Chapitre 4

Développements limités

Pré-requis

- ☐ Manipulation des fonctions polynomiales
- ☐ Calcul des dérivées successives des fonctions usuelles et des fonctions composées
- ☐ Calcul des limites
- ☐ Division euclidienne de polynômes
- ☐ Utilisation du symbole somme

Objectifs

- ☐ Approximer une fonction par un polynôme au voisinage de 0
- ☐ Lever une indétermination de limite à l'aide d'un développement limité

Sommaire

Chapitre 4 - Séquence 1

Définitions et opérations sur les développements limités

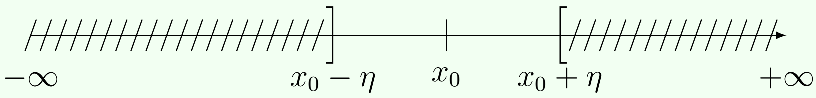
1 La notation petit o

Définition : *Voisinage d'un point*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **voisinage** (ouvert) de x_0 toute intervalle de la forme

$$]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\ ,$$

avec $\eta \in \mathbb{R}_+^*$.



Remarque

Dans ce chapitre, η sera considéré « petit ».
La lettre η, tout comme ε ou δ, est souvent utilisée dans le cas de petites quantités.

Notations

Dans la suite,

- ▷ I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0,
- ▷ $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions,
- ▷ $n \in \mathbb{N}$.

Définition : *Fonctions négligeables*

Soit $x_0 \in I$. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0.
La fonction f est dite **négligeable** par rapport à g en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notation : *Petit o*

Si la fonction f est négligeable par rapport à la fonction g en x_0, on note

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{au voisinage de } x_0,$$

et on lit « f est un petit o de g » au voisinage de x_0.

L'expression $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de x_0, se note aussi

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)),$$

Exemples

- ▷ On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x^4$ et $g : x \mapsto x^2$.
  On a :
  $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$
  La fonction f est donc négligeable par rapport à g au voisinage de 0 et on note
  $$x^4 \underset{0}{=} o(x^2).$$
- ▷ La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est négligeable par rapport à la fonction $g : x \mapsto \tan x$ au voisinage de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
  En effet
  $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$
  Ains, on a $\sin x = o(\tan x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.

Remarques

- ▷ La notation $f(x) = o(g(x))$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
- ▷ Écrire $f(x) = o(1)$ au voisinage de x_0 signifie que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Exercice 1.

Montrer que $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0.

2 Définition des développements limités

Définition : *Développement limité au voisinage de* 0

On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n de f au voisinage de 0, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

- ▷ L'application P_n de I dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelée la **partie polynomiale** ou la **partie regulière** du développement limité.
- ▷ La quantité $o(x^n)$, lorsqu'elle est explicitement connue, est appelée le **reste** du développement limité.

On pourra ainsi écrire :
$$f(x) = P_n(x) + o(x^n).$$

Remarque

Un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point x_0 donne une approximation de la fonction, au voisinage de ce point, par une fonction polynomiale.

Notation : $Dl_n(0)$

Nous utiliserons indépendamment les notations :

- ▷ **développement limité d'ordre n au voisinage de zéro**,
- ▷ $\mathbf{DL}_n(0)$.

Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- ▷ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$. Alors, la fonction polynomiale $f : x \mapsto a + bx$ admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ de la forme
$$f(x) = a + bx.$$
En effet, dans ce cas, la partie polynomiale du $\mathrm{DL}_1(0)$ de f coïncide avec la fonction elle même et il n'y a pas donc de reste.
- ▷ Plus généralement, soit f une fonction polynomiale de la forme $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Alors le $DL_1(0)$ de f est
$$f(x) = a_0 + a_1x + x(a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}) = a_0 + a_1x + o(x).$$
Ici, la partie polynomiale du $DL_1(0)$ de f est a_0+a_1x et son reste est $x(a_2x+\ldots+a_nx^{n-1})$ qui est bien un $o(x)$. De même, le $DL_2(0)$ de f est
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^2(a_3x + \ldots + a_nx^{n-2}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x).$$
- ▷ Un exemple très important de développement limité est donné par la somme de la suite géométrique :
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - x^n \frac{x}{1 - x}.$$
Ce qui donne
$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1 - x}.$$
Or on a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - x} = 0$ donc
$$x^n \frac{x}{1 - x} = o(x^n).$$
Ainsi, on obtient le développement limité
$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

On a vu dans les exemples précédents qu'il est très simple de déterminer le développement limité de fonctions polynomiales et, de plus, on a déterminé le développement limité la fonction particulière $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Pour déterminer le développement limité de fonctions plus générales, on fera appel au résultat fondamental donné ci-dessous.

