Mise à niveau pour l'entrée dans

une licence scientifique

Mathématiques

Cours et exercices corrigés

Valentina Lanza & David Manceau

Avant propos

Cet ouvrage est destiné à donner les bases mathématiques nécessaires à l'entrée dans les études supérieures scientifiques.

Ce livre est issu d'un cours que nous enseignons depuis 2013 à l'université Le Havre Normandie dans la filière DUPrES (Diplôme Universitaire de Préparation aux Études Scientifiques). Ce cours s'adresse à tout étudiant dont les connaissances en mathématiques ne sont pas suffisantes pour bien entamer des études supérieures scientifiques. Ainsi, celui-ci commence avec des notions basiques issues du collège et, progressivement, aborde les notions de niveau terminale.

Ce livre se veut autonome et donc ne nécessite pas, a priori, de connaissances préalables en dehors de celles du collège. Le contenu de chaque chapitre est en adéquation avec les bases nécessaires à la plupart des programmes de première année scientifique du supérieur.
L'ensemble est décomposé en 18 chapitres, chacun contenant une partie cours et une partie exercices. De plus, la partie cours contient elle-même des exercices destinés à illustrer les notions abordées et ainsi d'aider à maîtriser le cours. Une correction détaillée de ces exercices est donnée en fin de chapitre afin de vérifier que les notions ont été bien acquises et afin de savoir comment les utiliser au mieux. La partie exercices (supplémentaires) apparaît en fin de chapitre. Ces exercices supplémentaires servent d'entraînement afin de consolider les notions abordées dans le cours. Les corrigés de ces exercices sont disponibles à l'adresse suivante :

`https://lmah.univ-lehavre.fr/~manceau/Lanza_Manceau/`

Ce livre a été structuré de sorte que les différents chapitres alternent les notions d'algèbre, d'analyse et de géométrie, excepté pour les deux derniers chapitres qui concernent les probabilités. Ce choix délibéré provient d'une part d'une volonté d'enseigner ces trois spécialisations tout au long de l'année en cours et, d'autre part, car bien souvent certaines notions de l'une des spécialisations s'avèrent nécessaires pour l'une des autres spécialisations. Néanmoins, il n'est jamais précisé particulièrement si un chapitre est plutôt orienté algèbre ou analyse ou géométrie. Les cours de chaque chapitre, ainsi que les corrigés des exercices, sont détaillés autant que possible pour en faciliter la compréhension pour tout étudiant travaillant seul sur ce livre. Cependant, les calculs provenant des notions les plus basiques sont de moins en moins détaillés suivant la progression des chapitres.

La rédaction de cet ouvrage n'aurait pas été possible sans l'apport de nombreux collègues. Nous souhaitons tout d'abord remercier Arnaud Prigent qui nous a encouragés dans la rédaction de ce cours en tant que responsable de la filière DUPrES. Nous remercions aussi Sébastien Orange qui fut le premier à enseigner le cours de mathématiques de cette filière et qui nous a permis de poser les bases de ce cours en nous transmettant son propre cours. Plusieurs des chapitres de ce livre sont en partie issus du cours de L1 MISMI (Mathématiques, Informatique Sciences de la Matière et de l'Ingénieur) de l'université Le Havre Normandie. Ainsi, ils doivent beaucoup à nos collègues : Martin Cadivel, Nathalie Corson, Cédric Joncour et Anne-Sophie Lemaire, nous les remercions bien chaleureusement. Enfin, une grand merci particulier à Nathalie qui a accepté de relire entièrement cet ouvrage permettant ainsi d'en corriger de nombreuses fautes de frappe et d'en améliorer le contenu.

Table des matières

CHAPITRE 1

Rappels sur le calcul numérique

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base du calcul numérique : les priorités de calcul, les notions de développement et de factorisation, ainsi que le calcul littéral, les fractions et les puissances.

Sommaire

1 Nombres entiers et priorités de calcul

Rappelons tout d'abord la définition des nombres entiers.

Définition : *Nombres entiers*

▷ Les nombres **entiers naturels** sont les nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

▷ Les nombres **entiers relatifs** (ou simplement **entiers**) sont les nombres

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

On liste ci-après quelques propriétés du calcul avec les nombres entiers que l'on utilise généralement de façon intuitive.

Propriétés : *Associativité et commutativité*

- *L'addition et la multiplication d'entiers sont* ***associatives*** *:*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \textit{et} \qquad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

pour tous entiers a, b et c.

- *L'addition et la multiplication d'entiers sont* ***commutatives*** *:*

$$a+b = b+a \qquad \textit{et} \qquad a \times b = b \times a$$

pour tous entiers a et b.

L'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication impliquent qu'en effectuant *uniquement* des additions ou *uniquement* des multiplications, ces opérations peuvent être faites dans n'importe quel ordre :

$$4 \times 3 \times 5 = 4 \times 5 \times 3 = 3 \times 4 \times 5 = 3 \times 5 \times 4 = 5 \times 3 \times 4 = 5 \times 4 \times 3$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on peut commencer par la multiplication qui nous semble la plus simple (par exemple $3 \times 5 = 15$) puis effectuer ensuite la multiplication restante :

$$\underbrace{3 \times 5}_{=15} \times 4 = 15 \times 4 = 60$$

Propriétés : *Éléments neutres et opposé*

- *L'addition possède un* ***élément neutre****, le nombre 0, c'est-à-dire*

$$a+0 = 0+a = a$$

pour tout entier a.

- *La multiplication possède un élément neutre, le nombre 1, c'est-à-dire*

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

pour tout entier a.

- *Tout entier a possède un* ***opposé****, noté $-a$, qui vérifie*

$$a+(-a) = (-a)+a = 0$$

L'existence d'un opposé pour tout entier permet de définir la soustraction de deux entiers. Autrement dit, étant donnés deux entiers a et b, la **soustraction** de a

par b est définie par

$$a - b = a + (-b)$$

Ce qui signifie que soustraire un nombre c'est additionner son opposé. La soustraction vérifie les propriétés ci-dessous :

Propriétés : *Propriétés de la soustraction et de l'opposé*

Soient a et b deux entiers.

- ▷ $a - b = a + (-b) = -(-a + b) = -(b - a)$
- ▷ $a - (-b) = a + b$
- ▷ $a \times (-b) = -(a \times b) = (-a) \times b$
- ▷ $(-a) \times (-b) = a \times b$
- ▷ $-(-a) = a$

Exemples

Reprenons chacune des propriétés avec $a = 3$ et $b = 5$.

- ▷ $3 - 5 = -2 = -\underbrace{(-3 + 5)}_{=2} = -\underbrace{(5 - 3)}_{=2}$
- ▷ $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$
- ▷ $3 \times (-5) = -15 = -\underbrace{(3 \times 5)}_{=15} = (-3) \times 5$
- ▷ $(-3) \times (-5) = 3 \times 5 = 15$
- ▷ $-(-5) = (-5) \times (-1) = 5 \times 1 = 5$

Remarque

Nous n'avons pas encore parlé de la division, notée $\div$, et de ses propriétés. Celle-ci sera étudiée plus spécifiquement dans la section 3 consacrée aux fractions.

Lorsqu'un calcul comporte un mélange d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions et des parenthèses, il est nécessaire de savoir dans quel ordre effectuer toutes ces opérations. Pour cela, il existe des règles précises données ci-après.

Propriétés : *Règles de priorité*

Les calculs s'effectuent de gauche à droite dans l'ordre suivant :

1) *en premier les parenthèses,*

2) *puis les multiplications et les divisions,*

3) *enfin, les additions et les soustractions.*

Exemples

▷ Calcul avec une multiplication et une addition.

$$23+\underbrace{7\times 5}_{=35}=23+35=58$$

▷ Calcul avec une multiplication, une addition et des parenthèses.

$$\underbrace{(23+7)}_{=30}\times 5=30\times 5=150$$

Remarquons que l'ajout de parenthèses par rapport à l'exemple précédent a modifié l'ordre des opérations, et donc le résultat.

▷ Calcul (plus compliqué) avec une multiplication, une addition et des parenthèses.

$$12\times\underbrace{(8-3)}_{=5}+15=\underbrace{12\times 5}_{=60}+15=60+15=75$$

▷ Calcul comprenant une division.

$$\underbrace{8\div 2}_{=4}+3\times\underbrace{(4-5)}_{=-1}=4+3\times(-1)=4-3=1$$

▷ Calcul avec utilisation de la règle $-(-a)=a$.

$$\begin{aligned}15-\underbrace{(14-27)}_{=-13}+7\times 3&=15-(-13)+\underbrace{7\times 3}_{=21}=15\underbrace{-(-13)}_{=13}+21\\&=15+13+21=28+21=49\end{aligned}$$

Exercice 1.1

Effectuer les calculs ci dessous :

1) $2 - 3 \times 4$ **2)** $3 - 4 + 4 \times 1$

3) $(5 \times 5) + 0 - (2 - 4) + 3$ **4)** $24 + (12 \div 6) \times 3$

2 Développement et factorisation

Dans cette section, on introduit le calcul littéral, c'est-à-dire avec des lettres. On y présente les notions de *développement* et de *factorisation*, ainsi que les trois *identités remarquables*.

Propriétés : *Développements de produits*

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction. Autrement dit, pour tous entiers a, b et k, on a les relations suivantes :

▷ $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

▷ $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

▷ $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Remarque

Lorsque l'on travaille avec des lettres, en général on n'écrit pas le symbole $\times$. Ainsi, on écrit plutôt les formules précédentes sous la forme

▷ $k(a + b) = ka + kb$

▷ $k(a - b) = ka - kb$

▷ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples

Soient x et y deux entiers. Alors,

▷ $2(x + 8) - (x + 6) = 2x + 16 - x - 6 = x + 10$

▷ $(x - 3)(y - 1) = xy - x - 3y + 3$

La **factorisation** d'une expression mathématique est la démarche inverse de celle du développement. Autrement dit, la factorisation consiste à écrire une expression mathématiques en mettant en avant un facteur commun. Pour cela, on utilise les formules vues précédemment mais dans le sens inverse.

PROPRIÉTÉS : *Factorisation de produits*

Pour tous entiers a, b et k, on a les relations suivantes :

- $ka + kb = k(a + b)$
- $ka - kb = k(a - b)$
- $ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$

EXERCICE 1.2

Soient x et y deux entiers. Développer et simplifier (réduire à la forme la plus simple possible) les expressions ci-dessous :

1) $(4 - x) + (2 \times x)$ **2)** $4 - (x \times 2y) + 5$
3) $4x - (3 \times 2y + 5) - 2x \times 5y$ **4)** $(1 - x) \times (5 + y)$
5) $1 + (y \times 5x) - 2xy$ **6)** $(3 + 2x)(4 + y - 5(2 - y))$

Lorsque l'on multiplie un entier par lui même (on effectue $a \times a$), on utilise l'écriture simplifiée suivante :

DÉFINITION : *Carré d'un entier*

Le **carré** d'un entier a est l'entier donné par $a \times a$ et s'écrit a^2. Ainsi,

$$a^2 = a \times a$$

EXEMPLES

Les 9 premiers carrés d'entiers (utiles à connaître)

1) $1^2 = 1$ **2)** $2^2 = 4$ **3)** $3^2 = 9$
4) $4^2 = 16$ **5)** $5^2 = 25$ **6)** $6^2 = 36$
7) $7^2 = 49$ **8)** $8^2 = 64$ **9)** $9^2 = 81$

De plus, on retiendra le cas du carré de zéro : $0^2 = 0$.

Remarque : *Carré d'un entier négatif*

Pour tout entier a, on a

$$(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a \times a = a^2$$

On en déduit que le carré est toujours positif et que le carré de a et de $-a$ sont les mêmes.

Propriétés : *Identités remarquables*

Les règles de distributivité entraînent, entre autres, pour tous entiers a et b, les formules suivantes :

- ▷ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▷ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ▷ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration. Afin de mieux retenir ces formules il est utile de savoir les redémontrer. Celles-ci s'obtiennent très simplement.

- ▷ D'après les règles de distributivité, on a

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- ▷ Partant de l'égalité, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en remplaçant b par $-b$ on obtient

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + (-b)(-b) = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

- ▷ D'après les règles de distributivité, on a

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ainsi, on a bien montré les trois égalités. □

Exemples

Soit x un entier.

- ▷ En utilisant la deuxième identité (avec $a = x$ et $b = 5$), on obtient

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

▷ En utilisant la troisième identité (avec $a = x$ et $b = 2$), on obtient

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

Exercice 1.3

Soit x un entier. Développer et réduire les expressions ci-dessous :

1) $(5x+5)^2$

2) $(4x+10)(4x-10)$

3) $(10x-8)^2 + (4x+8)^2$

4) $(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3)$

Remarque

Comme dit précédemment, la factorisation est l'opération inverse du développement. Les identités remarquables données plus haut sont écrites sous la forme d'un développement. Sous une forme factorisée celles-ci sont données par

▷ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

▷ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,

▷ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemple

Soit x un entier. On souhaite factoriser $x^2 - 1$. On remarque que l'on a $1 = 1^2$, ainsi en utilisant la dernière identité remarquable, on obtient

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$$

Exercice 1.4

Factoriser les expressions suivantes :

1) $x^2 - 4$

2) $14x + 49x^2 + 1$

3) $x^2 - 4x$

4) $(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3)$

5) $(2x+\pi)(-3x+1) - (2x+\pi)(x-5)$

6) $x^2 - 4x + 4$

3 Les fractions

En général, pour la division on n'utilise pas le symbole $\div$ mais on écrit sous forme de fraction. Plus précisément, on utilise la notation suivante :

NOTATION

Pour tous entiers a et b avec $b \neq 0$, on écrit

$$\frac{a}{b} = a \div b$$

L'écriture $\frac{a}{b}$ est une **fraction**, on la note aussi a/b.
Dans la fraction $\frac{a}{b}$, l'entier a est appelé le **numérateur** et l'entier b est appelé le **dénominateur**

REMARQUE

La condition $b \neq 0$ vient du fait qu'il n'est pas possible de diviser un nombre par 0.

DÉFINITION : *Nombres rationnels*

Les nombres **rationnels** sont les nombres sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$.
Autrement dit, les nombres rationnels sont les fractions d'entiers relatifs.

3.1 Simplification des fractions

Les fractions ont la particularité de pouvoir se simplifier.

PROPRIÉTÉS : *Simplification de fractions*

Pour tous entiers a, b et k, avec b et k non nuls, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \textit{et} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a/k}{b/k}$$

Exemples

- $\triangleright$ $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1 \times 50}{2 \times 50} = \dfrac{50}{100}$
- $\triangleright$ $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12}$
- $\triangleright$ $\dfrac{4}{8} = \dfrac{4/4}{8/4} = \dfrac{1}{2}$
- $\triangleright$ $\dfrac{20}{15} = \dfrac{20/5}{15/5} = \dfrac{4}{3}$

Remarque

On en déduit que, pour tous entiers a et b avec b non nul, on a

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Une fraction qui ne peut plus se simplifier est dite irréductible :

Définition : *Forme irréductible*

Soient a et b deux entiers avec $b \neq 0$.

- $\triangleright$ On dit que b **divise** a ou que a est **multiple** de b ou encore que b est un **diviseur** de a si la fraction $\dfrac{a}{b}$ est un entier.
- $\triangleright$ Si a et b n'ont que 1 comme diviseur commun, on dit que la fraction $\dfrac{a}{b}$ est **sous forme irréductible**.

D'après la propriété précédente toute fraction peut s'écrire sous forme irréductible.

Exemples

- $\triangleright$ 0 est le multiple de tout entier car, pour tout entier b avec $b \neq 0$, on a $\dfrac{0}{b} = 0$ et 0 est un entier.
- $\triangleright$ 1 est le diviseur de tout entier car, pour tout entier a, on a $\dfrac{a}{1} = a$.
- $\triangleright$ 3 divise 9, autrement dit 3 est un diviseur de 9 et 9 est un multiple de 3.
- $\triangleright$ Les multiples de 2 (...,-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10,...) sont appelés les **nombres pairs**. Les entiers qui ne sont pas multiples de 2 sont appelés les **nombres impairs**.

- ▷ La fraction $\frac{1}{2}$ est sous forme irréductible car le seul diviseur commun à 1 et 2 est 1.
- ▷ La fraction $\frac{2}{3}$ est aussi sous forme irréductible.
- ▷ $\frac{4}{8} = \frac{4/4}{8/4} = \frac{1}{2}$, on a écrit la fraction sous forme irréductible.
- ▷ $\frac{21}{15} = \frac{21/3}{15/3} = \frac{7}{5}$, on a écrit la fraction sous forme irréductible.

Exercice 1.5

Réduire les fractions ci-dessous sous forme irréductible :

1) $\frac{7}{14}$	**2)** $-\frac{6}{4}$	**3)** $\frac{20}{-20}$
4) $-\frac{28}{4}$	**5)** $\frac{-63}{-18}$	**6)** $\frac{-14}{6}$
7) $\frac{-45}{27}$	**8)** $\frac{25}{125}$	**9)** $\frac{105}{21}$

3.2 Opérations sur les fractions

Dans cette partie, on s'intéresse aux opérations que l'on peut effectuer sur les fractions (addition, soustraction, multiplication et division).

Propriétés : *Addition et soustraction de fractions*

Pour tous entiers a, b, c, avec b non nul, on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \textit{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Exemples

- ▷ $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$
- ▷ $\frac{2}{5} + \frac{8}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Pour additionner ou soustraire deux fractions de dénominateurs différents, on les met sous le même dénominateur puis on applique l'une des formules précédentes.

Remarque : *Mise au même dénominateur*

Considérons le cas général de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, où aucun dénominateur commun n'apparaît de façon immédiate. Alors, il est toujours possible de mettre les deux fractions sous le dénominateur bd. On obtient ainsi

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

En particulier, on a

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{bc}{b} = \frac{a + bc}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

Exemples

▷ $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{17}{12}$

▷ $\frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5 + 4 \times 2}{2 \times 5} = \frac{23}{10}$

Propriété : *Produit de fractions*

Pour tous entiers a, b, c et d, avec b et d non nuls, on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples

▷ $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$

▷ $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{1 \times 4}{2 \times 3} = \frac{1 \times 2 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 3} = \frac{2}{3}$

On remarquera que l'on a « barré » le nombre 2 au numérateur et au dénominateur car celui-ci disparaît en divisant par 2 le numérateur et le dénominateur.
On a donc simplifié la fraction.
De plus, les deux fractions obtenues sont irréductibles.

Attention

Étant donnés a, b et c des entiers non nuls, la simplification

$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{\cancel{a} \times b}{\cancel{a} \times c} = \frac{b}{c}$$

n'est valable que parce que l'on a une multiplication. Une telle simplification **n'est pas possible** pour la fraction $\dfrac{a+b}{a+c}$.

Remarque

Soient a, b, c et d des entiers, avec b non nul. Alors, on a

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$$

De plus,

$$(c+d) \times \frac{a}{b} = \frac{a(c+d)}{b} = \frac{ac+ad}{b}$$

et

$$d \times \frac{a+c}{b} = \frac{ad+cd}{b}$$

Autrement dit, lorsque l'on effectue une multiplication avec une fraction, le numérateur doit être considéré comme un nombre entre parenthèses auquel on applique les règles de distributivité.

Exemples

- $4 \times \dfrac{1+3}{3} = 4 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$ ou $4 \times \dfrac{1+3}{3} = \dfrac{4+12}{3} = \dfrac{16}{3}$
- $(2+1) \times \dfrac{3+4}{5} = 3 \times \dfrac{7}{5} = \dfrac{21}{5}$
  ou $(2+1) \times \dfrac{3+4}{5} = \dfrac{6+8+3+4}{5} = \dfrac{21}{5}$

Propriété : *Division de fractions*

Pour tous entiers a, b, c, d avec b, c et d non nuls, on a

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Remarques

- ▷ L'opération $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$ s'écrit aussi $\dfrac{a/b}{c/d}$. Autrement dit,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d}$$

- ▷ Pour a non nul, on appelle **fraction inverse** de $\dfrac{a}{b}$, la fraction $\dfrac{b}{a}$.
- ▷ La propriété de division de fractions peut alors s'énoncer simplement

« diviser par une fraction c'est multiplier par son inverse ».

Exemples

▷ $\dfrac{1/2}{3/2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ ▷ $\dfrac{3}{3/4} = 3 \times \dfrac{4}{3} = 4$

Exercice 1.6

Simplifier les fractions suivantes :

1) $F_1 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}$ **2)** $F_2 = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{-2}{-15}$ **3)** $F_3 = \dfrac{-3}{-2} + \dfrac{2}{4}$

4) $F_4 = \dfrac{-3}{-2} \times \dfrac{-2}{-2}$ **5)** $F_5 = \dfrac{2}{2} \times \dfrac{3}{-2}$ **6)** $F_6 = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{-3}{-5}$

7) $F_7 = \dfrac{-4}{-3} \times \dfrac{4}{7}$ **8)** $F_8 = \dfrac{4/3}{-3/2}$ **9)** $F_9 = \dfrac{-2/7}{-4/7}$

10) $F_{10} = \dfrac{-3/2}{4/5}$ **11)** $F_{11} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{-4}{2} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{-5}{2}$

12) $F_{12} = \dfrac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{-4}{5}}{\dfrac{-2}{-4} + \dfrac{3}{-3}}$

4 Les puissances

Le carré est une puissance particulière. On donne ci-après la définition d'une puissance entière (positive ou négative).

Définition : *Puissances d'un nombre*

Soient a un nombre (entier ou rationnel) non nul et n un entier naturel non nul.

- ▷ On appelle a **puissance** n le nombre

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

- ▷ On appelle a **puissance moins** n le nombre

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De plus, par convention, on note $a^0 = 1$.

Exemples

- ▷ $3^3 = \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3 \text{ fois}} = 27$
- ▷ $10^5 = 100000$
- ▷ $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$
- ▷ $10^{-3} = \dfrac{1}{1000} = 0.001$

Propriétés

Soient a, b deux nombres non nuls et n, m deux entiers positifs ou négatifs. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- ▷ $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- ▷ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- ▷ $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- ▷ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- ▷ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Remarque

Dans les propriétés précédentes, on a utilisé le symbôle $\times$, bien qu'il s'agisse de calcul littéral. Ces formules s'écrivent plus classiquement :

$$a^n\, a^m = a^{n+m} \quad \text{et} \quad a^n\, b^n = (a\, b)^n$$

Exemples

- $\triangleright$ $2^{-7} \times 2^{3} = 2^{-7+3} = 2^{-4}$
- $\triangleright$ $\dfrac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}$
- $\triangleright$ $8^4 = (2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$
- $\triangleright$ $(-5)^4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(-\dfrac{5}{2}\right)^4$

Exercice 1.7

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \left(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51}\right)^2$

2) $B = \left(5^{-4} \times 5^{5}\right)^3$

3) $C = \dfrac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3}$

5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 1.1

1) $2 - 3 \times 4 = 2 - 12 = -10$

2) $3 - 4 + 4 \times 1 = -1 + 4 = 3$

3) $(5 \times 5) + 0 - (2 - 4) + 3 = 25 - (-2) + 3 = 25 + 2 + 3 = 30$

4) $24 + (12 \div 6) \times 3 = 24 + 2 \times 3 = 24 + 6 = 30$

Corrigé Exercice 1.2

1) $(4 - x) + (2 \times x) = 4 - x + 2x = 4 + x$

2) $4 - (x \times 2y) + 5 = 4 - 2xy + 5 = 9 - 2xy$

3) $4x - (3 \times 2y + 5) - 2x \times 5y = 4x - 6y - 5 - 10xy$

4) $(1 - x) \times (5 + y) = 5 + y - 5x - xy$

5) $1 + (y \times 5x) - 2xy = 1 + 5xy - 2xy = 1 + 3xy$

6) On a

$$\begin{aligned}(3+2x)\,(4+y-5(2-y)) &= (3+2x)\,(-6+6y)\\ &= -18 + 18y - 12x + 12xy\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 1.3

1) On utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 5$, ce qui donne

$$(5x+5)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 5 + 5^2 = 25x^2 + 50x + 25$$

2) On utilise l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 10$, ce qui donne

$$(4x+10)(4x-10) = (4x)^2 - 10^2 = 16x^2 - 100$$

3) On utilise les deux identités remarquables sur $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$, on obtient

$$(10x-8)^2 = (10x)^2 - 2 \times 10x \times 8 + 8^2 = 100x^2 - 160x + 64$$

et

$$(4x+8)^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 8 + 8^2 = 16x^2 + 64x + 64$$

d'où

$$\begin{aligned}(10x-8)^2 + (4x+8)^2 &= 100x^2 - 160x + 64 + 16x^2 + 64x + 64 \\ &= 116x^2 - 96x + 128\end{aligned}$$

4) Pour la dernière expression, on utilise l'identité remarquable sur $(a-b)^2$, ce qui donne

$$(5x-3)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$$

De plus, d'après les propriétés de distributivité, on a

$$\begin{aligned}(2x+1)(5x-3) &= 2x \times 5x + 2x \times (-3) + 5x - 3 \\ &= 10x^2 - 6x + 5x - 3 = 10x^2 - x - 3\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3) &= 25x^2 - 30x + 9 - (10x^2 - x - 3) \\ &= 25x^2 - 30x + 9 - 10x^2 + x + 3 \\ &= 15x^2 - 29x + 12\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 1.4

1) Il s'agit de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ainsi, on obtient
$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

2) Il s'agit de l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. En effet,
$$14x + 49x^2 + 1 = 49x^2 + 14x + 1 = (7x)^2 + 2 \times 7x \times 1 + 1^2 = (7x+1)^2$$

3) On factorise par le facteur commun x, ce qui donne
$$x^2 - 4x = x(x-4)$$

4) On factorise par le facteur commun $(5x-3)$ et on obtient
$$\begin{aligned}(5x-3)^2 - (2x+1)(5x-3) &= (5x-3)\left(5x-3-(2x+1)\right)\\ &= (5x-3)(5x-3-2x-1)\\ &= (5x-3)(3x-4)\end{aligned}$$

5) On factorise par le facteur commun $(2x+\pi)$, ce qui donne
$$\begin{aligned}(2x+\pi)(-3x+1) - (2x+\pi)(x-5) &= (2x+\pi)\left(-3x+1-(x-5)\right)\\ &= (2x+\pi)(-3x+1-x+5)\\ &= (2x+\pi)(-4x+6)\end{aligned}$$

6) Il s'agit de l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Ainsi,
$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2x + 2^2 = (x-2)^2$$

Corrigé Exercice 1.5

1) $\dfrac{7}{14} = \dfrac{\cancel{7}}{2 \times \cancel{7}} = \dfrac{1}{2}$

2) $-\dfrac{6}{4} = -\dfrac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 2} = -\dfrac{3}{2}$

3) $\dfrac{20}{-20} = -\dfrac{20}{20} = -1$

4) $-\dfrac{28}{4} = -\dfrac{\cancel{4} \times 7}{\cancel{4}} = -7$

5) $\dfrac{-63}{-18} = \dfrac{\cancel{9} \times 7}{\cancel{9} \times 2} = \dfrac{7}{2}$

6) $\dfrac{-14}{6} = -\dfrac{7 \times \cancel{2}}{3 \times \cancel{2}} = -\dfrac{7}{3}$

7) $\dfrac{-45}{27} = -\dfrac{\cancel{9} \times 5}{\cancel{9} \times 3} = -\dfrac{5}{3}$

8) $\dfrac{25}{125} = \dfrac{\cancel{25}}{5 \times \cancel{25}} = \dfrac{1}{25}$

9) $\dfrac{105}{21} = \dfrac{5 \times \cancel{21}}{\cancel{21}} = 5$

Corrigé Exercice 1.6

1) $F_1 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4+2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

2) $F_2 = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{-2}{-15} = \dfrac{-2 \times 3}{5 \times 3} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{-6}{15} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{-6+2}{15} = \dfrac{-4}{15}$

3) $F_3 = \dfrac{-3}{-2} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{3 \times 2 + 2}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

4) $F_4 = \dfrac{-3}{-2} \times \dfrac{-2}{-2} = \dfrac{3}{2} \times 1 = \dfrac{3}{2}$

5) $F_5 = \dfrac{2}{2} \times \dfrac{3}{-2} = -1 \times \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

6) $F_6 = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3 \times 3}{7 \times 5} = \dfrac{9}{35}$

7) $F_7 = \dfrac{-4}{-3} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{16}{21}$

8) $F_8 = \dfrac{4/3}{-3/2} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{8}{9}$

9) $F_9 = \dfrac{-2/7}{-4/7} = \dfrac{-2}{\cancel{7}} \times \dfrac{\cancel{7}}{-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

10) $F_{10} = \dfrac{-3/2}{4/5} = \dfrac{-3}{2} \times \dfrac{5}{4} = -\dfrac{15}{8}$

11) $F_{11} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{-4}{2} - \dfrac{2}{5} \times \dfrac{-5}{2} = \dfrac{4}{7} - 2 + 1 = \dfrac{4}{7} - \dfrac{7}{7} = -\dfrac{3}{7}$

12) $F_{12} = \dfrac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{-4}{5}}{\dfrac{-2}{-4} + \dfrac{3}{-3}} = \dfrac{\dfrac{8}{5}}{\dfrac{1}{2} - 1} = \dfrac{\dfrac{8}{5}}{-\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{8}{5} \times 2 = -\dfrac{16}{5}$

Corrigé Exercice 1.7

1) $A = \left(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51}\right)^2 = \left(7^{-24-26+51}\right)^2 = 7^2$

2) $B = \left(5^{-4} \times 5^5\right)^3 = 5^3$

3) $C = \dfrac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3} = \dfrac{\cancel{2^3} \times 2^2 \times \cancel{3^5} \times 3^3}{\cancel{3^5} \times \cancel{2^3}} = 2^2 \times 3^3$

6 Exercices

EXERCICE 1.8

Donner l'expression la plus simple possible des nombres suivants :

- $\triangleright$ $A = \dfrac{36+9}{10}$
- $\triangleright$ $B = \dfrac{30}{10/2}$
- $\triangleright$ $C = \dfrac{30/10}{2}$
- $\triangleright$ $D = \dfrac{9 \times 4}{8-2}$
- $\triangleright$ $E = \dfrac{86-14}{8 \times 2}$
- $\triangleright$ $F = \dfrac{24}{12/4}$

EXERCICE 1.9

Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables lorsque cela est possible :

1) $E_1 = 2x^2 - 4x + 2$

2) $E_2 = x^2 - 16$

3) $E_3 = 9a^2 - 49$

4) $E_4 = x^2 - 625$

5) $E_5 = 2x^2 - 16x + 32$

6) $E_6 = \dfrac{y^6}{4} - 49y^4$

EXERCICE 1.10

Donner l'expression la plus simple possible des nombres suivants :

- $\triangleright$ $A = 1 - \dfrac{5}{4} \times \dfrac{2}{15}$
- $\triangleright$ $B = 6 - 4\left(\dfrac{1}{4} - 1\right)^3$
- $\triangleright$ $C = \dfrac{\dfrac{2}{8} - \dfrac{3}{5}}{\dfrac{3}{10}}$
- $\triangleright$ $D = 2 - \dfrac{3 - \dfrac{1}{3}}{3 + \dfrac{1}{3}}$
- $\triangleright$ $E = \dfrac{25 \times 10^2 \times 121}{11 \times 750 \times 3}$
- $\triangleright$ $F = \dfrac{3 \times 10^{-2}}{1.5 \times 10^{-4}} - 2 \times 10^2$
- $\triangleright$ $G = \left(3 + \dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{7}{3 + \dfrac{1}{2}} \times \dfrac{1}{7}$
- $\triangleright$ $H = 7 \times 10^{12} \times 4 \times \dfrac{10^5}{2} \times 10^{-4}$
- $\triangleright$ $I = \dfrac{\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{10}\right) \times \left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{4^2}{8} \times \dfrac{3}{16}\right)}{-\dfrac{5}{16} - \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2}}$

Exercice 1.11

Simplifier les expressions suivantes :

- $\triangleright$ $A = \dfrac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$
- $\triangleright$ $B = (2 \times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1}$
- $\triangleright$ $C = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$

Exercice 1.12 Décomposition en nombres premiers

Un nombre entier différent de 1 est dit **premier** s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même. Par exemple, les nombres premiers inférieurs à 20 sont

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19$$

Tout nombre entier n peut s'écrire comme un unique produit de nombres premiers. Ce produit est appelé la **décomposition en nombres premiers** de n. Voici quelques exemples de décompositions en nombres premiers :

$$4 = 2 \times 2 = 2^2, \quad 6 = 2 \times 3, \quad 35 = 5 \times 7, \quad 70 = 2 \times 35 = 2 \times 5 \times 7$$

Un moyen efficace de simplifier une fraction consiste à calculer la décomposition en nombres premiers du numérateur et du dénominateur, puis à retirer les nombres premiers communs aux deux.
Par exemple, on a

$$72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{et} \quad 48 = 2^4 \times 3$$

donc

$$\frac{48}{72} = \frac{2^4 \times 3}{2^3 \times 3^2} = \frac{\cancel{2^3} \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{2^3} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{2}{3}$$

1) Déterminer la décomposition en nombres premiers des nombres suivants :

a) 28	**b)** 33	**c)** 35	**d)** 38	**e)** 40
f) 66	**g)** 90	**h)** 152	**i)** 165	**j)** 252

2) Simplifier les fractions suivantes :

a) $\dfrac{35}{28}$	**b)** $\dfrac{33}{165}$	**c)** $\dfrac{38}{152}$	**d)** $\dfrac{90}{40}$	**e)** $\dfrac{252}{66}$

CHAPITRE 2

Nombres réels, équations et inéquations du premier degré

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions d'ensembles classiques ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$) déjà entrevus dans le chapitre précédent, puis l'on considère l'ensemble des nombres réels que l'on définit de façon intuitive après avoir introduit la racine carrée d'un nombre (entier ou rationnel). La notion de nombres réels est ensuite utilisée dans la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré.

Sommaire

1 Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Cette première partie est consacrée aux définitions des ensembles fondamentaux. On y introduit de plus quelques notations classiques sur les ensembles.

Définition : *L'ensemble* $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ (vient de l'italien *« Naturale »*). Autrement dit, on a

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Remarque

La somme et la multiplication de deux entiers naturels est un entier naturel, tandis que la soustraction et la division de deux entiers naturels n'est pas nécessairement un entier naturel. On dit alors que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **stable** pour l'addition et la multiplication mais ne l'est pas pour la soustraction et la division.

Notations

- ▷ Un ensemble de nombres s'écrit toujours « entre accolades ». Par exemple, l'ensemble des entiers naturels entre 3 et 7 (compris) est : $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.
- ▷ Pour exprimer le fait qu'un nombre appartient à un ensemble, on utilise le symbole $\in$. Autrement dit, étant donné E un ensemble,

  $$x \in E \text{ signifie « } x \text{ appartient à } E \text{ »}$$

  Dans le cas où le nombre n'appartient pas à l'ensemble on utilise le symbole $\notin$. Ainsi,

  $$x \notin E \text{ signifie « } x \text{ n'appartient pas à } E \text{ »}$$

Exemples

- ▷ $4 \in \{3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\}$
- ▷ $2 \notin \{3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\}$
- ▷ $3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N}$
- ▷ $\dfrac{1}{3} = 0,333\ldots \notin \mathbb{N}$

Définition : *L'ensemble $\mathbb{Z}$*

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ (vient de l'allemand *« Zahl »*). Autrement dit, on a :

$$\mathbb{Z} = \{\ \ldots\ ,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Remarques

- ▷ L'ensemble des entiers relatifs est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés.

- ▷ Tout entier naturel est un entier relatif. On dit alors que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- ▷ L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication, mais pas pour la division.

Exemples

- ▷ $3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N}$ mais $-1 \in \mathbb{Z}$.
- ▷ $\dfrac{1}{3} = 0,333\ldots \notin \mathbb{Z}$.

Notation

Pour écrire des ensembles plus compliqués, on peut utiliser la notation suivante :

$$E = \{x \mid x \text{ vérifie la propriété } P\}$$

qui se lit « E est l'ensemble des x tels que x vérifie la propriété P ».

Définition : *L'ensemble $\mathbb{Q}$*

L'ensemble des **nombres rationnels**, qui se note $\mathbb{Q}$ (vient de l'italien *« Quotiente »*), est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction de nombres entiers :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

où $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}$ auquel on a retiré 0, on le note aussi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remarque

D'après la Notation donnée plus haut, la définition signifie que l'on a $x \in \mathbb{Q}$ si

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*$$

Exemples

- $\triangleright$ $0,333\ldots = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ car $1 \in \mathbb{Z}$ et $3 \in \mathbb{Z}^*$.
- $\triangleright$ $4,5 = \dfrac{9}{2} \in \mathbb{Q}$.

Remarques

- $\triangleright$ Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \dfrac{a}{1} \in \mathbb{Q}$, puisque $1 \in \mathbb{Z}^*$. Autrement dit, tout entier relatif est un entier rationnel. Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et ainsi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- $\triangleright$ Cet ensemble est stable pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ainsi, contrairement à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable pour les quatre opérations.
- $\triangleright$ Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels (voir la section suivante).

Exercice 2.1

Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminer le plus petit ensemble auquel il appartient, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

$\triangleright$ 745	$\triangleright$ $\dfrac{6}{2}$	$\triangleright$ -9	$\triangleright$ $3,2$	$\triangleright$ $\dfrac{1}{3}$
$\triangleright$ 27	$\triangleright$ $-65,07$	$\triangleright$ $\dfrac{7}{5}$	$\triangleright$ $-\dfrac{21}{3}$	$\triangleright$ $-0,1 \div 0,002$

2 La racine carrée et l'ensemble $\mathbb{R}$

Dans cette section, on introduit la racine carré d'un nombre ainsi que ses principales propriétés et les méthodes de simplifications de calculs contenant des racines carrées. Enfin, on introduit de façon informelle l'ensemble des nombres réels.

Définition : *Racine carrée*

Pour un nombre positif a, on appelle **racine carrée** de a le nombre **positif** dont le carré est a et on le note $\sqrt{a}$. On a donc

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \geq 0$$

Exemple

On a vu dans le chapitre précédent que les 9 premiers carrés d'entiers sont

1) $1^2 = 1$ **2)** $2^2 = 4$ **3)** $3^2 = 9$

4) $4^2 = 16$ **5)** $5^2 = 25$ **6)** $6^2 = 36$

7) $7^2 = 49$ **8)** $8^2 = 64$ **9)** $9^2 = 81$

En lisant ces égalités de droite à gauche, on en déduit les racines carrées suivantes :

1) $\sqrt{1} = 1$ **2)** $\sqrt{4} = 2$ **3)** $\sqrt{9} = 3$

4) $\sqrt{16} = 4$ **5)** $\sqrt{25} = 5$ **6)** $\sqrt{36} = 6$

7) $\sqrt{49} = 7$ **8)** $\sqrt{64} = 8$ **9)** $\sqrt{81} = 9$

Attention

On a $(-2)^2 = 4$ mais $\sqrt{4} \neq -2$ car $-2 < 0$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres positifs, alors

$$\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \textit{et} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \textit{avec } b \neq 0$$

Remarque

Comme vu dans le chapitre précédent, dans l'expression littérale $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, le signe de multiplication $\times$ n'est pas expressément écrit. La même expression donnée avec le signe $\times$ s'écrit : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

De plus dans le cas de racines carrées, on n'écrit pas, en général, le signe $\times$ même pour des expression avec des nombres. Ainsi l'expression $\sqrt{2}\,\sqrt{3}$ signifie $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$.

Exemples

- ▷ $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{2\times 3} = \sqrt{6}$
- ▷ $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

Attention

En général, on a

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Par exemple :

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \quad \text{et} \quad \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

d'où $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

Lorsque l'on a une expression contenant des racines carrées, il est parfois possible de simplifier cette expression à l'aide des règles de distributivité et en utilisant la propriété donnée plus haut. On donne ci-dessous les différents cas où cette simplification est possible et comment celle-ci s'effectue.

Méthode : *Simplifications d'écritures comportant une racine*

Soient a, b des entiers naturels et m, n des entiers relatifs.

▷ **Simplification de** $\sqrt{a}$.

On décompose le nombre sous la racine en un produit dont l'un des facteurs est un carré.

Exemples :

- ⋆ $\sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{2^2\times 5} = \sqrt{2^2\times 5} = 2\sqrt{5}$
- ⋆ $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{4^2\times 2} = \sqrt{4^2\times 2} = 4\sqrt{2}$

▷ **Simplification de** $\sqrt{a}\sqrt{b}$.

Dans un produit, on associe les racines carrées d'un même nombre.

Exemples :

- ⋆ $\sqrt{2}\,\sqrt{14} = \sqrt{2}\,\sqrt{2\times 7} = \underbrace{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}_{=2}\,\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

$\star$ $\sqrt{3}\,\sqrt{30}\,\sqrt{5} = \sqrt{3}\,\sqrt{3\times 5\times 2}\,\sqrt{5} = \underbrace{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}_{=3}\,\underbrace{\sqrt{5}\,\sqrt{5}}_{=5}\,\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

▷ **Simplification de** $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}$.
On a $m\sqrt{a}+n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$. Autrement dit, on réduit les sommes en mettant les racines identiques en facteur.
Exemples :

- $\star$ $3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
- $\star$ $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{3} = (4-7+1)\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

EXERCICE 2.2

Simplifier les nombres suivants :

1) $A = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}\times 9\sqrt{2}}$

2) $B = (\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2$

3) $C = 2\sqrt{50}+3\sqrt{18}-5\sqrt{72}$

REMARQUE

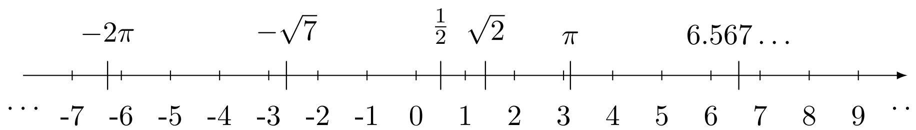
Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel (nous admettrons ce résultat). Cela signifie qu'il existe des nombres qui ne sont pas des rationnels. Parmi eux, on trouve d'autres nombres tels que $\sqrt{3}$ et π qui ne sont pas des rationnels.

Compte tenu de la remarque précédente, il est nécessaire d'introduire un ensemble contenant les nombres rationnels et les nombres non rationnels (appelés des **irrationnels**). C'est l'objet de la définition ci-dessous.

DÉFINITION : *L'ensemble* $\mathbb{R}$

Un nombre réel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'un entier suivi d'une liste (finie ou infinie) de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres réels** se note $\mathbb{R}$ (vient de l'allemand « *Real* »).

Intuitivement, $\mathbb{R}$ est l'ensemble de toutes les abscisses des points d'une droite graduée.



Remarque

On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemples

On a
$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \pi = 3,14159\ldots \in \mathbb{R}$$
mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$. En particulier, $\sqrt{2}$ et π ont un nombre infini de chiffres après la virgule.

Remarque

Les différentes propriétés sur le calcul (commutativité et associativité de l'addition et la multiplication, priorités de calcul, propriétés de distributivité) restent vraies pour les nombres réels.

De même, la définition de puissances d'un nombre est valable pour les nombres réels et la définition de la racine carrée d'un nombre *positif* reste valable pour les nombres réels *positifs*. Plus précisément, on a les définitions suivantes :

Définitions : *Puissances et racine carrée d'un réel*

Soient $a \in \mathbb{R}$ non nul et n un entier non nul.

- ▷ On appelle a **puissance** n le nombre
$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$
- ▷ On appelle a **puissance moins** n le nombre
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Par convention, on note $a^0 = 1$.
De plus, si $a > 0$, on appelle **racine carrée** de a le nombre *réel* **positif** dont le carré est a, on le note $\sqrt{a}$.

Remarque

Les propriétés vues précédemment pour les puissances et la racine de nombres rationnels restent vraies pour les nombres réels.

3 Équations du premier degré

Définition : *Équation du premier degré*

On appelle **équation du premier degré**, une égalité de la forme

$$ax + b = 0$$

où

- a et b sont des réels, avec a non nul,
- x est une variable appelée l'**inconnue**. Celle-ci est souvent notée x mais elle peut être notée par n'importe quelle lettre, notamment $t, y, z \dots$.

Résoudre une telle équation consiste à trouver toutes les valeurs réelles de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.

Remarques

- Rappelons qu'ici, l'écriture ax signifie $a \times x$.
- De manière générale, une équation est une égalité contenant une (ou plusieurs) inconnue. On traitera au chapitre suivant le cas des équations dites de second degré.

Exemples

- $2x + 3 = 5$ est une équation du premier degré d'inconnue x. Une solution de cette équation est $x = 1$. En effet, en remplaçant x par 1, on obtient

  $$2x + 3 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

  Ainsi l'équation est bien vérifiée pour $x = 1$.
- $3y - 16 = 0$ est une équation du premier degré d'inconnue y.

Pour résoudre une équation (non nécessairement du premier degré), on dispose des deux propriétés fondamentales ci-dessous.

Propriétés

- ▷ *On ne change pas une équation si on ajoute ou soustrait un même nombre à chaque terme de l'égalité.*
- ▷ *On ne change pas une équation si on multiplie ou divise par un même nombre non nul chaque terme de l'égalité.*

Exemples

- ▷ L'équation $x+5=0$ est équivalente à l'équation obtenue en effectuant l'opération -5 de part et d'autre du signe $=$, ce qui donne

$$x+\underbrace{5-5}_{=0}=\underbrace{0-5}_{=-5}$$

ce qui donne $x=-5$. On en déduit que l'équation $x+5=0$ a une unique solution qui est $x=-5$.

- ▷ L'équation $2t-6=0$ est équivalente à l'équation

$$2t\underbrace{-6+6}_{=0}=\underbrace{0+6}_{=6}$$

ce qui donne $2t=6$ qui elle-même est équivalente à

$$\underbrace{\frac{2t}{2}}_{=t}=\underbrace{\frac{6}{2}}_{=3}$$

et on obtient ainsi que l'équation $2t-6=0$ a une unique solution qui est $t=3$.

Ce que l'on a fait dans les deux exemples précédents se généralise à toute équation du premier degré. De façon générale, on a le résultat suivant :

Proposition

Soient $a\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$ et $b\in\mathbb{R}$. Alors, l'équation

$$ax+b=0$$

admet une unique solution qui est

$$x = -\frac{b}{a}$$

Démonstration. L'équation $ax + b = 0$ est équivalente à

$$ax + \underbrace{b - b}_{=0} = \underbrace{0 - b}_{=-b}$$

ce qui donne $ax = -b$ qui elle-même est équivalente à

$$\underbrace{\frac{ax}{a}}_{=x} = \frac{-b}{a}$$

On en déduit que l'équation a pour unique solution $x = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$. □

Exemples

- ▷ L'équation $x + 5 = 0$ est de la forme $ax + b = 0$ avec $a = 1$ et $b = 5$. Ainsi, sa solution est
$$x = -\frac{5}{1} = -5$$
- ▷ L'équation $2t - 6 = 0$ est de la forme $at + b = 0$ avec $a = 2$ et $b = -6$. Ainsi, sa solution est
$$t = -\frac{-6}{2} = -(-3) = 3$$
- ▷ L'équation $2x + 2 = -x - 4$ ne semble pas de la forme $ax + b$ mais peut s'y ramener.
En effet, pour cela il suffit de passer tous les termes dans le membre à gauche de l'égalité. On a
$$\underbrace{2x - (-x)}_{=3x} + \underbrace{2 - (-4)}_{=6} = \underbrace{-x - (-x)}_{=0} - \underbrace{4 - (-4)}_{=0}$$
soit $3x + 6 = 0$. On obtient alors $x = \frac{-6}{3} = -2$.

Exercice 2.3

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x + 8 = 0$ **2)** $3y - 5 = 4$ **3)** $t - 1 = -t + 1$

4) $5x + 2 = 9x + 7$ **5)** $5 - (t - 3) = 4t$ **6)** $5(y-1) + 3(2-y) = 0$

Les équations apparaissent fréquemment au travers de problèmes. Dans ces problèmes, l'important est de savoir définir correctement quelle est l'inconnue, puis retranscrire le problème sous forme d'équation.

Exemple

Considérons le problème suivant :
« Un élève a acheté 5 livres de poche et un marque-page. Il a donné 25 €, et on lui a rendu 3.80 €. Sachant que le marque-page a coûté 0.20 €, quel est le prix d'un livre de poche ? »

Pour résoudre ce problème, on note x le prix en euros d'un livre de poche. Puisque le marque-page coûte 0.20 €, la phrase « Un élève a acheté 5 livres de poche et un marque-page » s'écrit

$$5x + 0.20$$

tandis que la phrase « Il a donné 25 €, et on lui a rendu 3.80 € » s'écrit

$$25 - 3.8$$

On obtient ainsi l'équation

$$5x + 0.20 = 25 - 3.8$$

Pour se « débarrasser » de la virgule on multiplie par 10 de chaque coté :

$$50x + 2 = 250 - 38 = 212$$

On a alors $50x - 210 = 0$ donc

$$x = \frac{210}{50} = \frac{21}{5} = 4.20$$

Autrement dit, chaque livre de poche coûte 4.20 €.

Exercice 2.4

La moyenne de six nombres est égale à quatre. Si l'on ajoute un septième nombre, la moyenne devient égale à cinq. Quel est ce septième nombre ?

Rappel : Une moyenne de n nombres s'obtient en sommant ces nombres et en divisant le résultat obtenu par n.

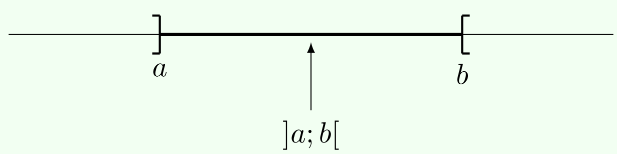
4 Inéquations du premier degré

Dans cette dernière partie du chapitre, on étudie la notion d'inéquation du premier degré. Pour aborder celle-ci nous aurons besoin de la notion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition : *Intervalles*

Soient a et b deux réels avec $a \leq b$.

- ▷ L'**intervalle ouvert** $]a;b[$ est l'ensemble des nombres réels compris strictement entre a et b. Intuitivement, il s'agit du segment reliant a à b sans ses extrémités.



- ▷ De la même manière, l'**intervalle fermé** $[a;b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b (dont a et b). Intuitivement, il s'agit du segment reliant a à b avec ses extrémités.
- ▷ L'**intervalle semi-ouvert** $[a;b[$ est l'ensemble des réels compris entre a et b (dont a) excepté b. On définit de même l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$.

Exemples

- ▷ L'intervalle $[1;4]$ est l'ensemble des nombres réels qui sont supérieurs ou égaux à 1 et inférieurs ou égaux à 4. Par exemple, $1 \in [1;4]$, $3.245 \in [1;4]$.
- ▷ L'ensemble des nombres réels x tels que $-3 < x \leq 5$ est $]-3;5]$.
- ▷ L'ensemble des nombres réels x tels que $1 \leq x < 6$ est $[1;6[$.
- ▷ L'intervalle $[3;2]$ n'existe pas car a doit être inférieur à b. L'intervalle $[2;3]$ lui existe.

Remarque

L'intervalle $]a;a[$ n'existe pas ou est dit vide, noté $\emptyset$. L'intervalle $[a;a]$ est l'ensemble réduit au seul réel a, noté $[a;a] = \{a\}$ (appelé **singleton**).

Notations

1) On note ∞ pour désigner une quantité qui serait plus grande que tous les nombres réels. Le symbole ∞ n'est pas un nombre mais uniquement une notation.

2) Ainsi, $-\infty$ est une quantité plus petite que tout nombre réel et $+\infty$ est une quantité plus grande que tout nombre réel.

3) Les définitions d'intervalles sont valides en remplaçant a ou b par $-\infty$ ou $+\infty$.

Ainsi, pour $a \in \mathbb{R}$, on a les notations suivantes :

- ▷ L'intervalle $[a;+\infty[$ est l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a.
- ▷ L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble des réels strictement supérieurs à a.
- ▷ L'intervalle $]-\infty;a]$ est l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à a.
- ▷ L'intervalle $]-\infty;a[$ est l'ensemble des réels strictement inférieurs à a.

Exemples

1. L'ensemble des nombres réels x tels que $x < -2$ est $]-\infty;-2[$.
2. L'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq 3$ est $[3;+\infty[$.
3. L'ensemble des nombres réels peut s'écrire comme l'intervalle ouvert $]-\infty;+\infty[$ (intervalle ouvert car $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels).
4. L'ensemble des nombres positifs ou nuls est l'intervalle $[0;+\infty[$ et l'ensemble des nombres strictement négatifs est $]-\infty;0[$.

DÉFINITION : *Inéquation du premier degré*

Une **inéquation** est une inégalité contenant une inconnue.
En particulier, une **inéquation du premier degré** est une inégalité ayant l'une des formes suivantes :

- ▷ $ax + b \leq 0$
- ▷ $ax + b < 0$
- ▷ $ax + b \geq 0$
- ▷ $ax + b > 0$

où $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, de manière informelle, une inéquation est une équation avec un des symboles $<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$ à la place du symbole $=$.

EXEMPLES

- ▷ $x + 2 > 4$ est une inéquation (du premier degré) d'inconnue x. Les nombres 3 et 4 sont des exemples de solutions de cette équation.
  En effet, $3 + 2 = 5 > 4$ et $4 + 2 = 6 > 4$.
- ▷ $-3y - 5 \leq 4$ est une inéquation (du premier degré) d'inconnue y. 0 est solution de cette inéquation car $-3 \times 0 - 5 = -5 \leq 4$ mais -4 n'est pas solution car
  $$-3 \times (-4) - 5 = 12 - 5 = 7 > 4$$

PROPRIÉTÉS

- ▷ *On ne change pas une inéquation si on ajoute ou soustrait un même nombre à chaque terme de l'inégalité.*
- ▷ *On ne change pas une inéquation si on multiplie ou divise par un même nombre* **strictement positif** *chaque terme de l'inégalité.*
- ▷ *Si l'on multiplie ou divise par un même nombre* **strictement négatif** *chaque terme de l'inégalité, l'inégalité* **change de sens**.

REMARQUE

Ces propriétés sont semblables à celles énoncées pour une équation sauf pour la multiplication ou la division qui dépend du signe (positif ou négatif) du nombre par lequel on multiplie ou divise.

Exemples

1. L'inéquation $x+2>4$ est équivalente à
$$x+\underbrace{2-2}_{=0}>\underbrace{4-2}_{=2}$$
c'est à dire $x>2$. Ainsi tout réel strictement supérieur à 2 est solution, donc il existe une infinité de solutions. On note l'ensemble des solutions à l'aide des intervalles. Cet ensemble de solutions est l'ensemble des réels strictement supérieurs à deux donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+2>4$ est $]2;+\infty[$.
2. L'inéquation $3x-5\leq 4$ est équivalente à
$$3x\underbrace{-5+5}_{=0}\leq\underbrace{4+5}_{=9}$$
soit $3x\leq 9$ qui est encore équivalente à ($3>0$ donc on ne change pas le sens de l'inégalité)
$$\frac{3x}{3}\leq\frac{9}{3}$$
qui donne $x\leq 3$. L'ensemble des solutions de $3x-5\leq 4$ est donc $]-\infty;3]$.
3. L'inéquation $-3y-5\leq 4$ est équivalente à $-3y\leq 9$ qui équivaut à ($-3<0$ donc on change le sens de l'inégalité)
$$\frac{-3y}{-3}\geq\frac{9}{-3}$$
soit $y\geq -3$. Donc l'ensemble des solutions de $-3y-5\leq 4$ est $[-3;+\infty[$.

Exercice 2.5

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x-2\leq 0$ **2)** $x+4>0$ **3)** $2x+7>0$

4) $\dfrac{1-3x}{4}\geq 0$ **5)** $3x-3\leq 1-2x$ **6)** $2(x-3)\geq 8-3x$

5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 2.1

- $\triangleright$ $745 \in \mathbb{N}$
- $\triangleright$ $\dfrac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N}$
- $\triangleright$ $-9 \in \mathbb{Z}$
- $\triangleright$ $3,2 = \dfrac{32}{10} \in \mathbb{Q}$
- $\triangleright$ $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
- $\triangleright$ $27 \in \mathbb{N}$
- $\triangleright$ $-65,07 = -\dfrac{6507}{100} \in \mathbb{Q}$
- $\triangleright$ $\dfrac{7}{5} \in \mathbb{Q}$
- $\triangleright$ $-\dfrac{21}{3} = -7 \in \mathbb{Z}$
- $\triangleright$ $-0,1 \div 0,002 = -\dfrac{1}{10} \div \dfrac{2}{1000} = -\dfrac{1}{10} \times \dfrac{1000}{2} = \dfrac{-100}{2} = -50 \in \mathbb{Z}$

Corrigé Exercice 2.2

1) On a

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18} \times 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{9} \times 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{9} \times 9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6 \times 9} = \frac{\sqrt{2}}{54}$$

2) En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 4\underbrace{\sqrt{3}\sqrt{2}}_{=\sqrt{6}} + \underbrace{4 \times 2}_{=8} = 11 - 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

3) Puisque $50 = 2 \times 25$, $18 = 2 \times 9$ et $72 = 2 \times 36$, on obtient

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{50} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{72} = 2\underbrace{\sqrt{25}}_{=5}\sqrt{2} + 3\underbrace{\sqrt{9}}_{=3}\sqrt{2} - 5\underbrace{\sqrt{36}}_{=6}\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = -11\sqrt{2} \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 2.3

1) La solution de $2x + 8 = 0$ est $x = -\frac{8}{2} = -4$.

2) L'équation $3y - 5 = 4$ s'écrit encore $3y = 4 + 5 = 9$ dont la solution est $y = \frac{9}{3} = 3$.

3) L'équation $t - 1 = -t + 1$ s'écrit encore $2t = 2$ dont la solution est $t = 1$.

4) L'équation $5x + 2 = 9x + 7$ est équivalente à

$$5x - 9x = 7 - 2$$

ce qui donne $-4x = 5$ et donc la solution est $x = -\frac{5}{4}$.

5) On a $5 - (t - 3) = 5 - t + 3 = 8 - t$. Ainsi l'équation $5 - (t - 3) = 4t$ s'écrit $8 - t = 4t$, soit encore $5t = 8$. Donc la solution est $t = \frac{8}{5}$.

6) On a

$$5(y - 1) + 3(2 - y) = 5y - 5 + 6 - 3y = 2y + 1$$

Ainsi l'équation $5(y - 1) + 3(2 - y) = 0$ s'écrit $2y + 1 = 0$ et sa solution est donc $y = -\frac{1}{2}$.

Corrigé Exercice 2.4

On note x le septième nombre.
Puisque la moyenne des six nombres est égale à quatre, la somme S de ces six nombres est

$$S = 4 \times 6 = 24$$

Ainsi la somme des sept nombres est $24 + x$ et donc la moyenne de ces sept nombres est $\frac{24 + x}{7}$. On en déduit

$$\frac{24 + x}{7} = 5$$

En multipliant par 7 de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$24 + x = 35$$

Donc le septième nombre est $x = 35 - 24 = 11$.

Corrigé Exercice 2.5

1) L'inéquation $x-2 \leq 0$ est équivalente à $x \leq 2$ et donc l'ensemble de ses solutions est $]-\infty; 2]$.

2) L'inéquation $x+4>0$ est équivalente à $x>-4$ et donc l'ensemble de ses solutions est $]-4; +\infty[$.

3) On a $2x+7>0$ si et seulement si $2x>-7$, soit encore $x>-\dfrac{7}{2}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\dfrac{7}{2}; +\infty\right[$.

4) On a

$$\underbrace{\frac{1-3x}{4}\times 4}_{=1-3x} \geq \underbrace{0\times 4}_{=0}$$

ce qui donne $1-3x \geq 0$, qui est équivalente à $1 \geq 3x$, soit $x \leq \dfrac{1}{3}$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$.

5) On regroupe à gauche de l'inégalité tous les termes en x et à droite de l'inégalité les termes restants :

$$\underbrace{3x+2x}_{=5x}\underbrace{-3+3}_{=0} \leq \underbrace{1+3}_{=4}\underbrace{-2x+2x}_{=0}$$

d'où $5x \leq 4$ dont on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty; \dfrac{4}{5}\right]$.

6) On a $2(x-3)=2x-6$ donc l'inéquation s'écrit encore $2x-6 \geq 8-3x$. En procédant comme dans la question précédente, on obtient

$$\underbrace{2x+3x}_{=5x}\underbrace{-6+6}_{=0} \geq \underbrace{8+6}_{=14}\underbrace{-3x+3x}_{=0}$$

d'où $5x \geq 14$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{14}{5}; +\infty\right[$.

6 Exercices

Exercice 2.6

Démontrer que les nombres suivants sont entiers sans l'aide de la calculatrice (a et b sont des réels non nuls).

1) $A = \dfrac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$

2) $B = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$

3) $C = \dfrac{3^{10}}{243}$

4) $D = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$

Exercice 2.7

Écrire les nombres ci-dessous sous la forme $m\sqrt{n}$, où m est un entier relatif et n est un entier le plus petit possible.

