordiale. Compte tenu des propriétés particulières de l'algèbre de Boole, il existe de multiples expressions possibles pour une seule et même

fonction. Entre la forme brute qui bien souvent découle d'une analyse systématique du fonctionnement du système et la forme plus standardisée qui peut-être déduite de la table de vérité, il y a souvent un fossé important. Il existe également, pour toute fonction logique combinatoire, une forme minimale, bien plus intéressante car c'est elle qui sert de base à la construction du système et, étant minimale, elle requiert moins d'éléments pour être réalisée.

### 7.3.1

### Exemple

Soit la fonction logique définie par  $f(a,b,c,d) = \overline{(b+c)} \cdot a + \overline{d} \cdot (\overline{b} + c)$  en imaginant que cette forme fut déduite de l'analyse du fonctionnement d'un système. Pour établir la table de vérité de cette fonction, on remarque qu'elle est formée du OU logique de trois termes simples eux-mêmes composés d'expressions plus élémentaires. La figure 7.7 montre comment la table de la fonction peut être déterminée en évaluant progressivement les termes simples jusqu'à aboutir, pour chaque valeur du vecteur d'entrée, au résultat attendu.

$a$	$b$	$c$	$d$	$b+\bar{c}$	$(\overline{b}+\overline{c}).a$	$\overline{d}$	$\overline{b}+c$	$\overline{d}.\overline{b}+c$	$f$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0

Figure 7.7

En examinant attentivement cette table de vérité, on remarque qu'elle établit, pour chaque combinaison d'entrée ordonnée de 0000 à 1111, la valeur (0 ou 1) de la fonction.

On peut toutefois lire ce tableau d'une manière un peu différente : en partant de la dernière colonne, on peut en effet formuler que la fonction vaut 1, autrement dit, est vraie, pour les valeurs suivantes de l'entrée : 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1110, autrement dit lorsque l'un des termes suivants vaut 1 :  $\overline{ab}\overline{cd}$ ,  $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$ ,  $\overline{ab}\overline{c}\overline{d}$ ,  $\overline{ab}\overline{c}\overline{d}$ ,  $\overline{abc}\overline{d}$ ,  $\overline{abc}\overline{d}$ ,  $\overline{abcd}$ .

La fonction est donc vraie lorsque l'un ou l'autre de ces termes est vrai ; elle est donc le OU logique de tous ces termes :

On a donc :

$$f = \overline{ab}\overline{cd} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{ab}\overline{c}\overline{d} + \overline{ab}\overline{c}\overline{d} + \overline{abc}\overline{d} + \overline{abc}\overline{d} + \overline{abcd}$$

$$+ \overline{ab}\overline{cd} + \overline{ab}\overline{cd} + \overline{ab}\overline{cd} + \overline{ab}\overline{cd} + ab\overline{cd}$$

## 7.3.2

# Forme canonique

### Définition

Quelle que soit la fonction logique combinatoire, il est toujours possible de l'exprimer sous cette forme, appelée **forme canonique**, qui se présente comme la somme (le OU logique) d'un certain nombre de termes appelés **mintermes**, composés chacun du ET logique de toutes les variables, complémentées ou non. Le nombre de mintermes possible est égal à  $2^n$  où  $n$  représente le nombre de variables d'entrée du système.

# 7.4 Circuits logiques combinatoires

## 7.4.1

### Définition



L'électronique logique a ainsi pour objet de concevoir des systèmes logiques de plusieurs variables en assemblant des circuits élémentaires ET, OU et NON appelés portes logiques, fabriqués à partir de transistors bipolaires (technologie TTL) ou à effet de champ (technologie CMOS) et disponibles sous forme de circuits intégrés comportant plusieurs portes de même nature. Ces circuits nécessitent une alimentation, en général 0 V / 5 V.

La mise en œuvre pratique de systèmes logiques est, la plupart du temps, basée sur la technologie des **circuits logiques électroniques**. Il s'agit de composants intégrés élémentaires qui matérialisent un certain nombre d'opérateurs élémentaires. Les signaux d'entrées sont caractérisés par leur tension et les grandeurs 0 et 1 correspondent à deux valeurs différentes de cette tension ; il s'agit souvent de 0 V et de 5 V, respectivement pour 0 et 1.

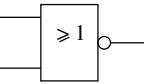
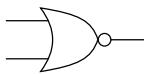
Les schémas électriques correspondant aux portes logiques ET, OU et NON sont les mêmes que ceux présentés sur la figure 7.5.

$x$	$y$	$\overline{x+y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

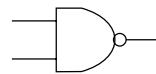
fonction NON-OU

$x$	$y$	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

fonction NON-ET



porte NOR



porte NAND

Figure 7.8

Bien que l'on dispose sans problème de portes logiques électroniques ET, OU et NON (appelées souvent AND, OR et inverseur), on utilise très souvent des circuits électriques réalisant les opérations NON-OU (ou NOR) et NON-ET (ou NAND), plus faciles à fabriquer et donc moins coûteuses. Il est normalement possible de réaliser n'importe quelle fonction logique avec ces deux types de portes élémentaires. La figure 7.8 présente la représentation symbolique anglo-saxonne et française de ces deux portes ainsi que leurs tables de vérité.

On notera que pour fabriquer un inverseur à partir d'une porte NAND ou à partir d'une porte NOR, il suffit d'en court-circuiter les deux entrées pour n'en faire qu'une seule (figure 7.9). On remarque en effet, dans les tables de vérité de ces deux opérateurs (figure 7.8) que si  $x = y$  (première et quatrième ligne), c'est la bien la fonction de négation qui est réalisée.



Figure 7.9

## 7.4.2

### Exemple

On considère la fonction logique appelée « OU exclusif » (ou encore XOR) et définie par :

$a \oplus b = 1$  si et seulement si on a  $a = 1$  ou  $b = 1$ , mais  $a \oplus b = 0$  pour  $a = b = 1$ .

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figure 7.10

La figure 7.10 représente la table de vérité de la fonction XOR et sa forme canonique se lit immédiatement dans cette table :

$$a \oplus b = \overline{ab} + ab$$

En effet, la fonction XOR vaut 1 lorsque l'on a :

- soit :  $a = 0$  ET  $b = 1$ , ce qui signifie que  $\overline{ab}$  vaut 1,
- soit :  $a = 1$  ET  $b = 0$ , ce qui signifie que  $ab$  vaut 1.

La fonction XOR est donc égale à 1 si  $\overline{ab} = 1$  ou si  $ab = 1$ .

Pour réaliser le circuit logique correspondant en n'utilisant que des portes NAND, on utilise une méthode qui consiste à « forcer » l'apparition d'opérateurs NAND dans l'expression de la fonction.

Si le circuit ne doit être constitué que de portes NAND, l'étage final, celui qui délivre le signal de sortie, sera immanquablement une porte NAND. On fait donc apparaître une première fois l'opérateur NAND dans la fonction en la complémentant deux fois :

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{ab}} + ab}}$$

L'expression  $f = \overline{\overline{\overline{\overline{ab}} + ab}}$  peut être transformée à l'aide d'une des lois de De Morgan :

$$\overline{\overline{\overline{\overline{ab}} + ab}} = (\overline{\overline{ab}}) \cdot (\overline{ab})$$

$$\text{D'où : } f = \overline{(\overline{\overline{ab}}) \cdot (\overline{ab})}$$

La fonction  $f$  est donc le NAND de  $\overline{ab}$  et de  $\overline{ab}$ .

On dessine alors immédiatement ce que sera le dernier étage de notre circuit logique, figure 7.11.

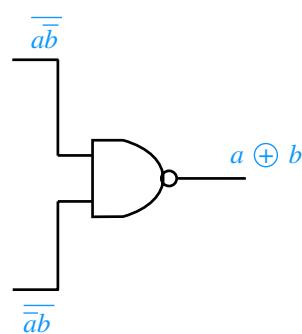


Figure 7.11

Chacune des deux expressions,  $\bar{a}b$  et  $\bar{a}\bar{b}$  se trouvent être elles-mêmes les résultats respectifs de l'opérateur NAND, d'une part entre  $\bar{a}$  et  $b$  et d'autre part, entre  $a$  et  $\bar{b}$ . Le schéma progresse alors de la droite vers la gauche : on le complète avec deux opérateurs NAND (figure 7.12).

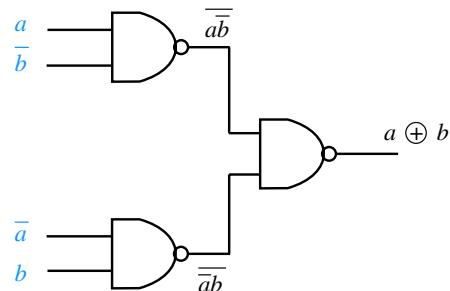


Figure 7.12

Il reste alors à implanter les deux inverseurs nécessaires à « fabriquer »  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  et on obtient le schéma complet à deux entrées (figure 7.13).

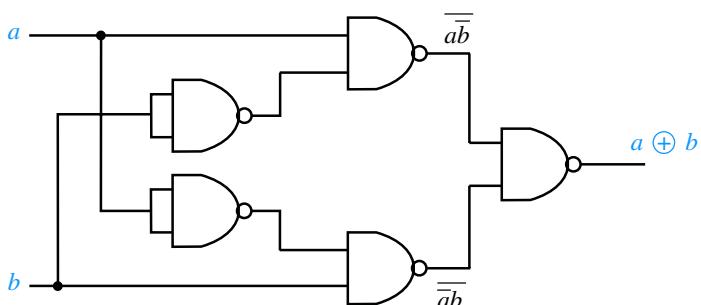


Figure 7.13



Il existe des portes logiques OU exclusif disponibles sous forme de circuits intégrés. Leur symbole est représenté sur la figure 7.14.



Figure 7.14

### 7.4.3

## Chronogramme d'une fonction logique

Dans le fonctionnement d'un système logique combinatoire, les variables d'entrée sont appelées à évoluer en fonction du temps. Il est alors parfois utile de représenter le comportement du système en fonction de cette évolution.

Si on considère l'exemple très simple d'une porte logique ET à deux variables d'entrée  $x$  et  $y$ , on peut analyser son comportement temporel en imaginant différentes transitions de ces deux variables entre 0 et 1 au cours du temps. Sur la figure 7.15, on fait ainsi varier  $x$  de 0 à 1 à un instant  $t_1$ , puis de 1 à 0 à un instant  $t_3$ . Il en va de même pour  $y$  à des instant  $t_2$  et  $t_4$ . Sur le troisième diagramme temporel (appelé **chronogramme**), on visualise alors le comportement de la sortie de la porte ET, égale à 1 entre les instants  $t_2$  et  $t_3$ .



Ce type de représentation ne présente un intérêt que si les différents diagrammes temporels sont représentés avec la même échelle de temps, les uns en dessous des autres. On peut alors mettre en évidence graphiquement le fonctionnement d'un système, notamment lorsqu'il s'agit d'un circuit logique implanté électroniquement.



La figure 7.15 propose un basculement instantané de la porte ET lorsque l'entrée  $y$  passe à 1. Cela n'est possible, bien évidemment, que sur le papier. Dans la réalité, les portes logiques mettent toujours un certain temps pour basculer. Cela est dû aux temps de commutation de leurs composants internes. On peut alors qualifier une porte réelle par son retard qui correspond à cette durée.

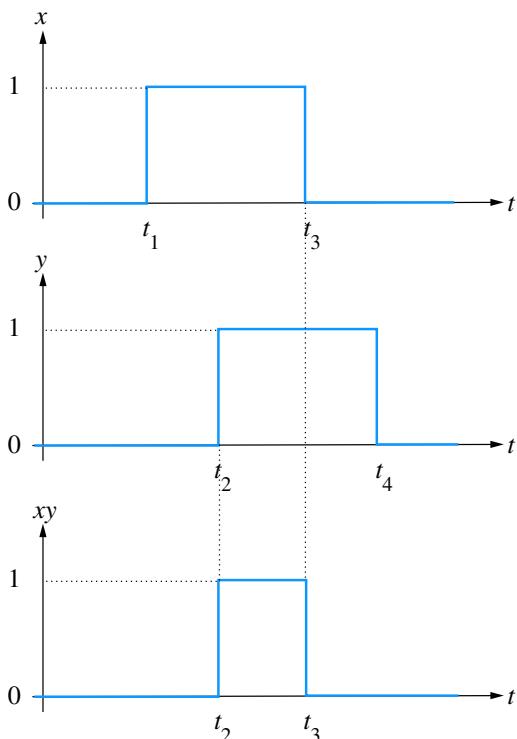


Figure 7.15

## 7.5 Simplification des fonctions logiques

Dans l'objectif d'implanter une fonction logique à l'aide, par exemple, d'une technologie électronique, il convient de s'assurer que la forme de la fonction est minimale et ce, afin de limiter le nombre de circuits utilisés au strict nécessaire. Comme on sait qu'il existe différentes formes possibles pour une fonction donnée, l'étape sans doute la plus importante de l'étude d'un système logique consiste à rechercher sa forme minimale, c'est-à-dire celle qui fait intervenir le moins d'opérateur possible.

Rechercher à vue les simplifications algébriques au sein d'une expression logique est possible mais ce n'est pas chose facile. On dispose cependant d'un certain nombre d'outils permettant de déterminer facilement la forme minimale d'une fonction logique à partir de n'importe laquelle de ses différentes formes. Le plus simple d'entre eux est le **tableau de Karnaugh** : il s'agit de présenter la table de vérité de la fonction

logique sous la forme d'un tableau à double entrée et non plus d'une simple liste. Dans le cas d'une fonction de 4 variables, le tableau de Karnaugh comporte 4 lignes et 4 colonnes, soit 16 cases représentant chacune une valeur possible du quadruplet  $(a,b,c,d)$  (figures 7.16 et 7.17).

### Exemple

Bien noter que les couples  $(a,b)$ , d'une part et  $(c,d)$ , d'autre part, s'écrivent dans l'ordre suivant : 00, 01, 11, 10

a \ b	c \ d	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	1	1	
1 1	1	1		0	0
1 0	1	1		0	0

Figure 7.16

Dans l'exemple de la figure 7.16, le regroupement de deux 1 sur la seconde ligne du tableau signifie que la fonction logique vaut 1 lorsque l'on a simultanément  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $c = 1$ , et ce, quelle que soit la valeur de  $d$  puisque, que  $d$  soit égal à 0 ou à 1, cela ne change rien au résultat de la fonction. Ce regroupement de deux termes se résume en disant que la fonction logique vaut 1 si  $\bar{a}bc = 1$ .

De même, le regroupement de quatre 1, dans ce tableau, signifie que la fonction vaut 1 lorsque l'on a simultanément  $a = 1$  et  $c = 0$ , quelle que soit les valeurs de  $b$  et de  $d$ . Cela revient à dire que la fonction vaut 1 si  $a\bar{c} = 1$ .

Ayant épuisé tous les cas où la fonction vaut 1, on peut conclure en affirmant que cette fonction logique est égale à 1 si et seulement si on a  $\bar{a}bc = 1$  ou bien  $a\bar{c} = 1$ .

Donc :

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}bc + a\bar{c}$$

On peut opérer tout regroupement de 2, 4 ou 8 cases sur des lignes ou colonnes voisines, y compris, comme c'est le cas sur la figure 7.17, lorsqu'il s'agit des colonnes ou des lignes extrêmes.

a \ b	c \ d	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	0
1 1	1		0	0	1
1 0	0	0	0	0	0

Figure 7.17

## 7.6 Les 16 fonctions logiques de deux variables

Parmi les fonctions logiques, celles qui ne dépendent que de deux variables d'entrée jouent un rôle un peu particulier et ce pour plusieurs raisons : tout d'abord, elles constituent bien sûr les fonctions les plus simples qui soient. Ensuite, elles correspondent toutes à des opérations élémentaires intéressantes. Et pour finir, elles sont en nombre limité ce qui permet d'envisager leur étude exhaustive.

## 7.6.1

### Dénombrement des fonctions de deux variables

Une fonction logique quelconque  $f$  de deux variables  $a$  et  $b$  est caractérisée par 4 combinaisons d'entrée différentes, soit  $(ab) = 00, 01, 10$  ou  $11$ . Il n'existe donc que 16 fonctions différentes possibles de deux variables, comme le montrent les tableaux des figures 7.18 et 7.19 qui correspondent aux tables de vérité possibles. Pour des raisons de commodité, chaque fonction est repérée par un indice figurant le nombre formé par les quatre chiffres de sa colonne.

$a$	$b$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Figure 7.18

$a$	$b$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Figure 7.19

On reconnaîtra facilement, dans ce tableau, les tables de vérité des fonctions ET, OU exclusif, OU, NON-OU et NON-ET, respectivement colonnes 1, 6, 7, 8 et 14.

## 7.6.2

### Analyse et dénomination des fonctions de deux variables

- Fonction  $f_0$

De toute évidence,  $f_0 = 0$ ,  $\forall(a,b)$  il s'agit donc de la fonction constante nulle.

- Fonction  $f_1$

Comme mentionné ci-dessus,  $f_1 = ab$ , il s'agit bien de la fonction ET.

- Fonction  $f_2$

D'après la table de vérité,  $f_2 = a\bar{b}$ . Autrement dit, si  $b$  est vrai, alors  $f_2 = 0$ ,  $\forall a$ . On dit alors que  $b$  inhibe  $a$ . La fonction  $f_2$  est une des deux **fonctions inhibition** (de  $a$  par  $b$ ).

- Fonction  $f_3$

On a ici  $f_3 = a$ ,  $\forall b$ . Il s'agit d'une fonction d'une seule variable.

- Fonction  $f_4$

D'après la table de vérité,  $f_4 = \bar{a}b$ . Autrement dit, si  $a$  est vrai, alors  $f_4 = 0$ ,  $\forall b$ . On dit alors que  $a$  inhibe  $b$ . La fonction  $f_4$  est la deuxième fonction inhibition (de  $b$  par  $a$ ).

- **Fonction  $f_5$**

On a ici  $f_5 = b$ ,  $\forall a$ . Il s'agit encore d'une fonction d'une seule variable.

- **Fonction  $f_6$**

Comme indiqué plus haut, il s'agit de la fonction OU exclusif :  $f_6 = a \oplus b$ .

- **Fonction  $f_7$**

Il s'agit de la fonction OU :  $f_7 = a + b$ .

- **Fonction  $f_8$**

Il s'agit de la fonction NON-OU :  $f_8 = \overline{a + b}$ .

- **Fonction  $f_9$**

On voit ici que la fonction  $f_9$  vaut 1 lorsque l'on a  $a = b$ . Cette fonction est la ***fonction identité***.

- **Fonction  $f_{10}$**

On a ici  $f_{10} = \overline{b}$ ,  $\forall a$ . Encore une fonction d'une seule variable. Il s'agit ici de la négation de  $b$ .

- **Fonction  $f_{11}$**

D'après la table de vérité,  $f_{11} = \overline{ab}$ . On voit alors que si  $b$  est vrai, alors  $f_{11} = a$ . On dit que  $b$  implique  $a$ . La fonction  $f_{11}$  est la première ***fonction implication***.

- **Fonction  $f_{12}$**

On a ici  $f_{12} = \overline{a}$ ,  $\forall b$ . Il s'agit ici de la négation de  $a$ .

- **Fonction  $f_{13}$**

D'après la table de vérité,  $f_{13} = \overline{ab}$ . On voit alors que si  $a$  est vrai, alors  $f_{13} = b$ . On dit que  $a$  implique  $b$ . La fonction  $f_{13}$  est la deuxième fonction implication.

- **Fonction  $f_{14}$**

Il s'agit de la fonction NON-ET :  $f_{14} = \overline{ab}$ .

- **Fonction  $f_{15}$**

De toute évidence,  $f_{15} = 1$ ,  $\forall (a,b)$ , il s'agit donc de la fonction constante vraie.

## 7.7 Application au codage et au traitement de l'information

### 7.7.1

#### Principes généraux

Pour des raisons très faciles à comprendre, les informations binaires se prêtent particulièrement bien au codage de l'information. En ne considérant, d'ailleurs, que les informations numériques, nous savons fort bien qu'il est possible de coder les nombres dans n'importe quel système de numération, même si nous sommes habitués à notre bon vieux système décimal.

Deux systèmes de numération sont susceptibles, ici, de retenir notre attention : le système binaire, consistant à écrire les nombres en n'utilisant que les chiffres 0 et 1, et le système hexadécimal, basé sur une numération à 16 chiffres notés de 0 à 9, puis A, B, C, D, E, F.

En ce qui concerne le système binaire, la figure 7.20 rappelle l'écriture des 16 premiers nombres, de 0 à 15, codés en binaire, avec leur correspondance décimale. Il présente également leurs correspondances en hexadécimal. On a l'habitude d'appeler « bit » ou *binary digit* la quantité 0 ou 1 qui s'avère être la plus petite quantité d'information possible.

décimal	binaire	hexa
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Figure 7.20

Dans le tableau de la figure 7.20, chaque nombre décimal de 0 à 15 est codé sur 4 bits. Le bit le plus à droite est appelé bit de poids faible (à l'instar du chiffre des unités en décimal) et le bit situé le plus à gauche est le bit de poids fort.

Pour représenter un nombre décimal quelconque en binaire, on effectue des divisions entières successives par 2 jusqu'à obtenir un quotient nul. La série des restes de ces divisions correspond à la suite de bits codant ce nombre en binaire, du bit de poids faible au bit de poids fort.

### Exemple

Considérons le nombre décimal 67 et effectuons une série de divisions entières par deux :

$$67 : 2 = 33, \text{ reste } 1$$

$$33 : 2 = 16, \text{ reste } 1$$

$$16 : 2 = 8, \text{ reste } 0$$

$$8 : 2 = 4, \text{ reste } 0$$

$$4 : 2 = 2, \text{ reste } 0$$

$$2 : 2 = 1, \text{ reste } 0$$

$$1 : 2 = 0, \text{ reste } 1$$

La représentation binaire du nombre 67 s'écrit donc : 1000011

Pour faciliter la lecture, il est d'usage de regrouper les bits par 4, soit  $(67)_{10} = (0100\ 0011)_2$ .

## 7.7.2

### Exemple

Ainsi, le nombre 67 s'écrit-il 43 en hexadécimal, soit 4 pour 0100 et 3 pour 0011.

## Le codage BCD

### Définition

BCD signifie *Binary Coded Decimal*, autrement dit, **décimal codé binaire**. Il s'agit ici d'un autre système de codage du système décimal vers le système binaire où chaque chiffre du nombre décimal est codé individuellement avec sa correspondance binaire sur 4 bits (celle du tableau de la figure 7.20 ou tout du moins pour les lignes de 0 à 9).

### Exemple

Ainsi, pour coder le nombre 67 en BCD, on code les chiffres 6 et 7 indépendamment l'un de l'autre : 0110 pour le chiffre 6 et 0111 pour le chiffre 7, ce qui nous donne :

$$(67)_{10} = (0110\ 0111)_{BCD}$$

 Bien noter que le codage BCD et la numération binaire naturelle donnent des écritures différentes. La vigilance et la rigueur seront donc de mise lorsqu'il s'agira de représenter des nombres décimaux en binaire.

## 7.7.3

## Le code GRAY

### Définition

Le code GRAY, appelé également **code binaire réfléchi**, a été imaginé pour minimiser les erreurs susceptibles d'intervenir dans le codage ou la transmission de nombres. Il est également souvent utilisé dans les capteurs de positionnement, notamment angulaire.

### Exemple

Si on considère par exemple le nombre binaire 1001 (c'est-à-dire 9 en décimal), une erreur ou un parasite survenant sur le premier bit (bit de poids fort) risque de le transformer en 0001 (soit 1 en décimal). Cette simple erreur d'un bit induit donc une erreur très significative sur l'information proprement dite.

On a donc eu l'idée d'un système dans lequel chaque nombre diffère du précédent par la transformation d'un seul bit, de surcroît de poids le plus faible possible. La figure 7.21 présente le code GRAY des nombres de 0 à 15, comparé au code binaire classique.

décimal	binaire	Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Figure 7.21

En partant du nombre 0 codé 0000, on progresse en changeant un seul bit à chaque ligne, de poids le plus faible possible. Le nombre 1 se code donc tout naturellement 0001, mais pour coder le nombre 2, le bit de poids le plus faible que l'on puisse changer est le second. On a donc 0011 pour 2. Le nombre 3 sera codé en changeant le bit de droite, soit 0010, configuration qui n'a pas été utilisée pour l'instant.

Pour coder 4, il est bien sûr impossible de changer le premier bit à droite, ce qui redonnerait un code déjà utilisé pour 2, pas plus qu'on ne peut changer le second ce qui redonnerait 0. On change donc le troisième bit pour passer de 0010 à 0110. On poursuit ensuite la progression jusqu'au dernier nombre à coder.

On notera que le nombre 15 ne diffère de 0 que par un seul bit, ce qui permet d'envisager l'utilisation du code Gray pour des informations cycliques. C'est une des raisons de son utilité dans le cadre de capteurs angulaires.

Il existe une méthode relativement pratique et rapide pour établir le codage GRAY d'une série de nombres, méthode qui, d'ailleurs, donne son nom au **code binaire réfléchi**. Pour ce faire on démarre la série avec les deux nombres décimaux 0 et 1, codés bien évidemment 0 et 1 en binaire et on effectue ensuite, pour coder les deux nombres suivants 2 et 3, une symétrie des deux premiers, comme dans un miroir (figure 7.22 a). On ajoute pour finir le chiffre binaire 1 devant les nouveaux codes et le chiffre 0 devant les anciens (figure 7.22 b).

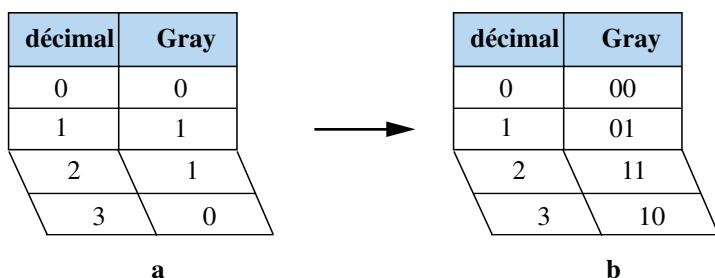


Figure 7.22

On recommence alors la transformation sur ce tableau de quatre nombres pour obtenir la série de huit (figure 7.23).

Figure 7.23 montre deux tableaux adjacents. Le tableau de gauche (avant) contient les nombres décimaux de 0 à 7 dans une grille 4x2. Les nombres sont : 0 (00), 1 (01), 2 (11), 3 (10), 4 (10), 5 (11), 6 (01), 7 (00). Des diagonales noires partent de la case 4 vers le bas et de la case 5 vers le haut. Un flèche pointe vers le tableau de droite (après). Le tableau de droite (après) contient les mêmes nombres mais avec des codes Gray : 0 (000), 1 (001), 2 (011), 3 (010), 4 (110), 5 (111), 6 (101), 7 (100). Des diagonales noires partent de la case 4 vers le bas et de la case 5 vers le haut.

décimal	Gray
0	00
1	01
2	11
3	10
4	10
5	11
6	01
7	00

décimal	Gray
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

Figure 7.23

## 7.7.4 Circuits additionneurs

### Additionneur à deux chiffres

On considère une simple addition binaire de deux chiffres  $a$  et  $b$  pouvant prendre chacun la valeur 0 ou 1. La figure 7.24 représente schématiquement un système permettant de faire cette addition. Le système possède 2 entrées, une pour chaque chiffre binaire à additionner. Il possède également deux sorties puisque le résultat peut prendre les valeurs 0, 1 ou 10 ; deux bits de sortie nommés  $r$  et  $s$  sont donc nécessaires,  $r$  étant le bit de poids fort et  $s$ , le bit de poids faible. On peut aussi considérer la variable  $r$  comme la retenue éventuelle de l'addition.

On a donc :

$$a + b = (rs)_2$$



Figure 7.24

L'objectif consiste à déterminer les expressions logiques de  $r$  et de  $s$  et d'en proposer les schémas à l'aide de portes logiques élémentaires. Pour ce faire, on établit les tables de vérité de ces deux fonctions, rassemblées en un seul tableau, en effectuant toutes les sommes possibles (figure 7.25).

<b><i>a</i></b>	<b><i>b</i></b>	<b><i>r</i></b>	<b><i>s</i></b>
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Figure 7.25

Il apparaît immédiatement que la fonction  $s$  correspond exactement à l'opération XOR (OU exclusif) et que la fonction  $r$  correspond à l'opérateur ET.

On en déduit alors le schéma de l'additionneur de deux bits (figure 7.26).

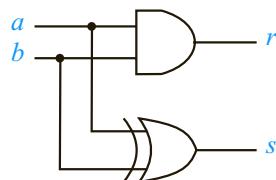


Figure 7.26

### Additionneur à trois chiffres

On souhaite à présent effectuer une addition binaire de trois chiffres  $a$ ,  $b$  et  $c$  pouvant prendre chacun la valeur 0 ou 1. La figure 7.27 représente schématiquement un système permettant de faire cette addition. Trois entrées sont désormais prévues, une pour chaque chiffre binaire à additionner. Le système possède toujours deux sorties puisque le résultat peut prendre les valeurs 0, 1, 10 ou 11 ; les deux bits de sortie sont encore nommés  $r$  et  $s$ ,  $r$  étant le bit de poids fort et  $s$ , le bit de poids faible.

On a donc :

$$a + b + c = (rs)_2$$



Figure 7.27

Il faut toujours déterminer les expressions logiques de  $r$  et de  $s$  et en proposer les schémas à l'aide de portes logiques élémentaires. On établit donc les tables de vérité de ces deux fonctions, rassemblées en un seul tableau, en effectuant toutes les sommes possibles (figure 7.28).

On transcrit ensuite ces résultats dans deux tableaux de Karnaugh afin de rechercher les formes les plus simples pour  $r$  et  $s$  (figures 7.29 et 7.30). Le tableau de Karnaugh de la fonction  $s$  ne fait apparaître aucun regroupement possible. Sa forme canonique ne sera donc que le OU logique des quatre termes correspondant aux cases 1.

Soit :

$$s = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + abc$$

Par ailleurs, le tableau de Karnaugh de la fonction  $r$  fait apparaître trois regroupements. Sa forme canonique se détermine alors aisément :

$$r = ab + bc + ac$$

<b><math>a</math></b>	<b><math>b</math></b>	<b><math>c</math></b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>s</math></b>
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Figure 7.28

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	0	1
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0

fonction *s***Figure 7.29**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	0	1
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1

fonction *r***Figure 7.30**

La fonction *r* peut s'implémenter facilement à l'aide d'une porte OU à trois entrées et de trois portes ET (figure 7.31). La fonction *s*, quant à elle, peut s'implémenter très simplement en transformant légèrement son expression.

En effet :

$$s = \bar{a} \cdot (\bar{b}c + b\bar{c}) + a \cdot (\bar{b}\bar{c} + bc)$$

Remarquons, d'une part, que :  $\bar{b}c + b\bar{c} = b \oplus c$

et d'autre part que :  $\bar{b}\bar{c} + bc = \overline{\bar{b}\bar{c}} + bc = \overline{\bar{b}\bar{c}} \cdot \overline{bc}$

Soit :  $\bar{b}\bar{c} + bc = \overline{(b+c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})} = \overline{b\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{b} + c\bar{c}} = \overline{b\bar{c} + c\bar{b}}$

Or quel que soit *x*,  $x\bar{x} = 0$ .

Donc :

$$\bar{b}\bar{c} + bc = \overline{b\bar{c} + c\bar{b}} = \overline{b \oplus c}$$

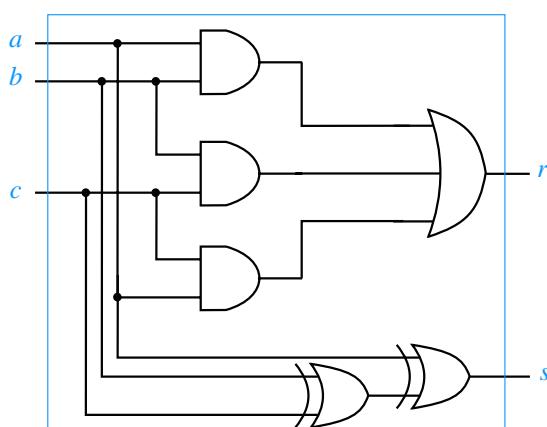
Finalement :

$$s = \bar{a}(b \oplus c) + a \cdot \overline{b \oplus c}$$

Soit :

$$s = \bar{a} \oplus (b \oplus c)$$

Cette fonction *s* s'implémente donc facilement à l'aide de deux portes OU exclusif à deux entrées (figure 7.31).

**Figure 7.31**

## Généralisation

L'additionneur de trois bits qui vient d'être conçu propose comme résultats un bit de somme et un bit de retenue. Il est tout à fait indiqué pour constituer l'élément de base d'un système plus complexe permettant d'additionner deux nombres binaires quelconques de  $n$  bits chacun que nous représenterons ainsi :  $(a_n \dots a_2 a_1 a_0)_2$  et  $(b_n \dots b_2 b_1 b_0)_2$ .

En effet, l'addition de deux nombres consiste à additionner successivement les bits, deux à deux, soit  $a_i$  et  $b_i$  en tenant compte de l'éventuelle retenue de l'addition précédente, soit  $c_{i-1}$  (figure 7.32). Soit  $s_i$  le bit de poids faible de la somme  $a_i + b_i + c_{i-1}$  et  $c_i$  la retenue générée par cette addition. L'additionneur de trois bits, dans lequel on a  $c = c_{i-1}$  et  $r = c_i$  est à même de faire cette opération.

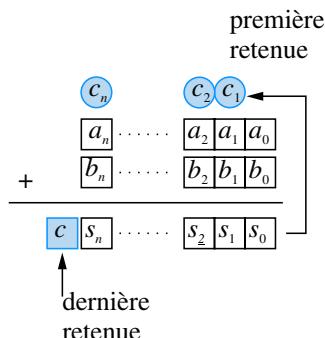


Figure 7.32

Il suffit alors d'interconnecter plusieurs de ces fonctions élémentaires pour construire un additionneur de deux nombres quelconques de  $n$  bits, comme indiqué sur la figure 7.33.

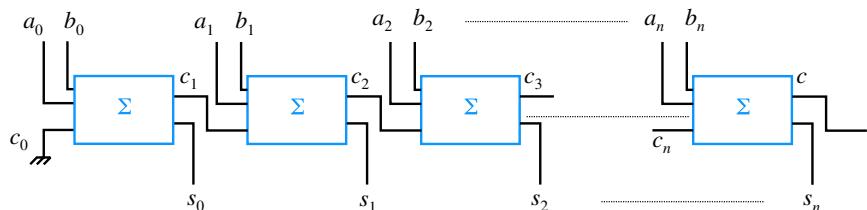


Figure 7.33

## Synthèse

### Savoirs

#### Je connais :

- Le formalisme de l'algèbre de Boole et ses propriétés ;
- La représentation des fonctions logiques en tables de vérité ;

- Les seize fonctions logiques de deux variables ;
- Les applications simples des circuits logiques au codage et au traitement de l'information. Les applications simples des circuits logiques au codage et au traitement de l'information.

### Savoir-faire

#### Je sais :

- Manipuler les fonctions logiques ;
- Etablir un tableau de Karnaugh et simplifier une fonction logique ;
- Etablir un chronogramme.

## Exercices d'application

7.1 Établir la table de vérité, puis donner la forme canonique de la fonction logique suivante :

$$f(a,b,c,d) = ab + \bar{c} + \bar{a}cd + \bar{b}$$

7.2 Établir la table de vérité, puis donner la forme canonique de la fonction logique suivante :

$$f(a,b,c,d) = (\bar{a}bd + c) \cdot d$$

7.3 Déterminer l'expression de la fonction logique représentée par le schéma de la figure 7.34.

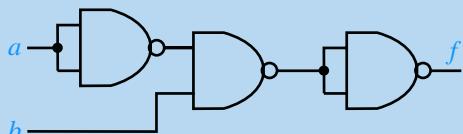


Figure 7.34

7.4 Déterminer l'expression de la fonction logique représentée par le schéma de la figure 7.35.

7.5 On considère la fonction logique définie par :

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) = & \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bcd + \bar{abc}\bar{d} + abcd \\ & + abc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \end{aligned}$$

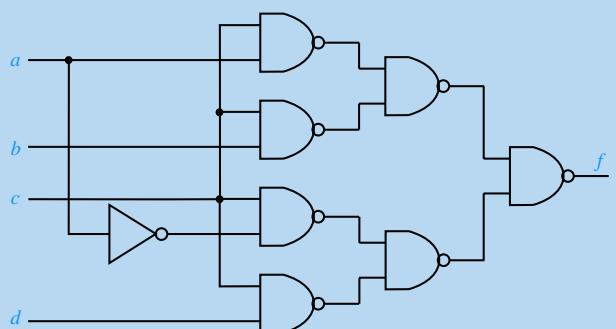


Figure 7.35

Établir la forme minimale de cette fonction logique et proposer son schéma en n'utilisant que des portes NAND à deux entrées.

7.6 On considère la fonction logique définie par :

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) = & \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{ab}\bar{c}\bar{d} + \bar{ab}\bar{c}d \\ & + \bar{ab}\bar{c}\bar{d} + \bar{abc}\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d \end{aligned}$$

Établir la forme minimale de cette fonction logique et proposer son schéma en n'utilisant que des portes NOR à deux entrées.

## Exercices d'approfondissement

7.7 Proposer un circuit réalisant la fonction OU-Exclusif de deux variables, en n'utilisant que des portes NAND à deux entrées.

7.8 On considère le montage de la figure 7.36. Établir l'expression de la fonction  $f$  et, proposer, le cas échéant, un nouveau montage plus économique.