Théorème : *Formule de Taylor-Young*

Soit f une fonction n fois dérivable sur I.
Alors f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^n) \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Exemples

- On s'intéresse au $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
  La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, donc sur tout intervalle I contenant 0.
  De plus, toutes ses dérivées successives sont égales à elle même :

  $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = f(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

  Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young, on a le développement limité suivant

  $$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{3}{2}}$. La fonction f est deux fois dérivable au voisinage de 0 et on a

  $$f' : x \mapsto \frac{3}{2}\,(1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto \frac{3}{4}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

  On en déduit que f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par

  $$(1+x)^{\frac{3}{2}} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + o(x^2).$$

Exercice 2.

En appliquant la formule de Taylor-Young, déterminer les DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sin(x)$, **2)** $g : x \mapsto \ln(1+x)$.

3 Opérations sur les développements limités

Proposition : *Somme et produit par un réel*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$*. On suppose que* f *et* g *admettent au voisinage de* 0 *les DL d'ordre* n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

On a alors

$$(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n),$$

et

$$(\lambda f)(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots + (\lambda a_n)x^n + o(x^n).$$

Méthode – *$DL_n(0)$ d'une somme de deux fonctions*

Pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la somme de deux fonctions :

- ▷ on écrit le $\mathrm{DL}_n(0)$ de chacune des deux fonctions ;
- ▷ on additionne les parties polynomiales des deux $\mathrm{DL}_n(0)$, on simplifie les termes de même degré et on ordonne les termes en degré croissant ;
- ▷ on ajoute à la fin le reste $o(x^n)$.

Exemple

On souhaite déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{1-x}$

A l'ordre 3, on a

- ▷ $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,
- ▷ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Alors, pour déterminer le DL de f, il suffit de faire la différence des deux DL précédents :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x - \frac{1}{1-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Exercice 3.

Déterminer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \sin x + 2\cos x$.

Proposition : *Produit de développements limités*

On suppose que f *et* g *admettent au voisinage de* 0 *les DL d'ordre* n *:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + o(x^n).$$

Le produit $(fg)(x) = f(x)g(x)$ admet alors un DL d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie polynomiale s'obtient :

- ▷ *en effectuant le produit des parties polynomiales des $DL_n(0)$ de f et g :*

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$$

- ▷ *et en ne conservant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n.*

Méthode – *$DL_n(0)$ d'un produit de deux fonctions*

Pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ du produit de deux fonctions fg :

- ▷ on écrit le $\mathrm{DL}_n(0)$ de chacune des deux fonctions ;
- ▷ on multiplie les parties polynomiales des deux $\mathrm{DL}_n(0)$, en ne gardant que les termes de degré inférieur à n, on simplifie et on ordonne les termes en degré croissant ;
- ▷ on ajoute le reste $o(x^n)$.

Exemples

- ▷ On souhaite déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$

  Comme on a vu précédemment, à l'ordre 3 on a

  - $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,
  - $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

  Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} = \mathrm{e}^x \times \frac{1}{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ &= 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

  Dans le produit on n'a pas gardé tous les termes de degré supérieur à 3 car l'ordre du DL est $n = 3$.

- ▷ Calculons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \cos^2(x)$. Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \cos x$ est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

  On a

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{24^2}\\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{24^2}\\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$

On en déduit que le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \cos^2(x)$ est

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Exercice 4.

Déterminer le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto (\sin x)(\ln(1+x))$.

Proposition : *Quotient de développements limités*

Supposons que f et g admettent au voisinage de 0 les DL d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

avec $b_0 \neq 0$.

Notons P et Q les parties polynomiales des $DL_n(0)$ de f et g :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

et

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

Le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet alors un DL d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie polynomiale est le quotient à l'ordre n de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ suivant les puissances croissantes.