1) $A = 5\sqrt{12} - 6\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$

2) $B = 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{15}$

3) $C = \sqrt{98} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$

4) $D = \dfrac{3\sqrt{14} \times \sqrt{28} \times \sqrt{15}}{\sqrt{6} \times \sqrt{21} \times 2\sqrt{7}}$

5) $E = -\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$

6) $F = \dfrac{3\sqrt{24}}{\sqrt{18}} \times \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$

Exercice 2.8

Développer et réduire les nombres ci-dessous, puis donner le résultat sous la forme la plus simple.

1) $A = \left(2\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$

2) $B = \left(8\sqrt{7}+21\right)\left(8-3\sqrt{7}\right)$

3) $C = \sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{6}\left(1-\sqrt{2}\right)$

Exercice 2.9

Écrire les nombres suivants sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) $A = \dfrac{7}{4}$

2) $B = -\dfrac{6}{5}$

3) $C = \dfrac{3}{20}$

4) $D = \dfrac{1}{25}$ **5)** $E = -\dfrac{13}{40}$ **6)** $F = \dfrac{3}{5^4}$

7) $G = \dfrac{-6}{2^7 \times 5^5}$ **8)** $H = \dfrac{24^2}{20^8 \times 16^4}$

Exercice 2.10

Mettre les nombres ci-dessous sous forme d'une fraction irréductible.

1) $A = 0,4 \div 0,3$ **2)** $B = \dfrac{12^{12} \times 21^{21}}{7^7 \times 14^{14} \times 15^{15}}$

3) $C = 3 \times \dfrac{45}{56} \div \dfrac{60}{28}$ **4)** $D = \dfrac{4 - 3 \div 2,1}{2,5 + \dfrac{1}{2}}$

Exercice 2.11

Résoudre les équations suivantes

1) $5x + 2\pi = 2(-4x + \pi)$ **2)** $(x + 3) + (2x - 1) = 0$

3) $7(x + 4) - 3(x + 2) = x + 7$ **4)** $3x + 5 = -\dfrac{7}{9}$

5) $\dfrac{3}{2}x + 4 = 2x - 5$ **6)** $2(x - 1) - 3(x + 1) = 4(x - 2)$

7) $\dfrac{1}{4}(x + 4) - \dfrac{1}{20}(x - 60) = \dfrac{2}{5}(x + 15)$

8) $\dfrac{4x - 3}{4} + \dfrac{3x - 8}{8} = \dfrac{5x - 3}{2} + \dfrac{2(3x - 2)}{7}$

Exercice 2.12

Un père a 30 ans, son fils a 10 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de l'âge du fils ?
Même question si le père a 40 ans et son fils 5 ans.

EXERCICE 2.13

Pour aller de Grenoble au col du Glandon à vélo, Isabelle roule à la vitesse de 10 km/h. Arrivée au col, elle se repose 2 heures. Au retour, elle roule à 30 km/h. Sachant que la promenade a duré 10 heures, Quelle est la distance entre Grenoble et le col du Glandon ?

EXERCICE 2.14

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x - 5 > 10$

2) $2(x-1) + 3(x+2) < 8(x-2) - x + 12$

3) $\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{3x-2}{6} \geq \dfrac{6x-2}{3}$

4) $\dfrac{x+8}{2} - \dfrac{5x-2}{6} \geq \dfrac{7x-4}{5}$

CHAPITRE 3

Polynômes du second degré

Ce chapitre est consacré à l'étude des polynômes du second degré. Tout d'abord on donne la définition de ces polynômes et celle de leurs racines. Ensuite, on explique comment déterminer ces racines et ainsi comment résoudre des équations du second degré en utilisant la notion de discriminant. On étudie également la factorisation des polynômes du second degré et le signe d'un polynôme de second degré, permettant ainsi de résoudre les inéquations de second degré. Ce chapitre se termine sur la relation liant les racines d'un polynôme du second degré et ses coefficients.

Sommaire

1 Définitions

Définition : *Polynôme du second degré*

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et x est une variable réelle (pouvant être notée $y, t, \ldots$). Les réels a, b et c sont appelés les **coefficients** du polynôme P.

REMARQUE

L'appellation « second degré » provient du terme ax^2 appelé **terme du second degré**. Ainsi, si $a = 0$, ce terme disparaît et le polynôme n'est alors pas du second degré.

EXEMPLES

- ▷ $P(x) = x^2 - 7x + 12$ est un polynôme du second degré. En effet, on a $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$.
- ▷ $P(t) = 4t^2$ est un polynôme du second degré (ici la variable est notée t). En effet, on a $P(t) = at^2 + bt + c$ avec $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$.
- ▷ $2x + 1$ s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec $a = 0$, $b = 2$ et $c = 1$. Puisque $a = 0$, $2x + 1$ n'est pas un polynôme du second degré.
- ▷ $6x^3 + 4x + 2$ contient un terme en x^3, ce n'est donc pas un polynôme du second degré (plus précisément il s'agit d'un polynôme du troisième degré).
- ▷ $(x-1)^2 - x^2$ n'est pas un polynôme du second degré. En effet, on a

$$(x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$$

Ainsi le terme du second degré disparaît lors du calcul.

EXERCICE 3.1

Les expressions ci-dessous sont-elles des polynômes du second degré ? Si oui donner ses coefficients.

1) Avec x pour inconnue :

a) $x^2 + 4x - 12$ **b)** $3x^3 - 6x - 16$

c) $5x^2 + 2x - \dfrac{1}{x}$ **d)** $-x^2 - 3$

2) Avec y pour inconnue (où $x \in \mathbb{R}$ est un paramètre) :

a) $y^2 + 3xy - 2$ **b)** $1 + 3y$

c) $y^3 + 2y^2 + 5y$ **d)** $xy + x^5y^2$

DÉFINITION : *Racine d'un polynôme du second degré*

Une **racine** du polynôme du second degré

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

est un nombre réel x_0 tel que $P(x_0) = 0$.

REMARQUE

Trouver les racines du polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$ est équivalent à déterminer les **solutions** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Il est possible de déterminer les solutions d'une équation du second degré assez facilement dans certains cas en utilisant la propriété ci-dessous.

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels. Alors, on a la propriété suivante :

$$ab = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad a = 0 \quad \textit{ou} \quad b = 0$$

En particulier,

$$a^2 = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad a = 0$$

EXEMPLES

Tous ces exemples présentent des équations du second degré qui se résolvent directement en utilisant les méthodes de calcul déjà présentées (notamment la factorisation) et la propriété ci-dessus.

- ▷ L'équation $(x-2)^2 = 0$ est bien une équation du second degré car $(x-2)^2 = 0$ est équivalente à $x^2 - 4x + 4 = 0$. Celle-ci a pour unique solution $x = 2$.
  En effet, en utilisant la propriété précédente avec $a = x - 2$, l'équation $(x-2)^2 = 0$ est équivalente à $x - 2 = 0$, d'où $x = 2$.
- ▷ De la même manière, pour tout réel a, l'équation $(x-a)^2 = 0$ a pour unique solution $x = a$.
- ▷ L'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ se résout en utilisant l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

En effet, on a

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

donc l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$ est équivalente a $(x-1)^2 = 0$ dont l'unique solution est $x = 1$.

▷ L'équation $x^2 - 4 = 0$ se résout en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
En effet, on a

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$$

Ainsi, l'équation $x^2 - 4 = 0$ est équivalente a $(x-2)(x+2) = 0$.
D'après la propriété précédente avec $a = x - 2$ et $b = x + 2$, on en déduit $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$.
D'où l'équation $x^2 - 4 = 0$ admet deux solutions : $x = 2$ ou $x = -2$.

▷ L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'admet aucune solution.
En effet, sinon on aurait $x^2 = -4 < 0$ ce qui est absurde puisqu'un carré est toujours positif ou nul.

▷ L'équation $(x-1)^2 = 9$ est équivalente à $(x-1)^2 - 9 = 0$ qui s'écrit encore via l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (avec $a = x - 1$ et $b = 3$) sous la forme

$$(x - 1 - 3)(x - 1 + 3) = 0$$

soit $(x-4)(x+2) = 0$. On en déduit qu'il existe deux solutions : $x = 4$ et $x = -2$.

EXERCICE 3.2

Résoudre les équations suivantes :

1) $(x-8)^2 = 0$ **2)** $x^2 + 2x + 1 = 0$ **3)** $x^2 - 9 = 0$

4) $x^2 + 4x + 1 = -3$ **5)** $x^2 + 9 = 0$ **6)** $2(x+5)^2 = 8$

REMARQUE

On a vu dans les exemples précédents qu'une équation du second degré peut :

▷ avoir une unique solution,

▷ avoir deux solutions distinctes,

▷ n'avoir aucune solution.

Pour toute équation du second degré, il est possible de déterminer laquelle des trois situations précédentes est vérifiée. De plus, lorsqu'une équation admet une ou deux solutions, on sait les calculer. C'est l'objet des deux sections suivantes.

2 Forme canonique d'un polynôme du second degré

La forme canonique d'un polynôme du second degré est une simplification de celui-ci qui permet d'en trouver les racines (autrement dit de déterminer les solutions d'une équation du second degré).

Exemple

Soit $P(x) = x^2 - 2x + 5$. On remarque que $x^2 - 2x$ est le début d'une identité remarquable. Plus précisément, on a

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

En retranchant 1 à chaque membre de la précédente égalité on obtient

$$x^2 - 2x + \underbrace{1 - 1}_{=0} = (x-1)^2 - 1$$

soit $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$. Ainsi, $P(x)$ peut s'écrire

$$P(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{=(x-1)^2-1} + 5 = (x-1)^2 - 1 + 5 = (x-1)^2 + 4.$$

C'est ce que l'on appelle la forme canonique de P.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition : *Forme canonique d'un polynôme du second degré*

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Alors, $P(x)$ s'écrit

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le ***discriminant*** *de P.*
En particulier, si on note $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$, alors $P(x)$ s'écrit

$$P(x) = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

et cette expression est appelée la ***forme canonique*** *de P.*

Attention

En général, on ne retient pas la formule donnée par la Proposition mais simplement le résultat final qui signifie que tout polynôme du second degré admet une forme canonique.

Pour déterminer cette forme, on raisonne comme dans l'exemple donné précédemment ainsi que dans les exemples ci-dessous.

Exemples

- Soit $P(x) = x^2 - 4x - 5$. On écrit $x^2 - 4x$ comme le début d'une identité remarquable en notant que l'on a $x^2 - 4x = x^2 - 2 \times 2 \times x$, soit $a^2 - 2ab$ avec $a = x$ et $b = 2$.
  Ainsi, $x^2 - 4x$ est le début de l'identité remarquable :
  $$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$
  On en déduit
  $$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$
  D'où
  $$P(x) = \underbrace{x^2 - 4x}_{=(x-2)^2-4} -5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9$$
  Ce qui est la forme canonique de $P(x)$.
- Soit $P(x) = x^2 - 8x + 7$. On écrit $x^2 - 8x$ comme le début d'une identité remarquable en notant que l'on a $x^2 - 8x = x^2 - 2 \times 4 \times x$, soit $a^2 - 2ab$ avec $a = x$ et $b = 4$.
  Ainsi, $x^2 - 8x$ est le début de l'identité remarquable :
  $$x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$$
  On en déduit
  $$x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$$
  D'où
  $$P(x) = \underbrace{x^2 - 8x}_{=(x-4)^2-16} +7 = (x-4)^2 - 16 + 7 = (x-4)^2 - 9$$
  Ce qui est la forme canonique de $P(x)$.

▷ Soit $P(x) = 2x^2 - 4x + 4$. Alors, $P(x) = 2(x^2 - 2x) + 4$. On a déjà vu que l'on a

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

d'où

$$P(x) = 2(\underbrace{x^2 - 2x}_{=(x-1)^2-1}) + 4 = 2((x-1)^2 - 1) + 4 = 2(x-1)^2 - 2 + 4 = 2(x-1)^2 + 2$$

Ce qui est la forme canonique de $P(x)$.

Exercice 3.3

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

1) $P_1(x) = x^2 + 4x - 12$ **2)** $P_2(x) = x^2 - 6x - 16$ **3)** $P_3(x) = -x^2 - 2x - 3$

La forme canonique d'un polynôme peut permettre d'en déterminer les solutions comme on peut le voir dans les exemples ci-dessous.

Exemples

On reprend les exemples donnés précédemment et on en détermine les racines.

▷ Le polynôme $P(x) = x^2 - 4x - 5$ s'écrit $P(x) = (x-2)^2 - 9$. Ainsi, les solutions de $P(x) = 0$ sont les solutions de l'équation

$$(x-2)^2 - 9 = 0 \text{ soit encore } (x-2)^2 - 3^2 = 0$$

ce qui s'écrit (par identité remarquable)

$$(x - 2 - 3)(x - 2 + 3) = 0$$

soit $(x-5)(x+1) = 0$ dont les solutions sont $x = 5$ et $x = -1$. Ainsi, $P(x)$ a deux racines qui sont 5 et -1.

▷ Le polynôme $P(x) = x^2 - 8x + 7$ s'écrit $P(x) = (x-4)^2 - 9$.
En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on obtient que les racines de $P(x)$ (ou les solutions de $x^2 - 8x + 7 = 0$) sont 7 et 1.

▷ Le polynôme $P(x) = 2x^2 - 4x + 4$ s'écrit $P(x) = 2(x-1)^2 + 2$. Ainsi, les solutions de $P(x) = 0$ sont les solutions de l'équation

$$2(x-1)^2 + 2 = 0$$

soit
$$(x-1)^2 = -1 < 0$$
ce qui est impossible car un carré est toujours positif. Ainsi, le polynôme $P(x) = 2x^2 - 4x + 4$ n'admet pas de racine (réelle).

EXERCICE 3.4

À l'aide des formes canoniques déterminées dans l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$ **2)** $x^2 - 6x - 16 = 0$ **3)** $-x^2 - 2x - 3 = 0$

On finit cette section par la démonstration de la Proposition (cette démonstration peut être admise en première lecture).

Démonstration. Il suffit de généraliser la méthode vue dans les exemples. On a
$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$
En utilisant l'identité remarquable
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$
on obtient
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$
Ce qui donne
$$\begin{aligned} P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$
d'où
$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
puisque $\Delta = b^2 - 4ac$. □

3 Rôle du discriminant, racines et factorisation

Rappelons que le **discriminant** Δ d'un polynôme du second degré de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On a vu que le discriminant apparaît dans la forme canonique du polynôme P et que cette forme canonique permet de déterminer les racines de P. Ainsi, on en déduit que les racines de P s'obtiennent à l'aide de son discriminant Δ.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit Δ le discriminant du polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- *Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine réelle.*
  De plus, on ne peut pas factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.
- *Si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine réelle*

  $$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

  et $P(x)$ se factorise sous la forme

  $$P(x) = a(x - x_0)^2$$

- *Si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles qui sont*

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et $P(x)$ se factorise sous la forme

  $$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemples

- Le discriminant de $x^2 + 4x - 12$ est

  $$\Delta = 4^2 - 4 \times (-12) = 16 + 48 = 64 = 8^2$$

  Le polynôme $x^2 + 4x - 12$ a donc deux racines réelles qui sont

  $$x_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

Autrement dit, les solutions de $x^2 + 4x - 12 = 0$ sont -6 et 2. Ainsi, on a la factorisation

$$x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$$

▷ Le discriminant de $-x^2 - 2x - 3$ est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 - 12 = -8$$

Le polynôme $-x^2 - 2x - 3$ n'a donc pas de racine réelle. En particulier l'équation $-x^2 - 2x - 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser le polynôme $-x^2 - 2x - 3$.

▷ Le discriminant de $2x^2 - 4x + 2$ est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$$

donc le polynôme $2x^2 - 4x + 2$ admet une unique racine qui est

$$x_0 = -\frac{-4}{4} = 1$$

et on a la factorisation

$$2x^2 - 4x + 2 = 2(x - x_0)^2 = 2(x - 1)^2$$

▷ Le discriminant de $x^2 - 4x + 2$ est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8$$

donc le polynôme $x^2 - 4x + 2$ admet deux racines réelles qui sont

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2}$$

Or $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ donc

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

et on a la factorisation

$$x^2 - 4x + 2 = (x - 2 + \sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2})$$

Exercice 3.5

1) Pour chacune des équations du second degré ci-dessous, déterminer le nombre de solutions réelles. *On ne demande pas de calculer ces solutions.*

a) $x^2 + 6x - 5 = 0$ **b)** $x^2 + 9x - 14 = 2$ **c)** $x^2 - 5 = 6 - 5x + 3x^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5x^2 - x + 27 = 0$ **b)** $11x^2 + 5x - 2 = 0$ **c)** $2x^2 - 8x + 8 = 0$

Exercice 3.6

Factoriser les polynômes suivants lorsque c'est possible :

1) $P_1(x) = x^2 - x + 17$

2) $P_2(x) = \dfrac{2}{3} + x + \dfrac{x^2}{3}$

3) $P_3(x) = -6\,x - 10 + 4\,x^2$

On termine cette section avec la démonstration du théorème (qui peut être admise en première lecture)

Démonstration. On a

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Les racines de $P(x)$ sont les solutions de $P(x) = 0$, ce qui s'écrit encore

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

soit (car $a \neq 0$)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \tag{1}$$

▷ Si $\Delta < 0$, alors puisque $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $a^2 > 0$, on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

donc (1) n'admet pas de solution.

▷ Si $\Delta = 0$, l'équation (1) s'écrit

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

et on en déduit que la seule solution est

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

▷ Si $\Delta > 0$, par identité remarquable, (1) s'écrit encore

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On en déduit qu'il y a deux solutions :

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ce qui donne le résultat. □

4 Signe d'un polynôme du second degré et inéquations du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. En factorisant $P(x)$, on va pouvoir déterminer son signe en fonction des valeurs de x et ainsi résoudre des inéquations du second degré.

On note Δ le discriminant de $P(x)$.

1) Supposons $\Delta > 0$.
Soient x_1 et x_2 les racines de $P(x)$ avec $x_1 < x_2$. On a

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	|	signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Ce tableau signifie, par exemple, que si x est un réel tel que $x_1 < x < x_2$ alors $P(x)$ est du signe de $-a$ donc positif si a est négatif et négatif si a est positif.

2) Supposons $\Delta = 0$.
Soit x_0 la racine de $P(x)$. On a

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	
$(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x - x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

3) Supposons $\Delta < 0$.
Il n'y a pas de factorisation de $P(x)$. On utilise alors la forme canonique de $P(x)$:

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Puisque Δ est négatif, l'expression entre crochets est positive. Le signe de $P(x)$ est donc le même que celui de a.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.

Exemples

- ▷ Soit $P_1(x) = -6x^2 + x + 1$.
  Le discriminant de $P_1(x)$ est positif et ses racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Alors, le polynôme $P_1(x)$ est du signe de $a = -6$, donc négatif, sauf entre ses racines qui sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
- ▷ Soit $P_2(x) = 5x^2 + 6x + 2$.

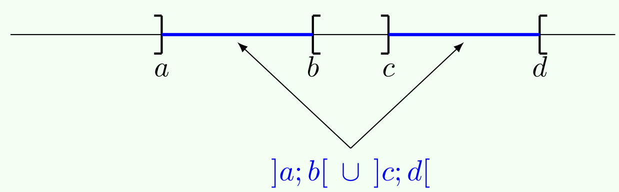
Le discriminant est négatif, le polynôme $P_2(x)$ est du signe de $a = 5$, donc positif sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit $P_3(x) = 2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$.
Le discriminant est nul, le polynôme $P_3(x)$ est du signe de $a = 2$, donc positif sur $\mathbb{R}$ et nul en $x_0 = -\dfrac{5}{4}$.

Pour écrire l'ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré, on a introduit dans le chapitre précédent la notion d'intervalles de $\mathbb{R}$. Afin d'écrire l'ensemble des solutions d'une inéquation du second degré, on aura besoin de la notion de réunion d'intervalles que l'on décrit ci-dessous.

Notation

Soient $]a;b[$ et $]c;d[$ deux intervalles. On note $]a;b[\cup]c;d[$, appelé la **réunion** de $]a;b[$ et $]c;d[$, l'ensemble des réels qui appartiennent soit à $]a;b[$, soit à $]c;d[$.



Exemples

▷ D'après les exemples donnés plus haut, $-6x^2 + x + 1$ est négatif, sauf entre $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$. Ce qui signifie que l'on a

$$-6x^2 + x + 1 < 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

et

$$-6x^2 + x + 1 \geq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$$

▷ On considère l'inéquation $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$.
Le polynôme $-x^2 + 3x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 > 0$ et pour racines 1 et 2. Ainsi $-x^2 + 3x - 2$ est du signe de $a = -1$ donc négatif sauf entre 1 et 2.
On en déduit que l'ensemble des solutions de $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ est $[1;2]$.

- ▷ Si l'on considère $-x^2 + 3x - 2 > 0$, l'ensemble des solutions est $]1; 2[$.
  En effet, les seules solutions de $-x^2 + 3x - 2 = 0$ sont 1 et 2.
- ▷ Considérons l'inéquation $x^2 - 8x - 9 > 0$.
  Le polynôme $x^2 - 8x - 9$ a pour discriminant $\Delta = 100 > 0$ et pour racines -1 et 9. Donc $x^2 - 8x - 9$ est positif sauf entre -1 et 9.
  On en déduit que l'ensemble des solutions de $x^2 - 8x - 9 > 0$ est $]-\infty; -1[\cup]9; +\infty[$.
- ▷ Soit l'inéquation $-x^2 - 2x - 3 > 0$.
  Le polynôme $-x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant $\Delta = -8 < 0$ donc $-x^2 - 2x - 3$ est toujours du signe de $a = -1$ donc négatif. Ainsi, $-x^2 - 2x - 3$ n'est jamais positif.
  Donc l'inéquation $-x^2 - 2x - 3 > 0$ n'admet aucune solution.

Exercice 3.7

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $4 - 3x^2 - 11x < 0$ **2)** $5x - 7x^2 - 8 < 0$ **3)** $3(x^2 + 2) \leq 10x$

5 Relation entre coefficients et racines d'un trinôme

Lorsqu'un polynôme du second degré admet deux racines, la somme et le produit de celles-ci sont liés aux coefficients du polynôme. Plus précisément, on a le résultat ci-dessous.

Proposition

Si le polynôme du seconde degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ a deux racines x_1 et x_2, alors on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Réciproquement, si x_1 et x_2 sont deux nombres réels quelconques alors x_1 et x_2 sont les racines du polynôme

$$x^2 - Sx + P$$

où $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$.

REMARQUE

Le résultat est vrai aussi bien pour $x_1 \neq x_2$ que pour $x_1 = x_2$.

Démonstration. Si P admet deux racines x_1 et x_2, en factorisant P on obtient

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Or on a

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

On en déduit

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

En identifiant terme à terme, on obtient

$$b = -a(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1x_2.$$

La réciproque est immédiate. □

EXEMPLE

Supposons que l'on cherche deux réels dont la somme vaut 7 et le produit 10.

- ▷ On pose
$$S = 7 \quad \text{et} \quad P = 10$$
- ▷ Déterminons les racines de $x^2 - Sx + P$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 49 - 40 = 9 = 3^2$ et donc ses racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$.
- ▷ Alors, les deux nombres (2 et 5) trouvés vérifient bien que leur somme vaut 7 et leur produit vaut 10.

EXERCICE 3.8

Trouver les solutions de chacun des systèmes suivants.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1x_2 &= 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1x_2 &= -28 \end{cases}$

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 3.1

1) Avec x pour inconnue :

a) $x^2 + 4x - 12$ est un polynôme du second degré. En effet, il est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1 \neq 0$, $b = 4$ et $c = -12$.

b) $3x^3 - 6x - 16$ n'est pas un polynôme du second degré car il contient un terme de degré 3 : $3x^3$.

c) $5x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme du second degré car il contient le terme $-\frac{1}{x}$.

d) $-x^2 - 3$ est un polynôme du second degré. En effet, il est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1 \neq 0$, $b = 0$ et $c = -3$ (dans la définition de polynôme du second degré les coefficients b et c peuvent être nuls).

2) Avec y pour inconnue :

a) $y^2 + 3xy - 2$ est un polynôme du second degré. En effet, il est de la forme $ay^2 + by + c$ avec $a = 1 \neq 0$, $b = 3x$ (x est un paramètre et non une variable ici) et $c = -2$.

b) $1 + 3y$ n'est pas un polynôme du second degré car il est de la forme $ay^2 + by + c$ avec $a = 0$.

c) $y^3 + 2y^2 + 5y$ n'est pas un polynôme du second degré car il contient un terme de degré 3 : y^3.

d) $xy + x^5y^2$ est un polynôme du second degré si $x \neq 0$. En effet, il est de la forme $ay^2 + by + c$ avec $a = x^5 \neq 0$, $b = x$ et $c = 0$. Par contre, si $x = 0$ alors $a = x^5 = 0$ et donc $xy + x^5y^2$ n'est pas un polynôme du second degré.

Corrigé Exercice 3.2

1) L'équation $(x-8)^2 = 0$ est équivalente à $x - 8 = 0$ et donc a pour unique solution $x = 8$.

2) L'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ s'écrit encore $(x+1)^2 = 0$ dont on déduit qu'elle a pour unique solution $x = -1$.

3) L'équation $x^2 - 9 = 0$ est équivalente à $(x-3)(x+3) = 0$ et donc a deux solutions : 3 et -3.

4) L'équation $x^2 + 4x + 1 = -3$ s'écrit encore

$$x^2 + 4x + \underbrace{1 + 3}_{=4} = \underbrace{-3 + 3}_{=0}$$

soit $x^2 + 4x + 4 = 0$ qui est équivalente à $(x + 2)^2 = 0$. On en déduit que l'équation a une unique solution : -2.

5) L'équation $x^2 + 9 = 0$ est équivalente à $x^2 = -9$ qui n'admet aucune solution car $x^2 \geq 0$ et $-9 < 0$.

6) L'équation $2(x+5)^2 = 8$ s'écrit encore $(x+5)^2 = 4$, soit $(x+5)^2 - 4 = 0$. En factorisant on obtient

$$(x + 5 - 2)(x + 5 + 2) = 0$$

soit $(x + 3)(x + 7) = 0$ dont les solutions sont -3 et -7.

Corrigé Exercice 3.3

1) On a $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$, d'où

$$P_1(x) = x^2 + 4x - 12 = (x + 2)^2 - 4 - 12 = (x + 2)^2 - 16$$

2) On a $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, d'où

$$P_2(x) = x^2 - 6x - 16 = (x - 3)^2 - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25$$

3) En factorisant (partiellement) par -1, on obtient

$$P_3(x) = -x^2 - 2x - 3 = -(x^2 + 2x) - 3$$

Or $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, d'où

$$\begin{aligned} P_3(x) &= -(x^2 + 2x) - 3 = -\left((x + 1)^2 - 1\right) - 3 \\ &= -(x + 1)^2 + 1 - 3 = -(x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 3.4

1) On a $x^2 + 4x - 12 = (x + 2)^2 - 16$ donc l'équation $x^2 + 4x - 12 = 0$ est équivalente à $(x+2)^2 - 16 = 0$ qui s'écrit encore $(x+2-4)(x+2+4) = 0$, soit $(x - 2)(x + 6) = 0$. On en déduit que les solutions sont 2 et -6.

2) Par le même raisonnement, l'équation $x^2 - 6x - 16 = 0$ est équivalente à $(x-8)(x+2) = 0$ et ainsi les solutions sont -2 et 8.

3) L'équation $-x^2 - 2x - 3 = 0$ est équivalente à $-(x+1)^2 - 2 = 0$, soit $(x+1)^2 = -2$ qui n'admet pas de solution.

Corrigé Exercice 3.5

1) **a)** $x^2+6x-5 = 0$. Le discriminant de x^2+6x-5 est $\Delta = 6^2-4\times(-5) = 36+20 = 56 > 0$. Il y a donc deux solutions réelles.

b) L'équation $x^2 + 9x - 14 = 2$ est équivalente à $x^2 + 9x - 16 = 0$. Le discriminant de $x^2 + 9x - 16$ est $\Delta = 81 + 4 \times 16 > 0$. Il y a donc deux solutions réelles.

c) L'équation $x^2 - 5 = 6 - 5x + 3x^2$ s'écrit encore $2x^2 - 5x + 11 = 0$. Le discriminant de $2x^2 - 5x + 11$ est $\Delta = 25 - 88 < 0$. Il n'y a donc pas de solutions réelles.

2) **a)** $5x^2 - x + 27 = 0$. Le discriminant de $5x^2 - x + 27$ est $\Delta = 1 - 20 \times 27 < 0$. Il n'y a donc pas de solution réelle.

b) $11x^2 + 5x - 2 = 0$. Le discriminant de $11x^2 + 5x - 2$ est $\Delta = 25 + 88 = 113 > 0$. Il y a donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{113}}{22} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5-\sqrt{113}}{22}$$

c) $2x^2 - 8x + 8 = 0$. On a $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x-2)^2$. On en déduit que l'unique solution est $x = 2$.

Corrigé Exercice 3.6

Factoriser les polynômes suivants lorsque c'est possible :

1) $P_1(x) = x^2 - x + 17$. Le discriminant de $P_1(x)$ est $\Delta = 1 - 4 \times 17 < 0$. Donc $P_1(x)$ n'admet pas de factorisation.

2) $P_2(x) = \frac{2}{3} + x + \frac{1}{3}x^2$. Le discriminant de $P_2(x)$ est $\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} > 0$. Les deux racines de $P_2(x)$ sont

$$x_1 = \frac{-1+1/3}{4/3} = \frac{-2/3}{4/3} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-1/3}{4/3} = \frac{-4/3}{4/3} = -1.$$

On en déduit la factorisation de $P_2(x)$:

$$P_2(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1)$$

3) $P_3(x) = -6x - 10 + 4x^2$. Pour simplifier les calculs on peut d'abord factoriser par 2 : $P_3(x) = 2(2x^2 - 3x - 5)$, puis on étudie le polynôme $2x^2 - 3x - 5$. Son discriminant est $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$ et ses racines sont

$$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

On obtient la factorisation

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

d'où

$$P_3(x) = 2(2x^2 - 3x - 5) = 4(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

Corrigé Exercice 3.7

1) $4 - 3x^2 - 11x < 0$. Le discriminant de $-3x^2 - 11x + 4$ est $\Delta = 121 + 48 = 13^2$ et ses racines sont

$$x_1 = \frac{11+13}{-6} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11-13}{-6} = \frac{1}{3}$$

On en déduit que $-3x^2 - 11x + 4$ est du signe de -3, donc négatif, sauf entre -4 et $\frac{1}{3}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de $4 - 3x^2 - 11x < 0$ est $]-\infty; -4[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

2) $5x - 7x^2 - 8 < 0$. Le discriminant de $-7x^2 + 5x - 8$ est $\Delta = 25 - 4 \times 42 < 0$ donc $-7x^2 + 5x - 8$ est du signe de -7, soit négatif. Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

3) $3(x^2 + 2) \leq 10x$. L'inéquation s'écrit encore $3x^2 - 10x + 6 \leq 0$. Le discriminant de $3x^2 - 10x + 6$ est $\Delta = 100 - 72 = 28 = 4 \times 7 > 0$ et ses racines sont

$$x_1 = \frac{10 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{7}}{3}$$

Alors le polynôme $3x^2 - 10x + 6$ est positif sauf entre $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de $3(x^2+2) \leq 10x$ est $\left[\dfrac{5-\sqrt{7}}{3} ; \dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\right]$.

Corrigé Exercice 3.8

1) Il suffit de déterminer les racines du polynôme $x^2 - 4x + 2$. On obtient $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

2) Il suffit de déterminer les racines du polynôme $x^2 - 3x - 28$. On obtient $x_1 = 7$ et $x_2 = -4$.

7 Exercices

EXERCICE 3.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\,x^2 - 13\,x + 6 = 0$ **2)** $\dfrac{13\,x}{7} - \dfrac{2}{7} - 3\,x^2 = 0$ **3)** $-\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{17}{3} = 0$

EXERCICE 3.10

Factoriser les polynômes suivants lorsque c'est possible :

1) $P_1(x) = 9\,x - 6 + 6\,x^2$

2) $P_2(x) = -42\,x - 7 + 49\,x^2$

3) $P_3(x) = \dfrac{2\,x^2}{5} + 3x + 13$

EXERCICE 3.11

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2x^2 - 6x \leq 20$ **2)** $7x^2 + 29x + 30 \leq 0$ **3)** $4x^2 + 25 \leq 20x$

EXERCICE 3.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

1) $\dfrac{x(23x-1)}{4x^2+1} = 2$ **2)** $\dfrac{3\left(x^2-1\right)}{2} = 11x - 5$

EXERCICE 3.13

Déterminer le réel K de telle façon que l'équation ci-dessous admette une unique solution.
Indication : Il y a deux valeurs de K possibles.

$$x^2 + K\,x + K + 1 = 0.$$

Exercice 3.14

En augmentant de 5 cm le côté d'un carré, on a augmenté son aire de 21 %. Combien mesurait le côté initialement ?

Exercice 3.15

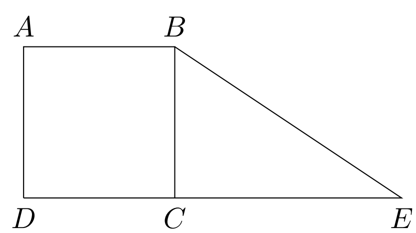
Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes. Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

Exercice 3.16

Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leurs âges est de 116. Calculer les âges du père et du fils.

Exercice 3.17

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré et BCE est un triangle rectangle en C. On sait que la longueur CE est de 10 cm. On note x la longueur BC. Que doit valoir x pour que l'aire du quadrilatère $ABED$ soit de 6 cm^2 ?



CHAPITRE 4

Géométrie vectorielle dans le plan

Dans ce chapitre, on rappelle la notion de vecteurs et des opérations qui y sont associées (aussi bien dans le plan que dans l'espace). Ensuite, on définit les bases et repères du plan menant à la notion de coordonnées d'un vecteur et d'un point. À partir de ces différents outils, on montre comment déterminer les équations des droites et des cercles dans le plan. Le cas de la géométrie dans l'espace sera abordé au chapitre 8.

Sommaire

1 Vecteurs

On appelle **plan** toute surface plate illimitée (intuitivement on pourra penser à une feuille de cahier infinie, un tableau infini, etc.), on parle aussi d'espace à deux dimensions. Dans le cas d'un espace à trois dimensions, on parle simplement d'**espace**.

Dans cette section, toute les notions introduites sont valables dans le plan et dans l'espace bien que les illustrations ne seront que dans le plan (voir chapitre 8 pour le cas de l'espace).

Définition : *Direction*

On dit que deux droites du plan ou de l'espace ont la même **direction** si ces deux droites sont parallèles.

Autrement dit, une direction est simplement la donnée d'une droite et est la même pour toute autre droite parallèle à cette première.

Étant donnée une droite (donc une direction) et deux points A et B de cette droite, on peut définir deux sens différents : celui allant de A vers B et celui allant de B vers A.

Définition : *Vecteur*

Un **vecteur** du plan ou de l'espace est un objet mathématique caractérisé par

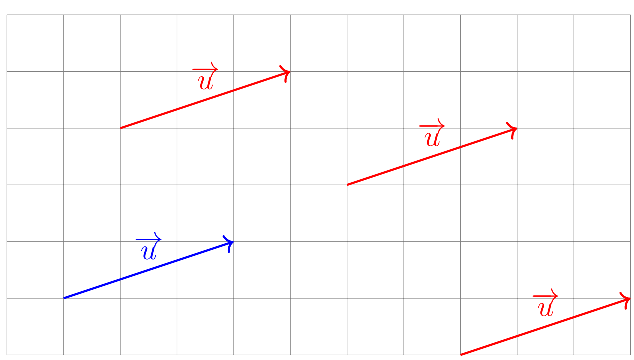
- ▷ sa *direction*,
- ▷ son *sens*,
- ▷ sa *norme* (sa longueur).

Notations

- ▷ Les vecteurs sont souvent notés $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ...
- ▷ La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $||\overrightarrow{u}||$.
- ▷ On note $\overrightarrow{0}$ le vecteur de norme nulle.

Exemple

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan donné ci-dessous peut être représenté n'importe où dans le plan (on parle de **représentants**) du moment qu'il conserve la même direction, le même sens et la même norme.



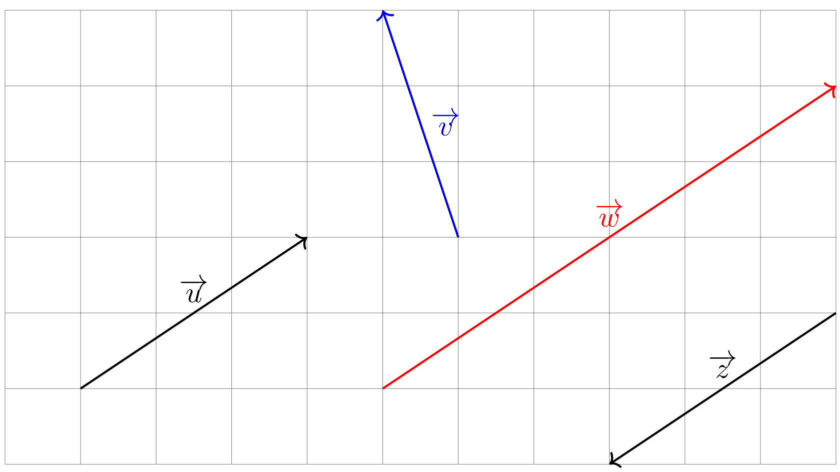
DÉFINITION : *Égalité de vecteurs*

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **égaux**, noté $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, s'ils ont même direction, même sens et même norme.

EXEMPLE

Sur la figure ci-dessous,

- ▷ les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas égaux car ils n'ont pas la même direction,
- ▷ les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ont la même direction et le même sens mais ils n'ont pas la même norme donc ils ne sont pas égaux,
- ▷ les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{z}$ ont la même direction et la même norme mais ils n'ont pas le même sens donc ils ne sont pas égaux.



RAPPELS

Soient A et B deux points du plan ou de l'espace.

1) Il existe une unique droite passant par A et B que l'on note (AB).

2) Le segment reliant A et B est noté $[AB]$.

3) La distance séparant A et B (qui est la longueur du segment $[AB]$) est notée AB.

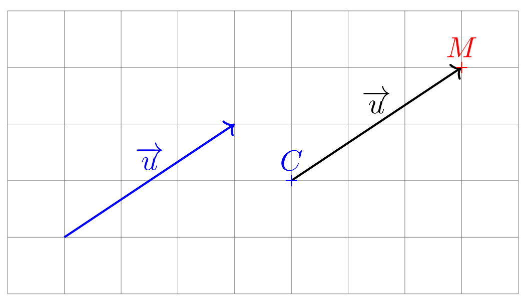
Notation

Soient A et B deux points du plan ou de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par

- ▷ sa direction qui est la droite (AB),
- ▷ son sens qui est de A vers B,
- ▷ sa norme qui est la distance AB ($\|\overrightarrow{AB}\| = AB$).

Remarques

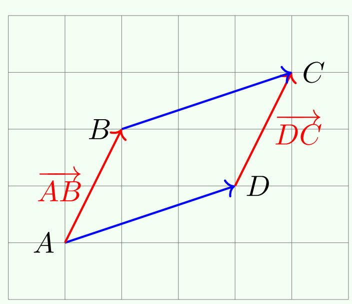
- ▷ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$.
  En effet, la distance de A à B est nulle si et seulement si $A = B$.
- ▷ Quels que soient le point C et le vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CM}$.



  On dit que ce point M est le translaté de C par le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Proposition : *Règle du parallélogramme*

Soient A, B, C, D quatre points du plan ou de l'espace.
Alors, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Remarque

La proposition précédente sera souvent utilisée pour montrer qu'un quadrilatère donné est un parallélogramme.

2 Opérations sur les vecteurs

Dans cette section on définit les opérations algébriques élémentaires sur les vecteurs : la somme et le produit par un réel. Comme pour la section précédente, ces résultats ont lieu aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Définition : *Somme de vecteurs*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
On définit le **vecteur somme** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, de la façon suivante :

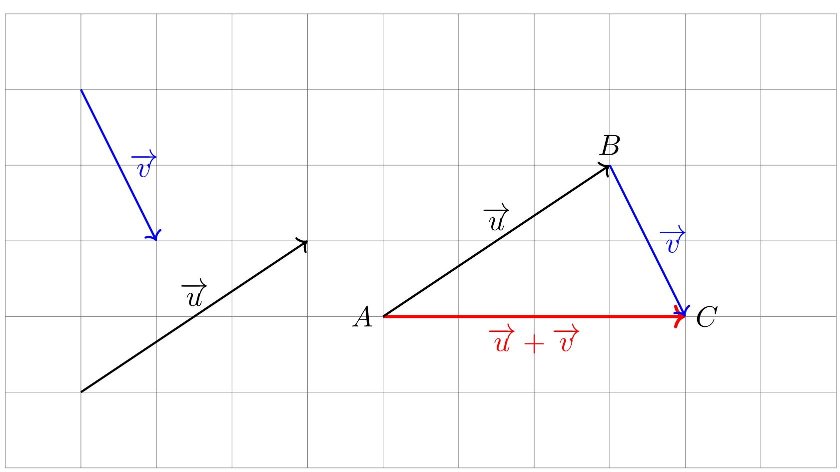
1) on place un point A du plan et on trace le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\overrightarrow{u}$ d'origine A,

2) on trace le représentant $\overrightarrow{BC}$ de $\overrightarrow{v}$ d'origine B.

Le vecteur somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur de représentant $\overrightarrow{AC}$.

Exemple

On illustre ci-dessous la définition du vecteur somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.



D'après la définition précédente, on déduit immédiatement le résultat ci-après.

PROPOSITION : *Relation de Chasles*

Pour tous points A, B et C du plan ou de l'espace, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

PROPOSITION

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a

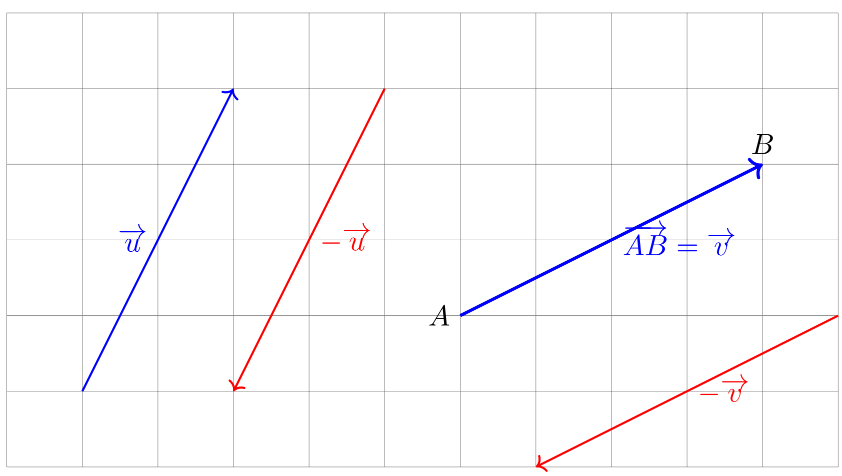
- ▷ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- ▷ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- ▷ $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$

DÉFINITION : *Vecteur opposé*

L'**opposé d'un vecteur** $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. On le note $-\overrightarrow{u}$.
Autrement dit, l'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ a même direction et même norme que $\overrightarrow{u}$ mais est de sens opposé.
En particulier, l'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

EXEMPLE



DÉFINITION : *Produit d'un vecteur par un réel*

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.
On définit le vecteur $k\overrightarrow{u}$ par

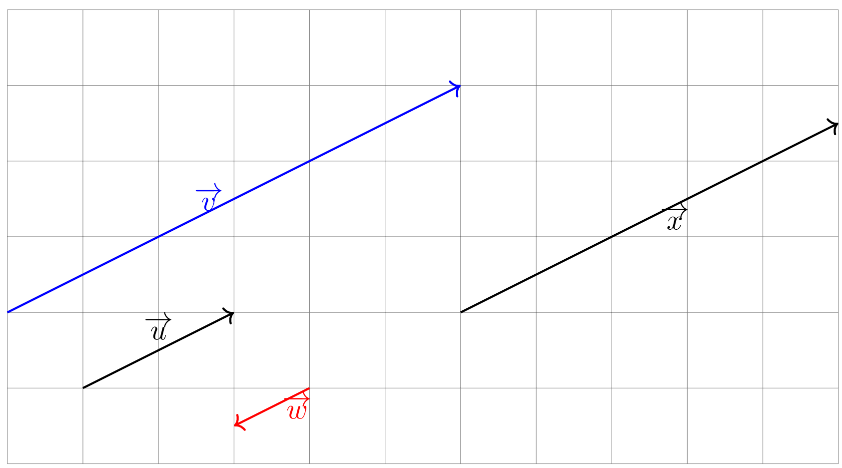
- ▷ si $k > 0$, $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$, le même sens que $\overrightarrow{u}$ et la norme de $k\overrightarrow{u}$ vaut k fois celle de $\overrightarrow{u}$,
- ▷ si $k < 0$, $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$, est de sens opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ et la norme de $k\overrightarrow{u}$ est égale à $-k$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.

De plus, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est défini par $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

EXEMPLE

Sur la figure ci-dessous, on a

- ▷ $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$
- ▷ $\overrightarrow{w} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$
- ▷ $\overrightarrow{x} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{u}$



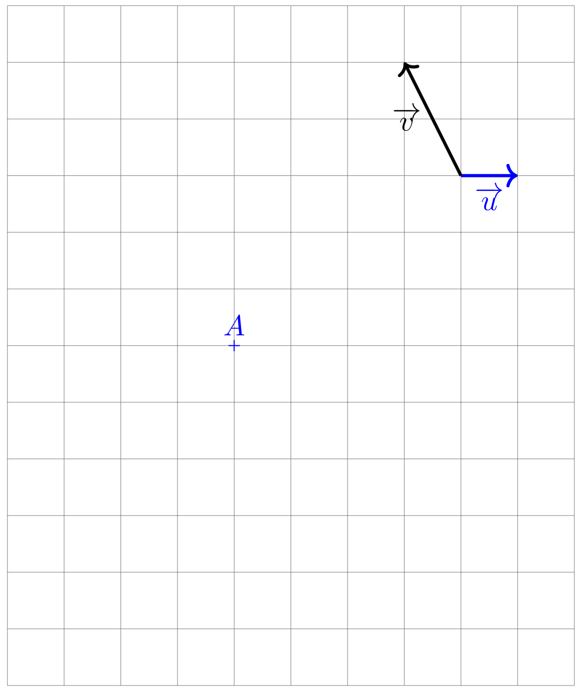
PROPRIÉTÉS

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et ℓ, on a :

- ▷ $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- ▷ $(k + \ell)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{u}$
- ▷ $k(\ell\overrightarrow{u}) = (k\ell)\overrightarrow{u}$
- ▷ $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* $k = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

EXERCICE 4.1

On se place dans le plan et on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le point A donnés dans la figure ci-dessous.



1) Construire les points B, C, D, E, F et G définis par les relations vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ **2)** $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$ **3)** $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$

4) $\overrightarrow{AE} = -2\vec{u} + \vec{v}$ **5)** $\overrightarrow{AF} = -3\vec{u} - \vec{v}$ **6)** $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{5}{2}\vec{v}$

2) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FE}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Quelle est la nature du quadrilatère $BDEF$?

3 Bases du plan

Dans cette section et les suivantes, on se place uniquement dans le cas du plan.

DÉFINITIONS : *Colinéarité et base*

1) Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.

2) Une **base** du plan est la donnée de deux vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ non nuls et non colinéaires. Une telle base est notée $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

PROPRIÉTÉ

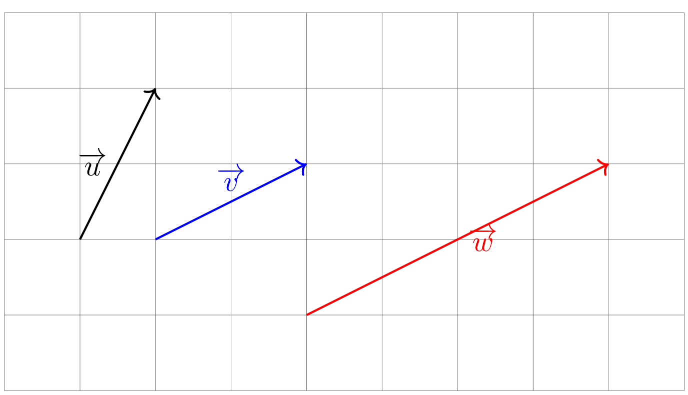
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que

$$\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$$

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous,

- ▷ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et sont non nuls donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base du plan,
- ▷ $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{v}$) donc ne forment pas une base du plan.



La notion de base du plan est très utile car celle-ci permet d'identifier tout vecteur du plan comme un couple de nombre réels d'après le résultat ci-dessous.

Théorème

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ *une base du plan.*
Alors, tout vecteur $\vec{u}$ *du plan se décompose de manière unique sous la forme*

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

où (x, y) *est un couple de nombres réels.*

Définition : *Coordonnées d'un vecteur*

Avec les notations précédentes, x et y sont appelées les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On note

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan, alors

- ▷ si $\vec{u} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- ▷ si $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{v} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

Remarque

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan, alors on a toujours

$$\vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ *une base du plan, deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de coordonnées*

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et k *un réel.*

▷ **Égalité de deux vecteurs.**
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \textit{si et seulement si} \quad x = x' \quad \textit{et} \quad y = y'$$

▷ **Somme de deux vecteurs.**
Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ *a pour coordonnées* $\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

▷ **Produit d'un vecteur par un réel.**
Le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\vec{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soient $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ une base du plan et trois vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix}$$

On a

- ▷ $-\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- ▷ $3\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
- ▷ $-2\vec{u} + 3\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

De plus, $\vec{v} = \vec{w}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x & = 2 \\ x - y & = 4 \end{cases}$$

ce qui donne $x = 2$ et $y = -2$.

REMARQUE

Soient $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ une base du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. À partir des coordonnées, on en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = kx' \quad \text{et} \quad y = ky'$$

La remarque précédente donne une première caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs. Le résultat ci-après en donne une deuxième caractérisation très utile.

Propriété

Soient $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ *une base du plan et* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *deux vecteurs non nuls.*
Alors, les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si*

$$xy' - yx' = 0$$

Exemple

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ une base du plan. Considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

▷ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car

$$(-1)\times(-9) - 3\times 3 = 9 - 9 = 0$$

On peut aussi montrer ce résultat en remarquant que l'on a $\vec{v} = -3\vec{u}$.

▷ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car

$$-1\times 4 - 3\times 2 = -4 - 6 = -10 \neq 0$$

Exercice 4.2

Le plan est muni d'une base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1) Dans chaque cas, préciser en justifiant si les vecteurs sont colinéaires ou non.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

2) Déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ afin que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1-a\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}a-1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2a\\2a+3\end{pmatrix}$

4 Repère cartésien du plan

Afin de définir des coordonnées pour tout point du plan, la notion de base n'est pas suffisante. Il est nécessaire alors de définir la notion de repère du plan.

Définitions : *Repère du plan*

On appelle **repère cartésien du plan** (ou simplement **repère**) tout triplet $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ dans lequel

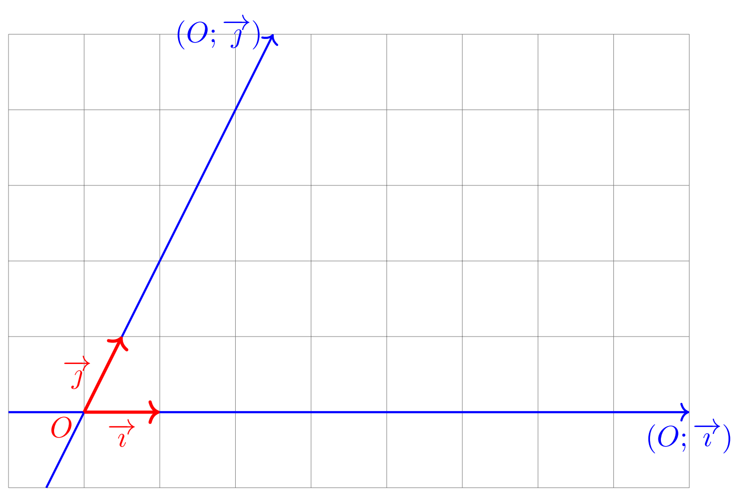
- ▷ O est un point du plan, appelé l'**origine** du repère,
- ▷ $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ est une base du plan.

Étant donné un repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ du plan,

- ▷ la droite passant par O et de direction $\overrightarrow{\imath}$, notée $(O; \overrightarrow{\imath})$, est appelée l'**axe des abscisses**,
- ▷ la droite passant par O et de direction $\overrightarrow{\jmath}$, notée $(O; \overrightarrow{\jmath})$, est appelée l'**axe des ordonnées**.

Exemple

Dans la figure ci-dessous, $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ est un repère du plan ($\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ ne sont pas colinéaires) et on a représenté les axes des abscisses et des ordonnées).



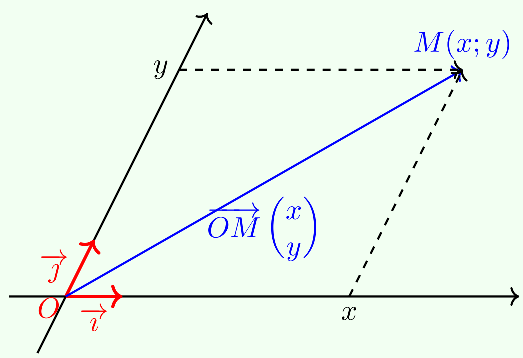
Définition : *Coordonnées d'un point*

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère du plan et M un point du plan.
On appelle **coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Notation

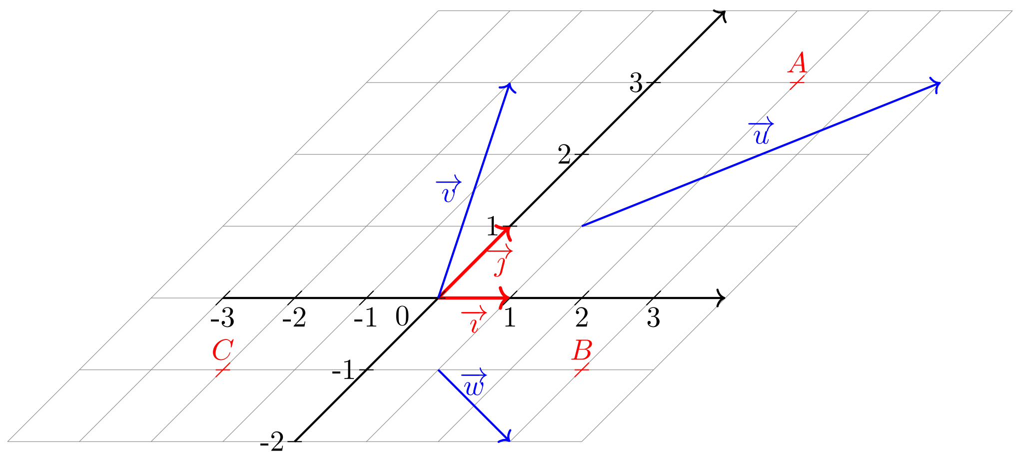
Pour différencier les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur, on note les coordonnées des points horizontalement et les coordonnées des vecteurs verticalement :

$$M(x; y) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Exercice 4.3

Déterminer les coordonnées des points A, B, C et des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ donnés dans la figure ci-dessous.



Propriétés

Considérons un repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ du plan et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

- ▷ *Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

- ▷ *Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont*

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemple

Soient $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan et $A(-3;-2)$, $B(0;3)$, $C(4;4)$ et $D(1;-1)$. Montrons de deux façons différentes que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

1) On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Par conséquent, $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Le milieu I de $[AC]$ a pour coordonnées

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-3+4}{2};\frac{-2+4}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1\right)$$

et le milieu J de $[BD]$ a pour coordonnées

$$J\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(\frac{0+1}{2};\frac{3-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1\right)$$

Donc $I=J$, autrement dit $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Par conséquent, $ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux, c'est-à-dire un parallélogramme.

DÉFINITIONS : *Orthogonalité et orthonormalité*

Soient $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère du plan.

- ▷ On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.
- ▷ Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**.
- ▷ Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de même norme, le repère est dit **orthonormal** (ou **orthonormé**).

PROPRIÉTÉ

Considérons un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
Alors, on a

$$AB^2=||\overrightarrow{AB}||^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

REMARQUE

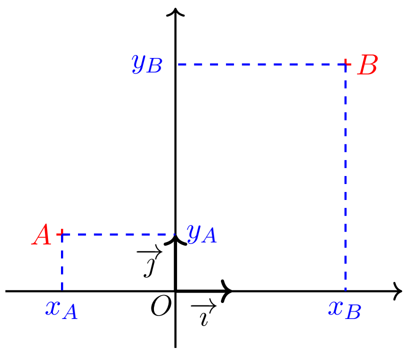
La propriété précédente est une conséquence du théorème de Pythagore comme illustré dans les deux figures suivantes :

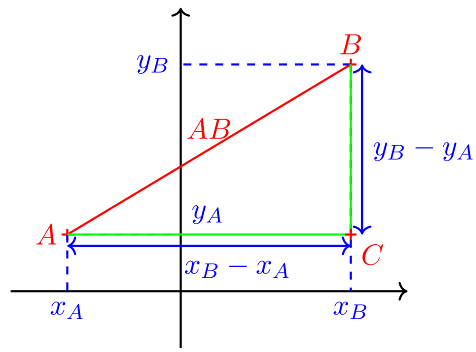
- ▷ la figure de gauche représente les coordonnées de A et B,
- ▷ sur la figure de droite on observe que le triangle ABC est rectangle en C et ses longueurs vérifient

$$AC=x_B-x_A \quad \text{et} \quad BC=y_B-y_A$$

D'après le théorème de Pythagore, on obtient

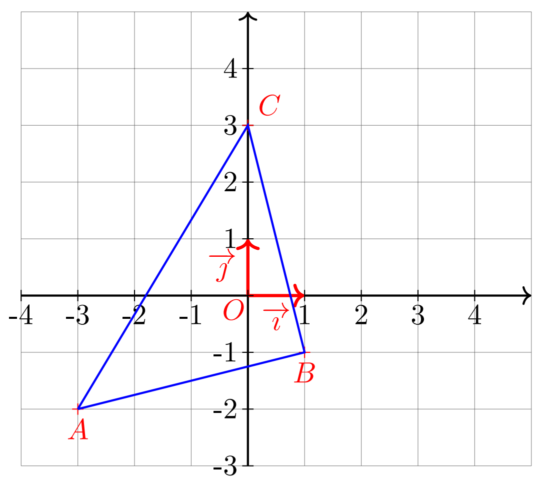
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$





EXEMPLE

Soient $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $A(-3;-2)$, $B(1;-1)$ et $C(0;3)$.



Montrons que le triangle ABC est un triangle isocèle rectangle en B. On a

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 3^2 + 5^2 = 34$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (-1)^2 + 4^2 = 17$$

Donc $AB = BC$ et $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Par conséquent, ABC est donc un triangle isocèle rectangle en B.

5 Équations de droites et de cercles dans le plan

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Proposition

Soit (d) une droite du plan.
Alors, il existe trois réels α, β et γ tels que tout point $M(x;y)$ du plan appartient à (d) si et seulement si l'on a

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

*On dit alors que $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une **équation de la droite** (d).*

Remarques

- L'équation d'une droite n'est pas unique. En effet, si l'on a $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ alors pour tout réel k, on a encore

$$k\alpha x + k\beta y + k\gamma = 0$$

  et ainsi on obtient une nouvelle équation pour la même droite.
- Si $\beta \neq 0$, en divisant $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ par β, on obtient

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} = ax + b \quad \text{où} \quad a = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad b = -\frac{\gamma}{\beta}$$

  qui est la forme la plus courante d'une équation de droite.
- Si $\beta = 0$, en divisant $\alpha x + \gamma = 0$ par α, on obtient

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha} = c$$

  qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

On va voir comment déterminer l'équation d'une droite en utilisant la notion de vecteurs. Pour cela on utilisera le résultat suivant :

Propriété

Soient A, B et M trois points distincts du plan.
Alors, A, B et M sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

En particulier, M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

MÉTHODE : *Déterminer l'équation d'une droite*

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan.
Pour déterminer l'équation de la droite (AB) :

1) on fixe un point $M(x, y)$ du plan,

2) M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires,

3) on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$,

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$$

4) on applique la caractérisation de la colinéarité aux coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$:

$$(x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

ce qui est l'équation de la droite (AB).

EXEMPLE

Soient $A(2; -3)$ et $B(-6; 9)$ deux points. Déterminons une équation de la droite (AB).

Soit $M(x; y)$ un point du plan. Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6-2 \\ 9+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si

$$-8 \times (y+3) - 12 \times (x-2) = 0$$

ce qui donne

$$12x + 8y = 0.$$

Par conséquent, (en divisant l'équation par 4) la droite (AB) a pour équation $3x + 2y = 0$ que l'on peut écrire sous la forme $y = -\dfrac{3x}{2}$.

EXERCICE 4.4

On considère les points A et B de coordonnées

$$A(5;-2) \quad \text{et} \quad B(2;-1)$$

1) Déterminer l'équation de la droite (AB).

2) En déduire que le point $C(-1;0)$ est sur la droite (AB) tandis que le point $D(0;1)$ n'appartient pas à (AB).

