Algèbre de base

Chapitre 1

Trigonométrie

Pré-requis

- ☐ Notion d'angles,
- ☐ Notion de repère orthonormé du plan, axe des abscisses, axe des ordonnées, coordonnées d'un point du plan,
- ☐ Théorèmes de Pythagore et de Thalès.

Objectifs

- ☐ Mesures d'un angle, mesure principale, radian, angles remarquables,
- ☐ Cosinus, sinus, tangente, valeurs remarquables et leurs propriétés,
- ☐ Formules de trigonométrie,
- ☐ Équations trigonométriques.

Sommaire

Cercle trigonométrique et angles

1 Cercle trigonométrique et angles remarquables

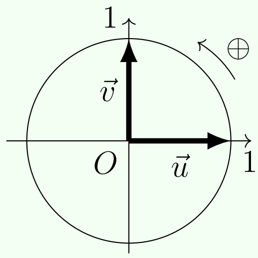
Le cercle trigonométrique permet de définir, visualiser et mémoriser facilement des notions de trigonométrie telles que le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

Dans toute la suite, on considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

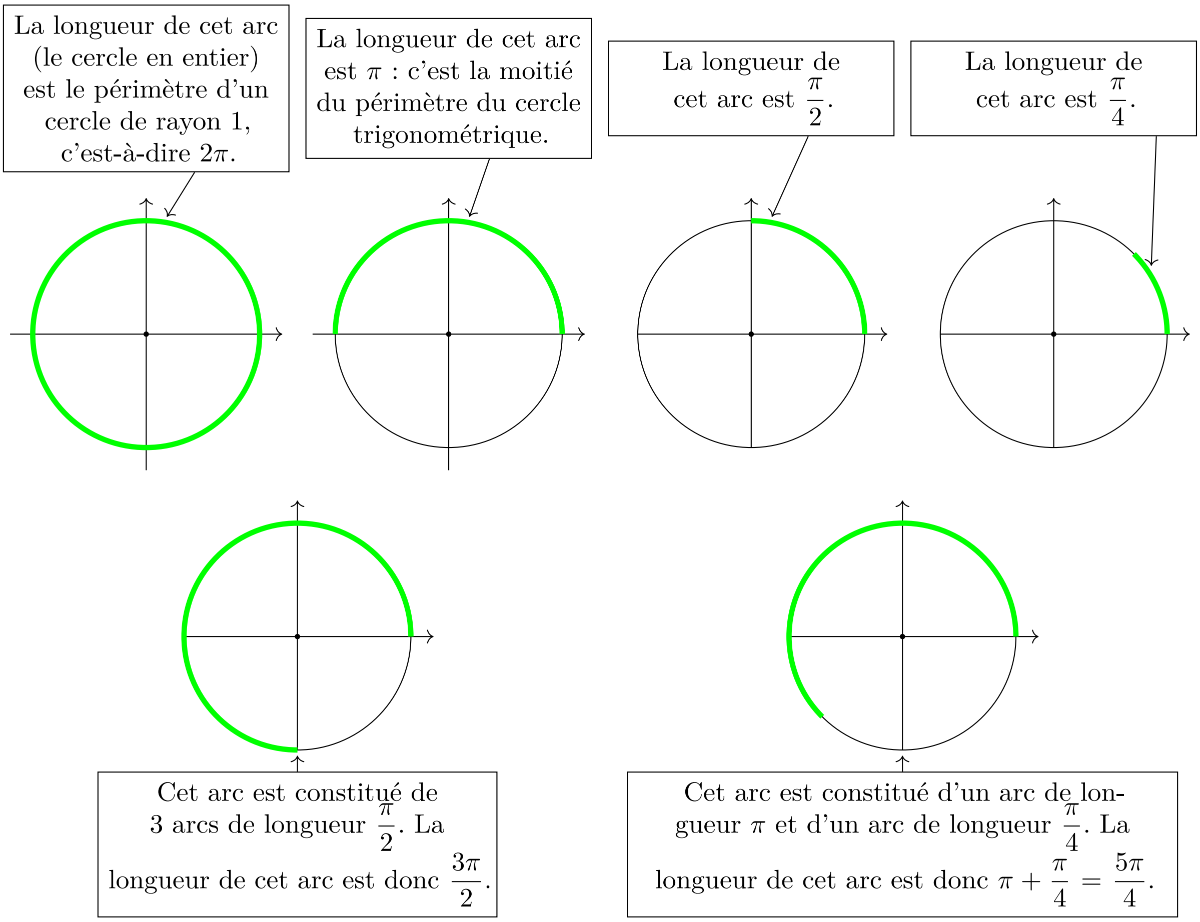
Définition : *Cercle trigonométrique*

On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.

Il est **orienté positivement** : les angles positifs sont lus dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé **sens trigonométrique**).

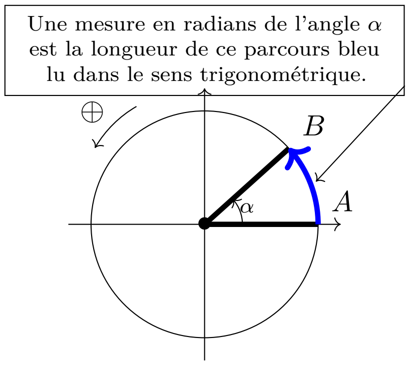


Rappel

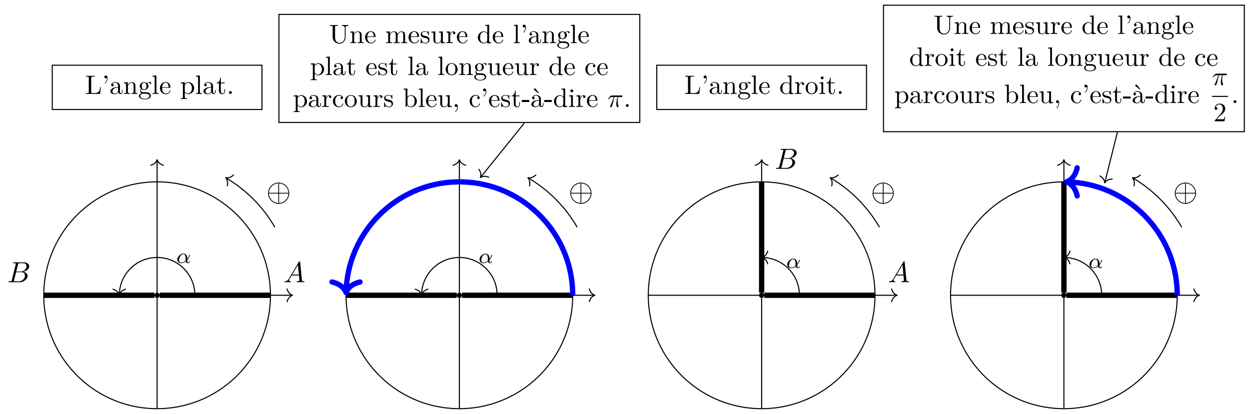


Définition : *Radians*

Une mesure en **radians** d'un angle est la longueur orientée d'un parcours sur le cercle trigonométrique partant de A et arrivant à B.