Exemples

- Déterminons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x-x^2}$. Puisque les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 1-x-x^2$ sont des fonctions polynomiales d'ordre inférieur ou égal à 2, elles sont égales à leur $\mathrm{DL}_2(0)$. Pour obtenir le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x-x^2}$, il suffit de faire la division euclidienne de ces deux fonctions polynomiales. On a

$$
\begin{array}{rllll|l}
 & 1 & & & & 1-x-x^2 \\ \cline{6-6}
- & \Big(1 & -x & -x^2\Big) & & 1+x+2x^2 \\ \cline{1-5}
 & & x & +x^2 & & \\
 & - & (x & -x^2 & -x^3) & \\ \cline{2-5}
 & & & 2x^2 & +x^3 & \\
 & & - & (2x^2 & -2x^3) & \\ \cline{3-5}
 & & & & +3x^3 &
\end{array}
$$

D'où $1 = (1-x-x^2)(1+x+2x^2) + 3x^3$ et ainsi

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + \frac{3x^3}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + o(x^2).$$

▷ Nous voulons déterminer le DL d'ordre 5 au voisinage de 0 de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Afin de déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ on fait la division du DL de $\sin x$ par celui de $\cos x$, selon les puissances croissantes de x, jusqu'à l'ordre 5 :

$$
\begin{array}{rlll|l}
 & x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{5-5}
- & \Big(x & -\frac{x^3}{2} & +\frac{x^5}{24}\Big) & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\ \cline{1-4}
 & & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & \\
 & - & \Big(\frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{6}\Big) & \\ \cline{2-4}
 & & & \frac{2x^5}{15} & \\
 & & & -\frac{2x^5}{15} & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Exercice 5.

Déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{e^x}{\cos x}$.

Proposition : *Composition de développements limités*

Soient

- $\triangleright$ $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\triangleright$ I, J *des intervalles de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0,
- $\triangleright$ $f_1 : J \to \mathbb{R}$ *une application admettant un* $DL_n(0)$,
- $\triangleright$ $f_2 : I \to \mathbb{R}$ *une application telle que* $f_2(I) \subset J$ *et telle que* $f_2(0) = 0$, *admettant un* $DL_n(0)$.

La composée $f_1 \circ f_2$ *admet un DL à l'ordre* n, *obtenu en remplaçant le DL de* f_2 *dans celui de* f_1 *et en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égaux à* n.

Méthode – *Composition de développements limités*

- $\triangleright$ Soit $h = f_1 \circ f_2$. On vérifie que $f_2(0) = 0$.
- $\triangleright$ On écrit les développements limités de f_1 et f_2 :

$$f_1(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n + o(y^n).$$

$$f_2(x) = d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + o(x^n).$$

- $\triangleright$ On obtient la partie polynomiale du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h = f_1 \circ f_2$ en remplaçant tous les y de la partie polynomiale du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f_1 par celle du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f_2.

$$h(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 \left(f_2(x)\right) + a_2 \left(f_2(x)\right)^2 + \cdots + a_n \left(f_2(x)\right)^n .$$

- $\triangleright$ On ajoute à la partie polynomiale le reste $o(x^n)$.

Exemples

- $\triangleright$ Reprenons l'exemple précédent du $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x-x^2}$. On remarque que $h = f_1 \circ f_2$, ou $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $f_2 : x \mapsto x + x^2$. De plus $f_2(0) = 0$.
  A l'ordre 2 on a
  - $\dfrac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(x^2)$.

  La fonction f_2 est une fonction polynomiale, donc afin de déterminer le DL de h il suffit de remplacer tous les y du DL de f_1 par $x + x^2$:

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-(x+x^2)} &= 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 + o(x^2) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

  On retrouve d'une façon différente le résultat précédent.

▷ On souhaite déterminer le développement limité à l'ordre 4 de $h : x \mapsto \cos(1 - \mathrm{e}^x)$. On remarque que $h = f_1 \circ f_2$, ou $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^x$. De plus $f_2(0) = 0$. A l'ordre 4 on a

- $\cos(y) = 1 - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^4}{24} + o(y^4)$
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^3}{24} + o(x^4)$,

On a donc $1 - \mathrm{e}^x = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^4)$.