MÉTHODE : *Tracé d'une droite*

On considère la droite (d) d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
Pour tracer cette droite, on procède de la manière suivante :

1) on choisit un réel x_0 (n'importe lequel), puis on calcule y_0 tel que

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$

on obtient ainsi un point $A(x_0; y_0)$,

2) on choisit un second réel x_1 (différent de x_0), puis on calcule y_1 tel que

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0$$

on obtient ainsi un second point $B(x_1; y_1)$,

3) la droite (d) est la droite passant par A et B.

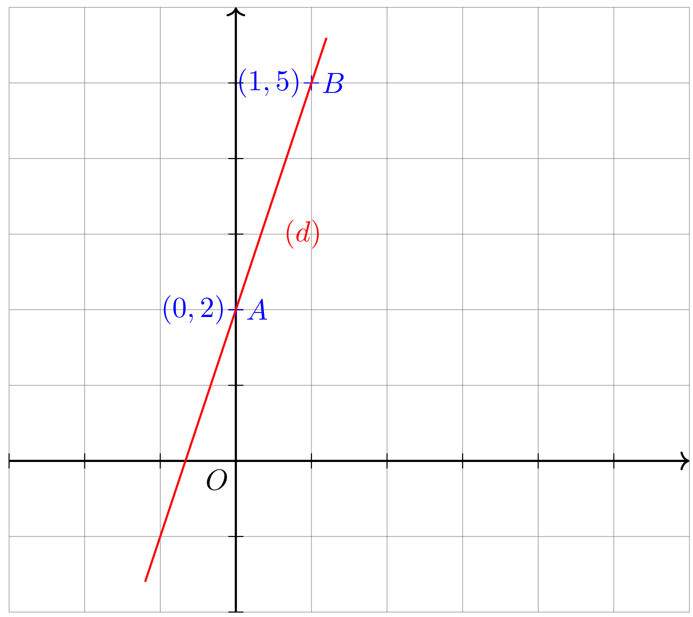
EXEMPLE TRACÉ D'UNE DROITE

Soit (d) la droite d'équation $y = 3x + 2$ (ou $y - 3x - 2 = 0$).

1) Pour $x_0 = 0$, on obtient $y_0 = 3 \times 0 + 2 = 2$ donc la droite (d) passe par le point $A(0,2)$.

2) Pour $x_1 = 1$, on obtient $y_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$ donc la droite (d) passe par le point $B(1,5)$.

3) On obtient la représentation graphique suivante :



DÉFINITION : *Cercle*

Soient A un point du plan et $r > 0$. On appelle **cercle** de centre A et de rayon r, l'ensemble des points M du plan tels que $AM = r$.

Comme pour une droite, l'équation d'un cercle est une équation vérifiée par les coordonnées de tout point du cercle. L'équation d'un cercle est donnée dans le résultat suivant :

PROPOSITION

Soient $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $r > 0$.
Alors, l'équation du cercle de centre A et de rayon $r > 0$ est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

REMARQUE

Ce résultat est immédiat. En effet, puisque le plan est muni d'un repère orthonormé, pour tous points $A(x_A, y_A)$ et $M(x, y)$, on a

$$AM^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$

Or M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si $AM^2 = r^2$.

EXERCICE 4.5

1) Quelle est l'équation du cercle centré à l'origine et de rayon 1 ?

2) Même question pour le cercle de centre $A(3;2)$ et de rayon 5.

6 Intersection de droites et intersection d'une droite et d'un cercle

Pour finir ce chapitre, on étudie comment déterminer l'intersection de deux droites et l'intersection d'une droite et d'un cercle à partir des équations de droites et des équations de cercles.

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

MÉTHODE : *Intersection de deux droites*

Soient (d) et (d') deux droites d'équations respectives :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

On va déterminer l'intersection de (d) et (d').

1) Un point $M(x;y)$ est à l'intersection de ces deux droite si ses coordonnées vérifient
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

2) On résout le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x + \beta y + \gamma & = & 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Si le système n'admet pas de solution, l'intersection de (d) et (d') est vide donc les deux droites sont parallèles.

b) Si le système admet une infinité de solutions, les droites sont confondues.

c) Si le système admet une unique solution $(x_0; y_0)$ alors le point d'intersection est $M(x_0; y_0)$.

Remarque : *Résolution d'un système*

Pour résoudre la système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' &= 0 \end{cases}$$

il existe plusieurs méthodes.

- ▷ **Substitution**

  On isole x dans une des équations puis l'on remplace x par l'expression obtenue dans l'autre équation pour obtenir y. Une fois y obtenu, on en déduit x à partir de l'une des équations.

  La même démarche peut être effectuée en déterminant y au départ au lieu de x.

- ▷ **Combinaison d'équations**

  On combine les équations pour faire disparaître une inconnue.

  - ⋆ Par exemple, si $\alpha = 1$ et $\alpha' = -1$, on a

    $$\begin{cases} x + \beta y + \gamma &= 0 \\ -x + \beta' y + \gamma' &= 0 \end{cases}$$

    Alors en additionnant les deux équations, on obtient

    $$(\beta + \beta')y + \gamma + \gamma' = 0$$

    Ce qui permet de déterminer y. Il reste alors à déterminer x à partir d'une des équations.

  - ⋆ Si aucune combinaison *évidente* n'apparaît, il suffit de multiplier la première équation par α' et la deuxième par α, puis de soustraire les deux pour obtenir y. En effet, dans ce cas, on obtient

    $$(\alpha'\beta - \alpha\beta')y + \alpha'\gamma - \alpha\gamma' = 0$$

Exemples Intersection de deux droites

1) Soient (d) la droite d'équation $y = x - 4$ et (d') la droite d'équation $y = -2x + 5$.

Le point d'intersection $M(x; y)$ de ces deux droites doit alors vérifier le système

$$\begin{cases} y &= x-4 \\ y &= -2x+5 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient $x-4=-2x+5$, donc $x=3$. Or $y=x-4=3-4=-1$.

On en déduit que le point d'intersection de (d) et (d') est $M(3,-1)$.

2) Soient (d) la droite d'équation $y=x-4$ et (d') la droite d'équation $y=x+5$.

Le point d'intersection $M(x;y)$ de ces deux droites doit alors vérifier vérifier le système

$$\begin{cases} y &= x-4 \\ y &= x+5 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient $x-4=x+5$, d'où $-4=5$, ce qui est impossible.

Donc les droites (d) et (d') n'ont pas de point d'intersection (elles sont parallèles).

Exercice 4.6

1) Tracer un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

2) Tracer la droite (d) d'équation $2x-3y+2=0$.

3) Tracer la droite (d') d'équation $-x+3y-4=0$.

4) Déterminer le point d'intersection N des droites (d) et (d'), puis vérifier le résultat graphiquement.

Exercice 4.7

Soient (d) la droite d'équation $20x-31y+2=0$ et (d') la droite d'équation $20x-30y+50=0$.

Déterminer les coordonnées d'un point d'intersection $N(x;y)$ des droites (d) et (d'), si ce point existe.

MÉTHODE : *Intersection d'une droite et d'un cercle*

Soient (d) une droite et $\mathcal{C}$ un cercle d'équations respectives

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

On va déterminer l'intersection de (d) et $\mathcal{C}$.

1) Un point $M(x;y)$ est à l'intersection de (d) et $\mathcal{C}$ si ses coordonnées vérifient

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

2) À partir de l'équation de (d), on écrit x en fonction de y :

$$x = cy + d$$

où c et d sont des réels.

3) Dans l'équation de $\mathcal{C}$, on remplace x par l'expression obtenue ci-dessus :

$$(cy + d - a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Puis on développe cette égalité.

4) On obtient alors une équation du second degré.

a) Si cette équation n'admet pas de solution réelle, l'intersection de (d) et $\mathcal{C}$ est vide.

b) Si cette équation admet une unique solution y_0, on détermine x_0 tel que $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$ et alors (d) et $\mathcal{C}$ ont pour unique point d'intersection $M(x_0;y_0)$.

c) Si cette équation admet deux solutions y_1 et y_2, on détermine x_1 (resp. x_2) tel que $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0$ (resp. $\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0$) et alors (d) et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection :

$$M_1(x_1;y_1) \text{ et } M_2(x_2;y_2).$$

REMARQUE

Dans la méthode précédente, on a écrit x en fonction de y mais on peut de même écrire y en fonction de x.

Exemple Intersection d'une droite et d'un cercle

Soient (d) la droite d'équation $y = x - 4$ et $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $(x-4)^2 + y^2 = 8$.

Un point d'intersection $M(x; y)$ de la droite et du cercle doit vérifier les deux équations

$$y = x - 4 \quad \text{et} \quad (x-4)^2 + y^2 = 8$$

En remplaçant $x - 4$ par y dans la deuxième équation, on obtient

$$2y^2 = 8$$

donc $y^2 = 4$ et ainsi $y = 2$ ou $y = -2$. Si $y = 2$, on a $x = y + 4 = 6$ et, si $y = -2$, on a $x = y + 4 = 2$.
On en déduit que (d) et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection de coordonnées $(6, 2)$ et $(2, -2)$.

Exercice 4.8

1) Quelle est l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(3; 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$?

2) Soient $A(3; 0)$ et $B(1; 2)$. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

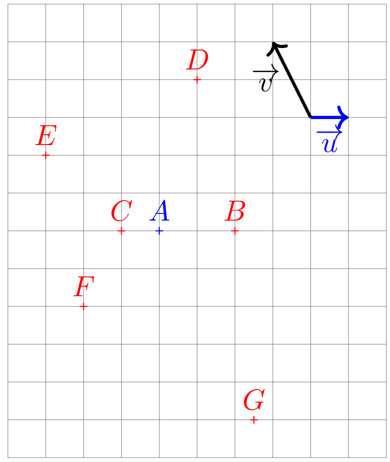
3) Le point $D(2; 2)$ appartient-il au cercle $\mathcal{C}$? Et le point $E(4; 3)$?

4) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (AB) à l'aide des équations de $\mathcal{C}$ et (AB).

7 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 4.1

1)



2) On a

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -2\vec{u} + 3\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

et

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

On en déduit $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $BDEF$ est un parallélogramme.

CORRIGÉ EXERCICE 4.2

1) **a)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$. On a

$$-3 \times (-10) - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$. On a

$$-(2-\sqrt{2}) - \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 = 0$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) **a)** $\vec{u}\begin{pmatrix}1-a\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement s'il on a

$$3(1-a) - 10 = 0$$

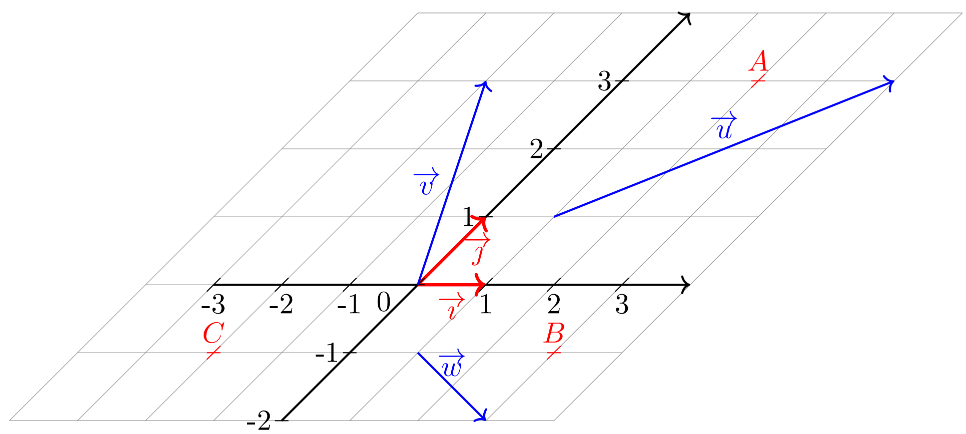
d'où $a = -\dfrac{7}{3}$

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a-1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2a \\ 2a+3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement s'il on a

$$(a-1)(2a+3)-2a^2=0$$

ce qui donne $2a^2+a-3-2a^2=0$. Donc $a=3$.

Corrigé Exercice 4.3



On a

$$A(2;3),\quad B(3;-1),\quad C(-2;-1),\quad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé Exercice 4.4

1) Un point $M(x;y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-5 \\ -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si

$$-3(y+2)-(x-5)=0$$

on en déduit que l'équation de la droite (AB) est $-3y-x-1=0$.

2) Les coordonnées (x_C, y_C) de C vérifient

$$-3y_C - x_C - 1 = -(-1) + 1 = 0$$

donc C appartient à la droite (AB).
Les coordonnées (x_D, y_D) de D vérifient

$$-3y_D - x_D - 1 = -3 - 1 = -4 \neq 0$$

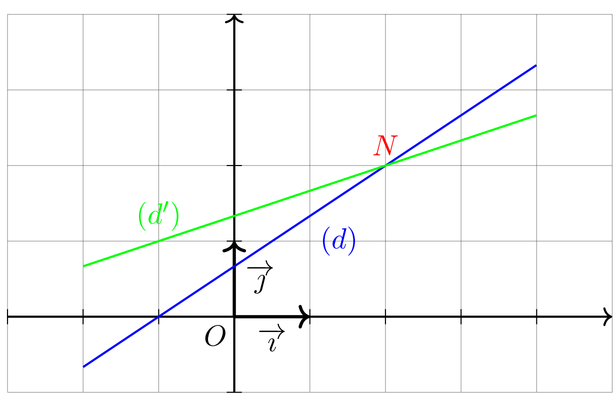
donc D n'appartient pas à la droite (AB).

CORRIGÉ EXERCICE 4.5

1) L'équation du cercle centré à l'origine et de rayon 1 est $x^2 + y^2 = 1$.

2) L'équation du cercle de centre $A(3; 2)$ et de rayon 5 est $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

CORRIGÉ EXERCICE 4.6



Le point d'intersection $N(x; y)$ des droites (d) et (d') doit vérifier le système

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 &= 0 \\ -x + 3y - 4 &= 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$0 = 2x - 3y + 2 + (-x + 3y - 4) = x - 2$$

d'où $x = 2$. Puisque $3y = 2x + 2$, on obtient $y = 2$. Donc le point d'intersection de (d) et (d') est $N(2; 2)$ qui est bien ce que l'on trouve graphiquement.

Corrigé Exercice 4.7

Comme dans l'exercice précédent $N(x;y)$ doit vérifier le système

$$\begin{cases} 20x - 31y + 2 &= 0 \\ 20x - 30y + 50 &= 0 \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$0 = 20x - 31y + 2 - (20x - 30y + 50) = 20x - 31y + 2 - 20x + 30y - 50 = -y - 50$$

d'où $y = -50$. Puisque $20x = 31y - 2$, on a $20x = -1550 - 2 = -1552$ donc $x = -\frac{1552}{20} = -\frac{388}{5}$. Ainsi, le point d'intersection de (d) et (d') est $N\left(-\frac{388}{5}; -50\right)$.

Corrigé Exercice 4.8

1) L'équation du cercle $\mathcal{C}$ est

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$$

2) Un point $M(x;y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si

$$-2y - 2(x-3) = 0$$

on en déduit (en divisant par -2) que l'équation de la droite (AB) est $y + x - 3 = 0$.

3) Les coordonnées $(x_D; y_D)$ de D vérifient

$$(x_D - 3)^2 + (y_D - 2)^2 = (2-3)^2 + (2-2)^2 = 1 \neq 2$$

donc D n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.
Les coordonnées $(x_E; y_E)$ de E vérifient

$$(x_E - 3)^2 + (y_E - 2)^2 = (4-3)^2 + (3-2)^2 = 2$$

donc E appartient au cercle $\mathcal{C}$.

4) Un point d'intersection $N(x, y)$ de $\mathcal{C}$ et de (AB) doit vérifier

$$y + x - 3 = 0 \quad \text{et} \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$$

D'après la première équation $x - 3 = -y$. Alors, en remplaçant $x - 3$ par $-y$ dans l'équation du cercle, on obtient $(-y)^2 + (y-2)^2 = 2$, ce qui donne

$$0 = y^2 + y^2 - 4y + 4 - 2 = 2y^2 - 4y + 2 = 2(y^2 - 2y + 1) = 2(y-1)^2$$

On en déduit $y = 1$. Puisque $x = 3 - y$ on obtient $x = 2$. Ainsi il existe un unique point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (AB) qui est $N(2, 1)$.

8 Exercices

EXERCICE 4.9

Simplifier les expressions ci-dessous à l'aide de la relation de Chasles.

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

4) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

5) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$

EXERCICE 4.10

Soit A, B et C trois points. On définit les points M et N par

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$$

Montrer que B est le milieu du segment $[MN]$.

EXERCICE 4.11

On munit le plan d'un repère orthonormé et on considère les points

$$A(-212; 128), \quad B(-152; 168), \quad C(25; 25), \quad D(85; 65), \quad E(150; 110)$$

1) $ABDC$ est-il un parallélogramme ?

2) Même question avec $ABED$.

3) Soit F le milieu de $[AD]$. Montrer que $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 4.12

Soient A, B et C trois points du plan. On définit les points E et F par

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Montrer que A, E et F sont alignés.

Exercice 4.13

On munit le plan d'un repère orthonormé et on considère les points

$$A(3;2), \quad B(-1;5) \quad \text{et} \quad C(-2;-2)$$

1) Déterminer les coordonnées des points M, N et G définis par

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

2) Quelle est la nature des quadrilatères $AMCB$ et $BNCA$?

3) Soit A' le milieu de $[BC]$. Vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

4) Que représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice 4.14

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $A(2;3)$, $B(-3;1)$, $C(4;-3)$. Déterminer l'équation de la droite (d) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice 4.15

1) Tracer un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Placer les points $A(1;5)$, $B(2;3)$ et $C(3;0)$

3) Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

4) Quelle est l'équation de la droite (OC) ?

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection M de (AB) et de (OC).

CHAPITRE 5

Généralités sur les fonctions

Ce chapitre est une simple introduction à la notion de fonction. Cette notion sera développée plus largement au chapitre suivant à travers des exemples classiques. On introduit la définition de fonction et les notions associées : courbe représentative, sens de variations et enfin celle du domaine de définition. Ce chapitre ne se termine pas sur une section d'exercices, mais l'on trouvera des exercices adaptés dans le chapitre 6.

Sommaire

1 Définitions

DÉFINITIONS : *Fonction, image et antécédent*

Une **fonction** est une relation qui, à tout élément x appartenant à un ensemble E, associe au plus un (et un seul) élément y d'un ensemble F. On écrit :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

On dit que

- ▷ y est l'**image** de x par la fonction f, on note $y = f(x)$,
- ▷ x est un **antécédent** de y par la fonction f.

Les ensembles E et F sont, respectivement, l'**ensemble de départ** et l'**ensemble d'arrivée** de f.

Attention

On prendra garde de ne pas confondre

- ▷ f qui est le nom d'une fonction,
- ▷ $f(x)$ qui est l'image de x par f.

Remarque

Dans la définition précédente, l'expression « associe au plus » signifie qu'il peut exister des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ n'existe pas. Cette question sera étudiée dans la section 4.

Exemples

- ▷ Soit f la fonction qui à tout nombre réel x associe $3x-1$:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x-1 \end{array}$$

  - ⋆ L'image du nombre 5 par f est $f(5) = 3 \times 5 - 1 = 14$.
  - ⋆ Il existe un nombre x dont l'image par f est égale à 8.
    En effet, si $f(x) = 8$, on a $3x - 1 = 8$ donc $x = 3$. Autrement dit, 3 est un antécédent par f de 8.

- ▷ Soit g la fonction définie par

$$g : \begin{array}{ccc} [-10; 10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

  - ⋆ L'ensemble $[-10; 10]$ est l'ensemble de départ de g et $\mathbb{R}$ est son ensemble d'arrivée.
  - ⋆ L'image de 2 par g est $g(2) = 2^2 + 1 = 5$.
  - ⋆ Les antécédents de 10 par g vérifient $g(x) = 10$, c'est-à-dire $x^2 + 1 = 10$, ce qui donne $x^2 = 9$, donc $x = -3$ ou $x = 3$.
  - ⋆ Il n'y a pas d'antécédent de -1 par g car l'équation $g(x) = -1$ n'a pas de solution. En effet, $x^2 + 1 = -1$ si et seulement si $x^2 = -2$, ce qui est impossible.

NOTATION

On peut aussi définir une fonction de façon plus simple en donnant directement son expression. Pour cela on utilise le symbole $\forall$ qui signifie **pour tout** ou encore **quelque soit**.
Si l'on reprend les exemples donnés ci-dessus, on peut définir f et g par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 1 \quad \text{et} \quad \forall\ x \in [-10; 10], \quad g(x) = x^2 + 1$$

2 Courbe représentative d'une fonction

Une fonction peut être représentée graphiquement. Cette représentation peut être utile pour étudier une fonction donnée. Dans toute la suite, on suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$, où $x \in \mathbb{R}$ est tel que $f(x)$ existe, forme la **courbe représentative de la fonction** f, que l'on note $\mathcal{C}_f$.

EXEMPLE

On souhaite tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

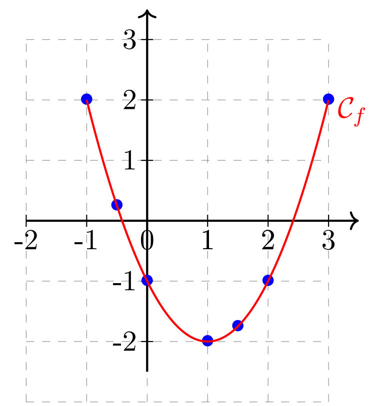
Traçons la portion de courbe représentative de f dont les abscisses sont comprises entre -1 et 3.

1) On complète tout d'abord un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	2	3
$f(x)$	2	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{7}{4}$	-2	-1	2

2) Puis on place les points de coordonnées $(x; f(x))$ pour les valeurs calculées ci-dessus.

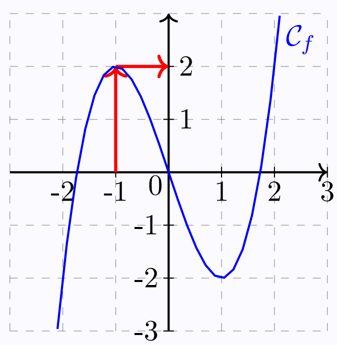
3) En reliant ces différents points on trace la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.



À partir de la courbe représentative d'une fonction, on peut déterminer l'image ou l'(les)antécédent(s) d'un nombre suivant cette fonction.

MÉTHODE : *Image et antécédent via la courbe représentative*

▷ **Lire l'image d'un nombre**



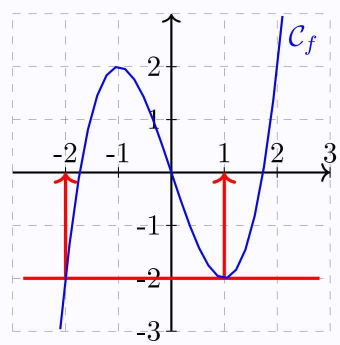
1) On place x sur l'axe des abscisses.

2) On se déplace verticalement pour rencontrer $\mathcal{C}_f$.

3) On lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées.

L'image de -1 par f est 2

▷ **Trouver l'(les)antécédent(s) d'un nombre**



1) On place y sur l'axe des ordonnées.

2) On trace la droite horizontale passant par cette valeur.

3) À partir des points d'intersection, on se déplace verticalement vers l'axe des abscisses pour lire les antécédents.

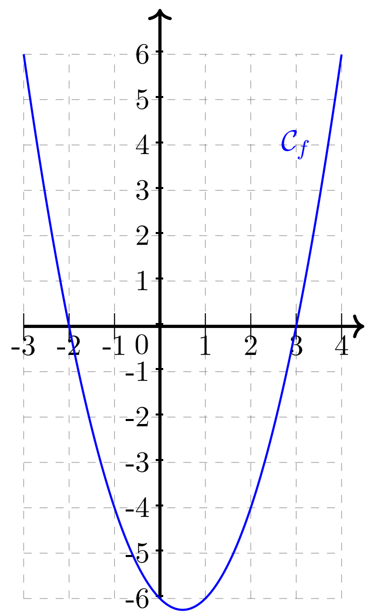
Les antécédents de -2 par f sont -2 et 1

Exercice 5.1

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par

$$\forall\, x \in [-3;4]\,, \quad f(x) = x^2 - x - 6$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.



1) Déterminer graphiquement :

a) $f(0)$,

b) l'image de 3 par f,

c) les éventuels antécédents de -4 par f,

d) les éventuels antécédents de 6 par f,

e) les éventuels antécédents de -6 par f,

f) l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2,

g) les solutions de l'équation $f(x) = -4$.

2) Déterminer algébriquement (autrement dit par le calcul) l'image de $\dfrac{1}{2}$ par f.

3 Sens de variation d'une fonction, extremum

DÉFINITIONS : *Fonction croissante, décroissante, monotone*

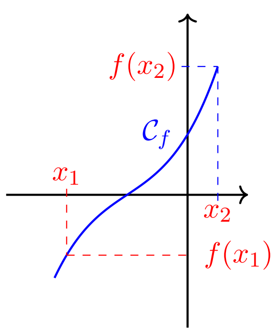
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- ▷ On dit que la fonction f est **croissante** sur I si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ▷ On dit que la fonction f est **décroissante** sur I si quels que soient les réels x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ▷ On dit que la fonction f est **monotone** sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.

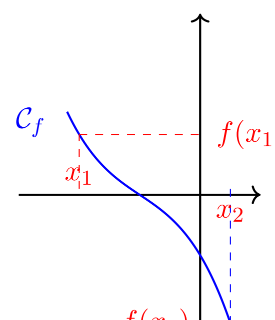
REMARQUES

- ▷ On remarque que, lorsque la fonction f est **croissante**, les images de x_1 et de x_2 sont « rangées » dans le même ordre que x_1 et x_2. On dit aussi que « f conserve l'ordre ».
- ▷ Par contre, si la fonction f est **décroissante**, les images de x_1 et de x_2 sont « rangées » dans l'ordre inverse de x_1 et x_2. On dit aussi que « f inverse l'ordre ».

EXEMPLES



Fonction croissante
($x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \leq f(x_2)$)

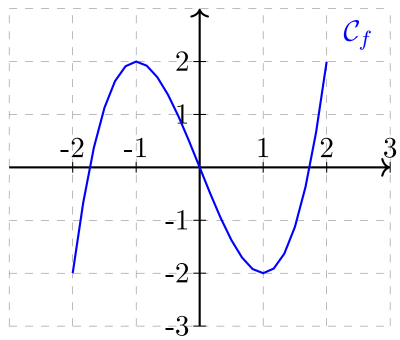


Fonction décroissante
($x_1 \leq x_2$ entraîne $f(x_1) \geq f(x_2)$)

Donner les **variations** d'une fonction signifie préciser sur quels intervalles la fonction est croissante et sur quels intervalles la fonction est décroissante.

Exemple

On donne ci-dessous un exemple de fonction ayant différentes variations suivant l'intervalle considéré.



- ▷ Cette fonction f est croissante sur $[-2;-1]$ et sur $[1;2]$, décroissante sur $[-1;1]$.
- ▷ f n'est pas monotone sur $[-1;2]$ mais elle l'est sur $[0;1]$.

Définition : *Tableau de variations*

Le **tableau de variations** d'une fonction est un tableau regroupant les informations concernant les variations de la fonction.

Exemple

Pour l'exemple précédent, le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Définitions : *Maximum, minimum, extremum*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- ▷ On dit que la fonction f admet un **maximum** M sur I, atteint en x_0, si quel que soit le réel x dans I, on a $f(x) \leq f(x_0) = M$.

▷ On dit que la fonction f admet un **minimum** m sur I, atteint en x_0, si quel que soit le réel x dans I, on a $f(x) \geq f(x_0) = m$.

▷ On dit que la fonction f admet un **extremum** sur I si f admet un minimum ou un maximum sur I.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent,

▷ le maximum de f sur $[-2; 2]$ est $M = 2$, atteint pour $x = -1$ et $x = 2$,

▷ le minimum de f sur $[-2; 2]$ est $m = -2$, atteint pour $x = -2$ et $x = 1$.

REMARQUE

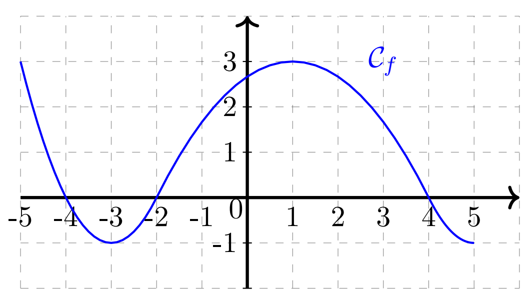
La valeur d'un extremum dépend de l'intervalle considéré.
Dans l'exemple précédent, le maximum de f sur $[0; 1]$ est $M = 0$, atteint pour $x = 0$.

DÉFINITION : *Tableau de signes*

On représente sur un tableau appelé **tableau de signes** les informations concernant le signe d'une fonction f.

EXEMPLE

Dans le cas de la fonction f représentée ci-dessous



le tableau de signes est :

x	-5		-4		-2		4		5
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

4 Domaine de définition d'une fonction

Définition : *Domaine de définition*

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé le **domaine de définition**, noté $\mathcal{D}_f$, de la fonction f.

Remarque

Le domaine de définition de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ a un sens.

À ce stade (des cas supplémentaires seront considérés plus tard), on aura toujours directement

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

sauf si f s'écrit sous l'une des trois formes suivantes :

1) $f = \dfrac{N}{D}$ **2)** $f = \sqrt{R}$ **3)** $f = \dfrac{N}{\sqrt{D}}$

Si l'on se trouve dans l'un des trois cas précédents, on détermine le domaine de définition en utilisant la méthode suivante :

Méthode : *Détermination du domaine de définition*

1) Si $f = \dfrac{N}{D}$ alors D doit être différent de 0 (on ne peut pas diviser par 0) donc le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $D(x) \neq 0$, ce que l'on note

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid D(x) \neq 0\}$$

2) Si $f = \sqrt{R}$ alors R doit être positif ou nul (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas) donc le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $R(x) \geq 0$, ce que l'on note

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid R(x) \geq 0\}$$

3) Si $f = \dfrac{N}{\sqrt{D}}$ alors D doit être strictement positif (conséquence des deux points précédents) donc le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $D(x) > 0$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid D(x) > 0\}$$

Pour écrire le domaine de définition d'une fonction, on utilise les notions d'intervalles et d'union d'intervalles vues précédemment. De plus, pour simplifier l'écriture, on utilise aussi la notation ci-dessous.

NOTATION

Pour tout réel a, on note $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ l'ensemble des réels différents de a, appelé « $\mathbb{R}$ privé de a ». Autrement dit,

$$\mathbb{R} \setminus \{a\} = \ ]-\infty; a[\ \cup\ ]a; +\infty[$$

Dans le cas particulier, $\mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, on note aussi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

EXEMPLES

- ▷ Les fonctions $x \to x^2$, $x \to x + 5$, $x \to (x + 50000)^{20}$ ne sont pas de la forme $\dfrac{N}{D}$, $\sqrt{R}$ ou $\dfrac{N}{\sqrt{D}}$ donc leurs domaines de définition sont $\mathbb{R}$.
- ▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de la forme $\dfrac{N}{D}$, avec $N(x) = 1$ et $D(x) = x$, donc son domaine de définition est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 0$, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ est de la forme $\dfrac{N}{D}$ avec $N(x) = 2x + 1$ et $D(x) = x - 3$ donc son domaine de définition est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x - 3 \neq 0$, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- ▷ La fonction $x \mapsto \sqrt{x - 4}$ est de la forme $\sqrt{R}$ avec $R(x) = x - 4$ donc son domaine de définition est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x - 4 \geq 0$, soit $x \geq 4$. Ainsi, son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = [4; +\infty[$.

Exercice 5.2

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{2x} + 3$ **2)** $f_2 : x \longmapsto \dfrac{2}{x+1}$ **3)** $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x+1}{2}$

4) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **5)** $f_5 : x \longmapsto \dfrac{3}{x^2+5}$ **6)** $f_6 : x \longmapsto 2 - \dfrac{x-1}{x+1}$

5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 5.1

1) **a)** On a $f(0) = -6$.

b) L'image de 3 par f est $f(3) = 0$.

c) Les antécédents de -4 par f sont -1 et 2, c'est-à-dire $f(-1) = -4 = f(2)$.

d) Les antécédents de 6 par f sont -3 et 4.

e) Il n'y a pas d'antécédents de -6 par f.

f) L'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est -4, c'est-à-dire $f(2) = -4$.

g) Les solutions de l'équation $f(x) = -4$ sont -1 et 2.

2) L'image de $\dfrac{1}{2}$ par f est

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$$

Corrigé Exercice 5.2

1) La seule condition pour que $f_1(x)$ soit bien défini est que x soit un réel non nul. On en déduit $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^*$.

2) f_2 est de la forme $\dfrac{N}{D}$ avec $N(x) = 2$ et $D(x) = 2x+1$. On a $2x+1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq -\dfrac{1}{2}$. On en déduit $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

3) f_3 est de la forme $\dfrac{N}{D}$ avec $N(x) = x+1$ et $D(x) = 2$. Puisque D n'est jamais nul, on a $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$.

4) f_4 est de la forme $\dfrac{N}{\sqrt{D}}$ avec $N(x) = 1$ et $D(x) = 2x + 1$. On doit avoir $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{2}$. On en déduit $\mathcal{D}_{f_4} = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

5) f_5 est de la forme $\dfrac{N}{D}$ avec $N(x) = 3$ et $D(x) = x^2 + 5$. Puisqu'un carré est toujours positif, D est toujours positif. On en déduit $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}$.

6) La seule condition pour que $f_6(x)$ soit bien défini est que $x + 1$ soit un réel non nul, d'où $x \neq -1$. On en déduit $\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

CHAPITRE 6

Fonctions usuelles

Ce chapitre est la continuité du précédent. On y présente des fonctions particulières, dites usuelles, ainsi que leurs propriétés principales. Il s'agit des fonctions : affines, polynômes du second degré, racine carrée, valeur absolue et enfin de la fonction inverse. Le chapitre se termine sur la notion de composition de fonctions qui, à partir des fonctions usuelles, permet d'étudier un très grand nombre de fonctions.

Sommaire

1 Fonctions affines et polynômes du second degré

1.1 Fonctions affines

Définition : *Fonction affine*

On appelle **fonction affine** toute fonction f donnée par

$$f : x \mapsto ax + b$$

où a et b sont des réels fixés.

On liste ci-après l'ensemble des propriétés à connaître sur les fonctions affines.

PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

1) *La fonction f a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.*

2) *La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est une droite. Le coefficient a est appelé le* **coefficient directeur** *de la droite $\mathcal{C}_f$ et b est son* **ordonnée à l'origine**.

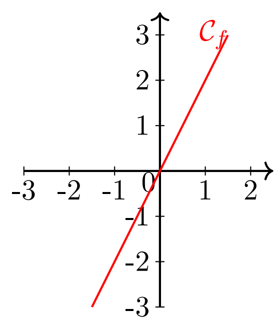
3) *Si $a = 0$, $\mathcal{C}_f$ est la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point b, c'est-à-dire la droite d'équation $y = b$.*

4) *Si $b = 0$, la droite $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine.*

5) *Si a est positif, f est croissante et, si a est négatif, f est décroissante.*

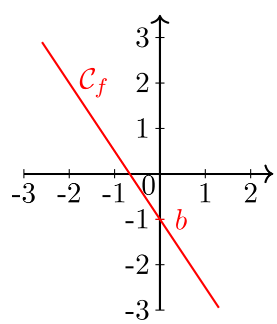
EXEMPLES

1) Courbe de $f : x \mapsto 2x$



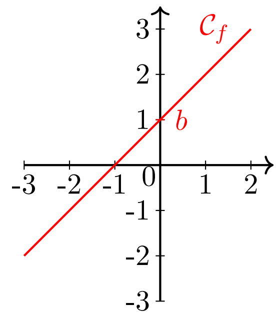
Ici, $a = 2$ et $b = 0$.

2) Courbe de $f : x \mapsto -\dfrac{3}{2}x - 1$



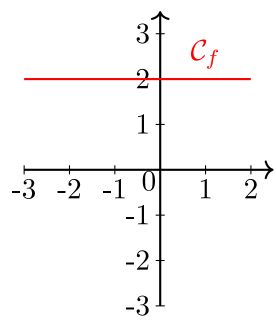
Ici, $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = -1$.

3) Courbe de $f : x \mapsto x + 1$



Ici, $a = 1$ et $b = 1$.

4) Courbe de $f : x \mapsto 2$



Ici, $a = 0$ et $b = 2$.

Remarques

- ▷ Les propriétés données plus haut se montrent facilement.
  À titre d'exemple, montrons que si a est négatif alors f est décroissante.
  Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$. Puisque a est négatif, on a $ax_1 \geq ax_2$ d'où
  $$ax_1 + b \geq ax_2 + b$$
  Ainsi, $f(x_1) \geq f(x_2)$. On en déduit que f est décroissante.
- ▷ Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.
  Supposons $a > 0$, alors la courbe représentative de f est une droite croissante qui s'annule en $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ainsi, $f(x)$ est négatif si $x < -\dfrac{b}{a}$ et $f(x)$ est positif si $x > -\dfrac{b}{a}$.
On peut raisonner de même dans le cas où $a < 0$.
On en déduit le tableau de signes de f en fonction du signe de a :

⋆ si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

⋆ si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

1.2 Fonctions polynômes du second degré et fonction carré

Définition : *Fonction polynôme du second degré*

On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction f donnée par

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$.

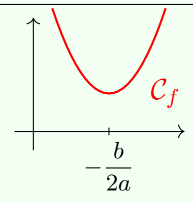
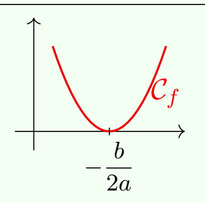
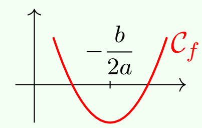
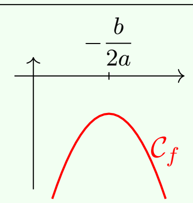
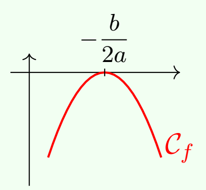
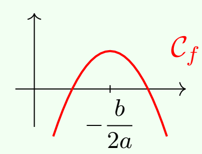
On liste ci-dessous l'ensemble des propriétés à connaître sur les fonctions polynômes du second degré.

Propriétés

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré.

1) *La fonction f a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.*

2) *La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est appelée une* ***parabole****.*
Ses différentes propriétés sont données par le tableau suivant (où Δ désigne le discriminant du polynôme de second degré) :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$ *parabole tournée vers le haut*			
$a < 0$ *parabole tournée vers le bas*			
	pas de racine réelle	*une racine (double)*	*deux racines réelles*

Définition : *Fonction carré*

On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \mapsto x^2$. Il s'agit de la fonction polynôme de second degré de paramètres $a = 1$ et $b = c = 0$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Remarque

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2 \geq 0$. On en déduit que l'ensemble d'arrivée de la fonction carré est $F = f(D_f) = \mathbb{R}_+$.

Exercice 6.1

1) Soient $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ (réels positifs) tels que $x_1 \leq x_2$. En factorisant $x_1^2 - x_2^2$ et en étudiant le signe de chacun des facteurs, démontrer que $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction carré sur $[0; +\infty[$.

3) Reprendre la même méthode pour déterminer le sens de variation de la fonction carré sur $]-\infty; 0]$.

DÉFINITION : *Fonction paire*

Une fonction f est dite **paire** si, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = f(-x)$.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction paire, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

REMARQUE

Si une fonction est paire, pour dessiner sa courbe représentative, il suffit de dessiner celle-ci suivant les abscisses positives ($x \geq 0$). La courbe représentative sur tout l'axe des abscisses s'en déduit en représentant son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

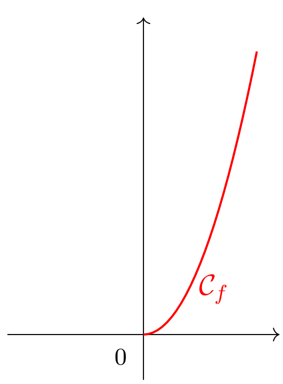
EXEMPLE

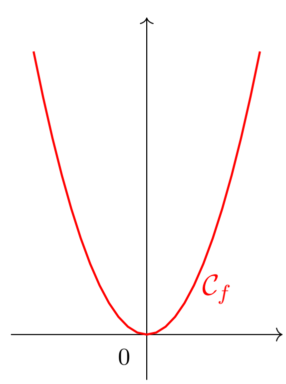
La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

On peut alors obtenir $\mathcal{C}_f$ en la dessinant suivant les abscisses positives, puis en prenant son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

1) $\mathcal{C}_f$ suivant les abscisses positives. **2)** $\mathcal{C}_f$ obtenue par symétrie





2 Fonctions racine carrée, valeur absolue et inverse

2.1 Fonction racine carrée

DÉFINITION : *Fonction racine carrée*

On appelle **fonction racine carrée** la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

PROPRIÉTÉS

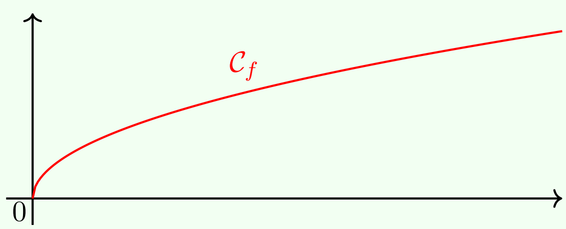
1) *Le domaine de définition de la fonction racine carrée est* $[0; +\infty[$ *, noté aussi* $\mathbb{R}_+$*.*

2) *Le tableau de variations de la fonction racine carrée est :*

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) *D'après le tableau de variations, l'ensemble d'arrivée de la fonction racine carrée est* $\mathbb{R}_+$*.*

4) *La courbe représentative de la fonction racine carrée est*



EXERCICE 6.2

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction racine carrée est croissante. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $x_1 \leq x_2$.

1) Si $x_1 = x_2$, que peut-on dire de $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$?

2) Supposons $x_1 < x_2$. Multiplier $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ par $\dfrac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$. En déduire que $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leq 0$.

3) Conclure.

2.2 Fonction valeur absolue

DÉFINITION : *Valeur absolue*

La **valeur absolue** d'un réel a, notée $|a|$, est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

EXEMPLES

- $|5| = 5 = |-5|$
- $|-3| = -(-3) = 3$

Les principales propriétés de la valeur absolue sont données ci-dessous.

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels a, b, on a

1) $|a| \geq 0$

2) $|a|^2 = a^2 \quad \textit{et} \quad |a^2| = a^2$

3) $|a\,b| = |a|\,|b| \quad \textit{et} \quad |a+b| \leq |a| + |b|$

4) $|a| = |b| \iff a = b \quad \textit{ou} \quad a = -b$

5) $\sqrt{a^2} = |a|$

EXERCICE 6.3

Simplifier les expressions ci-dessous pour qu'il n'y ait plus de valeur absolue

1) $A = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| + \left|\dfrac{7}{4} - 2\right|$

2) $B = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| \times \left|\dfrac{7}{4} - 2\right|$

3) $C = |\sqrt{2} - 1| + |1 - \sqrt{2}|$

DÉFINITION : *Fonction valeur absolue*

La **fonction valeur absolue** est la fonction définie par $x \mapsto |x|$.

PROPRIÉTÉS

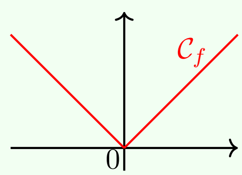
1) *Le domaine de définition de la fonction valeur absolue est* $\mathbb{R}$.

2) *Le tableau de variations de la fonction valeur absolue est :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) *D'après le tableau de variations, l'ensemble d'arrivée de la fonction valeur absolue est* $\mathbb{R}_+$.

4) *La courbe représentative de la fonction valeur absolue est donnée par :*



EXERCICE 6.4

1) Montrer que la fonction valeur absolue est paire.

2) Déterminer graphiquement le ou les antécédent(s) de 0 et de 2.

3) Montrer que la fonction valeur absolue admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

2.3 Fonction inverse

DÉFINITION : *Fonction inverse*

La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

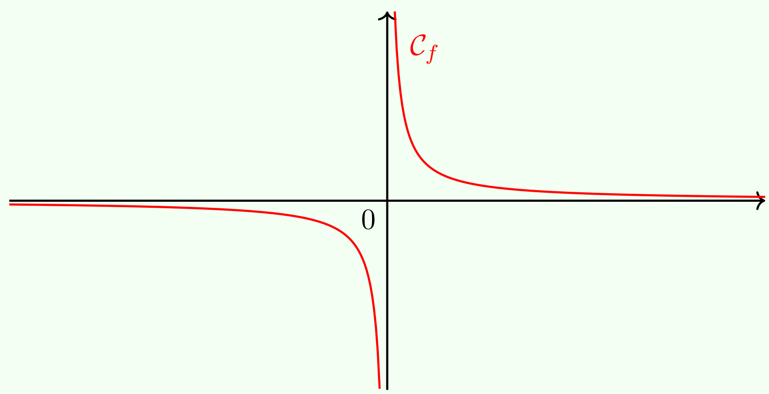
PROPRIÉTÉS

1) *Le tableau de variations de la fonction inverse est :*

x	$-\infty$		0		∞
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 0	

2) *D'après le tableau de variations, l'ensemble d'arrivée de la fonction inverse est* $\mathbb{R}^*$*.*

3) *La courbe représentative de la fonction inverse est :*



EXERCICE 6.5

Montrons que la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

1) Soient $x_1, x_2 \in\ ]0;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$. Calculer $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} > 0$ et en déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$.

2) De même, déterminer le sens de variation de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$.

DÉFINITION : *Fonction impaire*

Une fonction f est dite **impaire** si, pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Si f est une fonction impaire, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

On pourra remarquer que la courbe caractéristique de la fonction inverse est bien symétrique par rapport à l'origine.

3 Composition de fonctions

On termine ce chapitre avec la notion de fonction composée qui est la plus importante de ce chapitre. En effet, la plupart des fonctions que l'on peut étudier sont des composées de fonctions usuelles.

Définition : *Fonction composée*

Soient f et g deux fonctions.
On appelle **fonction composée** « f rond g » la fonction, notée $f \circ g$, définie par

$$f \circ g : x \mapsto f\left(g(x)\right)$$

Le domaine de définition de $f \circ g$ est l'ensemble des x dans $\mathcal{D}_g$ tels que $g(x) \in \mathcal{D}_f$.
Autrement dit,

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$$

Remarques

- ▷ La structure de la fonction $f \circ g$ est :

$$x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$$

Autrement dit, pour $x \in D_g$, on calcule $y = g(x)$, puis on calcule $f(y)$.

▷ On définit de même $g \circ f$. Néanmoins, la fonction $f \circ g$ peut exister sans que la fonction $g \circ f$ existe, et réciproquement.

▷ En général,

$$g \circ f \neq f \circ g \quad \text{et} \quad D_{f \circ g} \neq D_{g \circ f}$$

On dit alors que l'opération de composition $\circ$ n'est pas **commutative**.

EXEMPLES

▷ Soient $f : x \mapsto 3x + 2$ et $g : x \mapsto x + 1$.
La fonction f est définie sur tout $\mathbb{R}$, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Or $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$. Donc le domaine de définition de $f \circ g$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

La composée est alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3(x+1) + 2 = 3x + 5$$

▷ Soient $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x + 1$.

⋆ On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Le domaine de définition de $f \circ g$ est donc l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x + 1 \neq 0$, ce qui donne $x \neq -1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\}.\end{aligned}$$

La composée est alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$$

⋆ Pour $g \circ f$, le domaine de définition est l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Puisque $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, on en déduit que le domaine de définition de $g \circ f$ est le même que celui de f, d'où $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, la composée est alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \frac{1}{x} + 1$$

En particulier, on remarque que l'on a $f \circ g \neq g \circ f$ et même $\mathcal{D}_{f \circ g} \neq \mathcal{D}_{g \circ f}$.

Exercice 6.6

On considère les trois fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad g : x \mapsto 3x + 2 \quad \text{et} \quad h : x \mapsto x^2$$

Donner le domaine de définition et l'expression des fonctions suivantes :

1) $h \circ f$ **2)** $f \circ h$ **3)** $h \circ g$ **4)** $g \circ h$

Remarque

On verra dans la suite qu'au lieu de calculer $f \circ g$ pour des fonctions f et g données, on sera amené à réécrire une fonction h sous la forme

$$h = f \circ g$$

où f et g sont à déterminer.

Exemple

Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x+4}$. La fonction h est la composée des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x + 4$.
En effet,

$$f \circ g : x \mapsto f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+4} = h(x)$$

De plus, comme $D_g = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} D_h = D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}_+\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 4 \geq 0\} = [-4; +\infty[\ . \end{aligned}$$

Exercice 6.7

Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer deux fonctions f et g telles que $h = f \circ g$.

1) $h : x \mapsto (x-3)^2$ **2)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **3)** $h : x \mapsto \sqrt{3x - 1}$

4 Correction des exercices du cours

CORRIGÉ EXERCICE 6.1

1) On a

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

Comme $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$, on a $x_1 + x_2 \geq 0$ et, puisque $x_1 \leq x_2$, on a $x_1 - x_2 \leq 0$. On en déduit

$$x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\leq 0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\geq 0} \leq 0$$

2) On en déduit que $x_1 \leq x_2$ entraîne $x_1^2 \leq x_2^2$ donc la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

3) Soient $x_1, x_2 \in \ ]-\infty; 0]$ tels que $x_1 \leq x_2$.
Par le même raisonnement que la question précédente, on a $x_1 + x_2 \leq 0$ et $x_1 - x_2 \leq 0$. D'où

$$x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\leq 0}\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\leq 0} \geq 0$$

Ainsi, $x_1 \leq x_2$ entraîne $x_1^2 \geq x_2^2$ donc la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

CORRIGÉ EXERCICE 6.2

1) Si $x_1 = x_2$, alors $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ donc, en particulier, $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$.

2) Supposons $x_1 < x_2$. Alors, $x_1 \neq x_2$ et $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$.
En particulier si $\sqrt{x_1} = 0$ (resp. $\sqrt{x_2} = 0$) alors $\sqrt{x_2} \neq 0$ (resp. $\sqrt{x_1} \neq 0$) et donc $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \neq 0$. Ainsi on peut diviser par $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.
Puisque $(\sqrt{x_1})^2 - (\sqrt{x_2})^2 = x_1 - x_2$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} &= (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})\,\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\end{aligned}$$

Comme $x_1 < x_2$, on $x_1 - x_2 < 0$ et, puisque $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2} \in [0; +\infty[$ avec $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$, on a $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$. On en déduit

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < 0$$

3) D'après les deux cas étudiés précédemment, on obtient que $x_1 \leq x_2$ entraîne $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$. Ainsi, la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

Corrigé Exercice 6.3

1) $A = \left|1 - \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{7}{4} - 2\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2) $B = \left|1 - \frac{3}{2}\right| \times \left|\frac{7}{4} - 2\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| \times \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

3) On a $1 < \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2} - 1 > 0$ et $1 - \sqrt{2} < 0$. D'où

$$C = |\sqrt{2}-1|+|1-\sqrt{2}| = (\sqrt{2}-1)-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1-1+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-2$$

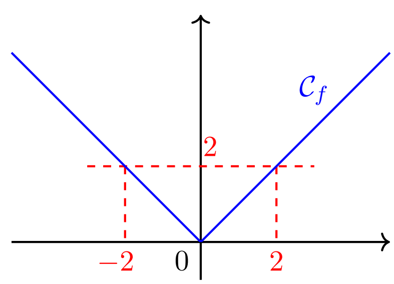
Corrigé Exercice 6.4

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ▷ Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $|-x| = -(-x) = x$, d'où $|x| = |-x|$.
- ▷ Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ et $|-x| = -x$ (car $-x \geq 0$), d'où $|x| = |-x|$.

Finalement, $|x| = |-x|$ donc la fonction valeur absolue est paire.

2) D'après la courbe caractéristique de la valeur absolue, 0 a pour unique antécédent 0 et 2 a pour antécédents 2 et -2.



3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$. Or $|0| = 0$. Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq |0| = 0$$

On en déduit que la fonction valeur absolue a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$ qui est atteint en 0.

Corrigé Exercice 6.5

1) On a

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2}$$

Puisque $x_1, x_2 \in \ ]0;+\infty[$, on a $x_1x_2 > 0$ et, comme $x_1 < x_2$, on a $x_2 - x_1 > 0$. On en déduit

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} > 0$$

Ainsi, $x_1 < x_2$ entraîne $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, d'où la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

2) Soient $x_1, x_2 \in \ ]-\infty;0[$ tels que $x_1 < x_2$.
Puisque $x_1, x_2 \in \ ]-\infty;0[$, on a $x_1x_2 > 0$ et, comme $x_1 < x_2$, on a $x_2 - x_1 > 0$. On en déduit

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_2} > 0$$

Ainsi, $x_1 < x_2$ entraîne $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, d'où la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$.

Corrigé Exercice 6.6

Remarquons tout d'abord que l'on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

1) $\mathcal{D}_{h\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_h\} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^*$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on obtient

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

2) Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f\circ h} &= \{x \in \mathcal{D}_h \mid h(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R}^*\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f \circ h(x) = f(h(x)) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2}$$

En particulier, $f \circ h = h \circ f$.

3) $\mathcal{D}_{h\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_h\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h \circ g(x) = h(g(x)) = (g(x))^2 = (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

4) $\mathcal{D}_{g\circ h} = \{x \in \mathcal{D}_h \mid h(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g \circ h(x) = g(h(x)) = 3h(x) + 2 = 3x^2 + 2$$

En particulier, $h \circ g \neq g \circ h$. En effet, on a $h \circ g(0) = 4 \neq 2 = g \circ h(0)$.

Corrigé Exercice 6.7

1) On pose $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x - 3$. Alors, $h = f \circ g$.

2) On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors, $h = f \circ g$. De plus, on a ici $f \circ g = g \circ f$.

3) On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto 3x - 1$. Alors, $h = f \circ g$.

5 Exercices

Exercice 6.8

Simplifier les expressions ci-dessous pour qu'il n'y ait plus de valeur absolue

1) $A = |2 - \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{12}| + |1 - \sqrt{3}|$

2) $B = |a| + |a-1| - |2-a|$, où $a \in [0;1]$

Exercice 6.9

Simplifier les expressions ci-dessous

1) $A = \sqrt{x(3x-1) - (2x^2 + 3x - 4)}$, où $x \in \left]-\infty; 2\right]$.

2) $B = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{(3x-2)^2}$, où $x \in \left[\dfrac{2}{3}; 3\right]$.

EXERCICE 6.10

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^2 - 4$

2) $f_2 : x \mapsto 2x^2 + 3x - 1$

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{x-3}{x+1}$

4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{3x-4}$

5) $f_5 : x \mapsto \dfrac{3-\sqrt{5x}}{x-4}$

6) $f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+2}{x^2-4}$

EXERCICE 6.11

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{4-(1-2x)^2}$

2) $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2-5x+4}$

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2}$

EXERCICE 6.12

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{2-|x|}$

2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2+|x|-2}$

EXERCICE 6.13

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 1$ et $g : x \mapsto 4x^3 - 3x$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

EXERCICE 6.14

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 3]$ par $f : x \mapsto 2 + \sqrt{3-x}$ et soit g la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $g : x \mapsto -x^2 + 4x - 1$.

1) Montrer que, pour tout $x \in [2; +\infty[$, $f \circ g(x) = x$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \left]-\infty; 3\right]$, $g \circ f(x) = x$.

3) A t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 6.15

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que

1) Si f et g sont croissantes alors $f \circ g$ est croissante.

2) Si f est décroissante et g est croissante alors $f \circ g$ est décroissante.

CHAPITRE 7

Trigonométrie

Dans ce chapitre, on introduit le cercle trigonométrique et la mesure en radians d'un angle. Ceux-ci permettent de définir le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle. Après en avoir donné les principales propriétés, on introduit les fonctions sinus et cosinus qui seront deux fonctions usuelles supplémentaires. Ensuite, on présente comment résoudre des équations trigonométriques (c'est-à-dire contenant des fonctions trigonométriques). Le chapitre se clôt sur la présentation des formules dites d'addition.

Sommaire

1 Cercle trigonométrique et angles remarquables

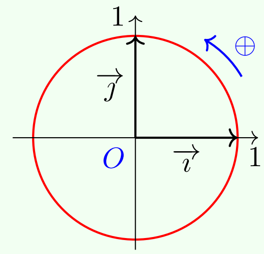
Le cercle trigonométrique permet de définir, visualiser et mémoriser facilement des notions de trigonométrie telles que le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

Dans toute la suite, on considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

Définition : *Cercle trigonométrique*

On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.

Il est **orienté positivement** : les angles positifs sont lus dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé **sens trigonométrique**).



Remarque

Rappelons que le périmètre d'un cercle de rayon $R > 0$ est $2\pi R$. Donc, en particulier, le périmètre du cercle trigonométrique est 2π.

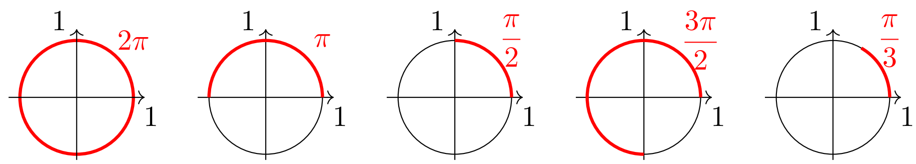
Partant de la remarque précédente, on peut déterminer la longueur de différents arcs du cercle trigonométrique.

Exemples Longueurs d'arcs de cercles

1) La longueur de l'arc parcourant *tout* le cercle trigonométrique correspond au périmètre de celui-ci donc vaut 2π.

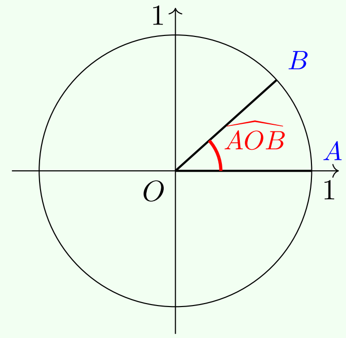
2) La longueur de l'arc parcourant la *moitié* du cercle trigonométrique correspond à la moitié du périmètre de celui-ci donc vaut π.

3) La longueur de l'arc parcourant un *quart* du cercle trigonométrique correspond au quart du périmètre de celui-ci donc vaut $\dfrac{\pi}{2}$.



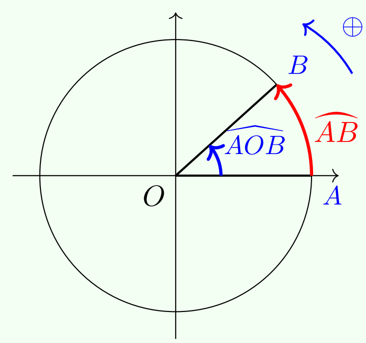
Notations

- ▷ Dans toute la suite, A désigne le point du plan de coordonnées $(1, 0)$ qui se situe sur le cercle trigonométrique.
- ▷ Pour tout point B du cercle trigonométrique, on note $\widehat{AOB}$ l'angle formé par les deux droites (OA) et (OB).



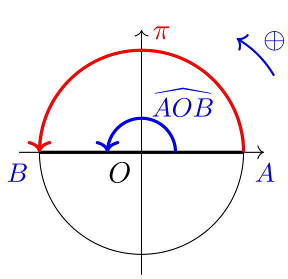
Définition : *Radians*

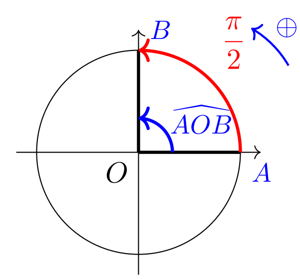
Pour tout point B du cercle trigonométrique, une mesure en **radians** de l'angle $\widehat{AOB}$ est la longueur *orientée* d'un parcours sur le cercle trigonométrique partant de A et arrivant à B.



Exemples Mesures d'angles

- ▷ La mesure en radians de l'angle plat est π.
- ▷ La mesure en radians de l'angle droit est $\dfrac{\pi}{2}$.





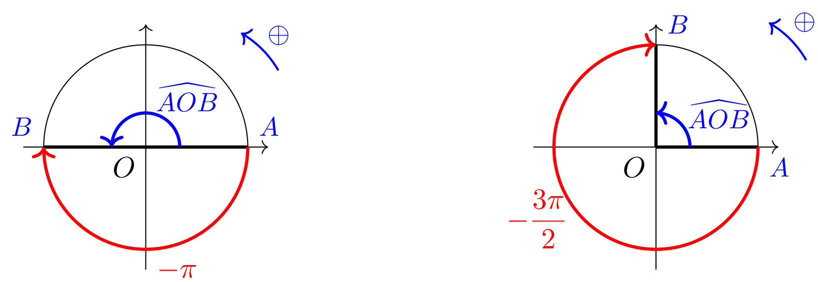
Remarque

On peut parcourir le cercle trigonométrique dans le sens inverse du sens trigonométrique. La longueur d'un parcours est alors négative.

Exemples — Mesures négatives d'angles

On considère les angles vus dans l'exemple précédent mais en effectuant le parcours de A à B le long du cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique.

- ▷ Une autre mesure en radians de l'angle plat est $-\pi$.
- ▷ Une autre mesure en radians de l'angle droit est $-\dfrac{3\pi}{2}$.