Exemples – *Mesures d'angles*

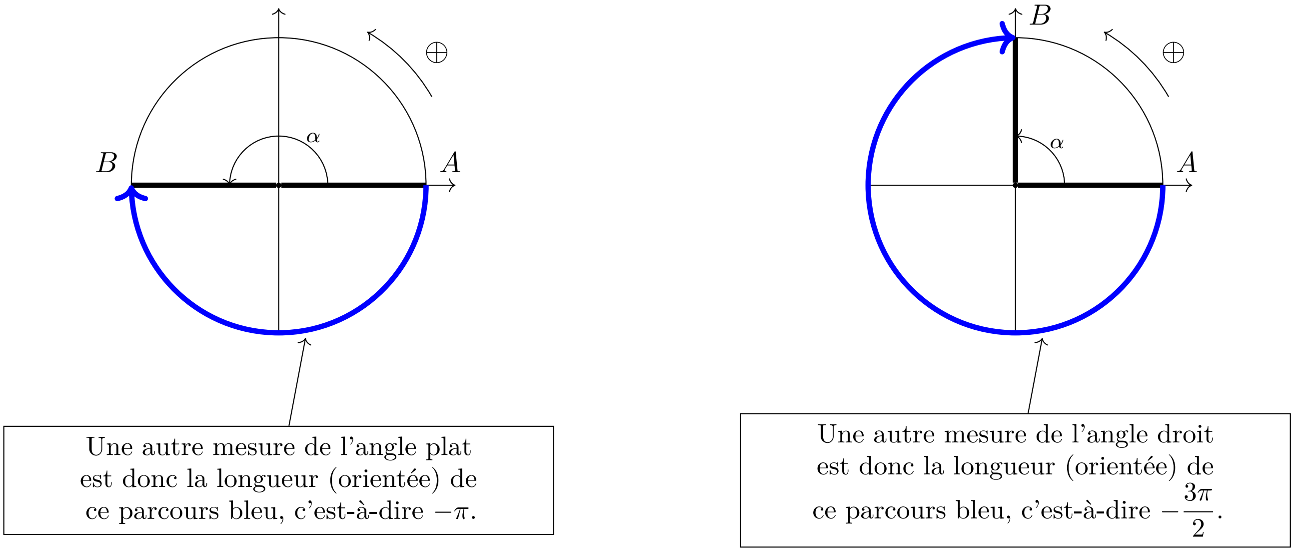


Remarque

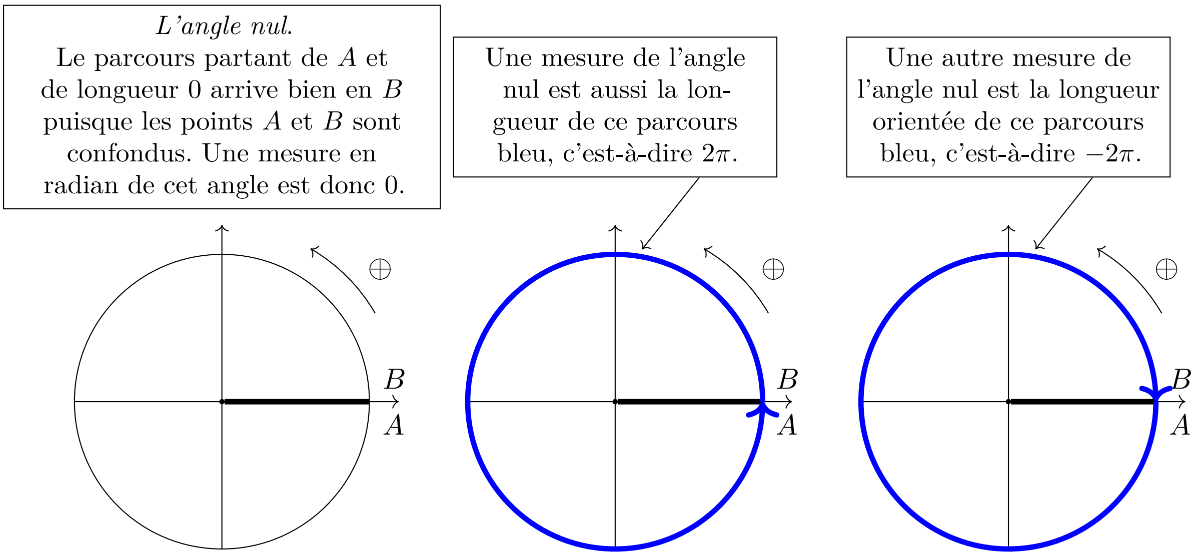
On peut parcourir le cercle trigonométrique dans le sens inverse du sens trigonométrique. La longueur d'un parcours est alors négative.

Exemples – *Mesures négatives d'angles*

Le parcours de A à B le long du cercle trigonométrique peut se lire dans le sens négatif.



Exemples – *Différentes mesures d'un angle*



Remarques

Pour un point B du cercle trigonométrique, on peut considérer différents parcours :

- ▷ tourner dans le sens positif jusqu'à rencontrer B, ce qui donne une mesure d'angle *positive* entre 0 et 2π.
- ▷ tourner dans le sens négatif jusqu'à rencontrer B, ce qui donne une mesure d'angle *négative* entre -2π et 0.
- ▷ effectuer plusieurs tours (dans un sens ou dans l'autre) avant de s'arrêter sur B. Un tour complet étant de longueur 2π, il suffira alors d'ajouter $k \times 2\pi$ (ce que l'on note $2k\pi$) à la longueur jusqu'ici parcourue, où k est le nombre de tours supplémentaires.

Notations

On rappelle que l'on note :

- ▷ $\mathbb{N}$, l'**ensemble des entiers naturels**,
- ▷ $\mathbb{Z}$, l'**ensemble des entiers relatifs**,
- ▷ $\mathbb{Q}$, l'**ensemble des rationnels**,
- ▷ $\mathbb{R}$, l'**ensemble des nombres réels**.

De plus, le symbole « $\in$ » signifie « appartient ». Par exemple, on écrit

- ▷ « $n \in \mathbb{N}$ » pour signifier que n est un entier naturel,
- ▷ « $k \in \mathbb{Z}$ » pour signifier que k est un entier relatif.