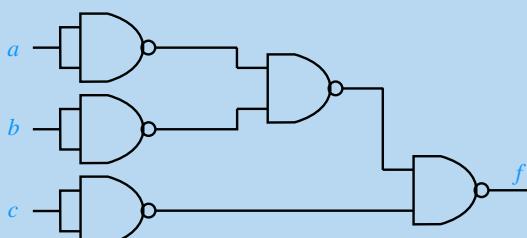


Figure 7.36

7.9 On considère 2 nombres binaires de 2 bits chacun (susceptibles de varier, par conséquent entre 00 et 11), notés :

$$x = (ab)_2 \text{ et } y = (cd)_2$$

On souhaite construire un dispositif à l'entrée duquel on injecte ces deux nombres et fournit, à sa sortie, une fonction  $f$  définie par  $f = 1 \iff x < y$  (voir figure 7.37).

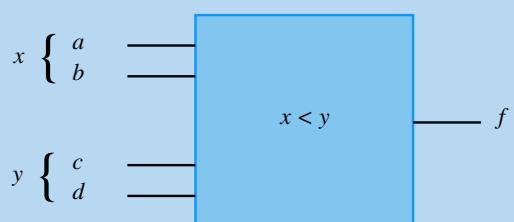


Figure 7.37

Établir la forme minimale de la fonction logique permettant de réaliser cette comparaison et implanter le dispositif en n'utilisant que des portes NAND à deux entrées.

Comment peut-on rapidement concevoir, à partir de ce dispositif, un système permettant de réaliser la fonction définie par :  $g = 1 \iff x \geq y$ .

**7.10** On considère un chiffre décimal codé binaire (BCD) pouvant varier de 0 à 9 et représenté par un ensemble de quatre variables logiques  $x, y, z$  et  $t$ . On rappelle que le quadruplet d'entrée peut donc varier de 0000 à 1001.

On considère un afficheur 7 segments composé de 7 barrettes de diodes électroluminescentes (figure 7.38) et on se propose de caractériser le circuit logique qui permet, à partir des entrées  $(x, y, z, t)$ , de commander l'affichage adéquat correspondant au chiffre décimal représenté par le quadruplet. Ce circuit est composé de 7 fonctions logiques  $a, b, c, d, e, f$  et  $g$  qui correspondent chacune à un des segments à allumer. On considérera que le segment est allumé lorsque la fonction vaut 1.

Établir, sous forme d'un seul tableau, les tables de vérité de ces 7 fonctions logiques. Proposer le schéma d'un montage permettant de réaliser la fonction  $e$ .

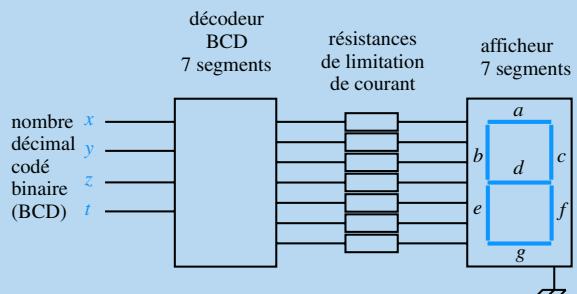


Figure 7.38

**7.11** On considère un nombre binaire classique de 4 bits noté  $B_4B_3B_2B_1$  que l'on souhaite convertir en code GRAY, soit  $G_4G_3G_2G_1$ . Considérant que chaque bit  $G_i$  est une fonction combinatoire des  $B_i$ , établir les 4 tableaux de Karnaugh des fonctions  $G_1$  à  $G_4$  pour en proposer les formes les plus simples. Etablir pour finir le schéma du montage permettant de convertir le nombre binaire en code GRAY.

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 7.1

La figure 7.39 représente la table de vérité de la fonction  $f(a,b,c,d) = ab + \bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}$ . Nous avons choisi, ici, de calculer d'abord  $\bar{f}(a,b,c,d) = ab + \bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}$ , ce qui nous permet de déterminer  $f$  plus facilement.

$a$	$b$	$c$	$d$	$ab$	$\bar{c}$	$\bar{a}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{b}$	$\bar{f}$	$f$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

Figure 7.39

Un seul terme correspond à une valeur 1 de la fonction ; la forme canonique n'est composée que de ce terme :

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}bcd$$

### 7.2

La figure 7.40 représente la table de vérité de la fonction  $f(a,b,c,d) = (\bar{a}bd + c) \cdot d$ .

(voir figure 7.40 ci-contre).

La forme canonique de la fonction se déduit de la lecture de la table de vérité en écrivant les mintermes correspondant aux lignes pour lesquelles la fonction logique vaut 1 :

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}cd$$

### 7.3

Il suffit de reporter, sur le schéma, les expressions des différentes sorties des portes logiques, en progressant de l'entrée vers la sortie (figure 7.41).

$a$	$b$	$c$	$d$	$\bar{a}bd$	$\bar{a}bd + c$	$f$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Figure 7.40

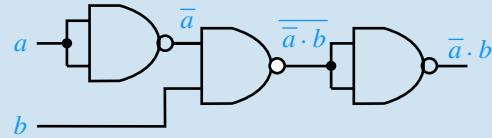


Figure 7.41

On a donc :

$$f(a,b) = \bar{a}b$$

### 7.4

On a :

$$f(a,b,c,d) = \overline{\overline{(ac \cdot bc)} \cdot \overline{(ac \cdot dc)}}$$

La figure 7.42 correspond au schéma attendu.

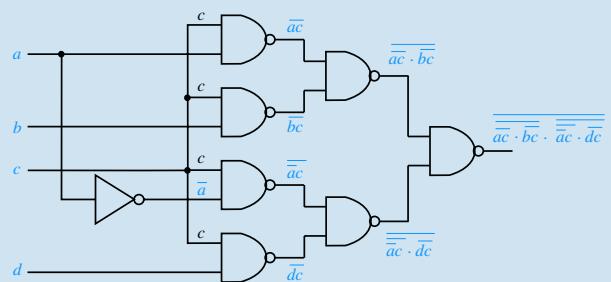


Figure 7.42

## 7.5

La recherche de la forme minimale de la fonction se réalise à partir du tableau de Karnaugh. Dans cet exercice, les deux seuls regroupements possibles sont évidents. Pour concevoir le circuit, il est nécessaire de démarrer le raisonnement au niveau de sa sortie. En effet, si le circuit doit entièrement être réalisé avec des portes NAND, sa sortie est donc constituée, immanquablement, par la sortie d'une porte NAND. Il convient alors de chercher quelles sont les entrées de cette porte de sortie, puis, de remonter ainsi jusqu'aux variables d'entrée.

On établit dans un premier temps la table de vérité de la fonction  $f$ . Avec un peu d'entraînement, cela est rapidement superflu car il est possible de remplir le tableau de Karnaugh directement à partir de la forme canonique de la fonction.

Pour remplir la table de vérité (figure 7.43), il suffit de reporter, dans la colonne  $f$ , le résultat 1 sur chaque ligne correspondant à chacun des termes de la forme canonique de la fonction :

- 0000 pour  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
- 0111 pour  $\bar{a}bcd$ , etc

On reporte ensuite ces résultats dans un tableau de Karnaugh (figure 7.44). Deux regroupements sont parfaitement visibles :

Le premier regroupement concerne les quatre 1 situés à l'intersection des deux lignes qui correspondent à  $b = 1$  et des deux colonnes qui correspondent à  $c = 1$ .

La présence de ce groupe s'interprète de la manière suivante : quelle que soit la valeur de  $a$  et quelque soit la valeur de  $d$ , la fonction  $f$  vaut 1 du moment que  $b$  et  $c$  valent simultanément 1. Ce regroupement se traduit donc par la présence du terme  $bc$  dans la fonction  $f$ .

Le second regroupement entre les cases 0000 et 1000 correspond au terme  $\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ .

En effet, les deux 1 se trouvent dans la colonne correspondant à  $c = 0$  et  $d = 0$ , donc à  $\bar{c}\bar{d} = 1$ , et sur deux lignes caractérisées par  $b = 0$ , la valeur de  $a$  n'importe pas.

$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Figure 7.43

$a \backslash b$	$c \backslash d$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	0	0	0
0 1	0	0	0	1	1
1 1	0	0	0	1	1
1 0	1	0	0	0	0

Figure 7.44

En conclusion, la fonction vaut 1 si  $bc = 1$  ou si  $\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 1$ .

On a donc :  $f(a,b,c,d) = bc + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$

Il est intéressant de noter que la valeur de  $a$  est sans importance sur la fonction.

Pour concevoir le circuit logique qui correspond à cette fonction, et ce, uniquement à partir de portes NAND, raisonnons en partant de la sortie de ce circuit qui doit, immanquablement, être la sortie d'une porte NAND. Il faut donc mettre la fonction  $f$  sous la forme du NAND de deux expressions. Pour ce faire, on force la fonction NAND à apparaître dans l'expression de  $f$  en complémentant deux fois celle-ci.

$$\text{Soit : } f(a,b,c,d) = \overline{\overline{bc} + \overline{\bar{b}\bar{c}\bar{d}}} = (\overline{bc} + \overline{\bar{b}\bar{c}\bar{d}})$$

On applique la loi de Morgan à l'expression contenue entre parenthèses :

$$f(a,b,c,d) = \overline{(\overline{bc} + \overline{\bar{b}\bar{c}\bar{d}})} = \overline{(\overline{bc}) \cdot \overline{\overline{\bar{b}\bar{c}\bar{d}}}}$$

Cette transformation permet de mettre la fonction  $f$  sous la forme de l'opération NAND de deux expressions :  $(\overline{bc})$  d'une part et  $(\overline{\bar{b}\bar{c}\bar{d}})$  d'autre part (figure 7.45).

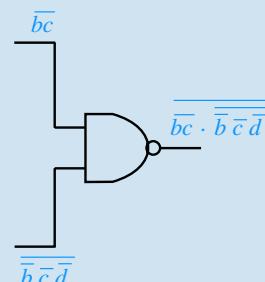


Figure 7.45

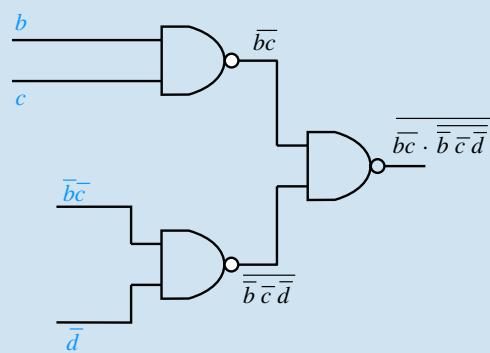


Figure 7.46

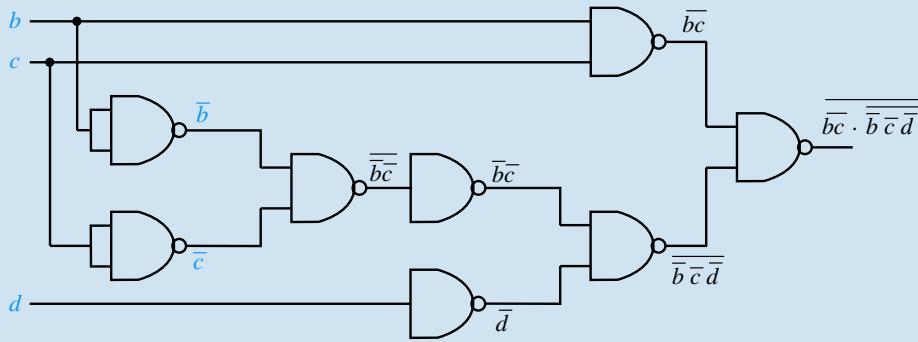


Figure 7.47

Le terme  $(\overline{bc})$  est lui même le résultat de l'opérateur NAND appliqué à  $b$  et à  $c$ . Quant au terme  $(\overline{bcd}) = (\overline{bc}) \cdot (\overline{d})$ , il est le résultat de l'opérateur NAND appliqué à  $(\overline{bc})$  et à  $(\overline{d})$ . Ceci nous permet de poursuivre la mise en forme du schéma (figure 7.46).

Le terme  $(\overline{d})$  s'obtiendra en inversant simplement  $d$ .

Le terme  $(\overline{bc}) = (\overline{\overline{bc}})$  se trouve être l'opération NAND de  $\overline{b}$  et  $\overline{c}$ , inversée. Cela nous permet de compléter définitivement le schéma du montage (figure 7.47).

## 7.6

On établit immédiatement le tableau de Karnaugh de la fonction logique en y reportant les 1 correspondant aux mintermes de la forme canonique (figure 7.48). Comme il s'agit de faire le moins de regroupements possibles (de manière à obtenir le moins de termes) et de faire les plus grands regroupements possibles (pour que ces termes soient les plus légers), on effectue les deux regroupements proposés.

Le regroupement des quatre cases grisées correspond au terme  $b\bar{c}$  (la fonction vaut 1 du moment que  $b = 1$  et  $c = 0$  et ce, quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $d$ ).

$a \backslash b$	$c \backslash d$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	0	1	
0 1	1	1	0	1	
1 1	1	1	0	0	
1 0	0	0	0	0	

Figure 7.48

Le second regroupement (non grisé), correspond au terme  $\overline{ad}$ .

On a donc :  $f(a,b,c,d) = b\bar{c} + \overline{ad}$

Comme il s'agit de proposer un schéma ne faisant intervenir que des portes NOR à deux entrées, procédons comme pour l'exercice précédent, en partant de la sortie et en « forçant » l'apparition des opérateurs NOR successifs jusqu'à ce qu'on remonte aux variables de la fonction.

Soit :  $f(a,b,c,d) = b\bar{c} + \overline{ad} = \overline{\overline{b}\bar{c} + \overline{ad}}$

Cette forme est la négation du résultat de l'opération NOR entre  $\overline{b}\bar{c}$  et  $\overline{ad}$ .

De même, par la loi de Morgan :  $b\bar{c} = \overline{\overline{b}\bar{c}} = \overline{\overline{b} + \bar{c}}$

et :  $\overline{ad} = \overline{\overline{ad}} = \overline{\overline{a} + \overline{d}}$

Chaque terme se trouve ainsi placé sous la forme du résultat d'un opérateur NOR (y compris  $\overline{b}$  qui sera obtenu en inversant  $b$  à l'aide d'une porte NOR court-circuitée à ses entrées). On peut donc aisément concevoir le schéma de ce système logique (figure 7.49).

## Exercices d'approfondissement

### 7.7

La fonction XOR a pour forme canonique :  $a \oplus b = \overline{ab} + a\overline{b}$

On peut écrire :  $a \oplus b = \overline{\overline{ab} + a\overline{b}} = \overline{\overline{ab}} \cdot \overline{a\overline{b}}$

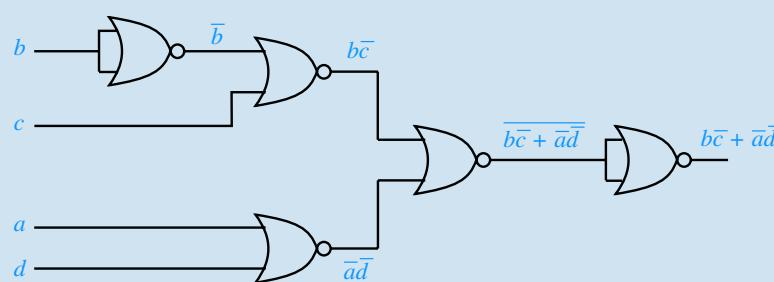


Figure 7.49

ce qui fait apparaître la fonction XOR comme le résultat de l'opération NAND des deux expressions  $\overline{ab}$  et  $\overline{\bar{a}\bar{b}}$  qui, elles-mêmes, sont déjà sous la forme d'un opérateur NAND.

On en déduit immédiatement le schéma de la porte XOR. On remarquera la parfaite symétrie du montage (figure 7.50).

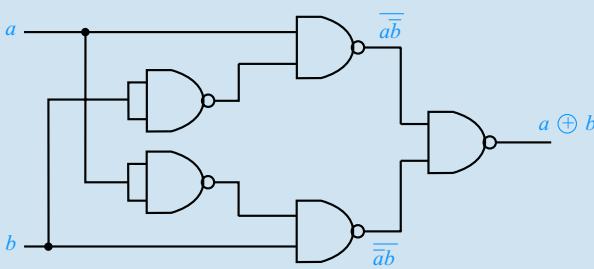


Figure 7.50

## 7.8

On effectue directement sur le schéma le calcul de la fonction logique (figure 7.51).

On obtient ainsi sa forme brute :

$$f(a,b,c) = \overline{\overline{ab}} \cdot \overline{c} = \overline{ab} + \overline{c} = \overline{ab} + c$$

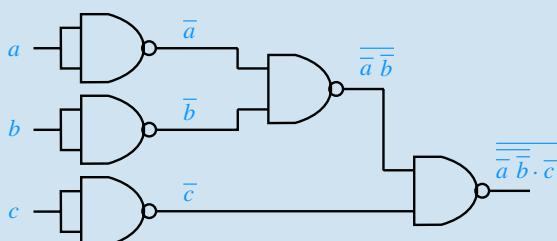


Figure 7.51

Le tableau de Karnaugh (figure 7.52) nous montre qu'il nous est impossible de simplifier cette forme. Toutefois, nous pouvons remarquer que cette fonction peut être transformée en utilisant la loi de Morgan :

$$f(a,b,c) = \overline{ab} + c = \overline{a+b} + c = \overline{a+b+c}$$

$a \backslash b$	0	1
0	1	1
1	0	1
1	0	1

Figure 7.52

La fonction apparaît ainsi comme le résultat inversé de l'opération NOR de l'expression  $\overline{a+b}$  et de  $c$ . Il suffit donc de trois portes NOR pour réaliser cette fonction (figure 7.53).

**Remarque :** la possession de la forme minimale de la fonction logique ne garantit pas toujours la conception du schéma le plus simple. Certaines fonctions s'implémentent de façon plus économique avec des portes NAND, d'autres avec des portes NOR.

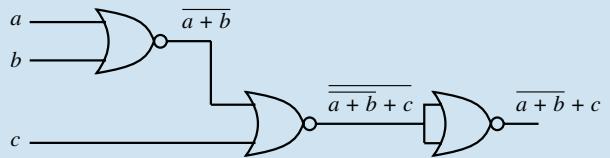


Figure 7.53

## 7.9

Il s'agit bien d'un système logique combinatoire à quatre entrées : la sortie est entièrement déterminée par la valeur du quadruplet  $(a,b,c,d)$ . Il convient de réaliser la table de vérité, puis, le tableau de Karnaugh qui permettra d'obtenir la forme minimale de la fonction avant son implantation. Avec un peu d'entraînement, il est possible de se passer de l'étape de la table de vérité et de construire directement le tableau de Karnaugh de la fonction (qui contient exactement les mêmes informations, mais placées sous une forme différente).

Le système possède bien quatre entrées. On établit le tableau de Karnaugh directement sur la base de la définition de la fonction (figure 7.54). On lit alors, sur les trois regroupements possibles :

$$f(a,b,c,d) = \overline{ac} + \overline{bd} + \overline{abd}$$

$a \backslash b$	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
1 0	0	0	1	0

Figure 7.54

$$\text{Soit : } f(a,b,c,d) = \overline{ac} + \overline{bd} \cdot (c + \overline{a}) = \overline{\overline{ac} + \overline{bd} \cdot (c + \overline{a})}$$

$$\text{D'où : } f(a,b,c,d) = \overline{\overline{ac} \cdot \overline{bd} \cdot (c + \overline{a})}$$

Cette transformation permet de faire apparaître la fonction logique comme le résultat de l'opération NAND de  $\overline{ac}$ , d'une part, et de  $\overline{bd} \cdot (c + \overline{a})$ , d'autre part. Ces deux expressions constituent elles-mêmes des opérations NAND.

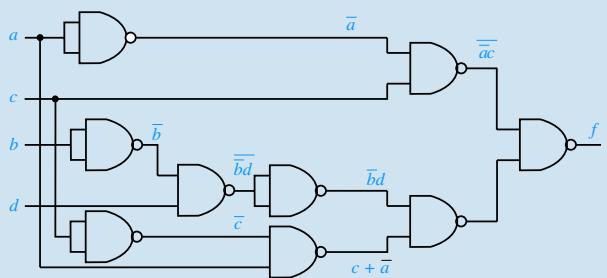


Figure 7.55

La réalisation du schéma correspondant à la fonction logique (figure 7.55) ne pose aucune difficulté lorsque l'on a remarqué que :

$$\bar{b}d = \overline{\overline{b}}\overline{d} \quad \text{et} \quad c + \bar{a} = \overline{c + \bar{a}} = \overline{c} \cdot \bar{a}$$

La fonction  $g$  définie par :

$$g = 1 \iff x \geq y$$

est la négation de la fonction  $f$ . Son schéma correspond donc exactement au schéma de la fonction  $f$  auquel on aura rajouté, en sortie, une porte NAND aux entrées court-circuitées réalisant l'opérateur NON.

## 7.10

Le lecteur aura sans aucun doute reconnu une application très courante de l'électronique numérique. Le dispositif complet appelé « décodeur BCD / 7 segments » existe sous forme d'un seul circuit intégré ; il n'est donc pas utile, dans la pratique, de le construire à partir de portes élémentaires. Lorsqu'on effectuera le tableau de Karnaugh de la fonction  $e$ , il pourra être très intéressant de tenir compte du fait que seules les configurations  $(x, y, z, t)$  comprises entre 0000 et 1001 peuvent être présentées à l'entrée du système.

Chacune des sept sorties du décodeur est une fonction logique qui dépend du nombre présenté à l'entrée : cette fonction doit valoir 1 si le segment considéré doit s'allumer et 0 dans le cas contraire.

Afin de déterminer ces fonctions, il est nécessaire de faire l'inventaire de tous les cas possibles, autrement dit d'établir les sept tables de vérité en fonction du nombre à afficher (figure 7.56). Seuls les dix premiers chiffres doivent être considérés. La table de vérité s'arrête donc à 1001 (9 en décimal).

$(xyzt)_{10}$	$x$	$y$	$z$	$t$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
5	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

Figure 7.56

Ce tableau se remplit ligne par ligne en considérant, pour chaque nombre décimal de 0 à 9, les segments qui doivent ou non s'allumer. Par exemple, pour afficher le chiffre 3, tous les segments doivent être allumés sauf le  $b$  et le  $e$ .

Chacune des fonctions peut alors être implémentée à partir de sa forme la plus simple déterminée à partir de son tableau de Karnaugh, ou encore à partir de constatations simples effectuées dans la table de vérité.

Par exemple, le segment  $f$  s'allume pour tous les chiffres décimaux, sauf pour le chiffre 2. Nous pouvons donc écrire :

$$f = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$

Il n'est pas question ici d'établir l'ensemble des tableaux de Karnaugh (de toute manière, des décodeurs BCD / 7 segments existent tout faits dans le commerce). Toutefois, prenons l'exemple de la fonction  $e$  et recherchons sa forme minimale. Son tableau de Karnaugh est présenté sur la figure 7.57. Les cases qui correspondent à des cas impossibles en ce qui concerne les variables d'entrée ont été marquées d'un  $X$ . En se limitant à la démarche classique d'analyse du tableau, il est possible de former deux regroupements de deux termes.

On a donc :  $e = \overline{x}\overline{z}\overline{t} + \overline{y}\overline{z}\overline{t}$

$\begin{matrix} z \\ t \end{matrix}$	0 0	0 1	1 1	1 0
$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	1	0	0	1
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	0	1
1 1	X	X	X	X
1 0	1	0	X	X

Figure 7.57

Toutefois, puisque certaines cases correspondent à des cas impossibles, rien ne nous empêche de décider de la valeur de la fonction pour ces quadruplets d'entrée.

En remplaçant judicieusement certains  $X$  par des 1, il est possible de réaliser des regroupements plus larges (figure 7.58).

Il convient ici, de chercher à agrandir les regroupements précédents pour réduire les termes de la fonction.

On a ainsi :  $e = z\overline{t} + \overline{y}\overline{t}$

$\begin{matrix} z \\ t \end{math>$	0 0	0 1	1 1	1 0
$\begin{matrix} x \\ y \end{math}$	1	0	0	1
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	0	1
1 1	X	X	X	1
1 0	1	0	X	1

Figure 7.58

## 7.11

Il s'agit ici de partir du tableau définissant les codes GRAY des nombres de 0 à 15, de reporter soigneusement les résultats dans des tableaux de Karnaugh et d'effectuer les regroupements qui, ici, sont tout à fait évidents.

À partir du tableau de la figure 7.21, reproduit sur la figure 7.59 en explicitant chaque fonction  $G_i$  en fonction de  $B_4$ ,  $B_3$ ,  $B_2$  et  $B_1$ , on construit sans aucune difficulté les 4 tableaux de Karnaugh.

On en déduit immédiatement les expressions des quatre fonctions  $G_i$  qui font apparaître des opérateurs OU exclusifs :

$$G_1 = \overline{B_2}B_1 + B_2\overline{B_1} = B_1 \oplus B_2$$

$$G_2 = \overline{B_3}B_2 + B_3\overline{B_2} = B_2 \oplus B_3$$

décimal	$B_4\ B_3\ B_2\ B_1$	$G_4\ G_3\ G_2\ G_1$
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1
2	0 0 1 0	0 0 1 1
3	0 0 1 1	0 0 1 0
4	0 1 0 0	0 1 1 0
5	0 1 0 1	0 1 1 1
6	0 1 1 0	0 1 0 1
7	0 1 1 1	0 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 0
9	1 0 0 1	1 1 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 1
11	1 0 1 1	1 1 1 0
12	1 1 0 0	1 0 1 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1
14	1 1 1 0	1 0 0 1
15	1 1 1 1	1 0 0 0

$B_2\ B_1$	
$B_4\ B_3$	
0 0	0 1 1 0
0 1	0 1 0 1
1 1	0 1 0 1
1 0	0 1 1 0

fonction  $G_1$

$B_2\ B_1$	
$B_4\ B_3$	
0 0	0 1 1 0
0 1	1 0 1 0
1 1	0 0 0 1
1 0	0 0 1 1

fonction  $G_2$

$B_2\ B_1$	
$B_4\ B_3$	
0 0	0 1 1 0
0 1	0 1 1 1
1 1	1 0 0 1
1 0	1 0 1 1

fonction  $G_3$

$B_2\ B_1$	
$B_4\ B_3$	
0 0	0 1 1 0
0 1	1 1 1 1
1 1	1 1 1 1
1 0	0 0 0 0

fonction  $G_4$

$$G_3 = \overline{B_4}B_3 + B_4\overline{B_3} = B_3 \oplus B_4$$

$$G_4 = B_4$$

Le schéma de la figure 7.60 présente le circuit très simple qui transforme le code binaire pur en code GRAY.

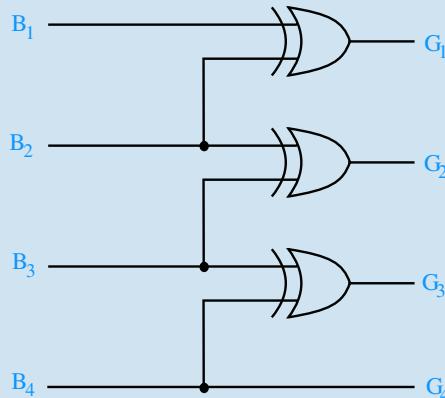


Figure 7.60

## Plan

<b>8.1</b>	Les systèmes logiques séquentiels	209
<b>8.2</b>	Le modèle GRAFCET	217
	Exercice d'application	228
	Exercices d'approfondissement	228
	Solutions des exercices	230

## Introduction

Les systèmes logiques combinatoires étudiés au chapitre 7 sont caractérisés par un fonctionnement qui ne dépend que d'une combinaison des signaux d'entrée. Il existe d'autres types de systèmes discrets dont l'état évolue certes en fonction de signaux d'entrée mais également en fonction du temps, notamment en fonction d'événements particuliers présents ou passés.

Ce chapitre est consacré aux systèmes logiques séquentiels et au modèle GRAFCET qui sont les deux modèles les plus simples de systèmes discrets séquentiels.

## Prérequis

- Si le modèle GRAFCET ne nécessite pratiquement aucun prérequis, il est en revanche nécessaire de maîtriser les concepts du chapitre 7 pour apprêter les systèmes logiques séquentiels.

## Objectifs

- Aborder quelques outils élémentaires permettant de décrire les systèmes séquentiels.
- Analyser et réaliser, à partir de ces outils, quelques dispositifs simples basés sur les systèmes logiques séquentiels et sur le modèle GRAFCET

## 8.1 Les systèmes logiques séquentiels

### 8.1.1

#### Définition

Dans un circuit combinatoire, la sortie du dispositif ne dépend que des variables d'entrée. Les fonctions associées à ces circuits sont caractérisées par l'unicité de la valeur de la fonction pour une configuration donnée des variables d'entrée.

Dans un circuit logique séquentiel, la sortie dépend non seulement des variables d'entrée mais également de ses propres valeurs précédentes, autrement dit de l'état initial

du système. Fondamentalement, tout se passe comme si la sortie devait être considérée comme une entrée supplémentaire.

Cela est réalisé, en général, par un bouclage (permanent ou périodique) de cette sortie à l'entrée du dispositif (figure 8.1).

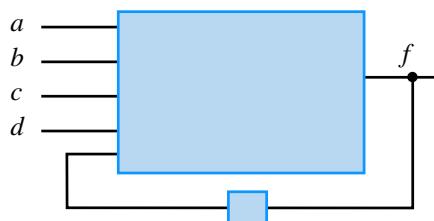


Figure 8.1

## 8.1.2

### La bascule R/S

Il s'agit sans aucun doute du système logique séquentiel le plus simple qui soit mais il permet de mesurer tout l'intérêt de ce type de dispositif tout en explorant les différentes méthodes d'investigation qui permettent d'étudier le fonctionnement des systèmes séquentiels.

#### a) Présentation du système

On considère le circuit logique composé de deux portes NON-OU et représenté sur la figure 8.2. Il possède visiblement deux entrées  $R$  et  $S$  ainsi que deux sorties notées  $Q$  et  $\bar{Q}$ .

On note que chacune des deux sorties est bel et bien bouclée sur l'entrée du dispositif, constituant, pour ainsi dire, des entrées supplémentaires pour le système.



Les notations  $Q$  et  $\bar{Q}$  laissent supposer que la seconde sortie est égale à la négation de la première comme l'étude qui suit va le démontrer.

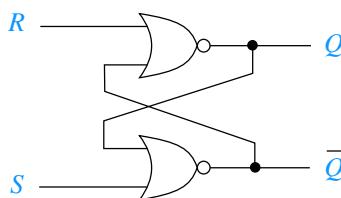


Figure 8.2

Bien évidemment, une simple table de vérité ne suffit pas à décrire le comportement de ce système ; l'état des sorties, vraisemblablement, ne dépend pas uniquement des valeurs de  $R$  et de  $S$ .

On suppose que chacune des deux entrées est à 0, le système étant, pour ainsi dire, au repos et on cherche à déterminer les valeurs des variables de sortie. On suppose alors que l'on a  $Q = 0$ . On a donc sur la porte NOR située en bas du schéma, deux entrées à 0 ce qui doit donner une sortie à 1, soit  $\bar{Q} = 1$  (la notation est donc cohérente, *a priori*). Cela a pour conséquence, sur la porte NOR située en haut du schéma, d'avoir une entrée à 0 et une entrée à 1. La sortie de la porte NOR est donc bien à 0. Les différentes valeurs des variables sont rassemblées sur la figure 8.3 et forment un état tout à fait stable pour le système.

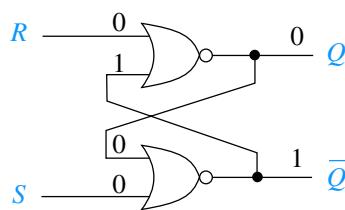


Figure 8.3

Si on suppose à présent que  $Q = 1$  (les entrées  $R$  et  $S$  étant supposées rester à 0), on constate que le système se trouve également dans un état stable tout à fait possible. En effet, si  $Q = 1$ , les entrées de la porte NOR du bas sont telles que sa sortie doit être à 0, soit  $\bar{Q} = 0$ . Quant à la porte NOR du haut, ses deux entrées sont à 0, ce qui correspond bien à  $Q = 1$  (figure 8.4).

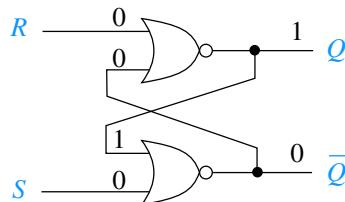


Figure 8.4

En conclusion, si les deux entrées du système,  $R$  et  $S$  sont toutes les deux à 0, le dispositif peut se trouver soit dans l'état  $Q = 0$  et  $\bar{Q} = 1$ , soit dans l'état  $Q = 1$  et  $\bar{Q} = 0$ .

### b) Analyse du comportement de la bascule

Pour comprendre le fonctionnement du système et par la même occasion vérifier l'opportunité de l'avoir appelée bascule, on part de l'état stable caractérisé par  $R = S = 0$  et par  $Q = 0$  (donc  $\bar{Q} = 1$ ). Si l'entrée  $S$  (et elle seule) passe à 1,  $\bar{Q}$  passe à 0 et par conséquent,  $Q$ , en sortie d'une porte NOR dont les deux entrées sont à 0, « bascule » à 1 (figure 8.5). La porte NOR située en bas du schéma a ses deux entrées à 1, ce qui est cohérent avec une sortie à 0.

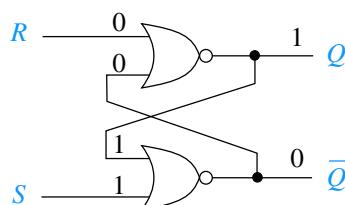


Figure 8.5

À partir de cet état, si  $S$  repasse à 0, le dispositif se retrouve dans le même état que celui de la figure 8.4, état dont on a déjà démontré la stabilité. En conclusion, le fait d'avoir positionné la variable  $S$  (pour SET) à 1 pendant un temps donné a suffi pour faire basculer le système dans l'état  $Q = 1$  et  $\bar{Q} = 0$ . Si  $S$  repasse ultérieurement à 1, on vérifie facilement que cela ne change rien à l'état des sorties.



Si cela confirme bien la cohérence des notations  $Q$  et  $\bar{Q}$ , cela montre également que les sorties d'un tel système peuvent être différentes pour des valeurs identiques du vecteur d'entrée. L'analyse du fonctionnement de ce dispositif s'avère plus complexe que dans le cas d'un simple système combinatoire.

Pour faire rebasculer le système dans l'état  $Q = 0$  et  $\bar{Q} = 1$ , il faut, à partir de l'état de repos  $R = S = 0$ , placer  $R$  (pour RESET) à 1 pendant un temps donné. À ce moment-là (figure 8.6),  $Q$  bascule immédiatement à 0, forçant la porte NOR du bas dont les deux entrées se trouvent à 0, à passer à  $\bar{Q} = 1$ . Lorsque  $R$  repasse à 0, le système se retrouve dans l'état de la figure 8.6.

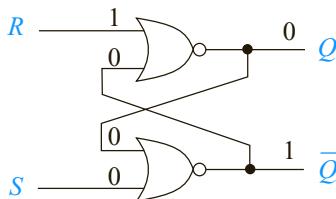


Figure 8.6

 Comme cela a déjà été évoqué, pour que le système ait le temps de basculer d'un état à l'autre, il est nécessaire que le positionnement à 1 de l'une ou l'autre entrée soit maintenu pendant un temps suffisant pour que ses composants internes puissent commuter. Selon la technologie utilisée, cela peut varier de quelques nanosecondes à quelques microsecondes.

En résumé, la bascule R/S est un système permettant de positionner à 1 ou à 0 une fonction logique  $Q$  selon que l'on injecte une impulsion d'une durée suffisante sur l'entre S (SET) ou l'entrée R (RESET).

On peut représenter ce fonctionnement par une sorte de table de vérité qui présente l'état de la fonction  $Q$  en fonction de  $R$ , de  $S$  et de l'état précédent de  $Q$ . On note alors  $Q_n$  cet état précédent et  $Q_{n+1}$  le nouvel état de cette sortie. La figure 8.7 rassemble tous les cas possibles. On remarquera que les combinaisons d'entrée ne sont pas placées dans l'ordre « numérique » mais plutôt dans l'ordre logique de fonctionnement de la bascule. Par ailleurs, le cas  $R = S = 1$  qui conduit à une indétermination sera considéré comme interdit et ne fait donc pas l'objet d'un résultat.

$R$	$S$	$Q_n$	$Q_{n+1}$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1		

Figure 8.7

### c) Représentation temporelle du fonctionnement de la bascule

Pour mieux illustrer le caractère séquentiel du système, il peut être intéressant de présenter son fonctionnement sous forme de chronogrammes. La figure 8.8 illustre ainsi les différents basculements de la sortie  $Q$  en fonction des transitions opérées sur les entrées  $R$  et  $S$ .

On peut schématiser le fonctionnement de la bascule de manière encore plus simple en considérant que le basculement de  $Q$  s'opère sur la transition de 0 à 1 de  $R$  ou de  $S$ . On dit alors que  $Q$  bascule à 1 sur les fronts montants de  $S$  et rebascule à 0 sur les fronts montants de  $R$ . La « table de vérité » de la figure 8.9 suffit donc à décrire le fonctionnement du dispositif.

La bascule R/S permet, en quelque sorte, de mémoriser une information (un bit) puisque la sortie reste inchangée en attendant un ordre de basculement à l'entrée.