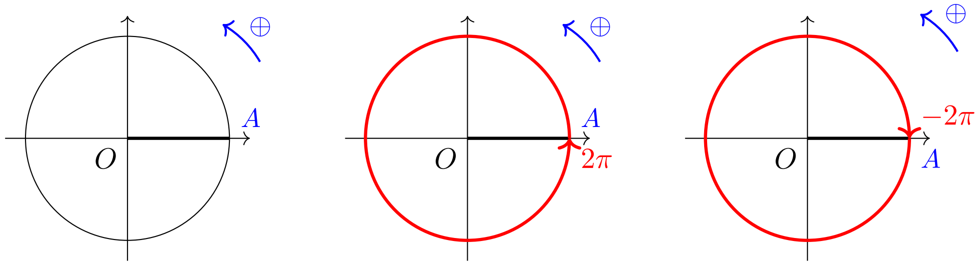


Ainsi, un angle admet deux mesures possibles en radians : l'une en parcourant le cercle dans le sens trigonométrique et l'autre en parcourant le cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique. Mais il existe encore d'autres mesures possibles comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessous.

Exemples — Différentes mesures d'un angle

Considérons l'angle nul. Il existe alors divers parcours partant de A et arrivant en A :

- ▷ le parcours de longueur 0,
- ▷ le parcours dans le sens trigonométrique faisant un tour de cercle, donc de longueur 2π,
- ▷ le parcours dans le sens inverse du sens trigonométrique faisant un tour de cercle, donc de longueur -2π,



Ainsi l'angle nul admet comme mesures en radians : 0, 2π, -2π.

Remarques

Pour un point B du cercle trigonométrique, on peut considérer différents parcours :

- tourner dans le sens positif jusqu'à rencontrer B, ce qui donne une mesure d'angle *positive* entre 0 et 2π.
- tourner dans le sens négatif jusqu'à rencontrer B, ce qui donne une mesure d'angle *négative* entre -2π et 0.
- effectuer plusieurs tours (dans un sens ou dans l'autre) avant de s'arrêter sur B. Un tour complet étant de longueur 2π, il suffira alors d'ajouter $k \times 2\pi$ (ce que l'on note $2k\pi$) à la longueur jusqu'ici parcourue, où k est le nombre de tours supplémentaires.

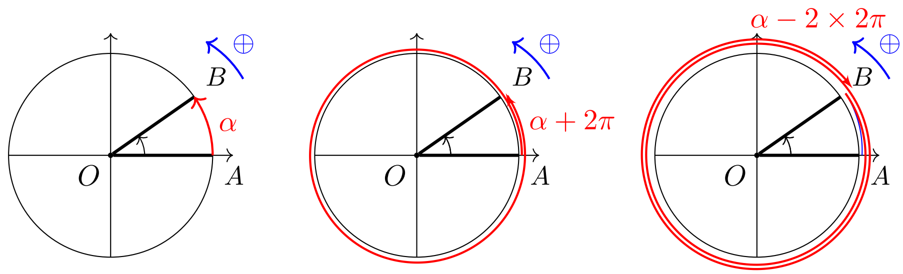
Méthode : *Les différentes mesures d'un angle*

Soit un angle de mesure α.
Pour trouver toutes les mesures de cet angle, il suffit d'y ajouter $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, toutes les mesures de l'angle α sont

$$\alpha + 2k\pi, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemples

- Dans la figure ci-après, on a représenté trois parcours différents possibles pour un angle $\widehat{AOB}$ qui ainsi admet comme mesures en radians : α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2 \times 2\pi = \alpha - 4\pi$.



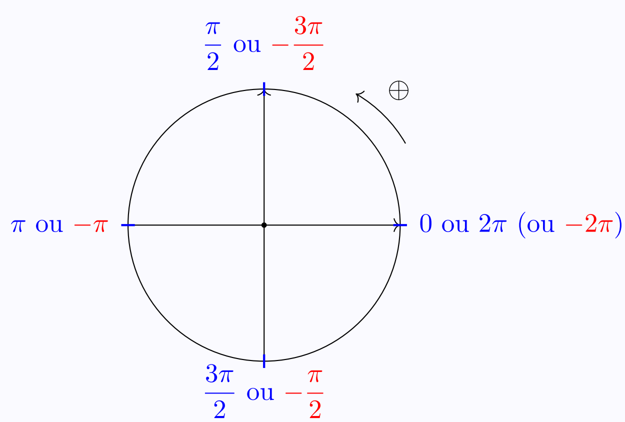
▷ Toutes les mesures en radians de l'angle plat s'écrivent $0 + 2k\pi = 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple, $42\pi = 21 \times 2\pi$ est une mesure en radians de l'angle plat et $-24\pi = -12 \times 2\pi$ aussi.

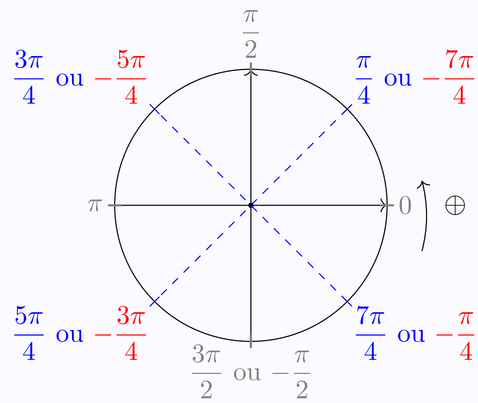
Dans la suite, on ne parlera plus d'angle de mesure α en radians mais simplement d'angle α. Certains angles sont dits **remarquables**. Il s'agit des angles les plus simples à repérer sur le cercle trigonométrique. On donne ci-dessous une méthode pour les construire rapidement.

Méthode : *Les angles remarquables*

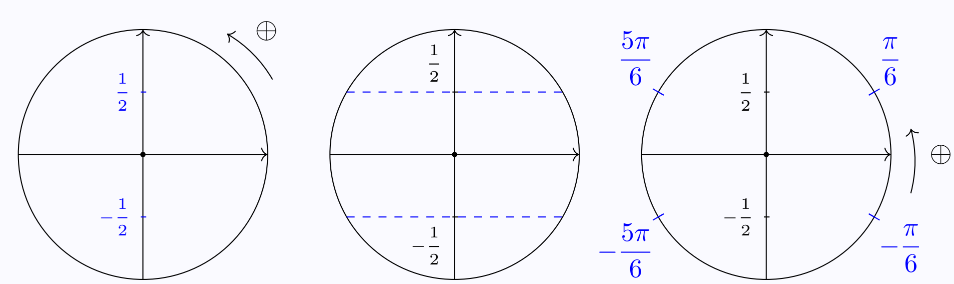
1) Les angles 0, π, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ et 2π sont faciles à placer.



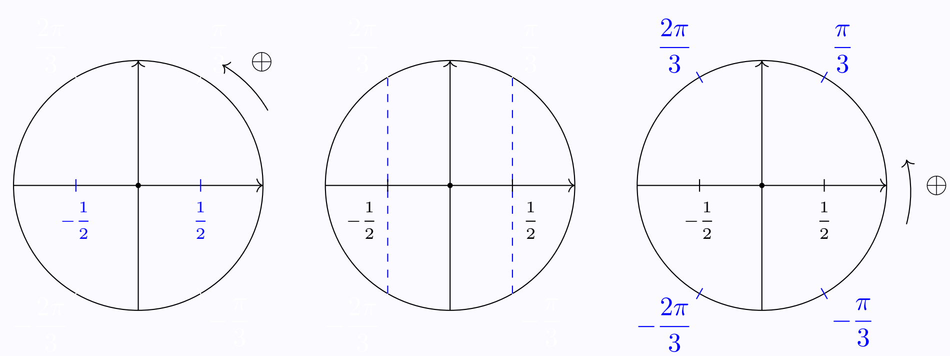
2) On en déduit les angles $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$.



3) Les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des abscisses, d'ordonnées $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:



4) Les angles $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$ sont obtenus en traçant les droites parallèles à l'axe des ordonnées, d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:



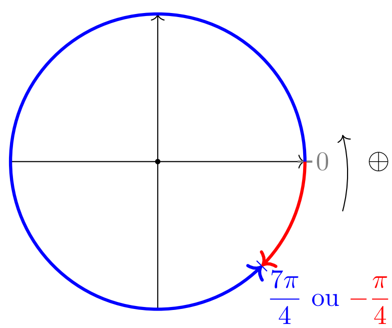
DÉFINITION : *Mesure principale d'un angle*

On appelle **mesure principale** d'un angle sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

EXEMPLES

- Les mesures π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$ appartiennent à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, donc ce sont des mesures principales.
- Puisque $\frac{7\pi}{4} > \pi$, $\frac{7\pi}{4}$ n'est pas une mesure principale.

  Par lecture sur le cercle trigonométrique, $-\frac{\pi}{4}$ est une autre mesure du même angle et $-\frac{\pi}{4} \in\ ]-\pi;\pi]$. Donc $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de l'angle $\frac{7\pi}{4}$.



- On peut aussi déterminer la mesure principale d'un angle sans utiliser le cercle trigonométrique.

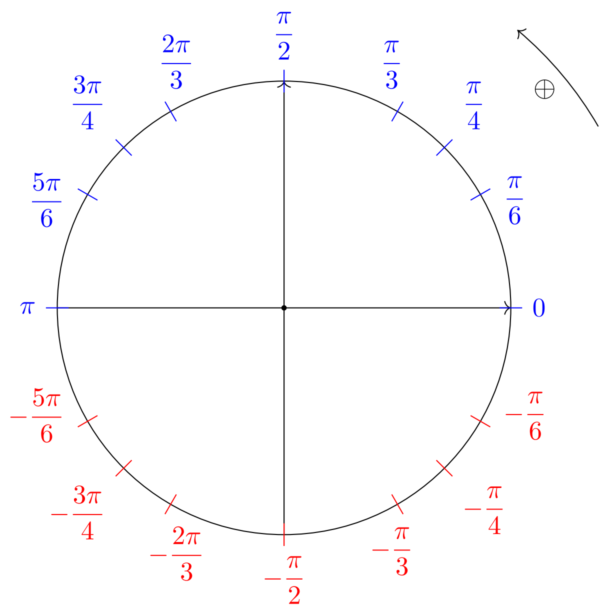
  Par exemple, $\frac{7\pi}{2}$ n'est pas une mesure principale. Pour déterminer sa mesure principale, on remarque que l'on a

$$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$$

  Puisque $4\pi = 2 \times 2\pi$ et $2 \in \mathbb{Z}$, $-\frac{\pi}{2}$ est une autres mesure de l'angle $\frac{7\pi}{2}$.
  Comme $-\frac{\pi}{2} \in\ ]-\pi;\pi]$, on en déduit que $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de $\frac{7\pi}{2}$.

Remarque : *Les angles remarquables et leurs mesures principales*

On donne dans la figure ci-dessous les mesures principales de tous les angles remarquables.



Exercice 7.1

Pour chacun des angles ci-dessous, déterminer sa mesure principale.

1) $\dfrac{7\pi}{6}$ **2)** $\dfrac{5\pi}{3}$ **3)** $-\dfrac{11\pi}{6}$

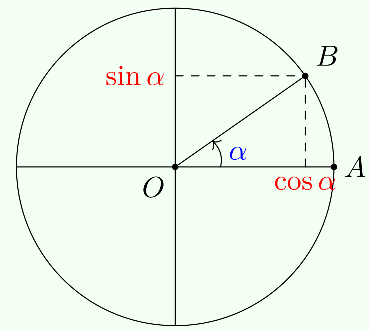
4) $-\dfrac{5\pi}{4}$ **5)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **6)** $\dfrac{10\pi}{3}$

2 Cosinus, sinus et tangente

Dans cette section, on introduit les cosinus, sinus et tangente associés à un angle (en radians). Ce sont ces notions qui justifient l'introduction de la mesure en radians d'un angle. En particulier, une mesure en radians pouvant être n'importe quel nombre réel, on peut définir le cosinus et le sinus de n'importe quel réel (ce qui n'est pas possible avec des degrés, ceux-ci étant compris entre 0 et 360).

DÉFINITIONS : *Sinus, cosinus et tangente*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle (en radians) et B le point du cercle trigonométrique tel que $\alpha = \widehat{AOB}$.
On appelle respectivement **cosinus** et **sinus** de l'angle α, notés $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, l'abscisse et l'ordonnée du point B :



$$\cos\alpha = \text{abscisse } (B)$$

et

$$\sin\alpha = \text{ordonnée}(B)$$

Pour $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on appelle **tangente** de l'angle α, notée $\tan\alpha$, le réel défini par

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

REMARQUES

- ▷ On a défini $\tan\alpha$ uniquement pour $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En effet, si $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos\alpha = 0$ et on ne peut donc pas écrire $\tan\alpha = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
- ▷ Puisque le cosinus, le sinus et la tangente ne dépendent que la position du point B sur le cercle trigonométrique, on en déduit que le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle ne dépendent que de la *mesure principale* de cet angle.

NOTATION

Pour tout réel α, on écrit $\cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha$ au lieu de $(\cos\alpha)^2$ et $(\sin\alpha)^2$.

Les définitions de sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique impliquent naturellement les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉS : *Propriétés fondamentales des fonctions cosinus et sinus*

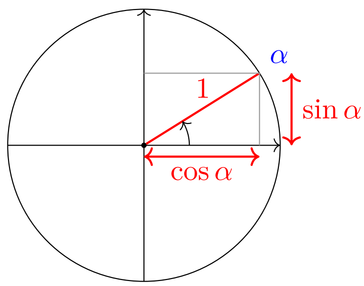
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

1) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

REMARQUE

La deuxième propriété est une conséquence du théorème de Pythagore comme on peut le voir dans l'illustration ci-dessous



EXERCICE 7.2

En utilisant les propriétés fondamentales précédentes, déterminez $\cos\alpha$ sachant que

1) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{5}$ et $\cos\alpha \geq 0$

2) $\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$ et $\cos\alpha \geq 0$

3) $\sin\alpha = \dfrac{1}{10}$ et $\cos\alpha \leq 0$

4) $\sin\alpha = -\dfrac{1}{5}$ et $\cos\alpha \leq 0$

Puisque la valeur d'un cosinus ou d'un sinus ne dépend pas du choix de la mesure de l'angle, on a le résultat dit de **périodicité** ci-dessous.

PROPRIÉTÉS : *Périodicité*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

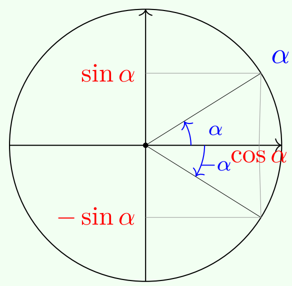
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \textit{et} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

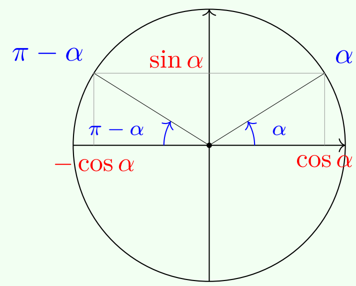
On donne ci-après des propriétés très utiles pour déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle.

PROPRIÉTÉS

Par lecture sur le cercle trigonométrique, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

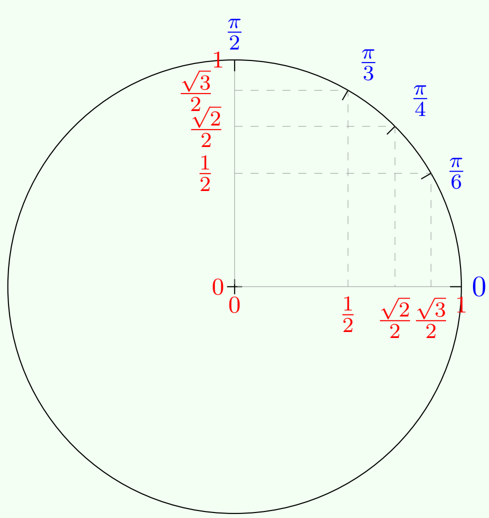
$$\left\{\begin{array}{lclcrcl} \cos(-\alpha) & = & \cos\alpha & \textit{et} & \cos(\pi-\alpha) & = & -\cos\alpha \\ \sin(-\alpha) & = & -\sin\alpha & \textit{et} & \sin(\pi-\alpha) & = & \sin\alpha \end{array}\right.$$





On donne ci-dessous les valeurs des cos, sin et tan pour les angles remarquables sur le premier quart du cercle trigonométrique. Ces valeurs sont à connaître impérativement.

PROPRIÉTÉ : *Valeurs remarquables des* cos, sin *et* tan *à connaître*



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

À partir des propriétés vues précédemment et du tableau ci-dessus, il est possible de déterminer les valeurs des cos, sin et tan pour tous les angles remarquables.

Exemples

▷ L'angle $-\dfrac{7\pi}{6}$ a pour mesure principale $\dfrac{5\pi}{6}$. Or $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$. On en déduit

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

▷ L'angle $\dfrac{5\pi}{3}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$. On en déduit

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

et

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De plus, on en déduit

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$$

Exercice 7.3

Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$					
Mesure principale									
$\cos x$					$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	
$\sin x$					$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$									$-\sqrt{3}$

3 Fonctions sinus et cosinus

Comme dit précédemment, la notion de radian nous a permis de définir le cosinus et sinus de n'importe quel nombre réel. On peut alors introduire deux nouvelles fonctions usuelles, les fonctions sinus et cosinus, dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Définition : *Fonctions sinus et cosinus*

Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\sin : x \mapsto \sin x \quad \text{et} \quad \cos : x \mapsto \cos x$$

Par lecture sur le cercle trigonométrique, on obtient les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus.

Propriété

- ▷ *Le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle* $[0;\pi]$ *est*

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- ▷ *Le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle* $[0;\pi]$ *est*

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, on obtient :

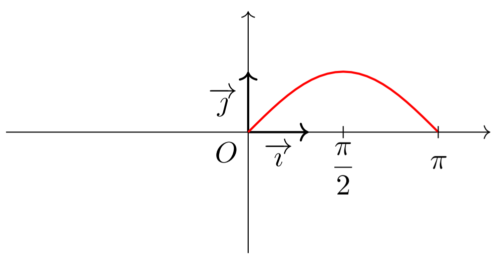
Propriétés

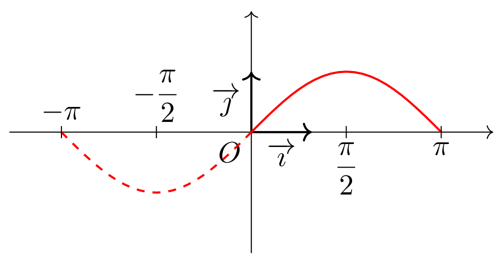
- ▷ *La fonction cosinus est paire.*
- ▷ *La fonction sinus est impaire.*

Remarque

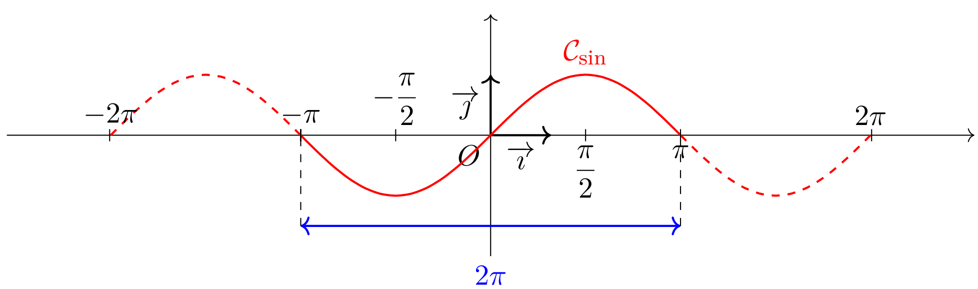
En particulier, on en déduit que la courbe représentative du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle du sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Soit $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère du plan. La courbe représentative du sinus s'obtient simplement à partir de son tableau de variations et de la propriété de symétrie.

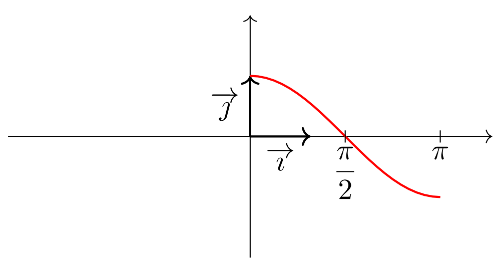


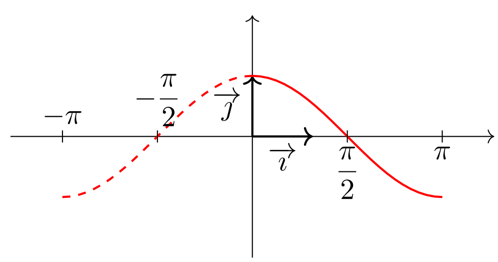


Puisque, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, on en déduit par translation la courbe représentative de la fonction sinus que l'on appelle **sinusoïde**.

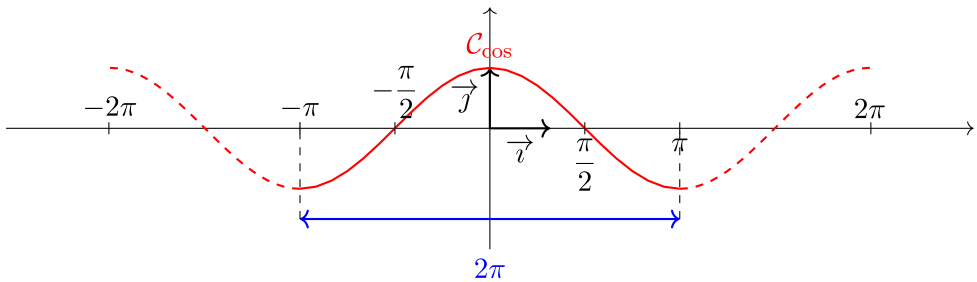


On fait de même pour la courbe représentative du cosinus.





Par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus sur tour $\mathbb{R}$ qui est aussi appelée une sinusoïde.



4 Équations trigonométriques

DÉFINITION : *Équation trigonométrique - Niveau 1*

On appelle **équation trigonométrique de niveau 1** une équation de la forme :

- ▷ $\cos x = a$
- ▷ $\sin x = b$

où a est le cosinus d'un angle remarquable et b est le sinus d'un angle remarquable.Enfin, x est un angle inconnu que l'on cherche à déterminer.

La résolution d'une équation trigonométrique de niveau 1 est assez simple, il suffit de suivre la méthode ci-dessous.

MÉTHODE : *Résolution d'équations trigonométriques de niveau 1*

1. Utiliser le cercle trigonométrique pour obtenir les solutions évidentes (il y en a 2 ou 1 seule).
2. Ajouter $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) aux solutions trouvées.

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation : $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

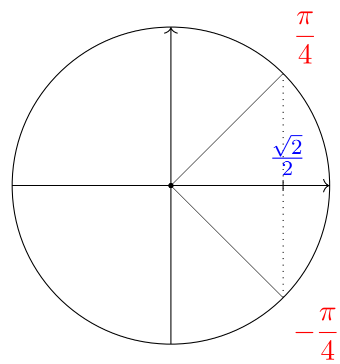
Sur le cercle trigonométrique, deux angles remarquables ont pour cosinus $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$ (voir figure ci-après).

Les solutions de cette équation sont donc tous les angles de la forme :

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Toutes les solutions forment un ensemble $\mathcal{S}$ que l'on écrit

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Exercice 7.4

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = 1$

2) $\cos x = -1$

3) $\cos x = -\frac{1}{2}$

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition : *Équation trigonométrique - Niveau 2*

On appelle **équation trigonométrique de niveau 2** une équation d'inconnue x et ayant l'une des formes suivantes :

▷ $\cos X = \cos Y$

▷ $\sin X = \sin Y$

où X est une expression dépendant de x et Y est une expression pouvant dépendre de x.

Exemples

Les équations ci-dessous sont toutes des équations trigonométriques de niveau 2 :

▷ $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$

▷ $\cos(2x) = \cos(3x + 2)$

▷ $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

▷ $\sin(3x) = \sin(2x)$

PROPOSITION

▷ *Les solutions de* $\cos X = \cos Y$ *vérifient*

$$X = Y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \textit{ou} \quad X = -Y + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$$

▷ *Les solutions de* $\sin X = \sin Y$ *vérifient*

$$X = Y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \textit{ou} \quad X = \pi - Y + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$$

EXEMPLES

▷ On veut résoudre l'équation $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$. D'après la proposition, on a

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

▷ On veut résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(3x)$. On a

$$2x = 3x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad 2x = -3x + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$$

Ce qui donne

$$-x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad 5x = 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{-2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que k est un entier relatif.

EXERCICE 7.5

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$

2) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

3) $\cos(2x) = \cos(3x + 2)$

4) $\sin(3x) = \sin(2x)$

5 Formules d'addition

On termine ce chapitre sur deux formules utiles pour déterminer la valeur du cosinus ou d'un sinus dans certains cas.

Propriétés : *Formules d'addition*

Soient a et b deux réels. On a :

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ **2)** $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Exercice 7.6

À l'aide des propriétés précédentes, déterminer les valeurs de :

1) $\cos(a-b)$ **2)** $\sin(a-b)$

Exercice 7.7

Soit a un réel.

1) Montrer que : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

2) Montrer que : $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

3) Supposons que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'on a

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 7.1

1) On a

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2\pi - \frac{5\pi}{6}$$

Puisque $2\pi = 2k\pi$ avec $k = 1 \in \mathbb{Z}$ et $-\frac{5\pi}{6} \in \,]-\pi; \pi]$, on en déduit que $-\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de $\frac{7\pi}{6}$.

2) On a
$$\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$
Puisque $-\frac{\pi}{3} \in \,]-\pi; \pi]$, $-\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $\frac{5\pi}{3}$.

3) On a
$$-\frac{11\pi}{6} = -\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{6}$$
d'où $\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $-\frac{11\pi}{6}$

4) On a
$$-\frac{5\pi}{4} = -\frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = -2\pi + \frac{3\pi}{4}$$
d'où $\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $-\frac{5\pi}{4}$

5) La mesure principale de $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ est $\frac{\pi}{2}$.

6) La mesure principale de $\frac{10\pi}{3} = 4\pi - \frac{2\pi}{3}$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

Corrigé Exercice 7.2

1) On a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donc
$$\cos^2\alpha + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$
Ainsi,
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$
On a donc
$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{25}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
Puisque $\cos\alpha \geq 0$, on en déduit $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.
On procède de même pour les trois questions suivantes pour lesquelles on donne simplement le résultat final.

2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

3) $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10}$.

4) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Corrigé Exercice 7.3

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$					
Mesure principale	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\sqrt{3}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	/	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	/	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

Corrigé Exercice 7.4

1) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont :
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont :
$x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

3) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont :
$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4) On observe sur le cercle trigonométrique que les solutions sont :
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Corrigé Exercice 7.5

1) $\sin x = \sin\frac{\pi}{2}$: la formule donne directement : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$: la formule donne directement : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) $\cos(2x) = \cos(3x+2)$: la formule donne directement : $2x = 3x+2+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -(3x+2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $\triangleright$ $2x = 3x + 2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = -2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\triangleright$ $2x = -(3x+2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = -\frac{2}{5} + \frac{2k}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{-2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{2}{5} + \frac{2k}{5}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4) $\sin(3x) = \sin(2x)$: la formule donne directement : $3x = 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $3x = -2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- $\triangleright$ $3x = 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\triangleright$ $3x = -2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donne $x = \frac{2k}{5}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k}{5}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Corrigé Exercice 7.6

Il suffit de remplacer b par $-b$, puis d'utiliser les formules

$$\cos(-b) = \cos b \quad \text{et} \quad \sin(-b) = -\sin b$$

On obtient

1) $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

2) $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Corrigé Exercice 7.7

1) En prenant $b = a$, on obtient

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

2) De même,

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$$

3) Supposons que $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} &= \frac{2\frac{\sin a}{\cos a}}{1-\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2} = \frac{2\sin a}{\cos a\left(1-\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right)^2\right)} \\ &= \frac{2\sin a \cos^2 a}{\cos a\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)} = \frac{\sin(2a)}{\cos(2a)} = \tan(2a)\end{aligned}$$

7 Exercices

Exercice 7.8

Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	28π	$-\frac{11\pi}{3}$				
Mesure principale										
$\cos x$							0	$-\frac{1}{2}$		-1
$\sin x$							1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan x$									$-\sqrt{3}$	0

Exercice 7.9

Résoudre les équations suivantes :

1) $\sin x = 0$ **2)** $\cos x = 1$ **3)** $\sin x = -\frac{1}{2}$

4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **5)** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **6)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7.10

Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ **2)** $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ **4)** $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

Exercice 7.11

Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sin(3x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

3) $\cos(4x + \pi) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

4) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Exercice 7.12

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

2) En utilisant les résultats obtenus ci-dessus, résoudre les équations

a) $\cos x = \sin x$,

b) $\cos x = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $\cos x = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Exercice 7.13

En utilisant les formules d'addition, calculer

1) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 7.14

Montrer l'égalité

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x).$$

CHAPITRE 8

Géométrie vectorielle dans l'espace

Dans ce chapitre, on étend les notions vues au chapitre 4 au cas de l'espace. Tout d'abord, on définit la notion de droite définie par un point et un vecteur directeur. Ensuite, on introduit la notion de plan de l'espace qui correspond à une « feuille infinie ». Dans la troisième section, on étend les notions de repère et de coordonnées au cas de l'espace. Enfin, à partir de la notion de coordonnées, on montre comment déterminer les équations des droites et des plans puis on détermine les intersections de droites et plans.

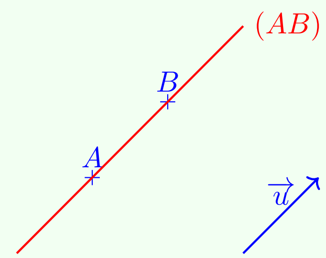
Sommaire

1 Droites définies par un vecteur directeur

Cette première section est un complément et une généralisation du chapitre 4. On y définit, dans le plan et dans l'espace, la notion de droite donnée par un point et un vecteur directeur.

Définition

Soient A un point du plan ou de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
La droite passant par A et de **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}$ est la droite (AB) telle que B est le point donné par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.



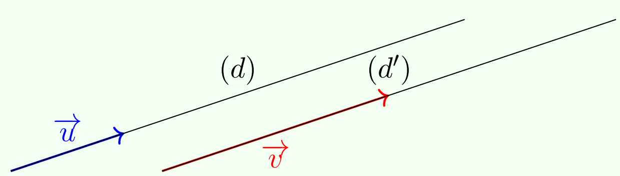
Remarque

La droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est donc la droite passant par A de direction la direction de $\overrightarrow{u}$.

Lorsque deux droites sont définies par des vecteurs directeurs, on peut facilement déterminer si celles-ci sont parallèles. En effet, puisque le vecteur directeur détermine la direction de la droite, si les deux vecteurs sont colinéaires alors les deux droites ont la même direction. On en déduit le résultat suivant :

Proposition

Soient (d), (d') deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Alors, (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.



Exemple

Soient $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan et (d), (d') les droites d'équations respectives

$$y = x + 2 \quad \text{et} \quad y = 1 - x$$

En prenant $x = 0$ et $x = 1$, on obtient que les points $A(0;2)$ et $B(1;3)$ appartiennent à (d). Donc un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

De même, les points $C(0;1)$ et $D(1;0)$ appartiennent à (d') et donc un vecteur directeur de (d') est $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, d'où (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Exercice 8.1

Soient $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan et (d), (d') les droites d'équations respectives

$$-x+2y-2=0 \quad \text{et} \quad 3x+6y+6=0$$

Déterminer si (d) et (d') sont parallèles.

Proposition

Soient A un point du plan ou de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
Un point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Exercice 8.2

Soient $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan et $A(2;3)$, $B(-3;1)$, $C(4;-3)$.
Déterminer l'équation de la droite (d) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Remarque

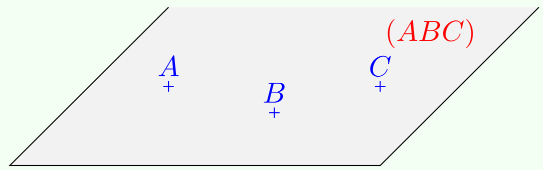
Les exercices précédents sont donnés dans le plan car, pour l'instant, les coordonnées dans l'espace n'ont pas été définies.

2 Plans dans l'espace

Dans cette section, on introduit la notion de plan de l'espace et de points et vecteurs coplanaires. Les exemples correspondants aux notions développées ci-après seront donnés dans la section suivante en utilisant la notion de coordonnées.

DÉFINITION : *Plan de l'espace*

Un **plan** de l'espace est la donnée de trois points non alignés (il s'agit de la « feuille infinie » contenant ces trois points).
Étant donnés trois points non alignés A, B et C, le plan contenant ces trois points est noté (ABC).



REMARQUES

- ▷ Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Alors, les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires (car A, B et C sont non alignés).
- ▷ Réciproquement, soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Si on définit les points B et C par

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$$

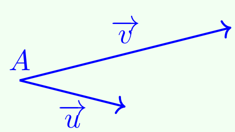
alors A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan de l'espace.

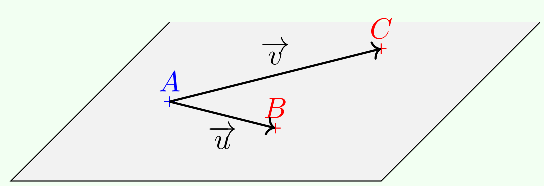
La remarque précédente entraîne la définition ci-dessous.

DÉFINITION : *Vecteurs directeurs d'un plan*

Soient A un point de l'espace et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de l'espace.
Le plan (P) passant par A de vecteurs directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le plan (ABC), où B et C sont donnés par

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$$

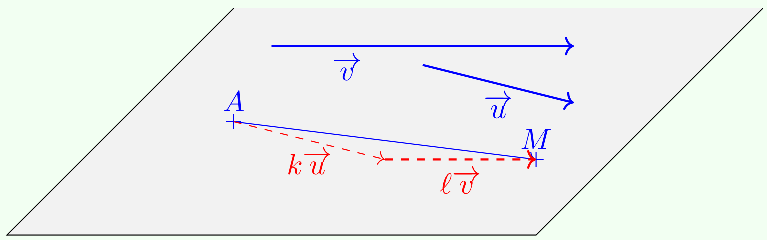




Théorème

Soient A un point de l'espace, deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de l'espace et (P) le plan passant par A de vecteurs directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Alors, un point M appartient au plan P si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{v}$$



Attention

Il ne faut pas oublier de vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **non colinéaires**.

Remarque

En particulier, considérons le cas d'un plan (ABC) avec A, B et C trois points non alignés. On pose

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

Alors, un point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{v}$$

De plus, le choix des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'est pas unique : on peut choisir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA}$, etc.

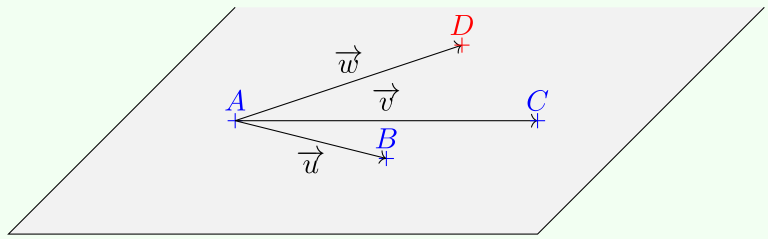
Définition : *Points et vecteurs coplanaires*

1) On dit que quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** s'ils appartiennent au même plan. Autrement dit, si D appartient au plan (ABC).

2) Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires.
On note A, B, C, D les points définis par

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$$

Alors, on dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si A, B, C, D sont coplanaires.



D'après le théorème donné plus haut, on obtient immédiatement le résultat suivant :

COROLLAIRE

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires. Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{v}$$

On dit alors que $\overrightarrow{w}$ est **combinaison linéaire** *de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

3 Bases et repères dans l'espace

Comme dans le cas du plan, tout point, respectivement vecteur, du plan peut être représenté par des coordonnées dans un repère, respectivement dans une base.

DÉFINITIONS : *Base et repère de l'espace*

1) Trois vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ non nuls du plan et non coplanaires forment une **base** de l'espace notée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

2) On appelle **repère** de l'espace tout quadruplet $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, où O est un point de l'espace et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.

3) On dit qu'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est **orthonormé** si les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux et de même norme.

Remarque

Les définitions précédentes sont analogues à celles correspondant au mêmes notions dans le plan. En effet,

- ▷ un repère du plan ou de l'espace est la donnée d'un point et d'une base du plan ou de l'espace,
- ▷ une base du plan est la donnée de *deux vecteurs non colinéaires* tandis qu'une base de l'espace est la donnée de *trois vecteurs non coplanaires*.

À partir de la notion de base, on définit les coordonnées d'un vecteur.

Théorème

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.
Alors, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace se décompose de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

où (x, y, z) est un triplet de nombres réels.

Définition : *Coordonnées d'un vecteur*

Avec les notations précédentes, x, y, z sont appelées les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On note

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De manière analogue au cas du plan, on a le résultat suivant :

Proposition

Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace, k un réel et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

▷ **Égalité de deux vecteurs.**
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \text{si et seulement si} \quad x = x', \quad y = y' \quad \text{et} \quad z = z'$$

▷ **Somme de deux vecteurs.**
Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ *a pour coordonnées* $\vec{w}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.

▷ **Produit d'un vecteur par un réel.**
Le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\vec{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

REMARQUE

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. D'après la proposition précédente (avec les mêmes notations), on en déduit :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel* k *tel que* $x' = kx$, $y' = ky$ *et* $z' = kz$.

EXEMPLES

Soient $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix} 2x \\ y-z \\ x+y \end{pmatrix}$$

▷ On a

$$2\vec{u} + 3\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

▷ On a $\vec{v} = \vec{w}$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2 &= 2x \\ 2 &= y-z \\ 4 &= x+y \end{cases}$$

ce qui donne $x = 1$, $y = 3$ et $z = 1$.

- ▷ Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. En effet, cherchons $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. On obtient
$$\left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & k \\ 2 & = & k \\ 4 & = & 2k \end{array}\right.$$
Chacune des trois équations donnent la valeur $k = 2$. On en déduit $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$.
- ▷ Soit $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$. Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas colinéaires. En effet, cherchons $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v'} = k\overrightarrow{u}$. On obtient
$$\left\{\begin{array}{lcl} 2 & = & k \\ 3 & = & k \\ 4 & = & 2k \end{array}\right.$$
La première et la dernière équation donne la valeur $k = 2$ **mais** la deuxième équation donne la valeur $k = 3$. On en déduit que le système n'admet pas de solution et donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas colinéaires.

De plus, les coordonnées des vecteurs permettent de déterminer si ceux-ci sont coplanaires.

Proposition

Soient $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de coordonnées
$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$$
avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.
Alors, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que
$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & kx + \ell x' \\ y'' & = & ky + \ell y' \\ z'' & = & ky + \ell z' \end{array}\right.$$

Remarque

Autrement dit, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si le système ci-dessus admet une solution (k, ℓ).

Exemples Vecteurs coplanaires

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de l'espace.

1) Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$.

On vérifie aisément (exercice) que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
Alors, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe k et ℓ tels que

$$\begin{cases} 4 &= 2k, \\ 0 &= k+2\ell \\ -5 &= -k+3\ell \end{cases}$$

La première équation donne $k = 2$ et la deuxième donne $\ell = -1$.De plus, k et ℓ vérifient bien la troisième équation. Donc le système a une unique solution $k = 2$ et $\ell = -1$.
D'où les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

2) Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les mêmes que précédemment et donc ne sont pas colinéaires.
Alors, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe k et ℓ tels que

$$\begin{cases} 1 &= 2k \\ 5 &= k+2\ell \\ 5 &= k+3\ell \end{cases}$$

La première équation donne $k = 1/2$ et la deuxième donne $\ell = 9/4$. Mais k et ℓ ne vérifient pas la troisième équation. Donc le système n'a pas de solution.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 8.3

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les trois vecteurs de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$$

Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Les coordonnées d'un point de l'espace sont définis de la même façon que les coordonnées d'un point du plan.

Définition : *Coordonnées d'un point*

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et M un point de l'espace.
On appelle **coordonnées** du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Si on a $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on note les coordonnées de M par $M(x;y;z)$.
De plus, on dit que x est l'**abscisse** de M, y est l'**ordonnée** de M et z est la **cote** de M.

On donne ci-dessous les propriétés essentielles portant sur les coordonnées d'un point de l'espace.

Propriétés

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. Alors,

- ▷ *Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$$

- ▷ *Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont*

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

▷ *Si le repère est orthonormé, on a*

$$AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

EXEMPLES

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace et A, B, C les points de coordonnées

$$A(1;1;0), \quad B(2;1;2) \quad \text{et} \quad C(3;2;0)$$

1) Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Pour montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Alors, on obtient le système

$$\begin{cases} 2 &= k \\ 1 &= 0 \\ 0 &= 2k \end{cases}$$

La deuxième équation est impossible donc le système n'a pas de solution. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit D le point de coordonnées $D(2;2;-2)$. Montrons que D appartient au plan (ABC).
Soient k et ℓ deux réels tels que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$. Puisque l'on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} 1 &= k + 2\ell \\ 1 &= \ell \\ -2 &= 2k \end{cases}$$

La deuxième équation donne $\ell = 1$ et la troisième donne $k = -1$. Ces valeurs de k et ℓ sont bien solution de la première équation donc A, B, C et D sont bien coplanaires.

3) Soient I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment $[BD]$. Alors, les coordonnées de I et J sont

$$I\left(2;\frac{3}{2};0\right) \quad \text{et} \quad J\left(2;\frac{3}{2};0\right)$$

On en déduit $I = J$ donc $ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme.

4) Le résultat précédent peut se montrer aussi en remarquant que l'on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque

Étant donnés quatre points A, B, C et D, pour montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, il faut d'abord vérifier que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 8.4

Soient A, B, C et D les points de coordonnées

$$A(1;-2;3), \quad B(2;-3;3), \quad C(2;0;0) \quad \text{et} \quad D(4;1;-3)$$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire, d'après l'exercice précédent, que A, B, C et D sont coplanaires.

4 Équations de droites et de plans de l'espace

Dans toute la suite, on suppose l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

MÉTHODE : *Déterminer l'équation d'une droite*

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On note (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Alors, un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$. On note les coordonnées de A et de $\overrightarrow{u}$ par

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

D'après les propriétés des coordonnées d'un point et d'un vecteur, on en déduit $M(x; y; z)$ *appartient à* (d) *si et seulement s'il existe un réel* k *tel que*

$$\begin{cases} x - x_A & = & ku_1 \\ y - y_A & = & ku_2 \\ z - z_A & = & ku_3 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} x & = & x_A + ku_1 \\ y & = & y_A + ku_2 \\ z & = & z_A + ku_2 \end{cases}$$

On en déduit la définition suivante :

DÉFINITION : *Équation paramétrique d'une droite*

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

On note (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Alors, on appelle **équation paramétrique** de la droite (d) le système

$$\begin{cases} x & = & x_A + ku_1 \\ y & = & y_A + ku_2 \\ z & = & z_A + ku_3 \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Remarques

- ▷ On parle aussi de **représentation paramétrique** de la droite (d).
- ▷ Toute droite admet une infinité de représentations paramétriques. En effet, celle-ci dépend du vecteur directeur qui n'est pas unique.
- ▷ Lorsqu'une droite est donnée par deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, on peut prendre pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et on obtient ainsi l'équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + k(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + k(y_B - y_A) \\ z & = & z_A + k(z_B - z_A) \end{array}\right.$$

  où $k \in \mathbb{R}$.
- ▷ Le paramètre $k \in \mathbb{R}$ permet de déterminer tous les points de la droite. Par exemple, avec les notations ci-dessus, pour $k = 0$ le point M est le point A et pour $k = 1$, le point M est le point B.

Exemple Équation paramétrique d'une droite

Soient $A(1; 2; 3)$ et $B(0; 8; 4)$ deux points de l'espace. On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 - k \\ y & = & 2 + 6k \\ z & = & 3 + k \end{array}\right.$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Soient $C(2; -4; 2)$ et $D(1; -4; 3)$. Déterminons si C et D appartiennent à la droite (AB).

- ▷ Le point C appartient à la droite (AB) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de (AB). C'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & 1 - k \\ -4 & = & 2 + 6k \\ 2 & = & 3 + k \end{array}\right.$$

Or pour les trois équations on obtient le même résultat $k = -1$, ainsi le système admet une solution. Donc C appartient à la droite (AB).

▷ Le point D appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 1 &= 1 - k \\ -4 &= 2 + 6k \\ 3 &= 3 + k \end{cases}$$

La première et la dernière équation donnent $k = 0$ mais la seconde équation donne $k = -1$. On en déduit que le système n'admet pas de solutions. Donc D n'appartient pas à la droite (AB).

EXERCICE 8.5

Soient $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$ deux points de l'espace.

1) Déterminer l'équation de la droite (AB).

2) En déduire que $C(1;2;3)$ n'appartient pas à la droite (AB).

DÉFINITION : *Équation d'un plan*

Soit (P) un plan de l'espace.
Alors, il existe quatre réels α, β, γ et δ tels que tout point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient au plan (P) si et seulement si

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

On dit alors que $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est une **équation du plan** (P).

REMARQUES

▷ L'équation d'un plan n'est pas unique. En effet, si l'on a $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ alors, pour tout réel k, on obtient

$$k\alpha x + k\beta y + k\gamma z + k\delta = 0$$

et ainsi on obtient une nouvelle équation pour le même plan.

▷ La forme d'une équation de plan dans l'espace est proche de celle d'une droite dans le plan. La différence entre les deux réside dans la présence du terme γz qui est spécifique au cas de l'espace.

On donne ci-dessous une méthode générale permettant de déterminer l'équation d'un plan.

MÉTHODE : *Déterminer l'équation d'un plan*

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On note (P) le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Alors, un point $M(x; y; z)$ appartient au plan (P) si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$$

On note les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit
$M(x; y; z)$ appartient au plan (P) si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\begin{cases} x - x_A &= ku_1 + \ell v_1 \\ y - y_A &= ku_2 + \ell v_2 \\ z - z_A &= ku_3 + \ell v_3 \end{cases}$$

Ce système est appelé l'**équation paramétrique** du plan (P).
Pour obtenir l'équation du plan (P) comme donnée dans la définition, on raisonne de la façon suivante :

1) On choisit deux équations du système précédent.

2) On obtient un système de deux équations et deux inconnues (k et ℓ) que l'on résout en fonction de x, y et z.

3) Dans la dernière équation restante, on remplace k et ℓ par les valeurs obtenues à l'étape précédente.

EXEMPLE ÉQUATION D'UN PLAN

Soient les trois points de l'espace

$$A(1; -2; 3), \quad B(2; -3; 3) \quad \text{et} \quad C(2; 0; 0)$$

(il s'agit des points considérés dans le dernier exercice de la section précédente).
Les points A, B et C ne sont pas alignés (exercice).
Déterminons l'équation du plan (ABC). Le plan (ABC) est le plan passant

par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1) On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$

D'après les valeurs des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on en déduit qu'un point $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels k et ℓ tels que

$$\begin{cases} x-1 &= k+\ell \\ y+2 &= -k+2\ell \\ z-3 &= -3\ell \end{cases}$$

Il faut alors déterminer k et ℓ en fonction de x, y, z.

2) On considère les deux dernières équations du système, soit

$$\begin{cases} y+2 &= -k+2\ell \\ z-3 &= -3\ell \end{cases}$$

Dans ce système, d'après la deuxième équation, on obtient $\ell = 1 - \frac{z}{3}$ et d'après la première équation, on a $k = 2\ell - y - 2 = 2 - \frac{2z}{3} - y - 2 = -\frac{2z}{3} - y$.

3) On remplace ensuite k et ℓ par ces valeurs dans l'équation restante du système (la première) ce qui donne :

$$x - 1 = k + \ell = -\frac{2z}{3} - y + 1 - \frac{z}{3} = -y - z + 1$$

que l'on écrit sous la forme

$$x + y + z - 2 = 0$$

qui est l'équation du plan (ABC).

À partir de cette équation, on peut vérifier que $D(4;1;-3)$ appartient au plan (ABC). En effet, les coordonnées de D vérifient

$$x_D + y_D + z_D - 2 = 4 + 1 - 3 - 2 = 0$$

donc $D(4;1;-3)$ appartient au plan (ABC).
Par contre, le point $E(1;2;3)$ n'appartient pas au plan (ABC). En effet, les coordonnées de E vérifient

$$x_E + y_E + z_E - 2 = 1 + 2 + 3 - 2 = 4 \neq 0$$

donc $E(1;2;3)$ n'appartient pas au plan (ABC).

Remarque

Pour vérifier que l'équation du plan (ABC) obtenue est correcte, il suffit de vérifier que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation du plan.

En effet, l'équation permet de définir un plan et si A, B et C appartiennent à ce plan alors celui-ci est nécessairement le plan (ABC).
Dans l'exemple donné ci-dessus, on a bien

$$x_A + y_A + z_A - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$$
$$x_B + y_B + z_B - 2 = 2 - 3 + 3 - 2 = 0$$
$$x_C + y_C + z_C - 2 = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$$

donc $x + y + z - 2 = 0$ est bien l'équation du plan (ABC).

Exercice 8.6

Soient $A(1;0;2)$, $B(0;1;2)$ et $C(1;1;1)$.
Vérifier que l'équation du plan (ABC) est $x + y + z - 3 = 0$.

Exercice 8.7

Soient $A(0;2;3)$, $B(1;0;5)$ et $C(1;1;0)$

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer l'équation du plan (ABC).

3) Les points $D(1;2;3)$ et $E(0;2;3)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

5 Intersection de droites et de plans

On termine ce chapitre par des applications des équations de droites et de plans pour déterminer l'intersection de deux droites, l'intersection d'une droite et d'un plan, et enfin l'intersection de deux plans.

Dans toute la suite, on suppose l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

MÉTHODE : *Intersection de deux droites*

Soient (d) et (d') deux droites distinctes. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (d) et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de (d').

1) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont parallèles et donc leur intersection est vide.

2) Sinon, considérons les équations paramétriques de (d) et (d') données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+ku_1 \\ y & = & b+ku_2 \\ z & = & c+ku_3 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a'+\ell v_1 \\ y & = & b'+\ell v_2 \\ z & = & c'+\ell v_3 \end{array}\right.$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, un point $M(x;y;z)$ appartient à ces deux droites si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcccl} a+ku_1 & = & x & = & a'+\ell v_1 \\ b+ku_2 & = & y & = & b'+\ell v_2 \\ c+ku_3 & = & z & = & c'+\ell v_3 \end{array}\right.$$

Il faut alors résoudre le système précédent :

a) On considère deux équations du système pour obtenir k et ℓ.

b) Si k et ℓ obtenus ne vérifient pas l'équation restante : le système n'a pas de solution et alors l'intersection de (d) et (d') est vide.

c) Si k et ℓ obtenus vérifient l'équation restante : les valeurs de k et ℓ sont les solutions du système, alors, dans l'une des deux équations paramétriques, on remplace k ou ℓ par sa valeur pour obtenir les coordonnées $(x;y;z)$ de M.

EXEMPLES INTERSECTION DE DEUX DROITES

1) Soient (d) et (d') les droites d'équations respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-k \\ y & = & 2+6k \\ z & = & 3+k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2\ell \\ y & = & 2 \\ z & = & \ell \end{array}\right.$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

En prenant $k=0$, puis $k=1$ on obtient deux points $A(1;2;3)$ et $B(0;8;4)$ appartenant à (d). De même, en prenant $\ell=0$ et $\ell=1$, on obtient deux points $C(1;2;0)$ et $D(3;2;1)$ appartenant à (d').

On en déduit que la droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et la droite (d')

a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$ donnés par

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.
Un point $M(x;y;z)$ appartient à (d) et (d') si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcccl} 1-k & = & x & = & 1+2\ell \\ 2+6k & = & y & = & 2 \\ 3+k & = & z & = & \ell \end{array}\right.$$

D'après la deuxième équation, $k=0$. En remplaçant dans la troisième équation, on obtient $\ell = 3$.
Alors $1-k = 1 \neq 7 = 1+2\ell$ donc la première équation n'est pas vérifiée.
Donc le système n'admet pas de solution et l'intersection de (d) et (d') est vide.

2) Soient (d) et (d') les droites d'équations respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-k \\ y & = & 2+6k \\ z & = & 3+k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6+2\ell \\ y & = & -4 \\ z & = & 4+\ell \end{array}\right.$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Ces deux droites sont coplanaires et non parallèles (exercice). Le point $M(x;y;z)$ à l'intersection de ces deux droites vérifie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-k & = & 6+2\ell \\ 2+6k & = & -4 \\ 3+k & = & 4+\ell \end{array}\right.$$

D'après la deuxième équation, $k=-1$. Alors, d'après la dernière équation

$$\ell = 3+k-4 = -2$$

Enfin, on vérifie que la première équation est vérifiée avec les valeurs obtenues pour k et ℓ. On a

$$1-k = 1+1 = 2 \quad \text{et} \quad 6+2\ell = 6-4 = 2$$

donc la première équation est bien vérifiée.
En remplaçant k par -1 et ℓ par -2 dans le premier système (ou le deuxième), on obtient $x=2$, $y=-4$ et $z=2$. Donc le point d'intersection de (d) et (d') est $M(2;-4;2)$.

EXERCICE 8.8

Soient $A(1;-2;-3)$, $B(3;1;2)$, $C(1;-3;-2)$ et $D(-2;-7;-10)$.

1) Déterminer les équations paramétriques des droites (AB) et (CD).

2) En déduire l'intersection de (AB) et (CD).

MÉTHODE : *Intersection d'une droite et d'un plan*

Soients (d) une droite et (P) un plan de l'espace.

1) On étudie tout d'abord si (d) appartient au plan (P).

   a) Soient A et B deux points distincts de (d).

   b) Si A et B appartiennent à (P) alors la droite (d) appartient au plan (P).

2) Si (d) n'appartient **pas** au plan (P). On suppose l'équation paramétrique de (d) et l'équation du plan (P) données par

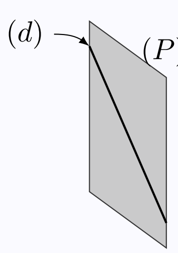
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+ku_1 \\ y & = & b+ku_2 \\ z & = & c+ku_3 \end{array}\right. , \text{ où } k \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

Dans l'équation du plan, on remplace x, y et z par les expressions données dans l'équation paramétrique de (d)

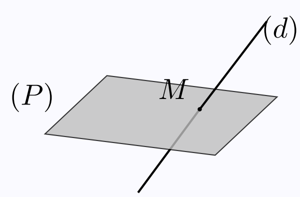
$$\alpha(a+ku_1)+\beta(b+ku_1)+\gamma(c+ku_3)+\delta=0$$

   a) Si cette équation a une solution k, on remplace k par cette valeur dans l'équation paramétrique et on obtient les coordonnées $(x;y;z)$ de l'unique point d'intersection $M(x;y;z)$ de (d) et (P).

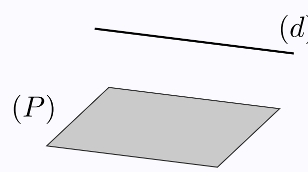
   b) Si cette équation n'a pas de solution, l'intersection de (d) et (P) est vide.



La droite (d) appartient au plan (P).



La droite (d) n'appartient pas au plan (P) et il y a un unique point d'intersection M.



La droite (d) n'appartient pas au plan (P) et l'intersection entre le plan et la droite est vide.

Exemple Intersection d'une droite et d'un plan

Soient $A(0;0;2)$, $B(1;2;0)$, $C(2;0;1)$, $D(2;-1;3)$ et $E(-1;0;4)$.
L'équation paramétrique de la droite (DE) et l'équation du plan (ABC) sont (exercice)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-3k \\ y & = & -1+k \\ z & = & 3+k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad 2x+3y+4z-8=0$$

où $k \in \mathbb{R}$.

1) Les coordonnées de D vérifient

$$2x_D+3y_D+4z_D-8 = 4-3+12-8 = 5 \neq 0$$

donc D n'appartient pas au plan (ABC). Ainsi la droite (DE) n'appartient pas au plan (ABC).

2) On remplace x, y, z dans l'équation du plan par les valeurs données par l'équation de la droite :

$$0 = 2x+3y+4z = 2(2-3k)+3(-1+k)+4(3+k)-8 = 5+k$$

d'où $k=-5$. En prenant $k=-5$ dans l'équation de la droite on obtient $x=17$, $y=-6$ et $z=-2$.
Donc l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE) est le point $M(17;-6;-2)$.

Exercice 8.9

Soient (d) la droite et (P) le plan de l'espace d'équations respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-k \\ y & = & 2+6k \\ z & = & 3+k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad x+y+z-2=0$$

où $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'intersection de (d) et (P).

MÉTHODE : *Intersection de deux plans*

Soient (P) et (P') deux plans d'équations respectives :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$$

Si $M(x;y;z)$ est un point d'intersection de (P) et (P'), alors $(x;y;z)$ est solution du système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' &= 0 \end{cases}$$

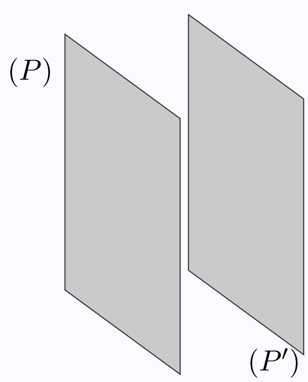
On résout alors le système.

a) Si le système n'admet pas de solution, l'intersection de (P) et (P') est vide.

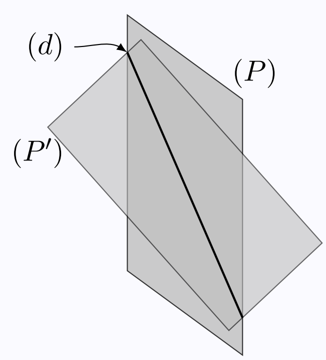
b) Sinon, on détermine x et y en fonction de z, **ou** x et z en fonction de y, **ou** y et z en fonction de x.
Par exemple, si l'on obtient $x = az + u_1$ et $y = bz + u_2$, où a, b, u_1 et u_2 sont des réels, alors on a

$$\begin{cases} x &= ak + u_1 \\ y &= bk + u_2 \\ z &= k \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$. On en déduit que l'intersection de (P) et (P') est la droite (d) dont l'équation paramétrique est donnée ci-dessus.



Les deux plans (P) et (P') sont parallèles donc ils n'ont pas de point d'intersection.



Les deux plans (P) et (P') ont la droite (d) comme intersection.

Exemple Intersection de deux plans

Soient (P) et (P') les deux plans d'équations respectives

$$2x - y + 3z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 3y - 2z + 1 = 0$$

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - 1 & = & 0 \\ -x + 3y - 2z + 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

La deuxième équation donne $x = 3y - 2z + 1$. En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$0 = 2x - y + 3z - 1 = 2(3y - 2z + 1) - y + 3z - 1 = 5y - z + 1$$

d'où $z = 1 + 5y$. Alors, $x = 3y - 2(1 + 5y) + 1 = 3y - 10y - 1 = -7y - 1$. Ainsi, on a exprimé x et z en fonction de y. On en déduit que l'intersection de (P) et (P') est la droite d'équation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 - 7k \\ y & = & k \\ z & = & 1 + 5k \end{array} \right.$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.10

Soient (P) et (P') les deux plans d'équations respectives

$$x + y + z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad 3x - y + z + 4 = 0$$

Déterminer l'intersection de (P) et (P').

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 8.1

En prenant $x = 0$, puis $x = 2$ on obtient que les points $A(0; 1)$ et $B(2; 2)$ appartiennent à la droite (d), tandis que les points $C(0; -1)$ et $D(2; -2)$ appartiennent à la droite (d').

Ainsi, (d) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et (d') admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

Corrigé Exercice 8.2

Un point $M(x;y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

On a

$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$$

Alors, $\overrightarrow{CM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ si et seulement s'il on a

$$-2(x-4)+5(y+3)=0$$

On obtient que l'équation de la droite (d) est

$$-2x+5y+23=0$$

Corrigé Exercice 8.3

1) Vérifions tout d'abord que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ne sont pas colinéaires.
Soit $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$. On obtient alors

$$\begin{cases} 1 &= k\\ 2 &= -k\\ -3 &= 0\end{cases}$$

La dernière équation est impossible donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) Soient k et ℓ deux réels tels que $\overrightarrow{w}=k\overrightarrow{u}+\ell\overrightarrow{v}$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} 3 &= k+\ell\\ 3 &= -k+2\ell\\ -6 &= -3\ell\end{cases}$$

D'après les deux dernières équations, on a $\ell=2$ et $k=2\ell-3=4-3=1$.
Alors on a $k+\ell=1+2=3$ donc la première équation est vérifiée.
On en déduit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Corrigé Exercice 8.4

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$.

2) D'après l'exercice précédent, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires donc A, B, C et D sont coplanaires.

Corrigé Exercice 8.5

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. On en déduit que l'équation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2k \\ y & = & 2 \\ z & = & k \end{array}\right.$$

où $k \in \mathbb{R}$.