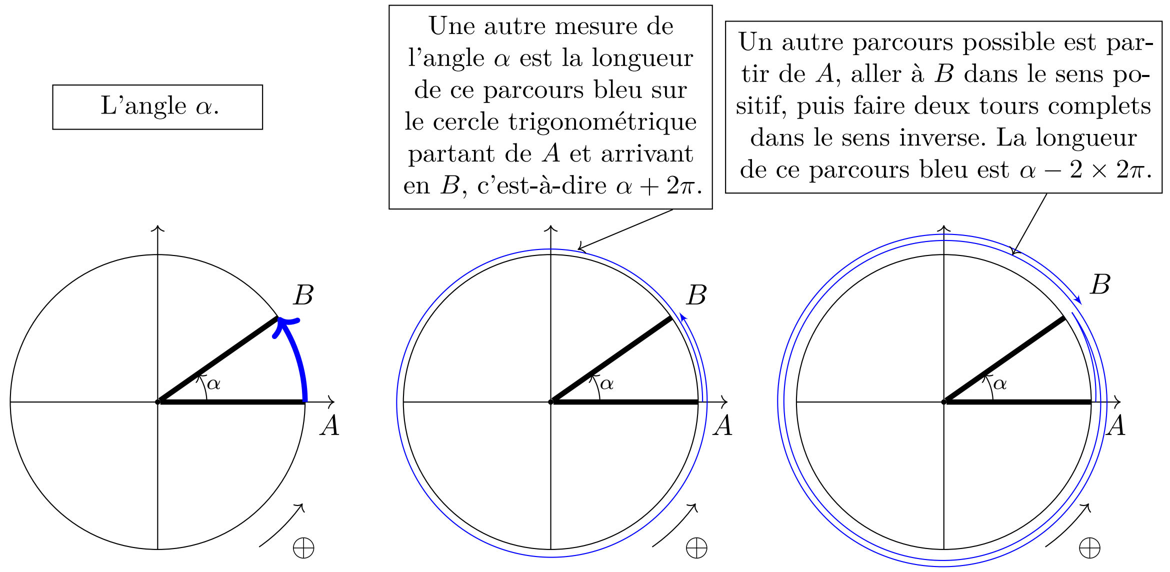
Remarques

- ▷ Les entiers naturels sont les entiers positifs ou nuls : $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- ▷ Les entiers relatifs, ou **les entiers** (sans autre précision), sont les entiers positifs, négatifs ou nuls : $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.
- ▷ Les rationnels sont les nombres réels qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers : $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.

Remarque

Dans le cas qui nous intéresse, k étant un nombre de tours complets de cercle trigonométrique effectués dans un sens ou un autre, c'est bien un entier relatif et on note $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples



Méthode

Soit un angle de mesure α.
Pour trouver toutes les mesures de cet angle, il suffit d'y ajouter $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, toutes les mesures de l'angle α sont

$$\alpha + 2k\pi, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1.

Soient les angles suivants :

$$\alpha := \pi, \quad \beta := \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \gamma := -\frac{3\pi}{4}.$$

1) Donner quatre mesures différentes de chacun des angles.

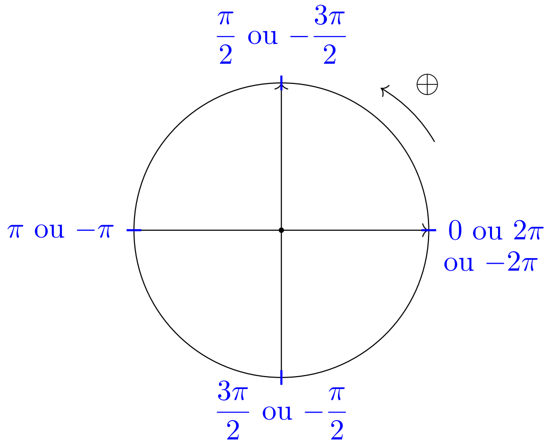
2) Donner toutes les mesures de chacun des angles.

Notation

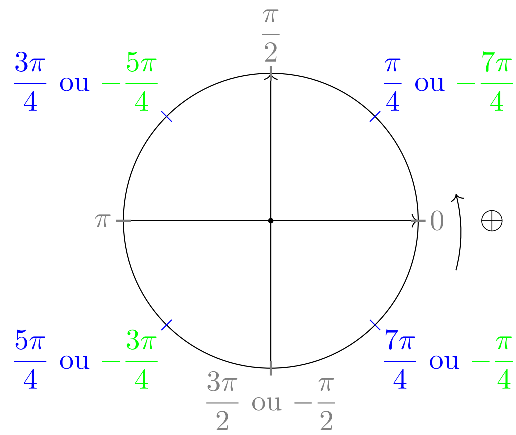
La notation $:=$ est utilisée pour les définitions (ou affectations), contrairement aux égalités classiques.

Méthode – *Les angles remarquables*

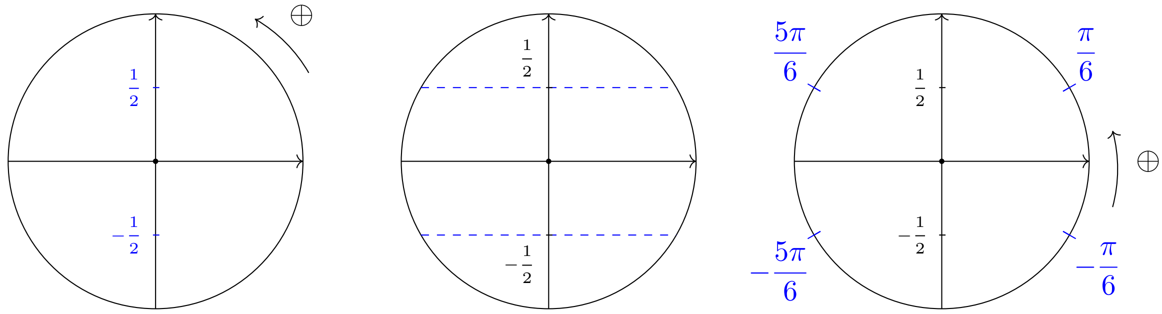
1. Les angles 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π sont faciles à placer.