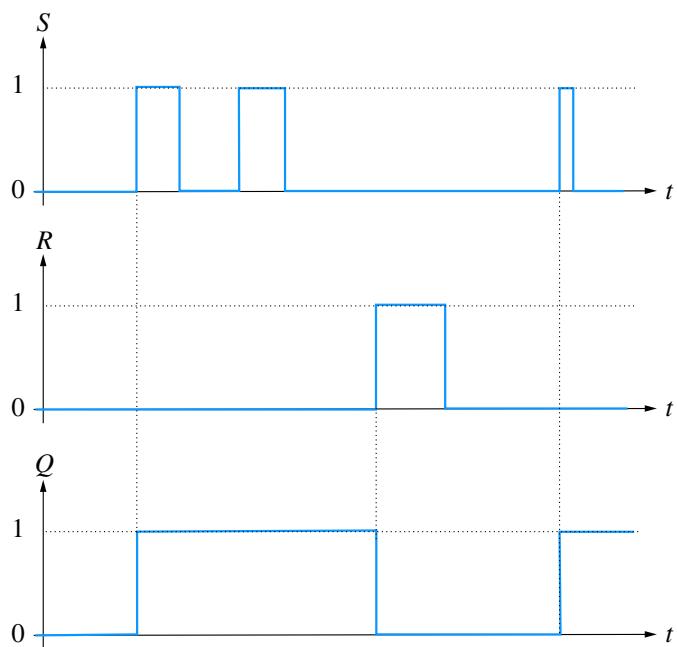


Figure 8.8

$R$	$S$	$Q_{n+1}$
↑	0	0
0	↑	1

Figure 8.9

### 8.1.3

### La mémoire par automaintien

Il s'agit encore d'un type de bascule simple réalisée à partir d'un nombre très réduit de portes logiques élémentaires. Le principal intérêt de ce type de dispositif, par rapport à la bascule R/S, réside dans le fait qu'il n'existe aucune ambiguïté lorsque les deux entrées se trouvent simultanément à 1. Dans ce cas, on peut même choisir, en fonction du type de mémoire, l'état de la sortie (0 ou 1). On parle alors de mémoire à effacement prioritaire ou à inscription prioritaire.

#### a) Mémoire à effacement prioritaire

La figure 8.10 représente un circuit possédant deux entrées :  $S$  (Set) et  $R$  (Reset) et une seule sortie  $Q$ .

L'équation de fonctionnement du dispositif est relativement simple à établir : la sortie du système est le ET logique de  $\bar{R}$  et de  $S + Q$ .

On peut donc écrire :

$$Q_{n+1} = (S + Q_n)\bar{R}$$

D'où la table de vérité du système (figure 8.11)

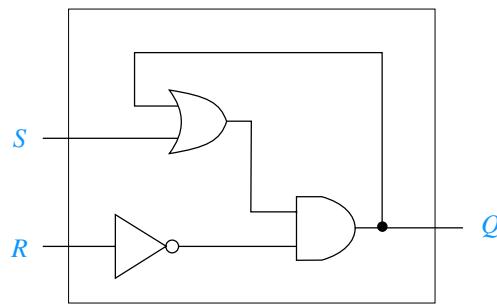


Figure 8.10

$S$	$R$	$Q_{n+1}$
0	0	$Q_n$
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Figure 8.11

Il est alors aisé de mettre en évidence le fonctionnement de la bascule. À l'instar de la bascule R/S, les entrées  $S$  et  $R$  permettent respectivement de positionner la sortie  $Q$  à 1 ou à 0. Si les deux entrées restent à 0, l'état de la sortie reste inchangé. En revanche et c'est là la principale différence avec la bascule R/S, si les deux entrées se trouvent simultanément à 1, la sortie bascule à 0. D'où l'appellation de mémoire à effacement prioritaire.

### b) Mémoire à inscription prioritaire

Le schéma de la figure 8.12 présente un dispositif analogue mais qui réagit différemment lorsque les deux entrées se trouvent simultanément à 1.

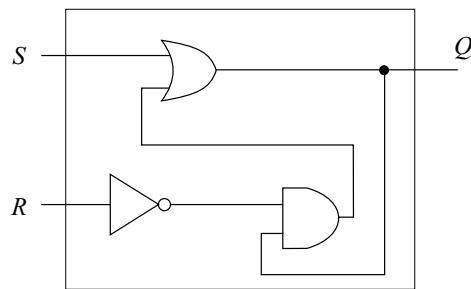


Figure 8.12

L'équation de fonctionnement du dispositif est relativement simple à établir : la sortie du système est le OU logique de  $S$  et de  $Q \cdot \bar{R}$ .

Soit :

$$Q_{n+1} = S + Q_n \bar{R}$$

D'où la table de vérité du système (figure 8.13)

$S$	$R$	$Q_{n+1}$
0	0	$Q_n$
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Figure 8.13

## 8.1.4

Le fonctionnement du système est le même que dans le cas précédent, à ceci près que si les deux entrées sont à 1, la sortie du système bascule à 1, d'où le terme de mémoire à inscription prioritaire.

### La bascule J/K

La bascule R/S possède un certain nombre d'inconvénients lorsqu'elle est associée à d'autres systèmes. Ces inconvénients proviennent d'une relative incertitude quant à l'instant de basculement des sorties. C'est pourquoi on dispose en général de bascules un peu plus complexes dont on maîtrise beaucoup mieux le basculement. Il s'agit des bascules dites maître - esclave. La plus utilisée d'entre elles est la bascule J/K. Nous ne rentrerons pas dans le détail de sa structure interne, d'autant plus que de telles dispositifs sont disponibles sous formes de circuits intégrés immédiatement opérationnels et nous nous contenterons d'en décrire le comportement.

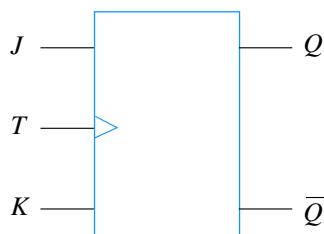


Figure 8.14

L'entrée  $T$  est communément appelée entrée d'horloge car c'est elle qui, finalement, rythme les basculements du système. Il existe différents types de bascules J/K dont certaines, par exemple, basculent sur les fronts descendants du signal d'horloge.

La bascule J/K (figure 8.14) possède trois entrées :  $J$ ,  $K$  et  $T$ . La configuration que l'on place sur les entrées  $J$  et  $K$  (00, 01, 10 ou 11) permet de définir l'action qui va être réalisée par la bascule et cette action ne devient effective que lorsque l'entrée  $T$  subit une transition de 0 à 1. Tant que  $T$  reste à 0, les sorties  $Q$  et  $\bar{Q}$  restent inchangées (à leurs valeurs précédentes).

La table de fonctionnement de la figure 8.15 présente les actions réalisées par la bascule J/K. La première ligne du tableau signifie que quelles que soient les valeurs de  $J$  et de  $K$  (présence d'un « X »), la sortie est bien inchangée si  $T$  reste à 0. En fonction de la configuration placée à l'entrée de la bascule, sur les entrées  $J$  et  $K$ , quatre comportements différents peuvent se produire lorsqu'un front montant est détecté sur  $T$  :

- sortie inchangée ( $J = K = 0$ )
- sortie à 0 ( $K$  seul est égal à 1)
- sortie à 1 ( $J$  seul est égal à 1)
- inversion de la sortie ( $J = K = 1$ )

$J$	$K$	$T$	$Q_{n+1}$
X	X	0	$Q_n$
0	0	[rising edge]	$Q_n$
0	1	[rising edge]	0
1	0	[rising edge]	1
1	1	[rising edge]	$\bar{Q}_n$

Figure 8.15

### 8.1.5

## Les compteurs synchrones

Un **compteur** est un circuit séquentiel possédant plusieurs sorties binaires  $Q_n, \dots Q_2, Q_1, Q_0$ , (4, 8 ou 16, par exemple) dont l'ensemble forme un nombre (binaire, évidemment) qui varie en fonction du nombre d'impulsions d'horloge enregistrées sur son entrée principale. À chaque impulsion d'horloge, le compteur s'incrémente d'une unité : la configuration de sortie (c'est-à-dire le nombre représenté par lesdites sorties) évolue en comptant, littéralement, les impulsions d'entrée. Le compteur est dit **synchronous** (et il s'agit là d'une qualité) si le changement de configuration en sortie se produit au même instant pour chaque bit de sortie. S'il est possible de réaliser un compteur à partir d'une mise en cascade de bascules, on préfère en général utiliser des circuits électroniques dédiés que l'on trouve dans le commerce.

Un compteur possède en général d'autres entrées que son entrée d'horloge : une remise à zéro (RAZ) qui permet de remettre toutes les sorties à 0 pour, par exemple, reprendre un nouveau comptage, une entrée de configuration qui permet de définir si les impulsions d'horloge déclenchent l'incrémentation sur front montant ou descendant et une entrée permettant de définir si le système compte ou décompte (UP/DOWN).

La figure 8.16 présente le schéma bloc d'un tel compteur et le tableau de la figure 8.17 illustre une séquence de fonctionnement d'un compteur 4 bits où chaque ligne correspond à une nouvelle impulsion d'horloge. L'entrée UP/DOWN est placée à 1 pour un fonctionnement en compteur et à 0 pour un fonctionnement en décompteur (ce qui est symbolisé par la barre de négation sur le mot DOWN). L'état initial du compteur est censé correspondre à une sortie égale à 0000.

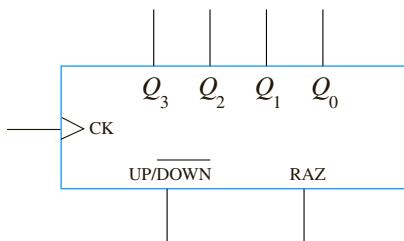


Figure 8.16

UP/DOWN	RAZ	CK	$Q_3Q_2Q_1Q_0$
1	0	0	0 0 0 0
1	0	↑	0 0 0 1
1	0	↑	0 0 1 0
1	0	↑	0 0 1 1
1	0	↑	0 1 0 0
0	0	↑	0 0 1 1
0	0	↑	0 0 1 0
0	1	0	0 0 0 0
1	0	↑	0 0 0 1
1	0	↑	0 0 1 0
1	0	↑	0 0 1 1
1	0	↑	0 1 0 0
1	0	↑	0 1 0 1

Figure 8.17

## 8.2 Le modèle GRAFCET

### 8.2.1

### Définition et exemple

#### Définition

Le GRAFCET (GRAphe Fonctionnel de Commande Etape Transition) est un langage graphique de modélisation destiné à représenter le fonctionnement d'automatismes séquentiels dont les informations sont de type logique (vrai ou faux). On l'utilise en général pour représenter ou spécifier les systèmes de commande de ces dispositifs, pour définir les cahiers des charges des automatismes séquentiels ou pour programmer des systèmes aptes à les piloter comme par exemple des automates programmables.

#### Exemple

Pour considérer un exemple simple qui nous permettra de cibler le type de systèmes concernés par notre propos, imaginons une chaîne de remplissage très simple qui consiste à remplir des pots de peinture initialement vides et défilant sur un tapis roulant (figure 8.18).

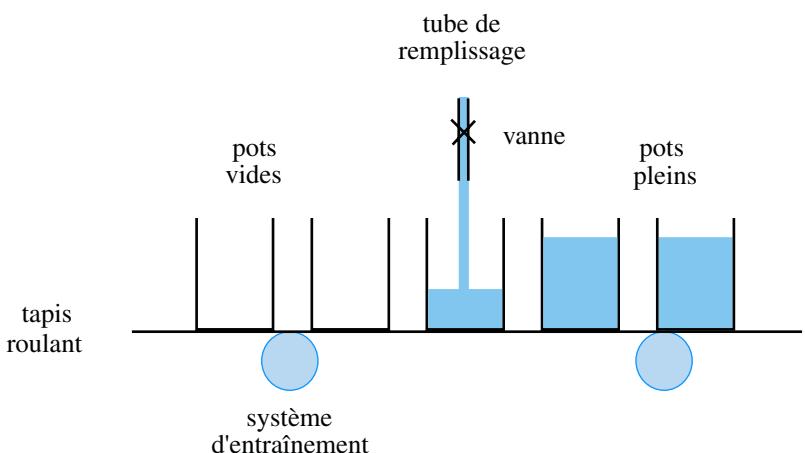


Figure 8.18

Une première analyse rapide de ce système fait nettement apparaître son caractère séquentiel, autrement dit son fonctionnement qui se conforme à une certaine séquence d'opérations. Ces opérations, au cours desquelles un certain nombre d'actions doivent être réalisées, peuvent être considérées comme des étapes élémentaires. Ici, trois actions élémentaires peuvent être identifiées : avance du tapis roulant sur une distance prédéfinie, ouverture de la vanne et fermeture de la vanne.

Pour que notre système fonctionne correctement, il convient également, sans aucun doute, de disposer de capteurs permettant de détecter un certain nombre d'événements qui peuvent s'avérer déterminants : un capteur de présence d'un pot vide en dessous du tube de remplissage et un capteur permettant de détecter que le pot en cours de remplissage est devenu plein. Ce sont effectivement ces événements qui sont à même de valider le passage à l'action suivante ou pas.

La transition d'une étape à une autre ne peut donc se faire qu'en fonction des informations délivrées par ces capteurs. On notera bien que ces informations, tout comme les ordres de commande, d'ailleurs, sont bien d'ordre logique (ou booléen ou encore « tout ou rien ») ce qui est conforme à nos attentes.

La figure 8.19 reprend le schéma original de notre dispositif en faisant apparaître les informations qui commandent le fonctionnement du système et celles que le système « envoie » par l'intermédiaire de ces capteurs. C'est ce qu'on appelle la partie opérative du système. Vu la simplicité du dispositif, il est relativement facile d'en établir la séquence de fonctionnement et de montrer comment les différentes étapes s'enchâînent en fonction des informations délivrées par les capteurs (tableau de la figure 8.20). On ne peut ainsi passer d'une étape à l'autre que lorsqu'une condition est remplie, la transition étant en quelque sorte, conditionnée par une information logique.

Nous venons clairement de mettre en évidence, dans le fonctionnement séquentiel de cette chaîne de remplissage, des notions d'étapes et de transitions, deux mots clés *a priori* important dans le concept de GRAFCET. Si l'on considère le GRAFCET comme un langage descriptif, même s'il se représente graphiquement de manière très simple, il convient d'en connaître l'ensemble du vocabulaire ainsi que, en quelque sorte, les règles de syntaxe. C'est ce que le prochain paragraphe se propose de détailler.

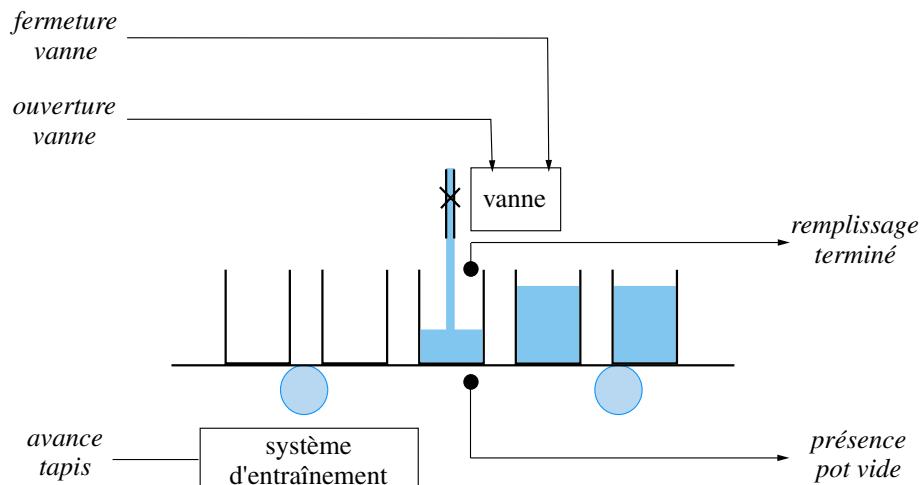


Figure 8.19

étape 1	avance tapis
	présence pot vide
étape 2	ouverture vanne
	remplissage terminé
étape 3	fermeture vanne

Figure 8.20

### Notions d'entrées et de sorties

Le schéma de la figure 8.19 ne représente en réalité que la partie dite opérative du système. La gestion des informations, quant à elle, sera dévolue à ce qu'il est convenu

## 8.2.2

# Principes de représentation

## Notion d'étape et de liaison

Une **étape** correspond, d'une manière générale, à un état donné du système. Elle peut être associée à une action ou encore à un comportement particulier dans l'organisation générale de sa séquence; elle peut être active ou inactive. Dans le fonctionnement séquentiel d'un système, les étapes ont vocation à être successivement actives et inactives au fur et à mesure du déroulement du processus. On associe à chaque étape une variable logique d'étape qui est considérée à 1 lorsque l'étape est active et à 0 dans le cas contraire.

Dans la représentation GRAFCET, on représente une étape par un carré ou un rectangle auquel on associe un numéro et parfois une étiquette qui indique, le cas échéant, l'action réalisée par l'étape. L'exemple de la figure 8.21 illustre cette représentation. Si le déroulement de la séquence fait intervenir une étape initiale, celle-ci n'est en général associée à aucune action particulière et on la représente symboliquement par un carré à trait double.

L'enchaînement entre deux étapes successives est représenté par une **liaison** qui n'est rien d'autre qu'un trait (ou un arc) liant une étape à l'étape suivante. L'usage consiste à considérer que la lecture d'une liaison se fait de haut en bas ou de gauche à droite. Dans le cas contraire ou en cas d'ambiguïté, on peut orienter l'arc par une flèche pour préciser le sens d'évolution de la séquence (figure 8.22). Lorsqu'on représente l'état du système à un instant donné, on indique la ou les étape(s) active(s) en plaçant un « **jeton** », autrement dit un petit cercle à l'intérieur de celles-ci.

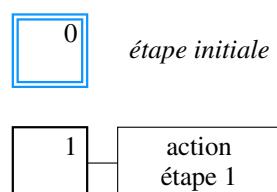


Figure 8.21

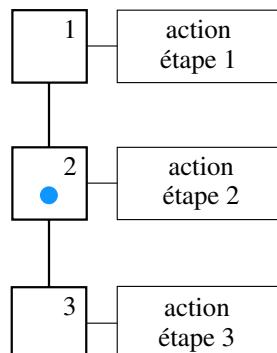


Figure 8.22

### Notion de transition

Le passage d'une étape à un autre, s'il est schématisé par un trait ou par un arc, est en général conditionné par une **condition** (ou **réceptivité**) : c'est la notion de **transition** que l'on représente par une petite barre au travers de cet arc. Il se peut qu'une transition ne soit associée à aucune condition. On dit alors que la réceptivité de la transition est toujours vraie. C'est le cas où deux étapes s'enchaînent sans condition particulière.

### Exemple

Reprendons l'exemple développé au paragraphe 9.3.1 à propos de la chaîne de remplissage et aidons nous du tableau de la figure 8.20 pour en modéliser le GRAFCET. Chaque étape est matérialisée par un carré et les deux transitions principales sont caractérisées par leur réceptivité, autrement dit, respectivement par les conditions « présence pot vide » et « remplissage terminé ». On notera qu'une fois le remplissage d'un pot terminé, la vanne d'alimentation est fermée et comme nous supposons cette action instantanée, une transition inconditionnelle nous ramène à l'étape 1 pour faire avancer un nouveau pot vide.

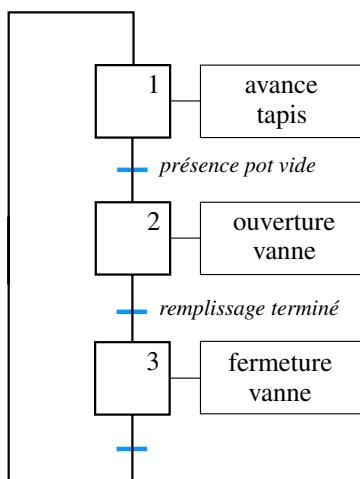


Figure 8.23

### Règles de construction d'un GRAFCET

Le système de remplissage dont venons d'établir un GRAFCET somme toute très simplifié a certes valeur d'exemple mais dans la réalité industrielle, les dispositifs séquentiels sont souvent plus complexes et les GRAFCETs associés le sont également. Ainsi, plusieurs étapes peuvent être reliées à une seule transition ou inversement.

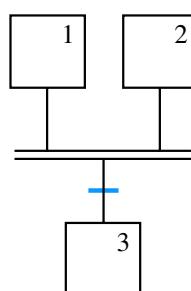
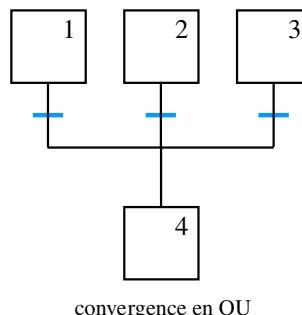


Figure 8.24

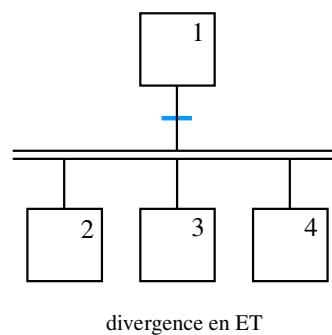
Dans le cas de la figure 8.24, nous avons effectivement deux étapes reliées à une seule transition. On trace alors un double trait horizontal qui symbolise ce qu'on appelle la « **convergence en ET** » ou synchronisation amont. Dans ce cas, les deux étapes situées en amont de la transition devront être actives et la condition de transition devra être validée pour que la transition puisse être franchie vers l'étape suivante.

Sur la figure 8.25, plusieurs étapes amont sont reliées à une étape « aval » par l'intermédiaire de trois transitions. Ici, il s'agit de symboliser le fait qu'une seule de ces transitions suffit pour activer l'étape suivante. C'est la « **convergence en OU** ».



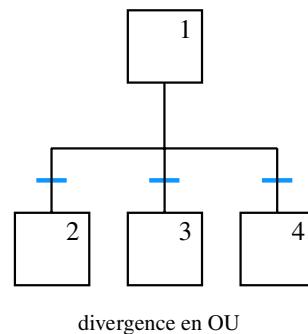
**Figure 8.25**

La **divergence en ET** correspond à la synchronisation du démarrage simultané de plusieurs étapes qui seront actives en même temps. Lorsque la condition de la transition est vraie, les trois étapes représentées sur la figure 8.26 deviennent actives.



**Figure 8.26**

Pour finir, la figure 8.27 représente la **divergence en OU** qui correspond à l'activation conditionnelle de plusieurs étapes « aval » possédant chacune leur propre condition d'activation.



**Figure 8.27**

## 8.2.3

### Différents types d'action

L'activation d'une étape a en général pour objet de déclencher une action particulière sur le système. Ces actions peuvent être de différents ordres.

#### **Actions continues**

Une action est dite continue si elle est effectuée pendant toute la durée d'activation de l'étape correspondante. Il peut s'agir, par exemple, de mettre en marche un indicateur lumineux tant que l'étape est active.

#### **Actions mémorisées**

Une action mémorisée correspond à une opération déclenchée lorsque que l'étape est activée, sans que la désactivation de l'étape n'interrompe l'action. Il peut s'agir d'une opération qui sera interrompue naturellement une fois sa tâche terminée (par exemple l'ordre de fermeture d'une vanne, une fois reçu par l'actionneur correspondant, déclenche l'action requise qui ne s'interrompra qu'une fois la vanne fermée) ou encore d'une opération qui sera arrêtée par une étape ultérieure.

#### **Actions conditionnelles**

Une action conditionnelle est une tâche effectuée lorsque l'étape est active si de surcroît une condition particulière est vérifiée.

#### **Actions temporisées**

Une action temporisée n'est déclenchée qu'après un certain délai après l'activation de l'étape correspondante. Elle peut être continue ou mémorisée.

## 8.2.4

### Évolution d'un GRAFCET

#### **État initial du système**

Les étapes initiales sont celles qui sont actives au début du fonctionnement du système, en quelque sorte, lors de sa mise sous tension ou de son démarrage. Nous avons déjà évoqué leur symbole (carré aux traits doublés) et il peut y en avoir plusieurs au sein d'un même système. À l'instant 0 du fonctionnement du système, des jetons sont placés dans toutes ses étapes actives (exemple figure 8.28).

#### **Règles de franchissement des transitions**

Pour qu'une transition soit franchie, elle doit être validée en réunissant les deux conditions suivantes :

- les étapes immédiatement précédentes doivent être actives ;
- sa réceptivité (c'est-à-dire sa condition intrinsèque) doit être vraie.

Dans ce cas, les étapes suivantes sont automatiquement activées et les étapes précédentes désactivées.

#### **Exemple**

Dans la figure 8.28, l'appui sur le bouton marche/arrêt rend vraie la réceptivité de la transition  $T_1$  (que l'on supposera rester vraie en permanence). Comme l'étape 1 était active, cette action active l'étape 2 et désactive l'étape 1. Le jeton placé initialement dans l'étape 1 « descend » donc dans l'étape 2 (figure 8.29).

L'étape 2 est suivie d'une divergence en OU. Plusieurs cas de figure peuvent alors se produirent. Si une seule des réceptivités  $T_2$  ou  $T_3$  est vraie (par exemple  $T_3$ ), alors l'étape 2 est désactivée et c'est l'étape 4 qui s'active (figure 8.30). On notera que l'étape 3 ne peut donc plus devenir active. Pour que les deux étapes 3 et 4 puissent s'activer en même temps, il faudrait que les deux réceptivités  $T_2$  et  $T_3$  soit vraies avant que l'étape 2 ne s'active.

Une convergence en OU est placée immédiatement après les étapes 3 et 4. Puisque l'étape 4 a été validée, il faudra attendre que la transition  $T_5$  soit validée pour atteindre la convergence en ET. Dès que la réceptivité  $T_6$  sera vraie, l'étape 6 deviendra active et les étapes 4 et 5 seront désactivées (figure 8.31).

Lorsque la réceptivité  $T_7$  devient vraie, le GRAFCET évolue selon une divergence en ET : les étapes 1 et 7 s'activent et comme nous avons supposé que la transition  $T_1$  restait vraie en permanence, l'étape 2 s'active immédiatement.

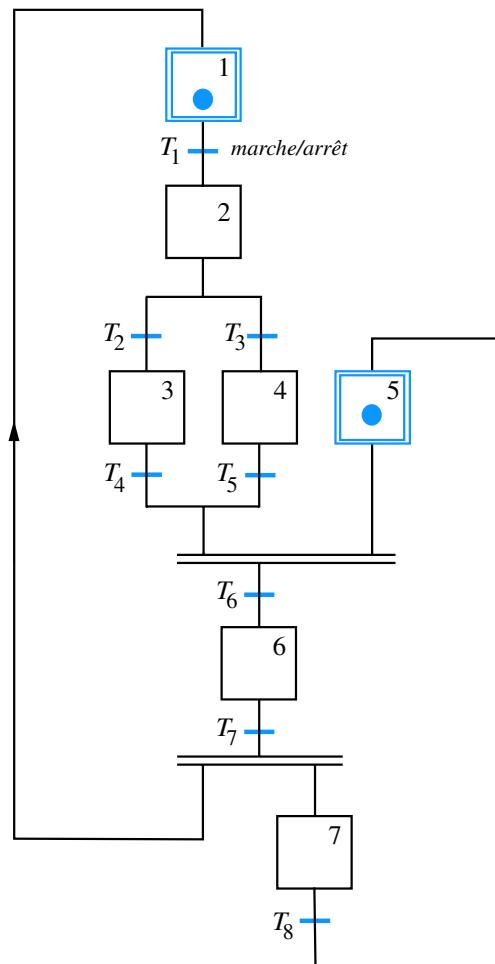


Figure 8.28

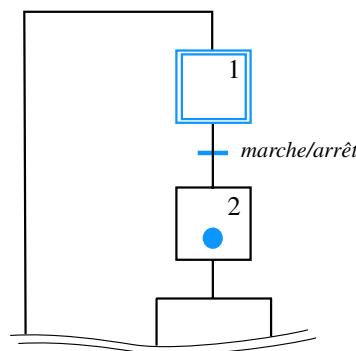


Figure 8.29

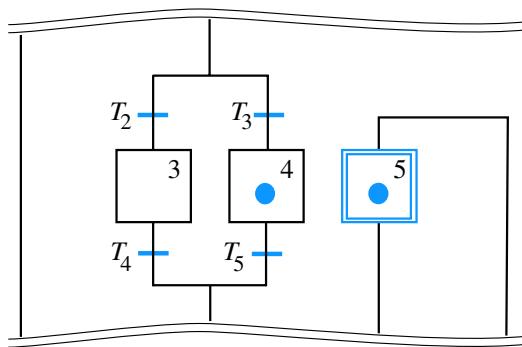


Figure 8.30

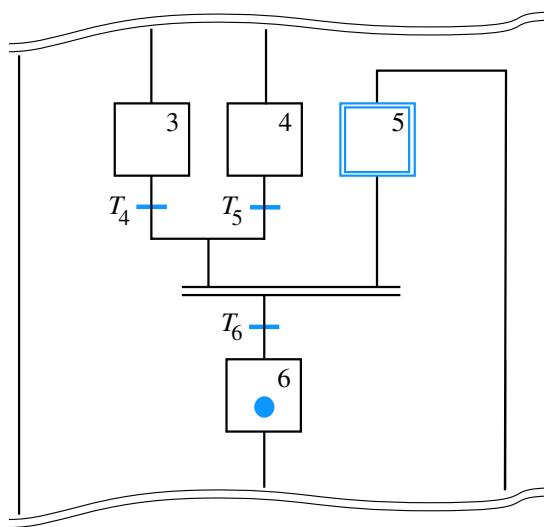


Figure 8.31

On peut continuer à simuler ainsi à l'infini l'évolution de ce GRAFCET. On notera par exemple que tant que la transition  $T_8$  n'est pas validée, le jeton se trouvant, le cas échéant, dans l'étape 7, ne peut revenir dans l'étape 5. Dans ces conditions, la convergence en ET se trouvant au dessus de la transition  $T_6$  ne peut plus (momentanément) être franchie, même si, entre temps, l'évolution du système a activé l'étape 3 ou l'étape 4.

### Notion d'évolution fugace

#### Définition

On dit que le GRAFCET d'un système subit une **évolution fugace** lorsque plusieurs transitions qui s'enchaînent dans une séquence possèdent des réceptivités vraie (figure 8.32).

Dans ce cas, le jeton d'activation d'étape va progresser de manière très rapide (pour ne pas dire instantanée) le long de la séquence jusqu'à s'immobiliser sur une étape dont la transition aval ne sera pas encore franchissable (l'étape 4 dans notre exemple). Le terme d'évolution fugace évoque bien cette notion de parcours au cours duquel un certain nombre d'étapes ne vont rester actives qu'un très court laps de temps. Si des actions continues sont associées à ces étapes, elles ne seront pas réalisées. En revanche, s'il s'agit d'actions mémorisées, elles le seront.

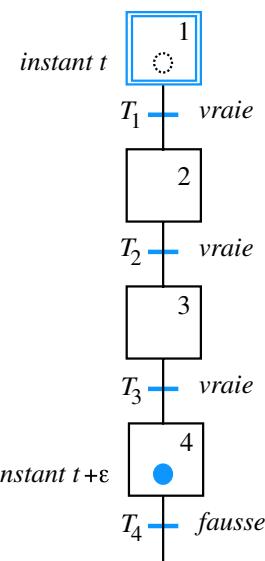


Figure 8.32

## 8.2.5

### Étude de cas

Le schéma de la figure 8.33 représente en vue de dessus, un système de tri de caisses. Il s'agit ici de trier les petites caisses et les grosses qui sont amenées par le tapis roulant 1 en acheminant les unes vers le tapis 2 et les autres, vers le tapis 3.

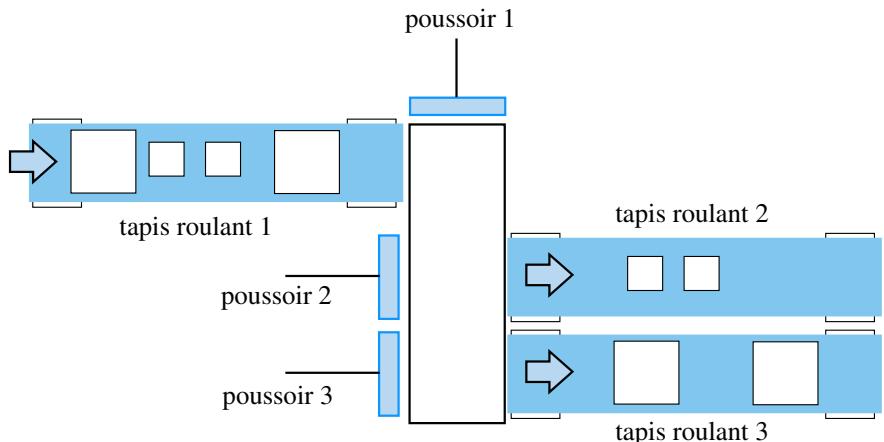


Figure 8.33

Pour ce faire, un capteur placé à proximité du poussoir 1 détecte le type de caisse qui se présente devant lui. S'il s'agit d'une petite caisse, le poussoir 1 la pousse devant le poussoir 2 qui, à son tour, la pousse sur le tapis roulant 2. S'il s'agit d'une grosse caisse, le poussoir 1 la pousse devant le poussoir 3 qui lui, la pousse vers le tapis roulant 3. On supposera que les tapis roulants 2 et 3 fonctionnent en continu, tandis que le tapis roulant 1 doit bien évidemment s'arrêter quand une caisse est engagé dans le dispositif de tri.

Pour établir le GRAFCET de la partie opérative de ce système, il convient tout d'abord de définir les actions nécessaires ainsi que les capteurs qui fourniront les informations dont nous avons besoin. En ce qui concerne les actions, on aura :

- avance tapis roulant 1 (que nous nommerons AV TR1), cette action étant supposée continue (le tapis est entraîné tant que AV TR1 est active et est arrêté sinon)
- avance poussoir 1 en position 2, AV P1/2 (position intermédiaire juste avant la zone poussée par le poussoir 2 de manière à placer l'objet en situation d'être poussé par le poussoir 2)
- avance poussoir 1 en position 3, AV P1/3 (poussoir 1 sorti complètement devant la zone poussée par le poussoir 3)
- retrait poussoir 1 (R P1), poussoir 1 rentrant à sa position d'origine
- avance poussoir 2, AV P2 (le poussoir 2 fait glisser l'objet sur le tapis roulant 2)
- retrait poussoir 2, R P2
- avance poussoir 3, AV P3 (le poussoir 3 fait glisser l'objet sur le tapis roulant 3)
- retrait poussoir 3, R P3

Côté capteurs, faisons le bilan des informations logiques requises pour assurer le fonctionnement du système. Pour ne rien oublier, raisonnons en cherchant quelles sont les données qu'il faut détecter pour être capable de prendre les décisions. Il faut bien sûr que soit placé, au niveau du poussoir P1, un dispositif de détection du type de caisse. Nous supposerons que ce dispositif délivre deux variables logiques GC (pour grosse caisse) et PC (petite caisse) étant respectivement à 1 lorsque l'un des types de caisses se présente devant P1. Pour gérer correctement les mouvements des poussoirs, il faut par ailleurs être capable de repérer leur position (entré ou sorti, et même sorti en position intermédiaire pour P1). En résumé :

- détection d'une grosse caisse : GC
- détection d'une petite caisse : PC
- détection du poussoir 1 rentrée complètement : P10
- détection du poussoir 1 sorti en position intermédiaire : P12
- détection du poussoir 1 sorti complètement : P13
- détection du poussoir 2 rentré : P20
- détection du poussoir 2 sorti : P21
- détection du poussoir 3 rentré : P30
- détection du poussoir 3 sorti : P31

Toutes ces détections, bien sûr, sont associées aux transitions qui régleront l'évolution du GRAFCET du système.

Pour établir le GRAFCET d'un système simple, il est possible d'imaginer pas à pas la séquence d'opérations nécessaires pour effectuer un cycle complet. Nous supposerons qu'au démarrage du système, tous les poussoirs se trouvent rentrés, que le tapis roulant 1 avance et que des caisses sont en route vers le dispositif de tri. L'étape AV TR 1 est donc l'étape active au démarrage et la seule, les autres actionneurs étant au repos. Le premier événement qui inaktivera cette première étape est l'arrivée d'une caisse (transition GC ou PC). C'est donc une divergence en OU qui sera placée en aval de cette première étape. Le GRAFCET se sépare donc en quelque sorte en deux branches, chacune des deux branches correspondant au traitement d'un des deux types de caisse. Les deux branches auront une structure analogue ; considérons pour commencer le cas où c'est une grosse caisse qui est détectée. Le poussoir 1 doit être amenée en position 3 : cette étape est associée à l'action AV P1/3. Lorsque la caisse est placée en face du poussoir 3 (réceptivité P13 vraie), P1 se retire « et » P3 avance. En aval de la transition P13, une divergence en ET déclenche ces deux opérations, l'avance de P3 étant immédiatement suivie de son retrait dès que l'on détecte qu'il est sorti complètement (donc que la caisse est engagé sur le tapis roulant 3). On considérera que le cycle est terminé dès lors que les deux poussoirs 1 et 3 seront tous deux rentrés. Autrement dit, les transitions P10 et P30 sont l'objet d'une convergence en ET qui sera franchie lorsque le dispositif de tri sera à nouveau apte à traiter une caisse, c'est-à-dire à procéder à l'avance du tapis roulant.

La seconde branche (traitement d'une petite caisse) est pratiquement identique à la première à ceci près que le poussoir 1 se place en position intermédiaire (AV P1/2) et que c'est le poussoir 2 qui opère à la place du poussoir 3.

La figure 8.34 présente le GRAFCET de la partie opérative du système. On notera la présence d'une boucle qui relie les deux dernières convergences en ET à l'étape d'activation du tapis roulant 1. Dès lors qu'un jeton franchit l'une de ces deux convergences en ET, il revient bien activer l'étape initiale.