2) Le point $C(1;2;3)$ appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 1+2k \\ 2 & = & 2 \\ 3 & = & k \end{array}\right.$$

La première équation donne $k=0$ tandis que la dernière équation donne $k=3$. On en déduit que le système n'admet pas de solution et donc C n'appartient pas à la droite (AB).

Corrigé Exercice 8.6

Il suffit de vérifier que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation $x+y+z-3=0$. Or on a

$$x_A + y_A + z_A - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$
$$x_B + y_B + z_B - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$
$$x_C + y_C + z_C - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$$

On en déduit que l'équation du plan (ABC) est bien $x+y+z-3=0$.

CORRIGÉ EXERCICE 8.7

1) On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Alors, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 &= k \\ -1 &= -2k \\ -3 &= 2k \end{cases}$$

Les trois équations donnent des valeurs de k différentes donc ce système n'a pas de solution. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan (ABC) s'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$. Ce qui donne le système

$$\begin{cases} x &= k + \ell \\ y - 2 &= -2k - \ell \\ z - 3 &= 2k - 3\ell \end{cases}$$

En additionnant les deux premières équations :

$$\begin{cases} x &= k + \ell \\ y - 2 &= -2k - \ell \end{cases}$$

on obtient $x + y - 2 = -k$ donc $k = 2 - x - y$. La première équation donne alors $\ell = x - k = x - (2 - x - y) = -2 + 2x + y$.
On remplace ensuite k et ℓ par ces valeurs dans la dernière équation ce qui donne :

$$\begin{aligned} z &= 3 + 2k - 3\ell = 3 + 2(2 - x - y) - 3(-2 + 2x + y) \\ &= 3 + 4 - 2x - 2y + 6 - 6x - 3y = 13 - 8x - 5y \end{aligned}$$

que l'on écrit sous la forme

$$8x + 5y + z - 13 = 0$$

qui est l'équation du plan (ABC).

3) Les coordonnées de $D(1; 2; 3)$ vérifient

$$8x_D + 5y_D + z_D - 13 = 8 + 10 + 3 - 13 = 8 \neq 0$$

donc D n'appartient pas au plan (ABC).
Les coordonnées de $E(0; 2; 3)$ vérifient

$$8x_E + 5y_E + z_E - 13 = 10 + 3 - 13 = 0$$

donc E appartient au plan (ABC).

Corrigé Exercice 8.8

1) On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-8\end{pmatrix}$$

On en déduit que les équations paramétriques des droites (AB) et (CD) sont respectivement

$$\begin{cases} x &= 1+2k \\ y &= -2+3k \\ z &= -3+5k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x &= 1-3\ell \\ y &= -3-4\ell \\ z &= -2-8\ell \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

2) Le point d'intersection $M(x;y;z)$ de (AB) et (CD) vérifie

$$\begin{cases} x &= 1+2k \\ y &= -2+3k \\ z &= -3+5k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x &= 1-3\ell \\ y &= -3-4\ell \\ z &= -2-8\ell \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 1+2k &= 1-3\ell \\ -2+3k &= -3-4\ell \\ -3+5k &= -2-8\ell \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} 2k &= -3\ell \\ 3k &= -1-4\ell \\ 5k &= 1-8\ell \end{cases}$$

D'après les deux premières équations $k = -\dfrac{3}{2}\ell$ et $-1-4\ell = -\dfrac{9}{2}\ell$, ce qui donne $\ell = 2$ et $k = -3$. De plus, on a $5k + 8\ell = -15 + 16 = 1$ donc la troisième équation est bien vérifiée et ainsi la solution du système est bien $k = -3$ et $\ell = 2$. On a alors

$$\begin{cases} x &= 1+2k = -5 \\ y &= -2+3k = -11 \\ z &= -3+5k = -18 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection de (AB) et (CD) est $M(-5;-11;-18)$.

Corrigé Exercice 8.9

Vérifions d'abord si (d) appartient au plan (P).

D'après l'équation paramétrique de (d), en prenant $k = 0$, le point $A(1; 2; 3)$ appartient à la droite (d). Or les coordonnées de A vérifient

$$x_A + y_A + z_A - 2 = 1 + 2 + 3 - 2 = 4 \neq 0$$

Donc A n'appartient pas au plan (P) et ainsi (d) n'appartient pas au plan (P).

Les coordonnées $M(x; y; z)$ d'un point à l'intersection de (d) et (P) doivent vérifier

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-k \\ y & = & 2+6k \\ z & = & 3+k \end{array}\right. \quad \text{et} \quad x+y+z-2=0$$

Alors, on obtient

$$1 - k + 2 + 6k + 3 + k - 2 = 0$$

Ce qui donne $k = -\dfrac{2}{3}$. D'après l'équation paramétrique de (d), on en déduit $M(\frac{5}{3}; -2; \frac{7}{3})$.

Corrigé Exercice 8.10

Les coordonnées $M(x; y; z)$ d'un point à l'intersection de (P) et (P') doivent vérifier

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-2 & = & 0 \\ 3x-y+z+4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En additionnant les deux équations on obtient $4x + 2z + 2 = 0$, ce qui donne $z = -2x - 1$. Alors,

$$y = 2 - x - z = 2 - x + 2x + 1 = x + 3$$

On choisit pour paramètre $k = x$.
On en déduit que l'intersection de (P) et (P') est la droite d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & k+3 \\ z & = & -2k-1 \end{array}\right.$$

7 Exercices

Exercice 8.11

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et

$$A(-1;3;1), \quad B(3;1;-1), \quad C(1;-3;-1) \quad \text{et} \quad D(-5;0;2)$$

1) Montrer que ABC est un triangle rectangle.

2) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3) Montrer que A, B, C, D sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 8.12

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et

$$A(3;1;-1), \quad B(0;2;-2) \quad \text{et} \quad C(-3;3;1)$$

1) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).

2) Le point C appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 8.13

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et

$$A(-2;1;0), \quad B(2;3;1), \quad C(2;1;-1) \quad \text{et} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'équation de la droite (AB).

2) Déterminer l'équation de la droite (d) passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

3) Vérifier que (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

4) Déterminer le point d'intersection de (AB) et (d).

EXERCICE 8.14

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace, $A(1; 2; 3)$, $B(2; 1; 5)$ et $C(2; 2; 6)$. Déterminer une équation du plan (ABC).

EXERCICE 8.15

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace et

$$A(4; 0; 0), \quad B(0; 3; 0), \quad C(0; 0; 6) \quad \text{et} \quad D\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

On note I le milieu de $[AC]$ et L le point tel que $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées de I et de L.

2) Montrer que les points A, D et L sont alignés.

3) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

4) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

5) Déterminer l'équation du plan (ABC). À l'aide de cette équation, redémontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

EXERCICE 8.16

Soient $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et

$$A(-2; 0; 1), \quad B(1; 2; -1), \quad C(-2; 2; 2) \quad \text{et} \quad D(1; -3; 1)$$

1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer l'équation du plan (ABC).

3) Soient (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives

$$x + y - 3z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y + 6z = 0$$

Montrer que l'intersection de (P_1) et (P_2) est une droite, que l'on notera (d), dont on donnera une équation paramétrique.

4) Déterminer l'intersection de (ABC) et (d).

5) On note (S) l'ensemble des points M tels que $DM = 3$. Quelle est la nature de (S) ?

6) Donner une équation de (S).

7) Déterminer l'intersection de (S) et (d).

CHAPITRE 9

Limites d'une fonction

Ce chapitre concerne la notion de limites d'une fonction qui va de paire avec celle de dérivation donnée dans le chapitre 11. Ces deux notions seront essentielles pour faire l'étude d'une fonction dans le chapitre 11. Après avoir donné la définition des limites de fonctions, on montre comment calculer celles-ci par l'usage de certaines limites usuelles et des opérations sur les limites. Ensuite, on présente le calcul de limites pour certains cas particuliers de formes dites indéterminées. La section 4 est consacrée à la notion d'asymptote à une courbe. Enfin, on introduit la notion de continuité d'une fonction.

Sommaire

1 Définitions

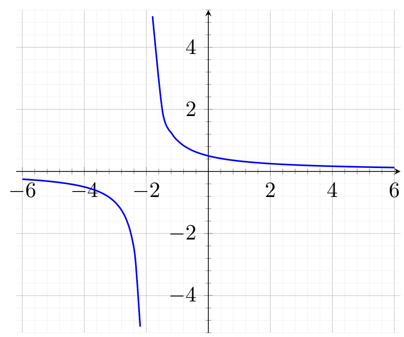
Il existe deux notions différentes de limites : celle en l'infini et celle en un point. On va introduire ces deux notions séparément.

1.1 Limite d'une fonction en $\pm\infty$

Avant de donner la définition, on commence par un exemple illustratif.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f.



- ▷ La limite de f en $+\infty$ est la quantité vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x devient de plus en plus grand.

  D'après la figure précédente, on observe que la courbe représentative de f, se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x devient très grand. On dit alors que la limite de f en $+\infty$ est 0.
- ▷ De même, la limite de f en $-\infty$ est la quantité vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x devient de plus en plus grand en valeurs **négatives**.

  La encore, d'après la figure précédente, la limite de f en $-\infty$ est 0.

REMARQUE

On dit qu'un réel a **tend vers** une quantité b lorsque a s'approche de b.

DÉFINITIONS : *Limites en* $\pm\infty$

- ▷ Soit f une fonction définie au moins sur $[a; \infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

  On appelle **limite de** f **en** $+\infty$ la quantité vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x tend vers $+\infty$.

  La limite de f en $+\infty$ se note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
- ▷ Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty; a]$, où $a \in \mathbb{R}$.

  On appelle **limite de** f **en** $-\infty$ la quantité vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x tend vers $-\infty$.

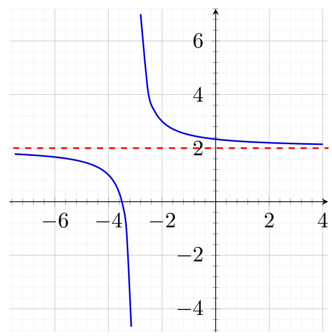
  La limite de f en $-\infty$ se note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Remarque

Rappelons que la quantité ∞ n'est pas un nombre mais un symbole.
Il représente une quantité plus grande que toute autre. Ainsi tout nombre réel est plus petit que $+\infty$ et est plus grand que $-\infty$.

Exemples

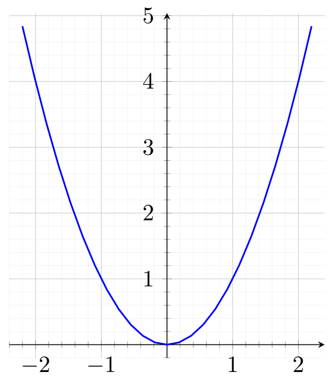
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+3} + 2$ et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



D'après la figure, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

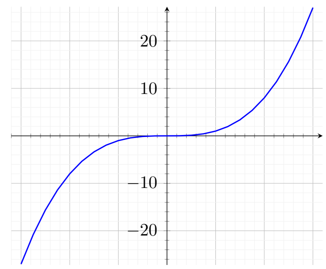
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



D'après la figure, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$ et dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

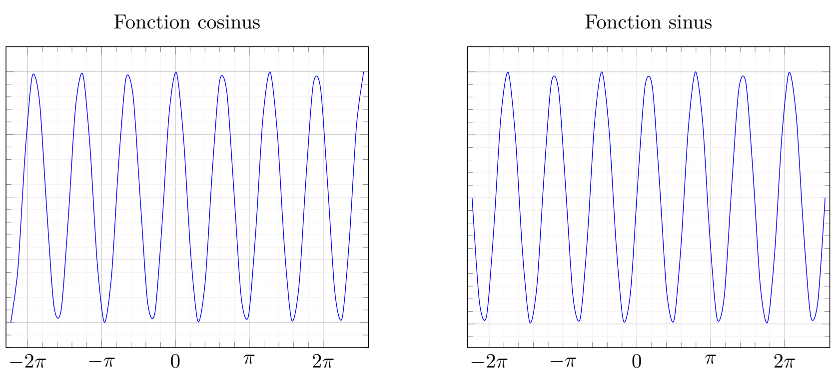


D'après la figure, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque

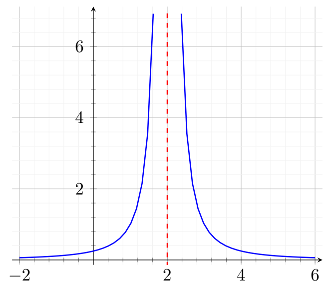
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini.
C'est le cas, par exemple, des fonctions cosinus et sinus représentées ci-dessous.



1.2 Limite d'une fonction en un réel α

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$. On donne ci-après la courbe représentative de f.



Sur la figure, on observe que la courbe part à l'infini lorsque x tend vers 2. Autrement dit, $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 2.
On dit alors que la limite de $f(x)$ en $x = 2$ est $+\infty$. En particulier, on remarquera que f n'est pas définie en 2 mais sa limite existe.

Définition : *Limite en un point*

Soient f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\alpha \in [a;b]$.
On appelle **limite de f en** α la quantité, lorsqu'elle existe, vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x tend vers α.
La limite de f en α se note $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

Remarque

Si la fonction f est définie en α, c'est-à-dire $f(\alpha)$ existe, alors on a simplement

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$

Exemples

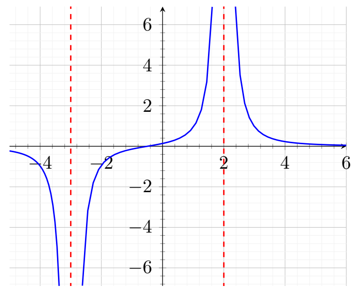
- Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}$$

de domaine de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$$

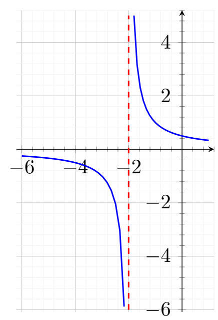
On donne ci-après la courbe représentative de f.



On observe que l'on a

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

▷ Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f.



Lorsque x s'approche de -2, deux cas sont possibles :

⋆ si $x < -2$, $f(x)$ tend vers $-\infty$,

⋆ si $x > -2$, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans ce cas on ne peut pas parler de la limite de f en -2 car il existe deux possibilités. On parle alors de limite à gauche et de limite à droite.

DÉFINITIONS : *Limites à gauche et à droite*

Soient f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\alpha \in [a;b]$.

▷ On appelle **limite à gauche de f en α** la quantité, lorsqu'elle existe, vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x tend vers α *en restant inférieur à* α. On la note $\displaystyle\lim_{x\to\alpha^-} f(x)$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x<\alpha}} f(x)$.

- ▷ On appelle **limite à droite de f en α** la quantité, lorsqu'elle existe, vers laquelle $f(x)$ tend lorsque x tend vers α *en restant supérieur à* α. On la note $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x>\alpha}} f(x)$.

Remarque

Les limites à gauche et à droite existent toujours.

Propriétés

Soient f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\alpha \in \ ]a;b[$.
Alors, f admet une limite en $x = a$ si et seulement si

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x),$$

et dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x).$$

Exemples

- ▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ n'admet pas de limite en -2 car
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim_{x\to-2^+} f(x).$$
- ▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ admet une limite en -2 car
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to-2^+} f(x).$$
- ▷ La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0. En effet,
  - ⋆ pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ donc, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1$,
  - ⋆ pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ donc, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +1$.

2 Calcul des limites classique

Dans la section précédente, on a vu comment déterminer une limite à partir de la courbe d'une fonction. Mais, en général, on détermine les limites d'une fonction avant de dessiner sa courbe. Il faut donc savoir calculer la limite d'une fonction à partir de son expression.

Pour cela, on se base sur des limites particulières (dites limites usuelles) et sur les opérations sur les limites.

2.1 Limites usuelles

Propriétés

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque

Ce résultat est une conséquence du fait que l'on a $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

Exemples

- ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, on a

- ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$.
- ▷ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Remarque

Les différences de signes dans les propriétés précédentes proviennent du fait que, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fraction $\dfrac{1}{x}$ est du même signe que x.

Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

2.2 Opérations sur les limites

On donne ci-dessous la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composition de fonctions f et g suivant les limites des fonctions f et g. L'écriture **FI** signifie forme indéterminée. Dans le cas d'une forme indéterminée, il n'y a pas de conclusion générale et il faut donc traiter au cas par cas pour lever l'indétermination, ce que l'on verra dans la section suivante.

Soient f, g deux fonctions et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = \pm\infty$. Dans la suite, ℓ et ℓ' désigneront deux réels. La limite d'une somme de fonctions est donnée par le tableau suivant :

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f+g)(x)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemples

- ▷ $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \left(x + x^3\right) = 0$.
- ▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x^2\right) = +\infty$.
- ▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + x^2\right) = +\infty$.
- ▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x^3\right)$ est de la forme « $+\infty - \infty$ », ce qui est une forme indéterminée.

La limite d'un produit de fonctions est donnée par le tableau suivant :

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	$-\infty$	FI

Exemples

▷ $\lim\limits_{x\to 0^+} x-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-3}{x}=-\infty$.

▷ $\lim\limits_{x\to -\infty} x-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-1)x^3=+\infty$.

▷ $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}=0^-$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$ est de la forme « $-\infty\times 0^-$ », ce qui est une forme indéterminée.

La limite d'un quotient de fonctions est donnée par le tableau suivant :

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	0	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI

Exemples

▷ $\lim\limits_{x\to 0^+} x-4=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right)=-\infty$.

▷ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ est de la forme « $\dfrac{0^+}{0^+}$ », ce qui est une forme indéterminée .

Proposition : *Limite d'une fonction composée*

Soient f, g deux fonctions et a, b, c trois réels ou $\pm\infty$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad et \quad \lim_{X\to b} g(X) = c$$

alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$$

Exemples

- ▷ Pour calculer $\lim_{x\to 0} (x+3)^2$, on calcule d'abord $\lim_{x\to 0} x+3 = 3$, puis $\lim_{X\to 3} X^2 = 9$. On en déduit $\lim_{x\to 0} (x+3)^2 = 9$.
- ▷ Pour calculer $\lim_{x\to -\infty} (-x+3)^2$, on calcule d'abord $\lim_{x\to -\infty} -x+3 = +\infty$, puis $\lim_{X\to +\infty} X^2 = +\infty$. On en déduit $\lim_{x\to -\infty} (-x+3)^2 = +\infty$.
- ▷ Pour calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x+1}$, on calcule d'abord $\lim_{x\to +\infty} 2x+1 = +\infty$, puis $\lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} = 0^+$. On en déduit $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x+1} = 0^+$.
- ▷ Pour calculer $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}$, on calcule d'abord $\lim_{x\to 0} x+4 = 4$, puis $\lim_{X\to 4} \sqrt{X} = 2$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4} = 2$.

Exercice 9.1

Déterminer les limites ci-dessous.

1) $\lim_{x\to 0} x^3+5$	**2)** $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}+2$	**3)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}-2$
4) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$	**5)** $\lim_{x\to 0} \sin(x)+3$	**6)** $\lim_{x\to -1} \frac{2}{(x+1)^2}$
7) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}-1+\cos x$	**8)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2}+x-1$	**9)** $\lim_{x\to +\infty} x+\frac{1}{x}$

3 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans le cas d'une forme indéterminée, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite. Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$$\text{« } +\infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 0 \times \infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

3.1 Cas des polynômes

Définition : *Polynôme de degré n*

Un polynôme de degré n, où n est un entier naturel, est une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

Exemples

- ▷ Les polynômes de degré 1 sont les fonctions affines : $x \mapsto ax + b$.
- ▷ On a étudié les polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
- ▷ $x \mapsto 3x^3 - 2x + 5$ est un polynôme de degré 3 et $x \mapsto x^4 - 9x^2$ est un polynôme de degré 4.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme donné par

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$. Alors,

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

Remarque

On dit aussi que la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple Démonstration de la proposition

Montrons le résultat sur un exemple (la démonstration du résultat général se fait sur le même modèle).
Soit $P(x) = 4x^2 + 2x + 1$. La limite de $P(x)$ en $-\infty$ est une forme indéterminée (« $\infty - \infty$ »).

En mettant le terme de plus haut degré $4x^2$ en facteur, on obtient

$$P(x) = 4x^2\left(1 + \frac{2x}{4x^2} + \frac{1}{4x^2}\right) = 4x^2\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4x^2} = 0^+$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right) = 1$$

d'où

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[4x^2\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$$

On donne ci-dessous un exemple d'utilisation de la proposition.

Exemple

La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 - x$ donne la forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ».
D'après la proposition précédente, on a

$$\lim_{x\to-\infty} -3x^2 - x = \lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$$

3.2 Cas des fractions rationnelles

Définition : *Fraction rationnelle*

Une fraction rationnelle est une fonction de la forme

$$F : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. Autrement dit, la fraction rationnelle F est de la forme

$$F : x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p}$$

où $n, p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont des nombres réels.

EXEMPLES

Les fonctions ci-dessous sont des fractions rationnelles :

▷ $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3}$ ▷ $x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x + 5}{x - 1}$ ▷ $x \mapsto \dfrac{x^4 - 9x^2}{x^5 - 6x + 4}$

PROPOSITION

Soit F une fraction rationnelle de la forme

$$F : x \mapsto \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p}$$

où $n, p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont des nombres réels avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$. Alors, on a

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

REMARQUE

On dit aussi que la limite en $\pm\infty$ d'une fonction fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Comme dans le cas des polynômes, on donne seulement un aperçu de la démonstration de cette proposition à travers un exemple.

EXEMPLE DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Soit $F(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}$. La limite de $F(x)$ en $+\infty$ est une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On met le terme de plus haut degré en facteur au numérateur ($2x^2$) et au dénominateur (x^3), on obtient

$$F(x) = \frac{2x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{2x^2}{x^3}\,\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$$

On remarque aisément que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = 1$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2}{x^3}\,\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}$$

Cette dernière limite se calcule en simplifiant la fraction :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0^+$$

On donne ci-dessous un exemple d'utilisation de la proposition.

Exemple

La limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3}$ donne la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
D'après la proposition, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}$$

Or $\dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 9.2

Déterminer les limites ci-dessous.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-5x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+3)$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x^3-3x^5)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^6-x^4-1)$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+4}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+3}{x^2+5}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x^2+2}$ **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3+3}$ **9)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x}{x-x^5}$

3.3 Cas général

Lorsque l'on souhaite calculer une forme indéterminée ne correspondant pas à l'un des deux cas vus précédemment, on peut dans certains cas déterminer le résultat à l'aide du théorème ci-dessous.

THÉORÈME : *Théorème de comparaison et théorème des gendarmes*

Soient f, g et h trois fonctions telles que, pour x suffisamment proche de a (avec a infini ou non), on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

1) Théorème de comparaison

a) *Si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

b) *Si* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2) Théorème des gendarmes

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, *où* $\ell \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

EXEMPLES

▷ On souhaite calculer la limite de $x - \sin x$ en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x - \sin x \geq x - 1$$

car $\sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sin x = +\infty$$

▷ On souhaite calculer la limite de $\frac{1}{x}\cos x$ en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\cos x \leq \frac{1}{x}$$

Or on a

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cos x = 0$$

Exercice 9.3

1) En utilisant le théorème de comparaison, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$$

2) En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Définition : *Expression conjuguée*

Soit une expression mathématique de la forme $A+B$.
On appelle **expression conjuguée** associée à $A+B$, l'expression $A-B$.

Méthode : *Méthode du conjugué*

Pour tenter de lever une forme indéterminée d'une limite faisant intervenir des radicaux (racines carrées) :

▷ on multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée,

▷ on développe, en utilisant l'identité remarquable

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

▷ on vérifie que l'indétermination est bien levée.

Exemple

On étudie la limite de $f : x \mapsto x + \sqrt{4+x^2}$ lorque x tend vers $-\infty$.
On a
$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4+x^2} = +\infty$$
et on est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Tentons d'appliquer la méthode du conjugué pour lever cette indétermination.
Multiplions et divisons par l'expression conjuguée de $x + \sqrt{4+x^2}$, c'est-à-dire par $x - \sqrt{4+x^2}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) = x + \sqrt{4+x^2} &= \left(x + \sqrt{4+x^2}\right) \frac{x - \sqrt{4+x^2}}{x - \sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - (4+x^2)}{x - \sqrt{4+x^2}} = \frac{-4}{x - \sqrt{4+x^2}} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{4+x^2} = -\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{x - \sqrt{4+x^2}} = 0$$

Exercice 9.4

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x$ **2)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x-1}$

4 Asymptotes

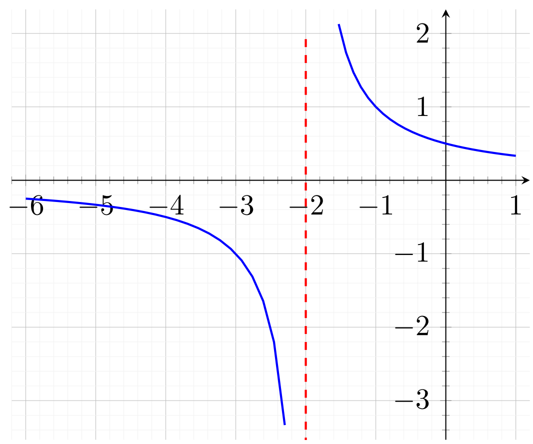
Une asymptote à une courbe est une droite dont la courbe s'approche. Les asymptotes se déterminent par le calcul de limites.

Définition : *Asymptote verticale*

Soient f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$ et $\alpha \in\ ]a;b[$ ou $\alpha = a$ ou $\alpha = b$. Si la limite (à gauche ou à droite) de f en α vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = \alpha$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Puisque $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



Définitions : *Asymptote horizontale*

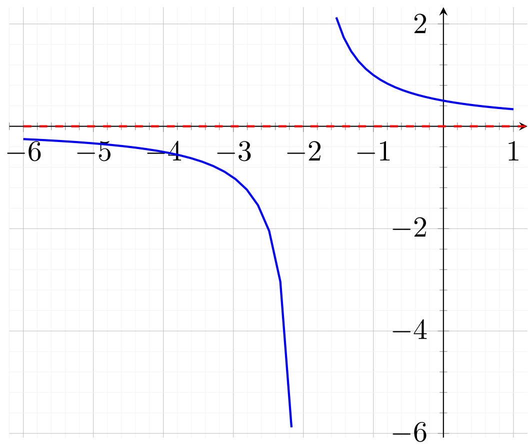
1) Soit f une fonction définie au moins sur $[a; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Si la limite de f en $+\infty$ est un nombre réel ℓ, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale en** $+\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

2) Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty; a]$, où $a \in \mathbb{R}$. Si la limite de f en $-\infty$ est un nombre réel ℓ, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale en** $-\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Exemples

▷ Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ de domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Alors,
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la

courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ donc il n'y a pas d'asymptote horizontale.

La recherche d'asymptotes horizontales ou verticales est liée au domaine de définition. Plus précisément, on appliquera la méthode donnée ci-dessous.

MÉTHODE : *Asymptotes horizontales et verticales*

Soit f une fonction. Pour déterminer les asymptotes horizontales et/ou verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$, on procède comme suit :

1) on détermine le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f,

2) on calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$,

3) on conclut suivant les limites obtenues.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3} + 1$.
Alors f a pour domaine de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} = \left]-\infty; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$$

Autrement dit, le domaine de définition de $\mathcal{D}_f$ admet 4 bornes : $-\infty$, 3^-, 3^+ et $+\infty$.

Étudions la limite de f en chacune de ces bornes pour déterminer si celle-ci admet des asymptotes horizontales et/ou verticales.

- ▷ Pour les bornes 3^- et 3^+, on a

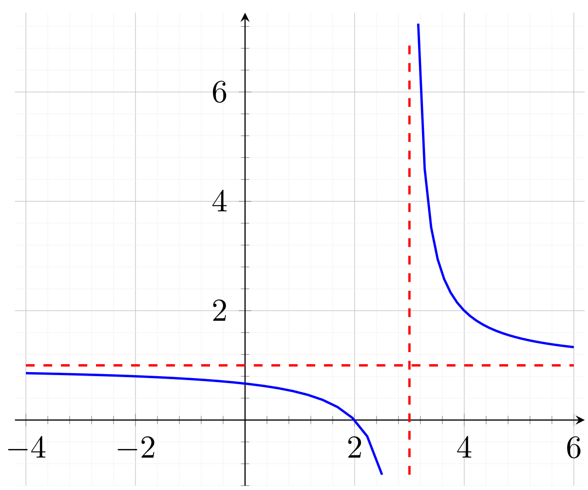
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.
La courbe va vers $+\infty$ à droite de l'asymptote et vers $-\infty$ à gauche de l'asymptote.

- ▷ Pour les bornes $-\infty$ et $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.



EXERCICE 9.5

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x+2}$.
Déterminer les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

DÉFINITIONS : *Asymptote oblique*

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au moins sur $[\alpha; \infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au moins sur $]-\infty; \alpha]$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

REMARQUES

▷ Supposons $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0^+$.
Alors, $f(x) - (ax+b) \geq 0$ pour x suffisamment grand, soit encore $f(x) \geq ax + b$ pour x suffisamment grand.
Cela signifie donc que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est au dessus de l'asymptote en $+\infty$.

▷ De même, si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0^-$, on obtient que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est en dessous de l'asymptote en $+\infty$.

Ces résultats sont aussi valables pour la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)]$.

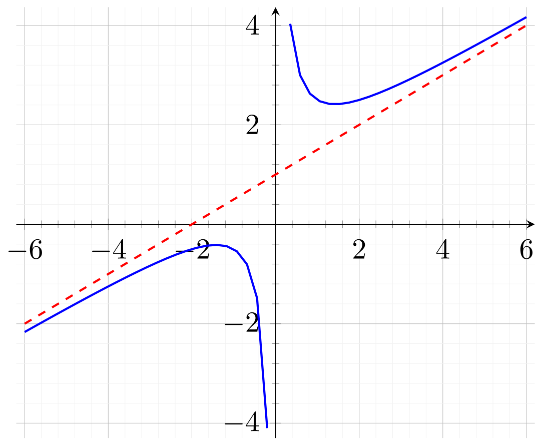
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} + 1$.

▷ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{x}{2} + 1\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$.
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote oblique (d) d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$ en $+\infty$. De plus, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (d) en $+\infty$.

▷ On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0^-$.
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet aussi (d) comme asymptote oblique en $-\infty$.

De plus, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (d) en $-\infty$.



EXERCICE 9.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x + 3 - \dfrac{1}{x^2+1}$.
Montrer que la droite d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
De plus, préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

5 Notion de continuité d'une fonction

DÉFINITION : *Fonction continue*

Une fonction f est dite **continue** en $a \in \mathcal{D}_f$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Une fonction f est dite **continue sur un ensemble** E si elle est continue en tout point de E.

REMARQUE

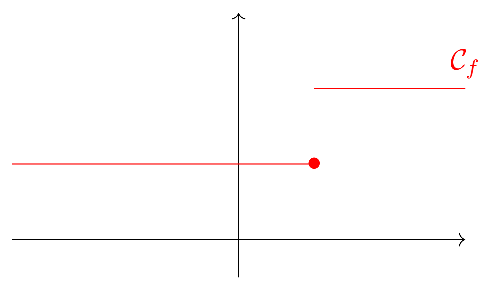
Intuitivement, dire que f est continue sur un ensemble E signifie que l'on peut tracer sa courbe représentative sur E « sans lever le stylo ».

EXEMPLE FONCTION NON CONTINUE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 n'existe pas. Ainsi, f n'est pas continue en 1.
Par contre, f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
En observant la courbe représentative de f, donnée ci-dessous, on remarque que l'on ne peut tracer celle-ci « sans lever le stylo », à cause du « saut » au point 1.



PROPRIÉTÉ

Les fonctions usuelles (cosinus, sinus, fonctions polynômes, fractions rationnelles, racine carrée) sont continues partout où elles sont définies.

Pour montrer qu'une fonction donnée est continue, on utilise les propriétés ci-dessous et le fait que les fonctions usuelles sont continues sur leurs domaines de définition.

PROPRIÉTÉS

Soient I, J et K trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- ▷ *Soient $f : I \to J$ continue sur I et $g : J \to K$ continue sur J.*
  Alors, $g \circ f : I \to K$ est continue sur I.
- ▷ *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I.*
  Alors, $f + g$, $f - g$ et $f\,g$ sont continues sur I. De plus, $\dfrac{f}{g}$ est continue partout où f ne s'annule pas.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$f = g \circ h \quad \text{où} \quad g : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto x^2+2$$

Puisque h est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et g est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-1}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = [0;1[\ \cup\ ]1;+\infty[$.
Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $\mathcal{D}_f$, donc la fonction $x \mapsto x^2+\sqrt{x}$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.
De plus, la fonction $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$. Donc f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 9.7

Déterminer si les fonctions ci-dessous sont continues sur leurs domaines de définition.

1) $f : x \mapsto x\sin(x)$

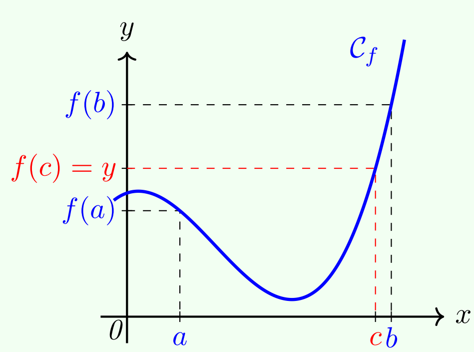
2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x-1}$

3) $f : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

4) $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Théorème : *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux réels de I.
Alors, $f(I)$ est un intervalle.
En particulier, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.



EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$. On a vu que f est continue sur $\mathbb{R}$.
On a
$$f(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f(2) = \sqrt{6}.$$
Or $2 = \sqrt{4}$ et $\sqrt{2} < \sqrt{4} < \sqrt{6}$.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $c \in \ ]0;2[$ tel que $f(c) = 2$.

EXERCICE 9.8

Soit $f : x \mapsto -3x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

6 Correction des exercices du cours

CORRIGÉ EXERCICE 9.1

1) $\lim_{x \to 0} x^3 + 5 = 0 + 5 = 5$

2) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + 2 = \sqrt{0} + 2 = 2$

3) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = +\infty - 2 = +\infty$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

5) $\lim_{x \to 0} \sin(x) + 3 = \sin(0) + 3 = 0$

6) $\lim_{x \to -1} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty$

7) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} - 1 + \cos x = 0$

8) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} + x - 1 = -\infty$

9) $\lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$

CORRIGÉ EXERCICE 9.2

1) $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 5x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x + 3) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x^3 - 3x^5) = \lim_{x \to -\infty} -3x^5 = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^6-x^4-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^6=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+3}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=0^-$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0^+$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x}{x-x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^3}=0^-$

Corrigé Exercice 9.3

1) Soit $x\geq 0$. On a $-1\leq\cos x\leq 1$, donc $1\leq 2-\cos x\leq 3$. Puisque x est positif, on en déduit

$$\frac{x}{3}\leq\frac{x}{2-\cos x}\leq x$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$. D'après le théorème de comparaison, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}=+\infty$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a $-1\leq\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$. Donc puisque $x^2\geq 0$

$$-x^2\leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=\lim\limits_{x\to}x^2=0$. D'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Corrigé Exercice 9.4

1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}\,\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}\\ &= \lim_{x\to 1}-\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 9.5

Le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-2\} = \,]-\infty;-2[\, \cup \,]-2;+\infty[$$

Déterminons les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3-\frac{1}{x+2} = 3$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3-\frac{1}{x+2} = +\infty$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3-\frac{1}{x+2} = -\infty$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3-\frac{1}{x+2} = 3$

On en déduit :

▷ La droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

▷ La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en -2.

Corrigé Exercice 9.6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - (2x+3) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(2x+3)) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+3)) = 0^-$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x+3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et, de plus, la courbe est en dessous de l'asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé Exercice 9.7

1) On a $D_f = \mathbb{R}$. La fonction f est le produit de fonctions usuelles, donc continue sur tout son domaine de définition $\mathbb{R}$.

2) On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. La fonction f est une fonction rationnelle, donc continue sur tout son domaine de définition D_f.

3) On a $D_f = \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ la fonction f est une fonction polynomiale, donc continue. De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc la fonction f est continue en 0. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) On a $D_f = \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ la fonction f est une fonction polynomiale, donc continue. Puisque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

la fonction f n'est pas continue en 0.

Corrigé Exercice 9.8

On a $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$. Puisque $0 \in [f(1); f(0)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un $c \in \left]0;1\right[$ tel que $f(c) = 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]0;1\right[$.

7 Exercices

Exercice 9.9

Déterminer les limites ci-dessous.

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + 1$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x^2+1}$ **3)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x(x+1)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x-1)x^5$ **5)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x^2+2}$ **6)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} -\frac{1}{x-3}$ **8)** $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{2-x}$ **9)** $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x+1}$

Exercice 9.10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ 1 - \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction f a-t-elle une limite en 3 ?

Exercice 9.11

Déterminer les limites suivantes puis en déduire l'existence ou non d'une asymptote horizontale ou verticale.

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\sqrt{x}}$ **2)** $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - x^2}$ **3)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x + 10}{2 + 3x - 5x^3}$

Exercice 9.12

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}_f$, ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 3x - 4}$ **2)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 - x - 6}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ **4)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

Exercice 9.13

Pour chacune des fonctions suivantes :

- ▷ calculer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$,
- ▷ calculer la limite pour chacune des bornes de $\mathcal{D}_f$,
- ▷ montrer que la droite (d) est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$,
- ▷ déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).

1) $f : x \mapsto x + 3 + \dfrac{2}{x+1}$ avec la droite (d) d'équation $y = x + 3$.

2) $f : x \mapsto 2x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$ avec la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$.

3) $f : x \mapsto -3x + 4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2+1}$ avec la droite (d) d'équation $y = -3x + 4$.

4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x-1}$ avec la droite (d) d'équation $y = x + 1$.

Exercice 9.14

Déterminer les limites ci-dessous.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 10}{5x^3 + 3x - 2}$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7}}{3x + 5}$

3) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{2}{x-1} \right)$

4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x \right)$

5) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \right)$

Exercice 9.15

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + \sin(x)}{2x^2 + 1}$.

1) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1}$$

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 9.16

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto x - \sqrt{x} + 4$$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) \geq 3\sqrt{x}$.

3) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 9.17

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

4) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 9.18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto 2x - \sin x$$

1) Montrer que, pour tout réel x, on a $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 9.19

Déterminer (si elles existent) les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1+\cos(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{x\sin(x)}{x^2+1}$$

Exercice 9.20

1) Montrer que l'équation $-x^3+x^2-x+2=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$.

2) Montrer que l'équation $x^3+x=5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$.

CHAPITRE 10

Produit scalaire

Ce dernier chapitre de géométrie est consacré au *produit scalaire* qui est une opération (une « multiplication ») de deux vecteurs du plan ou de l'espace ayant pour résultat un réel. Le produit scalaire est un outil très utile pour l'étude de l'orthogonalité de deux vecteurs. Dans la première section, on donne la définition du produit scalaire dans le plan et son lien avec l'orthogonalité de vecteurs. Ensuite, on donne une deuxième formulation du produit scalaire faisant intervenir le cosinus de l'angle entre deux vecteurs. Dans la troisième section, on introduit une nouvelle expression du produit scalaire, l'expression analytique, qui est la plus utile pour le calcul mais qui nécessite de munir le plan d'un repère orthonormé. La quatrième section est consacrée aux applications du produit scalaire dans le plan, à savoir déterminer une droite passant par un point et de vecteur normal donné, et déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Pour finir, on étend ces résultats au cas de l'espace.

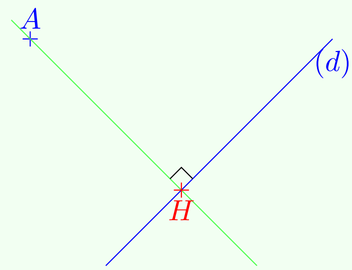
Sommaire

1 Produit scalaire et orthogonalité

Pour définir le produit scalaire de deux vecteurs, il est nécessaire d'introduire la notion de projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Définition : *Projeté orthogonal*

Soient A un point du plan et (d) une droite du plan.
Le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à celle-ci passant par A est appelé le **projeté orthogonal** de A sur (d).



Remarque

Le projeté orthogonal du point A sur (d) est lui-même ($H = A$) si et seulement si A appartient à (d).

Définition : *Produit scalaire*

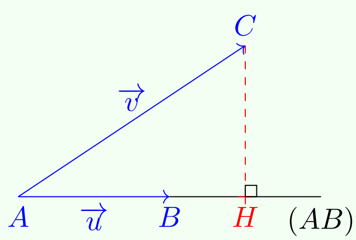
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C trois points tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

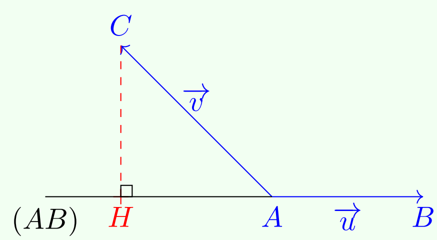
On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On définit le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par

- ▷ $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens,
- ▷ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposé.

De plus, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens



Cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n'ont pas le même sens

Remarques

- ▷ La notation $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ».
- ▷ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors les points A, B, C de la définition précédente sont alignés et donc le projeté orthogonal de C est lui même, d'où

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \pm AB \times AC = \pm \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\|$$

Attention

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **réel** et non pas un vecteur.

L'une des propriétés fondamentales du produit scalaire est son lien avec l'orthogonalité donné ci-dessous.

Propriété : *Orthogonalité et produit scalaire*

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

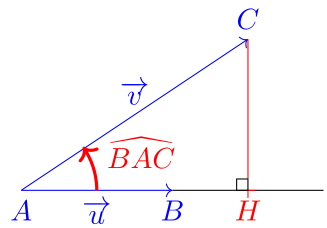
Démonstration. Avec les notations de la définition, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors H et A sont confondus donc $AH = 0$ et ainsi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ alors $AH = 0$ car $\overrightarrow{AB} \neq 0$ puisque $\overrightarrow{u}$ est non nul. Alors, H et A sont confondus et donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. □

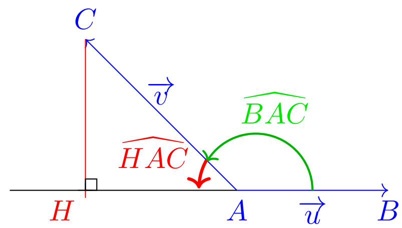
2 Formule du produit scalaire avec le cosinus

La définition du produit scalaire donnée précédemment nécessite de connaître la longueur de AH qui n'est pas connue en général. Néanmoins, on peut éviter ce calcul en faisant appel à l'angle $\widehat{BAC}$.

En effet, considérons les deux configurations possibles :



Cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens



Cas où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n'ont pas le même sens

Puisque le triangle ACH est rectangle en H, on a $\cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$, d'où

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \pm\, AB \times AH = \pm\, AB \times AC \times \cos(\widehat{HAC})$$

Alors,

- ▷ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$, d'où

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

- ▷ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n'ont pas le même sens, $\widehat{HAC} = \pi - \widehat{BAC}$, d'où

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -AB \times AH = -AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

  car, pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

On obtient alors le résultat suivant :

PROPOSITION

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C trois points tels que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \widehat{BAC}$ est l'angle (orienté) entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Remarques

- Le résultat reste vrai si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul.
- Cette formule a l'avantage de ne pas nécessiter de connaître le projeté orthogonal H et s'écrit uniquement en fonction des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Puisque $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a

$$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \cos\left(-(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\right) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

  Ainsi, on obtient

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{u}\| \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

De manière générale, la formule du produit scalaire avec le cosinus permet de montrer les propriétés suivantes :

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et k, ℓ deux réels.

- *Le produit scalaire est* **symétrique**, *c'est-à-dire*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

- *Le produit scalaire est* **bilinéaire**, *c'est-à-dire*

$$\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v} + \ell\overrightarrow{w}) = k\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \ell\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \quad \text{et} \quad (k\overrightarrow{v} + \ell\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$$

Pour $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$, on a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ et donc $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1$. On en déduit :

Propriété

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

ou de manière équivalente

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$$

3 Expression analytique du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. D'après les propriétés vues précédemment, on a

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\\ &= \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\\ &= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

Ainsi, on a les deux propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, on a **l'identité remarquable**

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$$

ou de manière équivalente

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Finalement, on a obtenu trois formules différentes pour le produit scalaire que l'on résume ci-dessous :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \pm\, AB\times AH \qquad \text{où } H \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

Il existe une dernière formule pour le produit scalaire qui permet facilement de calculer celui-ci mais qui nécessite de munir le plan d'un repère orthonormé.

PROPOSITION : *Expression analytique du produit scalaire*

Soient $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Alors,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = u_1v_1+u_2v_2$$

Démonstration. Puisque le repère est orthonormé, on a

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = u_1^2+u_2^2 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{v}\|^2 = v_1^2+v_2^2$$

De plus, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ &= u_1^2 + u^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(2u_1v_1 + 2u_2v_2\right) = u_1v_1 + u_2v_2$$

D'où le résultat. □

Remarque

L'expression analytique du produit scalaire est la plus utilisée en pratique. Celle-ci permet un calcul simple et ainsi, en utilisant la formules du produit scalaire avec le cosinus, on peut en déduire :

- ▷ l'angle entre deux vecteurs,
- ▷ et si deux vecteurs sont orthogonaux.

Exemples

Soient $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

- ▷ Soient $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \times 2 + 1 \times 2 = 6$$

De plus, $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{6}$ et $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ donc $\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$.
Or $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on en déduit

$$6 = 4\sqrt{3}\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

donc

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Ainsi, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

▷ Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Alors, on a

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 3\times(-1)+2\times\frac{3}{2} = 3-3=0$$

Donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 10.1

Soient $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et les trois vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\y\end{pmatrix},\quad \text{où } y\in\mathbb{R}$$

1) Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

2) Déterminer $y\in\mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient orthogonaux.

EXERCICE 10.2

Soient $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ les vecteurs de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}k\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}k-2\\k-1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2k+5\\k-1\end{pmatrix},\quad \text{où } k\in\mathbb{R}$$

1) Déterminer pour quelles valeurs de k, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

2) Même question avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

4 Applications du produit scalaire

Dans toute la suite, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$.

DÉFINITION : *Vecteur normal à une droite*

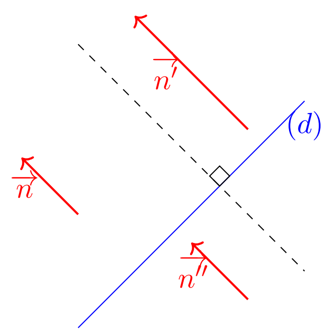
Soient (d) une droite du plan ou de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (d). On appelle **vecteur normal** $\overrightarrow{n}$ à la droite (d) tout vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Remarques

- Étant donné un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

  En effet, on a
  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1u_2 - u_2u_1 = 0$$
  Ainsi, pour toute droite (d), si l'on connaît un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d), on peut déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à (d).
  Réciproquement, si l'on connaît un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à (d), on peut déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d).
- Étant donnée une droite (d), toutes les droites perpendiculaires à (d) sont parallèles. Ainsi, tous les vecteurs normaux à (d) ont la même direction.

  Autrement dit, tous les vecteurs normaux à (d) sont colinéaires.
  Ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n''}$ sont des vecteurs normaux à (d).



Proposition

- *Soit (d) une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.*

  Alors, (d) a pour équation
  $$ax + by + c = 0$$
  où le réel c reste à déterminer.
- *Réciproquement, soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels.*

  Alors, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

Remarques

- Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d), alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). Ainsi, si (d) a pour équation, $ax + by + c = 0$ alors (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Pour déterminer la valeur de c, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées d'un point $A(x_A; y_A)$ de (d). On obtient alors :
$ax_A + by_A + c = 0$, ce qui entraîne $c = -(ax_A + by_A)$.

Démonstration. Soit $A(x_A; y_A)$ un point de (d).

Un point $M(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Puisque l'on a

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax + by - (ax_A + by_A)$$

On en déduit que l'équation de (d) est $ax + by - (ax_A + by_A) = 0$, ce qui donne le résultat. □

Méthode : *Équation d'une droite avec un vecteur normal*

Soient (d) une droite passant par un point $A(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à cette droite.
On va déterminer l'équation de (d).

1) L'équation de (d) s'écrit $ax + by + c = 0$.

2) Puisque (d) passe par $A(x_A; y_A)$, on a $ax_A + by_A + c = 0$. D'où

$$c = -(ax_A + by_A)$$

3) L'équation de (d) est

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

Remarque

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et A un point donné.
Alors, la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}$. On peut ainsi appliquer la méthode précédente pour déterminer l'équation de (d').

Ainsi, la méthode précédente permet de déterminer l'équation d'une droite perpendiculaire à une première et passant par un point donné.

Exemples

▷ Soient $A(2;1)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. On note (d) la droite passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Puisque $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, l'équation de (d) s'écrit $x+2y+c=0$, où c est un réel.
Or (d) passe par $A(2;1)$, donc $2+2+c=0$ d'où $c=-4$. On en déduit que l'équation de (d) est

$$x+2y-4=0$$

▷ Soient $A(1;1)$ et (d) la droite d'équation

$$2x+y+1=0$$

On note (d') la droite perpendiculaire à (d) et passant par A. Déterminons l'équation de (d').
Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est normal à (d) et donc est un vecteur directeur de (d'). Ainsi, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d'). D'où, l'équation de (d') s'écrit

$$x-2y+c=0$$

Puisque (d') passe par $A(1;1)$, on obtient $c=-1+2=1$ donc l'équation de (d') est

$$x-2y+1=0$$

EXERCICE 10.3

Déterminer l'équation de la droite passant par $A(1;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

MÉTHODE : *Déterminer un projeté orthogonal*

Soient (d) une droite d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et $A(x_A;y_A)$.
On va déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur (d).

1) On détermine l'équation de la droite (d') perpendiculaire à (d) et passant par A :

$$\alpha' x+\beta' y+\gamma'=0$$

2) On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha x+\beta y+\gamma & = & 0\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' & = & 0\end{array}\right.$$

Dont la solution $(x;y)$ sont les coordonnées de H.

EXEMPLE

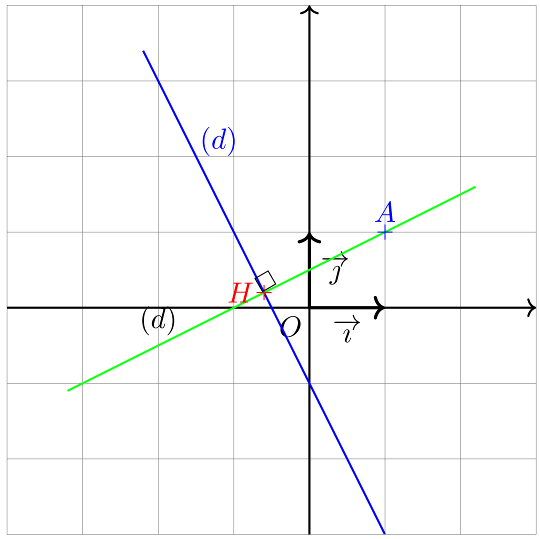
Reprenons le dernier exemple. La droite (d') est perpendiculaire à (d) et passe par le point $A(1;1)$, donc l'intersection de (d) et (d') est le projeté orthogonal de A sur (d).
On résout alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x+y+1 & = & 0\\ x-2y+1 & = & 0\end{array}\right.$$

D'après la première équation, $y=-2x-1$ donc, d'après la deuxième équation, on a

$$x=2y-1=2(-2x-1)-1=-4x-3$$

soit $x=-\dfrac{3}{5}$ et $y=\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$. Ainsi, le projeté orthogonal de A sur (d) est $H\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.



EXERCICE 10.4

Soient $A(0;2)$ un point du plan et (d) la droite d'équation

$$2y - x + 1 = 0$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (d).

5 Produit scalaire dans l'espace

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, il existe toujours un plan (P) contenant ces deux vecteurs. On définit alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan (P) comme vu dans les sections précédentes. Les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Dans toute la suite, on suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

PROPOSITION : *Expression analytique du produit scalaire*

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les deux vecteurs de l'espace de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-6\end{pmatrix}$$

On a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 3 + 1 \times (-1) + 2 \times (-6) = 3 - 1 - 12 = -10$$

En particulier, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux.

REMARQUE

On peut montrer que, pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires de l'espace, il existe un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

EXEMPLE

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ les trois vecteurs de l'espace de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-6\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

où x et y sont des réels. On vérifie aisément que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Déterminons x et y de sorte que $\overrightarrow{n}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = x + y + 2$$

et

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 3x - y - 6$$

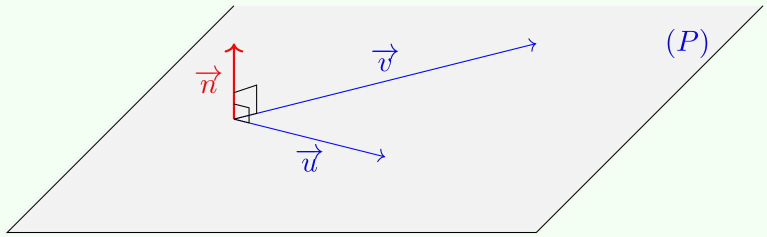
Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si

$$x + y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 3x - y - 6 = 0$$

En additionnant les deux équations, on obtient $4x - 4 = 0$ d'où $x = 1$ et ainsi $y = -2 - x = -3$. Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $x = 1$ et $y = -3$.

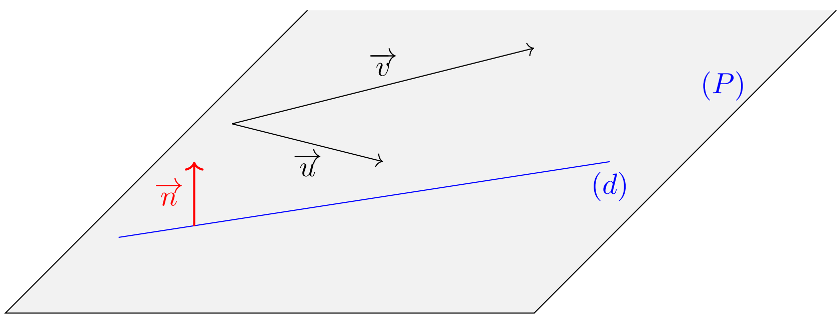
DÉFINITION : *Vecteur normal à un plan*

Soit (P) un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On appelle **vecteur normal** $\overrightarrow{n}$ à (P) tout vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



REMARQUE

Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à (P), alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal pour toute droite du plan (P).



MÉTHODE : *Déterminer un vecteur normal à un plan*

Soit (P) un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

On va déterminer un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ au plan (P).

1) On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$.

2) On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} au_1+bu_2+cu_3 & = & 0 \\ av_1+bv_2+cv_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

3) On détermine a et b en fonction de c.

4) On obtient a et b en choisissant une valeur non nulle de c.

REMARQUES

- ▷ La valeur de c n'est pas fixée mais choisie car il n'y a pas unicité du vecteur normal à un plan. Deux valeurs différentes de c donnent lieu à deux vecteurs normaux différents mais colinéaires.
- ▷ Le choix $c=0$ entraîne $a=0$ et $b=0$. Ainsi, dans ce cas, $\overrightarrow{n}$ est le vecteur nul qui, par définition, n'est pas un vecteur normal au plan. Ce qui justifie de choisir une valeur non nulle de c.

EXEMPLE

Soit (P) un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-8\end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur au plan (P).

Alors, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b-c & = & 0 \\ 2a+b-8c & = & 0 \end{array}\right.$$

En additionnant les deux équations, on obtient $3a-9c=0$ donc $a=3c$. Alors, $b=a-c=2c$.

- ▷ Si l'on choisit la valeur $c=1$, on obtient le vecteur normal

$$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

▷ Si l'on choisit la valeur $c = -2$, on obtient le vecteur normal

$$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-6\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont bien colinéaires. En effet, on a $\overrightarrow{n_2} = 2\overrightarrow{n_1}$.

Si l'on connaît un vecteur normal et un point d'un plan, alors on peut facilement en déterminer une équation d'après le résultat ci-dessous.

Proposition

Soit (P) un plan de l'espace passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Alors, l'équation de (P) s'écrit

$$ax + by + cz + d = 0$$

où d est un réel à déterminer.

Démonstration. Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Puisque l'on a

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix}$$

on en déduit que $M(x; y; z)$ appartient au plan (P) si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

qui s'écrit encore

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{où} \quad d = -ax_A - by_A - cz_A$$

qui est l'équation du plan (P). □

Remarque

De même, si (P) est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Alors, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (P).

Méthode : *Équation d'un plan avec un vecteur normal*

Soit (P) un plan de l'espace passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On va déterminer une équation de (P).

1) L'équation de (P) est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

2) Puisque $A(x_A; y_A; z_A)$ appartient à (P), on a

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

D'où $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

3) L'équation de (P) est $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$.

Exemple

Soient $A(-3; -5; 4)$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'équation du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est de la forme

$$-5x - 3y + 2z + d = 0$$

où $d \in \mathbb{R}$. Puisque $A(-3; -5; 4)$ appartient à (P), on a $15 + 15 + 8 + d = 0$, d'où $d = -38$. Ainsi, l'équation du plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est

$$-5x - 3y + 2z - 38 = 0$$

Exercice 10.5

Soient $A(1;-1;0)$, $B(2;1;1)$ et $C(4;4;1)$ trois points de l'espace.

1) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer un vecteur normal à (ABC) et en déduire une équation du plan (ABC).

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 10.1

1) On a
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 \times (-1) + 0 \times \sqrt{3} = -3$$
D'où
$$\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -3$$
Or
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$
donc
$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
On en déduit que $\dfrac{2\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2) On a
$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 2 + \sqrt{3}y$$
Les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, donc si
$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Corrigé Exercice 10.2

1) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Or on a
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = k^2 - 2k - 2k + 2 = k^2 - 4k + 2$$
Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $k^2 - 4k + 2 = 0$. Or le polynôme $k^2 - 4k + 2$ admet deux racines qui sont $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$.

Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $k = 2 - \sqrt{2}$ ou $k = 2 + \sqrt{2}$.

2) On a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 2k^2 + 5k - 2k + 2 = 2k^2 + 3k + 2$$

Le polynôme $2k^2 + 3k + 2$ a un discriminant négatif donc n'a aucune racine.

On en déduit qu'il n'existe aucune valeur de k telle que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient orthogonaux.

Corrigé Exercice 10.3

Soit (d) la droite passant par $A(1;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Alors, l'équation de (d) est de la forme $x + 3y + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$. Puisque $A(1;-1)$ appartient à (d), on a $1 - 3 + c = 0$ d'où $c = 2$.
Ainsi, l'équation de (d) est $x + 3y + 2 = 0$.

Corrigé Exercice 10.4

Puisque la droite (d) a pour équation $-x + 2y + 1 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).
Soit (d') la droite perpendiculaire à (d) et passant par A.
Alors, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d') et donc (d') a une équation de la forme $-2x + y + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$. Puisque (d') passe par $A(0;2)$, on obtient $c = -2$ et, ainsi, l'équation de (d') est $-2x + y - 2 = 0$.
On en déduit que les coordonnées du projeté orthogonal $H(x;y)$ de A sur (d) vérifient le système

$$\begin{cases} -x + 2y + 1 &= 0 \\ -2x + y - 2 &= 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 2y + 1$. Alors, d'après la deuxième équation,

$$y = 2x + 2 = 2(2y + 1) + 2 = 4y + 4$$

donc $y = -\dfrac{4}{3}$ et $x = -\dfrac{5}{3}$. Ainsi, les coordonnées de H sont $H\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.

Corrigé Exercice 10.5

1) On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Alors, on obtient

$$\begin{cases} k &= 3 \\ 2k &= 5 \\ k &= 1 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
D'où A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à (ABC) de coordonnées $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Alors, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} a + 2b + c &= 0 \\ 3a + 5b + c &= 0 \end{cases}$$

D'après la première équation, $a = -2b - c$. Alors, d'après la deuxième équation,

$$5b = -3a - c = 6b + 2c$$

donc $b = -2c$ et $a = 3c$. En prenant $c = 1$, on obtient $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

On en déduit que le plan (ABC) a une équation de la forme $3x - 2y + z + c = 0$, où $c \in \mathbb{R}$. Puisque $A(1;-1;0)$ appartient au plan (ABC), on obtient $3 + 2 + c = 0$ et ainsi $c = -5$. Finalement, le plan (ABC) a pour équation

$$3x - 2y + z - 5 = 0$$

7 Exercices

EXERCICE 10.6

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE 10.7

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et

$$A(-2; 4), \quad B(1; 2), \quad C(-2; -7), \quad D(2; -1)$$

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 10.8

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan, $A(1; 0)$, $B(2; -2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

1) Déterminer l'équation de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2) Déterminer l'équation de la droite (d') passant par A et perpendiculaire à (d).

3) Justifier que A est le projeté orthogonal de B sur (d').

EXERCICE 10.9

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan, $A(1; 2)$ et $B(3; 3)$.

1) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$. Donner une équation de $\mathcal{C}$.

2) Vérifier que B appartient à $\mathcal{C}$.

3) On note (d) la droite perpendiculaire à (AB) et passant par B. On l'appelle la **tangente** à $\mathcal{C}$ au point B. Déterminer une équation de (d).