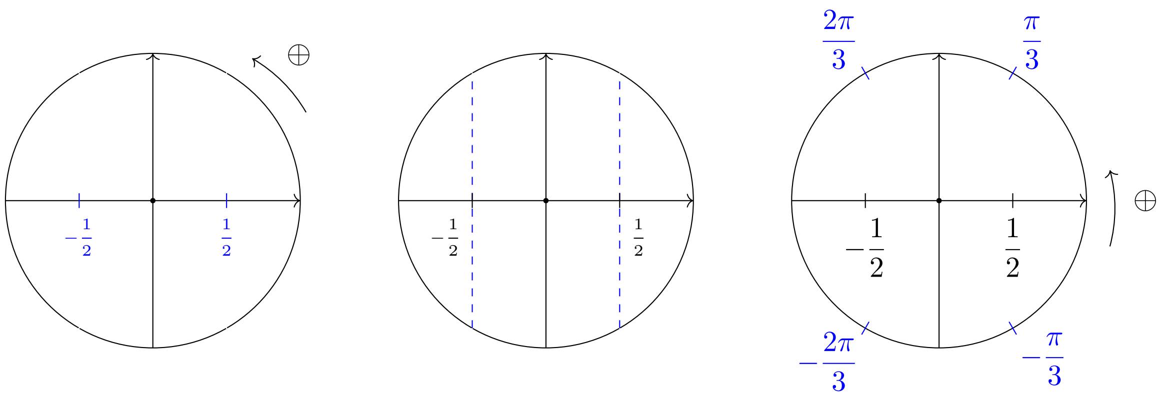
2. On en déduit les angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$ (bissectrices).



3. Les angles $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des abscisses, d'ordonnées $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$:



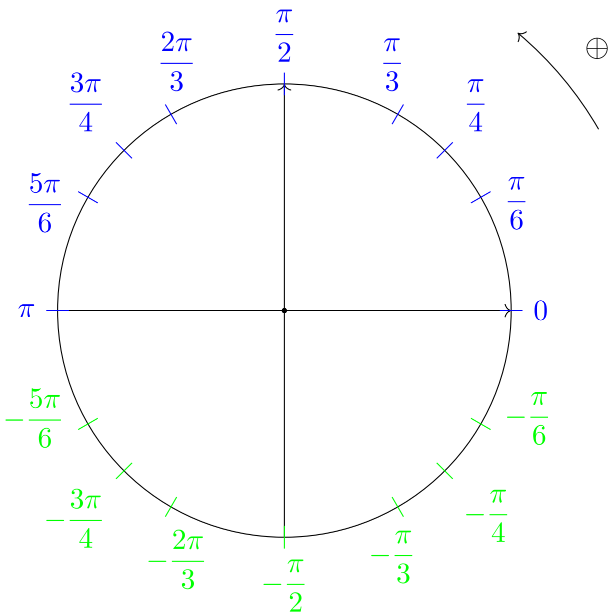
4. Les angles $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des ordonnées, d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$:



Définition

On appelle **mesure principale** d'un angle sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Les angles remarquables et leurs mesures principales.

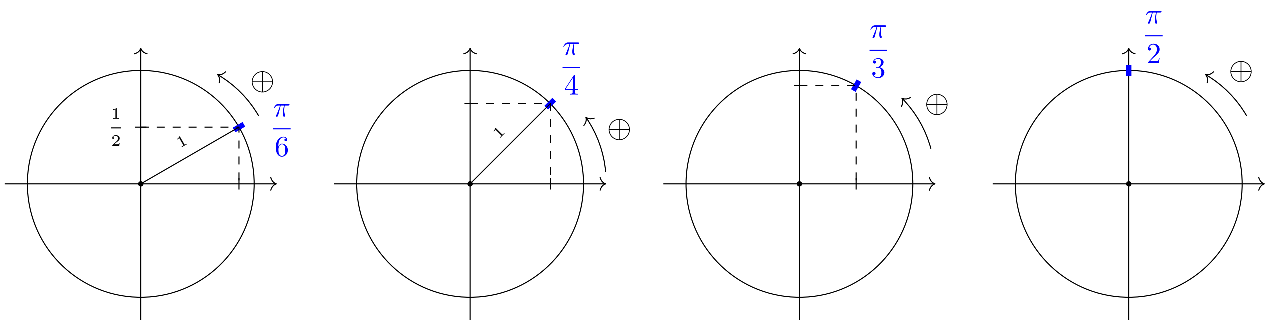


2 Cosinus, sinus et tangente

Exercice 2.

Calculer les coordonnées (abscisses et ordonnées) de tous les points signalés sur les cercles trigonométriques ci-dessous.

1) **2)** **3)** **4)**



Soient A le point de coordonnées $(1,0)$ dans le repère orthonormé et M un point du cercle trigonométrique.

Notons α l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, c'est-à-dire $\alpha \coloneqq (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

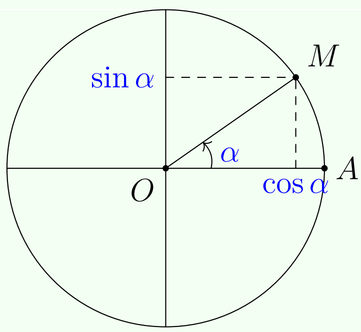
Définitions : *Sinus et cosinus*

On appelle respectivement **cosinus** et **sinus** de l'angle α, notés $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, l'abscisse et l'ordonnée du point M :

$$\cos\alpha \coloneqq \text{abscisse } (M)$$

et

$$\sin\alpha \coloneqq \text{ordonnée}(M).$$

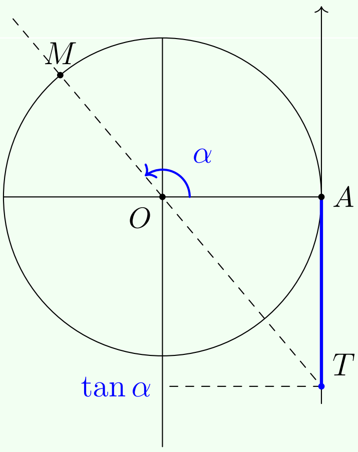


Définition : *Tangente*

On appelle l'**axe des tangentes** la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A.