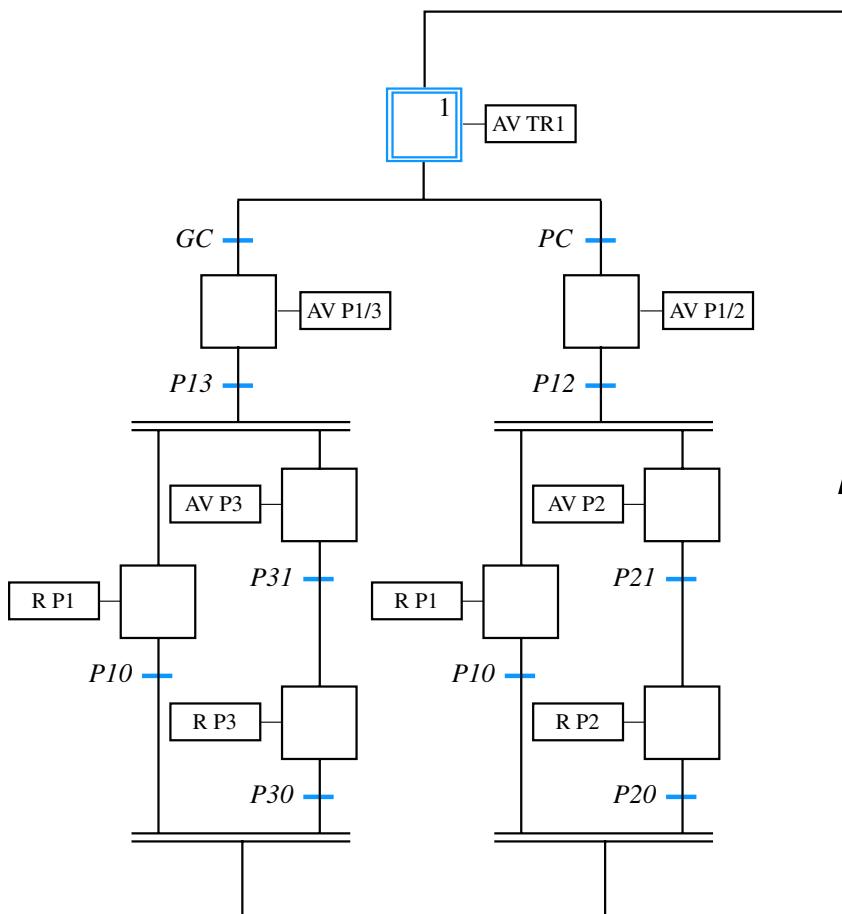


Figure 8.34

## Synthèse

### Savoirs

#### Je connais

- Les différents types de bascules simples ;
- Le fonctionnement d'un compteur synchrone ;
- La représentation GRAFCET ;
- Les règles de construction d'un modèle GRAFCET.

### Savoir-faire

#### Je sais

- Analyser le comportement séquentiel d'un système simple ;
- Représenter le fonctionnement d'un système séquentiel par des chronogrammes ;
- Analyser le fonctionnement d'un système modélisé par un GRAFCET.

## Exercice d'application

**8.1** Le schéma de la figure 8.35 représente une bascule RS ainsi que les chronogrammes de ses deux entrées. On suppose dans un premier temps que les portes logiques NOR sont parfaites et commutent instantanément. Établir le chronogramme de la sortie de la bascule en supposant que la sortie  $Q$  se trouve initialement à 0.

Dans un second temps, les portes NOR sont supposées réelles et caractérisées par un retard  $\delta t$ . Étudier l'influence

de ce facteur sur le basculement du système et établir le chronogramme de la sortie  $Q$  dans ce cas.

On fait l'hypothèse que si une des variables d'entrée d'une porte NOR change d'état pendant une durée inférieure à  $\delta t$ , cet changement ne sera pas pris en compte et que sa sortie sera inchangée (c'est un peu plus compliqué dans la réalité mais cette hypothèse de travail va malgré tout nous simplifier la vie).

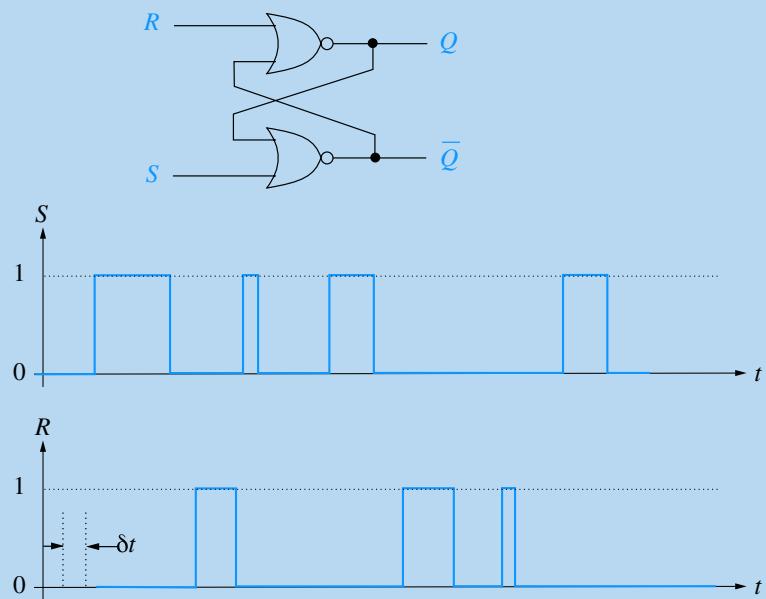


Figure 8.35

## Exercices d'approfondissement

**8.2** On considère le système séquentiel représenté sur la figure 8.36 et impliquant deux bascules JK. Un signal carré est injecté sur l'entrée d'horloge (figure 8.37).

Établir les chronogrammes des sorties  $Q_1$  et  $Q_2$ . On supposera qu'avant la première impulsion d'horloge, le système se trouve dans un état tel que  $J_1 = 1$  et  $Q_1 = J_2 = Q_2 = 0$ .

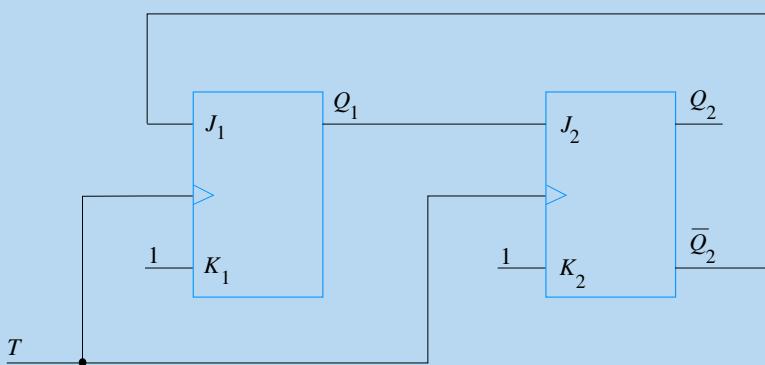


Figure 8.36

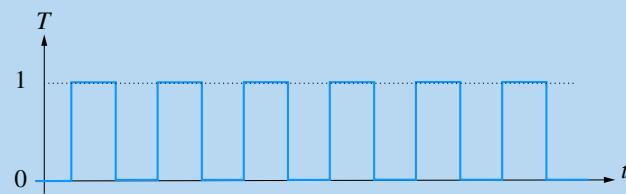


Figure 8.37

**8.3** La figure 8.38 représente un système de forage automatisé capable de percer des trous dans des pièces métalliques qui défilent sur un tapis roulant. Chaque pièce est acheminée sous la perceuse par un tapis roulant et doit recevoir un trou sur sa face supérieure. On supposera qu'un capteur approprié est capable de détecter la présence d'une pièce prête à être percée.

Établir la liste des actions et des capteurs nécessaires pour assurer le fonctionnement du système puis son GRAFCET.

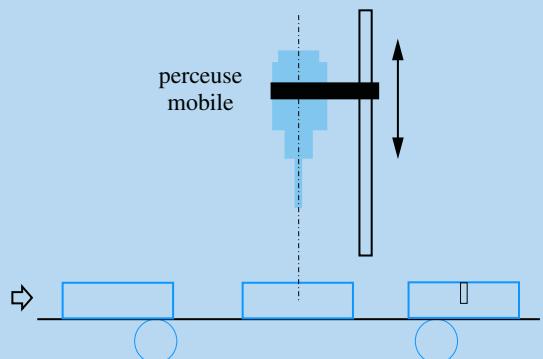


Figure 8.38

# Solutions des exercices

## Exercice d'application

8.1

Si les portes NOR sont parfaites et commutent instantanément, il suffit de se fier à la table de fonctionnement de la bascule pour déterminer les basculements du dispositif. Chaque front montant sur  $R$  vient mettre la sortie  $Q$  à 0 et chaque front montant sur  $S$  la positionne à 1. Bien évidemment, si  $R$  passe à 1

tandis que  $Q$  est déjà à 0,  $Q$  reste inchangé. De même si  $S$  passe à 1 tandis que  $Q$  est déjà à 1. Le chronogramme est donc très facile à tracer (figure 8.39).

Si on suppose à présent que chaque porte NOR possède un retard  $\delta t$ , il convient de reconsidérer entièrement le fonctionnement de la bascule  $RS$ . Examinons ce qui se passe à l'instant du premier front montant détecté sur l'entrée  $S$ .  $Q$  étant à 0,  $\overline{Q}$  qui est à 1 va basculer à 0 avec un retard de  $\delta t$ . La porte NOR supérieure va alors avoir ses deux entrées à 0 et sa sortie  $Q$  va basculer à 1 après un deuxième retard  $\delta t$ .

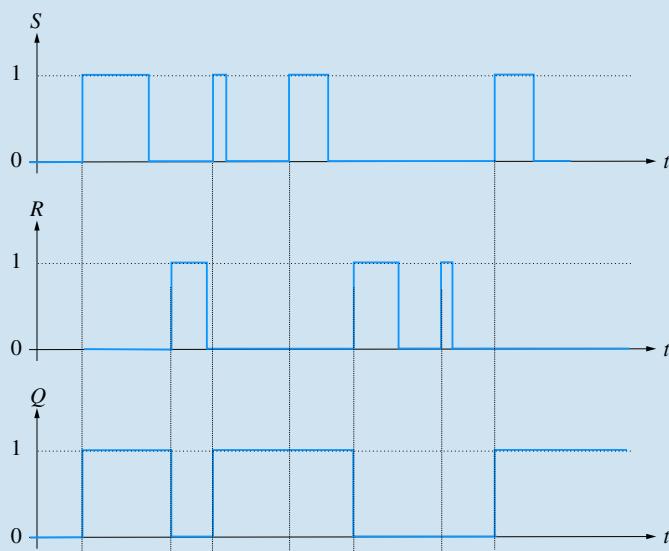


Figure 8.39

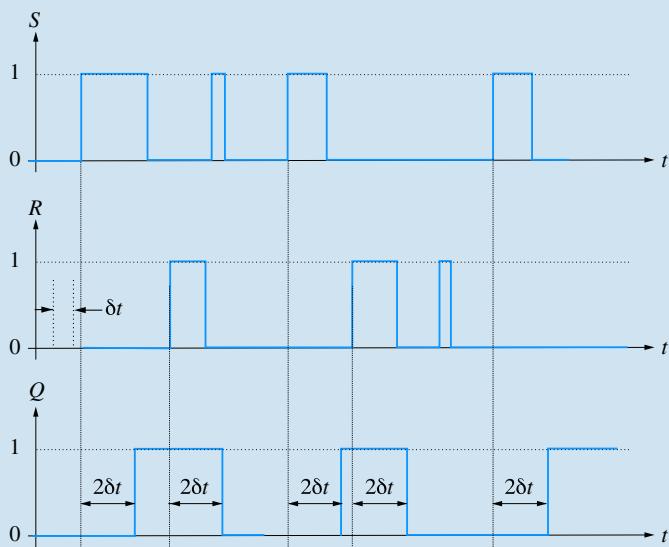


Figure 8.40

**Première conclusion :** le retard de basculement de la bascule  $RS$  est égal à  $2\delta t$ .

**Deuxième conclusion :** si on formule effectivement l'hypothèse que  $S$  doit être maintenu à 1 pendant une durée supérieure à  $\delta t$ , on pourra considérer que si elle repasse à 0 après cette durée  $\delta t$ ,  $\overline{Q}$  restera à 0 suffisamment longtemps pour faire basculer la porte NOR du haut.

Comme le système est parfaitement symétrique, des conclusions analogues peuvent être énoncées à propos de l'entrée  $R$ . En résumé, la bascule  $RS$  ne peut changer d'état que si des impulsions d'une largeur au moins égale à  $\delta t$  sont détectées sur ses entrées et l'instant du basculement se produit avec un retard de  $2\delta t$ .

Par conséquent, la deuxième impulsion placée sur l'entrée  $S$  sera sans effet. On peut noter que la troisième impulsion placée sur  $R$  était déjà sans effet dans le cas de portes parfaites.

Cela mis à part, la principale différence entre le cas idéal et le cas réel consiste en un décalage temporel global de  $2\delta t$  (figure 8.40).

## Exercices d'approfondissement

### 8.2

Comme  $K = 1$  pour chaque bascule, elles fonctionnent selon le mode simplifié suivant : à chaque front montant du signal d'horloge  $T$  :

- si  $J = 0$ ,  $Q$  passe à 0 ;
- si  $J = 1$ ,  $Q$  passe à  $\overline{Q}$ .

On commence par établir ce qui se passe pour les trois premiers fronts montants du signal d'horloge.

#### Premier front montant de $T$ .

Compte tenu que  $J_1 = 1$ , la sortie  $Q_1$  s'inverse et devient donc égale à 1. Toutefois, lorsque la seconde bascule reçoit son impulsion d'horloge (exactement au même instant que la première), il n'est pas possible, compte tenu des temps de commutation interne de la première bascule, que  $Q_1$  soit déjà passé à 1.

Donc  $J_2$  est toujours égale à 0 à l'instant du front montant de l'horloge. Donc  $Q_2$  reste à 0,  $\overline{Q}_2$  et  $J_1$  restent à 1.

#### Deuxième front montant de $T$ .

Comme  $J_1 = 1$ , la sortie  $Q_1$  s'inverse à nouveau et devient donc égale à 0. Toutefois, lorsque la seconde bascule reçoit son impulsion d'horloge,  $J_2$  est encore égale à 1 (même raison que précédemment).  $Q_2$  s'inverse et devient égale à 1, donc  $\overline{Q}_2$  et  $J_1$  passent à 0.

#### Troisième front montant de $T$ .

Comme  $J_1 = 0$ ,  $Q_1$  et  $J_2$  restent à 0.  $Q_2$  passe donc à 0 et par voie de conséquence,  $\overline{Q}_2$  et  $J_1$  passent à 1. On se retrouve donc avec la même configuration qu'à l'instant initial, ce qui signifie que la séquence de basculements que nous venons de mettre en évidence va se répéter indéfiniment.

On trace donc pas à pas, sur le chronogramme de la figure 8.41, l'évolution des signaux aux trois premiers fronts montants du signal d'horloge et on reproduit la séquence pour obtenir un graphe plus explicite.

Le dispositif étudié délivre donc un signal rectangulaire sur sa sortie  $Q_1$  dont la fréquence est divisée par trois par rapport à celle du signal d'horloge. La sortie  $Q_2$  délivre le même signal retardé d'une période d'horloge.

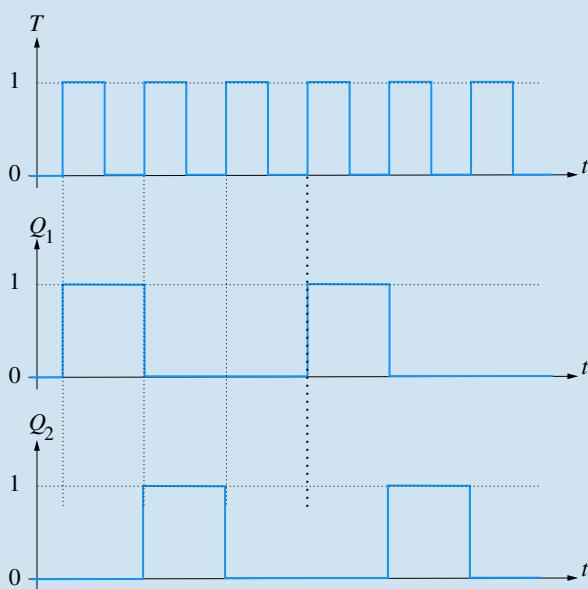


Figure 8.41

### 8.3

Pour établir le GRAFCET de la partie opérative de ce système, il convient tout d'abord de définir les actions nécessaires ainsi que les capteurs qui fourniront les informations dont nous avons besoin. En ce qui concerne les actions, on aura :

- avance tapis roulant (que nous nommerons AV TR), cette action étant supposée continue (le tapis est entraîné tant que AV TR est active et est arrêté dans le cas contraire)
- rotation perceuse (que nous nommerons RP), cette action étant également supposée continue
- descente perceuse (DP), action continue
- montée perceuse (MP), action continue également

Côté capteurs, nous avons besoin de détecter la présence d'une pièce prête à être percée, de détecter les positions extrêmes de la perceuse (soit en position haute, soit en position basse correspondant à la profondeur du trou à percer). Soit :

- détection de la pièce : DetP
- détection perceuse en position haute : DetH
- détection perceuse en position basse (trou terminé) : DetB

Nous supposerons qu'au démarrage du système la perceuse se trouve inactive (position haute et moteur à l'arrêt) et que le tapis roulant est activé.

Le premier événement qui inaktivera cette première étape est l'arrivée d'une pièce en position de perçage (transition DetP). La perceuse doit alors se mettre en route et descendre. C'est une divergence en ET qui doit activer ces deux étapes. Quand

le trou est percé (transition DetB), la perceuse doit remonter et s'arrêtera de tourner lorsqu'elle aura rejoint sa position haute (transition DetH). C'est aussi à ce moment là que le tapis roulant peut avancer à nouveau.

La figure 8.42 présente le GRAFCET du système.

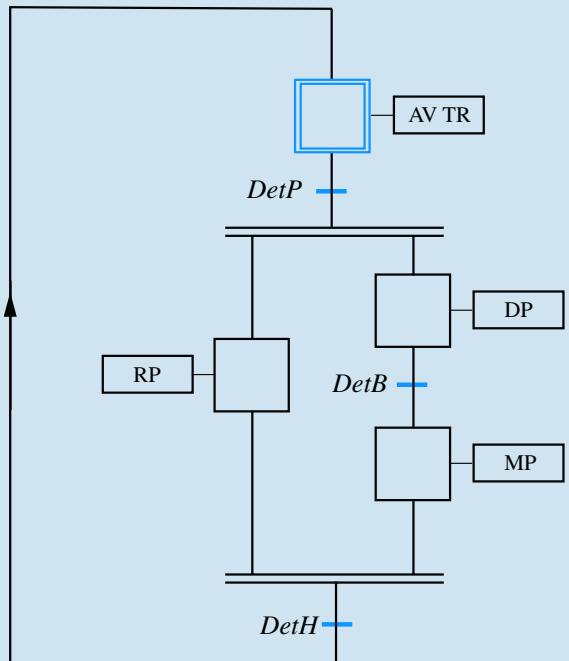


Figure 8.42

# Modélisation et étude temporelle des systèmes continus

CHAPITRE 9

## Plan

9.1 Cadre général de l'étude des systèmes continus	233
9.2 La transformation de Laplace	236
9.3 Fonction de transfert d'un système linéaire	241
9.4 Étude temporelle des systèmes d'ordre 1	247
9.5 Étude temporelle des systèmes d'ordre 2	251
9.6 Identification d'un système	255
Exercices d'application	258
Exercices d'approfondissement	259
Solutions des exercices	260

## Introduction

Les principaux problèmes liés à la mise en œuvre des systèmes physiques et industriels concernent leur commande, autrement dit la manière dont il faut les solliciter pour qu'ils se comportent de la façon voulue. Comment piloter une chaudière pour qu'il règne une température de 20 °C à l'intérieur des pièces d'une habitation ? Comment commander les vannes d'un barrage pour que la hauteur d'eau reste optimale ? Quels signaux faut-il injecter dans le système de commande d'une climatisation pour maintenir la température constante à l'intérieur d'un véhicule ? Comment doit-on agir sur les organes d'un avion pour assurer sa stabilité en vol ? Autant de questions qui renvoient à la problématique générale de la commande des systèmes. Nous allons tenter, au travers de ce chapitre, de mettre en évidence les principes généraux de cette problématique grâce à des exemples simples.

## Prérequis

- Le formalisme utilisé dans l'étude des systèmes linéaires continus est relativement simple. Il convient toutefois d'être relativement à l'aise avec le calcul algébrique, les nombres complexes, les fractions rationnelles et les fonctions usuelles.

## Objectifs

- Manipuler les outils simples de modélisation des systèmes linéaires continus pour résoudre les problèmes élémentaires relatifs à leur fonctionnement temporel.

## 9.1 Cadre général de l'étude des systèmes continus

### 9.1.1 Exemple

Considérons un four électrique destiné à la cuisson d'objets en céramique. Au sens où il s'agit d'un dispositif censé effectuer une certaine tâche, à remplir une fonction, nous l'appellerons système. Pour faire simple, on suppose qu'il possède une résistance

chauffante parcourue par un courant  $i(t)$  et que la température qui règne à l'intérieur du four est notée  $\theta(t)$ , ces deux grandeurs évoluant de manière continue en fonction du temps. Il s'agit donc de fonctions continues du temps et dans l'ensemble de ce chapitre, il ne sera question que de telles grandeurs continues. On les appelle signaux au sens où ces grandeurs sont porteuses d'informations. Elles sont en général mesurables à l'aide de capteurs adéquats et délivrent effectivement des informations sur les phénomènes impliqués dans le système.

Les deux grandeurs mentionnées ci-dessus sont de nature différentes. Le courant  $i(t)$  est en quelque sorte la sollicitation que l'on injecte dans le système pour qu'il remplisse son office. On le qualifie de **signal d'entrée**. En revanche, la température qui règne dans le four correspond au comportement du système ou encore à sa réponse. Il s'agit du **signal de sortie**.

Les deux signaux sont bien évidemment liés entre eux par les **lois de comportement** du four. Il s'agit en général de lois de la physique qui régissent le fonctionnement du système et qui se traduisent par des équations plus ou moins complexes. Ces lois, ces équations sont elles-même continues au sens où elles représentent le comportement du système à chaque instant. On les suppose invariantes, c'est-à-dire qu'elles restent identiques et valables quel que soit l'instant considéré. Dans ce cas, le **système** est dit **continu invariant**.

La forme mathématique de la relation existant entre la sortie et l'entrée d'un système s'appelle un **modèle de fonctionnement** et il est l'expression théorique de la manière dont se comporte le système. C'est grâce à ce modèle que l'on est capable de résoudre les différents problèmes qui se posent lors de l'utilisation du système. Les modèles théoriques ne sont toutefois jamais parfaits et, bien souvent, ne reflètent pas l'exakte vérité. En effet, pour les construire, on est souvent appelé à faire des approximations, à négliger des phénomènes considérés comme marginaux ou encore à s'appuyer sur des lois de la physique qui, elles-mêmes, peuvent être connues de manière imprécise. Les figures 9.1 et 9.2 résument les différents éléments, notamment de vocabulaire, qui viennent d'être présentés. D'une manière générale, on représentera toujours le système par un rectangle muni de ses signaux d'entrée et de sortie (respectivement sollicitation et réponse). Dans la complexité des systèmes industriels, ceux-ci peuvent posséder plusieurs entrées et plusieurs sorties mais nous nous limiterons, dans le cadre de notre étude, à des systèmes possédant une seule entrée et une seule sortie encore appelés systèmes mono-entrée, mono sortie.

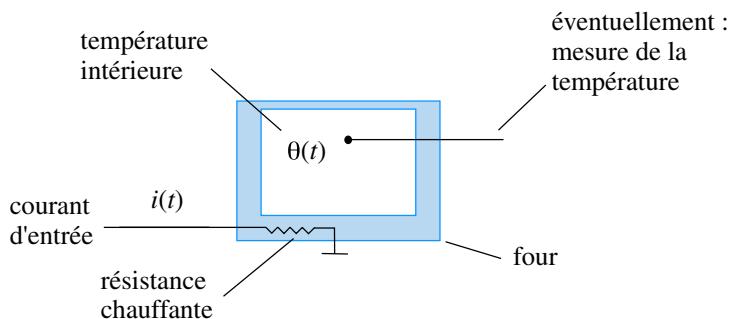


Figure 9.1

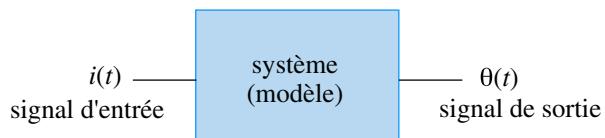


Figure 9.2

## 9.1.2

### Les différents problèmes à résoudre

L'étude des systèmes peut revêtir des aspects différents en fonction de la manière dont cherche à les exploiter. En observant le schéma de la figure 9.2, on peut constater qu'il existe finalement trois objets fondamentaux impliqués dans le fonctionnement d'un système : le signal d'entrée, le modèle et le signal de sortie. De toute évidence, la connaissance de deux de ces objets permet de déterminer le troisième étant donné que le modèle traduit le lien qui existe entre l'entrée et la sortie.

#### Problème de prédiction

Le problème le plus simple et peut-être le plus naturel consiste à chercher à déterminer le comportement d'un système, autrement dit sa sortie, lorsque l'on connaît le signal d'entrée qui lui est injecté. La résolution de ce type de problème nécessite, bien sûr, la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système.

#### Problème de commande

Les problèmes de commande sont sans aucun doute plus proches de la réalité industrielle. Il s'agit ici, connaissant le modèle de fonctionnement du système, de déterminer quel doit être le signal à injecter à l'entrée pour qu'il se comporte de la manière voulue. On parle de commande car telle est bien la vocation du signal d'entrée puisqu'il est question de faire en sorte que le système réponde de la manière souhaitée. En d'autres termes, le modèle étant connu et le signal de sortie étant imposé, il s'agit bien de déterminer la forme du signal d'entrée.

#### Problème d'identification

Dans un problème d'identification, le modèle de fonctionnement du système est *a priori* inconnu et on cherche à l'approcher par une démarche qui consiste à injecter des signaux parfaitement connus et calibrés à son entrée et à en évaluer le comportement, autrement dit en mesurant les signaux de sortie correspondants. L'identification est parfois une étape préalable expérimentale nécessaire à la résolution ultérieure d'un problème de commande lorsque le modèle du système n'est pas directement accessible. Nous reviendrons plus tard sur cette question de l'identification.

## 9.1.3

### Le cas des systèmes linéaires

Nous avons déjà restreint le cadre de notre étude aux systèmes continus, invariants, mono entrée et mono sortie. Nous allons désormais ajouter une restriction supplémentaire en supposant que les systèmes étudiés sont linéaires. Par définition, un système linéaire est un système qui conserve, à sa sortie, toute combinaison linéaire des signaux d'entrée.

Ainsi, si un signal d'entrée  $e(t)$  qui est une combinaison linéaire de  $n$  signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_n e_n(t)$$

est injecté dans un tel système linéaire, le signal de sortie sera égal à :

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_n s_n(t)$$

chaque  $s_i(t)$  étant la sortie correspondant à  $e_i(t)$ . La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit  $e(t)$  le signal d'entrée et  $s(t)$  le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) \\ = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b e(t) \end{aligned}$$

## 9.1.4

Les systèmes linéaires conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration,...) et le plus grand des deux indices  $n$  et  $m$  est appelé **ordre du système**. Lorsque le système est effectivement sollicité par un signal  $e(t)$ , cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

## Méthodes d'études des systèmes linéaires

Bien que nous nous limiterons ici à étudier des systèmes d'ordres peu élevés, principalement d'ordre 1 ou d'ordre 2, il est malgré tout nécessaire de disposer d'outils adaptés permettant d'effectuer rapidement les études systématiques que nous aurons besoin de faire. Parmi celles-ci, l'étude temporelle d'un système, autrement dit le comportement de sa sortie en fonction du temps lorsqu'un signal d'entrée lui est appliqué, revêt une importance capitale. Même si les équations différentielles à coefficients constants figurent parmi les plus simples à appréhender, la transformation de Laplace offre des techniques et des méthodes d'étude permettant de gagner énormément de temps.

# 9.2 La transformation de Laplace

## 9.2.1

### Définition

Soit  $s(t)$  une fonction réelle d'une variable réelle telle que  $s(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on définit sa **transformée de Laplace**  $L(s)$  comme la fonction  $S$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

La fonction  $S(p)$  est une fonction complexe d'une variable complexe  $p$  (avec  $p = \tau + j\omega$ ).

La transformée de Laplace d'une fonction  $s(t)$  n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle  $\tau$  de la variable  $p$  est supérieure à une valeur donnée  $\alpha$  appelée **seuil de convergence**.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour  $t < 0$ ) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction  $s(t)$  s'appelle l'**original** de  $S(p)$ , ou encore sa transformée inverse.

## 9.2.2

 La connaissance de ces quelques propriétés d'une part et d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles, d'autre part, permet de calculer pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

### Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes :

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

En particulier :

$$L[f + g] = L[f] + L[g]$$

et :

$$L[kf] = kL[f]$$

### Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit  $f(t)$  une fonction du temps. Soit  $F(p)$  sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de  $F(p)$  :

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée  $n$ -ième est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \longrightarrow p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left( p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1}}{dt^{k-n-1}}(0) \right)$$

Par exemple :  $\frac{d^2 f}{dt^2} \longrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales c'est-à-dire les valeurs en  $t = 0$  des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow pF(p) \quad \frac{d^n f}{dt^n} \longrightarrow p^n F(p)$$

### Transformée de Laplace d'une primitive

Soit  $P(t)$  une primitive d'une fonction  $f(t)$  et  $F(p)$  la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t)dt \longrightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Dans le cas où la condition initiale  $P(0)$  est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t)dt \longrightarrow \frac{F(p)}{p}$$

### Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \longrightarrow \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \quad f\left(\frac{t}{k}\right) \longrightarrow kF(p)$$

### Théorème du retard

Considérons la fonction  $f(t - \tau)$ , autrement dit la fonction  $f(t)$  à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 9.3), correspondant à un retard d'un temps  $\tau$ .

On veillera à ne pas confondre les propriétés de changement d'échelle avec la linéarité de la transformation de Laplace.



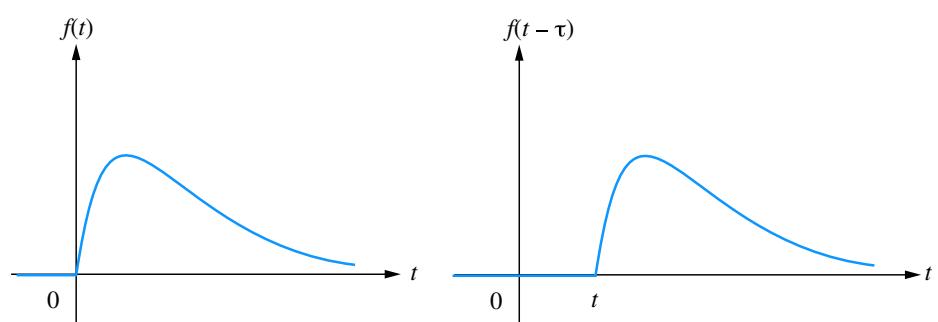


Figure 9.3

La transformée de Laplace de la fonction retardée d'un temps  $\tau$  se déduit de la transformée de Laplace de la fonction non retardée grâce à la relation :

$$f(t - \tau) \longrightarrow F(p)e^{-p\tau}$$

### Théorème de la valeur initiale

Le théorème de la valeur initiale permet d'obtenir une expression de la valeur de  $f$  au voisinage de 0 par valeur supérieure en fonction de sa transformée de Laplace.

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)]$$

### Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent, le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand  $t$  tend vers l'infini d'une fonction temporelle  $f(t)$  en connaissant uniquement sa transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]$$

### Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$e^{-at} f(t) \longrightarrow F(p + a)$$

$$tf(t) \longrightarrow -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \longrightarrow \int_0^{+\infty} F(p) dp$$

## 9.2.3

### Transformation de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction  $F(p)$  de retrouver son *original*, autrement dit la fonction  $f(t)$  dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

Si :

$$f(t) \longrightarrow F(p)$$



Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction  $F(p)$ .

## 9.2.4 Transformées de Laplace de quelques signaux usuels

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante  $c$  supérieure au seuil de convergence  $\alpha$  de  $F(p)$ .

### Transformées de Laplace de quelques signaux usuels

Ce paragraphe présente les transformées de Laplace des fonctions les plus fréquemment utilisées dans l'étude temporelle des systèmes linéaires.

#### Échelon unité

##### Définition

L'**échelon unité** (figure 9.4) est la fonction  $u(t)$  telle que  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t \geq 0$ .

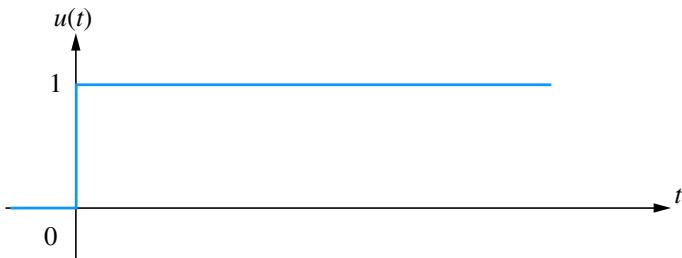


Figure 9.4

On a alors :

$$u(t) \longrightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude  $A$ , aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \longrightarrow F(p) = \frac{A}{p}$$

#### Rampe ou échelon de vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction  $u(t)$  précédente. On la note en général  $v(t)$ . Elle est nulle pour  $t$  négatif et est égale à  $t$  pour  $t$  positif ou nul (figure 9.5).

On peut écrire :

$$v(t) = t \cdot u(t)$$

On a évidemment :

$$V(p) = \frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute rampe de type  $s(t) = kt$  (pour  $t$  positif) aura pour transformée de Laplace :

$$s(t) = kt \longrightarrow S(p) = \frac{k}{p^2}$$

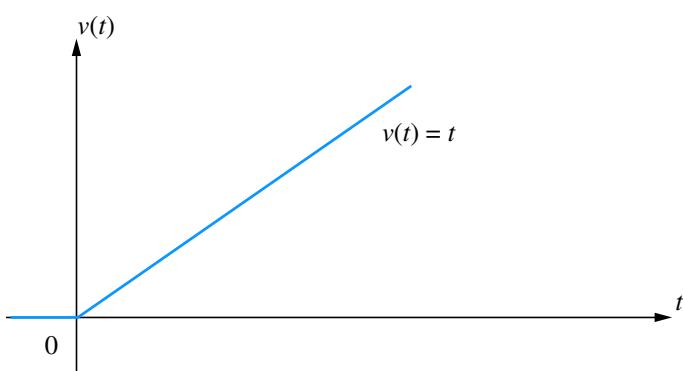


Figure 9.5

### Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction  $u(t)$ , on obtient une fonction habituellement notée  $\delta(t)$  et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout  $t$  sauf pour  $t = 0$  où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction  $\delta(t)$  et l'axe des  $t$  vaut 1. Le schéma de la figure 9.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre  $\theta$  vers 0.

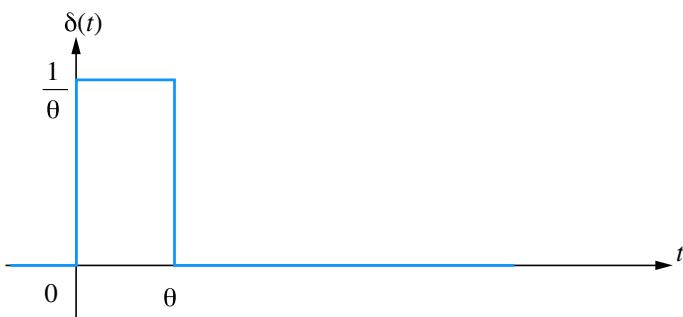


Figure 9.6

On a alors :

$$\delta(t) \longrightarrow \Delta(p) = 1$$

### Signal sinusoïdal

On considère un signal  $s(t)$  nul pour  $t < 0$  et valant  $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$  pour  $t \geq 0$ .

On a alors :

$$S(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

pour  $s(t) = \sin \omega t$  :

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

et pour  $s(t) = \cos \omega t$  :

$$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

### Signaux quelconques

On peut certes calculer directement la transformée de Laplace d'un signal quelconque à partir de sa définition mais cela peut s'avérer parfois long et délicat. On préfère sou-

vent se référer à une table de transformées de Laplace comme celle fournie en annexe. Les tables ne contiennent peut-être pas directement la fonction qui nous intéresse, mais les propriétés fondamentales et la linéarité de la transformation permettent la plupart du temps de se ramener à des compositions simples.

Ceci est notamment très utile lorsque l'on cherche l'original d'une fonction  $F(p)$  et que celle-ci se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Il faudra alors penser à la décomposer en éléments simples qui seront facilement identifiables dans la table.

## 9.3 Fonction de transfert d'un système linéaire

### 9.3.1 Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée  $e(t)$  et une sortie  $s(t)$ .

On suppose qu'il est régit par une équation différentielle de degré  $n$  :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales (voir paragraphe 9.2.2), il vient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

soit :  $[a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0] S(p) = [b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0] E(p)$

d'où : 
$$\frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe  $p$  est appelée **fondation de transfert** du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en  $p$ , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m(p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n(p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)}$$

Les racines  $z_i$  qui annulent le numérateur sont appelées les **zéros** de la fonction de transfert. Les racines  $p_i$  qui annulent son dénominateur sont les **pôles** de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels.