Exercice 10.10

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et

$$A(-1;3), \quad B(-2;4), \quad C(1;-3)$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB).

Exercice 10.11

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et

$$A\left(-\frac{1}{2};-5\right), \quad B\left(\frac{5}{2};-1\right), \quad C(10;1)$$

1) On rappelle que la médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à celui-ci passant par son milieu.
Déterminer une équation de la médiatrice (d) de $[AB]$.

2) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (d).

Exercice 10.12

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et

$$A(1;0;1), \quad B(2;-1;1), \quad C(0;-2;3)$$

Déterminer une équation du plan (P) de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par C.

Exercice 10.13

Soient $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et

$$A(1;0;1), \quad B(2;-1;1), \quad C(0;-2;3)$$

1) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer un vecteur normal à (ABC) et en déduire une équation du plan (ABC).

3) Soit (P) le plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par A. Déterminer l'intersection de (ABC) et (P).

EXERCICE 10.14

Soient $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace et

$$A(2; -2; -1), \quad B(4; 3; -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'équation du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

2) Déterminer l'équation de la droite (d) passant par B et perpendiculaire à (P).

3) On appelle **projeté orthogonal** de B sur (P), l'intersection de (d) et (P).
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur (P).

EXERCICE 10.15 EXTRAIT BAC S - 2017

Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
On note (P) le plan d'équation $2x - z - 3 = 0$ et $A(1; a; a^2)$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1) Justifier que, pour toute valeur de a, le point A n'appartient pas à (P).

2) Déterminer une équation de la droite (d) passant par A et orthogonale au plan (P).

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (P).
Existe-t-il une valeur de a telle que la longueur AH soit minimale ?

CHAPITRE 11

Dérivation et étude de fonctions

Dans ce chapitre, on introduit la notion de dérivée d'une fonction en un point, puis la définition de fonction dérivée. On présente les dérivées des fonctions usuelles et on montre comment calculer les dérivées des fonctions qui sont sommes, produits, quotients ou composées de fonctions usuelles. Ensuite, on montre comment déterminer le sens de variations d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée. Cette dernière propriété permet enfin de réaliser l'étude complète d'une fonction.

Sommaire

1 Notion de dérivée

La dérivée d'une fonction en un point est associée à la notion de taux d'accroissement donnée ci-dessous.

Définition : *Taux d'accroissement*

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a, b deux points distincts de I.
On appelle **taux d'accroissement** (ou **taux de variation**) de f entre a et b, le réel

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En posant $b = a + h$, où h est un réel non nul, ce quotient s'écrit :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXEMPLE

Soient f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$.
Alors, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$

DÉFINITION : *Dérivée en un point*

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit que f est **dérivable** en a si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie.
On appelle alors **dérivée** de f en a, notée $f'(a)$, cette limite :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De plus, on dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point $a \in I$.

EXEMPLES

- Soient f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$
  Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a vu que le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est $2a + h$, qui admet une limite finie quand $h \to 0$ donnée par $2a$.

On en déduit que f est dérivable en a et l'on a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a$$

En particulier, puisque f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$.
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

On en déduit

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

Puisque les limites à gauche et à droite sont différentes, la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

n'existe pas. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.

▷ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$, dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.
Soient $a \in\ ]0; +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathbb{R}_+$. Alors, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

Pour déterminer la limite éventuelle de ce taux d'accroissement, on multiplie le dénominateur et le numérateur par $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ (méthode du conjugué), ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a + h - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}\end{aligned}$$

On en déduit que ce taux d'accroissement admet une limite lorsque $h \to 0$ donnée par

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $a \in \,]0;+\infty[$, on a

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Pour déterminer si f est dérivable en 0, on considère $h > 0$ et on calcule le taux de variation de f entre 0 et $0+h$:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. Donc le taux de variation de f entre 0 et $0+h$ a une limite infinie lorsque $h \to 0^+$. On en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 11.1

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en tout point $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^*$ pour f_4) et calculer leurs dérivées en ce point.

1) $f_1 : x \mapsto x$

2) $f_2 : x \mapsto 2x - 1$

3) $f_3 : x \mapsto x^2 + 2$

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

2 Fonction dérivée et opérations sur la dérivée

DÉFINITIONS : *Fonction dérivée*

Pour toute fonction f, on appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction définie par

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

REMARQUE

Une fonction f ne peut être dérivable en un point a que si $a \in \mathcal{D}_f$.
Ainsi, le domaine de définition de sa fonction dérivée f' vérifie $\mathcal{D}_{f'} \subset \mathcal{D}_f$.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc sa dérivée f' a pour domaine de définition $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$. De plus, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x$$

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ a pour domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$. On a vu dans les exemples précédents que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0. On en déduit que f' a pour domaine de définition $\mathcal{D}_{f'} = \ ]0; +\infty[\ = \mathbb{R}_+^*$ et, de plus, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On donne ci-dessous les fonctions dérivées des fonctions usuelles, ainsi que le domaine de définition de chacune de ces dérivées.

Proposition : *Dérivées des fonctions usuelles*

- *La fonction constante $f : x \mapsto c$, où $c \in \mathbb{R}$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle :*

$$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f \quad \textit{et} \quad f' : x \mapsto 0$$

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction puissance $f : x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :*

$$f' : x \mapsto nx^{n-1}$$

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction puissance inverse $f : x \mapsto x^{-n}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est :*

$$f' : x \mapsto -nx^{-n-1}$$

- *La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est :*

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- *Les fonctions cosinus et sinus $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \sin x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont :*

$$f' : x \mapsto -\sin x \quad \textit{et} \quad g' : x \mapsto \cos x$$

La proposition précédente est résumée dans le tableau suivant :

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**Fonction** f'	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto -n\,x^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

EXEMPLES

- ▷ Pour $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto \sqrt{2}$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = f_2'(x) = 0$$

car ce sont deux fonctions constantes.

- ▷ La fonction identité $f : x \mapsto x$ est une fonction puissance $x \mapsto x^n$ avec $n = 1$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1} = x^0 = 1$$

- ▷ La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est une fonction puissance $x \mapsto x^n$ avec $n = 3$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1} = 3x^2$$

- ▷ La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction puissance inverse $f : x \mapsto x^{-n}$, avec $n = 1$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -nx^{-n-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Pour déterminer la dérivée d'une fonction donnée, on utilise le tableau des dérivées de fonctions usuelles et les opérations sur les dérivées données ci-dessous.

Proposition : *Opérations sur les dérivées*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même ensemble $D \subset \mathbb{R}$.

- *La fonction $u+v$ est dérivable sur D et sa dérivée est*

$$(u+v)' : x \mapsto u' + v'$$

Autrement dit, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

- *La fonction $u\,v$ est dérivable sur D et sa dérivée est*

$$(u\,v)' : x \mapsto u'v + uv'$$

- *Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $k\,u$ est dérivable sur D et sa dérivée est*

$$(k\,u)' : x \mapsto k\,u'$$

- *La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout point $x \in D$ tel que $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' : x \mapsto \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Remarques

- On prendra garde que la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

  De même, la dérivée d'une fraction n'est pas la fraction des dérivées.
- À partir de la dérivée d'une fraction on déduit en particulier la dérivée de l'inverse $\dfrac{1}{v}$. En effet, en posant $u : x \mapsto 1$, on obtient

$$\left(\frac{1}{v}\right)' : x \mapsto \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-v'}{v^2}$$

car $u' : x \mapsto 0$.

La proposition précédente est résumée dans le tableau suivant :

Opérations sur les dérivées

Opération	**Fonction**	**Dérivée**
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k\,u$, où $k\in\mathbb{R}$	$k\,u'$
Multiplication	$u\,v$	$u'\,v+u\,v'$
Fraction	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x^3+3$ est de la forme $u+v$ avec $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto 3$.
  On en déduit $f' : x \mapsto 3x^2$ car $v' : x \mapsto 0$.
- La fonction $f : x \mapsto 5(x^2+1)$ est de la forme $k\,u$ avec $k=5$ et $u : x \mapsto x^2+1$.
  Or $u' : x \mapsto 2x$, on en déduit $f' : x \mapsto 10x$.
- La fonction $f : x \mapsto (-x+2)(3x-5)$ est de la forme $u\,v$ avec $u : x \mapsto -x+2$ et $v : x \mapsto 3x-5$.
  Or $u' : x \mapsto -1$ et $v' : x \mapsto 3$ donc
  $$f' : x \mapsto -(3x-5)+(-x+2)3 = -6x+11$$
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ et $v : x \mapsto x^2+1$.
  Or $u' : x \mapsto 2$ et $v' : x \mapsto 2x$ donc
  $$f' : x \mapsto \frac{2(x^2+1)-(2x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 11.2

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto 3x^2 - 2$ **2)** $f : x \mapsto x^5 + x^4$ **3)** $f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **5)** $f : x \mapsto x \sin x$ **6)** $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x+1}$

7) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{3x-2}$ **8)** $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **9)** $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$

La dernière opération concernant les dérivées, et dont l'importance est essentielle, est la dérivée d'une fonction composée qui est donnée par le résultat ci-dessous.

Propriété : *Dérivée d'une composée*

Soient I et J deux ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}$, $u : I \to J$ deux fonctions dérivables.
Alors, la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a

$$(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x)$$

Exemple

On considère la fonction définie par $h : x \mapsto \sin(2x+3)$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est une fonction composée donnée par $h = f \circ u$ avec $f : x \mapsto \sin x$ et $u : x \mapsto 2x+3$.
Les fonctions f et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto 2$, $f' : x \mapsto \cos x$ donc $h = f \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(u(x))u'(x) = 2\cos(2x+3)$$

Exercice 11.3

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $h : x \mapsto \cos(3x+1)$ **2)** $h : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

3) $h : x \mapsto \sin(\cos x)$ **4)** $h : x \mapsto (1+\sin x)^5$

5) $h : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ **6)** $h : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3 Tangente à une courbe

Dans toute cette partie, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Rappel

On a vu au chapitre 4 que toute droite (d) du plan admet une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. De plus, lorsque $\beta \neq 0$, la droite (d) admet une équation de la forme

$$y = ax + b$$

Dans ce cas, le réel a est appelée le **coefficient directeur** de la droite (d) et b est son **ordonnée à l'origine**.

Remarque

Soient (d) une droite du plan d'équation $y = ax + b$ et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite (d). Alors, on a

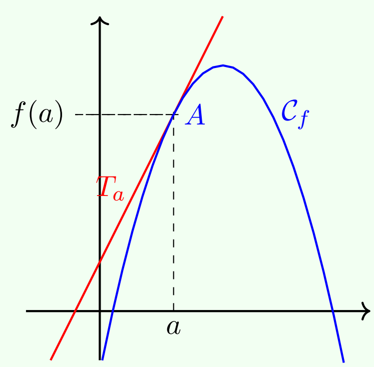
$$y_A = ax_A + b \quad \text{et} \quad y_B = ax_B + b$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$. On en déduit

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Définition : *Tangente à une courbe*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$.
On appelle **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a, notée T_a, la droite passant par le point $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.



Remarque

Intuitivement, d'après la figure ci-dessus, la tangente T_a est l'unique droite dont l'intersection avec $\mathcal{C}_f$ est réduite au point $A(a; f(a))$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T_a se « touchent » uniquement au point A.

Proposition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$.
Alors, la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. D'après la définition de T_a, son équation est de la forme

$$y = f'(a)x + b$$

où $b \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de déterminer b. Puisque T_a passe par le point $A(a, f(a))$, on a $f(a) = f'(a)a + b$. On en déduit

$$b = f(a) - f'(a)a$$

d'où $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$. □

Exemple

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 1$. On veut déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0 et en 1.
On a $f' : x \mapsto 4x$. Puisque $f'(0) = 0$, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est

$$y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 1$$

De même, puisque $f'(1) = 4$ et $f(1) = 3$, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1 est $y = 4(x - 1) + 3 = 4x - 1$.

Remarque

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$.
D'après la proposition précédente, si $f'(a) = 0$ alors la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation $y = f(a)$.

La remarque précédente montre que les points où la dérivée s'annule ont une importance particulière dans l'étude d'une fonction. On a de plus le résultat suivant :

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et dérivable sur I.
Si f admet un extremum (minimum ou maximum) sur I en un point a distinct des extrémités de I, alors

$$f'(a) = 0$$

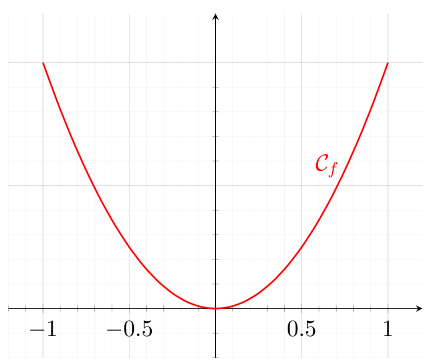
Remarque

Ce théorème permet de déterminer les points où f peut atteindre un extremum.
Mais **attention**, la réciproque n'est pas vraie : le fait que $f'(a) = 0$ n'implique pas forcément que f admet un extremum en a.

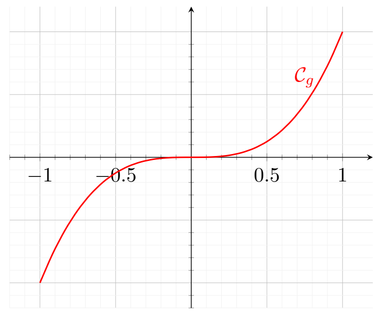
Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie $f' : x \mapsto 2x$.
  Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
  Or, f admet un bien minimum en 0 car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$$



- La fonction $g : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
  On a $g' : x \mapsto 3x^2$, donc $g'(0) = 0$.
  Mais g n'admet ni minimum, ni maximum en 0 (voir figure ci-après).
  On parle alors de point d'inflexion.



4 Dérivation, sens de variations et étude d'une fonction

Le signe de la dérivée d'une fonction sur un intervalle permet d'y déterminer les variations de cette fonction comme le montre le résultat ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ▷ *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*
- ▷ *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.*
- ▷ *f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Exemples

- ▷ Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On veut déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
  Pour tout réel x, on a $f'(x) = 2x - 4$. Ainsi, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $2x - 4 \leq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \leq 2$.
  De plus, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(2) = -2$. On en déduit que le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

▷ Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 2$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On veut déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
Alors, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $3x(x-2) \geq 0$.
On détermine le signe de $x(x-2)$ en calculant ses racines qui sont 0 et 2.
De plus, on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -2 \quad \text{et} \quad f(2) = -6$$

On en déduit que le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 11.4

Soit $f : x \mapsto x^2 - x - 10$.

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2) Calculer la dérivée de f et établir le tableau de variations de f.

3) La fonction f est-elle monotone sur l'intervalle $]-1; +\infty[$? Et sur l'intervalle $]1; +\infty[$?

4) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f sur l'intervalle $[-4; 6]$.

5) Déterminer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

Les différentes notions qui ont été vues pour une fonction (domaine de définition, limites, asymptotes, dérivée) permettent de faire une étude complète d'une fonction donnée.

MÉTHODE : *Étude d'une fonction*

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Faire l'étude de la fonction f consiste à :

1) déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f,

2) calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et en déduire les éventuelles asymptotes,

3) étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}_f$,

4) calculer la dérivée f' de f,

5) étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de f,

6) tracer la courbe représentative de f.

EXEMPLE

On va étudier la fonction

$$f : x \mapsto 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$$

1) Puisque f est une fonction polynôme, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) Les limites aux bornes du domaine sont les suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$$

En particulier, la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale ou verticale.

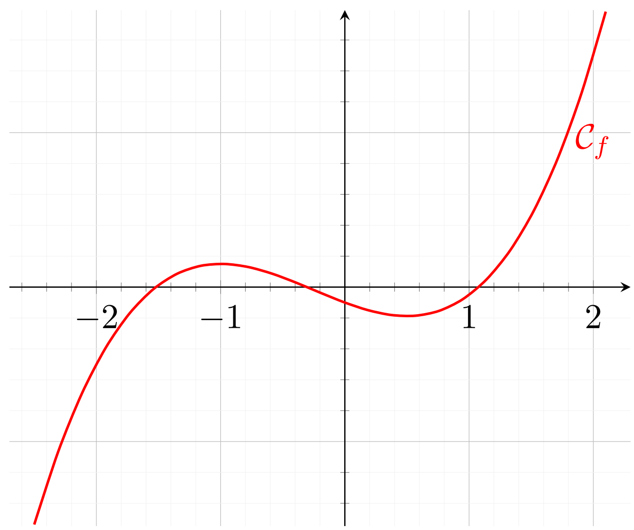
3) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

4) La dérivée de f est $f' : x \mapsto 12x^2 + 6x - 6 = 6(x^2 + x - 1)$.

5) Le polynôme $x^2 + x - 1$ a pour racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que le tableau de variations de f est

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

6) On peut alors tracer la courbe représentative de f.



EXERCICE 11.5

Faire l'étude de la fonction g définie par

$$g : x \mapsto \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}$$

PROPRIÉTÉ : *Restriction de l'étude de f à un sous ensemble de $\mathcal{D}_f$*

Lorsque la fonction f est paire, impaire ou périodique, on peut restreindre l'étude de f à un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$.

- ▷ *Si f est paire ou impaire alors on peut se restreindre à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.*
- ▷ *Si f est périodique de période T alors on peut se restreindre à l'intervalle d'une période.*

Dans le cas de la parité ou de l'imparité de f, on profitera de la propriété géométrique correspondante pour dresser le tableau de variations de f et pour tracer la courbe représentative de f (symétrie par rapport à l'origine ou par rapport à l'axe des ordonnées).

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3}{x^2}$.
On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Donc, en particulier, si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2+3}{(-x)^2} = \frac{2x^2+3}{x^2} = f(x)$$

Ainsi, f est paire. On peut donc restreindre son étude sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^*$.
Les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^*$ sont

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

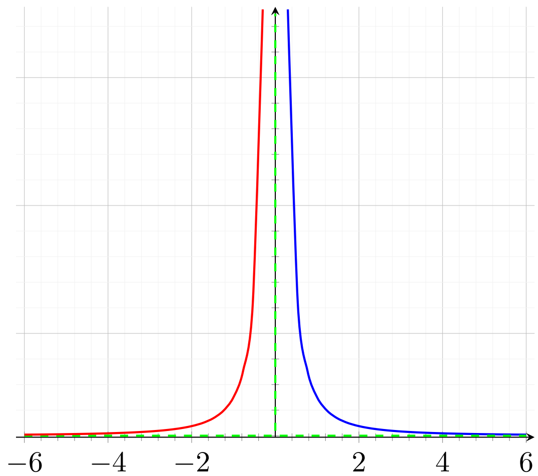
En particulier les droites d'équation $y = 2$ et $x = 0$ sont des asymptotes, respectivement, horizontale et verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Puisque f est une fraction rationnelle, elle est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{4x^3 - 4x^3 - 6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$$

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ est

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2

On en déduit la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par symétrie sur $\mathbb{R}_-^*$.



Exercice 11.6

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

1) Montrer que la fonction f est paire.

2) Faire l'étude de la fonction f.

5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 11.1

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, on a

$$\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a}$ existe pour tout $a \in \mathbb{R}$ et vaut 1.
Ainsi, f_1 est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et $f_1'(a) = 1$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, on a

$$\frac{f_2(x) - f_2(a)}{x - a} = \frac{(2x - 1) - (2a - 1)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = 2$$

donc $\lim_{x\to a} \dfrac{f_2(x) - f_2(a)}{x-a}$ existe pour tout $a \in \mathbb{R}$ et vaut 2.
Ainsi, f_2 est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et $f_2'(a) = 2$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, on a

$$\frac{f_3(x) - f_3(a)}{x-a} = \frac{x^2+2-(a^2+2)}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a$$

donc $\lim_{x\to a} \dfrac{f_3(x) - f_3(a)}{x-a}$ existe pour tout $a \in \mathbb{R}$ et vaut $2a$.
Ainsi, f_3 est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et $f_3'(a) = 2a$.

4) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x \neq a$, on a

$$\frac{f_4(x) - f_4(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)\frac{1}{x-a} = \frac{a-x}{ax}\,\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{ax}$$

donc $\lim_{x\to a} \dfrac{f_4(x) - f_4(a)}{x-a}$ existe pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et vaut $-\dfrac{1}{a^2}$.
Ainsi, f_4 est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_4'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

Corrigé Exercice 11.2

1) On a $f : x \mapsto 3x^2 - 2 = u(x) + v(x)$, où $u : x \mapsto 3x^2$ et $v : x \mapsto -2$.
Puisque la fonction $x \mapsto x^2$ a pour dérivée $x \mapsto 2x$, on en déduit $u' : x \mapsto 3 \times 2x = 6x$. Comme v est une fonction constante, sa dérivée est nulle. Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6x$$

2) Les fonctions $x \mapsto x^5$ et $x \mapsto x^4$ ont pour dérivées respectives, $x \mapsto 5x^4$ et $x \mapsto 4x^3$. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5x^4 + 4x^3 = x^3(5x+4)$$

3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a pour dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) On a $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

5) On a $f : x \mapsto x \sin x = u(x)v(x)$, où $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sin x$. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sin x + x\cos x$$

6) On a $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u : x \mapsto 3x+1$ et $v : x \mapsto 2x+1$.

Puisque v s'annule seulement en $x = -\dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{3(2x+1) - (3x+1)2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}\end{aligned}$$

7) Le raisonnement est le même qu'à la question précédente. On obtient

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}, \quad f'(x) = \frac{2x(3x-2) - (x^2+1)3}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2 - 4x - 3}{(3x-2)^2}$$

8) On a $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto 1 + \sqrt{x}$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\end{aligned}$$

9) Cette fois encore, on est en présence d'une fraction. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$$

Corrigé Exercice 11.3

1) On a $h : x \mapsto \cos(3x+1) = f\,(u(x))$, où $f : x \mapsto \cos x$ et $u : x \mapsto 3x+1$. Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = -3\sin(3x+1)$$

2) On a $h : x \mapsto \sqrt{x^2+1} = f(u(x))$, où $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto x^2+1$.

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = 2x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

3) On a $h : x \mapsto \sin(\cos x) = f(u(x))$, où $f : x \mapsto \sin x$ et $u : x \mapsto \cos x$. Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = -\sin x \cos(\cos x)$$

4) On a $h : x \mapsto (1+\sin x)^5 = f(u(x))$, où $f : x \mapsto x^5$ et $u : x \mapsto 1+\sin x$. Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = 5\cos x\,(1+\sin x)^4$$

5) On a $h : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = f(u(x))$, où $f : x \mapsto \sin x$ et $u : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Or, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

6) On a $h : x \mapsto \cos\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = f(u(x))$, où $f : x \mapsto \cos x$ et $u : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$.
Or, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad u'(x) = \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad h'(x) = u'(x)f'(u(x)) = -\frac{2}{(1-x)^2}\sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Corrigé Exercice 11.4

1) Le domaine de définition de f est tout $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynomiale.

De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

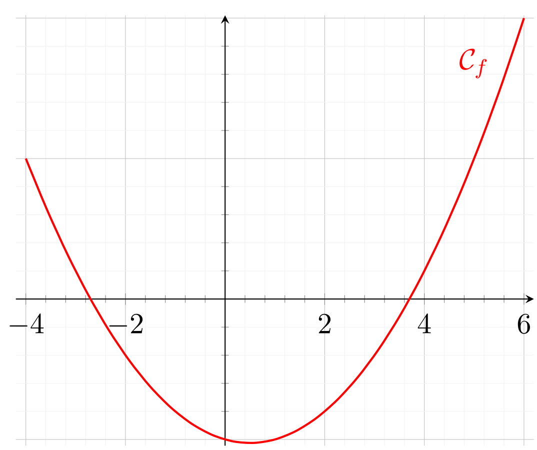
2) Pour tout réel x, $f'(x) = 2x-1$, donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq \frac{1}{2}$.
Le tableau de variations est donc le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{41}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 10 = -\frac{41}{4}$.

3) La fonction f n'est pas monotone sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ car elle est strictement décroissante sur $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. Par contre elle est monotone sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

4) Courbe représentative de f :



5) On a

$$f(0) = -10, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{41}{4}, \quad f'(0) = -1, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x=0$ a pour équation $y = -x-10$ et la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = \frac{1}{2}$ est horizontale et a pour équation $y = -\frac{41}{4}$.

Corrigé Exercice 11.5

1) Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) Limites aux bornes de $\mathcal{D}_g$:

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-3}{(x+1)^2} = -\infty$
  car $\lim\limits_{x\to-1^-} (x+1)^2 = 0^+$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{-3}{(x+1)^2} = -\infty$
  car $\lim\limits_{x\to-1^+} (x+1)^2 = 0^+$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

3) La fonction g est continue et dérivable sur son domaine de définition car il s'agit d'une fonction rationnelle.

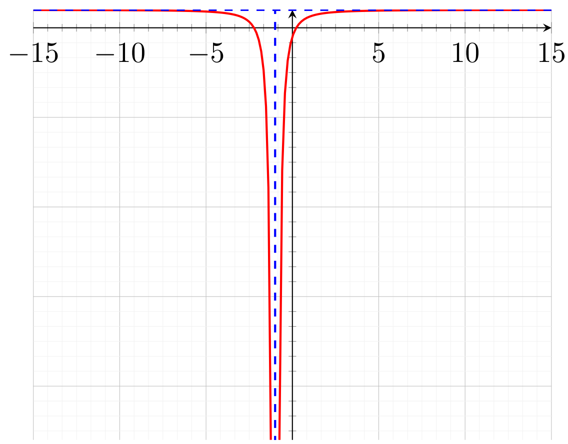
4) Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{4(x+1)^2 - 2(2x^2+4x-1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{6}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

5) On remarque que $x+1>0$ si et seulement si $x>-1$, donc le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2

6) Courbe représentative de g :



CORRIGÉ EXERCICE 11.6

Avant d'étudier la parité de f, il faut déterminer son domaine de définition pour s'assurer que si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$.
On a

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$$

En particulier, si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$.

1) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Alors, on a

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^4}{x^2 - 1} = f(x),$$

donc la fonction f est paire.

2) Puisque f est paire, on peut l'étudier sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+ = \left[0; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$.

a) On a

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^4}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{2(x-1)} = -\infty$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^4}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2(x-1)} = +\infty$
- $\triangleright$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

En particulier, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

b) La fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition car il s'agit d'une fonction rationnelle.

c) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

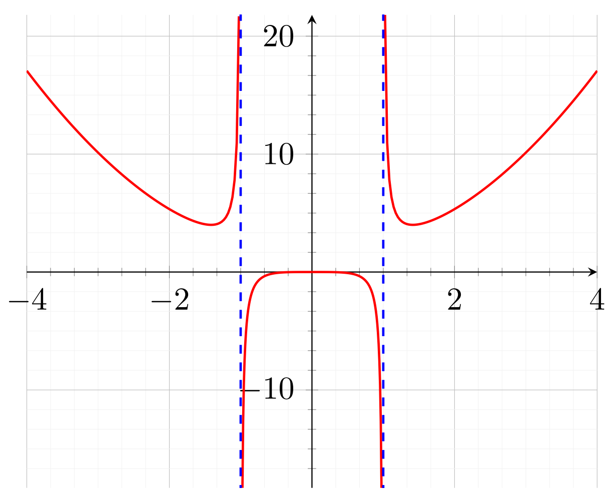
$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-1) - 2x^5}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

d) On va étudier le signe de $2x^3(x^2-2)$, puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$.

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^3	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
x^2-2		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

où $f(\sqrt{2}) = \dfrac{(\sqrt{2})^4}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \dfrac{4}{2-1} = 4.$

e) D'après la parité de f, on en déduit sa courbe représentative :



6 Exercices

EXERCICE 11.7

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto -x + 2$

2) $f : x \mapsto x^2 + 3x^4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x} + 1$

4) $f : x \mapsto \dfrac{5}{x^2}$

5) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

6) $f : x \mapsto \sin x - x \cos x$

7) $f : x \mapsto \sin x \cos x$

8) $f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x-1}$

9) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x^2 - 2}$

10) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

11) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + 2\sqrt{x}}$

12) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

13) $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$

14) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

15) $f : x \mapsto \left(x^2 - 2x + 3\right)^2$

16) $f : x \mapsto \left(\dfrac{x-1}{3x^2+1}\right)^3$

17) $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

18) $f : x \mapsto \sin^2(2x)$

EXERCICE 11.8

Faire l'étude de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$.

EXERCICE 11.9

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x + \cos(x)$.

1) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des réels x tel que $f'(x) = 0$.

3) Pour $x \in \mathcal{E}$, quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x ?

Exercice 11.10

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Faire l'étude de la fonction f.

2) Montrer que si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \in [1; 2]$.

Exercice 11.11

Faire une étude complète pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x^2-2}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x-1}$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-6}{x-2}$

5) $f : x \mapsto \cos^2 x$

6) $f : x \mapsto \tan x$

Exercice 11.12

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1) Faire l'étude de la fonction f.

2) Déterminer une équation de la tangente au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

3) Soit (d) la droite d'équation $y = 4x + 3$. Étudier la position relative de (d) par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11.13

Soit $h : x \mapsto \dfrac{1+x^2}{1-x}$.

1) Faire l'étude de la fonction h.

2) La fonction h est-elle monotone sur l'intervalle $]1; +\infty[$?

3) La fonction h admet-elle une asymptote oblique en $\pm\infty$?

CHAPITRE 12

La fonction exponentielle

Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle fonction usuelle : la fonction exponentielle. Cette fonction aura un rôle très important dans la suite de ce cours. On donne ensuite les propriétés principales de l'exponentielle et on en fait l'étude. On présente des limites remarquables qui permettent de déterminer la dominance entre l'exponentielle et les fonctions puissance. Enfin, on montre comment résoudre des équations et des inéquations qui font intervenir des exponentielles.

Sommaire

1 Définition de la fonction exponentielle

Afin de définir la fonction exponentielle, nous aurons besoin du résultat important suivant sur la dérivée.

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

Remarques

- ▷ On a vu au chapitre précédent que la dérivée d'une fonction constante est nulle. La proposition ci-dessus en est la réciproque : si la dérivée est nulle sur un intervalle alors la fonction est constante sur cet intervalle.
- ▷ La démonstration formelle de ce résultat dépasse le cadre de ce cours, ce résultat est donc admis. La démonstration repose sur le fait que si la dérivée est nulle en tout point, alors le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entre tous réels a et $a+h$ est nul, et ainsi $f(a+h) = f(a)$.

On aura besoin aussi du résultat auxiliaire ci-dessous (un lemme est un résultat auxiliaire permettant de montrer un théorème).

Lemme

Soit f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \neq 0 \quad \textit{et} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Démonstration. On pose $g(x) = f(x)f(-x)$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Or on a

$$g(0) = f(0) \times f(0) = 1$$

Donc $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$ et donc $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. □

La définition de la fonction exponentielle est donnée par le théorème suivant :

Théorème : *Définition de l'exponentielle*

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \textit{et} \quad f(0) = 1$$

*On l'appelle la fonction **exponentielle**, notée $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.*

Démonstration. L'existence de cette fonction est admise. On montre seulement l'unicité d'une telle fonction. Supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui répondent au problème posé.

D'après le lemme, les fonctions f et g ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $h = \dfrac{f}{g}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Or, $f = f'$ et $g = g'$ donc, pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$$

D'où h est constante sur $\mathbb{R}$. Or, $f(0) = g(0) = 1$ donc $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$. On en déduit que, pour tout réel x, $h(x) = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ou encore $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$ et on a donc l'unicité de la solution. $\square$

D'après la définition précédente, la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, donc elle est de signe constant. De plus, $\exp(0) = 1 > 0$ donc exp est toujours strictement positive. Autrement dit, on a

Propriétés : *Conséquences directes*

- $\exp' = \exp$,
- $\exp(0) = 1$,
- *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. *Ainsi, la fonction exponentielle est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $]0; +\infty[$.

Définition : *Nombre exponentiel*

On définit le nombre e, appelé **exponentiel**, par $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,718$.

2 Propriétés de l'exponentielle

Dans cette partie, on donne les propriétés essentielles vérifiées par l'exponentielle.

PROPOSITION

Pour tous réels a et b, on a la relation fondamentale suivante :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \qquad \textit{ou encore} \qquad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$$

EXERCICE 12.1

L'objectif de cet exercice est de montrer la proposition précédente.
Soient $b \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$.

1) Que vaut $g(0)$?

2) Calculer g'.

3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b)$.

D'après le lemme de début du chapitre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. En appliquant la proposition précédente, on en déduit

$$\mathrm{e}^{a-b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$$

De plus, on a

$$(\mathrm{e}^a)^2 = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{a+a} = \mathrm{e}^{2a}$$
$$(\mathrm{e}^a)^3 = \mathrm{e}^a(\mathrm{e}^a)^2 = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{2a} = \mathrm{e}^{a+2a} = \mathrm{e}^{3a}$$

En continuant ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$$

Ces propriétés sont résumées ci-dessous.

PROPRIÉTÉS

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

- ▷ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$
- ▷ $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
- ▷ $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$

Remarque

Autrement dit, l'exponentielle transforme :

- ▷ les sommes en produits,
- ▷ les différences en quotients,
- ▷ les multiplications en puissances.

Exemples

- ▷ $\mathrm{e}^2\ \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^{2+3} = \mathrm{e}^5$
- ▷ $\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{e}^{1-2x} = \mathrm{e}^{2x+1-2x} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- ▷ $\dfrac{1}{\mathrm{e}^5} = \dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^5} = \mathrm{e}^{0-5} = \mathrm{e}^{-5}$
- ▷ $(\mathrm{e}^2)^3 = \mathrm{e}^6$

Exercice 12.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expression suivantes :

1) $A = \mathrm{e}^{x+3}\ \mathrm{e}^{2x+1}$

2) $B = \dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^2}$

3) $C = (\mathrm{e}^{-2})^{-3}$

4) $D = (\mathrm{e}^{x-2})^2$

5) $E = \dfrac{(\mathrm{e}^{3x-1})^2\ \mathrm{e}^{-4x+2}}{\mathrm{e}^{x^2}}$

6) $F = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2$

3 Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est une fonction usuelle au même titre que les fonctions polynômes, inverse, valeur absolue, racine carrée et trigonométriques. Ainsi, comme pour ces fonctions, il est important d'en connaître l'étude précise.

On donne tout d'abord un premier résultat important pour déterminer les limites de exp aux bornes de son domaine de définition.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x > x$.

Démonstration. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x > x$ revient à montrer que $\mathrm{e}^x - x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Pour cela, on fait l'étude de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$.

Cette fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g' : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$. Or $\exp' = \exp$

et exp est strictement positive, donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\exp(0) = 1$ donc, pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) > g(0) = 0$. Ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x > x$. □

On en déduit le théorème suivant :

Théorème : *Étude de la fonction exponentielle*

1) *La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

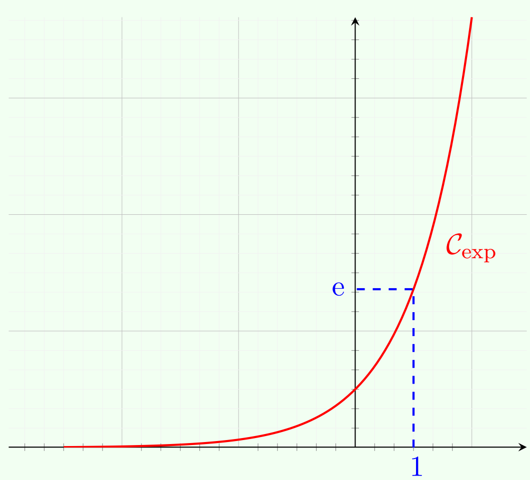
2) *Ses limites aux bornes de $\mathbb{R}$ sont*

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

3) *Son tableau de variations est*

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$

4) *Sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_{\exp}$, est donnée ci-dessous*



Démonstration. On a déjà vu dans la démonstration de la proposition précédente que exp est strictement croissante, il suffit donc de calculer les limites aux bornes.

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, par comparaison, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. De plus, on a

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0$$

Ce qui donne le résultat. □

Exercice 12.3

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x-1}$ **2)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x+3}$

La fonction exponentielle apparaît généralement dans des fonctions composées. En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on a alors le résultat suivant :

Proposition

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors, la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée

$$\exp(u(x))' = u'(x) \exp(u(x))$$

que l'on écrit aussi : $(\mathrm{e}^u)' = u' \, \mathrm{e}^u$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}$.
Le polynôme u défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u' : x \mapsto 2x$.
Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = u'(x) \exp(u(x)) = 2x \, \mathrm{e}^{x^2+1}$$

EXERCICE 12.4

Déterminer les dérivées des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

1) $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{x-2}$

2) $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$

4) $f_4 : x \mapsto (\mathrm{e}^{2x}+1)^3$

4 Croissances comparées

La croissance comparée est une méthode permettant de déterminer des limites de formes indéterminées faisant intervenir l'exponentielle et des fonctions puissance. Puisque l'exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance, on dit que « l'exponentielle l'emporte sur la puissance » et on obtient le résultat ci-dessous.

PROPOSITION

On a les limites classiques suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- ▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- ▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- ▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$
- ▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$

EXEMPLE

On étudie la limite de $f : x \mapsto (x-2)\,\mathrm{e}^x$ lorsque x tend vers $-\infty$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} x-2 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».
Or, $(x-2)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x$, donc

$$\lim_{x\to-\infty} (x-2)\,\mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x - \lim_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{e}^x = 0 - 0 = 0$$

en ayant utilisé la limite remarquable $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.

Une autre limite remarquable à connaître concernant l'exponentielle est la suivante :

Proposition

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\mathrm{e}^0 = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Ce qui donne le résultat. □

Exercice 12.5

1) Étudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ **b)** $f_2 : x \mapsto x - 1 - \mathrm{e}^x$ **c)** $f_3 : x \mapsto 2x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x+1}$ **e)** $f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x-1}}$ **f)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{2\,\mathrm{e}^x + 1}$

2) Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^3}$$

Exercice 12.6

1) Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 12.7

L'objectif de cet exercice est de faire l'étude de la fonction f définie par

$$f : x \mapsto x + \frac{x+2}{\mathrm{e}^x}$$

Partie 1 : *Étude d'une fonction auxiliaire g*
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$$

1) Faire l'étude de la fonction g.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2 : *Étude de la fonction f*

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) **a)** Calculer f' et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

3) **a)** Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (d).

d) Montrer qu'il existe un point A et un seul de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à (d) et préciser les coordonnées de A.

4) Représenter la courbe $\mathcal{C}_f$, les tangentes T_1 et T_2, et la droite (d).

5 Équations et inéquations exponentielles

On termine ce chapitre par la résolution des équations et des inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles.

PROPOSITION

Pour tous réels u et v, puisque exp *est une fonction strictement croissante, on a les résultats suivants :*

- $\exp(u) = \exp(v)$ *si et seulement si* $u = v$.
- $\exp(u) \geq \exp(v)$ *si et seulement si* $u \geq v$.

Exemple

- L'équation $e^{2x} = e^{x+3}$ est équivalente à $2x = x + 3$, et donc a pour solution $x = 3$.
- L'inéquation $e^{3x} \geq 1$ est équivalente à $e^{3x} \geq e^0$, car $e^0 = 1$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \geq 0\}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = [0; +\infty[$.

Exercice 12.8

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^x e^{3x} = e^{x^2}$ **2)** $e^{-x^2+9} = 1$ **3)** $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

4) $e^{2x} \geq e^{x-1}$ **5)** $e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$ **6)** $e^{-\frac{1}{x}} > e^{x-2}$

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 12.1

1) On a $g(0) = \dfrac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = g(x)$$

3) On en déduit que g vérifie $g' = g$ et $g(0) = 1$. Or l'unique fonction vérifiant ces deux propriétés est l'exponentielle donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x + b) = \exp(x)\exp(b)$.

Corrigé Exercice 12.2

1) $A = e^{x+3} e^{2x+1} = e^{x+3+2x+1} = e^{3x+4}$

2) $B = \dfrac{e^7}{e^2} = e^{7-2} = e^5$

3) $C = (\mathrm{e}^{-2})^{-3} = \mathrm{e}^{-2\times(-3)} = \mathrm{e}^6$

4) $D = (\mathrm{e}^{x-2})^2 = \mathrm{e}^{2(x-2)}$

5) $E = \dfrac{(\mathrm{e}^{3x-1})^2\,\mathrm{e}^{-4x+2}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \dfrac{\mathrm{e}^{6x-2}\,\mathrm{e}^{-4x+2}}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{6x-2-4x+2-x^2} = \mathrm{e}^{2x-x^2}$

6) On a

$$\begin{aligned} F = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 &= (\mathrm{e}^x)^2 + 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x})^2 \\ &= \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2 \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 12.3

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$

Autre méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x+3} = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^3 = 0\times\mathrm{e}^3 = 0$

Corrigé Exercice 12.4

1) $f_1 = \exp(u)$ où $u : x \mapsto x-2$, donc

$$f_1' : x \mapsto u'(x)\exp(u(x)) = \mathrm{e}^{x-2}$$

2) $f_2 = \exp(u)$ où $u : x \mapsto \sin x$, donc

$$f_2' : x \mapsto \cos x\,\mathrm{e}^{\sin x}$$

3) $f_3 = \dfrac{u}{v}$ où $u : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $v : x \mapsto x$, donc

$$f_3' : x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

4) $f_4 = u^3$ où $u : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$, donc

$$f_4' : x \mapsto 3\left(u'(x)\right)^2 = 3\times 2\,\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)^2 = 6\,\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)^2$$

Corrigé Exercice 12.5

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x)^2 = +\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x)^2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - 1 - \mathrm{e}^x = -\infty \quad$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$
et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_2(x) &= \lim_{x\to+\infty} x - 1 - \mathrm{e}^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^x}{x} = -\infty\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_3(x) &= \lim_{x\to-\infty} 2x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 2(-x)^2\,\mathrm{e}^{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x^2\,\mathrm{e}^x = +\infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_3(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\mathrm{e}^x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{2x^2}\right)^{-1} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x^2} = +\infty\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_4(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_4(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\frac{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty\end{aligned}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$
et

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+3}{2\,\mathrm{e}^x+1} = 3$
et

$$\lim_{x\to+\infty} f_6x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+3}{2\,\mathrm{e}^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x^3} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

CORRIGÉ EXERCICE 12.6

1) a) Puisque les fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b) Les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$ sont

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)\,\mathrm{e}^x \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x = 0$
car $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\,\mathrm{e}^x = -\infty$

c) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car il s'agit d'un produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

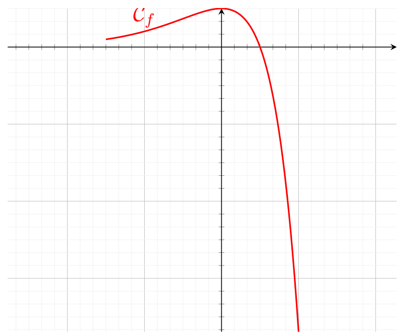
$$f'(x) = -\,\mathrm{e}^x + (1-x)\,\mathrm{e}^x = -x\,\mathrm{e}^x$$

e) Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

car $f(0) = e^0 = 1$.

f) La courbe représentative de f est donnée ci-dessous.



2) Puisque l'exponentielle est toujours positive, on a

$$f(x) = (1-x)\,e^x = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1.$$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Ce résultat pouvait aussi être déduit du tableau de variations.

Corrigé Exercice 12.7

Partie 1 : *Étude d'une fonction auxiliaire g*

1) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et ses limites aux bornes sont

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1$$

Ainsi,

$$g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

On en déduit que le tableau de variations de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

car $g(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$

2) D'après le tableau de variations, on peut en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2 : *Étude de la fonction f*

1) On a

▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x + (x+2)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = -\infty$
car $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$

▷ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$
car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$

2) **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\mathrm{e}^x - (x+2)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + \frac{-(x+1)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= 1 + \frac{-(x+1)}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e}^x} = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^x} \end{aligned}$$

b) Puisque les fonctions g et exp sont toujours positives, on a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) **a)** On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est horizontale et a pour équation $y = f(0)$, c'est-à-dire $y = 2$.

b) On a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{x+2}{\mathrm{e}^x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Les coordonnées du point d'intersection $M(x;y)$ de $\mathcal{C}_f$ et (d) doivent vérifier les deux équations $y = f(x)$ et $y = x$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = x + \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ y = x \end{cases}$$

Puisque $\dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = 0$, on obtient $x = -2$ et, comme $y = x$, on a $y = -2$. On en déduit $M(-2;-2)$.

d) On rappelle que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$, donc ses coordonnées s'écrivent $A(a; f(a))$. La tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

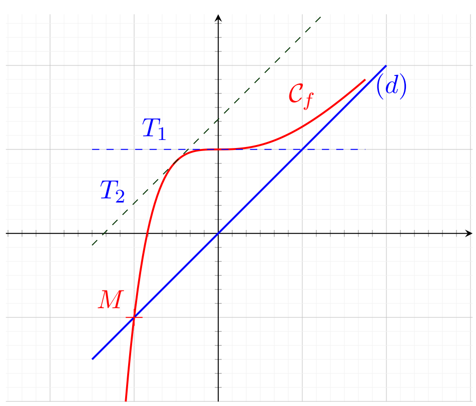
Donc, pour que la droite T_2 soit parallèle à (d), il faut que son coefficient directeur soit égal à 1, c'est-à-dire $f'(a) = 1$. Or on a

$$f'(a) = \frac{\mathrm{e}^a - a - 1)}{\mathrm{e}^a} = 1 \iff \mathrm{e}^a - a - 1 = \mathrm{e}^a \iff a = -1$$

En particulier, il existe une unique valeur possible pour a, ce qui prouve l'unicité du point A.

De plus, puisque $f(-1) = -1 + \dfrac{-1+2}{\mathrm{e}^{-1}} = -1 + \mathrm{e}$, le point A a pour coordonnées $A(-1; -1+\mathrm{e})$.

4) La courbe $\mathcal{C}_f$, les tangentes T_1, T_2 et la droite (d) sont données ci-dessous.



CORRIGÉ EXERCICE 12.8

1) $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x^2} \iff \mathrm{e}^{x+3x} = \mathrm{e}^{x^2} \iff \mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{x^2} \iff x^2 - 4x = 0$
Donc l'équation $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x^2}$ a pour solutions $x = 0$ et $x = 4$.

2) $\exp(-x^2+9) = 1 \iff \exp(-x^2+9) = \exp(0) \iff -x^2+9 = 0$
Donc l'équation $\exp(-x^2+9) = 1$ a pour solutions $x = -3$ et $x = 3$.

3) Ici on ne peut pas réécrire notre équation sous la forme $\exp(u) = \exp(v)$.
On fait donc un changement de variable : on pose $X = \mathrm{e}^x$.
L'équation devient alors $X^2 + 2X - 3 = 0$.
Cette équation du second degré a pour solutions $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$.
On doit maintenant revenir à notre variable de départ x, donc on doit résoudre deux équations exponentielles :

$$\mathrm{e}^x = X_1 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x = X_1 = -3$$

La première a pour solution $x = 0$. Par contre, la deuxième n'a pas de solutions, puisque l'exponentielle est toujours positive.
On en déduit que l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x - 3 = 0$ est $x = 0$.

4) $\mathrm{e}^{2x} \geq \mathrm{e}^{x-1} \iff 2x \geq x - 1 \iff x \geq -1$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1; +\infty[$.

5) On a

$$\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} > 0 \iff \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x} > 0$$

Puisque $\mathrm{e}^x > 0$, la fraction est positive lorsque le numérateur est positif. Or on a

$$\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{2x} > 1 \iff x > 0$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \,]0; +\infty[$.

6) On a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > \mathrm{e}^{x-2} &\iff -\frac{1}{x} > x - 2 \\ &\iff -\frac{1}{x} - \frac{x(x-2)}{x} > 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + 2x - 1}{x} > 0 \\ &\iff -\frac{(x-1)^2}{x} > 0 \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{(x-1)^2}{x} > 0$ si et seulement si $x < 0$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \,]-\infty; 0[$.

7 Exercices

Exercice 12.9

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = e^3\, e^{\frac{1}{2}}$ **2)** $B = ((e^4)^4)^2$ **3)** $C = \dfrac{e^4}{(e^2)^3}$

4) $D = e^{3x+2}\, e^{1-2x}$ **5)** $E = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x+2}}$ **6)** $F = e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$

Exercice 12.10

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^2-3x+5}$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)\, e^x$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-3}{e^x+2}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}}$

Exercice 12.11

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto e^{2x^2+x-3}$

2) $f_2 : x \mapsto \exp\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{3\, e^x}{e^{2x}+1}$

Exercice 12.12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{4-x} = e^2$ **2)** $e^{x+1} \times e^{3x+2} = 1$

3) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ **4)** $(e^x - e^{3x+1})(e^{\frac{1}{x}} - e^3) = 0$

Exercice 12.13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$

2) $\dfrac{\mathrm{e}^{x} + 3}{\mathrm{e}^{x} + 1} > 2$

3) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2 \geq 0$

4) $\mathrm{e}^{2x+5} < \mathrm{e}^{1-x}$

Exercice 12.14

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto x - \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

1) Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) = x - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

2) Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que l'on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

4) En déduire le tableau de variations de f.

5) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ?
(On pourra utiliser l'expression de f obtenue en question 2) pour conclure).

Exercice 12.15

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x(\mathrm{e}^{-x} + 1)$$

Partie 1 : *Étude d'une fonction auxiliaire g*
Soit $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 1$.

1) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie 2 : *Étude de la fonction f*

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit (d) la droite d'équation $y = x$. Démontrer que (d) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et donner la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).

3) Déterminer f'.

4) À l'aide de la partie 1, déterminer le tableau de variations de f.

5) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}_f$ dont la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'asymptote (d).

7) Tracer (d), T_0, T_1 et $\mathcal{C}_f$.

CHAPITRE 13

Nombres complexes

Ce chapitre introduit un nouvel ensemble de nombres appelé l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$. Ses nombres, aussi dits imaginaires, permettent entre autres de résoudre les équations de second degré de discriminant négatif, et sont très utilisés, notamment, en physique. Après avoir introduit cet ensemble, on y définit les opérations d'addition et de produit, ainsi que la notion de nombre complexe conjugué. Ensuite, on montre comment résoudre une équation du second degré en utilisant les nombres complexes. La dernière partie introduit les notions de module et d'arguments d'un nombre complexe qui permettent de donner la notation exponentielle d'un nombre complexe.

Sommaire

1 Nombres complexes et premières définitions

On a vu qu'une équation du second degré n'admet pas de solution réelle lorsque son discriminant est négatif. L'objectif de ce chapitre est de pouvoir définir des solutions lorsque le discriminant est négatif. Pour cela, il faut construire un ensemble de nombres dont le carré peut être négatif.

La construction de cet ensemble de nombres repose sur la notation suivante :

Notation : *L'imaginaire i*

On note i (pour *imaginaire*) un nombre tel que

$$i^2 = -1$$

À partir de cette notation, on définit l'ensemble des nombres complexes ci-dessous. On prendra garde dans la suite, que la lettre i désigne toujours ce nombre imaginaire (même si cela n'est pas explicitement spécifié).

Définitions : *Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$*

On appelle **nombre complexe** tout élément z s'écrivant sous la forme

$$z = a + i\,b, \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

- ▷ L'écriture $a+ib$ est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z.
- ▷ Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et se note $\mathcal{R}e(z)$.
- ▷ Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et se note $\mathcal{I}m(z)$.

Autrement dit, tout nombre complexe z s'écrit

$$z = \mathcal{R}e(z) + i\,\mathcal{I}m(z)$$

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.
Un nombre complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est nulle : $\mathcal{R}e(z) = 0$.

Remarque

Tout nombre réel a peut s'écrire $a = a + i \times 0$.
Donc tout nombre réel est un nombre complexe, d'où $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemples Partie réelle et partie imaginaire

- ▷ Pour $z_1 = 1 + i$, on a $\mathcal{R}e(z_1) = 1$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 1$.
- ▷ Pour $z_2 = -\sqrt{2}$, on a $\mathcal{R}e(z_2) = -\sqrt{2}$ et $\mathcal{I}m(z_2) = 0$.
- ▷ Le complexe $z_3 = 2i$ est un imaginaire pur car $\mathcal{R}e(z_3) = 0$.

Exercice 13.1

Déterminer les parties réelles et imaginaires de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = -3$ **2)** $z_2 = 2i$ **3)** $z_3 = 4 - 3i$ **4)** $z_4 = 2i - 5$

2 Opérations avec les complexes

La première des opérations à considérer est l'égalité qui est donnée par la propriété suivante :

Propriété : *Égalité dans $\mathbb{C}$*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.
Alors,

$$z_1 = z_2 \text{ si et seulement si } \mathcal{R}e(z_1) = \mathcal{R}e(z_2) \text{ et } \mathcal{I}m(z_1) = \mathcal{I}m(z_2).$$

Remarque

En particulier, la proposition précédente signifie que la forme algébrique d'un complexe est unique.

Les règles opératoires dans $\mathbb{C}$ découlent de façon naturelle de celles dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on définit la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ comme des généralisations de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$.

Définition : *Somme dans $\mathbb{C}$*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.
La **somme** de z_1 et de z_2 est définie par :

$$z_1 + z_2 = (\mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2)) + i\,(\mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2))$$

Exemple Somme dans $\mathbb{C}$

Soient $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - 4i$. Alors,

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i$$

Définition : *Produit dans $\mathbb{C}$*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.
Le **produit** de z_1 par z_2 est donné par :

$$z_1z_2 = \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{R}e(z_2) - \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{I}m(z_2) + i\left(\mathcal{R}e(z_1)\mathcal{I}m(z_2) + \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{R}e(z_2)\right)$$

Dans le cas du produit, plutôt que d'apprendre la formule précédente, on retiendra la méthode ci-dessous.

Méthode : *Calcul du produit dans $\mathbb{C}$*

- ▷ Développer les produits (de la même façon que dans les réels).
- ▷ Simplifier, en remplaçant i^2 par -1.
- ▷ Regrouper toutes les parties réelles et imaginaires.

Exemple Produit dans $\mathbb{C}$

Soient $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + 2i$. Alors,

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (2-i)(-1+2i) \\
&= -2 + 4i + i - 2i^2 && \text{après développement du produit} \\
&= -2 + 4i + i + (-2)(-1) && \text{après remplacement de } i^2 \text{ par } -1 \\
&= -2 + 4i + i + 2 \\
&= 0 + 5i && \text{après regroupement des parties réelles et imaginaires} \\
&= 5i
\end{aligned}$$

Exercice 13.2

Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 5 - 6i$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ et $z_1\, z_2$.

Exercice 13.3

Déterminer la forme algébrique de $z = i(2+3i)$.

3 Conjugué d'un nombre complexe

Tout nombre complexe admet un conjugué défini comme ci-dessous. On verra que son utilisation peut être très utile dans les calculs avec les nombres complexes.

DÉFINITION : *Conjugué*

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le complexe $\overline{z}$ défini par

$$\overline{z} = x - iy$$

REMARQUES

D'après la définition,

- ▷ un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- ▷ un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

EXEMPLES

- ▷ Pour $z = 1 + i$, on a $\overline{z} = 1 - i$.
- ▷ Le complexe $z = -2$ est réel, donc $\overline{z} = z = -2$.
- ▷ Le complexe $z = i$ est imaginaire pur et $\overline{z} = -i$, donc $\overline{z} = -z$.

EXERCICE 13.4

Déterminer les conjugués des nombres complexes $z_1 = 1 + 5i$ et $z_2 = 3 - 2i$.

PROPRIÉTÉS

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

- ▷ $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- ▷ $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- ▷ $\overline{\overline{z}} = z$
- ▷ $z\,\overline{z} = \mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2 \in \mathbb{R}$

Exemple

Montrons la première propriété : $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$.
On a $z = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z)$, donc $\overline{z} = \mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z)$. On en déduit

$$z + \overline{z} = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z) + \mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z) = 2\mathcal{R}e(z)$$

Ce qui montre le résultat.

Exercice 13.5

Montrer les trois autres propriétés.

Propriétés

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- ▷ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- ▷ $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
- ▷ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *pour* $z_2 \neq 0$.

Autrement dit, le conjugué d'une somme (resp. produit et quotient) est la somme (resp. produit et quotient) des conjugués.

Exercice 13.6

Montrer la propriété $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Le nombre complexe conjugué est principalement utilisé pour le calcul d'un quotient sous forme algébrique tel que détaillé dans la méthode suivante :

Méthode : *Forme algébrique d'un quotient*

Soient w et z deux nombres complexes.
Pour déterminer la forme algébrique du quotient $\dfrac{w}{z}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$$\frac{w}{z} = \frac{w\,\overline{z}}{z\,\overline{z}}$$

On en déduit la forme algébrique du quotient $\dfrac{w}{z}$ car $z\,\overline{z} \in \mathbb{R}$.

Exemple

Déterminons la forme algébrique du complexe $\dfrac{1-2i}{1+i}$.
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$$\frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i-2i-2}{1+1} = \frac{-1-3i}{2}$$

En particulier, on a

$$\mathcal{R}e\left(\frac{1-2i}{1+i}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m\left(\frac{1-2i}{1+i}\right) = -\frac{3}{2}$$

Exercice 13.7

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \dfrac{1+i}{2+3i}$ **2)** $z_2 = \dfrac{1}{1-2i}$ **3)** $z_3 = i\,\dfrac{1-i}{2-i}$

4 Équation du second degré à coefficients réels

Comme dit précédemment, les nombres complexes permettent de définir des solutions aux équations de second degré lorsque le discriminant est négatif. On donne ci-dessous le résultat général concernant les équations du second degré (reprenant notamment le résultat partiel vu au chapitre 3).

Théorème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme de second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$.

▷ *Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles qui sont*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

▷ *Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une unique racine réelle (dite double) :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

▷ *Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet deux racines complexes conjuguées qui sont*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$$

Remarques

▷ Lorsque $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ et donc $\sqrt{-\Delta}$ est bien définie.

▷ Dans le cas où le discriminant est négatif, on note les racines de P par la lettre z pour mettre en évidence le fait que celles-ci sont complexes. De plus, on écrit alors $P(z)$ au lieu de $P(x)$, ainsi la factorisation de $P(z)$ lorsque $\Delta < 0$ s'écrit plutôt

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Démonstration. La démonstration a déjà été faite dans le cas $\Delta \geq 0$, on ne montre donc que le cas où $\Delta < 0$.

On rappelle (voir chapitre 3) que le polynôme P s'écrit sous forme canonique :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$$

Supposons $\Delta < 0$. Alors, $-\Delta > 0$ et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$.

On en déduit

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = a(x-z_1)(x-z_2) \end{aligned}$$

On obtient ainsi la factorisation de $P(x)$. De plus, on en déduit alors que $P(x)=0$ si et seulement si $x=z_1$ ou $x=z_2$, ce qui donne le résultat. □

Exemple

On considère l'équation

$$3z^2-3z+1=0$$

La discriminant du polynôme $3z^2-3z+1$ est $\Delta = 9-12=-3$.
Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{3-i\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$$

que l'on peut noter plus simplement sous la forme suivante :

$$z_{1,2} = \frac{3\pm i\sqrt{3}}{6}$$

Exercice 13.8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2+z+1=0$ **2)** $z^2+4=0$

Exercice 13.9

À quelles conditions sur $k\in\mathbb{R}$, l'équation $z^2+kz+1=0$ admet deux solutions complexes non réelles ? Déterminer alors ces solutions.

5 Module et arguments d'un nombre complexe

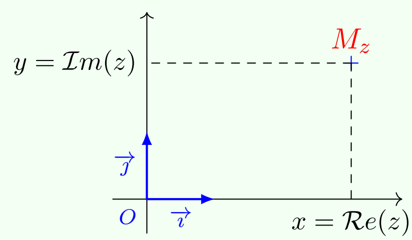
On représente graphiquement l'ensemble des nombres réels par une droite graduée (appelée la *droite des réels*). L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est quant à lui représenté par un plan orthonormé appelé le *plan complexe*.

Dans toute la suite, on suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orienté dans le sens trigonométrique (on dit alors que le repère est **direct**).

DÉFINITION : *Plan complexe*

- ▷ Soit $M(x;y)$ un point du plan.
  On dit que le nombre complexe $z = x + iy$, où $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$, est l'**affixe** de M. De même, z est aussi appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le point M est alors noté M_z.
- ▷ Réciproquement, tout nombre complexe $z = x + iy$ est représenté dans le plan par le point $M_z(x;y)$ appelé l'**image** de $z = x + iy$.

Cette identification des complexes avec des points du plan est appelée le **plan complexe**.



Lorsque l'on représente un nombre complexe $z = x + iy$ par le point $M_z(x;y)$ du plan, la longueur OM_z est donnée par $OM_z = \sqrt{x^2+y^2}$, on l'appelle alors le module de z.

DÉFINITION : *Module d'un nombre complexe*

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, où $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$.
Le **module** de z est le réel

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarques

- ▷ Pour x et y deux réels, on a toujours $x^2 + y^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2+y^2}$ est bien défini.
- ▷ Si z est un réel, $z = x$, on a $|z| = \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x|$. Autrement dit, le module d'un réel est sa valeur absolue, ce qui justifie que ces deux notions aient la même notation $|\cdot|$.

Exemples

- ▷ Pour $z = 1 + i$, on a $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
- ▷ Pour $z = -2 = -2 + 0i$, on a $|z| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$.
- ▷ Pour $z = i = 0 + i$, on a $|z| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$.