Afin de déterminer le DL de h il suffit de remplacer tous les y du DL de f_1 par la partie polynomiale du DL de f_2 et ne en gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4. On a

- $y^2 = \left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^4)\right)^2$
  $= x^2 + x^3 + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4) = x^2 + x^3 + \dfrac{7x^4}{12} + o(x^4)$
- $y^4 = \left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^4)$,

donc

$$\begin{aligned} h(x) = \cos(1 - \mathrm{e}^x) &= 1 - \frac{x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12}}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4). \end{aligned}$$

▷ Calculons le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto \operatorname{ch} x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \tag{1}$$

Le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k!} + o(x^6) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$$

Par composition, on en déduit que celui de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^6) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$$

D'après (1), on obtient

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$$

En particulier, on remarquera que le développement limité de $x \mapsto \operatorname{ch} x$ ne contient que des termes pairs. Pour un développement limité d'un ordre plus élevé on considère un ordre pair. Dans le cas du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$, on obtient

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Exercice 6.

Déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $h : x \mapsto \ln(1 + \sin x)$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

On a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}x\ln x=0.$$
Ainsi, $\ln x=o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0

Correction de l'Exercice 2.

1) On a :
$$f' : x\mapsto \cos x,\qquad f'' : x\mapsto -\sin x,\qquad f''' : x\mapsto -\cos x,\qquad f^{(iv)} : x\mapsto \sin x.$$
Donc $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$ et $f^{(iv)}(0)=0$, respectivement.
Le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction sin a donc la forme suivante :
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4).$$

2) On a :
$$g' : x\mapsto \frac{1}{1+x},\quad g'' : x\mapsto -\frac{1}{(1+x)^2},\quad g''' : x\mapsto \frac{2}{(1+x)^3},\quad g^{(iv)} : x\mapsto -\frac{6}{(1+x)^4}.$$
Donc $g(0)=0$, $g'(0)=1$, $g''(0)=-1$, $g'''(0)=2$ et $g^{(iv)}(0)=-6$, respectivement.
Le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction g a donc la forme suivante :
$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{6}{4!}x^4+o(x^4)\\&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 3.

Les $DL_4(0)$ des fonctions sin et cos sont le suivants :

- ▷ $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$
- ▷ $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$

On a donc : $2\cos(x)=2-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$, et le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\sin x+2\cos x$ est le suivant :
$$\begin{aligned}\sin x+2\cos x&=x-\frac{x^3}{6}+2-x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\\&=2+x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 4.

A l'ordre 4 on a les DL au voisinage de 0 suivants :

- $\triangleright$ $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$
- $\triangleright$ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$

Donc

$$\begin{aligned}
(\sin x)(\ln(1+x)) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\\
&= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\\
&= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 5.

A l'ordre 4 on a les DL au voisinage de 0 suivants :

- $\triangleright$ $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$,
- $\triangleright$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

Afin de déterminer le $DL_4(0)$ de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos x}$ on fait la division du DL de e^x par celui de $\cos x$, selon les puissances croissantes de x, jusqu'à l'ordre 4 :

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & 1 & +x & +\dfrac{x^2}{2} & +\dfrac{x^3}{6} & +\dfrac{x^4}{24} & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \\ \cline{7-7}
- & \Big(1 & & -\dfrac{x^2}{2} & & +\dfrac{x^4}{24}\Big) & 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{2} \\ \cline{2-6}
 & & x & +x^2 & +\dfrac{x^3}{6} & & \\
 & - & (x & & -\dfrac{x^3}{2}\Big) & & \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & +\dfrac{2x^3}{3} & & \\
 & & - & \Big(x^2 & & -\dfrac{x^4}{2}\Big) & \\ \cline{4-6}
 & & & & \dfrac{2x^3}{3} & +\dfrac{x^4}{2} & \\
 & & & - & \Big(\dfrac{2x^3}{3} & \Big) & \\ \cline{4-6}
 & & & & & +dfracx^42 & \\
 & & & & & -\dfrac{x^4}{2} & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc
$$\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Correction de l'Exercice 6.

On remarque que $h = f_1 \circ f_2$, ou $f_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$. De plus $f_2(0) = 0$.
A l'ordre 4 on a

- $\triangleright$ $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$
- $\triangleright$ $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

On pose $y = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. On a alors :

- $\triangleright$ $y^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
- $\triangleright$ $y^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^4),$
- $\triangleright$ $y^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^4).$

Donc
$$\begin{aligned} h(x) = \ln(1+\sin x) &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Soit $f(x) = (1+x)^4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer le DL d'ordre 2 de f au voisinage de 0.

2) Déterminer le DL d'ordre 5 de f au voisinage de 0.

Exercice 2.

En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer les développements limités suivants :

1) Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

2) Le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$.

3) Le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \sin x$.

4) Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \arctan x$.