### 9.3.2 Original d'une fonction de transfert

Bien qu'une fonction de transfert  $G(p)$  ne soit pas, à proprement parler, la transformée de Laplace d'un signal, on peut calculer sa transformée inverse  $g(t)$  que l'on appelle l'original de la fonction de transfert. Le principal intérêt de ce concept réside dans le fait que si on injecte une impulsion de Dirac dans un système de fonction de transfert  $G(p)$ , le signal de sortie  $s(t)$  sera égal à  $g(t)$ .

### 9.3.3

En effet, si  $E(p) = 1$ , on a :  $S(p) = G(p)$

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

## Utilisation du formalisme Laplacien

Ce paragraphe a pour objectif d'illustrer comment la transformation de Laplace constitue une aide précieuse à la résolution des problèmes liés aux systèmes linéaires continus. On considère un système dont le signal d'entrée est noté  $e(t)$  et dont le signal de sortie est noté  $s(t)$ .

### Principe

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre  $S(p)$  et  $E(p)$  c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de  $e(t)$ , puis d'effectuer le calcul de  $S(p)$  puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de  $S(p)$ , autrement dit  $s(t)$ .

### Remarque

Un rapide coup d'œil sur la table de transformées de Laplace fournie en annexe nous montre que la plupart des transformées des signaux usuels se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle simple de polynômes de la variable  $p$ . La fonction de transfert se présentant toujours sous la forme d'une fraction rationnelle, il est clair qu'il en sera de même pour la transformée de Laplace du signal de sortie, qui ne sera rien d'autre que le produit de deux fractions rationnelles. En décomposant la fraction rationnelle  $S(p)$  en éléments simples que l'on retrouvera facilement dans la table et en utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on calculera aisément l'expression de la sortie  $s(t)$ .

### Exemple 1

Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t)$  correspondant à un échelon. Soit  $e(t) = u(t)$ . On cherche à déterminer l'expression du signal de sortie  $s(t)$ .

Le calcul de la fonction de transfert ne pose aucun problème ; on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle :

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p)[p^2 + 4p + 3] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

Nous savons par ailleurs que  $E(p) = \frac{1}{p}$  (échelon unitaire).

On en déduit donc :

$$S(p) = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}E(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)}$$



Avec un peu d'habitude, l'écriture de la fonction de transfert deviendra immédiate et ne nécessitera plus l'application stricte de la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle. En effet, les coefficients de l'équation différentielle se retrouvent dans le même ordre dans les deux polynômes de la fraction rationnelle  $G(p)$ .

En remarquant que  $S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)} = \frac{2}{p(p+3)(p+1)}$ , on peut envisager la décomposition de  $S(p)$  en éléments simples :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1}$$

$$S(p) = \frac{A(p+3)(p+1) + Bp(p+1) + Cp(p+3)}{p(p+3)(p+1)}$$

$$S(p) = \frac{(A+B+C)p^2 + (4A+B+3C)p + 3A}{p(p+3)(p+1)}$$

Identifions :  $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 4A + B + 3C = 0 \\ 3A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -1 \end{cases}$

D'où :  $S(p) = \frac{2}{3p} + \frac{1}{3(p+3)} - \frac{1}{p+1} = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$

Compte tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, on aura évidemment :  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ , chaque  $s_i(t)$  étant l'original de  $S_i(p)$ .

La table de transformées de Laplace nous donne, sans calcul :

$$\frac{2}{3p} \rightarrow \frac{2}{3}u(t)$$

$$\frac{1}{3(p+3)} \rightarrow \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$-\frac{1}{p+1} \rightarrow -e^{-t}u(t)$$

Au final :  $s(t) = \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t} \right] \cdot u(t)$

### Exemple 2

Considérons le circuit RC présenté sur la figure 9.7. Le signal d'entrée injecté est  $e(t) = 3t$  et la sortie correspond à  $s(t)$  dont on cherche l'expression.

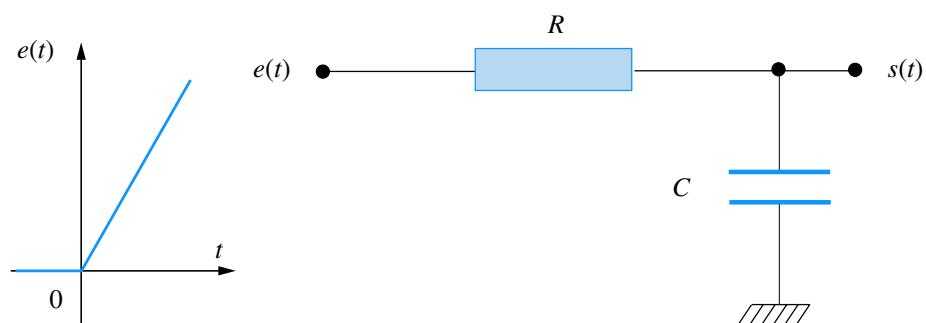


Figure 9.7

Considérons le courant  $i(t)$  qui circule à la fois dans  $R$  et dans le condensateur  $C$ .

Les équations électriques du système sont :

$$\begin{cases} e(t) - s(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

Nous sommes donc en présence d'un système du premier ordre dont la fonction de transfert s'obtient immédiatement :

$$G(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

Par ailleurs,

$$e(t) = 3t \implies E(p) = \frac{3}{p^2}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{3}{p^2(RCp + 1)}$$

D'après la table de transformées de Laplace, on a :

$$S(p) = \frac{1}{p^2(1 + \tau p)} \longrightarrow s(t) = \tau \left( e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1 \right) u(t)$$

D'où on tire immédiatement :

$$S(p) = \frac{3}{p^2(1 + RCp)} \longrightarrow s(t) = 3RC \left( e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right) u(t)$$

### 9.3.4

## Association de plusieurs systèmes

La plupart du temps, un système complexe est formé de l'association de plusieurs systèmes plus simples. On représente alors la structure d'un tel système sous la forme d'un schéma fonctionnel, appelé encore *schéma-bloc*. Dans une telle représentation, le signal de sortie d'un système peut servir de signal d'entrée à un autre système. Il est également possible d'envisager l'addition ou la soustraction de différents signaux. La manipulation des schémas-blocs permet parfois de simplifier la fonction de transfert de l'ensemble.

### Mise en cascade de deux systèmes

Sur le schéma de la figure 9.8, nous avons placé deux systèmes en cascade, respectivement de fonction de transfert  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ .



**Figure 9.8**

Il convient donc d'être particulièrement vigilant avant d'utiliser cette propriété, notamment pour les systèmes électriques qui, en règle générale, sont affectés par la présence d'une charge à leur sortie. Dans certains cas, la fonction de transfert  $G_1(p)$  se trouve ainsi modifiée par la présence de  $G_2(p)$ .

À la condition expresse que la mise en cascade ne perturbe pas le fonctionnement du système situé en amont, la fonction de transfert globale du système composé des deux éléments a pour expression :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

### Sommation de signaux

Le schéma de la figure 9.9 représente un **sommateur** à l'entrée duquel sont injectés deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . Le signal de sortie  $s(t)$  est égal à la somme des deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  :

$$s(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

Soit :

$$S(p) = E_1(p) + E_2(p)$$

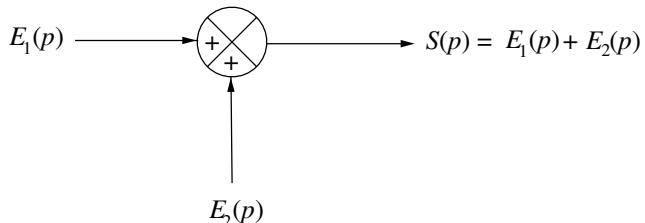


Figure 9.9

### Soustraction de signaux

Le schéma de la figure 9.10 représente un **soustracteur**, encore appelé **comparateur** à l'entrée duquel sont injectés deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . Le signal de sortie  $s(t)$  est égal à la différence des deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  :

$$s(t) = e_1(t) - e_2(t)$$

Soit :

$$S(p) = E_1(p) - E_2(p)$$

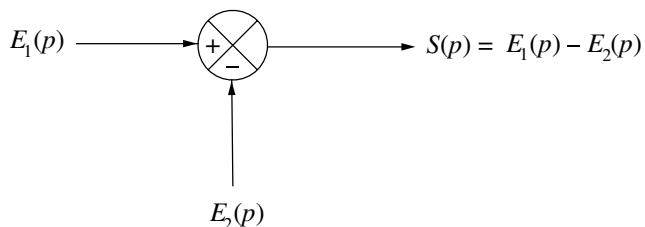


Figure 9.10

### Simplification parallèle

Dans le schéma de la figure 9.11, le même signal  $E(p)$  est injecté dans deux systèmes de fonctions de transfert respectives  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ . Les signaux de sortie de ces deux systèmes sont alors sommés pour former le signal  $S(p)$ .

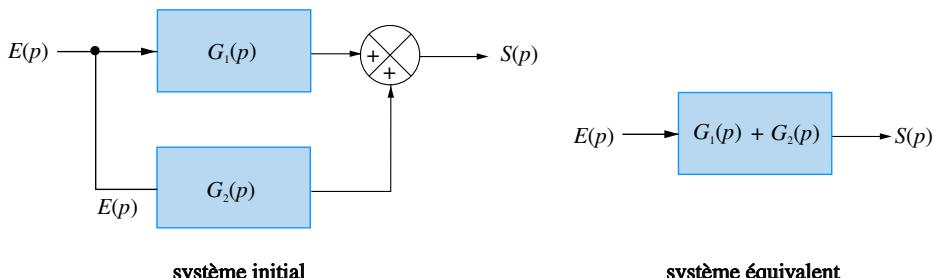


Figure 9.11

Il existe des sommateurs permettant d'effectuer la somme de  $n$  signaux.

Le sommateur peut être remplacé par un soustracteur auquel cas le système initial est équivalent à un système de fonction de transfert  $G_1(p) - G_2(p)$ .

On a, de toute évidence :

$$S(p) = G_1(p)E(p) + G_2(p)E(p) = [G_1(p) + G_2(p)]E(p)$$

Le système initial formé des deux éléments est donc équivalent à un système de fonction de transfert  $G_1(p) + G_2(p)$  (voir figure 9.11).

### Système bouclé

Le schéma de la figure 9.12 représente un *système bouclé* composé de deux blocs  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ . La sortie  $S(p)$  de l'élément  $G_1(p)$  est réinjectée vers l'entrée du système au travers de l'élément  $G_2(p)$  puis soustraite du signal  $E(p)$ .

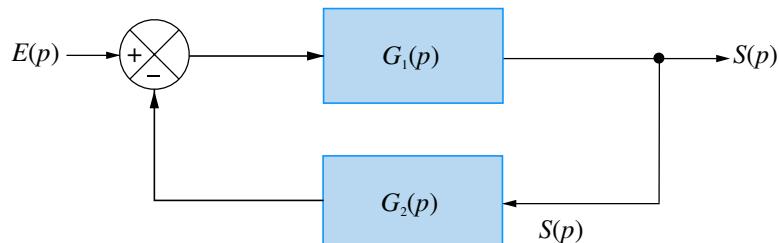


Figure 9.12

La figure 9.13 propose deux schémas-blocs équivalents au système de la figure 9.12.

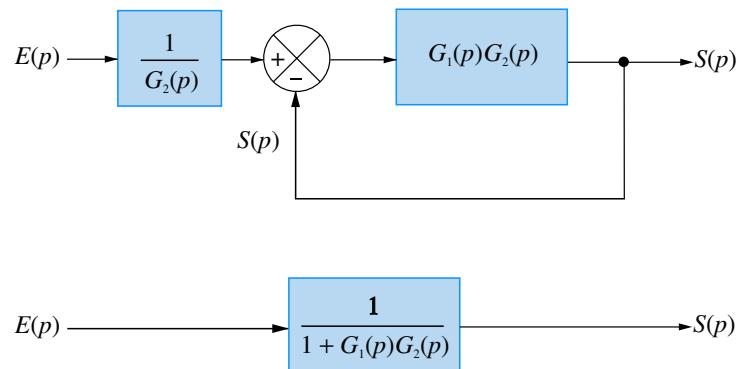


Figure 9.13

### Transformations autour d'un sommateur ou d'un soustracteur

Le schéma de la figure 9.14 représente une partie seulement d'un schéma fonctionnel dans lequel est placé un sommateur. Il est possible de déplacer le bloc  $G_1(p)$  à droite du sommateur sans changer la fonction de transfert de l'ensemble à condition d'insérer un bloc de fonction de transfert  $1/G_1(p)$  dans la branche inférieure.

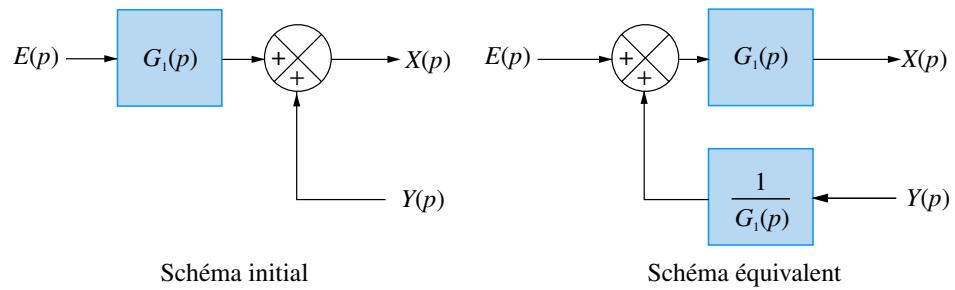


Figure 9.14



Cette transformation reste possible si le sommateur est remplacé par un soustracteur.

Dans le schéma de la figure 9.15, deux signaux  $X(p)$  et  $Y(p)$  sont sommés avant d'être injectés dans le bloc de fonction de transfert  $G_1(p)$ . Il est possible de déplacer le sommateur à droite de  $G_1(p)$  à condition d'introduire un bloc  $G_1(p)$  dans la branche inférieure.

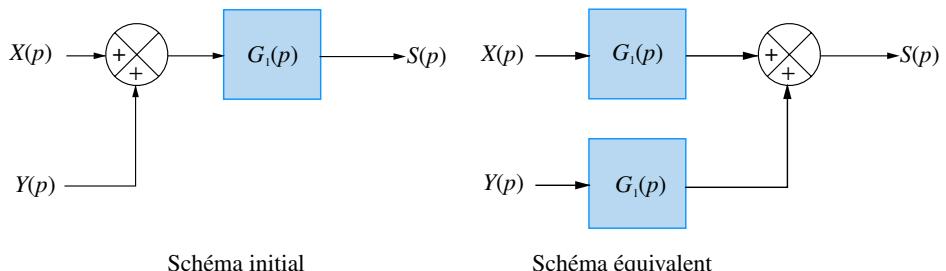


Figure 9.15

### 9.3.5 Classe d'un système

Certains systèmes peuvent posséder un pôle nul. Il peut s'agir d'un pôle simple auquel cas leur fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}$$

Il peut aussi s'agir d'un pôle multiple :

$$G(p) = \frac{A(p)}{p^\alpha B(p)}$$

Le paramètre  $\alpha$  s'appelle la *classe du système*. En l'absence de pôle nul, on dit que le système est de classe 0.

Lorsqu'un pôle nul est présent dans une fonction de transfert, on dit aussi que le système possède un intégrateur. Cette terminologie est justifiée par le fait que l'on peut écrire :

$$G(p) = \frac{1}{p} \frac{A(p)}{B(p)}$$

On peut aussi parler de double intégrateur dans le cas d'un système de classe 2, de triple intégrateur si  $\alpha = 3$  et ainsi de suite.

## 9.4 Étude temporelle des systèmes d'ordre 1

### 9.4.1 Fonction de transfert

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est du type :

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = K e(t)$$

Les deux constantes  $T$  et  $K$  sont des nombres réels en général positifs.  $T$  est appelée **constante de temps** du système.  $K$  est appelée le **gain statique**. Ces deux appellations trouveront leur justification un peu plus loin.

Ces systèmes sont encore parfois appelés systèmes à une seule constante de temps. La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

Soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

## 9.4.2 Réponse impulsionnelle

### Définition

Déterminer la **réponse impulsionnelle** d'un système, c'est étudier la sortie de ce système lorsque l'on a une entrée  $e(t) = \delta(t)$ .

On a donc :  $E(p) = 1$

D'où :

$$S(p) = G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

La transformée de Laplace correspond très exactement à la fonction de transfert du système ce qui est la particularité essentielle de la réponse impulsionnelle. On calcule facilement  $s(t)$  à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La constante de temps du système,  $T$  (qui porte bien son nom) peut être mise en évidence très facilement sur le graphique (figure 9.16). Comme dans toute fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point d'abscisse  $T$ .

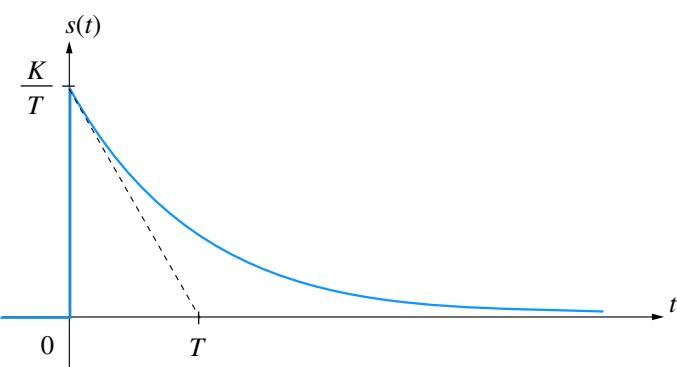


Figure 9.16

On peut noter qu'il existe une discontinuité (théorique) en  $t = 0$ . Dans la réalité physique, cette discontinuité n'existe pas plus que l'impulsion de Dirac parfaite...

### 9.4.3

## Réponse indicelle

### Définition

Déterminer la **réponse indicelle** d'un système, c'est étudier la sortie de ce système lorsque son entrée est un échelon unitaire :  $e(t) = u(t)$ .

On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p(1 + Tp)}$$

On calcule facilement  $s(t)$  à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

La constante de temps du système peut une fois de plus être facilement mise en évidence sur le graphique (figure 9.17). On remarquera ici aussi la position de la tangente à l'origine ainsi que l'asymptote en  $K$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Ce paramètre  $K$  est appelé gain statique car il correspond au rapport de la valeur de sortie sur la valeur d'entrée (égale à 1) lorsque  $t$  tend vers l'infini, c'est-à-dire quand le système est censé ne plus évoluer.

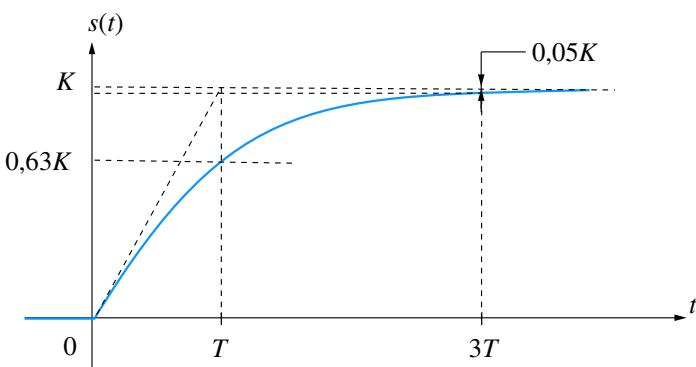


Figure 9.17

On peut définir, à partir de ce graphe, le **temps de réponse**  $t_r$  du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de  $3T$  :

On a :  $s(t_r) = K \left( 1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95 K$

D'où :  $\left( 1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95$

Soit :  $e^{-\frac{t_r}{T}} = 0,05$

Et finalement :  $t_r = -T \ln 0,05 \approx 3T$

Par ailleurs :  $s(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0,63 K$

Ce dernier résultat permet d'identifier rapidement la constante de temps sur le graphe ; nous aurons l'occasion de revenir sur cette propriété ultérieurement.

## 9.4.4

**Réponse à une rampe unitaire**

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire  $e(t) = v(t) = t$ . On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

D'où :  $S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{K}{p^2(1 + Tp)}$

On remarque que cette expression est la transformée de Laplace d'une primitive de la sortie précédemment calculée.

En effet :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{K}{p(1 + Tp)} \right]$$

Il suffit donc d'intégrer l'expression trouvée pour la réponse indicelle :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) dt = \int K dt - \int K e^{-\frac{t}{T}} dt \\ s(t) &= Kt + KTe^{-\frac{t}{T}} + C^{\text{te}} \end{aligned}$$

La constante est facilement calculable, puisque l'ordonnée à l'origine des temps est forcément nulle. On a alors :

$$s(0) = KT + C^{\text{te}} = 0 \implies C^{\text{te}} = -KT$$

Finalement :

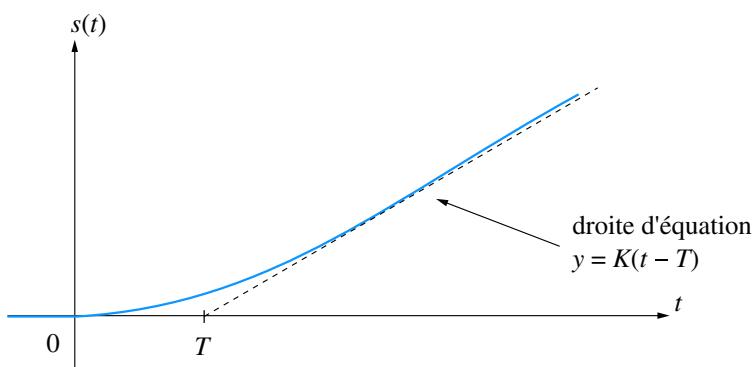
$$s(t) = K(t - T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$$

La forme de cette expression permet de mettre en évidence une asymptote oblique à la courbe de  $s(t)$ . En effet, le terme  $s(t) = KTe^{-\frac{t}{T}}$  tendant vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a :  $s(t) \approx K(t - T)$ .

Comme le terme  $KTe^{-\frac{t}{T}}$  est toujours strictement positif, la courbe se trouve en permanence au dessus de son asymptote. Par ailleurs la tangente en 0 à la courbe est donnée par le calcul de la dérivée en  $t = 0$  :

$$\frac{ds}{dt} = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \implies \frac{ds}{dt}(0) = 0$$

Il est donc facile, à partir de ces éléments, de tracer le graphe de  $s(t)$  (figure 9.18).



**Figure 9.18**

Quelle que soit l'entrée injectée dans le système (impulsion, échelon, rampe), on remarque nettement l'existence, pour le signal de sortie, d'une direction asymptotique (dépendant bien sûr de la forme du signal d'entrée). Mathématiquement, cette asymptote n'est jamais atteinte mais dans la pratique, le système finit toujours par se stabiliser au voisinage de cette asymptote. On considère alors qu'un régime permanent est atteint. C'est d'ailleurs un peu le sens de la notion de temps de réponse que nous avons mise en évidence à propos de la réponse indicelle. On appelle régime transitoire l'intervalle de temps séparant l'origine des temps de l'instant auquel s'établit le régime permanent.

## 9.5 Étude temporelle des systèmes d'ordre 2

### 9.5.1 Fonction de transfert

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leurs fonctions de transfert possèdent donc au maximum deux zéros et deux pôles. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

 L'équation a été placée sous cette forme pour faire apparaître ces trois paramètres dont l'importance est capitale dans la caractérisation des systèmes.

Les trois constantes  $\omega_n$ ,  $\xi$  (prononcer *ksi*) et  $K$  sont des nombres réels en général positifs.  $\omega_n$  est appelée **pulsation propre** du système ;  $\xi$  est appelée coefficient ou **facteur d'amortissement**.  $K$  est le **gain statique** du système. Ces appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\frac{p^2}{\omega_n^2} S(p) + \frac{2\xi p}{\omega_n} S(p) + S(p) = KE(p)$$

Soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

### 9.5.2 Réponse indicelle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ . On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{G(p)}{p} = \frac{K}{p \left( \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \right)}$$

Avant de calculer l'expression du signal de sortie, remarquons immédiatement que le théorème de la valeur finale nous donne la valeur du régime permanent de cette sortie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pK}{p \left( \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \right)} = K$$

Nous aurons donc, dans tous les cas, une asymptote horizontale en  $K$  qui correspond bien au rapport entre les valeurs de sortie et d'entrée en régime permanent, d'où le terme de gain statique.

Pour calculer l'expression de  $s(t)$ , il convient de se référer à la table de transformées de Laplace après avoir étudié la factorisation du dénominateur. Calculons, pour ce faire, le discriminant du trinôme apparaissant au dénominateur.

$$\text{On a : } \Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} (\xi^2 - 1)$$

Étudions le signe de ce discriminant pour factoriser le dénominateur de  $S(p)$  puis déterminer l'expression de  $s(t)$  :

$$\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{1}{\omega_n^2} (p - p_1)(p - p_2)$$

on notera que  $p_1 p_2 = \omega_n^2$  et que  $p_1 + p_2 = -2\xi\omega_n$ . Ces deux expressions seront utiles dans les calculs qui viennent. Trois cas sont à considérer.

### Premier cas : discriminant positif

On a :

$$\Delta > 0 \iff \xi > 1$$

Le trinôme  $\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1$  possède alors deux racines réelles qui sont :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

Les deux expressions entre crochets étant positives, ces deux racines sont négatives.

$$\text{On a alors : } S(p) = \frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

D'où :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right]$$

L'étude sommaire de cette fonction montre la présence d'une asymptote en  $K$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et une tangente nulle à l'origine. Les deux termes en exponentielles décroissent d'autant plus lentement que  $\xi$  est grand ; dans ce cas, le signal  $s(t)$  tend moins rapidement vers son asymptote.

Le graphe de la figure 9.19 présente l'évolution de  $s(t)$  pour diverses valeurs de  $\xi$ .

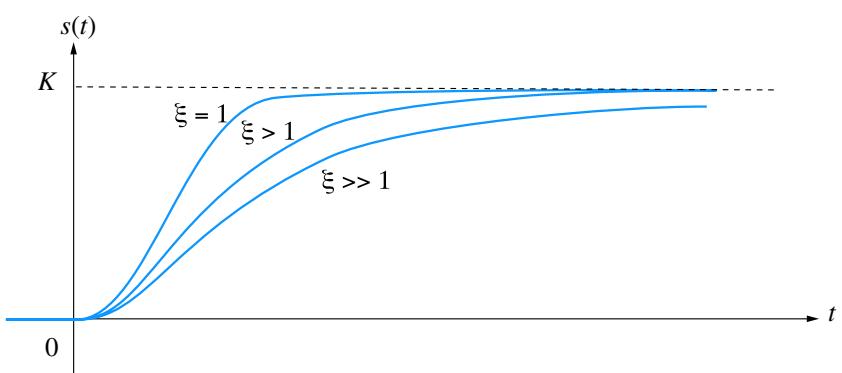


Figure 9.19

 Le coefficient d'amortissement est en général positif.

 Cette expression n'est valable que pour  $t > 0$ . Pour  $t < 0$ , le signal de sortie est bien évidemment nul.

 La réponse la plus rapide est observée pour un facteur d'amortissement très proche de 1.

## Deuxième cas : discriminant nul

On a :

$$\Delta = 0 \iff \xi = 1$$

Le trinôme  $\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2p}{\omega_n} + 1$  possède alors une racine réelle double :

$$p_0 = -\omega_n$$

On a alors :

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2}$$

L'original de cette transformée de Laplace se calcule aisément à partir de la table :

$$s(t) = Ku(t) - K(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

Comme cela était prévisible d'après l'étude menée précédemment, nous obtenons une réponse qui tend très rapidement vers l'asymptote (voir figure 9.19).

## Troisième cas : discriminant négatif

On a :

$$\Delta < 0 \iff 0 < \xi < 1$$

Le trinôme possède alors deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right]$$

Sachant que :

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

On calcule la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  qui est :

$$S(p) = Ku(t) - Ke^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

Ou encore :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[ \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right]$$

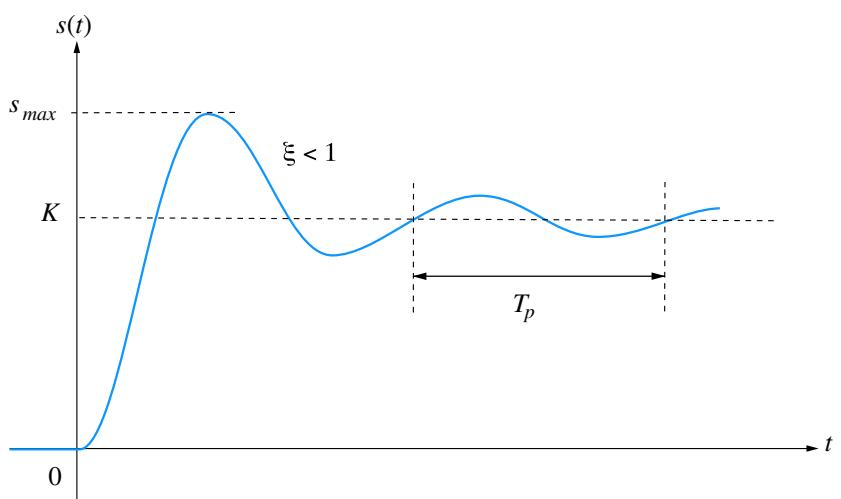


Figure 9.20



Les oscillations sont d'autant plus importantes (en hauteur et en durée) que le facteur d'amortissement est faible. S'il est nul, le signal de sortie est une sinusoïde oscillant entre 0 et  $2K$ .



Il convient d'être prudent avec cette notion de temps de montée car plusieurs définitions coexistent en la matière.

On constate que la réponse du système est constituée de la différence de deux signaux : le signal  $Ku(t)$ , échelon de hauteur  $K$  et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante, qui tend donc vers 0 en oscillant.

Le graphe de  $s(t)$  possède donc une asymptote vers la constante  $K$  lorsque  $t$  tend vers l'infini et le signal tend vers cette asymptote en présentant un **régime** dit **oscillatoire amorti** (voir figure 9.20).

Dans le cas du régime oscillatoire amorti ( $\xi < 1$ ), on a coutume de dire que le signal de sortie présente un dépassement de son régime permanent. On chiffre en général ce dépassement en valeur relative par rapport à la valeur finale et on l'exprime en pourcentage :

$$d\% = \frac{S_{\max} - K}{K} \times 100$$

Cette valeur du dépassement est d'autant plus importante que  $\xi$  est proche de 0 (si  $\xi = 0$ , on est dans le cas d'oscillations sinusoïdales et le dépassement est égal à 100 %).

On montre en effet que

$$d\% = 100 \times e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

L'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre fourni en annexe illustre ce lien existant entre le dépassement et le coefficient d'amortissement.

Notons enfin que la présence de ce dépassement fait que le signal de sortie rencontre une première fois son asymptote à un instant noté  $t_m$  (figure 9.20) et qu'on appelle le **temps de montée** du système.

### Résumé

De la valeur de  $\xi$  qui porte finalement bien son nom de facteur d'amortissement, dépend le type de réponse du système :

- **régime amorti** :  $\xi > 1$ .

Dans le cas du régime amorti, la sortie du système tend d'autant plus lentement vers sa valeur finale  $K$  que  $\xi$  est grand.

- **régime critique** :  $\xi = 1$  ;

Le régime critique est caractérisé par la réponse la plus rapide possible : le signal  $s(t)$  tend très vite vers sa valeur finale et ce, sans oscillations.

- **régime oscillatoire amorti** :  $\xi < 1$ .

Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Elle est appelée **pseudo-pulsation** du régime oscillatoire amortie. Elle est toujours inférieure à la pulsation  $\omega_n$ .

On définit également la **pseudo-période** de ces oscillations par :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Cette pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie (voir figure 9.12). Elle est d'autant plus grande que  $\xi$  est proche de 1.

## 9.6 Identification d'un système



Il existe de nombreuses méthodes d'identification plus ou moins complexes. Nous nous limiterons ici aux plus simples.

### 9.6.1

Pour résoudre les problèmes liés à la commande des systèmes linéaires, il est nécessaire de disposer d'une fonction de transfert de ce dernier. Cependant, la modélisation précise d'un système n'est pas toujours chose aisée, notamment lorsque les équations de fonctionnement sont difficiles à mettre en évidence. Les techniques d'identification consistent à rechercher un modèle du système par une voie expérimentale en analysant la réponse du système à une entrée connue. Elles ne permettent pas d'obtenir le modèle parfait correspondant au système mais de disposer d'une fonction de transfert dont le comportement est voisin du comportement réel du système. Souvent, cette approximation est suffisamment exploitable pour résoudre la plupart des problèmes posés.

#### Principe et exemple

L'une des méthodes les plus basiques pour identifier la fonction de transfert d'un système consiste à étudier expérimentalement sa réponse indicielle, autrement dit sa réponse à un échelon unitaire. La forme du signal de sortie renseigne déjà sur le type de fonction de transfert auquel on a affaire.

Considérons par exemple un système de fonction de transfert inconnue dont la réponse indicielle est fournie sur la figure 9.21.

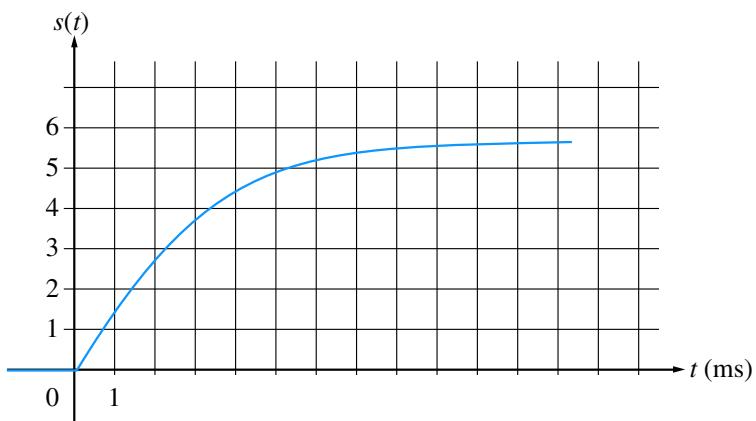


Figure 9.21

Elle s'apparente ou tout du moins, elle ressemble à la réponse d'un système du premier ordre. Cette simple observation permet de poser *a priori* la forme d'une fonction de transfert qui pourrait posséder une telle réponse indicielle :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

Identifier le système revient dans ce cas très simple à déterminer les valeurs du gain statique  $K$  et de la constante de temps  $T$ .

Mettons à profit les résultats de l'étude que nous avons faite au paragraphe 9.4.3. Le gain statique  $K$  correspond à l'asymptote horizontale du régime permanent tandis que la constante de temps est l'instant auquel le signal de sortie est égal à 63 % de cette valeur finale.

Sur le graphe de la figure 9.22, on identifie d'abord la valeur de  $K$  en évaluant la position de l'asymptote, soit environ 5,8.

On retiendra  $K = 5,8$ .

Dès lors, on cherche l'instant auquel le signal de sortie atteint 63 % de cette valeur.

On aura :  $s(T) = 0,63K = 0,63 \times 5,8 \approx 3,6$

Sur le même graphe, on relève alors l'instant  $T \approx 3$  ms.

En conclusion, on adoptera le modèle du premier ordre suivant :

$$G(p) = \frac{5,8}{1 + 3 \times 10^{-3} p}$$

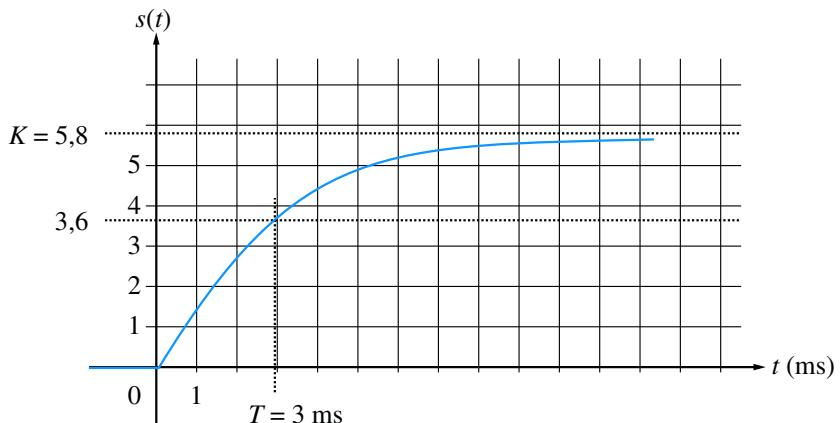


Figure 9.22

## 9.6.2

### Identification à un système d'ordre 2 de classe 0

Bien évidemment, le cas d'identification à un système du premier ordre, tel que nous venons de l'étudier, est un cas simplissime. Le plus souvent, on relève des réponses indicielles beaucoup plus complexes que celle présentée sur la figure 9.21. Nous supposerons, dans ce paragraphe, que nous sommes en présence d'une réponse indicielle présentant un dépassement de la valeur finale (régime oscillatoire amorti) et nous formulerons l'hypothèse que nous pouvons l'identifier à la réponse d'un système d'ordre 2. Bien sûr, dans la réalité, l'ordre du système sera sans aucun doute beaucoup plus élevé mais la forme de sa réponse nous poussera à cette assimilation. On dit aussi parfois que l'**ordre dominant** du système est égal à deux.

Considérons la réponse indicielle représentée sur la figure 9.23. Même si le système possède un ordre élevé, sa réponse indicielle ressemble à celle d'un système d'ordre 2.