Exercice 13.10

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2 + 3i$ **2)** $z_2 = 4 - 3i$ **3)** $z_3 = -2i$

Propriétés

Pour tout nombre complexe z, on a

- ▷ $|z| = |\overline{z}|$
- ▷ $|-z| = |z|$
- ▷ $z\,\overline{z} = |z|^2$
- ▷ $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- ▷ *pour z_2 non nul,* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Exemple

Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2 + i$. Alors, on a

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad |z_2| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

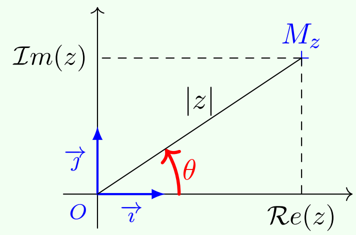
donc

$$|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2| = \sqrt{10}$$

Définition : *Argument d'un nombre complexe*

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et M_z son image dans le plan.
On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure θ en radians de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_z})$

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



Par convention, le nombre complexe $z = 0$ n'a pas d'argument.

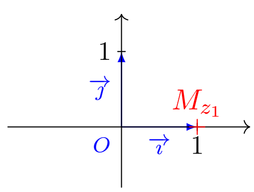
Exemples

Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = -1$$

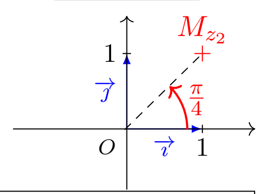
À partir de leur image dans le plan, il est possible de déduire leurs arguments :

$\boxed{z_1 = 1}$



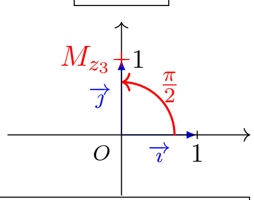
$\boxed{\arg(z_1) = 0 + 2k\pi}$

$\boxed{z_2 = 1 + i}$



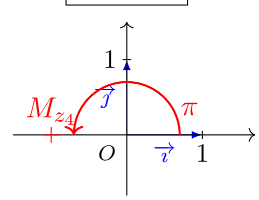
$\boxed{\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$

$\boxed{z_3 = i}$



$\boxed{\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\boxed{z_4 = -1}$



$\boxed{\arg(z_4) = \pi + 2k\pi}$

D'après la représentation graphique précédente, on déduit que l'on a

$$\mathcal{R}e(z) = |z|\cos\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(z) = |z|\sin\theta$$

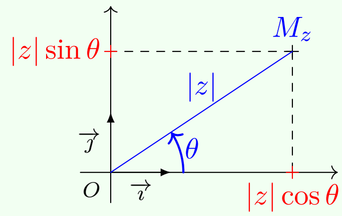
Ce qui amène à la définition suivante :

Définition : *Forme trigonométrique d'un nombre complexe*

Soient $z \in \mathbb{C}$ non nul et θ un argument de z. Alors,

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

C'est la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Remarque

La position du point M_z dans le plan peut-être obtenue à l'aide simplement du module $|z|$ et d'un argument θ. Le couple $(|z|, \theta)$ est appelé les **coordonnées polaires** de z.

Méthode : *Calculer un argument d'un nombre complexe z*

1. Vérifier que $z \neq 0$.
2. Déterminer sa forme algébrique $z = a + ib$.
3. Calculer son module $|z|$.
4. Trouver un angle θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

Exemples

▷ Soient $z_1 = 1$ et θ_1 un argument de z_1. On a $|z_1| = 1$, donc

$$\begin{cases} \cos\theta_1 &= 1 \\ \sin\theta_1 &= 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \theta_1 = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▷ Soient $z_2 = 1 + i$ et θ_2 une argument de z_2. On a $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Ainsi, $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ et donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta_2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▷ Soient $z_3 = i$ et θ_3 un argument de z_3. On a $|z_3| = 1$, donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta_3 & = & 0 \\ \sin\theta_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▷ Soient $z_4 = -1$ et θ_4 un argument de z_4. On a $|z_4| = 1$, donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta_4 & = & -1 \\ \sin\theta_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \theta_4 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 13.11

Donner les formes trigonométriques des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -i$ **2)** $z_2 = 1 - i$ **3)** $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$

Propriété

Soit z un complexe non nul d'argument θ.
Alors, son conjugué $\overline{z}$ a pour module $|z|$ et pour argument $-\theta$.

Démonstration. On a $z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta)$.

Puisque $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, on en déduit

$$\overline{z} = |z|(\cos\theta - i\,\sin\theta) = |z|\left(\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)\right)$$

ce qui donne le résultat. □

6 Notation exponentielle

Soient deux nombres complexes :

$$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \quad \text{et} \quad z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

Ainsi, un argument du produit $z_1 z_2$ est la somme des arguments de z_1 et z_2. Autrement dit, « l'argument transforme un produit en une somme ».

Cette propriété est la même que la propriété essentielle de l'exponentielle. Cela amène à la définition suivante :

Définition : *Forme exponentielle d'un nombre complexe*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

qui se lit « e puissance $i\theta$ ».
Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul et θ un de ses arguments, alors

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

C'est la **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Remarque

On peut aussi utiliser l'autre notation de l'exponentielle :

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

Exemple

Reprenons les nombres complexes $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = i$, $z_4 = -1$. Pour chacun de ces nombres, le module et un argument ont déjà été calculés dans l'exemple précédent. Ainsi,

- ▷ $z_1 = |z_1|\exp(i\theta_1) = \mathrm{e}^{i0}$
- ▷ $z_2 = |z_2|\exp(i\theta_2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
- ▷ $z_3 = |z_3|\exp(i\theta_3) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
- ▷ $z_4 = |z_4|\exp(i\theta_4) = \mathrm{e}^{i\pi}$

Exercice 13.12

Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$. Déterminer la forme exponentielle de z.

D'après le résultat donné en début de section, on a la propriété essentielle suivante (et ses conséquences) :

Propriétés

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{e}^{i\theta_1}\,\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

En particulier, si on a $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ non nuls, alors

$$z_1\,z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \textit{et} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a la **formule de Moivre :**

$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

Exercice 13.13

1) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes

$$z_1 = -i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

2) En déduire la forme exponentielle des nombres complexes

$$w_1 = z_1\,z_2 \quad \text{et} \quad w_2 = z_3^4$$

Exercice 13.14

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on

$$|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

PROPRIÉTÉS : *Formules d'Euler*

Soit θ un réel. On a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

EXEMPLE LINÉARISATION D'UN COSINUS

Linéarisons $\cos^2\theta$, c'est-à-dire exprimons $\cos^2\theta$ à l'aide de $\cos(2\theta)$. On a

$$\begin{aligned} \cos^2\theta = (\cos\theta)^2 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^{i\theta})^2 + 2\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} + (\mathrm{e}^{-i\theta})^2\right) \end{aligned}$$

Or, d'après les formules de Moivre $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$ et $(\mathrm{e}^{-i\theta})^2 = \mathrm{e}^{-2i\theta}$. De plus, $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{i2\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-i2\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta}}{2} + 1\right) \\ &= \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 13.15

Reprendre la démarche de l'exemple pour écrire $\sin^2\theta$ en fonction de $\cos 2\theta$.

7 Correction des exercices du cours

CORRIGÉ EXERCICE 13.1

1) On a $\mathcal{R}e(z_1) = -3$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 0$. On remarque que z_1 est un nombre réel.

2) On a $\mathcal{R}e(z_1) = 0$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 2$. Le nombre z_2 est un nombre imaginaire pur.

3) On a $\mathcal{R}e(z_3) = 4$ et $\mathcal{I}m(z_3) = -3$.

4) On a $\mathcal{R}e(z_4) = -5$ et $\mathcal{I}m(z_4) = 2$.

Corrigé Exercice 13.2

- $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 5 - 6i = 7 - 3i$
- $z_1 - z_2 = 2 + 3i - (5 - 6i) = -3 + 9i$
- $z_1\, z_2 = (2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

Corrigé Exercice 13.3

On a $z = i(2 + 3i) = 2i + 3i^2 = -3 + 2i$.

Corrigé Exercice 13.4

On a $\overline{z_1} = 1 - 5i$ et $\overline{z_2} = 3 + 2i$.

Corrigé Exercice 13.5

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

- On a $z - \overline{z} = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z) - (\mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z)) = 2i\mathcal{I}m(z)$, d'où $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- On a $\overline{\overline{z}} = \overline{\mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z)} = \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z) = z$.
- On a

$$\begin{aligned} z\,\overline{z} &= (\mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z))(\mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z)) \\ &= \mathcal{R}e(z)^2 - i\mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z) + i\mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z) - i^2\mathcal{I}m(z) \\ &= \mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2 \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 13.6

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.
On a
$$z_1 + z_2 = \mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2) + i\,(\mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2))$$

D'où

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= \mathcal{R}e(z_1)+\mathcal{R}e(z_2)-i\left(\mathcal{I}m(z_1)+\mathcal{I}m(z_2)\right)\\ &= \mathcal{R}e(z_1)-i\mathcal{I}m(z_1)+\mathcal{R}e(z_2)-i\mathcal{I}m(z_2)\\ &= \overline{z_1}+\overline{z_2}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 13.7

On a :

- $z_1 = \dfrac{1+i}{2+3i}\dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{2-3i+2i-3i^2}{2^2+3^2} = \dfrac{5-i}{13}$
- $z_2 = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1}{1-2i}\dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{1+2i}{1+2^2} = \dfrac{1+2i}{5}$
- $z_3 = i\dfrac{1-i}{2-i} = i\dfrac{(1-i)(2+i)}{4+1} = i\dfrac{2+i-2i+1}{5} = i\dfrac{3-i}{5} = \dfrac{1+3i}{5}$

Corrigé Exercice 13.8

1) L'équation $z^2+z+1=0$ admet pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ qui est strictement négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

2) L'équation $z^2+4=0$ admet pour discriminant $\Delta = -16 < 0$ qui est strictement négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_{1,2} = \frac{\pm i\sqrt{16}}{2} = \pm 2i$$

Corrigé Exercice 13.9

L'équation $z^2+kz+1=0$ a pour discriminant $\Delta = k^2-4$.
Ainsi, ce discriminant est négatif si et seulement si $k^2-4<0$, c'est-à-dire si et seulement si $-2<k<2$.

Dans ce cas, pour tout $k \in \,]-2;2[$, les solutions de $z^2 + kz + 1 = 0$ sont

$$z_{1,2} = \frac{-k \pm i\sqrt{4-k^2}}{2}$$

Corrigé Exercice 13.10

On a :

- ▷ $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- ▷ $|z_2| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$
- ▷ $|z_3| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

Corrigé Exercice 13.11

1) $z_1 = -i = 0 - 1\,i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Pour $z_2 = 1 - i$, on a $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

3) Pour $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$, on a $|z_3| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Ainsi,

$$z_3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Corrigé Exercice 13.12

On a

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

Corrigé Exercice 13.13

1) On a :

- ▷ $z_1 = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
- ▷ $|z_2| = 2$ donc $z_2 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
- ▷ $|z_3| = 2$ donc $z_3 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$

2) En utilisant les formes exponentielles de z_1, z_2 et z_3, on déduit

$$w_1 = z_1\,z_2 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\;2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{6}} = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$$

et

$$w_2 = z_3^4 = \left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = 2^4\,\mathrm{e}^{i3\pi} = -16$$

Corrigé Exercice 13.14

On utilise les propriétés trigonométriques :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

On en déduit

- ▷ $|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$
- ▷ $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta}$

  De plus, on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}\,\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,|^2} = \mathrm{e}^{-i\theta}$$

Corrigé Exercice 13.15

Exprimons $\sin^2\theta$ à l'aide de $\cos(2\theta)$. On a

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= (\sin\theta)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{i2\theta} - 2\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta})\\ &= -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta} - 2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{i2\theta} + \mathrm{e}^{-i2\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\end{aligned}$$

8 Exercices

Exercice 13.16

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = (5+2i)(2+3i)$

2) $z_2 = \dfrac{1}{2+i}$

3) $z_3 = \dfrac{9+2i}{2i}$

4) $z_4 = \dfrac{5+i}{2i} + \dfrac{3-2i}{1-2i}$

5) $z_5 = \dfrac{1}{i} - \dfrac{2}{(3-i)^2}$

Exercice 13.17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1) $z^2 - z + 1 = 0$

2) $z^2 + 9 = 0$

3) $z^2 + 6z + 25 = 0$

4) $iz^2 + 4z - 5i = 0$

Exercice 13.18

On pose

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

1) Déterminer le module et un argument de z_1, puis écrire z_1 sous forme trigonométrique.

2) Écrire z_2 sous forme algébrique.

Exercice 13.19

Déterminer la forme algébrique et le module des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i0}$

2) $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{-i\pi}$

3) $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 13.20

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

2) $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

3) $z_3 = 3 - 3i$

4) $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$

5) $z_5 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,i$

6) $z_6 = 3 + 3\sqrt{3}i - 3i + 3\sqrt{3}$

Exercice 13.21

Soit $z = \dfrac{2+2i}{1-i}$. Déterminer

1) sa partie réelle,

2) sa partie imaginaire,

3) son module,

4) sa forme exponentielle.

En déduire une simplification de z^5.

Exercice 13.22

Simplifier $z = \left(\dfrac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}{-2+i}\right)^3$.

Exercice 13.23

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes.
Montrer la propriété suivante :

$$\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Exercice 13.24

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes donnés sous forme algébrique.

1) Calculer $|z_1 z_2|^2$, $|z_1|^2$ et $|z_2|^2$.

2) Vérifier que $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.

CHAPITRE 14

La fonction logarithme

La fonction logarithme est la dernière fonction usuelle à connaître dans ce cours. Elle se définit à partir de la fonction exponentielle. Le chapitre débute avec la notion de fonction bijective et de fonction réciproque associée. On montre ensuite que la fonction exponentielle est bijective et sa réciproque est appelée la fonction logarithme. La suite du chapitre est construite comme celui de la fonction exponentielle : on donne les propriétés fondamentales du logarithme, l'étude de la fonction logarithme, ses limites remarquables et on montre comment résoudre des équations et inéquations faisant intervenir un logarithme. Enfin, on termine en présentant les notions de puissances réelles et le logarithme décimal.

Sommaire

1 Fonctions bijectives et fonctions réciproques

Afin de définir la fonction logarithme, on introduit tout d'abord la notion de fonction bijective et de fonction réciproque associée.

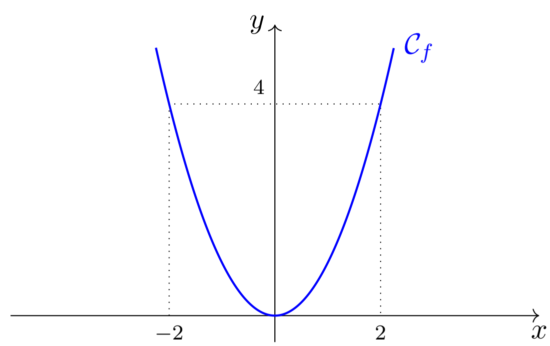
DÉFINITION : *Fonction bijective ou bijection*

Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction définie sur E.
La fonction f est dite **bijective** (ou f est une **bijection**) de E sur F si

tout élément $y \in F$ possède un **unique** antécédent $x \in E$ par f.

EXEMPLE

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative



- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, $y = 4$ possède deux antécédents : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$.
- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$. En effet, $y = -1$ ne possède pas d'antécédent car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = x^2$: il s'agit de l'élément $x = \sqrt{y}$.

De façon plus générale, le théorème ci-dessous donne une condition suffisante simple pour montrer qu'une fonction est une bijection.

THÉORÈME : *Théorème de la bijection*

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
Alors, f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

On a alors la méthode suivante pour montrer qu'une fonction est bijective.

MÉTHODE : *Montrer qu'une fonction est bijective*

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue

- ▷ Construire le tableau de variations de f.
- ▷ Montrer que f est strictement monotone sur I (soit strictement croissante, soit strictement décroissante).
- ▷ On détermine l'image $J := f(I)$ via le tableau de variations.

EXEMPLES

- ▷ Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x^3 + 2x$.
  Montrons que f est une bijection de $[-2; 2]$ sur un intervalle à déterminer.
  La fonction f est un polynôme donc est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue et dérivable. On a

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

  On en déduit que le tableau de variations de f sur $[-2; 2]$ est

x	-2		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-12	$\nearrow$	12

  car $f(-2) = (-2)^3 - 4 = -12$ et $f(2) = 2^3 + 4 = 12$.
  Puisque f est strictement croissante et continue sur $[-2; 2]$, f est une bijection de $[-2; 2]$ sur $f([-2; 2]) = [-12; 12]$ (d'après le tableau de variations).
- ▷ On reprend la fonction

  $$f : x \mapsto x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}$$

  étudiée dans un exemple précédent.

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\frac{50}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et donc il n'est pas possible d'appliquer le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}$ tout entier. Néanmoins, celui-ci peut s'appliquer sur chaque intervalle où f est strictement monotone. On obtient :

- ⋆ f est une bijection de $]-\infty;-2]$ sur $f(\,]-\infty;-2]) = \left]-\infty;\frac{9}{2}\right]$;
- ⋆ f est une bijection de $\left[-2;\frac{1}{3}\right]$ sur $f\left(\left[-2;\frac{1}{3}\right]\right) = \left[-\frac{50}{27};\frac{9}{2}\right]$ $\Big($**attention** $-\frac{50}{27} < \frac{9}{2}$ donc l'intervalle image est bien $\left[-\frac{50}{27};\frac{9}{2}\right]\Big)$;
- ⋆ f est une bijection de $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ sur $f\left(\left[\frac{1}{3};+\infty\right[\right) = \left[-\frac{50}{27};+\infty\right[$.

EXERCICE 14.1

1) La fonction f suivante est-elle bijective ?

$$f: \begin{array}{rcl} [0;\pi] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

2) La fonction g suivante est-elle bijective ?

$$g: \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

DÉFINITION : *Fonction réciproque*

Soit f une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F.
On appelle **fonction réciproque de** f l'application notée f^{-1} définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$$

La définition précédente entraîne immédiatement le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ

Soit f une bijection d'un ensemble E sur un ensemble F.
Alors, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \textit{et} \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

REMARQUE

On donne ci-dessous une illustration du résultat précédent.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Par exemple, le schéma montre que $f(x) = y$, puis que $f^{-1}(y) = x$ d'où $f^{-1} \circ f(x) = x$.

EXEMPLE

On a vu que la fonction $f : x \mapsto x^2$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

Donc la bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$.

EXERCICE 14.2

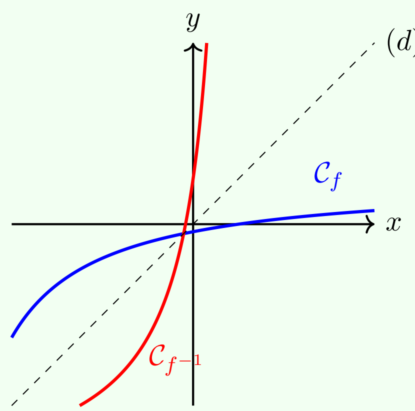
Montrer que les fonctions ci-dessous sont des bijections de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on déterminera et déterminer leurs réciproques.

1) $f_1 : x \mapsto x^3$

2) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$

PROPOSITION

Si f et f^{-1} sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre, alors leurs courbes représentatives dans un plan muni d'un repère orthonormé sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite (d) d'équation $y = x$.



2 Définition de la fonction logarithme

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$ et ainsi admet une réciproque définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est cette fonction réciproque qui est définie comme étant le logarithme.

DÉFINITION

On appelle fonction **logarithme néperien** [1], notée ln, la fonction réciproque de la fonction exponentielle sur $]0;+\infty[$. Le fonction logarithme néperien est donc définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
De plus, on a les équivalences suivantes :

$$y = \mathrm{e}^x \quad \text{avec } x \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \ln y \quad \text{avec } y \in \ ]0;+\infty[$$

Remarque

Dans la suite, on parlera simplement de « logarithme », bien qu'il s'agisse du logarithme népérien.

D'après la définition du logarithme, on a les résultats suivants :

Propriétés : *Conséquences directes*

- ▷ *Pour tout* $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$
- ▷ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
- ▷ $\ln(1) = \ln(\mathrm{e}^0) = 0$
- ▷ $\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}^1) = 1$

3 Propriétés du logarithme

Dans cette partie, on donne les propriétés essentielles du logarithme.

Propriété

Pour tous réels a et b, on a la relation fondamentale suivante :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration. D'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle, on a :

$$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a}\,\mathrm{e}^{\ln b} = ab.$$

Donc $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$.

Or, on sait que $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$ si et seulement si $x = y$, d'où $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. □

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel. Alors,

▷ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ ▷ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ ▷ $\ln(a^n) = n \ln a$

1. John Neper (1550-1617) était un mathématicien écossais à l'origine des logarithmes, en 1614. Il a introduit cette fonction afin de simplifier des calculs fastidieux appliqués à l'astronomie.

Démonstration. Pour tout $a > 0$, on a

$$0 = \ln(1) = \ln\left(a\,\frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

On en déduit $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

Les autres propriétés se démontrent de la même manière. $\square$

REMARQUE

On dit que le logarithme transforme :

- ▷ les produits en sommes,
- ▷ les quotients en différences,
- ▷ les puissances en multiplications.

EXEMPLES

On peut simplifier les expressions suivantes :

- ▷ $\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = \ln(2^2) + \ln 3 = 2\ln 2 + \ln 3$
- ▷ $\ln\left(\frac{192}{108}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln 16 - \ln 9 = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln 2 - 2\ln 3$
- ▷ $\ln(3x) + \ln(2x+1) = \ln[3x(2x+1)] = \ln(6x^2 + 3x)$
- ▷ $\ln(3x) - \ln(2x+1) = \ln\left(\frac{3x}{2x+1}\right)$

EXERCICE 14.3

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{8}{25}\right)$

2) $B = \mathrm{e}^{\ln 5}$

3) $C = \ln \mathrm{e} - \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

4) $D = \ln(\mathrm{e}^2) + \ln \mathrm{e}$

5) $E = (\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e}$

4 Étude de la fonction logarithme

Comme pour les précédentes fonctions usuelles, il est important de connaître l'étude précise de la fonction logarithme.

On donne tout d'abord le résultat auxiliaire suivant :

Lemme : *Dérivée d'une réciproque*

Soit f une fonction bijective définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose $J = f(I)$.
Si f' ne s'annule pas sur I alors, pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ce lemme se montre en utilisant la formule de dérivée d'une composée et en utilisant l'égalité $f^{-1}(f(y)) = y$ pour tout $y \in J$.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème : *Étude de la fonction logarithme*

1) *La fonction logarithme est définie et dérivable sur* $]0;+\infty[$.

2) *Ses limites aux bornes de* $]0;+\infty[$ *sont*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

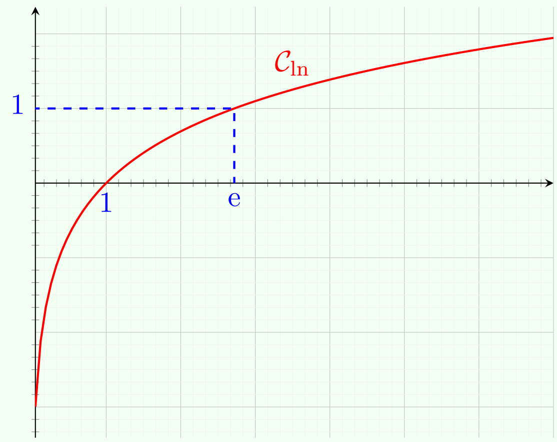
3) *Sa dérivée est*

$$\forall\ x \in\ ]0;+\infty[\ , \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

4) *Son tableau de variations est*

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln' x$	$+$
$\ln x$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

5) *Sa courbe représentative est donnée ci-après*



Démonstration. Le domaine de définition de ln et les limites aux bornes de son domaine de définition sont des conséquences directes du fait que ln est la réciproque de l'exponentielle définie de $]-\infty; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

Pour la dérivée, on applique le lemme précédent. On obtient

$$\forall\ y \in\ ]0; +\infty[\ , \quad \ln' y = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Ce qui donne le résultat. □

Comme toute fonction usuelle, la fonction logarithme apparaît généralement dans des fonctions composées. En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on a alors le résultat suivant :

Proposition

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et strictement positive sur I.
Alors, la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée

$$\ln(u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples

- ▷ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + 2x^2)$.
  Le polynôme u défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = 1 + 2x^2$ est dérivable et strictement positif sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u' : x \mapsto 4x$.

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x}{1+2x^2}$$

▷ La fonction $g : x \mapsto \ln(x-2)$ est définie lorsque $x - 2 > 0$, donc sur $]2;+\infty[$. De plus, elle est dérivable sur $]2;+\infty[$ et $g' : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$.

Exercice 14.4

Déterminer les domaines de définition et les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \ln(x+3)$ **2)** $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ **3)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$

5 Croissance comparée

Comme dans le cas de l'exponentielle, la croissance comparée permet de déterminer des limites de formes indéterminées faisant intervenir le logarithme et des fonctions puissance. Puisque le logarithme croit moins vite que toute fonction puissance, on dit que « les puissances l'emportent sur le logarithme » et on obtient le résultat ci-dessous.

Proposition

On a les limites classiques suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0$

Exemple

On veut déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto 2x - \ln x$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, $2x$ tend vers $+\infty$ tout comme $\ln x$. On a donc une forme indéterminée, qui sera levée en utilisant les croissances comparées établies auparavant.

Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Une autre limite remarquable à connaître concernant le logarithme est la suivante :

PROPOSITION

On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Démonstration. La fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable en 0 car ln est dérivable en 1. De plus, $\ln 1 = 0$. On en déduit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(0+1)}{x-0} = f'(0) = \ln'(1) = 1$$

Ce qui donne le résultat. □

EXERCICE 14.5

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - x}{x}$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

EXERCICE 14.6

Réaliser une étude complète de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x - 1 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

6 Équations et inéquations logarithmiques

Comme dans le cas de l'exponentielle, on va voir comment résoudre des équations et inéquations faisant intervenir un logarithme.

Proposition

Pour tous réels strictement positifs u et v, puisque $\ln$ est une fonction strictement croissante, on a les résultats suivants :

- ▷ $\ln u = \ln v$ *si et seulement si* $u = v$.
- ▷ $\ln u \geq \ln v$ *si et seulement si* $u \geq v$.

De plus,

- ▷ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *l'équation* $\ln u = \lambda$ *a pour unique solution* $u = \mathrm{e}^{\lambda}$.
- ▷ $\ln u < 0$ *si et seulement si* $u \in \left]0;1\right[$.
- ▷ $\ln u > 0$ *si et seulement si* $u \in \left]1;+\infty\right[$.

Exemples

- ▷ L'équation $2\ln x - \ln(x^3) = -5$ est équivalente à

$$\ln\left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-5})$$

qui est encore équivalente à

$$\frac{1}{x} = \mathrm{e}^{-5}$$

et donc a pour solution $x = \mathrm{e}^5$.

- ▷ Résolution de l'inéquation $\ln(x^2 - 4) > \ln(3x)$.
  - ⋆ L'inéquation a un sens si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$. Donc l'inéquation est définie sur l'ensemble $D = \left]2;+\infty\right[$.
  - ⋆ L'inéquation $\ln(x^2 - 4) > \ln(3x)$ est équivalente à $x^2 - 3x - 4 > 0$. Or le polynôme $x^2 - 3x - 4$ est positif sauf entre ses racines -1 et 4, c'est-à-dire sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]4;+\infty\right[$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\mathcal{S} = D \cap \left(\left]-\infty;-1\right[\cup \left]4;+\infty\right[\right) = \left]4;+\infty\right[$$

Exercice 14.7

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\ln x = 5$

2) $\ln x = \ln 5 + 3\ln 2$

3) $\ln(1-x) = 2$

4) $(\ln x)^2 + 5\ln x - 6 = 0$

5) $\ln(x^3) \leq 1$

6) $\ln(5-x) \geq 2\ln(x+1)$

7 Puissances réelles et logarithme décimal

On termine ce chapitre par la définition de puissances réelles d'un réel strictement positif, qui se définit grâce à l'exponentielle et le logarithme, et par la notion de logarithme décimal qui est très utilisée en physique et chimie.

D'après les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, pour tous $a \in \,]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $a^n = \exp(\ln(a^n)) = \exp(n\ln a)$. Cette dernière égalité ayant un sens pour tout n réel, on peut ainsi définir les puissances réelles de a.

Définition : *Puissance réelles*

Soient $a \in \,]0;+\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$.
On définit a **puissance** x, noté a^x, par

$$a^x = \mathrm{e}^{x\ln a} > 0$$

Dans ce cas, le réel x est appelé l'**exposant**.

Pour $a \in \,]0;+\infty[$ et $x, y \in \mathbb{R}$, puisque l'exponentielle transforme une somme en produit, on a

$$a^x\, a^y = \mathrm{e}^{x\ln a}\, \mathrm{e}^{y\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a + y\ln a} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} = a^{x+y}$$

On retrouve ainsi l'une des propriétés bien connues des puissances entières. De même, on montre les propriétés suivantes :

Propriétés

Soient $a, b \in \,]0;+\infty[$ *et* $x, y \in \mathbb{R}$. *On a*

- $a^x\, a^y = a^{x+y}$
- $a^x\, b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

EXERCICE 14.8

Montrer les propriétés précédentes.

REMARQUE : *La racine carrée*

Soit $a \in \ ]0;+\infty[$. Alors, on a

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a^1 = a$$

Donc $a^{\frac{1}{2}}$ est un nombre strictement positif tel que $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.
Autrement dit, $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de a : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
De même, la racine cubique est la puissance d'exposant $\frac{1}{3}$: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Comme pour le cas de puissances entières, la fonction puissance d'exposant réel est dérivable.

PROPOSITION

Soit $y \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^y$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est

$$x \mapsto y\, x^{y-1}$$

Démonstration. La dérivabilité de $f : x \mapsto x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$ est une conséquence de la dérivabilité de exp sur $\mathbb{R}$ et de ln sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \ ]0;+\infty[$, $f(x) = \exp\left(g(x)\right)$, où $g : x \mapsto y \ln x$. En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$\forall\, x \in \ ]0;+\infty[\ , \quad f'(x) = g'(x)\exp(g(x)) = \frac{y}{x}\exp(y \ln x) = y\, x^{-1} x^y = y\, x^{y-1}$$

Ce qui donne le résultat. □

REMARQUE

En particulier, en appliquant ce résultat à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on a obtient

$$f' : x \mapsto \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On retrouve ainsi la formule connue pour la dérivée de la racine carrée.

La fonction $x \mapsto 10^x = \mathrm{e}^{x \ln 10}$ a pour dérivée $x \mapsto \ln(10)\,10^x$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Ainsi, cette fonction est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Sa réciproque peut s'exprimer en fonction de ln et est donnée ci-dessous.

Définition : *Logarithme décimal*

On appelle **logarithme décimal**, noté log, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\forall\, x \in\ ]0;+\infty[\ , \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Les propriétés du logarithme décimal sont similaires à celles de la fonction ln. La relation fondamentale qui explique son intérêt en sciences est qu'elle est la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$, ce qui est donné ci-dessous :

Propriété

Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\log x = y \iff x = 10^y$$

ou encore

$$\log(10^y) = y$$

Exemples

- ▷ $\log(10) = 1$
- ▷ $\log(100) = \log(10^2) = 2$
- ▷ $\log(0.1) = \log\left(\dfrac{1}{10}\right) = -\log(10) = -1$

Les logarithmes décimaux sont très présents en physique quand il s'agit d'appréhender des quantités exprimées à l'aide de puissances de 10 (comme par exemple, les notations scientifiques). C'est ainsi qu'on les retrouve dans les calculs des pH, des décibels,... Par contre, son utilisation est moins fréquente en mathématiques où on lui préfère le logarithme népérien.

Exercice 14.9 Intérêts composés

Un capital, noté C_0, est placé pendant n années à un taux de 4%.

1) Quel est le montant du capital au bout de n années ?

2) En combien de temps ce capital est-il décuplé ?

8 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 14.1

1) On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Autrement dit, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet deux antécédents par la fonction f.
Donc la fonction f n'est pas bijective.

2) La fonction sin est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$ donc g est bijective.

Corrigé Exercice 14.2

1) ▷ La fonction $f_1 : x \mapsto x^3$ est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = 3x^2 \geq 0$$

Donc f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_1'(x) > 0$, f_1 est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. En 0, $f_1'(0) = 0$ donc on ne peut pas conclure directement.
Néanmoins, pour tout $x \in\ ]-\infty; 0[$, $x^3 < 0$ donc $f_1(x) < f_1(0)$ et, pour tout $x \in\ ]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f_1(x) > f_1(0)$.
Donc f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, f_1 est continue et $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \pm\infty$.
On en déduit que f_1 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

▷ Soient $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^3 = y$. Alors, $y = \sqrt[3]{x}$. Donc, on a

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f_1^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$

2) ▷ La fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables. On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f_2'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_2'(x) > 0$. Ainsi, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque f_2 est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc bijective.
De plus, on a

$$f_2(0) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi, le tableau de variations de f_2 est :

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	
$f_2(x)$	-1	$\nearrow$	1

On en déduit $f_2(\mathbb{R}_+) = [-1;1[$. Donc f_2 est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1;1[$.

▷ Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [-1;1[$ tels que $y = f_2(x)$. Alors, on a $\dfrac{x-1}{x+1} = y$, d'où $x - 1 = yx + y$ soit encore $x - xy = y + 1$. On en déduit $x = \dfrac{y+1}{1-y}$. D'où

$$\forall\, y \in [-1;1[\;, \quad f_2^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}$$

Corrigé Exercice 14.3

1) $A = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{8}{25}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{2} \times \dfrac{8}{25}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

2) $B = \mathrm{e}^{\ln(5)} = 5$

3) $C = \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln(\mathrm{e}) - (-\ln(\mathrm{e})) = 2\ln(\mathrm{e}) = 2$

4) $D = \ln(\mathrm{e}^2) + \ln(\mathrm{e}) = 2\ln(\mathrm{e}) + \ln(\mathrm{e}) = 3\ln(\mathrm{e}) = 3$

5) $E = (\ln(\mathrm{e}))^2 + \ln(\mathrm{e}) = 1^2 + 1 = 2$

En particulier, $D - E = 1$ donc $\ln(\mathrm{e}^2) - (\ln(\mathrm{e}))^2 \neq 0$ d'où $\ln(\mathrm{e}^2) \neq (\ln(\mathrm{e}))^2$.

Corrigé Exercice 14.4

1) On a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3>0\} = \,]-3;+\infty[$ et

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{1}{x+3}$$

2) On a $\mathcal{D}_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{x} > 0\right\}$.

On fait le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

On en déduit $\mathcal{D}_g = \,]-\infty;-1[\, \cup \,]0;+\infty[$.

On a $g : x \mapsto \ln(u(x))$ où $u : x \mapsto \frac{x+1}{x}$.

Puisque $u' : x \mapsto \frac{x-x-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ donc

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_g, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x^2}\,\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

3) On a

$$\mathcal{D}_h = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln x \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \neq 1\right\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

De plus, $h = v \circ u$, où $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $u : x \mapsto \ln x$. On en déduit

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_h, \quad h'(x) = u'(x)\, v'(u(x)) = \frac{1}{x}\,\frac{-1}{u(x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

Corrigé Exercice 14.5

1) On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0^-$.

2) Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\ln x - x}{x} = \frac{x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)}{x} = \frac{\ln x}{x} - 1$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on en déduit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - x}{x} = -1$$

3) Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = \frac{\ln\left(x\left(3 + \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{\ln x + \ln\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(3 + \frac{1}{x}\right) = \ln(3)$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x} = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

CORRIGÉ EXERCICE 14.6

1) On a

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ et } \frac{x-2}{x+2} > 0\right\}$$

On fait le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'où $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$.

2) Les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ sont

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car

  $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x+2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-4}{x+2} = +\infty$

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x+2} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

- $\triangleright$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car

  $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$

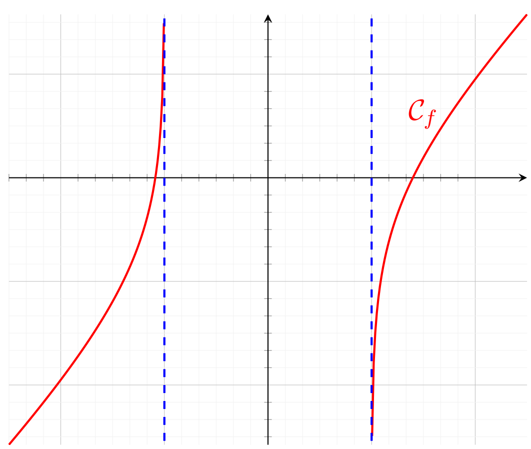
3) La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car elle est la composée, le quotient et la somme de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)/(x+2)} \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

4) On en déduit que l'on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ … -2	-2 … 2	2 … $+\infty$
x^2	$+$	(hachuré)	$+$
$x-2$	$-$	(hachuré)	$+$
$x+2$	$-$	(hachuré)	$+$
$f'(x)$	$+$	(hachuré)	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	(hachuré)	$-\infty \nearrow +\infty$

5) La courbe représentative de f est donnée ci-dessous



Corrigé Exercice 14.7

1) On a $\ln x = 5$ si et seulement si $x = \mathrm{e}^5$.

2) On a $\ln 5 + 3\ln 2 = \ln(5 \cdot 2^3) = \ln(40)$. Ainsi l'équation $\ln x = \ln 5 + 3\ln 2$ est équivalente à l'équation $\ln x = \ln(40)$. On en déduit que l'unique solution est $x = 40$.

3) L'équation $\ln(1-x) = 2$ n'a de sens que si $1 - x > 0$ et est équivalente à $1 - x = \mathrm{e}^2$ qui est bien positif. L'unique solution est donc $x = 1 - \mathrm{e}^2$.

4) On pose $y = \ln x$. L'équation $(\ln x)^2 + 5\ln x - 6 = 0$ devient alors $y^2 + 5y - 6 = 0$.
Cette équation a pour solutions

$$y_1 = -6 \quad \text{et} \quad y_2 = 1$$

Or on a

- ▷ $\ln x = y_1 = -6$ donne $x = \mathrm{e}^{-6}$,
- ▷ $\ln x = y_2 = 1$ donne $x = \mathrm{e}$.

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\mathrm{e}; \mathrm{e}^{-6}\}$.

5) L'inéquation $\ln(x^3) \leq 1$ n'a de sens que si $x^3 > 0$, c'est-à-dire si $x > 0$, et est équivalente à $\ln(x^3) \leq \ln(\mathrm{e})$, d'où $x^3 \leq \mathrm{e}$, ce qui donne $x \leq \sqrt[3]{\mathrm{e}}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]0; \sqrt[3]{\mathrm{e}}\right]$.

6) L'inéquation $\ln(5-x) \geq 2\ln(x+1)$ n'a de sens que si $5 - x > 0$ et $x + 1 > 0$. Donc on a $x \in \left]-1; 5\right[$.
L'inéquation est équivalente à $\ln(5-x) \geq \ln\left((x+1)^2\right)$, d'où $5 - x \geq (x+1)^2$.
On aboutit alors à une inéquation du second degré qui s'écrit encore $x^2 + 3x - 4 \leq 0$. Or l'ensemble des solutions de cette dernière inéquation est $[-4; 1]$.
Puisque les solutions de $\ln(5-x) \geq 2\ln(x+1)$ doivent vérifier $x \in \left]-1; 5\right[$, on obtient que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = [-4; 1] \cap \left]-1; 5\right[\; = \; \left]-1; 1\right]$$

Corrigé Exercice 14.8

- ▷ La première propriété a déjà été démontrée.
- ▷ $a^x\, b^x = \mathrm{e}^{x \ln a}\; \mathrm{e}^{x \ln b} = \mathrm{e}^{x(\ln a + \ln b)} = \mathrm{e}^{x \ln(ab)} = (ab)^x$
- ▷ $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}$

- ▷ $a^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x\ln a}} = \dfrac{1}{a^x}$
- ▷ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) = \exp\left(x\ln a - x\ln b\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln a}}{\mathrm{e}^{x\ln b}} = \dfrac{a^x}{b^x}$
- ▷ $\dfrac{a^x}{a^y} = a^x\,\dfrac{1}{a^y} = a^x\,a^{-y} = a^{x-y}$

CORRIGÉ EXERCICE 14.9

1) Après un an on aura : $C_1 = C_0 + 0,04C_0 = 1,04C_0$.
Après deux ans on aura : $C_2 = C_1 + 0,04C_1 = 1,04C_1 = (1,04)^2C_0$.
Si on continue avec le même raisonnement après n années, on aura

$$C_n = 1,04C_{n-1} = (1,04)^nC_0$$

2) On veut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_n = 10C_0$. Or :

$$\begin{aligned} C_n = 10C_0 \quad &\iff \quad (1,04)^nC_0 = 10C_0 \quad \iff \quad (1,04)^n = 10 \\ &\iff \quad \log((1,04)^n) = \log(10) = 1 \quad \iff \quad n\log(1,04) = 1 \\ &\iff \quad n = \frac{1}{\log(1,04)} \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{\log(1,04)} \approx 17,669$ on en déduit que le capital se décuplera après $n = 18$ années.

9 Exercices

EXERCICE 14.10

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \ln(48)$

2) $B = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right) - \ln\left(\dfrac{25}{8}\right)$

3) $C = \mathrm{e}^{-\ln 3}$

4) $D = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) - \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$

5) $E = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$

6) $F = \ln\left(x^2 - 1\right) - \ln(1 + x)$

Exercice 14.11

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

1) $f : x \mapsto x \ln x - x$ **2)** $g : x \mapsto \ln(4 - x^2)$ **3)** $h : x \mapsto \ln(\ln x)$

Exercice 14.12

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x) = -3$

2) $\ln(1 - 2x) = 2$

3) $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

4) $\ln x = \ln 4 + 3\ln 2$

5) $\ln(x + 1) \leq 0$

6) $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$

Exercice 14.13

Soit g la fonction définie par

$$\forall\, x \in \;]0; +\infty[\;, \quad g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1) Montrer que, pour tout $x \in \;]0; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.

2) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g (sans les limites).

4) En déduire que, pour tout $x \in \;]0; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Exercice 14.14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$\forall\, x \in [0; +\infty[\;, \quad f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

1) Sans calculer la dérivée de f, indiquer le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g : x \mapsto f(x) - x$.

a) Étudier le sens de variations de la fonction g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]2;3[$, que l'on notera α, puis donner la valeur arrondie au dixième de α.

c) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $[0;+\infty[$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $[0;+\infty[$.

Exercice 14.15

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto 2\ln x + \frac{4}{x} - 5$$

1) Faire l'étude de la fonction f.

2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

CHAPITRE 15

Récurrence et suites

Dans ce chapitre, on introduit tout d'abord le raisonnement par récurrence qui permet de montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel. Ensuite, on présente la notion de suite et les propriétés associées. La section suivante est consacrée à la notion particulière de suites récurrentes qui établit le lien entre le raisonnement par récurrence et les suites. On présente également les suites récurrentes les plus utilisées : les suites arithmétiques et les suites géométriques. Le chapitre se termine sur la notion de limite d'une suite.

Sommaire

1 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode de raisonnement qui permet de montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n (ou à partir d'un certain rang). Commençons par un exemple.

Exemple

Soit $q \in [0;1]$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$q^n \in [0;1]$$

On le vérifie pour différentes valeurs de n :

- ▷ Pour $n = 0$, $q^n = q^0 = 1 \in [0;1]$ et pour $n = 1$, $q^n = q^1 = q \in [0;1]$.
- ▷ Pour $n = 2$, $q^n = q \times q$. Or partant de $0 \leq q \leq 1$, en multipliant par $q \in [0;1]$, on obtient :
$$0 \leq q \times q \leq q \leq 1.$$
Donc $q^n = q^2 \in [0;1]$.
- ▷ Pour $n = 3$, on procède de même à partir de $q^n = q^2 \times q$. Alors, puisque $q^2 \in [0;1]$ et $q \in [0;1]$, on obtient $q^n = q^3 \in [0;1]$.

Il est clair que l'on peut continuer ce raisonnement de proche en proche, jusqu'à atteindre n'importe quel terme.

Ce que l'on a fait dans l'exemple précédent ne constitue pas une démonstration. Pour rédiger une démonstration rigoureuse, on fait appel au principe de récurrence.

Proposition : *Principe de récurrence*

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, une propriété $\mathcal{P}(n)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

1) *la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;*

2) *pour tout entier $n \geq n_0$, si la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.*

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie également.

Remarque

La première étape est appelée l'**initialisation** et la deuxième étape est appelée l'**hérédité**.

Grâce à ce principe, on peut reprendre l'exemple précédent et en donner une démonstration rigoureuse.

Exemple

Soit $q \in [0;1]$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \in [0;1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $q^n \in [0;1]$ ».

1) **Initialisation.**
Par définition, on a $q^0 = 1 \in [0;1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, on a $0 \leq q^n \leq 1$. De plus, par définition, $q \geq 0$. Ainsi, en multipliant les inégalités $0 \leq q^n \leq 1$ par q, on obtient

$$0 \leq \underbrace{qq^n}_{q^{n+1}} \leq q \leq 1$$

c'est-à-dire $q^{n+1} \in [0; 1]$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $q^n \in [0; 1]$.

De manière générale, lorsque l'on souhaite montrer une propriété par récurrence, on suit la méthode ci-dessous.

MÉTHODE : *Raisonnement par récurrence*

Pour montrer par récurrence une propriété,

- ▷ il faut d'abord définir rigoureusement la propriété et sa dépendance par rapport à un entier :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « ... ».

- ▷ ensuite, on effectue les étapes suivantes :

  1) Initialisation.

  Vérifier que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain n_0 donné (ou à déterminer).

  2) Hérédité.

  Fixer un entier $n \geq n_0$. Supposer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrer alors que, sous cette hypothèse, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

  3) Conclusion.

  « D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.»

Remarques

- ▷ L'hérédité est la partie principale d'une démonstration par récurrence. Elle est constituée de deux sous-parties.
  - ⋆ L'hypothèse de récurrence : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq n_0$.
  - ⋆ La récurrence : on montre (en utilisant l'hypothèse de récurrence) que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ▷ Lors de la récurrence, comme lors de toute démonstration, il est souvent très utile d'écrire explicitement le résultat recherché, c'est-à-dire d'écrire explicitement $\mathcal{P}(n+1)$.

Exemple

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\text{« } n^2+n+2 \text{ est un nombre pair »}$$

1) Initialisation.
Pour $n=0$, on a $n^2+n+2=2$, qui est un nombre pair. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

2) Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire n^2+n+2 est un nombre pair.
On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(n+1)^2+(n+1)+2$ est un nombre pair.
Or on a

$$\begin{aligned}(n+1)^2+(n+1)+2 &= n^2+2n+1+n+1+2 \\ &= \underbrace{(n^2+n+2)}_{\text{pair car } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}} + \underbrace{2(n+1)}_{\text{pair car multiple de 2}}\end{aligned}$$

D'où $(n+1)^2+(n+1)+2$ est la somme de deux nombres pairs donc est pair.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.

Exercice 15.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels non nuls :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 15.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

2 Généralités sur les suites

Définition : *Suite réelle*

Une **suite réelle** $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur les entiers naturels et à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
L'image de n par la suite u se note $u_n = u(n)$, on l'appelle le **terme** de **rang** n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou **terme général**).

Remarques

- ▷ On note traditionnellement la variable d'une suite n (ou m, p, q). Tandis que les variables x, y, t sont utilisées pour les fonctions définies sur des intervalles.
- ▷ La suite est notée entre parenthèses $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un terme de la suite, sans parenthèse : u_n (même distinction qu'entre les notations f et $f(x)$).
- ▷ Une suite peut être définie à partir d'un entier n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$, les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geq n_0$).
- ▷ On peut aussi définir les suites complexes (à valeurs dans $\mathbb{C}$).

Exemples

- $\triangleright$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n$ est simplement la suite des entiers naturels :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 4, \quad \ldots$$

- $\triangleright$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2n - 3$ a pour termes :

$$v_0 = -3, \quad v_1 = -1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 3, \quad v_4 = 5, \quad \ldots$$

On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme v_{n+1} est donné par

$$v_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n - 3 + 2 = v_n + 2$$

Autrement dit, chaque terme de la suite s'obtient en ajoutant 2 au terme précédent.

- $\triangleright$ La suite de terme général $w_n = \dfrac{2n}{n-1}$ n'est pas définie pour $n = 1$. On considère alors cette suite uniquement pour les rangs $n \geq 2$, ce que l'on note $(w_n)_{n\geq 2}$. Ses premiers termes sont :

$$w_2 = 4, \quad w_3 = 3, \quad w_4 = \frac{8}{3}, \quad \ldots$$

De nombreuses notions vues pour des fonctions réelles restent valables pour les suites (car ce sont des fonctions mais considérées uniquement sur $\mathbb{N}$). En particulier, on s'intéressera au sens de variations d'une suite.

Définitions : *Sens de variations*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- $\triangleright$ **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- $\triangleright$ **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.
- $\triangleright$ **constante** (ou **stationnaire**) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

On définit de même une suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante** en remplaçant les inégalités larges ($u_{n+1} \geq u_n$ et $u_{n+1} \leq u_n$) par des inégalités strictes ($u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+1} < u_n$).
De plus, une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Remarque

On peut aussi définir le sens de variations d'une suite à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

On donne ci-dessous trois façons différentes de montrer la monotonie d'une suite

Méthode : *Sens de variations d'une suite*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut montrer l'une des propriétés suivantes :

1) $\forall\ n \geq n_0, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

ou

2) $\forall\ n \geq n_0, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

ou

3) $\forall\ n \geq n_0, \quad u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $[n_0; +\infty[$.

Pour montrer que la suite est décroissante, il suffit d'inverser les inégalités.

Remarque

Suivant la suite étudiée, il faut choisir le critère le plus pertinent :

- ▷ Pour une suite définie à partir de sommes et/ou différences, on emploiera le critère **1)**.
- ▷ Pour une suite définie à partir de quotients et/ou produits, on emploiera le critère **2)**.
- ▷ Si les deux critères précédents s'avèrent compliqués, on emploiera le critère **3)** en passant par l'étude d'une fonction.

Exemples

- ▷ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 + 5n$.
  Pour déterminer si celle-ci est monotone, on va utiliser le critère **1)**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= [(n+1)^2 + 5(n+1)] - [n^2 + 5n] \\ &= n^2 + 2n + 1 + 5n + 5 - n^2 - 5n \\ &= 2n + 6 > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

▷ Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \dfrac{2^n}{n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n > 0$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}\, n}{2^n\,(n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{2n - (n+1)}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \geq 0$$

d'où

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

▷ Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = n - n^2$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = f(n) \quad \text{avec} \quad f : x \mapsto x - x^2$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f' : x \mapsto 1 - 2x$$

qui est strictement négative pour $x \geq 1$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 1.

EXERCICE 15.3

Déterminer le sens de variations des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ **2)** $v_n = \dfrac{3^n}{2n+1}$ **3)** $w_n = n^2 - 2n + 3$

La notion de majoration/minoration d'une fonction est aussi importante pour les suites.

DÉFINITIONS : *Majoration, minoration*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

1) **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$,

2) **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \geq u_n$,

3) **bornée** si elle est majorée et minorée.

EXEMPLES

▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2 - (2n+3)^2$ est majorée par 2.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+3)^2 \geq 0$ donc

$$u_n = 2 - (2n+3)^2 \leq 2 - 0 = 2$$

▷ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est bornée.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

d'où

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 1 et majorée par 2.

EXERCICE 15.4

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2+2n+3$ est minorée.

2) Déterminer si les suites de termes généraux donnés ci-dessous sont majorées et/ou minorées.

a) $v_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ **b)** $w_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

3 Suites récurrentes

Les suites que l'on a vu jusqu'à présent étaient définies de manière explicite, c'est-à-dire sous la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction donnée. On peut aussi définir une suite sur la base du principe de récurrence.

Définitions : *Suites récurrentes*

- ▷ On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente** lorsque chaque terme u_n est défini en fonction des précédents.
- ▷ Une suite récurrente est dite d'**ordre 1** si chaque terme u_n ne dépend que du terme précédent.
  Formellement, une suite récurrente d'ordre 1 se définit en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$, puis en posant
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(u_n)$$
  où F est une fonction donnée.

Remarque

On peut définir aussi les suites récurrentes d'ordre 2 (où u_{n+2} dépend de u_{n+1} et u_n) ou d'un ordre supérieur.

Exemples

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ données ci-dessous sont définies par récurrence :

- ▷ $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$
- ▷ $v_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n - 1}{n}$
- ▷ $w_1 = 1$, $w_2 = -1$ et, pour tout $n \geq 1$, $w_{n+2} = w_{n+1}^2 + w_n - 2$

Pour démontrer une propriété vérifiée par une suite récurrente, on emploie le principe de récurrence.

Exemple Suite récurrente minorée

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2$$

Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq 1$ »

1) **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On a $u_n \geq 1$ donc $u_{n+1} = u_n + 2 \geq 3 > 1$.
   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3) **Conclusion.**
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

Exemple Terme général d'une suite récurrente

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $v_n = \dfrac{2}{2n+1}$ »

1) **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ et $\dfrac{2}{2n+1} = \dfrac{2}{1} = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On a $v_n = \dfrac{2}{2n+1}$ donc

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3) **Conclusion.**
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

EXERCICE 15.5

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 2$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n - n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n + n + 1$.

4 Suites arithmétiques et suites géométriques

Parmi toutes les suites récurrentes, il y a deux types de suites récurrentes très importantes dans la pratique : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

4.1 Suites arithmétiques

DÉFINITIONS : *Suites arithmétiques*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé **raison** de la suite, tel que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

REMARQUES

- ▷ Autrement dit, dans une suite arithmétique, on passe d'un terme de la suite au suivant en *ajoutant* toujours le même nombre r.
- ▷ Si une suite arithmétique a pour raison $r = 0$, alors celle-ci est stationnaire.

EXEMPLES

- ▷ La suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$ a pour premiers termes :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + 3 = 4, \quad u_2 = 4 + 3 = 7, \quad u_3 = 7 + 3 = 10$$

▷ La suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 2}$ de premier terme $u_2 = 3$ et de raison $r = -2$ a pour premiers termes :

$$u_2 = 3, \quad u_3 = 3 - 2 = 1, \quad u_4 = 1 - 2 = -1, \quad u_5 = -1 - 2 = -3$$

REMARQUE : *Terme général d'une suite arithmétique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. De façon informelle, on a

$$u_n = u_{n-1} + r = \underbrace{u_{n-2} + r}_{u_{n-1}} + r = u_{n-2} + 2r = \underbrace{u_{n-3} + r}_{u_{n-2}} + 2r = u_{n-3} + 3r$$

Continuant ainsi de proche en proche, on obtient

$$u_n = u_{n-n} + nr = u_0 + nr$$

Pour montrer formellement l'égalité obtenue précédemment, on procède par récurrence. Ce qui est fait dans la démonstration de la proposition ci-dessous.

PROPOSITION

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n = u_0 + nr$ »

1) Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = u_0 + 0 \times r$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

2) Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On a $u_n = u_0 + nr$ donc

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. □

Les suites arithmétiques apparaissent fréquemment via la somme de leurs éléments. Celle-ci peut être calculée de façon explicite d'après le résultat ci-dessous.

Proposition : *Somme d'un suite arithmétique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ la somme des $N+1$ premiers termes consécutifs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire des termes $u_0, u_1, \ldots, u_N$) est

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_N = (N+1)\,\frac{u_0 + u_N}{2}$$

Notation

Plutôt que d'écrire $u_0+u_1+\ldots+u_N$, on utilise en général la notation suivante :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_N$$

Le symbole $\sum$ est appelé symbole somme.
La proposition précédente s'écrit alors

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = (N+1)\,\frac{u_0 + u_N}{2}$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. Alors, la somme des 10 premiers termes de la suite (c'est-à-dire des termes $u_0, u_1, \ldots, u_9$) est

$$\sum_{k=0}^{9} u_k = 10\,\frac{u_0 + u_9}{2} = 10\,\frac{2 + 29}{2} = 155$$

car $u_9 = u_0 + 9r = 2 + 27 = 29$.

Exercice 15.6

Calculer la somme des 10 premiers entiers naturels impairs.

4.2 Suites géométriques

Définitions : *Suites géométriques*

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ non nul tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = q\, v_n$$

Le réel q est appelé la **raison** de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

- Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme de la suite au suivant en *multipliant* toujours par le même nombre q.
- Si une suite géométrique a pour raison $q = 1$, alors celle-ci est stationnaire.
- Pour une suite géométrique, si le premier terme est nul alors tous les termes de la suite sont nuls.

Exemples

- La suite géométrique $(v_n)_{n\geq 1}$ de premier terme $v_1 = 2$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$ a pour premiers termes :

$$v_1 = 2, \quad v_2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad v_3 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad v_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- La suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = \sqrt{2}$ a pour premiers termes :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \sqrt{2}, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 2\sqrt{2}, \quad v_3 = 4, \quad v_4 = 4\sqrt{2}, \quad v_5 = 8$$

Remarque : *Terme général d'une suite géométrique*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On a

$$v_n = q\, v_{n-1} = q\, \underbrace{q\, v_{n-2}}_{v_{n-1}} = q^{2} v_{n-2} = q^2\, \underbrace{q\, v_{n-3}}_{v_{n-2}} = q^{3} v_{n-3}$$

De proche en proche, on aboutit à

$$v_n = q^{n}\, v_{n-n} = q^n\, v_0$$

Proposition

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = q^n\, v_0$$

Exercice 15.7

Montrer par récurrence la proposition précédente.

Proposition : *Somme d'une suite géométrique*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ la somme des $N+1$ premiers termes consécutifs de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\sum_{k=0}^{N} v_k = v_0\, \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Exemple

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$. Alors la somme des 10 premiers termes de la suite est

$$\sum_{k=0}^{9} v_k = v_0\, \frac{1-q^{10}}{1-q} = 2\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 2\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 4\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right).$$

Exercice 15.8

Montrer par récurrence la proposition précédente.

Exercice 15.9

Quelle est la somme des 10 premières puissances de 2 ?

5 Limite d'une suite

Comme dans le cas des fonctions, on peut définir la notion de limite d'une suite. Mais, dans le cas des suites, la notion de limite n'a de sens que lorsque n tend vers $+\infty$.

DÉFINITIONS

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- ▷ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers plus l'infini** si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- ▷ On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers moins l'infini** si $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- ▷ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** de limite $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert $]a;b[$ contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- ▷ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** si elle ne converge pas.

REMARQUES

- ▷ Une suite est divergente si elle n'admet pas de limite *ou* si sa limite est $\pm\infty$.
- ▷ Tous les résultats vus sur les limites de fonctions (opérations sur les limites, formes indéterminées, théorème des gendarmes,...) s'étendent au cas des limites de suites.

EXEMPLES

- ▷ La suite $\left(\dfrac{3n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{n+1} = 3$ (limite d'une fraction rationnelle comme pour les fonctions) donc la suite $\left(\dfrac{3n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- ▷ Toute suite constante converge. En effet, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$ où $c \in \mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
- ▷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ non nulle.

Alors, on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (u_0 + nr)$$

Si $r > 0$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si $r < 0$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

▷ La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'admet pas de limite.

En effet, $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = -1$ si n est impair. Ainsi lorsque n tend vers $+\infty$, u_n ne tend pas vers une valeur précise (elle oscille entre 1 et -1).

Exercice 15.10

Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = \dfrac{n-1}{2n^2+1}$

2) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

3) $w_n = \ln(1+n)$

On a vu dans les exemples précédents qu'il est facile de déterminer la limite d'une suite arithmétique. Dans le cas d'une suite géométrique, on fait appel au résultat suivant :

Proposition

Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

▷ *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.*

▷ *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

▷ *Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.*

▷ *Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.*

Autrement dit, pour $q \neq 1$, la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et, dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exemples

- La suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-\frac{1}{2}$ converge vers 0 car $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 1$$

On définit de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \frac{3}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{u_n}{3} + 1 - \frac{3}{2} = \frac{u_n}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n + \frac{3}{2}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{2}$.

Exercice 15.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1) Soit $f : x \to \frac{2x+3}{x+4}$. Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$.

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déduire sa limite.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$ et $u_n = \frac{3v_n + 1}{1 - v_n}$.

5) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

On donne ci-dessous un résultat très important concernant les suites monotones.

THÉORÈME : *Convergence d'une suite monotone*

- ▷ *Toute suite croissante majorée converge.*
- ▷ *Toute suite croissante non majorée diverge et sa limite est $+\infty$.*
- ▷ *Toute suite décroissante minorée converge.*
- ▷ *Toute suite décroissante non minorée diverge et sa limite est $-\infty$.*

REMARQUE

Si une suite est croissante et majorée, sa limite est ce que l'on appelle sa borne supérieure mais cette notion dépasse le cadre de ce cours.
De même, si une suite est décroissante et minorée, on peut montrer que sa limite est ce que l'on appelle sa borne inférieure.