Exercice 3. – *Somme de DL*

Calculer les développements limités suivants :

1) le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \sin x - \cos x$

2) le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^x - \ln(1+x)$.

Exercice 4. – *Produit de DL*

Sachant que :

▷ $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$

▷ $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$,

donner le DL d'ordre 7 au voisinage de 0 de :

1) $x \mapsto (\sin x)(\mathrm{ch}\, x)$.

2) $x \mapsto (\cos x - 1)(\mathrm{sh}\, x - x) - (\mathrm{ch}\, x - 1)(\sin x - x)$.

Exercice 5. – *Quotient de DL*

Déterminer les développements limités suivants :

1) Le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x}$.

2) Le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \mathrm{th}x$.

3) Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{3 + 2\ln(1+x)}$.

4) Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+x-2}$.

Exercice 6. – *Composition de DL*

Donner le DL d'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

2) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$

3) $x \mapsto \mathrm{e}^{\cos x}$.

4) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Exercice 7.

Déterminer le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \operatorname{sh} x$.

Chapitre 4 - Séquence 2

Dérivation, intégration et développements limités généralisés

4 Dérivation et intégration de développement limité

Proposition : *Dérivation*

Soient

- $n \in \mathbb{N}^*$,
- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ *le DL d'ordre* n *au voisinage de* 0 *de la fonction* f.

Alors la dérivée de f*, notée* f'*, admet pour DL d'ordre* $n-1$ *au voisinage de* 0

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Remarque

On voit donc que si f est indéfiniment dérivable, la partie polynomiale du DL d'ordre $n-1$ de f' au voisinage de 0 s'obtient en dérivant terme à terme la partie polynomiale du DL d'ordre n de f au voisinage de 0.

Exemple

Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f : x \mapsto \cos x$ est

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Puisque $f' = \sin x$, on obtient que le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sin x$ est

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Exercice 1.

On rappelle que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ et que

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de 0 de $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition : *Intégration*

Soient

- ▷ $n \in \mathbb{N}^*$,
- ▷ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ *le DL d'ordre* n *au voisinage de* 0 *de la fonction* f.

Alors toute primitive F *de* f *admet un DL d'ordre* $n+1$ *au voisinage de* 0 *de la forme :*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple

On a vu que le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est donné par

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

On en déduit que l'on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n).$$

Ainsi, par intégration, on en déduit le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots - \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice 2.

1) À partir du $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

2) En déduire le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $g : x \mapsto \arctan(x)$.

5 Calcul de limites via les développements limités

Le développement limité d'une fonction au voisinage de 0 donne une approximation de cette fonction. Il peut donc être utilisé pour lever des indéterminations dans des calculs de limites.

Exemples

- ▷ Considérons la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée car la numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Considérons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Alors, on en déduit que l'on a

$$\frac{\sin x - x}{x} = -\frac{x^2}{3!} + o(x^2).$$

On obtient alors la limite recherchée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right) = 0.$$

▷ On souhaite calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

Afin d'enlever l'indétermination, on effectue le DL d'ordre 2 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

A l'ordre 1, $\ln(1+y) = y + o(y)$, donc

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x).$$

On peut donc conclure que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Remarque

On utilise les DLs afin d'enlever l'indétermination dans une limite. Si, en remplaçant les DLs, l'indétermination persiste, il faut augmenter l'ordre des DLs.

Exercice 3.

Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos(2x) - 2\cos x}{\sin^2 x}$,

6 Développements limités au voisinage de x_0 et de ∞

Il est possible de déterminer le développement limité au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ ou de l'infini.

Définition : *Développement limité au voisinage de x_0*

On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n de f au voisinage de x_0, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Méthode – *DL a voisinage de x_0*

Pour déterminer le développement limité au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$,

- ▷ on pose $t = x - x_0$,
- ▷ on se ramène à un développement limité au voisinage de 0.

Exemple

On souhaite déterminer le DL d'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$.
On pose $t = x - \frac{\pi}{2}$. On a alors $x = t + \frac{\pi}{2}$. De plus, si x tend vers $\frac{\pi}{2}$, alors t tend vers 0.
On a :

$$\sin(x) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t),$$

d'après les propriétés de trigonométrie.
Au voisinage de 0, on a $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5)$.
Ainsi, en utilisant le fait que $t = x - \frac{\pi}{2}$, on obtient que le DL d'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ au voisinage de $x = \frac{\pi}{2}$ est le suivant :

$$\sin(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right).$$

Définition : *Développement limité au voisinage de l'∞*

On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n de f au voisinage de l'∞, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right).$$

Méthode – *DL a voisinage de ∞*

Pour déterminer le développement limité au voisinage de l'∞,

- ▷ on pose $t = \frac{1}{x}$,
- ▷ on se ramène à un développement limité au voisinage de 0.