Si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la droite (OM) rencontre l'axe des tangentes en T : on appelle **tangente** de l'angle α, notée $\tan\alpha$, la longueur orientée $\overline{AT}$:

$$\tan\alpha \coloneqq \text{ordonnée}(T) = \overline{AT} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$



Remarque – *Domaine de définition de la tangente*

Alors que $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont définis pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tan\alpha$ n'est définie que pour tout $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

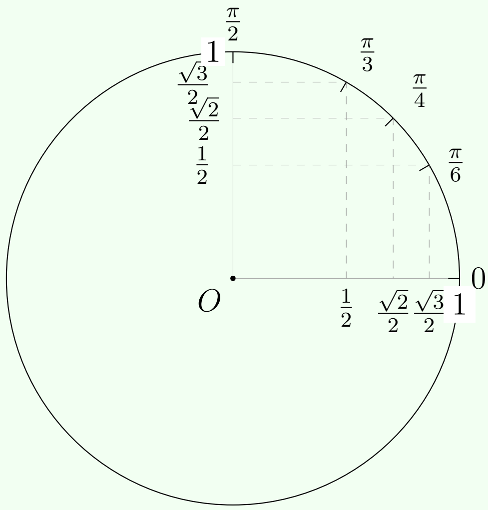
Cette condition s'explique de deux façons :

- ▷ Si $\alpha \coloneqq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos\alpha = 0$ et on ne peut donc pas écrire $\tan\alpha = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
- ▷ Si $\alpha \coloneqq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors l'axe des tangentes est parallèle à la droite qui définie l'angle α et il n'y a donc pas de point d'intersection.

Exemples

- ▷ Pour $\alpha \coloneqq \dfrac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ n'est pas définie.
- ▷ Pour $\alpha \coloneqq \pi$, on a $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, et $\tan\alpha = 0$.

Propriété : *Valeurs remarquables des* cos, sin *et* tan *à connaître*



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

Exercice 3.

Pour chacune des quatre configurations ci-dessous, représenter sur le cercle trigonométrique l'angle, le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle donné :

1) $0 < \alpha_1 < \pi/2$, **2)** $\pi/2 < \alpha_2 < \pi$, **3)** $\pi < \alpha_3 < 3\pi/2$, **4)** $-\pi/2 < \alpha_4 < 0$.

Exercice 4. — *À savoir faire absolument*

1) Représenter un cercle trigonométrique (ne pas oublier l'orientation).

2) Représenter (rigoureusement) sur ce cercle, tous les angles remarquables.

3) Faire apparaître sur ce cercle, toutes les valeurs remarquables (le cosinus et le sinus de ces angles).

3 Propriétés

Les définitions de sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique impliquent naturellement les propriétés suivantes.

Propriétés : *Propriétés fondamentales des fonctions cosinus et sinus*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1, \qquad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

et

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Puisque la valeur d'un cosinus ou d'un sinus ne dépend pas du choix de la mesure de l'angle, on a le résultat dit de **périodicité** ci-dessous.

Propriétés : *Périodicité*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha.$$

De plus, si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \tilde{k}\pi$, où $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha.$$

Exercice 5.

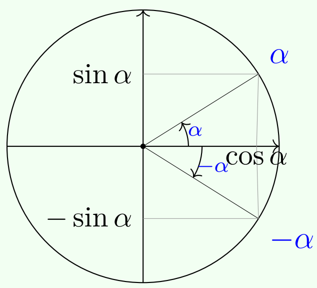
Compléter le tableau suivant :

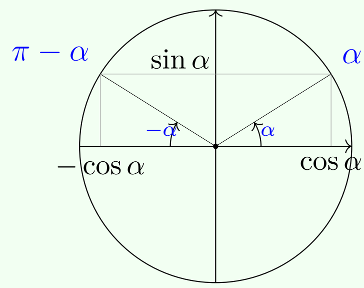
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$						
Mesure principale										
$\cos x$					$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		-1
$\sin x$					$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan x$									$-\sqrt{3}$	0

Propriétés

Par lecture sur le cercle trigonométrique, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha & \textit{et} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha & \textit{et} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha. \end{cases}$$





Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) **a)** $\alpha_1 = 3\pi$, $\alpha_2 = -\pi$, $\alpha_3 = 5\pi$, $\alpha_4 = -3\pi$.

b) $\beta_1 = \frac{7\pi}{3}$, $\beta_2 = -\frac{5\pi}{3}$, $\beta_3 = \frac{13\pi}{3}$, $\beta_4 = -\frac{11\pi}{3}$.

c) $\gamma_1 = \frac{5\pi}{4}$, $\gamma_2 = -\frac{19\pi}{4}$, $\gamma_3 = -\frac{11\pi}{4}$, $\gamma_4 = \frac{13\pi}{4}$.

2) Donner toutes les mesures des angles :

a) $\alpha_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

b) $\beta_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

c) $\gamma_k = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'Exercice 2.

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$. D'après la figure, l'ordonnée est $\frac{1}{2}$. Soit x l'abscisse.
D'après le théorème de Pythagore, on a

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2,$$

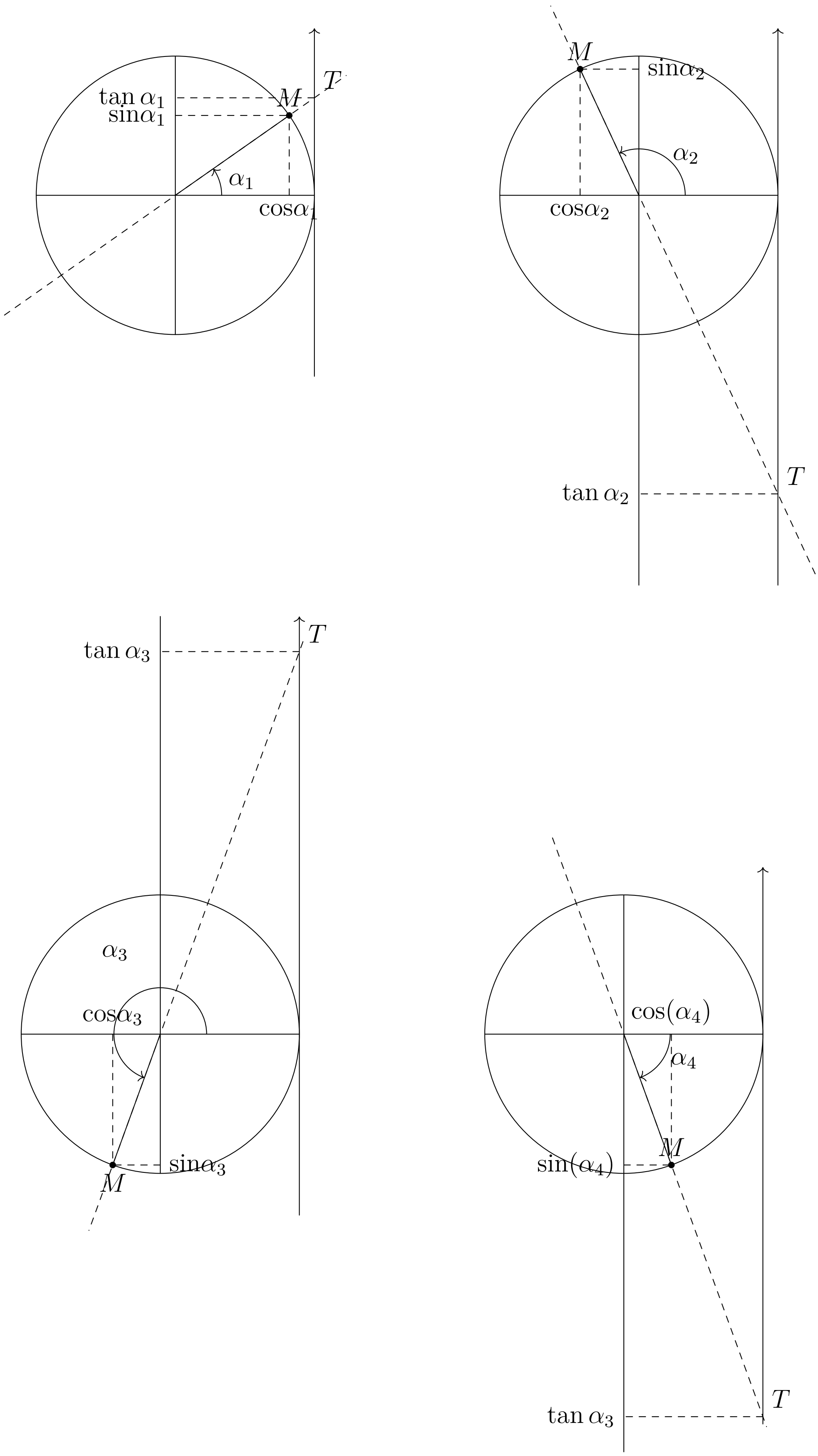
c'est-à-dire : $x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, d'après la figure, $x \geq 0$ donc $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les coordonnées du point sont donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$. D'après la figure, l'ordonnée et l'abscisse ont la même valeur. Soit x cette valeur.
D'après le théorème de Pythagore, on a $x^2 + x^2 = 1^2$, c'est à dire : $2x^2 = 1$.
Ainsi, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, d'après la figure, $x \geq 0$ donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les coordonnées du point sont donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