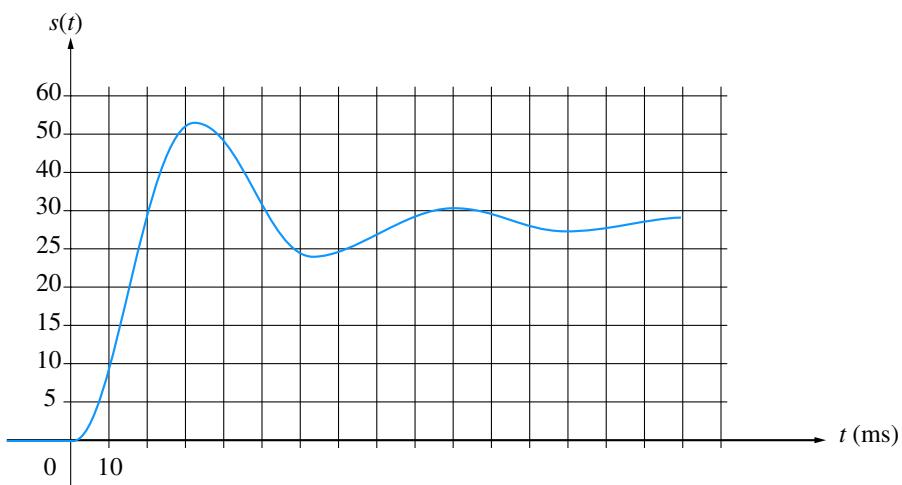


Figure 9.23

On peut donc poser, *a priori* :

Soit :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Ici, trois paramètres sont à identifier : le gain statique  $K$ , la pulsation propre  $\omega_n$  et le coefficient d'amortissement  $\xi$ .

Comme dans le cas d'un système d'ordre 1, l'identification du gain statique est la plus facile. Il s'agit d'évaluer la position de l'asymptote autour de laquelle se produisent les oscillations amorties du signal de sortie et sur laquelle se stabilise le régime permanent.

Sur le schéma de la figure 9.24, on relève  $K \approx 28$ .

Comme nous l'avons vu au paragraphe 9.5.2, le coefficient d'amortissement  $\xi$  est directement lié à la valeur du dépassement.

On a ici :  $d = \frac{42 - 28}{28} \times 100 = 50\%$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre (voir annexe), cela correspond à un coefficient d'amortissement  $\xi \approx 0,2$ .

Pour déterminer la valeur de la pulsation propre  $\omega_n$ , plusieurs techniques peuvent être utilisées. Nous préconisons celle qui exploite la valeur du temps de montée, tel que défini au paragraphe 9.5.2 et qui est facilement mesurable sur la figure 9.24.

On note, en effet :  $t_m \approx 20$  ms.

Si on se réfère encore à l'abaque déjà utilisé, on notera que l'axe des abscisses est gradué en fonction des valeurs de  $\omega_n t$ . Pour un coefficient d'amortissement  $\xi = 0,2$ , la courbe représentative du signal de sortie coupe l'asymptote au point d'abscisse 1,8.

Soit :  $\omega_n t_m = 1,8$ .

On en déduit alors la valeur de  $\omega_n$  :  $\omega_n = \frac{1,8}{t_m} = \frac{1,8}{20 \times 10^{-3}} = 90$  rad/s

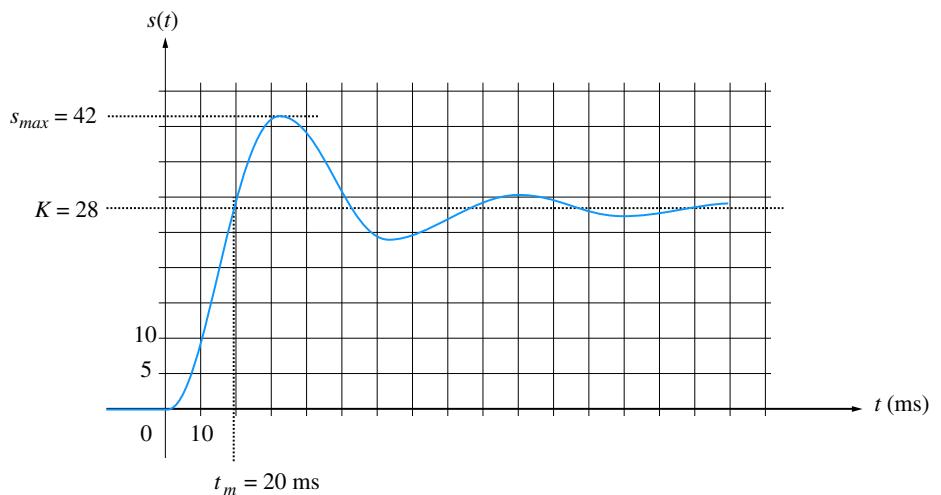


Figure 9.24

En conclusion, on a :  $G(p) = \frac{28}{\frac{p^2}{90^2} + \frac{0,4p}{90} + 1}$

## Synthèse

### Savoirs

#### Je connais :

- La transformation de Laplace et ses propriétés ;
- La fonction de transfert d'un système linéaire continu ;

- La modélisation fonctionnelle d'un système ;
- Les réponses des systèmes d'ordres 1 et 2 à des signaux d'entrée simples.

### Savoir-faire

#### Je sais :

- Déterminer la fonction de transfert d'un système ;
- Manipuler des schémas blocs et les simplifier ;
- Déterminer le signal de sortie d'un système d'ordre 1 ou 2 en réponse à une entrée simple ;
- Utiliser les tables de transformées de Laplace.

## Exercices d'application

**9.1** On considère le système dont le schéma fonctionnel est donné sur la figure 9.25. En appliquant des transformations successives, déterminer la fonction de transfert  $G(p) = S(p)/E(p)$  du système.

**9.2** Déterminer l'expression de la transformée de Laplace de la fonction  $s(t)$  définie par :

$$\begin{aligned}s(t) &= 0 \text{ pour } t < 0, \\ s(t) &= \sin \omega t \text{ pour } t \geq 0\end{aligned}$$

en utilisant directement la définition de la transformation de Laplace.

**9.3** On considère une impulsion  $s(t)$  de largeur  $T$  et de hauteur  $A$  (figure 9.26).

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et pour } t > T$$

$$s(t) = A \text{ pour } 0 < t < T$$

Calculer l'expression  $S(p)$  de la transformée de Laplace de ce signal.

**9.4** Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression  $F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$ .

**9.5** On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  à l'entrée duquel on injecte une rampe unitaire :  $e(t) = v(t) = t$  pour  $t > 0$ .

On donne :  $G(p) = \frac{K}{p^2 + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$  avec  $\xi = 1$

Calculer l'expression du signal de sortie  $s(t)$  et tracer son graphe.

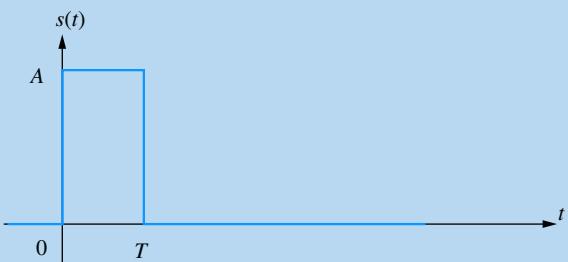


Figure 9.26

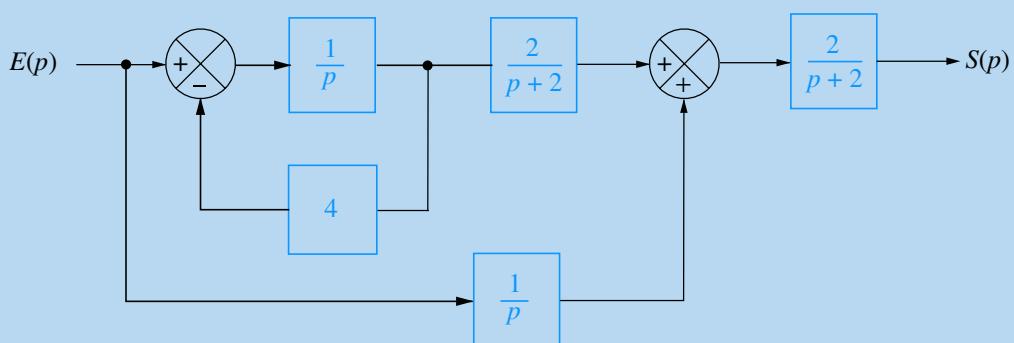


Figure 9.25

## Exercices d'approfondissement

**9.6** On se propose de démontrer le théorème du retard, une des propriétés fondamentales de la transformation de Laplace. En partant de la définition de  $F(p)$ , transformée de Laplace de  $f(t)$ , on effectuera le changement de variable  $u = t + \tau$ .

**9.7** On considère le montage électrique représenté sur la figure 9.27. On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t)$  correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V. Déterminer l'équation différentielle qui lie  $e(t)$  à la tension de sortie  $s(t)$ .  
En déduire la fonction de transfert du système.

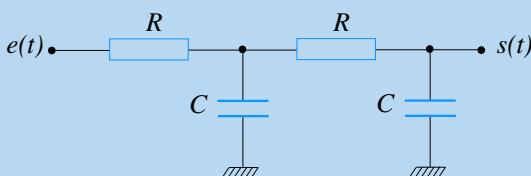


Figure 9.27

**9.8** On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \quad \text{avec } \xi >> 1$$

On définit le temps de réponse  $t_r$  comme l'instant à partir duquel la réponse indicielle du système atteint sa valeur finale à 5 % près. Calculer l'expression de  $t_r$ .

On se servira de l'hypothèse  $\xi >> 1$  pour simplifier l'expression du signal de sortie du système.

**9.9** On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  à l'entrée duquel on injecte un échelon unitaire. Soit  $s(t)$  le signal de sortie et  $s_\infty$  sa valeur finale.

On donne :  $G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$

Calculer en fonction de  $\xi$ , en pourcentage de la valeur finale  $s_\infty$  et dans le cas où  $\xi < 1$ , la valeur du dépassement  $d$  défini comme le rapport :

$$d = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$$

**9.10** Dans le schéma de la figure 9.28, on a modélisé les perturbations susceptibles d'agir sur la chaîne directe d'une boucle de régulation par le signal  $X(p)$ . Calculer l'expression de  $S(p)$  en fonction de  $E(p)$ ,  $X(p)$  et des différentes fonctions de transfert des éléments du système.

Calculer la fonction de transfert  $H_1(p)$  définie par :

$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ lorsque } X(p) = 0$$

Calculer la fonction de transfert  $H_2(p)$  définie par :

$$H_2(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ lorsque } X(p) = 0$$

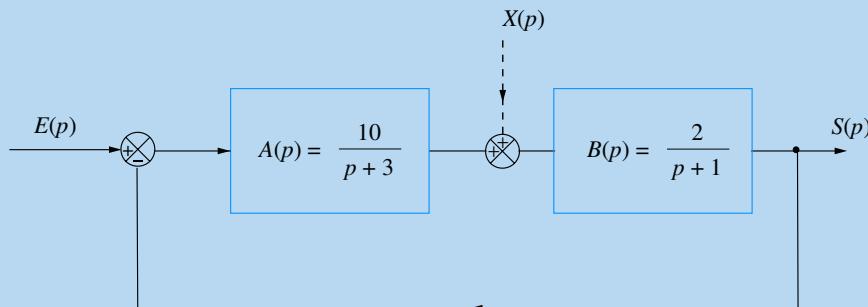


Figure 9.28

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 9.1

Il s'agit ici de s'exercer à la manipulation des schémas blocs. On remarquera, pour commencer, la présence d'une boucle à l'entrée du système.

D'après les transformations proposées au paragraphe 9.3.4, il est possible, dans un premier temps, de réduire la boucle constituée des blocs de fonctions de transfert  $\frac{1}{p}$  et 4 en un seul bloc de fonction de transfert  $G(p)$  :

$$\text{Avec : } G(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \left(\frac{1}{p} \times 4\right)} = \frac{1}{p+4}$$

On obtient alors le schéma de la figure 9.29.

Les deux blocs placés en cascade,  $\frac{1}{p+4}$  et  $\frac{2}{p+2}$ , peuvent être remplacés par un seul bloc dont la fonction de transfert est égale à leur produit, soit  $\frac{2}{(p+4)(p+2)}$  qui se trouve alors en parallèle avec  $\frac{1}{p}$  (figure 9.30). On peut donc remplacer les deux branches par une seule dont la fonction de transfert est égale à la somme des deux (figure 9.31), soit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{(p+4)(p+2)} + \frac{1}{p} &= \frac{2p + (p+4)(p+2)}{p(p+4)(p+2)} \\ &= \frac{p^2 + 8p + 6}{p(p+4)(p+2)} \end{aligned}$$

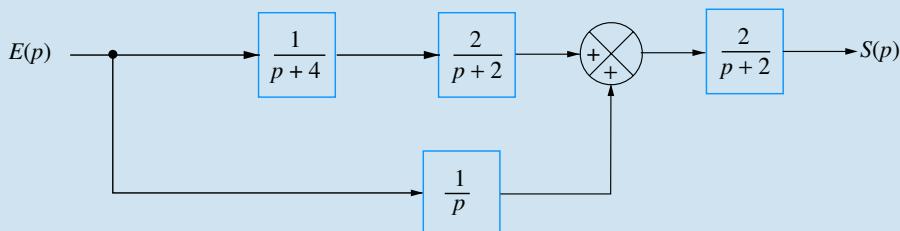


Figure 9.29

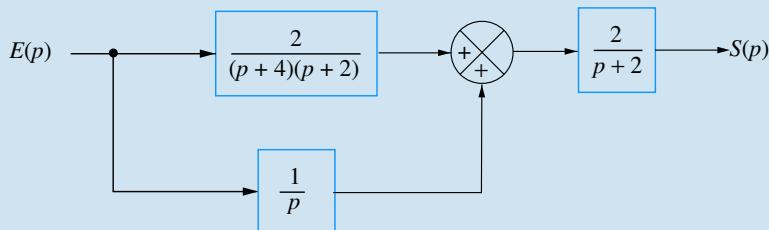


Figure 9.30

$$E(p) \rightarrow \frac{p^2 + 8p + 6}{p(p+4)(p+2)} \rightarrow \frac{2}{p+2} \rightarrow S(p)$$

Figure 9.31

La fonction de transfert du système est donc égale au produit des deux fonctions restantes :

$$G(p) = \frac{2(p^2 + 8p + 6)}{p(p+4)(p+2)^2}$$

### 9.2

Il s'agit ici de calculer une transformée de Laplace directement à partir de sa définition. La décomposition de la fonction  $\sin \omega t$  permet d'accéder rapidement au résultat.

La fonction sinus se décompose en une combinaison d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

En invoquant la définition de la transformée de Laplace, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
S(p) &= \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-pt} dt \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{j\omega t} e^{-pt} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-pt} dt \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(p-j\omega)t}}{-(p-j\omega)} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(p+j\omega)t}}{-(p+j\omega)} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

Si la partie réelle de  $p$  est positive (ce qui corrobore l'existence d'un seuil de convergence), on a :

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{1}{2j} \left[ 0 - \frac{1}{-(p-j\omega)} \right] - \frac{1}{2j} \left[ 0 - \frac{1}{-(p+j\omega)} \right] \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{(p-j\omega)} - \frac{1}{(p+j\omega)} \right] \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{(p+j\omega) - (p-j\omega)}{(p-j\omega)(p+j\omega)} \right] \\
S(p) &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{2j\omega}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

### 9.3

Il convient ici d'exprimer le signal  $s(t)$  sous la forme d'une somme et d'exploiter la propriété de linéarité de la transformation de Laplace. Le théorème du retard est ici une aide précieuse.

Il est relativement facile de remarquer (figure 9.32) que le signal proposé est la différence de deux signaux, soit  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$ ,

avec  $s_1(t)$  : échelon de hauteur  $A$  débutant à l'instant 0.

et  $s_2(t)$  : échelon de hauteur  $A$  débutant à l'instant  $T$ .

On a donc (linéarité de la transformée de Laplace) :  
 $S(p) = S_1(p) - S_2(p)$

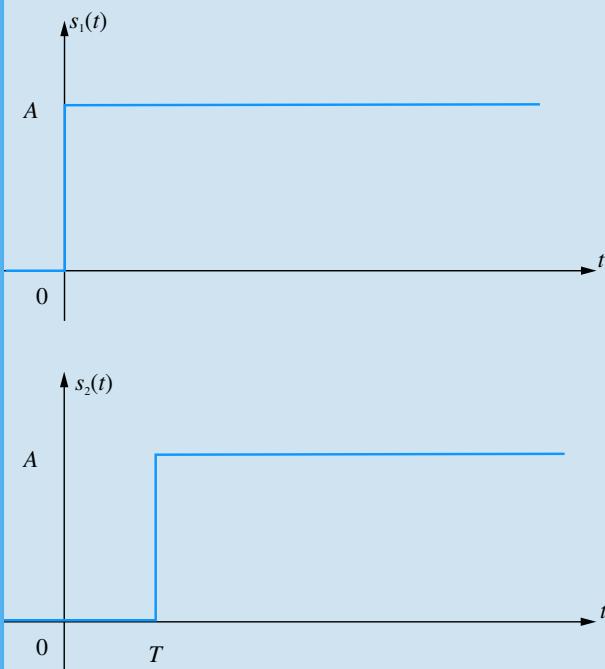


Figure 9.32

Avec :  $S_1(p) = \frac{A}{p}$

et :  $S_2(p) = \frac{A}{p} e^{-pT}$  (théorème du retard).

D'où :  $S(p) = \frac{A}{p} [1 - e^{-pT}]$

### 9.4

Pas de difficulté particulière pour cet exercice plutôt technique destiné à s'exercer sur la manipulation des fractions rationnelles et des tables de transformées de Laplace.

La première étape consiste à factoriser le dénominateur de l'expression de  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p} = \frac{3}{p(p+3)(p+2)}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2} \\
&= \frac{A(p^2 + 5p + 6) + B(p^2 + 2p) + C(p^2 + 3p)}{p(p+3)(p+2)}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{3}{p(p+3)(p+2)} \\
&= \frac{(A+B+C)p^2 + (5A+2B+3C)p + 6A}{p(p+3)(p+2)}
\end{aligned}$$

En identifiant, on tire immédiatement :

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + 2B + 3C = 0 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2(p+2)}$$

Il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = \left[ \frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-2t} \right] u(t)$$

### 9.5

L'étude de la réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique est un très bon prétexte à un entraînement à la manipulation des tables de transformées de Laplace.

La fonction de transfert du système a pour expression :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2p}{\omega_n} + 1}$$

Avec  $E(p) = \frac{1}{p^2}$ , on a :

$$S(p) = \frac{K}{p^2 \left( \frac{p}{\omega_n} + 1 \right)^2} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 (p + \omega_n)^2}$$

Cette transformée de Laplace n'apparaît pas dans la table fournie en annexe. En revanche, on y trouve :

$$X(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} = K \frac{\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2}$$

$$\implies x(t) = K - K(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

Comme  $S(p) = \frac{X(p)}{p}$ , on a :  $s(t) = \int x(t)dt$

$$\text{Soit : } s(t) = \int Kdt - \int Ke^{-\omega_n t} - \int K\omega_n te^{-\omega_n t} dt$$

En intégrant, on tire :

$$s(t) = Kt + \frac{K}{\omega_n}e^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n} [1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}] + C^{\text{te}}$$

$$\text{D'où : } s(t) = Kt(1 + e^{-\omega_n t}) + \frac{2K}{\omega_n}e^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n} + C^{\text{te}}$$

En considérant que  $s(0) = 0$ , on a :

$$s(0) = \frac{K}{\omega_n} + C^{\text{te}} = 0 \implies C^{\text{te}} = -\frac{K}{\omega_n}$$

$$\text{Au final, on a donc : } s(t) = Kt(1 + e^{-\omega_n t}) + \frac{2K}{\omega_n}e^{-\omega_n t} - \frac{2K}{\omega_n}$$

$$\text{Ou encore : } s(t) = \left[ Kt - \frac{2K}{\omega_n} \right] + \left[ Kt + \frac{2K}{\omega_n} \right] e^{-\omega_n t}$$

Cette expression fait apparaître que le graphe de  $s(t)$  possède une asymptote d'équation  $y(t) = Kt - \frac{2K}{\omega_n}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

La courbe reste toujours au dessus de son asymptote étant donné que  $s(t) - y(t)$  est toujours positif. Pour tracer la courbe avec plus de précision, il est possible d'invoquer sa dérivée, que l'on connaît déjà :

$$\frac{ds}{dt} = x(t) = K - Ke^{-\omega_n t} - K\omega_n te^{-\omega_n t}$$

On remarque notamment que :  $\frac{ds}{dt}(0) = 0$

Le graphe de  $s(t)$  est présenté sur la figure 9.33.

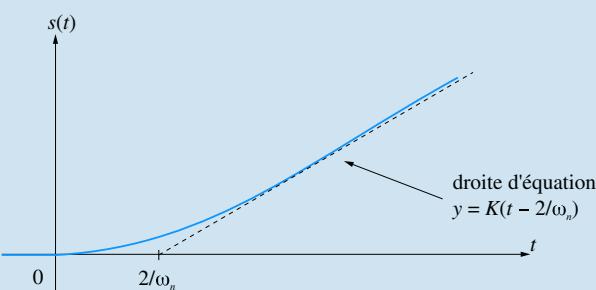


Figure 9.33

## Exercices d'approfondissement

### 9.6

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  a pour expression :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable  $u = t + \tau$  :

$$F(p) = \int_{\tau}^{+\infty} f(u - \tau)e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction  $f(u - \tau)$  est nulle pour  $t < \tau$ , on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que  $\tau$  :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u - \tau)e^{-p(u-\tau)} du$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p\tau} f(u - \tau)e^{-pu} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u - \tau)e^{-pu} du$$

Par définition,  $\int_0^{+\infty} f(u - \tau)e^{-pu} du$  est la transformée de Laplace de  $f(t - \tau)$ .

D'où :  $f(t - \tau) \longrightarrow F(p)e^{-p\tau}$

### 9.7

Cet exercice illustre parfaitement la mise en garde du cours en ce qui concerne les cascades de systèmes. Il ne suffit pas, ici, de multiplier les deux fonctions de transfert.

Soit A le point commun aux deux résistances et  $v_A(t)$  la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 9.34) et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C \frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant  $i_1(t)$  circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C \frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

L'expression de la tension  $v_A(t)$  se déduit de cette équation. En remplaçant dans la première équation, on tire :

$$v_A = RC \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC \frac{ds}{dt} - s(t) = R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2RC \frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie  $s(t)$  à  $e(t)$  :

$$R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2 C^2 p^2 + 3RCp + 1}$$

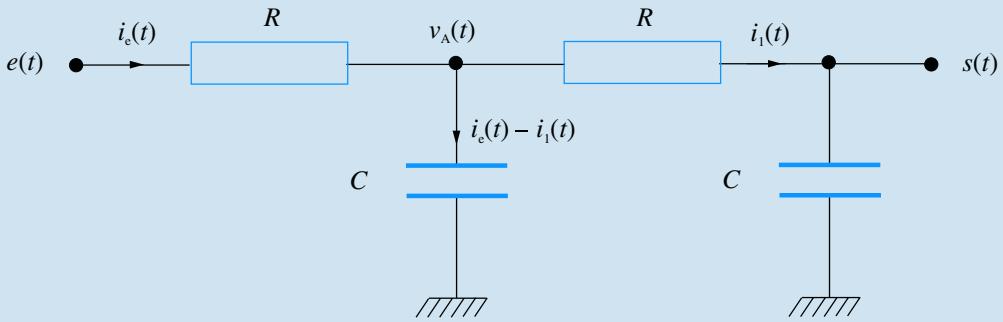


Figure 9.34

## 9.8

La réponse indicielle du système du second ordre, pour  $\xi > 1$ , a pour expression :

$$s(t) = K - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right]$$

Si on considère que  $\xi \gg 1$ , on peut faire une approximation à l'ordre 1 de l'expression  $\sqrt{\xi^2 - 1}$  :

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \xi \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}} = \xi \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \approx \xi \left(1 - \frac{1}{2\xi^2}\right)$$

$$\text{D'où : } s(t) \approx K - \frac{K}{2\xi} \left[ 2\xi e^{-\frac{\omega_n t}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi \omega_n t} \right]$$

Compte tenu de la définition du temps de réponse, on a :

$$0,95K = K - \frac{K}{2\xi} \left[ 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi \omega_n t_r} \right]$$

$$\text{Soit : } 0,1\xi = 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi \omega_n t_r}$$

$$\text{Par ailleurs : } \xi \gg 1 \implies 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} \gg \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi \omega_n t_r}$$

$$\text{D'où : } 0,1\xi = 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}}$$

Par conséquent :

$$\frac{\omega_n t_r}{2\xi} = -\ln 0,05 \implies t_r = -\frac{2\xi}{\omega_n} \ln 0,05 = \frac{6\xi}{\omega_n}$$

## 9.9

Il s'agit ici de rechercher le premier maximum de la fonction  $s(t)$ .

La réponse indicielle du système du second ordre, pour  $\xi < 1$ , a pour expression :

$$s(t) = Ku(t) - Ke^{-\xi \omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

Calculons la dérivée de cette fonction temporelle :

$$\frac{ds}{dt} = K\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

$$-Ke^{-\xi \omega_n t} \left[ -\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \xi \omega_n \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

Soit :

$$\frac{ds}{dt} = K \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \left( \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \sqrt{1 - \xi^2} \right) \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t$$

$$\text{Ou encore : } \frac{ds}{dt} = \frac{K \omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t$$

Cette dérivée s'annule pour :  $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t = k\pi$

$$\text{Donc pour les valeurs : } t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le maximum que l'on cherche à identifier correspond à la valeur :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\text{Par conséquent : } s_{\max} = s(t_1) = s \left( \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$\text{Soit : } s_{\max} = K - K e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \left[ \cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \pi \right]$$

$$\text{D'où : } s_{\max} = K + K e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

De toute évidence :  $s_{\infty} = K$

On en déduit donc :

$$d\% = \frac{s_{\max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} \times 100 = 100 \times e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

## 9.10

Un exercice très facile qui permet de mettre en évidence la manière de modéliser les perturbations agissant sur un système.

Exprimons simplement le signal de sortie :

$$S(p) = B(p)[X(p) + A(p)\varepsilon(p)]$$

$$\text{Soit : } S(p) = B(p)X(p) + A(p)B(p)[E(p) - S(p)]$$

$$S(p)[1 + A(p)B(p)] = B(p)X(p) + A(p)B(p)E(p)$$

$$\text{D'où : } S(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)} X(p) + \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p)$$

$$\text{Par conséquent : } H_1(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

$$\text{Et : } H_2(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$



## Plan

<b>10.1</b>	Étude harmonique des systèmes d'ordre 1	265
<b>10.2</b>	Étude harmonique des systèmes d'ordre 2	270
<b>10.3</b>	Approche méthodique du tracé des diagrammes de Bode	275
<b>10.4</b>	Diagramme de Nyquist	282
	Exercices d'application	286
	Exercices d'approfondissement	286
	Solutions des exercices	287

## Introduction

L'analyse temporelle des systèmes continus renseigne sur leur nature et nous fournit déjà un certain nombre d'éléments permettant de prédire leur comportement. Toutefois, elle ne suffit pas à interpréter un certain nombre de leurs propriétés. L'étude harmonique des systèmes, autrement dit l'analyse de leur comportement fréquentiel est un outil complémentaire qui donne accès à des techniques qui deviendront indispensables, notamment dans l'étude de l'automatique en général et des asservissements en particulier.

## Prérequis

- Il est nécessaire, pour aborder ce chapitre, de maîtriser les notions présentées au chapitre 9. Par ailleurs, le formalisme utilisé ici fait appel aux nombres et aux fonctions complexes.

## Objectifs

- Savoir déterminer et représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système linéaire simple.

## 10.1 Étude harmonique des systèmes d'ordre 1

### 10.1.1

#### Principes généraux de l'étude harmonique

##### Définition

L'**étude harmonique** d'un système linéaire consiste à analyser son comportement, en régime permanent, lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$ .

Soit :

$$e(t) = A \cos \omega t$$



Le lecteur pourra se référer à son cours de mathématiques pour en savoir plus sur cette propriété fondamentale des systèmes linéaires.

Une étude mathématique approfondie du comportement des systèmes linéaires, autrement dit des systèmes régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, montre que la réponse d'un tel système à une entrée sinusoïdale de pulsation  $\omega$  est un signal sinusoïdal de même pulsation. Son amplitude  $B$  et l'éventuel déphasage qu'il présente par rapport au signal d'entrée sont significatifs du comportement du système et varient en fonction de la pulsation.

Si on pose  $s(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$ , faire l'étude harmonique du système revient à étudier les variations de  $B$  et de  $\varphi$  en fonction de  $\omega$ . Cette étude apporte des informations précieuses sur le comportement du système et fournit des outils qui nous seront utiles, un peu plus tard, lorsque nous aborderons les asservissements.

## 10.1.2

### Représentation complexe du fonctionnement d'un système

Considérons un système d'ordre 1 régi par l'équation différentielle suivante :

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = K e(t)$$

Sa fonction de transfert s'écrit :  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$

On associe au signal d'entrée  $e(t)$  une **représentation complexe** notée  $E(j\omega)$  définie par  $E(j\omega) = Ae^{j\omega t}$  et dont  $e(t)$  est en fait la partie réelle. En effet :

$$E(j\omega) = Ae^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

De même, on peut associer au signal de sortie une représentation complexe  $S(j\omega)$  qui, si l'on se réfère à la même définition, s'écrit :

$$S(j\omega) = Be^{j(\omega t+\varphi)} = B[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

Cette représentation complexe permet de mettre en évidence un certain nombre de résultats intéressants. En effet, si on l'utilise directement dans l'équation différentielle, on obtient :

$$TBj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + Be^{j(\omega t+\varphi)} = KAe^{j\omega t}$$

Soit :

$$Be^{j\omega t}e^{j\varphi}[jT\omega + 1] = KAe^{j\omega t}$$

ou encore :

$$Be^{j\omega t}[jT\omega + 1] = KA$$

Puis :

$$\frac{B}{A}e^{j\varphi} = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

On met ainsi en évidence une fonction complexe d'une variable réelle, soit  $\frac{K}{1 + jT\omega}$  qui est très intéressante et ce, à plus d'un titre. Tout d'abord, l'égalité complexe précédente se traduit par l'égalité des modules et des arguments des deux membres.

On tire donc :

$$\frac{B}{A} = \left| \frac{K}{1 + jT\omega} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \quad \text{d'une part, et :}$$

$$\varphi = \arg \left( \frac{1}{1 + jT\omega} \right) = -\arctan T\omega$$

On met ainsi en évidence l'expression du rapport de l'amplitude de la sinusoïde de sortie sur celle de la sinusoïde d'entrée, rapport que l'on peut qualifier de **gain** du système

et qui dépend, de toute évidence, de la pulsation du signal, ainsi que le **déphasage** que présente la sinusoïde de sortie par rapport à celle d'entrée et qui, comme le montre l'expression précédente, dépend aussi de la pulsation.

Ces deux fonctions traduisent bien le **comportement harmonique** du système puisqu'elles nous renseignent totalement sur la nature du signal de sortie (amplitude et déphasage) lorsqu'il est sollicité par un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

Par ailleurs, on remarque que la fonction  $\frac{K}{1+jT\omega}$  n'est autre que l'expression de la fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$  dans laquelle on pose  $p = j\omega$ . Elle est appelée **fonction de transfert de fréquence** ou **transmittance complexe** du système.

On peut ainsi écrire :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp} \implies G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega}$$

D'où l'on déduit immédiatement le gain et le déphasage que nous noterons respectivement  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arg \left( \frac{K}{1+jT\omega} \right) = -\arctan T\omega$$

En résumé, le comportement harmonique d'un système pourra être étudié en suivant la méthode suivante :

1. On pose  $p = j\omega$  dans la fonction de transfert  $G(p)$  pour obtenir la transmittance complexe du système, soit  $G(j\omega)$ .
2. On calcule le module et l'argument de  $G(j\omega)$  donnant les deux fonctions  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  qui traduisent le comportement fréquentiel du système.

### 10.1.3

## Diagramme de Bode

Afin de posséder une représentation graphique du comportement harmonique du système, il est naturel d'envisager le tracé des fonctions de  $\omega$  qui en sont représentatives, c'est-à-dire de  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ . Il existe plusieurs méthodes de représentation graphique de ces fonctions que l'on utilise en fonction des résultats que l'on souhaite mettre en évidence. Nous abordons ici un mode de tracé très répandu permettant d'accéder rapidement aux informations les plus intéressantes : le diagramme de Bode.

Les diagrammes de Bode consistent à tracer deux graphes correspondant respectivement au gain réel et au déphasage. Pour la courbe de gain, on ne trace pas directement  $G(\omega)$  mais  $G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega)$  défini comme le **gain en décibels** et, de surcroît, avec une échelle logarithmique en abscisse (figure 10.1).

Outre les raisons historiques qui ont présidé à ce choix, il existe deux intérêts essentiels au choix du tracé logarithmique du gain, intérêts que nous mettrons en évidence dans les pages qui suivent.

L'axe des ordonnées est bien évidemment gradué en décibels. Un gain réel  $G(\omega)$  supérieur à 1 correspond à un gain en décibels positif tandis qu'un gain réel inférieur à 1 correspond à un gain en décibels négatif. On a bien sûr  $20 \log G(\omega) = 0 \text{ dB}$  pour  $G(\omega) = 1$ .

En règle générale, on porte directement les valeurs de  $\omega$  sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation  $\omega = 1$  à l'origine de cet axe

Comme la fonction de transfert en fréquence n'est autre que la fonction  $G(p)$  dans laquelle on a posé  $p = j\omega$ , il est d'usage de la noter  $G(j\omega)$ . On ne perdra pas de vue qu'il s'agit d'une fonction complexe d'une variable réelle  $\omega$ .

L'écriture  $G(j\omega)$  ainsi que celle désignant son module, c'est-à-dire  $G(\omega)$  sont mathématiquement discutables mais elles constituent l'usage. On veillera à ne pas les confondre,  $G(\omega)$  étant une fonction réelle et  $G(j\omega)$  étant une fonction complexe.

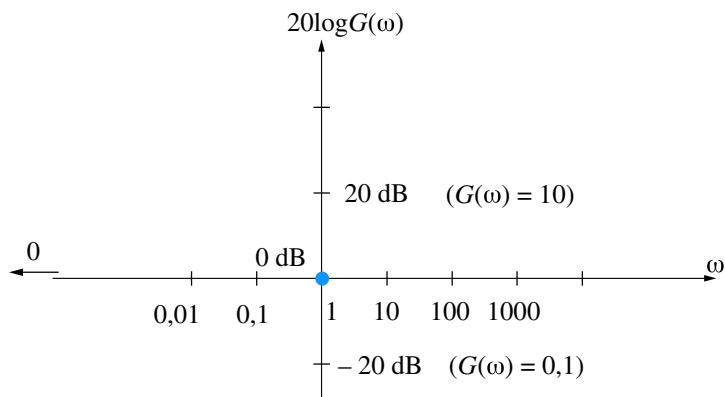


Figure 10.1

(puisque l'axe correspond à  $\log \omega = 0$ ). On notera également que la pulsation  $\omega = 0$  ne peut apparaître sur l'axe qu'en « moins l'infini ».

#### 10.1.4

### Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Considérons un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$ .

$K$  et  $T$  sont deux constantes positives.  $K$  est le gain statique du système,  $T$ , sa constante de temps.

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

D'où :

$$\begin{cases} G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

Contentons nous d'une étude sommaire de ces fonctions :

- Pour  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $G(\omega) \rightarrow K \implies 20 \log G(\omega) \rightarrow 20 \log K$   
Ceci correspond à une asymptote horizontale.
- Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :

$$G(\omega) \approx \frac{K}{T\omega} \implies 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega$$

Cet équivalent de la fonction  $G(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow +\infty$  correspond à une droite puisque l'échelle des abscisses est logarithmique. Cette droite coupe l'autre asymptote au point d'abscisse  $\omega = \frac{1}{T}$ , coupe l'axe des abscisses au point  $\omega = \frac{K}{T}$  et possède une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$ , ce qui signifie que le gain chute de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10. Dans un diagramme de Bode, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. Ce « 20 dB/décade » est donc en quelque sorte l'unité élémentaire de pente. Nous appellerons pente d'ordre  $n$ , une pente égale à  $20n \text{ dB/décade}$ .

Compte tenu de l'effet « lissant » du logarithme, la courbe réelle reste longtemps proche de ses asymptotes (qui par conséquent constituent une approximation suffisante du graphe). Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la vraie valeur du gain pour la

pulsation  $\omega = \frac{1}{T}$  :

$$G\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{\sqrt{1+1}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \implies 20 \log G\left(\frac{1}{T}\right) = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

Le point en question se trouve donc à 3 dB en dessous du gain statique (voir figure 10.2).

La pulsation  $\omega = \frac{1}{T}$  est appelée **pulsation de coupure**.

En ce qui concerne la courbe de déphasage, remarquons qu'il s'agit d'une fonction arctangente et que :

- Pour  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$
  - Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :  $\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- On a, par ailleurs :  $\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Il n'est bien sûr pas question ici d'assimiler les asymptotes (en trait plein) à la courbe (en trait pointillé).

On notera que la valeur asymptotique du déphasage vaut 0 sur l'intervalle de pulsations où la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre 0, tandis qu'elle vaut  $-\pi/2$  lorsque la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre  $-1$ . Il s'agit là d'une règle générale : la direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant l'ordre de la pente par  $\pi/2$ .