Exemple

On souhaite déterminer le DL d'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x^2+2x}$.
Faisons le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ et définissons g par $g(t) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Nous avons donc :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\frac{1}{t^2}-2}{\frac{1}{t^2}+2\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1-2t^2}{1+2t} \\ &= (1-2t^2)\frac{1}{1+2t}. \end{aligned}$$

A l'ordre 4, d'après le DL de la fonction $\dfrac{1}{1-x}$, on a

$$\frac{1}{1+2t} = 1-(2t)+(2t)^2-(2t)^3+(2t)^4+o(t^4) = 1-2t+4t^2-8t^3+16t^4+o(t^4).$$

Par multiplication, on obtient :

$$\begin{aligned} g(t) &= (1-2t^2)(1-2t+4t^2-8t^3+16t^4+o(t^4)) \\ &= 1-2t+4t^2-8t^3+16t^4-2t^2+4t^3-8t^4+o(t^4) \\ &= 1-2t+2t^2-4t^3+8t^4+o(t^4). \end{aligned}$$

Au final, en révenant à la variable de départ x, on en déduit que le DL d'ordre 4 de f au voisinage de l'infini est :

$$f(x) = 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{8}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

7 Développements limités usuels

En appliquant la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles, on obtient les DL_n au voisinage de 0 suivants ($n \in \mathbb{N}^*$) :

Proposition

- ▷ $\mathrm{e}^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$
- ▷ $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)$
- ▷ $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- ▷ $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

▷ $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

▷ $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

▷ $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$

▷ $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

Remarque

Il est nécessaire de connaître ces développements limités usuels par coeur.

Remarque

Le DL écrit pour cos est bien à l'ordre $2n+1$: le coefficient de x^{2n+1} est nul. De même pour les développements des fonctions sin, ch et sh : le dernier terme du DL est nul d'après les propriétés de parité de ces fonctions.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Puisque $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, en dérivant le DL de la fonction tan, on en déduit :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4).$$

Correction de l'Exercice 2.

1) Le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1-x}$ est

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

donc

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3),$$

2) Puisque g est une primitive de f, alors g admet le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 suivant :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4), \end{aligned}$$

car $g(0) = \arctan(0) = 0$.

Correction de l'Exercice 3.

On a une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".
D'après les DLs des fonctions usuelles on a :

- ▷ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- ▷ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$

Donc

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= x^2 + o(x^3) \\ \cos(2x) &= 1 - \frac{4x^2}{2!} + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

Alors le numérateur devient :

$$1 + \cos(2x) - 2\cos x = 1 + (1 - 2x^2) - 2 + x^2 + o(x^3) = -x^2 + o(x^3)$$

et on obtient

$$\frac{1 + \cos(2x) - 2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-x^2 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{-1 + o(x)}{1 + o(x)}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{1 + \cos(2x) - 2\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{-1 + o(x)}{1 + o(x)} = -1.$$

Chapitre 4

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Donner le DL d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes en commençant par déterminer le DL de leur dérivée à l'ordre 2 :

1) $x \mapsto \arctan(2+x)$ **2)** $x \mapsto \ln(2+x)$.

Exercice 2.

Cet exercice présente une méthode alternative pour déterminer le DL en 0 de la fonction tan.

1) Soit $f : x \mapsto -\ln(\cos(x))$. Montrer que $f' : x \mapsto \tan(x)$.

2) Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$. En déduire le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction tan.

Exercice 3.

Étudier les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{2\sin x}$, **2)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin x)+x}{x^2}$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$, **4)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\cos(x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{ch}(x)}}{\cos(x) - \mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 4.

Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f :]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est continûment dérivable.

Exercice 5.

Déterminer les développements limités suivants :

1) le $\mathrm{DL}_4(3)$ de $x \mapsto \ln x$ **2)** le $\mathrm{DL}_3(2)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice 6.

Déterminer les DL_3 au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$, **2)** $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 7.

Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3(x+2)}}{x-1}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

1) Ecrire un développement limité de $\dfrac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que l'application f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on déterminera et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8.

Étudier les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$.