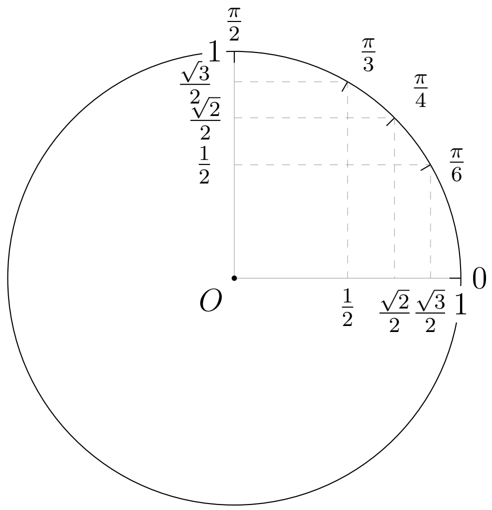
3) $\alpha = \frac{\pi}{3}$. D'après la figure, l'abscisse est $\frac{1}{2}$. Soit y l'ordonnée.
D'après le théorème de Pythagore, on a $y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$, c'est à dire : $y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Ainsi, puisque $y \geq 0$ d'après la figure, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les coordonnées du point sont donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4) $\alpha = \frac{\pi}{2}$. D'après la figure, on a directement les coordonnées $(0, 1)$.

Correction de l'Exercice 3.



Correction de l'Exercice 4.



Correction de l'Exercice 5.

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$						
Mesure principale	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\cos(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\tan(x)$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	/	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	/	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0

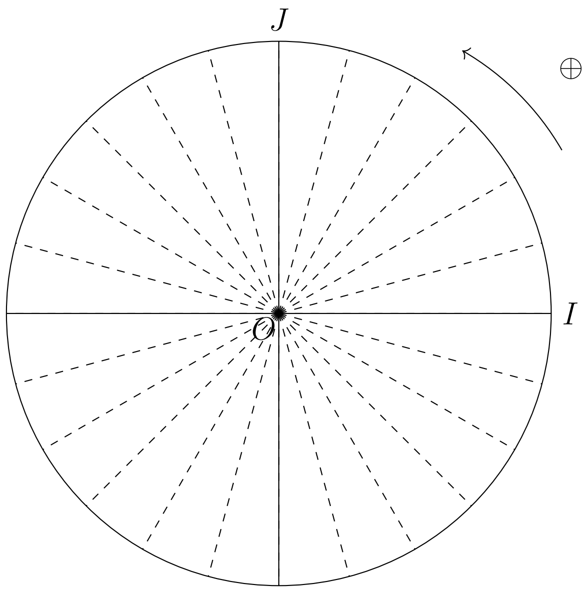
Chapitre 1

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

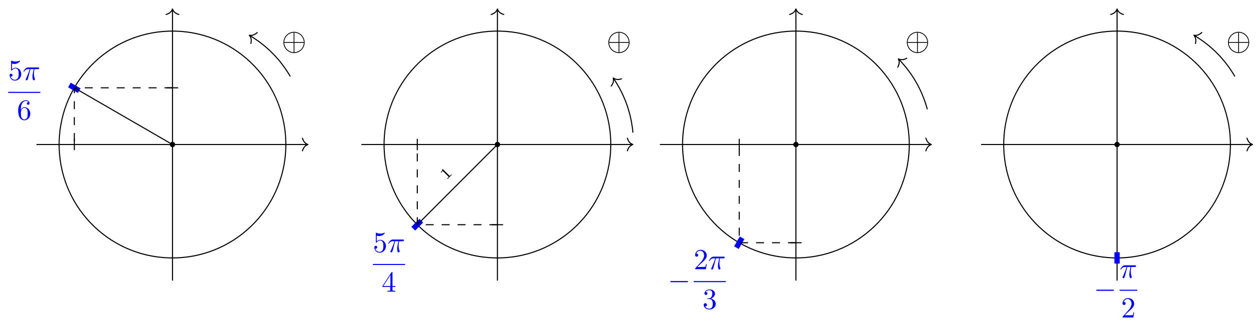
Placer sur le cercle trigonométrique les points ci-dessous.

- ▷ Le point A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \pi/2$.
- ▷ Le point B tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \pi$.
- ▷ Le point C tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \pi/6$.
- ▷ Le point D tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD}) = 3\pi/2$.
- ▷ Le point E tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) = \pi/4$.
- ▷ Le point F tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}) = -3\pi/2$.
- ▷ Le point G tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}) = \pi/3$.



Exercice 2.

Calculer les coordonnées (abscisses et ordonnées) de tous les points signalés sur les cercles trigonométriques ci-dessous.



Exercice 3.