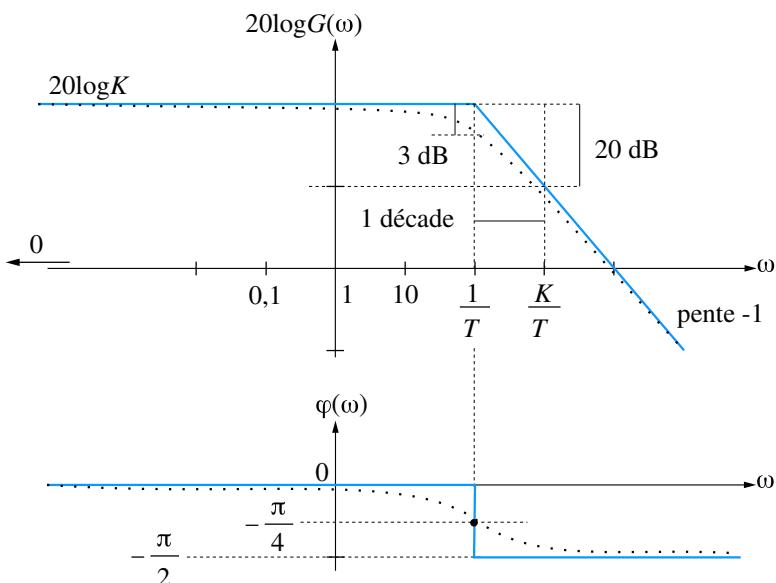


Figure 10.2

### Remarque

Les deux intérêts fondamentaux du choix du tracé logarithmique apparaissent clairement au travers de cet exemple : grâce à ce type de tracé, la courbe possède des droites asymptotes qui n'apparaîtraient pas dans un tracé cartésien classique. Par ailleurs, l'effet lissant de la fonction logarithme permet de considérer que la courbe réelle se trouve « longtemps » très proche de ses asymptotes. Par conséquent, nous pourrons très souvent nous contenter d'un tracé asymptotique du diagramme de Bode de Gain, la plupart du temps suffisant pour obtenir une idée du comportement fréquentiel du système étudié.

## 10.2 Étude harmonique des systèmes d'ordre 2

Nous cherchons à étudier le comportement fréquentiel du système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Une première étude nous montre que :

$G(p) \approx K$  lorsque  $p \rightarrow 0$  ; donc  $G(\omega) \approx K$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$

Soit :  $G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K$

De même, lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , on a :

$$G(p) \approx \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2 K}{p^2}$$

Soit, pour  $\omega \rightarrow +\infty$  :  $G_{\text{dB}} \approx 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$

Ces deux équivalents nous fournissent les deux asymptotes à la courbe, respectivement pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow +\infty$ . Ces deux droites sont aisément placées dans le diagramme de Bode de la figure 10.3. On notera qu'elles se coupent au point d'abscisse  $\omega = \omega_n$ .

En effet, le point de concours des deux asymptotes est tel que :

$$20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 20 \log K$$

Soit :  $40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 0$

D'où :  $\omega = \omega_n$

Bien que très intéressants, ces éléments sont toutefois insuffisants pour tracer avec précision le diagramme de gain complet. Il nous faut pour cela, réaliser une étude plus approfondie.

### Cas où $\xi$ est supérieur à 1

Si  $\xi > 1$ , le dénominateur de  $G(p)$  possède deux racines réelles négatives :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$\text{On a alors :} \quad S(p) = \frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous sommes alors en présence de deux pulsations de coupure, respectivement  $\omega_1 = -p_1$  et  $\omega_2 = -p_2$ .

$$\text{Soit :} \quad \omega_1 = \omega_n \left[ \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_n \left[ \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$\text{De plus :} \quad \omega_1 < \omega_n \quad \text{et} \quad \omega_2 > \omega_n$$

Ces deux pulsations de coupure sont d'autant plus éloignées l'une de l'autre et de  $\omega_n$  que  $\xi$  est grand.

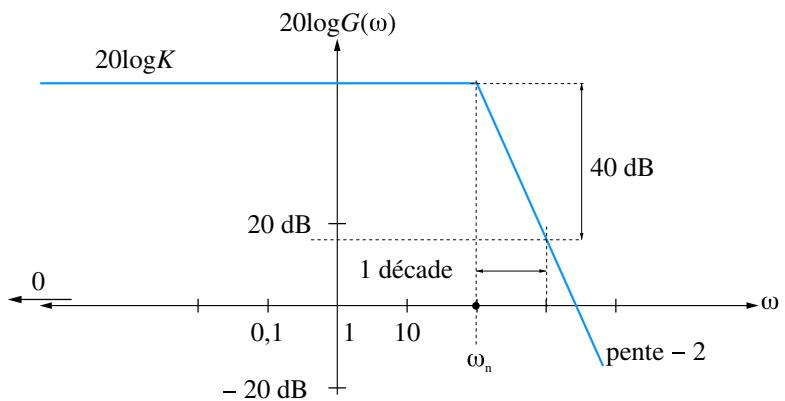


Figure 10.3

Nous en savons désormais assez pour tracer le diagramme de Bode complet, tout du moins pour ce cas  $\xi > 1$  (figure 10.4).

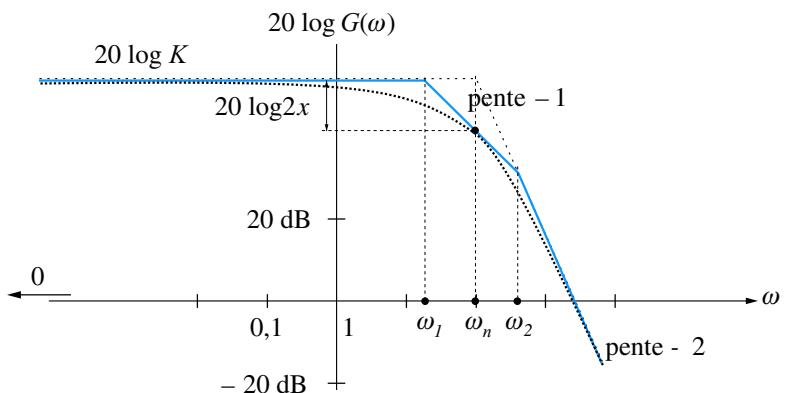


Figure 10.4

La courbe de gain réelle peut être esquissée à partir de ce diagramme asymptotique. On remarquera, notamment que :

$$G_{\text{dB}}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

En effet :

$$G(p) = \frac{K}{1 - \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n}}$$

D'où :  $G(j\omega_n) = \frac{K}{2\xi j} \implies 20 \log G(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$

Le diagramme de phase asymptotique se déduit immédiatement du diagramme de gain en déterminant chaque direction asymptotique de phase à partir de la pente du segment correspondant dans le diagramme de gain (figure 10.5).



L'expression  $20 \log G(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$  reste valable quelle que soit la valeur du coefficient d'amortissement.

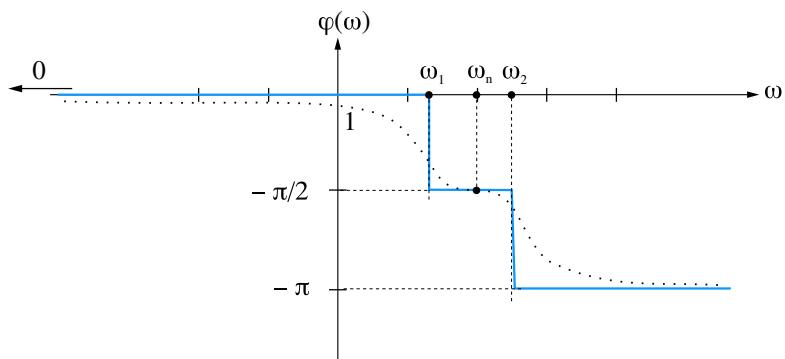


Figure 10.5

Pour esquisser le tracé réel de la courbe de déphasage, il semble intéressant de calculer la valeur exacte de  $\varphi(\omega_n)$ .

$$\text{On a : } G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]) (j\omega + \omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}])}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\text{D'où : } \varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } & \tan \left( \arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}}{1 - \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} \cdot \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}} \\ &= \frac{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}] + [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}] [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}] - 1} \\ &= \frac{2\xi}{\xi^2 - \xi^2 + 1 - 1} \end{aligned}$$

Cette expression tend manifestement vers l'infini.

On a donc :

$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

### Cas où $\xi$ est égal à 1

On a :

$$S(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

Nous sommes en présence d'une pulsation de coupure double en  $\omega = \omega_n$ . Le diagramme de Bode asymptotique de gain n'est donc constitué que des deux asymptotes déjà identifiées.

En ce qui concerne le diagramme de phase, il se déduit immédiatement du diagramme de gain.

On a par ailleurs :  $G_{\text{dB}}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2 = 20 \log K - 6 \text{ dB}$

Et toujours :  $\varphi(\omega_n) = -\pi/2$

Les figures 10.6 et 10.7 présentent les deux diagrammes obtenus. Les esquisses des diagrammes réels apparaissent en pointillé.

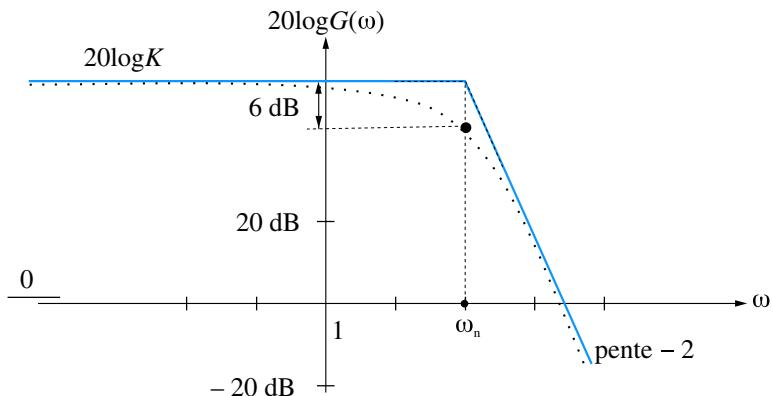


Figure 10.6

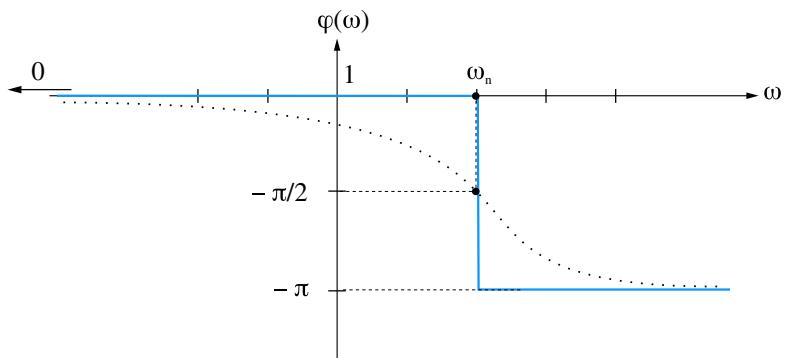


Figure 10.7

On a, notamment :  $\varphi(\omega) = \arg S(j\omega) = \arg \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$

Soit :  $\varphi(\omega) = -2 \arctan \frac{\omega}{\omega_n}$

### Cas où $\xi$ est inférieur à 1

La fonction de transfert possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

Soit :  $p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1-\xi^2)} \right]$  et  $p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1-\xi^2)} \right]$

On a toujours :  $G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$

Les seules informations dont nous disposons, pour le moment, sont les deux directions asymptotiques, respectivement pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow +\infty$  (figure 4.8). Nous savons également que :

$$G_{\text{dB}}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

Cette expression laisse supposer que le gain, à la pulsation  $\omega_n$ , peut être supérieur à  $20 \log K$ , puisque  $20 \log 2\xi$  peut être négatif. Nous pouvons alors facilement imaginer le phénomène qui est susceptible de se produire : lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , le gain peut croître de  $20 \log K$  à une valeur maximale, puis décroître en rejoignant son asymptote de pente d'ordre - 2.

Nous allons donc étudier ce phénomène, appelé **phénomène de résonance**, en déterminant la condition d'apparition de ce phénomène, la pulsation  $\omega_r$  pour laquelle le gain est maximal (rien ne prouve que le maximum de la courbe de gain se produise pour  $\omega = \omega_n$ ), ainsi que la valeur  $G_{\max}$  de ce gain maximum.

$$\text{Soit : } p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \text{ et } p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1-\xi^2)} \right]$$

$$\text{On a : } G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n \left[ \xi - j\sqrt{1-\xi^2} \right]) (j\omega + \omega_n \left[ \xi + j\sqrt{1-\xi^2} \right])}$$

$$\text{D'où : } G(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{\left[ \omega_n^2\xi^2 + (\omega - \omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2 \right] \left[ \omega_n^2\xi^2 + (\omega + \omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2 \right]}}$$

On montre alors que si  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $G(\omega)$  est maximal pour :  $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ .

En remplaçant  $\omega$  par  $\omega_n$  dans l'expression de  $G(\omega)$ , on montre que :

$$G_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

On définit alors le **coefficent ou facteur de résonance**  $Q$  (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{G_{\max}}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Plus la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  est proche de 0, plus la pulsation de résonance se rapproche de  $\omega_n$  et plus le gain maximal est élevé.

Pour :

$$\xi = 0$$

On a :

$$\omega_r = \omega_n \text{ et } G_{\max} \rightarrow +\infty$$

Le paramètre  $\omega_n$  porte donc bien son nom de pulsation propre du système puisqu'elle est la pulsation à laquelle peut se produire le phénomène de résonance le plus intense.

Si  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ , le phénomène de résonance n'existe pas ; la courbe de gain est strictement décroissante et reste constamment sous ses asymptotes. La figure 10.8 résume les différentes situations ainsi mises en évidence. Pour la courbe de phase, toujours dans le cas où  $\xi < 1$ , une étude approfondie nous montre que celle-ci présente une inflexion en  $\omega = \omega_n$ , plus ou moins prononcée en fonction de  $\xi$  (figure 10.9).

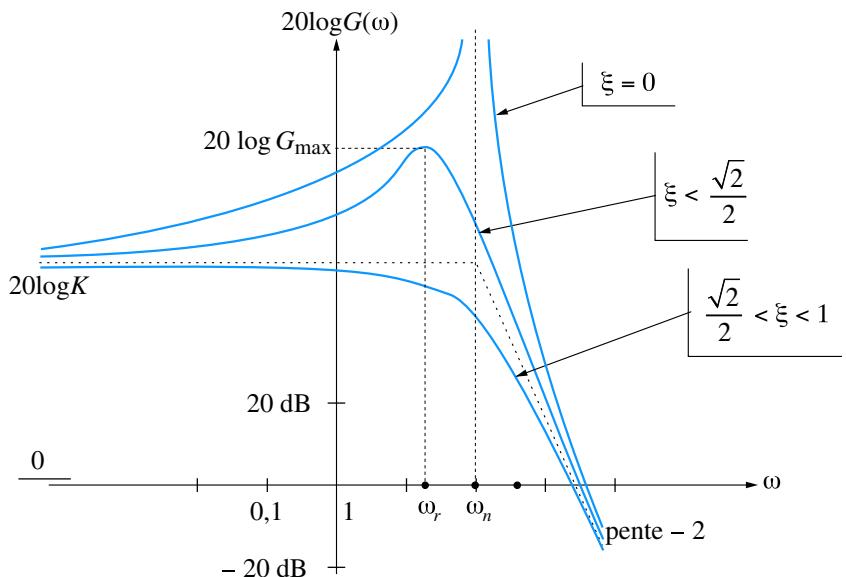


Figure 10.8

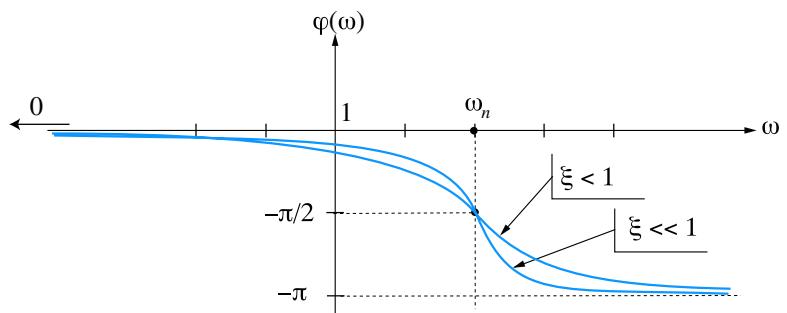


Figure 10.9

## 10.3 Approche méthodique du tracé des diagrammes de Bode

### 10.3.1 Objectif

Nous allons tenter de tirer profit des deux intérêts fondamentaux que nous venons de mettre en évidence. L'objectif consiste à acquérir une bonne maîtrise du tracé rapide de n'importe quel diagramme de Bode (gain et phase). Les lignes qui suivent présentent, à partir d'un exemple simple, la méthode à utiliser.

### 10.3.2

## Construction d'un diagramme de gain asymptotique

Considérons, pour l'exemple, un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{p+10}$$

La fonction de transfert en fréquence de ce système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{j\omega+10}$$

D'où :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{j\omega^2 + 100^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}$$

Considérons les équivalents des trois expressions  $\sqrt{\omega^2 + 1}$ ,  $\sqrt{\omega^2 + 10^2}$  et  $\sqrt{\omega^2 + 100^2}$  :

$$\omega \ll 1 \implies \sqrt{1+\omega^2} \approx 1, \quad \omega \gg 1 \implies \sqrt{1+\omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 10 \implies \sqrt{10^2+\omega^2} \approx 10, \quad \omega \gg 10 \implies \sqrt{10^2+\omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 100 \implies \sqrt{100^2+\omega^2} \approx 100, \quad \omega \gg 100 \implies \sqrt{100^2+\omega^2} \approx \omega$$

L'idée consiste à déterminer un équivalent asymptotique (approché) de  $G(\omega)$  pour chaque intervalle compris entre deux pulsations de coupure.

Rassemblons les résultats précédents dans le tableau 10.1.

**Tableau 10.1**

$\omega$	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{\omega^2 + 1}$	1	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$
$\sqrt{\omega^2 + 100^2}$	100	100	100	100	$\omega$
$\sqrt{\omega^2 + 10^2}$	10	10	$\omega$	$\omega$	$\omega$
$G(\omega)$	10	$10\omega$	100	$\omega$	$\omega$
$20 \log G(\omega)$	20 dB	$20 \text{ dB} + 20 \log \omega$	40 dB	$20 \log \omega$	
<b>pente</b>	0	20 dB/déc	0	20 dB/déc	

On réalise alors un diagramme de Bode asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures, par ses segments asymptotiques calculés dans le tableau (figure 10.10).

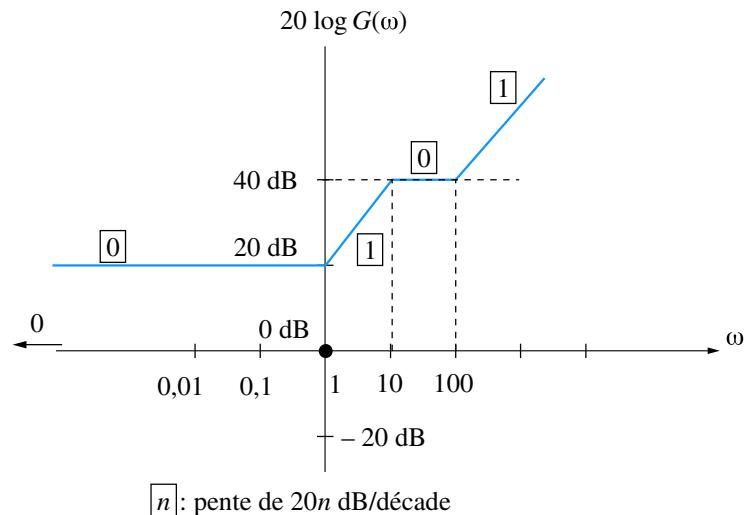


Figure 10.10

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant la pente  $n$  de ce dernier par  $\pi/2$  (figure 10.11).

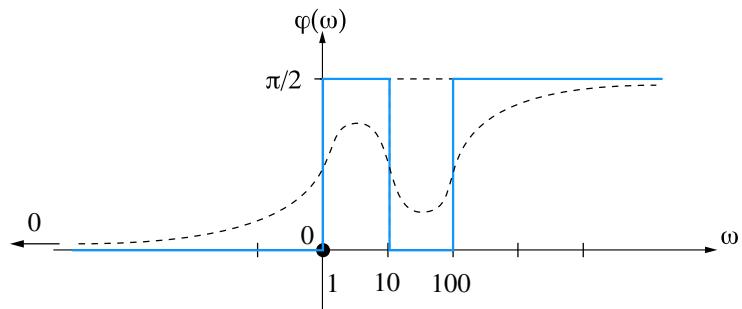


Figure 10.11

Il suffit alors d'un peu d'intuition pour imaginer l'allure de la courbe réelle (en pointillé sur la figure 10.11), ce qui dispense de l'étude complète de la fonction  $\varphi(\omega)$ . On peut encore affiner le tracé en calculant les extrema relatifs de la fonction. On veillera, lors d'un tracé intuitif, à ne pas tracer la courbe réelle jusqu'aux directions asymptotiques calculées, compte tenu que ces valeurs sont... asymptotiques !

### 10.3.3 Méthode rapide

On peut tracer un diagramme de Bode sans faire ni calcul, ni tableau : dans la fonction de transfert  $G(p)$  qui vient d'être étudiée, repérons les pulsations de coupure 1, 10 et 100 et portons les en abscisse sur le diagramme de gain (figure 10.12).

Calculons l'équivalent asymptotique quand  $p$  tend vers 0 :  $G(p) \approx 10$ . Ceci implique, bien évidemment  $G(\omega) \approx 10$ , soit un gain de 20 dB. Cette expression est valable pour  $\omega < 1$  (jusqu'à la première coupure), ce qui nous permet de tracer le premier segment (figure 10.13).

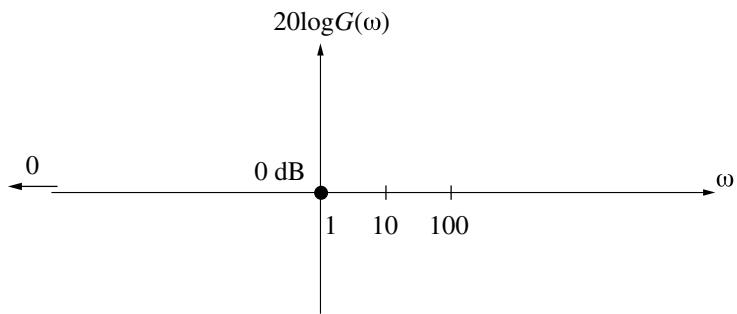


Figure 10.12

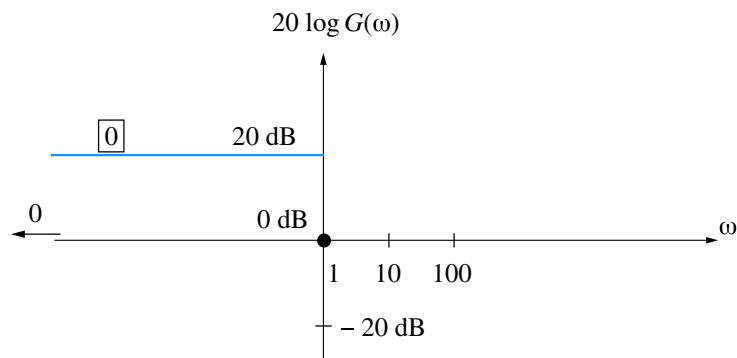


Figure 10.13

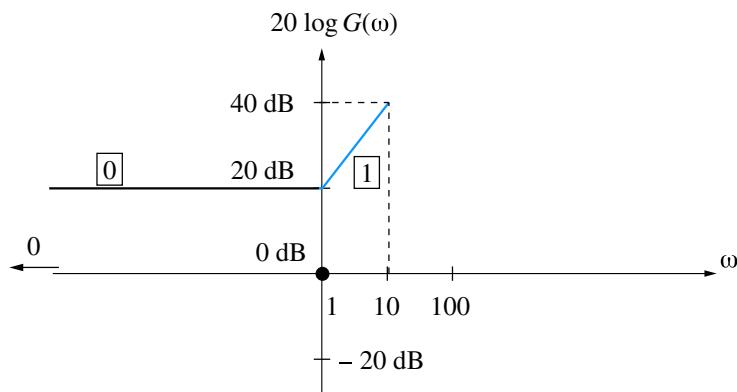


Figure 10.14

Au-delà de la pulsation 1, le terme  $(p + 1)$  va introduire un changement d'équivalent : un terme en  $\omega$  apparaît au numérateur de la fonction de transfert approchée : la pente du segment asymptotique correspondant augmente d'une unité (de 20 dB par décade). Voir figure 10.14.

Et ce, jusqu'à la cassure suivante qui a lieu à la pulsation 10. Le terme  $(p + 10)$  étant au dénominateur, la pente diminue d'une unité, et ce jusqu'à la pulsation 100 où elle s'incrémente à nouveau (figure 10.15).

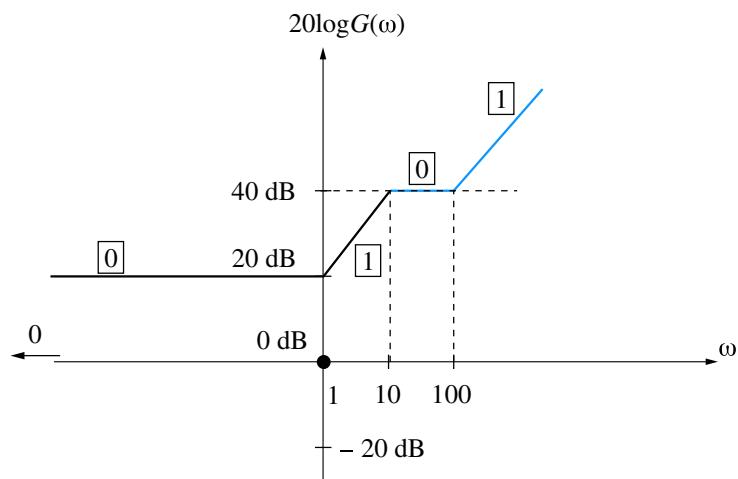


Figure 10.15

### 10.3.4 Cas particuliers

#### Présence d'un terme en $p$ au numérateur ou au dénominateur

On cherche toujours l'équivalent quand  $p$  tend vers 0, mais en prenant soin de laisser le  $p$  tel quel. Le diagramme asymptotique débute alors par une pente non nulle ; on détermine le segment par deux points particuliers.

Considérons par exemple le système de transfert :

$$G(p) = \frac{(p+1)}{p(p+10)}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées : 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque  $p$  tend vers 0 :

$$G(p) \approx \frac{1}{10p} \quad \text{lorsque } p \rightarrow 0$$

$$\text{Soit : } G(\omega) \approx \frac{1}{10\omega} \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log \left( \frac{1}{10\omega} \right) = -20 \log \omega - 20 \text{ dB}$$

Il nous suffit alors de deux points (ou d'un seul, par exemple  $G_{dB}(1) = -20 \log 1 - 20 \text{ dB} = 20 \text{ dB}$ , en considérant que la pente est connue, soit  $-20 \text{ dB/décade}$ ) pour tracer ce segment de droite qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ( $\omega = 1$  étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé des autres segments est immédiat (figure 10.16) : le terme en  $(p+1)$  se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémentera d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante  $\omega = 10$ , pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémentera d'une unité compte tenu que le terme en  $(p+10)$  se trouve au dénominateur.

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre – 1 correspondant à une chute de 20 dB par décade.

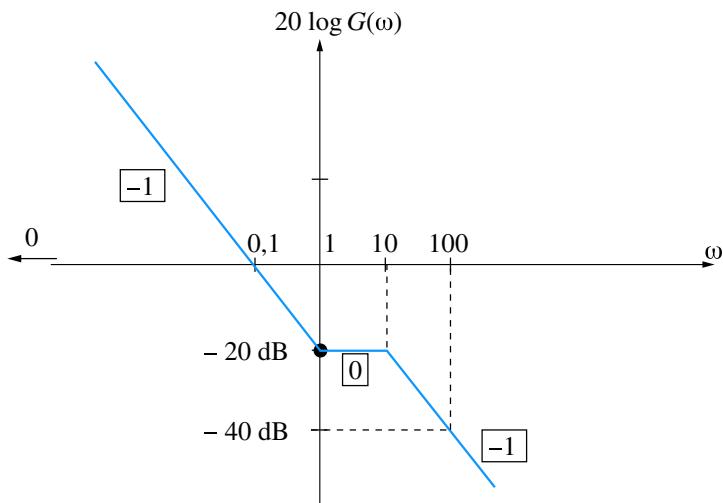


Figure 10.16

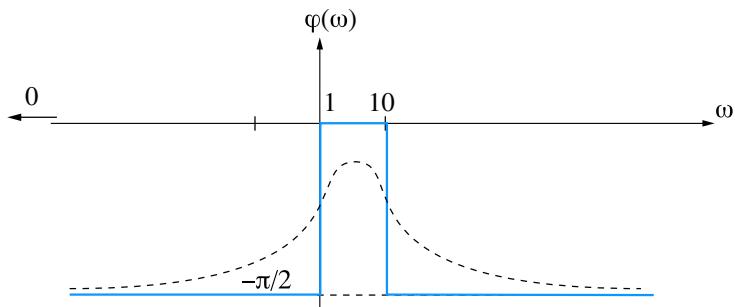


Figure 10.17

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments du diagramme de gain : chaque pente d'ordre – 1 correspond à une direction asymptotique de phase égale à  $-\pi/2$  ; la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0. On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 10.17). La connaissance précise de la valeur maximale du déphasage ne peut se faire, bien entendu, que par le calcul.

### Présence d'un terme au carré

Lorsqu'on passe la pulsation de coupure correspondante, on incrémente ou on décrémente la pente de deux unités (selon que terme est au numérateur ou au dénominateur). Considérons par exemple le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1000(p + 1)}{(p + 10)^2}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées : 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque  $p$  tend vers 0 :

$$G(p) \approx 10 \text{ lorsque } p \rightarrow 0$$

Soit :

$$G(\omega) \approx 10 \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc :

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons déjà tracer ce segment de droite horizontal qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ( $\omega = 1$  étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé du segment suivant est immédiat (figure 10.18) : le terme en  $(p + 1)$  se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémenté d'une unité au passage de la pulsation 1.

Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante  $\omega = 10$ , pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente de deux unités étant donné que le terme en  $(p + 10)$  est au dénominateur et se trouve élevé au carré.

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre 1 correspondant à une croissance de 20 dB par décade, celle d'ordre -1 correspondant à une chute de 20 dB par décade.

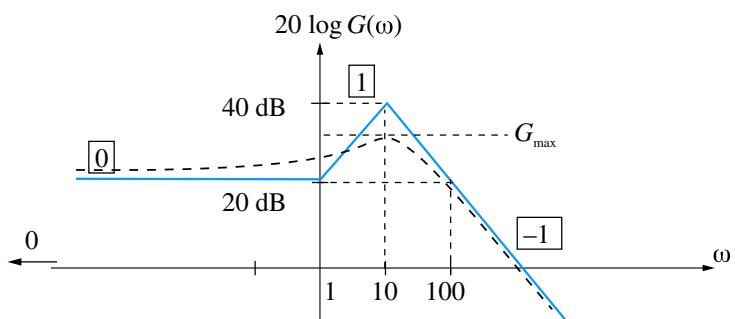


Figure 10.18

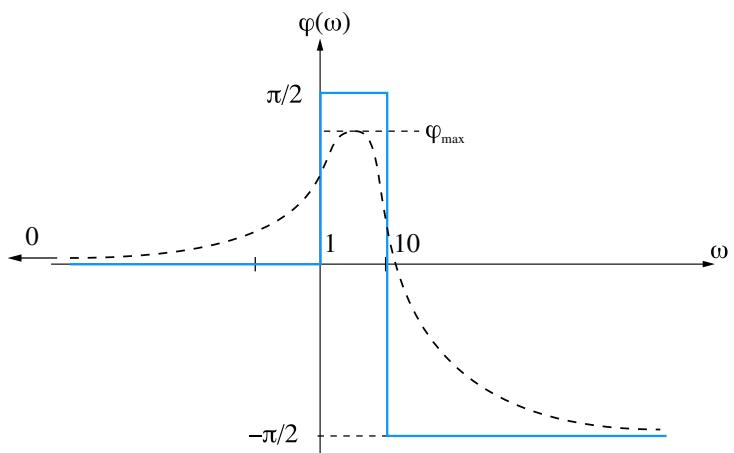


Figure 10.19

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments dans le diagramme de gain : la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0, celle d'ordre 1 correspond à une direction asymptotique de  $\pi/2$  et la pente d'ordre -1 correspond à une direction asymptotique de phase égale à  $-\pi/2$ . On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 10.19). Le tracé réel ne peut bien évidemment se faire de manière précise qu'en calculant des points particuliers (par exemple la valeur maximale  $\varphi_{\max}$ ).

## 10.4

# Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Bode constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes : gain et déphasage.

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de ce comportement sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique.

### 10.4.1

#### Définition

##### Définition

Le **diagramme de Nyquist**, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points  $M$  de coordonnées  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$  (figure 10.20).

C'est aussi le lieu, dans le plan complexe, des points d'affixe  $G(j\omega)$ , donc de coordonnées  $\Re[G(j\omega)]$ ,  $\Im[G(j\omega)]$  dans ce plan.

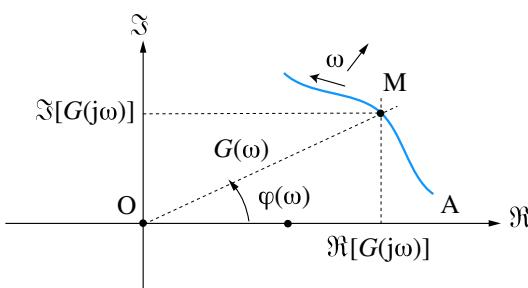


Figure 10.20

### 10.4.2

#### Méthode de tracé rapide

On peut certes, pour tracer le diagramme de Nyquist d'un système, réaliser l'étude complète en coordonnées polaires du lieu des points  $M$  de coordonnées  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , voire même faire cette étude en coordonnées cartésiennes paramétrées  $\Re[G(j\omega)]$ ,  $\Im[G(j\omega)]$ .

On peut néanmoins réaliser un tracé sommaire d'un lieu de Nyquist quelconque à partir du diagramme de Bode en reportant dans le plan complexe, du mieux possible et en balayant les axes des pulsations de 0 à  $+\infty$ , chaque couple de points  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  relevés respectivement sur le diagramme de Bode de gain et sur celui de phase.

Reprenons l'exemple traité précédemment avec :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{(p+10)^2}$$

Les figures 10.18 et 10.19 présentent les fonctions  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ . Nous pouvons déjà placer dans le plan complexe le point de départ du lieu de Nyquist, en relevant, dans les diagrammes de Bode, les valeurs du gain et du déphasage pour  $\omega = 0$ .

On a :

$$G(0) = 10 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

Soit A ce point de départ.

Il n'est plus question de gain en décibels dans le diagramme de Nyquist ; c'est bien la valeur du gain réel qui y est représentée.

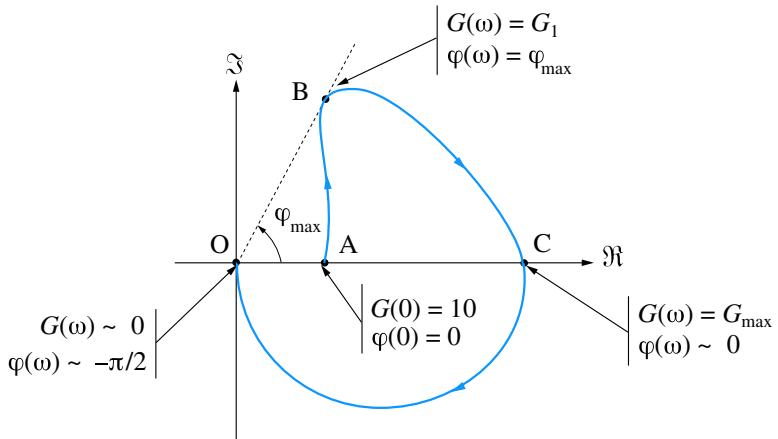


Figure 10.21

Lorsque  $\omega$  commence à croître, le gain augmente tandis que l'angle  $\varphi(\omega)$  croît jusqu'à une valeur  $\varphi_{\max}$  (figures 10.18 et 10.19). Cette évolution nous permet d'effectuer (intuitivement quant à la forme) le tracé de la portion AB de la courbe de Nyquist (figure 10.21).

On remarquera, sur les diagrammes de Bode, que ce maximum de phase ne correspond pas au maximum de gain : le gain continue de croître jusqu'à sa valeur maximale, tandis que  $\varphi(\omega)$  se remet à décroître. La valeur maximale  $\varphi_{\max}$  du gain est atteinte pour une valeur de  $\varphi(\omega)$  visiblement voisine de 0, ce qui nous amène au point C.

Enfin, tandis que le gain décroît de cette valeur maximale jusqu'à 0 ( $-\infty$  en décibels), le déphasage continue sa décroissance jusqu'à  $-\pi/2$ . La dernière portion de courbe nous conduit donc au point O tangentiellellement à l'axe des imaginaires puisque  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\pi/2$ .

Hormis les diagrammes de Bode et de Nyquist, il existe d'autres modes de représentation du comportement fréquentiel d'un système linéaire. Nous nous limiterons toutefois à ces deux types de graphe qui constituent les outils qui nous serons nécessaires lorsque nous aborderons l'étude des systèmes asservis.

### 10.4.3

## Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

On a : 
$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{K(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2}$$

Soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} + j \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} = X + jY$$

Les parties réelle et imaginaire sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la courbe.

Nous pouvons remarquer que :

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{1+T^2\omega^2} - \frac{K}{2}\right)^2 + \left(\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{2K - K(1+T^2\omega^2)}{2(1+T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K(1-T^2\omega^2)}{2(1+T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1-T^2\omega^2)^2 + 4K^2T^2\omega^2}{4(1+T^2\omega^2)^2}$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1+T^4\omega^4 - 2T^2\omega^2) + 4K^2T^2\omega^2}{4(1+T^2\omega^2)^2}$$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2(1+T^4\omega^4 + 2T^2\omega^2)}{4(1+T^2\omega^2)^2} = \frac{K^2(1+T^2\omega^2)^2}{4(1+T^2\omega^2)^2} = \frac{K^2}{4}$$

L'équation  $\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2}{4}$  correspond à un cercle de centre  $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$  et de

rayon  $\frac{K}{2}$ . Toutefois, le diagramme de Nyquist ne correspond pas au cercle entier.