Donner le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants :

1) $\dfrac{7\pi}{6}$, **2)** $\dfrac{5\pi}{3}$, **3)** $-\dfrac{11\pi}{6}$, **4)** $-\dfrac{5\pi}{4}$, **5)** $\dfrac{5\pi}{2}$,

6) $\dfrac{10\pi}{3}$, **7)** $-\dfrac{15\pi}{6}$, **8)** $-\dfrac{9\pi}{2}$, **9)** -55π, **10)** $\dfrac{22\pi}{4}$.

Exercice 4.

Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	28π	$-\frac{11\pi}{3}$				
Mesure principale										
$\cos x$							0	$-\frac{1}{2}$		-1
$\sin x$							1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan x$									$-\sqrt{3}$	0

Exercice 5.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier les propriétés suivantes :

1) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, **2)** $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, **3)** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Exercice 6.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier que si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Exercice 7.

1) Sur un cercle trigonométrique, placer un angle α.

2) Représenter sur ce même cercle les angles suivants :

a) $\beta_1 := -\alpha$. **b)** $\beta_2 := \frac{\pi}{2} + \alpha$. **c)** $\beta_3 := \pi + \alpha$. **d)** $\beta_4 := \pi - \alpha$.

3) Donner alors les valeurs de cosinus et sinus de chacun de ces angles en fonction de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$.

Exercice 8.

1) Rappeler la relation fondamentale de trigonométrie entre $\cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha$.

2) Déterminez $\cos\alpha$ sachant que $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\cos\alpha \geq 0$.

3) Déterminez $\cos\alpha$ sachant que $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ et $\cos\alpha \geq 0$.

4) Déterminez $\cos\alpha$ sachant que $\sin\alpha = \frac{1}{10}$ et $\cos\alpha \leq 0$.

5) Déterminez $\cos\alpha$ sachant que $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\cos\alpha \leq 0$.

Exercice 9.

On considère, pour $n \in \mathbb{Z}$, les expressions suivantes :

a) $\cos(n\pi)$, **b)** $\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, **c)** $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Pour chacune de ces expressions,

1) donner les valeurs de ces expressions, pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ puis pour $n = -1,\ -2,\ \ldots$

2) donner alors une formulation condensée de l'expression.

Chapitre 1 - Séquence 2

Équations trigonométriques et formules d'addition

4 Équations trigonométriques élémentaires

Définition : *Équation trigonométrique - Niveau 1*

On appelle **équation trigonométrique de niveau 1** une équation de la forme :

- ▷ $\cos x = a$,
- ▷ $\sin x = b$,
- ▷ $\tan x = c$,

où a est le cosinus d'un angle remarquable, b est le sinus d'un angle remarquable et c est la tangente d'un angle remarquable. Enfin, x est un angle inconnu que l'on cherche à déterminer.

La résolution d'une équation trigonométrique de niveau 1 est assez simple comme on peut le voir avec l'exercice ci-dessous.

Exercice 1.

1) Représenter sur un cercle trigonométrique le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2) Représenter sur le cercle trigonométrique tous les angles dont le sinus vaut $\dfrac{1}{2}$.

3) Donner une mesure de ces angles. En déduire toutes les mesures de ces angles.

4) En déduire les solutions de l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Méthode – *Résolution d'équation trigonométrique de niveau 1*

1. Utiliser le cercle trigonométrique pour obtenir les solutions évidentes (il y en a 2 ou 1 seule).
2. Ajouter $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) aux solutions trouvées.

Exemple

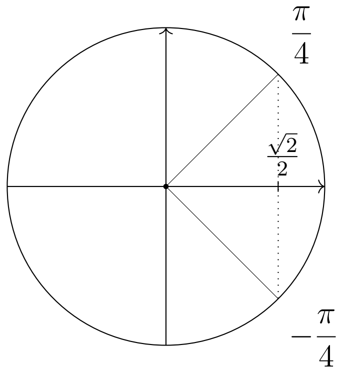
On veut résoudre l'équation : $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Sur le cercle trigonométrique, deux angles remarquables ont pour cosinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
Les solutions de cette équation sont donc tous les angles de la forme :

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Toutes les solutions forment un ensemble $\mathcal{S}$ que l'on écrit

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



Notations : *Ensembles et réunion*

Notons que l'ensemble des solutions de l'exemple précédent est donné sous la forme suivante de la réunion de deux ensembles :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

▷ Chacun des ensembles se lit via la notation $\{\quad \mid \quad\}$ comme suit :

$$\left\{ \underbrace{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \;\mid\; \underbrace{k \in \mathbb{Z}} \right\}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble}}\ \boxed{\text{des éléments de la forme } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}\ \boxed{\text{tels que}}\ \boxed{k \text{ vérifie } k \in \mathbb{Z}}$$

▷ De façon générale, si E est un ensemble connu, on a :

$$\left\{ \underbrace{x \in E} \;\mid\; \underbrace{P(x)} \right\}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble}}\ \boxed{\text{des éléments } x \text{ appartenant à } E}\ \boxed{\text{tels que}}\ \boxed{x \text{ vérifie la propriété } P}$$

▷ La **réunion** de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ et qui se lit « A union B », est l'ensemble :

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

Ce qui signifie que $A \cup B$ contient tous les éléments de A comme de B.

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = 1$, **2)** $\cos x = -1$, **3)** $\tan x = 0$,

4) $\cos x = -\frac{1}{2}$, **5)** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, **6)** $\tan x = -\sqrt{3}$.

Notation

L'ensemble qui ne contient *aucun* élément est appelé l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$.

Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = 3$ est $\mathcal{S} = \emptyset$.
En effet, toute équation du type $\sin x = a$ (ou $\cos x = a$) où $a < -1$ ou $a > 1$ (on note $|a| > 1$), n'admet pas de solution donc a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \emptyset$.

5 Équations trigonométriques de niveau 2

Définition : *Équation trigonométrique - Niveau 2*

On appelle **équation trigonométrique de niveau 2** une équation d'inconnue x et ayant l'une des formes suivantes :

- ▷ $\cos X = \cos Y$,
- ▷ $\sin X = \sin Y$,
- ▷ $\tan X = \tan Y$,

où X est une expression dépendant de x et Y est une expression pouvant dépendre de x.

Exemples

Les équations ci-dessous sont toutes des équations trigonométriques de niveau 2 :

- ▷ $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{2}$,
- ▷ $\tan x = \tan \dfrac{\pi}{6}$,
- ▷ $\tan x = \tan(4x - 1)$,
- ▷ $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$,
- ▷ $\cos(2x) = \cos(3x + 2)$,
- ▷ $\sin(3x) = \sin(2x)$.