En effet, on a :

$$Y = \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} < 0$$

Le diagramme est donc le demi-cercle de centre  $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$  et de rayon  $\frac{K}{2}$  correspondant au demi-plan  $Y < 0$  (en trait plein sur la figure 10.22).

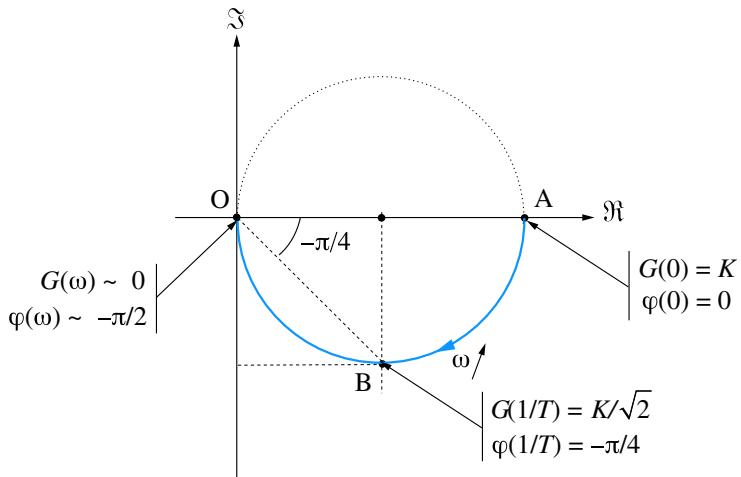


Figure 10.22

Trois points particuliers sont à considérer : le point de départ du lieu au point de coordonnées  $(K,0)$  correspondant à la pulsation nulle, le point B correspondant à la pulsation de coupure à  $-3$  dB ; rappelons ici que :

$$G(1/T) = \frac{K}{\sqrt{2}} \implies 20 \log G(1/T) = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

Enfin, le point O, point d'arrivée de la courbe lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . Ces différents points peuvent également être repérés dans le diagramme de Bode.

## 10.4.4

### Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

Les diagrammes de Nyquist d'ordre 2 se déduisent intuitivement des diagrammes de Bode. La figure 10.23 présente les courbes obtenues en fonction des différents cas. On notera que toutes les courbes partent du même point, conformément aux diagrammes de Bode ( $G(0) = K$  et  $\varphi(0) = 0$ ) et arrivent toutes au point O, tangentiellellement à l'axe réel, puisque  $G(\infty) = 0$  et  $\varphi(\infty) = -\pi$ .

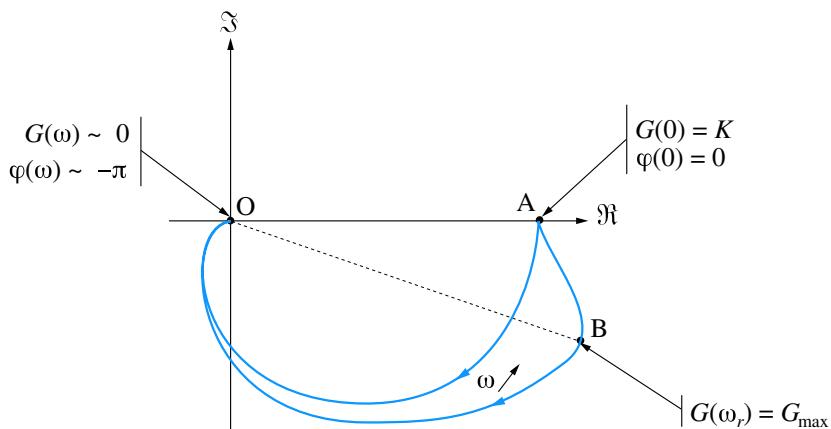


Figure 10.23

Le phénomène de résonance se traduit ici par une inflexion de la courbe.

## Synthèse

### Savoirs

#### Je connais :

- La modélisation fréquentielle des systèmes linéaires ;
- Le comportement fréquentiel des systèmes d'ordre 1 ;
- Le comportement fréquentiel des systèmes d'ordre 2 ;
- La méthode rapide de tracé des diagrammes de Bode.

### Savoir-faire

#### Je sais :

- Déterminer la réponse en fréquence d'un système linéaire continu ;
- Étudier le comportement harmonique d'un système à partir de sa fonction de transfert ;
- Tracer un diagramme de Bode asymptotique ;
- Tracer un diagramme de Nyquist à partir d'un diagramme de Bode.

## Exercices d'application

- 10.1** On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \quad \text{avec } T = 0,1 \text{ s}$$

Calculer l'expression précise de la pulsation de coupure à 0 dB définie par :

$$G(\omega_{c0}) = 1$$

Montrer que si  $K \gg 1$ , on a :  $\omega_{c0} \approx \frac{K}{T}$

Calculer la valeur du gain  $K$  qui permet d'obtenir une pulsation  $\omega_{c0} = 10$  rad/s.

- 10.2** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) du système dont la fonction de transfert  $G(p)$  est définie par :

$$G(p) = \frac{1000}{(p+1)(p+100)}$$

## Exercices d'approfondissement

- 10.3** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) du système dont la fonction de transfert  $G(p)$  est définie par :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{p(p+10)}$$

- 10.4** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) du système dont la fonction de transfert est définie par :

$$G(p) = \frac{10p}{(p+1)(p+100)}$$

- 10.5** Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) du système dont la fonction de transfert  $G(p)$  est définie par :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{(p+10)^2}$$

Montrer que le diagramme de Bode asymptotique de gain possède une symétrie par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  et en déduire la valeur maximale précise  $G_{\max}$  du

gain. Déterminer, pour la pulsation  $\omega_{\max}$  correspondant à ce maximum, la valeur du déphasage.

- 10.6** On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)}$$

Déterminer la valeur de  $K$  pour laquelle la pulsation de coupure à 0 dB, définie par  $G(\omega_{c0}) = 1$  ou encore par  $G_{\text{dB}}(\omega_{c0}) = 20\log G(\omega_{c0}) = 0$ , est égale à 5 rad/s.

- 10.7** On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10^4}{p(p+10)(p+100)}$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce système et en déduire son diagramme de Nyquist. On s'attachera, notamment, à démontrer l'existence d'une asymptote à la courbe de Nyquist lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 10.1

Il suffit d'invoquer la définition de la pulsation de coupure à 0 dB pour en obtenir l'expression.

Le gain fréquentiel du système a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}}$$

La pulsation de coupure à 0 dB peut être aisément calculée :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega_{c0}^2}} = 1 \implies \omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1}$$

$$\text{Si } K \geq 1, \text{ on a : } \omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1} \approx 10K = \frac{K}{T}$$

Pour obtenir une pulsation  $\omega_{c0} = 10$  rads, on doit avoir :

$$10\sqrt{K^2 - 1} = 10 \implies K = \sqrt{2}$$

### 10.2

Il convient ici d'utiliser la méthode de tracé rapide développée dans le cours. Le diagramme de phase se déduit facilement du diagramme de gain.

Il est tout d'abord nécessaire d'obtenir un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est à dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

$$\text{On a : } G(p) \approx \frac{1000}{100} = 10 \implies G(\omega) \approx 10$$

$$\text{Soit : } G_{dB} = 20\log G(\omega) : 20 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique du diagramme de gain peut ainsi être tracé. Il est valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 10.24).

Au-delà de cette pulsation de coupure, la direction asymptotique change ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $-1$ , autrement dit  $-20 \text{ dB/décade}$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il suffit de veiller à respecter la valeur de la pente. Comme cet équivalent reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100$  rad/s), on trace un segment qui décroît de  $40 \text{ dB}$  sur l'intervalle  $[1, 100]$  qui correspond à 2 décades.

À partir de  $\omega = 100$  rad/s, le graphe est caractérisé par une direction asymptotique de pente  $-2$  puisque le terme  $(p + 100)$  se trouve au dénominateur. Il faut veiller à respecter la valeur de la pente : entre  $100$  et  $1000$  rad/s, le gain chute de  $40 \text{ dB}$  (pente  $-40 \text{ dB/décade}$ ).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$  (figure 10.25).

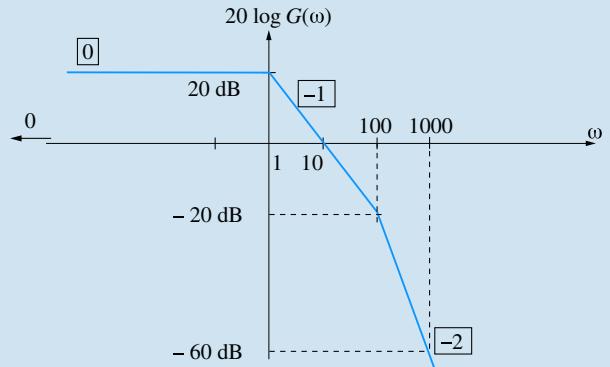


Figure 10.24

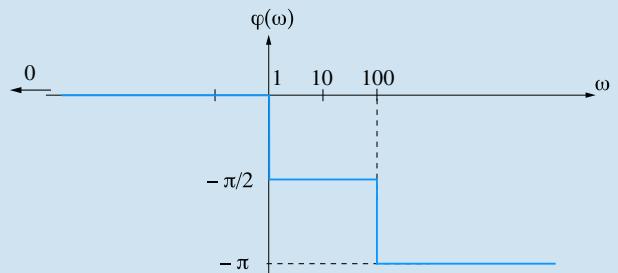


Figure 10.25

## Exercices d'approfondissement

### 10.3

La présence d'un pôle nul nécessite un peu de vigilance pour amorcer le tracé. Hormis cela, pas de difficulté particulière pour ces diagrammes.

On détermine en premier lieu un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

$$\text{On a : } G(p) \approx \frac{1000}{10p} \implies G(\omega) \approx \frac{100}{\omega}$$

$$\text{Soit : } G_{dB} = 20\log G(\omega) : 40 \text{ dB} - 20\log \omega$$

On trace alors le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 10.26). Il s'agit d'un segment de pente  $-1$  autrement dit  $-20 \text{ dB/décade}$ . La connaissance d'un point suffit donc pour tracer ce segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = 40 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 1]$  possède donc une pente de  $-20$  dB/décade et s'arrête au point  $(1, 40$  dB), comme indiqué sur la figure 10.26.

Au-delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1$  rad/s, la direction asymptotique change ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au numérateur, la pente s'incrémenté d'une unité. On obtient donc un segment de droite de pente  $[0]$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 10$  rad/s).

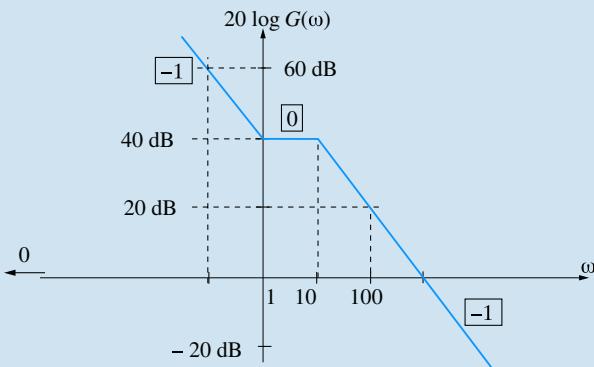


Figure 10.26

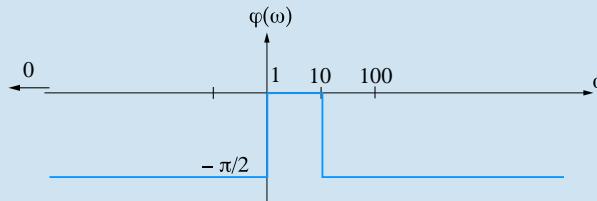


Figure 10.27

À partir de  $\omega = 10$  rad/s, on a à nouveau une direction asymptotique de pente  $[-1]$  puisque le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur. Entre 10 et 100 rad/s, le gain chute de 20 dB (pente  $-20$  dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$  (figure 10.27).

## 10.4

Mêmes commentaires que pour l'exercice 10.3 avec, ici, un zéro nul dans la fonction de transfert.

Lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0), on a :

$$G(p) \approx \frac{p}{10} \implies G(\omega) \approx \frac{\omega}{10}$$

Soit :  $G_{dB} = 20\log G(\omega) : 20\log \omega - 20$  dB

On peut donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 10.28). Il s'agit d'un

segment de pente  $[+1]$  autrement dit 20 dB/décade. La connaissance d'un point suffit donc pour tracer ce segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = -20$$
 dB

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 1]$  possède donc une pente de 20 dB/décade et s'arrête au point  $(1, -20$  dB), comme indiqué sur la figure 10.28.

Au-delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1$  rad/s, on change de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. On a donc un segment de droite de pente  $[0]$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100$  rad/s).

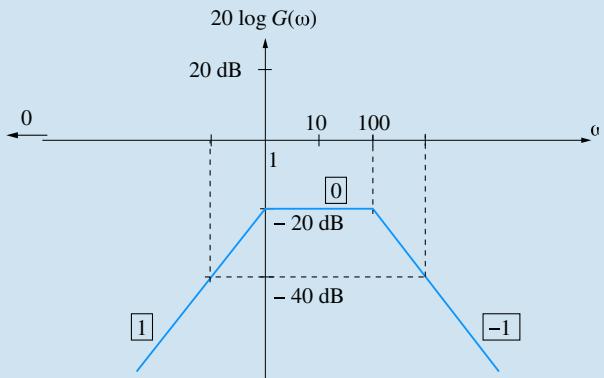


Figure 10.28

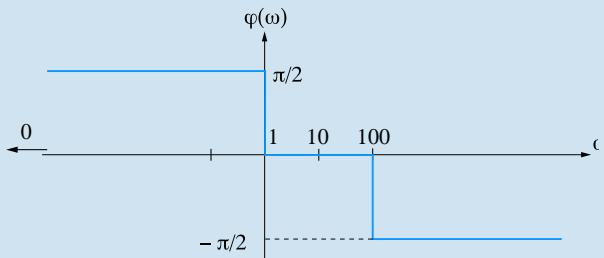


Figure 10.29

À partir de  $\omega = 100$  rad/s, on a une direction asymptotique de pente  $[-1]$  puisque le terme  $(p + 100)$  se trouve au dénominateur. Entre 100 et 1000 rad/s, le gain chute de 20 dB (pente  $-20$  dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$  (figure 10.29).

## 10.5

La fonction de transfert possède un pôle double qui nécessite un traitement particulier. La valeur du gain maximal sera calculée à partir de l'expression exacte de  $G(\omega)$ .

Lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0), on a :

Soit :

$$G_{dB} = 0$$
 dB

On peut donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 10.30). Il s'agit d'un segment horizontal.

Au-delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1$  rad/s, la direction asymptotique change ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au numérateur, on a désormais une pente [1]. Le nouveau segment reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 10$  rad/s). Le segment possédant une pente de 20 dB/décade, il s'arrête donc au point de coordonnées (10, 20 dB).

À partir de  $\omega = 10$  rad/s, la pente se décrément de deux unités puisque le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur et est élevé au carré. Le nouveau segment va du point (10, 20 dB) au point (100, 0 dB) puisqu'il possède une pente égale à  $-20$  dB/décade. Enfin, au-delà de la pulsation  $\omega = 100$  rad/s, la pente est à nouveau nulle.

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$  (figure 10.31).

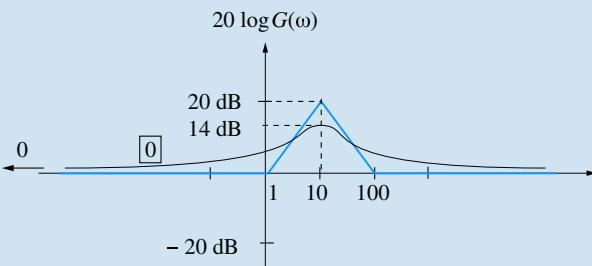


Figure 10.30

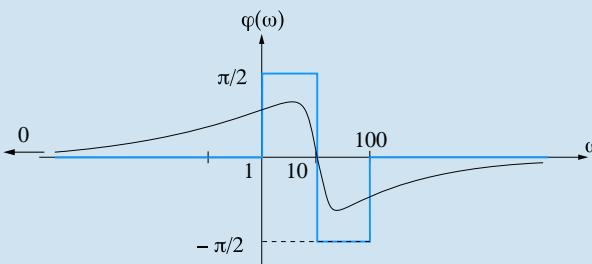


Figure 10.31

De toute évidence, le diagramme asymptotique de gain est symétrique par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  rad/s. Il est néanmoins nécessaire de démontrer que le diagramme de Bode réel possède la même symétrie.

Pour ce faire on considère l'expression réelle du gain :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{(p+10)^2} \Rightarrow$$

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 10^4}}{\omega^2 + 100}$$

Pour démontrer la symétrie, il faut montrer que le gain pour une pulsation donnée  $\omega_1$  est égal au gain pour la pulsation  $\omega_2$  qui lui est symétrique par rapport à  $\omega = 10$  rad/s. Mais attention, nous sommes sur une échelle logarithmique (figure 10.32).

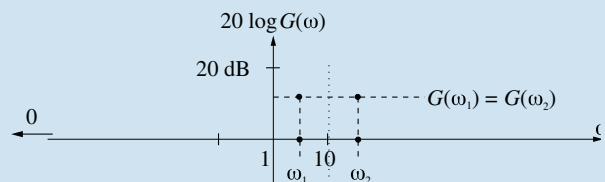


Figure 10.32

Par conséquent, la condition d'équidistance ( $\omega_1 \leftrightarrow 10$  et  $10 \leftrightarrow \omega_2$ ) s'exprime de la manière suivante :

$$\log 10 - \log \omega_1 = \log \omega_2 - \log 10$$

Soit :  $\log \omega_2 + \log \omega_1 = 2 \log 10 = \log 100$

$$\text{D'où : } \omega_2 = \frac{100}{\omega_1}$$

Pour démontrer la symétrie du diagramme de gain réel par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  rad/s, il faut que l'expression du gain soit inchangée lorsque l'on change  $\omega$  en  $100/\omega$ .

On peut également chercher à montrer que :  $G\left(\frac{100}{P}\right) = G(p)$

$$G\left(\frac{100}{P}\right) = \frac{\left(\frac{100}{P} + 1\right)\left(\frac{100}{P} + 100\right)}{\left(\frac{100}{P} + 10\right)^2}$$

Après avoir multiplié cette fonction, au numérateur comme au dénominateur, par  $p^2$ , on obtient :

On obtient :

$$G\left(\frac{100}{P}\right) = \frac{(100+p)(100+100p)}{(100+10p)^2}$$

$$= \frac{100(100+p)(1+p)}{100(10+p)^2} = G(p)$$

La symétrie du diagramme réel est donc bien démontrée. Le gain maximal est donc obligatoirement obtenu pour  $\omega = 10$  rad/s.

$$\text{On a donc : } G_{\max} = \frac{\sqrt{100+1}\sqrt{100+10^4}}{100+100} \approx 5$$

$$\text{Soit : } G_{\max} \approx 20 \log 5 \approx 14 \text{ dB}$$

Par ailleurs, la valeur du déphasage, pour  $\omega = 10$  rad/s est définie par :

$$\varphi(\omega_{\max}) = \arctan 10 + \arctan \frac{1}{10} - 2 \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan 1 = 0$$

La connaissance de  $G_{\max}$  et celle du déphasage correspondant permettent d'esquisser le tracé réels des deux courbes (figures 10.30 et 10.31).

## 10.6

Il suffit d'invoquer la définition de la pulsation de coupure à 0 dB pour résoudre très rapidement cet exercice.

$$\text{On a : } G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)}$$

$$\implies G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 10^4}}$$

$$\text{Pour } \omega_{c0}, \text{ on a : } G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 10^4}} = 1$$

$$\text{D'où : } G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{5^2 + 1} \sqrt{5^2 + 10^4}} = 1$$

$$\text{On en déduit : } K = \sqrt{25 + 1} \sqrt{25 + 10^4} = 511$$

## 10.7

Aucune difficulté pour le tracé du diagramme de Bode. Le lieu de Nyquist se déduit des diagrammes de gain et de phase.

Lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0),

$$\text{on a : } G(p) \approx \frac{10}{p} \implies G(\omega) \approx \frac{10}{\omega}$$

$$\text{Soit : } G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) : 20 \text{ dB} - 20 \log \omega$$

Ce qui permet de tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  (figure 10.33). Il s'agit d'un segment de pente  $-2$  autrement dit  $-20 \text{ dB/décade}$ . La connaissance d'un point suffit donc pour tracer le segment, par exemple :

$$G_{\text{dB}}(1) = 20 \text{ dB} \text{ ou encore } G_{\text{dB}}(10) = 0 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 10]$  possède donc une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  et s'arrête au point  $(10, 0 \text{ dB})$ , comme indiqué sur la figure 10.33.

Au-delà de la pulsation de coupure  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , la direction asymptotique change ; comme le terme  $(p+10)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrément de une unité. On obtient alors un segment de droite de pente  $-3$ . Ce segment formant

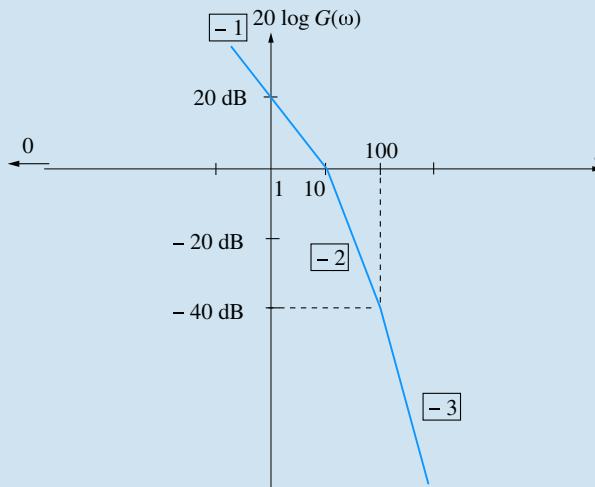


Figure 10.33

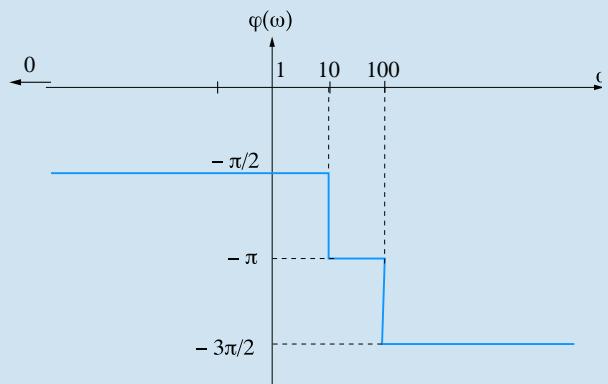


Figure 10.34

un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).

À partir de  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , on a une direction asymptotique de pente  $[-3]$  puisque le terme  $(p+100)$  se trouve au dénominateur. Entre 100 et 1000 rad/s, par exemple, le gain chute de 60 dB (pente  $-60 \text{ dB/décade}$ ).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$  (figure 10.34).

La meilleure technique, pour tracer le diagramme de Nyquist à partir du diagramme de Bode, consiste à considérer le diagramme de phase :

Le déphasage  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$ . Dans le plan de Nyquist représenté sur la figure 10.35, cela correspond aux deux secteurs grisés. Lorsque  $\omega = 0$  (point de départ du lieu de Nyquist), ce déphasage vaut  $-\frac{\pi}{2}$  et le gain est infini. Il faut, pour esquisser la courbe, imaginer une rotation autour du point O, ici entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$  et reporter, tout en tournant, la valeur du gain. La courbe recherchée part du secteur grisé inférieur, coupe l'axe des réels ( $\varphi(\omega) = -\pi$ ) pour un gain déjà inférieur à 1 et termine sa course au point O avec une tangente verticale. En effet, lorsque  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$ , le gain ne fait que décroître de l'infini à 0.

Pour démontrer l'existence d'une asymptote lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on calcule la fonction de transfert en fréquence :

$$G(j\omega) = \frac{10^4}{j\omega(j\omega+10)(j\omega+100)}$$

Il convient de séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour pouvoir faire une étude aux limites :

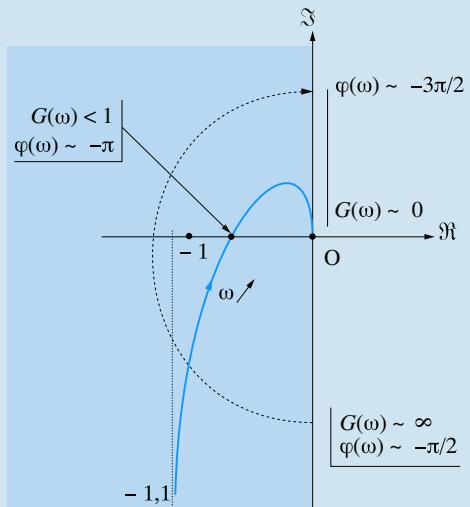
$$G(j\omega) = \frac{10^4}{j\omega(j\omega+10)(j\omega+100)} \\ = -\frac{10^4 j\omega(-j\omega+10)(-j\omega+100)}{\omega^2(\omega^2+100)(\omega^2+10^4)}$$

Soit :  $G(j\omega) = -\frac{10^4 j\omega(1000 - \omega^2 - 110j\omega)}{\omega^2(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$

D'où :  $G(j\omega) = -\frac{10^4 \times 110}{(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$

$$- j \frac{10^4(1000 - \omega^2)}{\omega(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$$

On vérifie bien que la partie imaginaire tend vers  $-\infty$ , lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et on montre que la partie réelle tend vers  $-1,1$ . La droite d'équation  $X = -1,1$  est donc asymptote à la courbe.



**Figure 10.35**

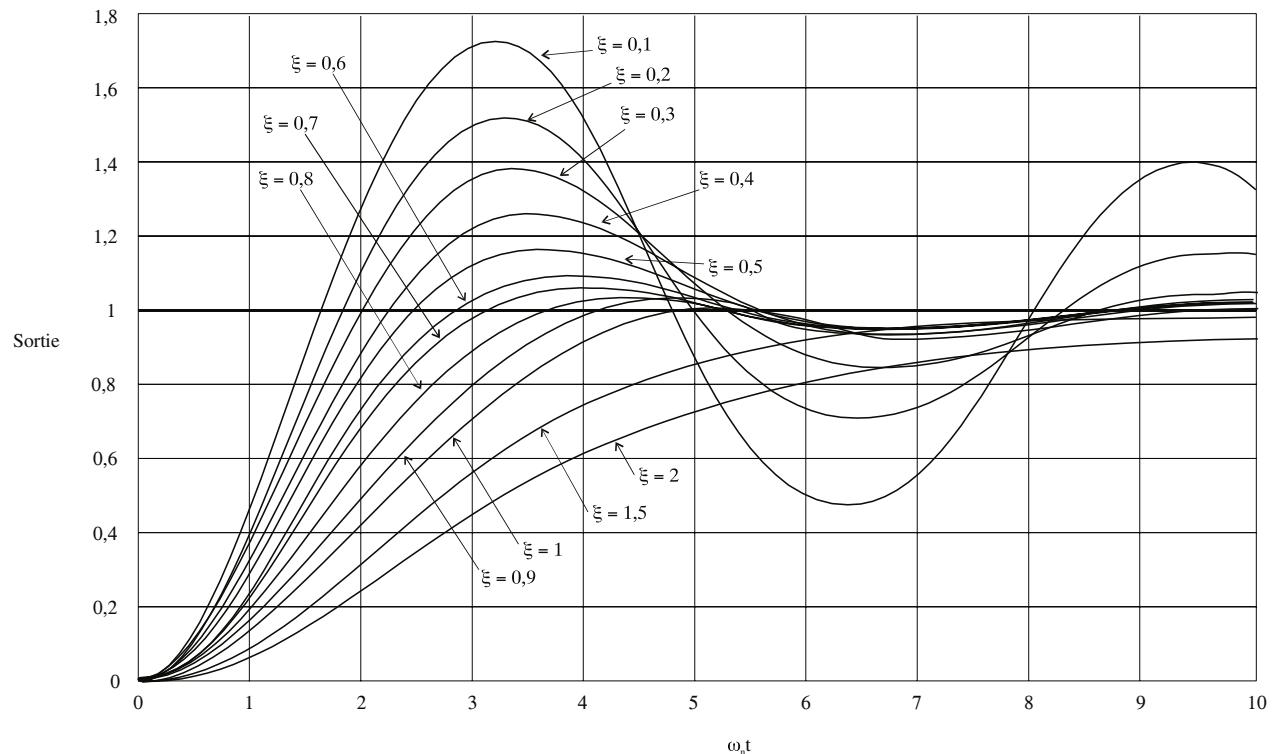
# Table des transformées de Laplace

ANNEXE 1

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p + a}$
$s(t) = te^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p + a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p + a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b - a}{(p + a)(p + b)}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p + a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p + a)(p + b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - ate^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p + a)^2}$
$s(t) = \sin wt$	$S(p) = \frac{w}{p^2 + w^2}$
$s(t) = \cos wt$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + w^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin wt$	$S(p) = \frac{w}{(p + a)^2 + w^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos wt$	$S(p) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + w^2}$

# Abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre

ANNEXE **2**



# Index

## A

accélération de Coriolis, 61  
action mécanique, 116  
    extérieure, 151  
    intérieure, 151  
action réciproque, 117  
actionneur, 13  
action(s)  
    conditionnelle(s), 222  
    continue(s), 222  
    mémorisée(s), 222  
    temporisée(s), 222  
activation d'une étape, 222  
additionneur à deux chiffres, 197  
additionneur à trois chiffres, 198  
additionneur de deux nombres quelconques de  $n$  bits, 200  
algèbre de Boole, 183  
analyse  
    arborescente, 8  
    descendante, 9  
    sagittale, 7  
appui-plan, 81  
arc-boutement, 160  
automatique, 2  
axe, 19  
axe central, 31  
axe de rotation, 19

## B

bascule J/K, 215  
bascule R/S, 210  
Binary Coded Decimal, 195  
binary digit, 194  
bit, 194  
bit de poids faible, 194  
bit de poids fort, 194

## C

Cahier des Charges Fonctionnel, 5  
came, 92  
capteur, 13, 217  
cascade, 244  
centre instantané de rotation, 64  
chaîne  
    complexe, 79  
    fermée, 78  
    ouverte, 78  
champ de vecteurs, 29  
    accélération, 60

vitesse, 54  
chronogramme, 190  
cinématique, 46  
circuit logique  
    séquentiel, 209  
    électronique(s), 187  
classe d'un système, 247  
codage BCD, 195  
codage de l'information, 193  
code binaire réfléchi, 195  
code GRAY, 195  
coefficient de frottement  
    d'adhérence, 132  
    de glissement, 131  
coincement, 161  
coïncidants, 49  
combinaison d'entrée, 182  
commande, 235  
comparateur, 245  
comportement harmonique, 267  
composition  
    des mouvements, 57  
    des torseurs cinématiques, 60  
    des vecteurs accélérations, 61  
    des vecteurs rotations, 60  
    des vecteurs vitesses, 58  
compteur, 216  
    synchrone, 216  
condition, 220  
cône de frottement, 133  
constante de temps, 248  
convergence  
    en ET, 221  
    en OU, 221  
critère, 4  
cycle de vie, 3  
cylindre-plan, 84

## D

date, 46  
décimal codé binaire, 195  
degré de liberté, 79  
déphasage, 267  
diagramme de Nyquist, 282  
diagrammes de Bode, 267  
direct, 19  
direction, 18  
divergence  
    en ET, 221  
    en OU, 221  
durée, 46

échelon de vitesse, 239  
échelon unité, 239  
effecteur, 13  
éléments de réduction, 29  
engrenage, 96  
équilibre, 150  
équiprojectif, 29  
espace, 53  
euclidien, 46  
étape(s), 218, 219  
étude harmonique, 265  
évolution fugace, 224

**E**

facteur d'amortissement, 251  
flexion, 136  
fonction(s), 3  
de service, 4  
de transfert, 241  
de transfert de fréquence, 267  
identité, 193  
implication, 193  
logique, 183, 185  
inhibition, 192  
forme  
canonique, 187  
minimale, 190  
formule de dérivation vectorielle, 34  
frottement, 130

**F**

gain, 266  
en décibels, 267  
statique, 248, 251  
glissière, 80  
GRAFCET, 217  
graphe  
de structure, 78  
des contacts, 78  
des liaisons, 78

**H, I, J**

hélicoïdale, 84  
identification, 235  
impulsion unitaire, 240  
informations binaires, 193  
jerk, 66  
jeton, 219

**L**

liaison, 79, 219  
à axe, 85  
à centre, 87  
à direction, 82  
équivalente, 88  
usuelle, 80

lieu de Nyquist, 282  
ligne d'action, 129  
limite du glissement, 133  
linéaire  
annulaire, 91  
rectiligne, 91  
loi(s)  
« ET», 184  
« OU», 184  
de comportement, 234  
de De Morgan, 185  
horaire, 50

**M**

machine, 2  
manipulation des schémas-blocs, 244  
matière d'œuvre, 3  
mécanique, 2  
mécanisme, 2  
mémoire  
à effacement prioritaire, 213  
à inscription prioritaire, 214  
par automaintien, 213  
milieu environnant, 2  
mintermes, 187  
modèle  
de Coulomb, 131  
de fonctionnement, 234  
moment central, 31  
moteur, 2  
mouvement, 46  
plan, 63

**N**

NAND, 187  
négation, 184  
non orientée, 18  
NON-ET, 187  
NON-OU, 187  
NOR, 187  
nutation, 24

**O**

ordre dominant, 256  
orientée, 18  
original, 238, 241  
OU exclusif, 188

**P**

partie  
commande, 11  
opérative, 11  
opérative du système, 218  
pivot, 82  
pivot-glissant, 83  
pivotement, 90

pôles, 241  
 positif, 19  
 poutre, 136  
 préactionneur, 12  
 précession, 24  
 prédition, 235  
 produit  
     mixte, 27  
     scalaire, 25  
     vectoriel, 26  
 pseudo-période, 254  
 pseudo-pulsation, 254  
 pulsation de coupure, 269  
 pulsation propre, 251

**R**

rampe, 239  
 réceptivité, 220  
 référentiel, 46  
 régime  
     amorti, 254  
     critique, 254  
     oscillatoire amorti, 254  
 repère, 46, 53  
     d'espace, 46  
     galiléen, 150  
 réponse  
     impulsionnelle, 248  
     indicielle, 249  
 représentation complexe, 266  
 résonance  
     phénomène de, 274  
 rotation, 47, 62  
     propre, 24  
 roues de friction, 93  
 roulement, 90  
     sans glissement, 91

**S**

schéma-bloc, 244  
 schémas normalisés, 184  
 section droite, 136  
 seuil de convergence, 236  
 signal  
     d'entrée, 234  
     de sortie, 234  
 signaux, 234  
 solide, 53  
     indéformable, 53  
 sommateur, 245  
 soustracteur, 245  
 sphère-cylindre, 86  
 sphère-plan, 85  
 sphérique, 85  
 sphérique-à-doigt, 87  
 statique, 150  
 surtension, 274

système, 2, 233  
     binaire, 193  
     bouclé, 246  
     continu invariant, 234  
     décimal, 193  
     hexadécimal, 193  
     linéaire, 235  
     logique combinatoire, 181, 182  
     matériel, 150  
     mono-entrée, mono sortie, 234

**T**

table de vérité, 183  
 tableau de Karnaugh, 190, 191  
 taux de rotation, 34  
 techniques d'identification, 255  
 technologie  
     CMOS, 187  
     TTL, 187  
 temps  
     de montée, 254  
     de réponse, 249  
 tension, 126  
 théorème  
     de la valeur finale, 238  
     du retard, 237  
 torseur, 29  
     cinétique, 56  
     couple, 32  
     des actions mécaniques, 119  
     glisseur, 32  
     nul, 32  
 trajectoire, 49  
 transformée de Laplace, 236  
     d'une dérivée, 237  
     d'une primitive, 237  
     inverse, 238  
 transition, 218, 220  
 translation, 47, 63  
 transmetteur, 13  
 transmittance complexe, 267  
 tribologie, 130

**U, V, X, Z, autre**

uniforme, 29  
 valeur ajoutée, 3  
 variables logiques, 182  
 vecteur, 25  
     accélération, 52  
     moment, 29  
     nodal, 24  
     position, 50  
     résultante, 29  
     vitesse, 51  
         de glissement, 90  
 XOR, 188  
 zéros, 241  
     – 20 dB/décade 268

Jean-Dominique Mosser  
Yves Granjon  
Jacques Tanoh

# SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

## 1<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI

### Tout-en-un

Ce Tout-en-un des sciences pour l'ingénieur a été spécialement conçu pour répondre aux besoins spécifiques des étudiants de classes préparatoires.

Il comprend :

#### **Un cours complet, pédagogique et conforme aux programmes**

- Toutes les notions du programme, présentées de façon synthétique.
- Des commentaires dans la marge pour mieux comprendre le cours.
- Une synthèse des savoirs et savoir-faire pour chaque chapitre.

#### **De nombreux exercices, accessibles, à difficulté progressive et tous corrigés.**

- Des exercices d'application pour s'entraîner.
- Des exercices d'approfondissement pour aller plus loin.

JEAN-DOMINIQUE MOSSER

est professeur agrégé de sciences industrielles en classes préparatoires scientifiques au lycée Kléber (Strasbourg).

YVES GRANJON

est professeur et directeur de l'École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique (Nancy).

JACQUES TANOH

est professeur agrégé de sciences industrielles en classes préparatoires scientifiques au lycée Kléber (Strasbourg).