Proposition

- ▷ *Les solutions de* $\cos X = \cos Y$ *vérifient*

$$X = Y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \textit{ou} \quad X = -Y + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}.$$

- ▷ *Les solutions de* $\sin X = \sin Y$ *vérifient*

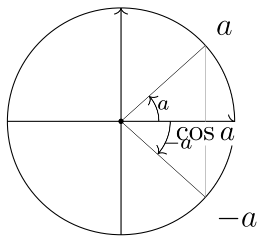
$$X = Y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \textit{ou} \quad X = \pi - Y + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}.$$

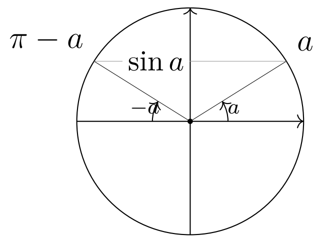
- ▷ *Les solutions de* $\tan X = \tan Y$ *vérifient*

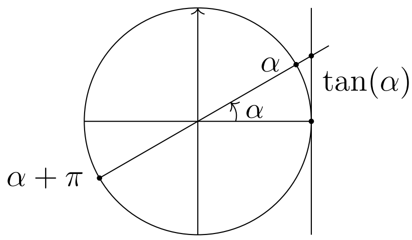
$$X = Y + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque

Ces résultats se retrouvent facilement sur le cercle trigonométrique :







Exemples

- ▷ On veut résoudre l'équation $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$. D'après la proposition, on a

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- ▷ On veut résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(3x)$. D'après la proposition, on a

$$2x = 3x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad 2x = -3x + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui donne

$$-x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad 5x = 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{-2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Notons que la dernière égalité est une conséquence du fait que k est un entier relatif.

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$, **2)** $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, **3)** $\tan x = \tan \frac{\pi}{6}$,

4) $\cos(2x) = \cos(3x+2)$, **5)** $\tan x = \tan(4x-1)$, **6)** $\sin(3x) = \sin(2x)$.

6 Formules d'addition

Propriétés

Soient a et b deux réels. On a :

▷ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, ▷ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Exercice 4.

À l'aide des propriétés précédentes, déterminer les valeurs de :

1) $\cos(a-b)$,

2) $\sin(a-b)$.

Exercice 5.

Soit a un réel.

1) Montrer que : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$.

2) Montrer que : $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

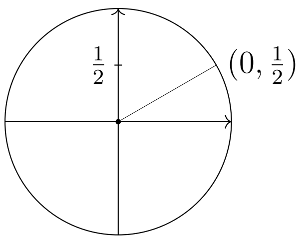
3) Supposons que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

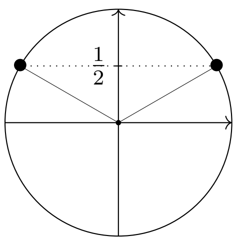
Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Représenter sur un cercle trigonométrique le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.



2) Représenter sur le cercle trigonométrique tous les angles dont le sinus vaut $\frac{1}{2}$.



3) Les deux angles ont pour mesures principales : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Toutes les mesures de ces angles sont donc

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4) On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ est

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction de l'Exercice 2.

1) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

4) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont : $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1) $\sin x = \sin\frac{\pi}{2}$: la formule donne directement : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$: la formule donne directement : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3) $\tan x = \tan \dfrac{\pi}{6}$: la formule donne directement : $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

,

4) $\cos(2x) = \cos(3x+2)$: la formule donne directement : $2x = 3x + 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -(3x+2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- ▷ $2x = 3x + 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = -2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ $2x = -(3x+2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = -\dfrac{2}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{-2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{2}{5} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5) $\tan x = \tan(4x-1)$: la formule donne directement : $x = 4x - 1 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{k}{3}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{k}{3}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6) $\sin(3x) = \sin(2x)$: la formule donne directement : $3x = 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $3x = -2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- ▷ $3x = 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ $3x = -2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = \dfrac{2k}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{2k}{5}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Correction de l'Exercice 4.

1) $\cos(a-b) = \cos(a + (-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

2) $\sin(a-b) = \sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Correction de l'Exercice 5.

1) $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

2) $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$.

3) Supposons que $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} &= \frac{2\,\frac{\sin a}{\cos a}}{1 - \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2} = \frac{2 \sin a}{\cos a \left(1 - \left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2\right)} \\
&= \frac{2 \sin a \cos^2 a}{\cos a \left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)} = \frac{\sin(2a)}{\cos(2a)} = \tan(2a).
\end{aligned}$$

Chapitre 1

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

1) Sur le cercle trigonométrique, représenter un angle α, son cosinus et son sinus.

2) Représenter ensuite l'angle $\pi + \alpha$.

3) En déduire son cosinus et son sinus en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Exercice 2.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = 0$, **2)** $\cos x = 1$, **3)** $\tan x = 0$,

4) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, **5)** $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, **6)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

7) $\cos x = -1$, **8)** $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, **9)** $\tan x = 1$.

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$, **2)** $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$, **3)** $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$,

4) $\sin(3x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}$, **5)** $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, **6)** $\sin x = \tan x$,

7) $\tan(5x) = 1$, **8)** $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$, **9)** $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$.

Exercice 4.

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(x + \pi)$, **b)** $\cos(x - \pi)$, **c)** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

d) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, **e)** $\sin(x + \pi)$, **f)** $\sin(x - \pi)$,

g) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, **h)** $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) En utilisant l'une des expressions simplifiées ci-dessus, résoudre l'équation

$$\cos(4x) + 2\sin x \cos x = 0.$$

3) Montrer que $\cos(x + \pi)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(-x) = -1$.

4) Montrer que $\tan(x - \pi) - \tan x = 0$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 5.

Résoudre l'équation suivante :

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1 = 0,$$

Indications :

- ▷ Mettre l'équation sous la forme $\cos a \cos x - \sin a \sin x = \frac{1}{2}$.
- ▷ A l'aide des formules d'addition, résoudre l'équation obtenue.

Exercice 6.

Soit a un réel.

1) Donner une expression de $\cos(2a)$.

2) En factorisant par $\cos^2 a$ et en remarquant que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, montrer que :

$$\cos(2a) = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}.$$

3) En posant $x := 2a$, montrer que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4) En procédant de la même façon, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}.$$

Exercice 7.

Soit a et b deux réels. On pose $p := a + b$ et $q := a - b$.

1) Exprimer a et b en fonction de p et q.

2) Donner une expression de $\cos p$ et $\cos q$ en fonction des cosinus et des sinus de a et b.

3) Calculer $\cos p + \cos q$ et montrer que

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

4) En procédant de la même façon, montrer que

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$