EXEMPLE EXTRAIT BAC S - 2016

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : x \mapsto x - \ln(x^2 + 1)$.
On effectue d'abord une étude rapide de f. Cette fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

Donc la fonction f est croissante. De plus, on a $f(0) = -\ln(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

2) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

a) **Initialisation.** On a $u_0 = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

b) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $0 \leq u_n \leq 1$.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$. D'après la question précédente, puisque $u_n \in [0;1]$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$.

c) **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$. Or $u_n^2 + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge.

5) Pour calculer la limite ℓ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on admet que celle-ci vérifie $\ell = f(\ell)$ (conséquence de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$). On obtient alors $\ell = \ell - \ln(\ell^2 + 1)$, d'où

$$\ln(\ell^2 + 1) = 0$$

Or $\ln(x)$ s'annule uniquement pour $x = 1$, donc $\ell^2 + 1 = 1$ et ainsi $\ell = 0$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

EXERCICE 15.12 EXTRAIT BAC S - 2014

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\forall\, x \in [0; +\infty[\ , \quad f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$$

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1) Déterminer le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

5) On admet que ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ.

6 Correction des exercices du cours

CORRIGÉ EXERCICE 15.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

1) Initialisation. Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.
Donc on a bien $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 1$.

2) Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Montrons que l'on a $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Par définition,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \underbrace{1+2+\ldots+n}_{=S_n}+(n+1) = S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé Exercice 15.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $(1+a)^n \geq 1+na$ ».

1) Initialisation. Pour $n = 0$, on a $(1+a)^n = 1$ et $1+na = 1$ donc $(1+a)^n \geq 1+na$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

2) Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^n \geq 1+na$.
On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.
Puisque $(1+a) > 0$, en multipliant l'inégalité $(1+a)^n \geq 1+na$ par $(1+a)$, on obtient

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2 \geq 1+na+a = 1+(n+1)a$$

où on a utilisé $na^2 \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Corrigé Exercice 15.3

1) On remarque que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$ et $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $]1;+\infty[$ et sa dérivée vérifie

$$\forall\, x \in \ ]1;+\infty[\ , \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $]1;+\infty[$ et ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{2(n+1)+1}}{\frac{3^n}{2n+1}} = \frac{3(2n+1)}{2n+3}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3(2n+1)}{2n+3} - 1 = \frac{6n+3-2n-3}{2n+3} = \frac{4n}{2n+3} \geq 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 - (n^2 - 2n + 3) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3 - n^2 + 2n - 3 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n > 0$.
On en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang $n = 1$.

Corrigé Exercice 15.4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2+2n+3 \geq 3$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3.

2) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = \frac{3n+1}{n+1} = \frac{n+1+2n}{n+1} = 1 + \frac{2n}{n+1} \geq 1$$

et

$$v_n = \frac{3(n+1)-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1} \leq 3$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq n \leq n^2 < n^2 + 1$ donc $w_n = \dfrac{n}{n^2+1} < 1$

et $w_n = \dfrac{n}{n^2+1} \geq 0$. Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

Corrigé Exercice 15.5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \leq 3$ ».

- **a)** **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 \leq 3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **b)** **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 3$.
  On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 3$.
  Or, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, on a
  $$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$$
  car $u_n \leq 3$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **c)** **Conclusion.**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $v_n = 2^n + n + 1$ ».

- **a)** **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ et $2^n + n + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **b)** **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $v_n = 2^n + n + 1$.
  On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire
  $$v_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1) + 1 = 2^{n+1} + n + 2$$
  On a
  $$v_{n+1} = 2v_n - n = 2(2^n + n + 1) - n = 2^{n+1} + 2n + 2 - n = 2^{n+1} + n + 2$$
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **c)** **Conclusion.**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n + n + 1$.

Corrigé Exercice 15.6

La suite des nombres entiers naturels impairs est la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
On en déduit que la somme des 10 premiers entiers naturels impairs est

$$\sum_{k=0}^{9} u_k = 10\,\frac{u_0 + u_9}{2}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 2n$ et ainsi $u_9 = 1 + 18 = 19$. On en déduit

$$\sum_{k=0}^{9} u_k = 10\,\frac{1 + 19}{2} = 100$$

Corrigé Exercice 15.7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $v_n = q^n\, v_0$ ».

1) **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $q^n\, v_0 = v_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $v_n = q^n\, v_0$.
   On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $v_{n+1} = q^{n+1}\, v_0$.
   On a
   $$v_{n+1} = q\, v_n = q \times q^n\, v_0 = q^{n+1}\, v_0$$
   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3) **Conclusion.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n\, v_0$.

Corrigé Exercice 15.8

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(N)$ la propriété : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} v_k = v_0\,\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$ ».

1) **Initialisation.** Pour $N = 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} v_k = v_0$ et
   $$v_0\,\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = v_0\,\frac{1 - q}{1 - q} = v_0.$$
   Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

2) Hérédité. Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(N)$ est vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{N} v_k = v_0 \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

On souhaite montrer que $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{N+1} v_k = v_0 \frac{1-q^{N+2}}{1-q}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N+1} v_k = \sum_{k=0}^{N} v_k + v_{N+1} &= v_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q} + q^{N+1} v_0 \\ &= v_0 \frac{1-q^{N+1}+q^{N+1}(1-q)}{1-q} \\ &= v_0 \frac{1-q^{N+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie.

3) Conclusion.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} v_k = v_0 \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

CORRIGÉ EXERCICE 15.9

Les puissances de 2 sont données par la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 2.
Donc la somme des 10 premières puissances de 2 est

$$\sum_{k=0}^{9} v_k = v_0 \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{10} - 1 = 1023$$

CORRIGÉ EXERCICE 15.10

1) On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$$

3) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$$

Corrigé Exercice 15.11

1) La fonction f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a

$$\forall\, x \in [0; +\infty[\ , \quad f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f(0) = \dfrac{3}{4} > 0$. On en déduit, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

a) **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

b) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$.

On souhaite montrer que $u_{n+1} > 0$. Puisque, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$ et $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} = f(u_n) > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

c) **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3}$$

$$= \frac{2u_n + 3 - (u_n + 4)}{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}\, v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

Puisque $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - 1 = \frac{u_n - 1 - (u_n + 3)}{u_n + 3}$$

$$= \frac{-4}{u_n + 3} \neq 0$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} &\iff v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \\ &\iff u_n v_n - u_n = -1 - 3v_n \\ &\iff u_n(v_n - 1) = -(3v_n + 1) \\ &\iff u_n = -\frac{3v_n + 1}{v_n - 1} = \frac{3v_n + 1}{1 - v_n} \end{aligned}$$

5) Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, d'après l'égalité précédente, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3v_n + 1}{1 - v_n} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + 1}{1 - x} = 1$$

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Corrigé Exercice 15.12 Extrait Bac S - 2014

1) La fonction f est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a

$$\forall\, x \in [0;+\infty[\ ,\quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ est

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		e^{-1}		0

D'après le tableau de variations de f, on en déduit que, pour tout $x \in\ ]0;+\infty[\ ,\ f(x) > 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n > 0$ ».

a) **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

b) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$.

On souhaite montrer que $u_{n+1} > 0$. Puisque, pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$, $f(x) > 0$ et $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} = f(u_n) > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

c) **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n} < 1$$

car $u_n > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ.

5) Puisque $\ell = f(\ell)$, on obtient $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}$, d'où $\ell(1-\mathrm{e}^{-\ell}) = 0$. Ainsi, $\ell = 0$ ou $\mathrm{e}^{-\ell} = 1$. Or $\mathrm{e}^{-\ell} = 1$ si et seulement si $\ell = 0$.

Finalement, on a $\ell = 0$.

7 Exercices

EXERCICE 15.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

EXERCICE 15.14

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison 3.

Déterminer le terme de rang 1000 de cette suite.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

Quel est le terme de rang 5 de cette suite ?

EXERCICE 15.15

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 5 - 2n$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 15.16

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{20} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 15.17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n) = \mathrm{e}^{-n}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15.18

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

- **a)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3.
- **b)** Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
- **c)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
- **d)** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15.19 Extrait Bac S - 2014

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier, pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1) On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

- **a)** Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- **b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n en fonction de n.
- **c)** Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ?

2) On programme une machine de façon que :

- ▷ à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- ▷ toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

- **a)** Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.
- **b)** Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
  Démontrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- **c)** En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
- **d)** Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quelle interprétation peut-on en donner ?

CHAPITRE 16

Intégration

Ce chapitre est consacré aux notions d'intégrale et de primitive qui sont intimement liées. On présente tout d'abord la notion de primitive d'une fonction qui est l'opération inverse de la dérivation. On donne ensuite quelques propriétés des primitives et les primitives des fonctions usuelles. La section suivante introduit l'intégrale d'une fonction continue comme aire « sous » la courbe représentative de la fonction. Par la suite, on montre le lien fondamental entre l'intégrale et les primitives qui permet de calculer certaines intégrales. Enfin, on donne quelques propriétés de l'intégrale.

Sommaire

1 Notion de primitive

Définition : *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une **primitive** de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ *dérivable* sur I telle que

$$F' = f \quad \text{sur } I$$

EXEMPLE

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x^2$.

- ▷ La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F' = f$ sur $\mathbb{R}$.
- ▷ La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G : x \mapsto x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G' = f$ sur $\mathbb{R}$ (car la dérivée d'une constante est nulle).

Si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admettant une primitive F sur I.
Alors, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions du type $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Remarquons tous d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a

$$(F + k)' = F' = f$$

donc les fonctions du type $F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont bien des primitives de f.

D'autre part, soit G une primitive de f sur I. Alors, on a

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

Donc $F - G$ est constante. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F - G = k$. Ce qui montre le résultat. □

Le résultat précédent suppose que la fonction f considérée admet une primitive. On donne ci-dessous un résultat essentiel concernant les primitives : toute fonction continue admet une primitive.

THÉORÈME

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ fixés.
Alors,

1) *f admet une primitive sur I,*

2) *il existe une* **unique** *primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Exemple

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto 3x^2$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^3 + k$.
Soit F la primitive de f qui vaut 3 en 1. Alors, F est définie par $F : x \mapsto x^3 + k$, où k est le réel tel que F vérifie $F(1) = 3$. Or $F(1) = 1 + k$, donc $1 + k = 3$. Ainsi, $k = 2$ et finalement on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = x^3 + 2$$

Exercice 16.1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes, puis celle qui s'annule en $x = \pi$.

1) $f_1 : x \mapsto x$ **2)** $f_2 : x \mapsto -\sin x$ **3)** $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x$

2 Primitives usuelles et propriétés des primitives

Toute fonction continue admet une primitive. En particulier, les fonctions usuelles étant continues sur leur domaine de définition, celles-ci y admettent une primitive. Ces primitives se déduisent du tableau des dérivées des fonctions usuelles.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	**Primitive F**	**Intervalle I**	**Condition**
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + k$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	–

Primitives des fonctions usuelles (suite)

Fonction f	**Primitive F**	**Intervalle I**	**Condition**
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$	$]0;+\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	$\mathbb{R}$	–
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	$\mathbb{R}$	–
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$	–

REMARQUE

D'après le tableau précédent, la primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$ est $F : x \mapsto \ln|x|$. On justifie ci-dessous ce résultat.

- ▷ Pour $x \in \ ]0;+\infty[$, $|x| = x$ et donc $F'(x) = \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- ▷ Pour $x \in \ ]-\infty;0[$, $|x| = -x$ donc $\ln|x| = \ln(u(x))$, où $u : x \mapsto -x$. Ainsi, on obtient

$$\forall\ x \in \ ]-\infty;0[\ , \quad F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

On en déduit que $F : x \mapsto \ln|x|$ est bien la primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

EXEMPLES

- ▷ Les primitives de $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $F : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- ▷ Les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme

$F : x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

▷ La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. On en déduit que les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$F : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + k = \frac{1}{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{x} + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Pour pouvoir déterminer les primitives de différentes fonctions à partir des primitives des fonctions usuelles, on étudie les opérations sur les primitives. D'après les propriétés des dérivées, on a le résultat suivant :

Propriétés

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.
Alors,

▷ *$F + G$ est une primitive de $f + g$,*

▷ *λF est une primitive de λf.*

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto x^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{x}$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme :

$$F : x \mapsto \frac{x^4}{4} - \sqrt{2}\ln|x| + k\,, \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercice 16.2

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^5 + 4x^3 - 3x$

2) $f_2 : x \mapsto -\sin x + \dfrac{1}{3}\cos x$

3) $f_3 : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^x$

On donne ci-dessous le résultat fondamental pour le calcul de primitives qui est basé sur la dérivée d'une fonction composée.

PROPRIÉTÉ

Soient u une fonction dérivable de I dans un intervalle J et f une fonction dérivable sur J.
Alors, la fonction $f \circ u$ est une primitive de $(f' \circ u)u'$ sur I.

Le résultat précédent appliqué avec f une fonction usuelle donne le tableau ci-dessous (où u est une fonction dérivable sur un intervalle I).

Primitives composées

Fonction	Primitive	Condition
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u \neq 0$
$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u	–
$u'\cos u$	$\sin u$	–
$u'\sin u$	$-\cos u$	–

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2x}$ est de la forme $f = u'\,\mathrm{e}^{u}$, où $u : x \mapsto 2x$ car $u' : x \mapsto 2$.
  On en déduit que f admet pour primitive la fonction
  $$F : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{2x}$$
- La fonction $f : x \mapsto x^2 \cos(x^3)$ définie sur $\mathbb{R}$ est de la forme $f = \dfrac{1}{3}\,u' \cos u$, où $u : x \mapsto x^3$ car $u' : x \mapsto 3x^2$.
  On en déduit que f admet pour primitive la fonction
  $$F : x \mapsto \frac{1}{3} \sin\left(u(x)\right) = \frac{1}{3} \sin\left(x^3\right)$$

Exercice 16.3

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{(\mathrm{e}^x + 3x)^2}$ **b)** $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 4}$ **c)** $h : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Calculer les primitives s'annulant en π des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ **b)** $g : x \mapsto \cos(2x)$ **c)** $h : x \mapsto -\sin x \cos x$

3 Intégrale d'une fonction continue

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On définit dans cette partie l'intégrale d'une fonction continue. Pour cela, on considère d'abord le cas des fonctions positives, puis des fonctions négatives et enfin celui des fonctions continues quelconques.

Définitions : *Intégrale d'une fonction continue positive*

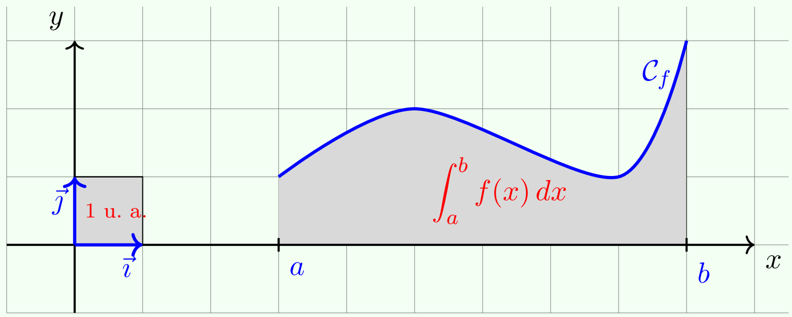
1) On appelle **unité d'aire**, notée u.a., l'aire du carré de côté $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\|$.

2) Soient f une fonction continue et *positive* sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

L'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est notée

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$

On l'appelle l'**intégrale de f entre a et b.**

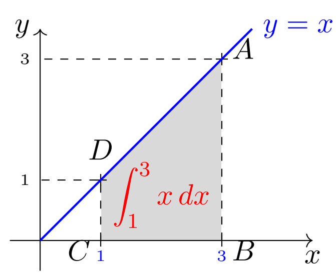


EXEMPLE

On souhaite calculer

$$\int_1^3 x\,dx$$

Il s'agit de l'intégrale de $f : x \mapsto x$ entre 1 et 3. Ainsi, cette intégrale est égale à l'aire du trapèze limité par les droites $x = 1,\ x = 3,\ y = x$ (la courbe $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation $y = x$) et l'axe des abscisses.



Soient $A(3;3)$, $B(3;0)$, $C(1;0)$ et $D(1;1)$ les sommets du trapèze. Rappelons que l'aire d'un trapèze est donnée par $\dfrac{(b_1+b_2)h}{2}$, où b_1, b_2 sont les bases du trapèze et h sa hauteur.
Le trapèze $ABCD$ a pour bases $b_1 = AB = 3$, $b_2 = CD = 1$ et pour hauteur $h = BC = 2$ donc on obtient

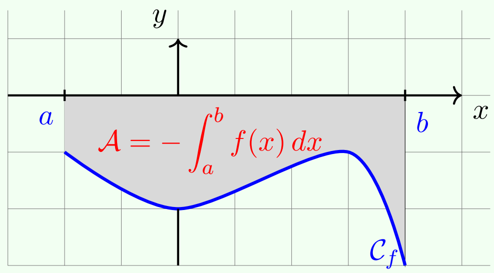
$$\int_1^3 x\,dx = \frac{(b_1+b_2)h}{2} = 4$$

Définition : *Intégrale d'une fonction continue négative*

Soient f une fonction continue et *négative* sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a., du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
On pose alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$$

On l'appelle l'**intégrale de f entre a et b.**

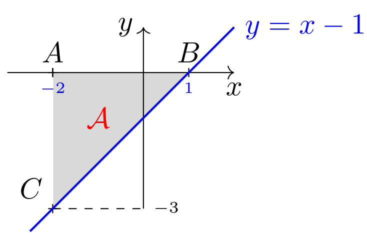


Exemple

On souhaite calculer

$$\int_{-2}^1 x - 1\,dx$$

La fonction $f : x \mapsto x - 1$ est continue et négative sur $[-2;1]$. Donc l'intégrale de f entre -2 et 1 est l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle délimité par les droites $x = -2,\ x = 1,\ y = x - 1$ et l'axe des abscisses.



On note $A(-2;0)$, $B(1;0)$ et $C(-2;-3)$ les sommets de ce triangle. Son aire est alors donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-2}^1 x - 1\,dx = -\frac{9}{2}$$

DÉFINITION : *Intégrale d'une fonction continue quelconque*

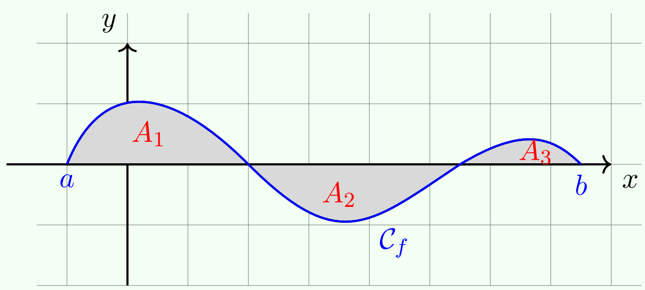
Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On note

- ▷ $\mathcal{A}_1$ l'aire, en u.a., du domaine situé au dessus de l'axe des abscisse, délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$,
- ▷ $\mathcal{A}_2$ l'aire, en u.a, du domaine situé en dessous de l'axe des abscisse, délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On pose alors

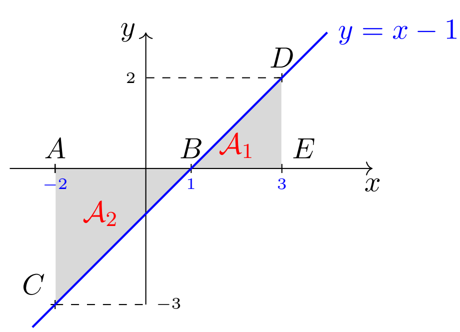
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2$$

Dans l'exemple illustré par la figure ci-dessous, on a $\mathcal{A}_1 = A_1 + A_3$ et $\mathcal{A}_2 = A_2$.



EXEMPLE

On souhaite calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} x - 1\,dx$.
La fonction $f : x \mapsto x - 1$ change de signe sur l'intervalle $[-2;3]$. Afin de déterminer les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de la définition précédente, on donne la représentation graphique de la droite d'équation $y = x - 1$ sur l'intervalle $[-2;3]$.



L'aire $\mathcal{A}_1$ est l'aire du triangle BDE, donc $\mathcal{A}_1 = 2$.
D'après l'exemple précédent, on a $\mathcal{A}_2 = \dfrac{9}{2}$. On en déduit

$$\int_{-2}^{3} x - 1\,dx = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$$

EXERCICE 16.4

En utilisant la définition d'intégrale, calculer

1) $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,dx$ **2)** $J = \displaystyle\int_{0}^{2} x\,dx$ **3)** $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\,dx$

Pour une fonction quelconque, il est difficile en général de calculer l'intégrale à partir des définitions précédentes. Dans la section suivante, on va voir comment il est possible de calculer l'intégrale d'une fonction quelconque à l'aide de la notion de primitive.

4 Lien entre intégrale et primitive

Le lien fondamental qui lie la notion d'intégrale à celle de primitive est donné par le théorème ci-dessous.

THÉORÈME : *Théorème fondamental de l'analyse*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ un réel fixé. Alors, la fonction F définie sur I par

$$\forall\ x \in I, \quad F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a, c'est-à-dire $F(a) = 0$.

ATTENTION

Pour la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,dt$, la variable x est la *variable de la fonction* et la variable t est la *variable d'intégration*. Elles doivent donc être désignées par deux lettres différentes.

EXEMPLE

L'unique primitive de la fonction cos qui s'annule en 0 est la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$$

Or la fonction sin est une primitive de la fonction cos et, de plus, $\sin(0) = 0$. Par unicité de la primitive qui s'annule en 0, on obtient $F = \sin$. Autrement dit, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \int_0^x \cos t \, dt$$

On donne ci-dessous une conséquence importante du théorème fondamental de l'analyse qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction continue dont on connaît une primitive.

COROLLAIRE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors, pour tous réels a et b de I et quelque soit la primitive F de f, on a

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Soit G la primitive de f s'annulant en a. On a $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, d'où

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b)$$

Soit F une autre primitive de f sur I. Alors, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. Ainsi, on obtient

$$F(b) - F(a) = (G(b) + k) - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = G(b)$$

car $G(a) = 0$, et donc

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) = F(b) - F(a)$$

Ce qui montre le résultat. $\square$

Notation

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f.

Alors, on note $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$, de sorte que l'on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Cette notation permet de faire apparaître la primitive F dans le calcul de l'intégrale (voir exemples ci-dessous).

Exemples

▷ Puisque $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $[1;3]$, on a

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^x \cos t\,dt = \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x - \sin(0) = \sin x$$

Ainsi, on retrouve le résultat donné dans un exemple précédent.

▷ On a

$$\int_1^3 \frac{-1}{x^2}\,dx = \left[\ \frac{1}{x}\ \right]_1^3 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

Exercice 16.5

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx$ **4)** $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \exp(3x)\,dx$

Les propriétés des primitives entraînent les résultats ci-dessous pour l'intégrale.

PROPRIÉTÉS

Soient f et g deux fonctions continues sur I et soient a, b deux réels de I. Alors, on a

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ *et* $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$

Les deux dernières propriétés se résument en disant que l'intégrale est **linéaire**.

EXEMPLE

Puisque l'intégrale est linéaire, on a

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2 - x)\,dx &= 3\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx\\ &= 3\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 - \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2\\ &= 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}\end{aligned}$$

EXERCICE 16.6

Calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_{-3}^2 (x-1)\,dx$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x\,dx$

3) $I_3 = \displaystyle\int_1^3 (x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})\,dx$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}\,dx$

5) $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6) $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,dx$

7) $I_7 = \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

8) $I_8 = \displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx$

5 Propriétés de l'intégrale

Proposition : *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors, pour tous réels a, b et c de I, on a

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. □

Remarque

La relation de Chasles est très utile dans le cas où une fonction admet une expression différente suivant l'intervalle considéré.

Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ qui est donnée par $x \mapsto x$ sur $[0; +\infty[$ et par $x \mapsto -x$ sur $]-\infty; 0]$.

Exemples

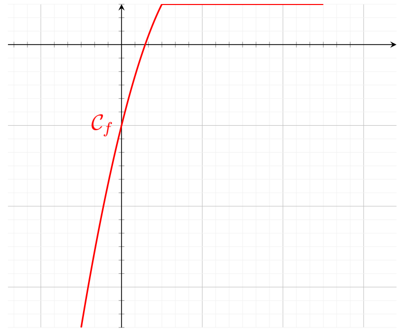
▷ On a

$$\begin{aligned}\int_{-4}^2 |x|\,dx = \int_{-4}^0 |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx &= \int_{-4}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx\\ &= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{16}{2} + \frac{4}{2} = 10\end{aligned}$$

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2 - (x-2)^2 & \text{si } x \leq 1,\\ 1 & \text{si } x \geq 1.\end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (voir figure ci-après).



On souhaite calculer l'intégrale $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$. On a

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (2-(x-2)^2)\,dx + \int_{1}^{3} 1\,dx$$

$$= \left[(2x - \frac{(x-2)^3}{3})\right]_{-1}^{1} + 3 - 1 = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

EXERCICE 16.7

Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_{-2}^{1} x|x|\,dx$ **2)** $\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx$

PROPOSITION : *Conservation de l'ordre*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

$$\textit{Si } f \leq g \textit{ sur } [a;b] \quad \textit{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

EXEMPLE

Pour tout $x \in [0;2]$, on a $1 \leq \mathrm{e}^x$ donc $x \leq x\,\mathrm{e}^x$, d'où

$$2 = \int_0^2 x\,dx \leq \int_0^2 x\,\mathrm{e}^x\,dx$$

Exercice 16.8

1) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

2) En déduire que $\displaystyle\int_1^2 \frac{|\cos x|}{x}\,dx \leq \ln 2$.

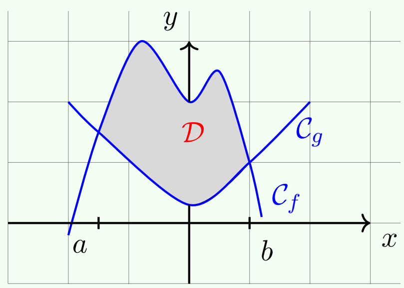
Proposition : *Aire d'un domaine compris entre deux courbes*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que

$$\forall\ x \in [a;b]\,, \quad g(x) \leq f(x)$$

Alors, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$



Remarque

Le résultat précédent est lié à la conservation de l'ordre.
En effet, pour que $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$ puisse être une aire, il faut que cette quantité soit positive. Or, par conservation de l'ordre, l'inégalité

$$\forall\ x \in [a;b]\,, \quad g(x) \leq f(x)$$

entraîne que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$ est bien positive.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3 - x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$.
Pour tout $x \in [-2;1]$, on a

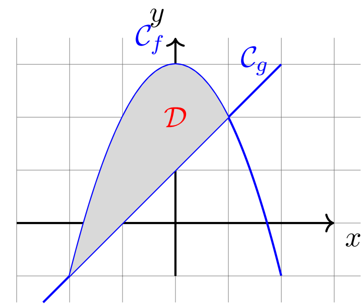
$$f(x) - g(x) = 3 - x^2 - x - 1 = -(x^2 + x - 2) = -(x-1)(x+2) \geq 0$$

donc

$$\forall\, x \in [-2;1]\,, \quad g(x) \leq f(x)$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx &= \int_{-2}^{1} -(x^2 + x - 2)\, dx \\ &= \Big[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{1} \\ &= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$



EXERCICE 16.9

Calculer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, pour $1 \leq x \leq 2$.

La propriété de conservation de l'ordre entraîne immédiatement le résultat ci-dessous.

PROPOSITION : *Inégalité de la moyenne*

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f \leq M$ sur $[a;b]$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$

Remarque

Il existe des fonctions continues dont on ne sait pas exprimer explicitement la primitive. C'est le cas, par exemple, des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ ou encore $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$. Ainsi, on ne sait pas *a priori* calculer l'intégrale de ces fonctions. Le résultat précédent permet alors d'obtenir au moins un encadrement de l'intégrale considérée.

Exemples

▷ Pour tout $x \in [0;1]$, on a $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{-1} \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \leq 1$$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ donc

$$-3 \leq \int_1^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq 3$$

Exercice 16.10

Montrer que l'on a

$$-3 \leq \int_{-1}^{2} x\cos^2 x\, dx \leq 6$$

6 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 16.1

1) Les primitives de f_1 sont de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + k_1$, où $k_1 \in \mathbb{R}$. On cherche la primitive F_1 de la fonction f_1 telle que $F_1(\pi) = 0$. Puisque $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + k_1$, où $k_1 \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{2} + k_1 = 0$$

d'où $k_1 = -\dfrac{\pi^2}{2}$ et $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 - \pi^2}{2}$.

2) Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2 : x \mapsto \cos x + k_2$, où $k_2 \in \mathbb{R}$. Par le même raisonnement que la question précédente, La primitive de la fonction f_2 qui vaut 0 en π est $F_2 : x \mapsto \cos x + 1$.

3) Les primitives de f_3 sont de la forme $F_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x + k_3$, où $k_3 \in \mathbb{R}$, et celle qui vaut 0 en π est $F_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^\pi$.

CORRIGÉ EXERCICE 16.2

1) Les primitives de f_1 sont de la forme $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^6}{6} + x^4 - \dfrac{3x^2}{2} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

2) Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2 : x \mapsto \cos x + \dfrac{1}{3} \sin x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

3) Les primitives de f_3 sont de la forme $F_3 : x \mapsto 3\,\mathrm{e}^x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

CORRIGÉ EXERCICE 16.3

1) **a)** On a $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{(\mathrm{e}^x + 3x)^2} = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$, avec $u : x \mapsto \mathrm{e}^x + 3x$.
Alors, toutes les primitives de la fonction f sont de la forme

$$F : x \mapsto -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{\mathrm{e}^x + 3x} + k, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

b) On a $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 4} = \dfrac{1}{2} \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u : x \mapsto x^2 + 4$.
Alors, toutes les primitives de la fonction g sont de la forme

$$G : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) + k = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + k, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

c) On a $h : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{3}{2} \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, avec $u : x \mapsto x^2 + 1$.
Alors, toutes les primitives de la fonction h sont de la forme

$$H : x \mapsto \frac{3}{2} \times 2\sqrt{u(x)} + k = 3\sqrt{u(x)} + k = 3\sqrt{x^2 + 1} + k, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

2) **a)** On a $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$, avec $u : x \mapsto x^2+1$.
Alors, toutes les primitives de la fonction f sont de la forme

$$F : x \mapsto -\frac{1}{u(x)} + k = -\frac{1}{x^2+1} + k_1, \quad \text{où} \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

La primitive F de f qui vaut 0 en π vérifie alors

$$k_1 - \frac{1}{1+\pi^2} = 0$$

On en déduit $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{\pi^2+1}$.

b) On a $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}(2\cos(2x)) = \dfrac{1}{2}u'(x)\cos(u(x))$, où $u : x \mapsto 2x$.
La primitive de g qui vaut 0 en π est la fonction G définie par

$$G : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x) + k_2$$

où k_2 est le réel tel que $G(\pi) = 0$. On obtient alors $k_2 = 0$, d'où $G : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

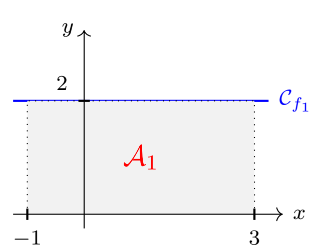
c) On a $h : x \mapsto -\sin x \cos x = u'(x)u(x)$, où $u : x \mapsto \cos x$.
La primitive de h qui vaut 0 en π est la fonction H définie par

$$H : x \mapsto \frac{1}{2}(u(x))^2 + k_3 = \frac{1}{2}\cos^2 x + k_3$$

où k_3 est le réel tel que $H(\pi) = 0$. Puisque $\cos^2(\pi) = 1$, on obtient $k_3 = -\dfrac{1}{2}$, d'où $H : x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos^2 x - \dfrac{1}{2}$.

Corrigé Exercice 16.4

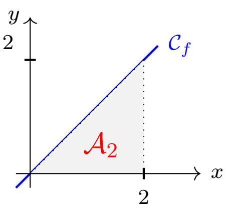
1) Soit f_1 la fonction constante $f_1 : x \mapsto 2$. Alors, I est l'aire sous la courbe de f_1 entre les points $x = -1$ et $x = 3$. On obtient la figure suivante :



On en déduit que I est l'aire d'un rectangle de cotés 4 et 2, d'où

$$I = \mathcal{A}_1 = 4 \times 2 = 8$$

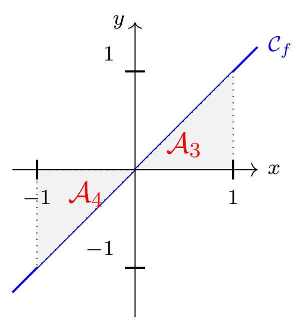
2) Soit f_2 la fonction $f_2 : x \mapsto x$. Alors, J est l'aire sous la courbe de f_2 entre les points $x = 0$ et $x = 2$. On obtient la figure suivante :



On en déduit que J est l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 2, d'où

$$J = \mathcal{A}_2 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

3) Soit f_3 la fonction $f_3 : x \mapsto x$. Alors, K est l'aire sous la courbe de f_3 entre les points $x = -1$ et $x = 1$. On obtient la figure suivante :



Alors, on a

$$K = \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Corrigé Exercice 16.5

1) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^{\mathrm{e}} = 1$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_{-1}^{-2} = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

4) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3} \exp(3x)\,dx &= \left[\frac{\exp(3x)}{3}\right]_0^{\ln 3}\\ &= \frac{\exp(3\ln 3)}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\exp(\ln 27)}{3} - \frac{1}{3}\\ &= \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 16.6

1) $\displaystyle I_1 = \int_{-3}^{2} (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-3}^{2} = -\frac{15}{2}$

2) $\displaystyle I_2 = \int_0^1 2\,\mathrm{e}^x\,dx = \left[2\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 2\,\mathrm{e} - 2 = 2(\mathrm{e}-1)$

3) $\displaystyle I_3 = \int_1^3 (x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{14}{3} - 2\ln(3)$

4) $\displaystyle I_4 = \int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}\,dx = \left[\mathrm{e}^{x^2+x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^2 - 1$

5) On a $f : x \mapsto -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u : x \mapsto 1 - x^2$. On remarque aussi que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Alors, une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{1-x^2}$.
On en déduit

$$I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} - 2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

6) On a $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{2}\,2\,\mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{2}\,u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u : x \mapsto 2x$.
Donc une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$.
Alors :

$$I_6 = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$$

7) On a $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2+1} = 2\,\dfrac{2x}{x^2+1} = 2\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u : x \mapsto x^2+1$.
Donc une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto 2\ln(u(x)) = 2\ln(x^2+1)$.

Alors :

$$I_7 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,dx = \Big[2\ln(x^2+1)\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\ln(4) - 2\ln(4) = 0$$

8) On a $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x} = 2\,\dfrac{1}{x}\,\ln x = 2u'(x)u(x)$ avec $u : x \mapsto \ln x$.
Donc une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto 2\,\dfrac{1}{2}(u(x))^2 = \ln^2 x$.
Alors,

$$I_8 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x}\,dx = \Big[2\ln^2(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} = \ln^2(\mathrm{e}) - \ln^2(1) = 1 - 0 = 1$$

CORRIGÉ EXERCICE 16.7

1) On a

$$\int_{-2}^{1} x|x|\,dx = \int_{-2}^{0} x|x|\,dx + \int_{0}^{1} x|x|\,dx = \int_{-2}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx$$
$$= \Big[-\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} + \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{-8}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

2) Remarquons d'abord que l'on a $\sin x \geq 0$ si $x \in [0;\pi]$ et $\sin x \leq 0$ si $x \in [\pi; 2\pi]$.
Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx \\
&= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 4
\end{aligned}$$

CORRIGÉ EXERCICE 16.8

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

2) Pour tout $x \in [1;2]$, on a $|\cos x| \leq 1$ et $x > 0$, donc $\dfrac{|\cos x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
On en déduit
$$\int_1^2 \frac{|\cos x|}{x}\,dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

Corrigé Exercice 16.9

Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La parabole d'équation $y = x^2$ est la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ est la courbe $\mathcal{C}_g$.
On a
$$\forall\, x \in [1;2]\,,\quad f(x) - g(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3-1}{x} \geq 0$$
Car la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante et vaut 1 pour $x = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in [1;2]$, on a $g(x) \leq f(x)$.

L'aire $\mathcal{A}_D$ de la région D comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ pour $1 \leq x \leq 2$ est donc
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_D &= \int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx\\ &= \int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x})\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_1^2\\ &= \frac{8}{3} - \ln 2 - \frac{1}{3} + \ln 1 = \frac{7}{3} - \ln 2\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 16.10

Pour tout $x \in [-1;2]$, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ donc :

- ▷ puisque $x \geq -1$, $x\cos^2 x \geq -1$,
- ▷ puisque $x \leq 2$, $x\cos^2 x \leq 2$.

On en déduit
$$-3 = -1(2-(-1)) \leq \int_{-1}^2 x\cos^2 x\,dx \leq 2(2-(-1)) = 6$$

7 Exercices

Exercice 16.11

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition précisée :

1) $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{x}{2}$ avec $F(0) = 3$,

2) $f : x \mapsto 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ avec $F(0) = 0$,

3) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x-1}$ avec $F(2) = 1$.

Exercice 16.12

Calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1) $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{3} (x+1)\,dx$

2) $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{\frac{5}{2}} (2x^2 - 6x + 7)\,dx$

3) $I_3 = \displaystyle\int_{2}^{3} \left(x + \frac{1}{x}\right)\,dx$

4) $I_4 = \displaystyle\int_{-4}^{1} \frac{4}{-x+3}\,dx$

5) $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2\,\mathrm{e}^x + 1)\,dx$

6) $I_6 = \displaystyle\int_{0}^{1} 5x^2(x^3+4)^2\,dx$

7) $I_7 = \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

8) $I_8 = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{6x-9}{(x^2-3x+2)^2}\,dx$

9) $I_9 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x\,dx$

10) $I_{10} = \displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

11) $I_{11} = \displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,dx$

12) $I_{12} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x\,dx$

13) $I_{13} = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{e}^{\cos x}\,dx$

14) $I_{14} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\,dx$

Exercice 16.13

Soit f une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. Déterminer le signe des intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

2) $J = \displaystyle\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx$

Exercice 16.14

Interpréter en terme de calculs d'aire la relation de Chasles dans le cas d'une fonction f positive avec $a < b < c$.

Exercice 16.15

Calculer l'aire du domaine décrit par les inéquations

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad x - 1 \leq y \leq x - x^2$$

Exercice 16.16

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b]$. Considérons F et G des primitives de, respectivement, f et g.

1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

2) Vérifier que la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$. En déduire que

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

4) La fonction FG est-elle une primitive de fg ?

Exercice 16.17

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables sur $[a; b]$.

1) Calculer $(fg)'$.

2) En déduire l'égalité suivante :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Cette formule est appelée **formule d'intégration par parties**.

3) *Application.* On note $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto x$. En utilisant la formule d'intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^\pi x \cos x\,dx$$

CHAPITRE 17

Probabilités

Ce chapitre est une introduction au calcul des probabilités. La première section, assez générale, introduit le langage ensembliste (ou théorie des ensembles) qui sert de base pour les notions de probabilité. Ensuite, on définit la notion d'expérience aléatoire et celles d'univers et évènements associés, ainsi que la probabilité d'une expérience aléatoire. La troisième section concerne les probabilités conditionnelles, autrement dit la probabilité qu'un évènement ait lieu sachant qu'un autre évènement a déjà eu lieu. Dans la dernière section, on donne quelques résultats basiques de dénombrement qui sont utiles dans le calcul de certaines probabilités et qui seront utilisés notamment dans le chapitre suivant.

Sommaire

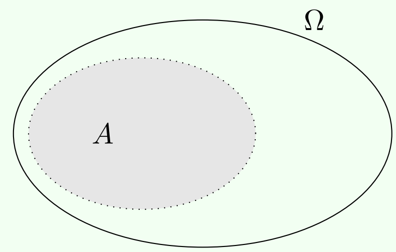
1 Langage ensembliste

Dans cette première section, on présente différents termes employés sur les ensembles et qui sont utiles en théorie des probabilités.

Définition : *Partie d'un ensemble*

Soient A et Ω deux ensembles.
On dit que A est **inclus** dans Ω, noté $A \subset \Omega$, si tout élément de A est aussi un élément de Ω.
Autrement dit, $A \subset \Omega$ si et seulement si : $x \in A$ entraîne $x \in \Omega$.

Lorsque $A \subset \Omega$, on dit aussi que A est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de Ω.
De plus, l'ensemble des parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.



NOTATIONS

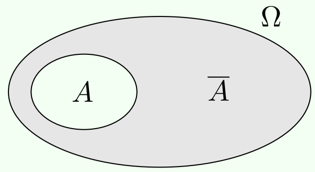
- On note $\emptyset$ l'ensemble qui ne contient aucun élément, on l'appelle l'**ensemble vide**.
  Par convention, pour tout ensemble Ω, on a $\emptyset \subset \Omega$. Donc $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Si $\omega \in \Omega$, on note $\{\omega\}$ l'ensemble qui ne contient que l'élément ω. On a alors $\{\omega\} \subset \Omega$ et donc $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- Un ensemble $\{\omega\}$ qui contient un seul élément $\omega \in \Omega$ est dit **singleton**.

EXEMPLES

- On a vu au chapitre 2 que l'on a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, en particulier $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des parties de $\mathbb{R}$.
- Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Alors, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ ou $\{5\}$ sont des parties de Ω.
- Soit $\Omega = \{P, F\}$.
  Alors, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \Omega\}$.

DÉFINITION : *Ensemble complémentaire*

Soient Ω un ensemble et A une partie de Ω.
On appelle **complémentaire** de A dans Ω l'ensemble, noté $\overline{A}$ (ou A^c ou $\complement_\Omega A$), des éléments de Ω qui ne sont pas des éléments de A.



Exemples

- ▷ Soient $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A = \{1, 4, 5\} \subset \Omega$.
  Alors, $\overline{A} = \{2, 3, 6\}$.
- ▷ Soient $\Omega = \{P, F\}$ et $A = \{P\}$.
  Alors, $\overline{A} = \{F\}$.

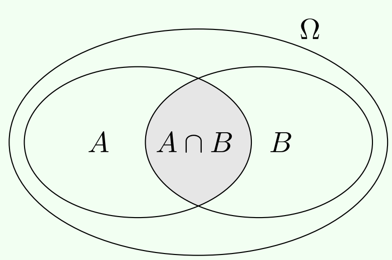
Remarques

Soient Ω un ensemble et A une partie de Ω. Alors, on a

▷ $\overline{\emptyset} = \Omega$ ▷ $\overline{\Omega} = \emptyset$ ▷ $\overline{\overline{A}} = A$

Définition : *Intersection d'ensembles*

Soient Ω un ensemble et A, B deux parties de Ω.
On appelle **intersection** des ensembles A et B, le sous-ensemble de Ω, noté $A \cap B$, qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
Autrement dit, $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$.
De plus, lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).



EXEMPLES

- ▷ Soient $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 4, 5\}$ et $B = \{1, 2, 5, 6\}$.
  Alors, $A \cap B = \{1, 5\}$.
- ▷ Soient $\Omega = \{P, F\}$, $A = \{P\}$ et $B = \{F\}$.
  Alors, $A \cap B = \emptyset$.

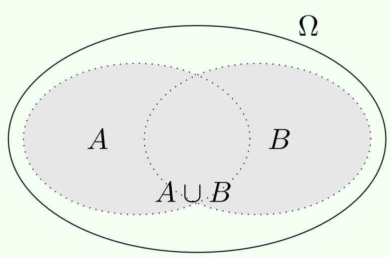
REMARQUES

Soient Ω un ensemble et A une partie de Ω. Alors, on a

▷ $\bar{A} \cap A = \emptyset$ ▷ $A \cap \Omega = A$ ▷ $A \cap \emptyset = \emptyset$

DÉFINITION : *Union d'ensembles*

Soient Ω un ensemble et A, B deux parties de Ω.
On appelle **union** de A et B, le sous-ensemble de Ω, noté $A \cup B$, qui contient tous les éléments de A et de B.
Autrement dit, $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$.



EXEMPLES

- ▷ Soient $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$.
  Alors, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- ▷ Soient $\Omega = \{P, F\}$, $A = \{P\}$ et $B = \{F\}$.
  Alors, $A \cup B = \{P, F\} = \Omega$.

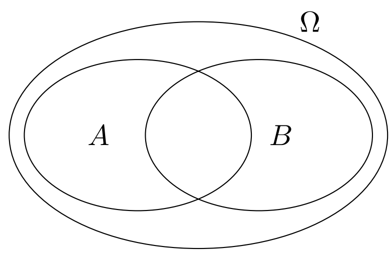
Remarques

Soient Ω un ensemble et A, B deux parties de Ω. Alors, on a

- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup \bar{A} = \Omega$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Exercice 17.1

On a représenté ci-dessous un ensemble Ω et A, B deux parties de Ω.



Hachurer l'ensemble indiqué pour chacun des cas suivants :

1) $A \cap \overline{B}$ **2)** $A \cup \overline{B}$ **3)** $\overline{A} \cup \overline{B}$
4) $\overline{A} \cap \overline{B}$ **5)** $\overline{A \cup B}$ **6)** $\overline{A \cap B}$

2 Vocabulaire probabiliste

On va tout d'abord introduire certains termes de base.

Définitions : *Expérience aléatoire, issue et univers*

1) On appelle **expérience aléatoire** tout processus dont le résultat est incertain.

2) Les résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des **issues**.

3) On appelle **univers** d'une expérience aléatoire, l'ensemble Ω des issues possibles de l'expérience.

EXEMPLES

- ▷ Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, on ne peut pas savoir à l'avance quel nombre celui-ci va afficher. Il s'agit ainsi d'une expérience aléatoire.

  Les différents résultats possibles de cette expérience de lancer de dé, donc les issues, sont les chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ainsi, on a l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▷ Lorsqu'on tire une carte au hasard dans un jeu de cartes donné, on effectue une expérience aléatoire dont les issues sont les différentes cartes. En particulier, l'univers Ω est le jeu de cartes.
- ▷ Le jeu du « pile ou face » est une expérience aléatoire. Seules deux issues sont possibles : la pièce affiche le coté pile, que l'on note P, ou la pièce affiche le coté face, que l'on note F.

  L'univers Ω de cette expérience est alors $\Omega = \{P, F\}$.
- ▷ On considère une urne contenant 12 boules jaunes et 12 boules rouges. On tire au hasard une boule que l'on conserve (ce que l'on appelle « sans remise »), puis on en tire une deuxième. On s'intéresse alors aux couleurs des deux boules obtenues.

  Si l'on note R pour une boule de couleur rouge et J pour une boule de couleur jaune, l'univers de cette expérience est $\Omega = \{RR, RJ, JR, JJ\}$.

EXERCICE 17.2

Pour les expériences aléatoires suivantes, déterminer à chaque fois l'univers de l'expérience :

1) Dans une trousse, on a placé 2 stylos rouges (R) et 3 stylos bleues (B). Dans l'obscurité, on choisit au hasard un stylo.

2) Dans une trousse, on a placé 2 stylos rouges (R) et 1 stylo bleu (B). Dans l'obscurité, on choisit au hasard un stylo, que l'on conserve, puis on en tire un deuxième.

REMARQUE

Dans les différents exemples donnés ci-dessus, l'univers Ω est fini.

Dans tout ce chapitre, on supposera que l'univers Ω est un ensemble fini.

DÉFINITION : *Évènements*

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- ▷ On appelle **évènement** toute partie de l'univers Ω.
  Autrement dit, un évènement est un ensemble d'issues possibles.
- ▷ Lorsqu'un évènement est réduit à une seule issue, on l'appelle **évènement élémentaire**.
- ▷ L'évènement $\emptyset$ est appelé l'**évènement impossible** et l'évènement Ω est appelé l'**évènement certain**.
- ▷ Pour tout évènement A, l'évènement $\overline{A}$ est appelé **évènement contraire** de A.

REMARQUES

- ▷ L'ensemble des évènements est $\mathcal{P}(\Omega)$.
- ▷ Un évènement élémentaire est un ensemble réduit à un élément ω. On le note alors $\{\omega\}$.
- ▷ Les évènements impossible et certain sont contraires l'un de l'autre puisque $\overline{\emptyset} = \Omega$ et $\overline{\Omega} = \emptyset$.
- ▷ Pour tous évènement $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'évènement $A \cap B$ se lit « A et B », tandis que l'évènement $A \cup B$ se lit « A ou B ».

EXEMPLES

- ▷ Considérons l'expérience du lancer d'un dé équilibré.
  Alors, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Les ensembles $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ ou $\{5\}$ sont des parties de Ω et donc sont des évènements de l'expérience aléatoire.
  On peut aussi définir un évènement par une phrase. Par exemple, soit A l'évènement « le résultat est strictement plus grand que 4 ». On a alors $A = \{5, 6\}$.
- ▷ Considérons le cas du jeu du pile ou face.
  L'univers étant $\Omega = \{P, F\}$, on a $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \Omega\}$.
  Ainsi, les seuls évènements associés sont $\emptyset$, $\{P\}$, $\{F\}$ et Ω.

EXERCICE 17.3

On met quinze jetons numérotés de 1 à 15 dans un sac, et on tire au hasard un seul jeton.
On considère les évènements suivants :

- ▷ A : « le jeton tiré porte un nombre pair » ;
- ▷ B : « le jeton tiré porte un nombre multiple de 3 ».

Écrire sous forme d'ensembles les évènements suivants :

1) A	**2)** B	**3)** $\overline{A}$
4) $\overline{B}$	**5)** $A \cap \overline{B}$	**6)** $A \cup \overline{B}$
7) $A \cap B$	**8)** $A \cup B$	**9)** $\overline{A} \cup \overline{B}$
10) $\overline{A} \cap \overline{B}$	**11)** $\overline{A \cup B}$	**12)** $\overline{A \cap B}$

DÉFINITION : *Probabilité*

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire.
On appelle **probabilité** (ou **loi de probabilité**) sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ telle que

- ▷ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ▷ pour tous évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ incompatibles (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), on a
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

REMARQUE

La probabilité d'un évènement A représente les chances que l'évènement A ait lieu.

- ▷ Si $\mathbb{P}(A) = 1$, cela signifie que l'évènement aura obligatoirement lieu.
- ▷ Si $\mathbb{P}(A) = 0$, cet évènement ne peut pas avoir lieu.
- ▷ Si $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, cela signifie que l'évènement a une chance sur deux d'avoir lieu.

Notation

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, pour tout évènement élémentaire $\{\omega\} \subset \Omega$, on note simplement $\mathbb{P}(\omega)$ la probabilité de $\{\omega\}$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Exemples

▷ Considérons l'expérience de lancer d'un dé à 6 faces équilibré.
Le dé étant équilibré, la chance d'obtenir 1 est la même que celle d'obtenir 2 ou 3 ou 4 etc. Puisque qu'il y a 6 faces et que chacune a les mêmes chances, on en déduit que l'on a 1 chance sur 6 d'obtenir une face donnée. Ainsi, on définit naturellement la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{6}$$

▷ Dans le jeu du pile ou face, la chance que la pièce affiche le coté pile est la même que pour le coté face. Ainsi, on définit la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{P, F\}$ par

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$$

On peut aussi considérer le cas d'une pièce truquée. Supposons que la pièce est truquée pour obtenir plus facilement le coté pile. Alors, il suffit de définir $\mathbb{P}$ de sorte de que $\mathbb{P}(P) > \mathbb{P}(F)$ et $P(P) + \mathbb{P}(F) = 1$. Par exemple, on peut poser :

$$\mathbb{P}(P) = \frac{7}{10} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F) = \frac{3}{10}$$

▷ On considère l'expérience aléatoire de l'urne contenant 12 boules jaunes et 12 boules rouges que l'on tire *sans remise*. L'univers de cette expérience est $\Omega = \{RR, RJ, JR, JJ\}$.
Au premier tirage, il y a une chance sur deux d'obtenir R. Une fois cette boule rouge obtenue, il reste 11 boules rouges et 12 boules jaunes. Il y a ainsi 11 chances (nombre de boules rouges) sur 23 (nombre de boules totales) d'obtenir une boule rouge. On pose alors

$$\mathbb{P}(RR) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{23} = \frac{11}{46}$$

Par le même raisonnement, on pose

$$\mathbb{P}(RJ) = \frac{6}{23}, \quad \mathbb{P}(JJ) = \frac{11}{46}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(JR) = \frac{6}{23}$$

On remarquera que l'on a bien

$$\mathbb{P}(RR) + \mathbb{P}(RJ) + \mathbb{P}(JJ) + \mathbb{P}(JR) = 1$$

REMARQUE

Dans les exemples précédents, on a défini la probabilité $\mathbb{P}$ uniquement par ses valeurs sur les évènements élémentaires.
À partir de ces valeurs, il est possible de calculer la probabilité de n'importe quel évènement. En effet, considérons par exemple un évènement A composé de trois issues : $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Alors, on a

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2, \omega_3\} \quad \text{et} \quad \{\omega_1\} \cap \{\omega_2, \omega_3\} = \emptyset$$

Donc, par définition de $\mathbb{P}$, on obtient $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3\})$.
Par le même raisonnement, on obtient aussi $\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3)$.
Ainsi, on en déduit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_3)$.
Ce résultat obtenu pour un évènement composé de trois issues se généralise à un nombre quelconque d'issues et est donné dans la proposition ci-dessous.

PROPOSITION

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Alors, pour tout évènement $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \ldots + \mathbb{P}(\omega_n)$$

EXEMPLES

- ▷ Considérons l'expérience de lancer d'un dé à 6 faces équilibré.
  Alors, pour $A = \{1, 2, 4\}$, on obtient

  $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

  Ce qui signifie qu'il y a une chance sur deux que l'une des faces soient 1, 2 ou 4.
- ▷ Considérons l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
  L'univers est alors composé des 52 cartes et chaque carte a la même

probabilité donc on pose

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{52}$$

Soit A l'évènement « la carte est un roi ». Alors, A est composé de quatre issues : le roi de cœur, le roi de carreau, le roi de trèfle et le roi de pique. On obtient alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$$

Soit B l'évènement « la carte est de couleur rouge et supérieure à 5 ». Alors, B est composé de 16 issues et donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

▷ Considérons l'expérience aléatoire de l'urne contenant 12 boules jaunes et 12 boules rouges *sans remise*.
Soit A l'évènement « les deux boules obtenues sont de couleurs différentes ». Alors, on a $A = \{RJ, JR\}$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(RJ) + \mathbb{P}(JR) = \frac{6}{23} + \frac{6}{23} = \frac{12}{23}$$

Remarquons au passage que l'on a $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$, donc il y a plus d'une chance sur d'eux d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Dans les exemples précédents, pour le cas du lancer d'un dé et du tirage d'une carte, toutes les issues avaient la même probabilité. On parle alors de probabilité équirépartie.

Définition : *Probabilité équirépartie*

La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est dite **équirépartie** si chaque évènement élémentaire a la même probabilité.
Dans ce cas, si l'univers Ω compte n issues possibles, la probabilité de chacune des issues est donc $\frac{1}{n}$.
On dit aussi que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

REMARQUE

Si la loi de probabilité est équirépartie, pour tout évènement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre total d'issues dans } \Omega}$$

EXERCICE 17.4

On considère l'expérience aléatoire consistant au lancer d'un dé équilibré.

1) Soit A l'évènement « le résultat est une chiffre pair ». Lister les issues qui composent A et calculer $\mathbb{P}(A)$.

2) Décrire $\bar{A}$ et donner sa probabilité.

On donne ci-dessous quelques propriétés utiles pour le calcul de probabilités.

PROPRIÉTÉS

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Alors, pour tous évènements A et B, on a

- ▷ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- ▷ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- ▷ *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

REMARQUE

D'après la première propriété, puisque $\overline{\Omega} = \emptyset$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

Ce qui signifie que l'évènement $\emptyset$ ne peut pas avoir lieu, ce qui justifie sa dénomination d'évènement impossible.

EXEMPLES

- ▷ Dans le cas du lancement d'un dé équilibré, considérons les évènements suivants :

$$A = \{5, 6\} \quad \text{et} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

Alors, $A \cap B = \{6\}$ d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
De plus, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$. On en déduit

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

▷ Dans le cas du tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes, considérons l'évènement « obtenir une reine ou une couleur rouge », noté A.
Si l'on désigne par B l'évènement « obtenir une reine » et par C l'évènement « obtenir une couleur rouge », on obtient

$$A = B \cup C.$$

De plus, $B \cap C$ est l'évènement « obtenir une reine de couleur rouge » ce qui est restreint à deux issues : la reine de cœur et la reine de carreau. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{52} + \frac{1}{2} - \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

Exercice 17.5

On considère le jeu de 32 cartes. On en choisit une au hasard.
On considère les évènements :

▷ R : « tirer un roi »

▷ T : « tirer un trèfle »

Calculer $\mathbb{P}(R), \mathbb{P}(T)$, $\mathbb{P}(R \cap T)$ et $\mathbb{P}(R \cup T)$.

3 Probabilités conditionnelles

Définition : *Probabilité conditionnelle*

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et A, B deux évènements de Ω.
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant B le

nombre noté $\mathbb{P}(A \mid B)$, ou $\mathbb{P}_B(A)$, défini par

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Il s'agit de la probabilité que l'évènement A ait lieu sachant que l'évènement B a eu lieu.

REMARQUES

- ▷ Une probabilité conditionnelle est une probabilité comme son nom l'indique : c'est-à-dire un réel entre 0 et 1.
- ▷ La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A \mid B)$ correspond à la probabilité de l'évènement $A \cap B$ dans l'univers B.
- ▷ On a $\mathbb{P}(A \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$. Ce qui signifie qu'il y a 100% de chances que A se réalise sachant que A est réalisé.
- ▷ Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$. Autrement dit, il y a 0% de chances que B se réalise sachant que A est réalisé.
- ▷ Attention à ne pas confondre $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ avec $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. On remarquera que les numérateurs sont identiques mais pas les dénominateurs. De plus, ces deux probabilités n'ont pas la même signification.

EXEMPLE

Dans un lycée, il y a 800 élèves qui étudient deux langues étrangères différentes et qui sont repartis comme suit :

	Allemand	Italien	Total
Filles	180	120	300
Garçons	420	80	500
Total	600	200	800

On choisit un élève au hasard. On considère les évènements :

- ▷ F : « l'élève choisi est une fille »
- ▷ G : « l'élève choisi est un garçon »

- ▷ A : « l'élève choisi étudie l'allemand »
- ▷ I : « l'élève choisi étudie l'italien »

D'après le tableau, on a alors

$$\mathbb{P}(I) = \frac{200}{800} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(F) = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$$

Si l'on choisit un élève parmi les filles uniquement, la probabilité qu'il étudie l'italien est

$$\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$$

Cette dernière probabilité est une probabilité conditionnelle : c'est la probabilité $\mathbb{P}(I \mid F)$ que l'élève choisi étudie l'italien sachant que cet élève est une fille. Ainsi, $\mathbb{P}(I \mid F) = \frac{2}{5}$.
Attention cependant à ne pas confondre cette probabilité avec la probabilité de l'évènement « l'élève choisi est une fille et étudie l'italien » qui est l'évènement $F \cap I$. Pour ce dernier évènement, on a :

$$\mathbb{P}(F \cap I) = \frac{120}{800} = \frac{3}{20}$$

Enfin, on remarque que l'on a

$$\frac{\mathbb{P}(F \cap I)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} = \mathbb{P}(I \mid F)$$

D'après la définition, on a immédiatement la propriété suivante :

Propriété

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et A, B deux évènements de Ω.
Alors,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$

Remarque

Lorsque $B = \Omega$, on obtient

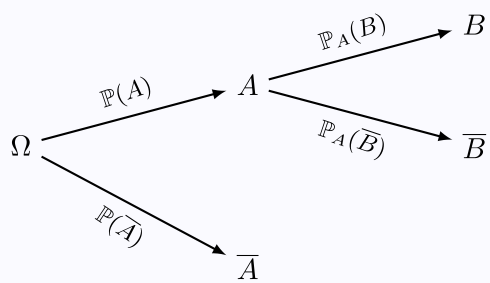
$$\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \mathbb{P}(A)$$

puisque $A \cap \Omega = A$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

MÉTHODE : *Arbre pondéré*

Une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles peut être représentée par un **arbre**, se lisant de gauche à droite et constitué de **nœuds** (les évènements) et de **branches** (probabilités) :

- ▷ Le premier nœud, souvent omis, représente l'univers Ω.
- ▷ Partant de ce nœud, deux branches aboutissent à des évènements contraires (A et $\overline{A}$).
- ▷ Pour chacun de ces deux nœuds, deux nouvelles branches aboutissent à des évènements contraires (B et $\overline{B}$).
- ▷ Chaque branche représente la probabilité de l'évènement d'arrivée sachant l'évènement de départ.



REMARQUE

Sachant que l'on a
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$
on en déduit que $\mathbb{P}(A \cap B)$ est le produit des probabilités associées à chacune des deux branches parcourues sur le chemin passant pas A et B.

EXEMPLE

On tire deux boules de suite *sans remise* dans un sac contenant 4 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, et une boule noire.
On note

- ▷ R_1 l'évènement « la première boule est rouge »,
- ▷ N_1 l'évènement « la première boule est noire »,
- ▷ R_2 l'évènement « la deuxième boule est rouge »,
- ▷ N_2 l'évènement « la deuxième boule est noire ».

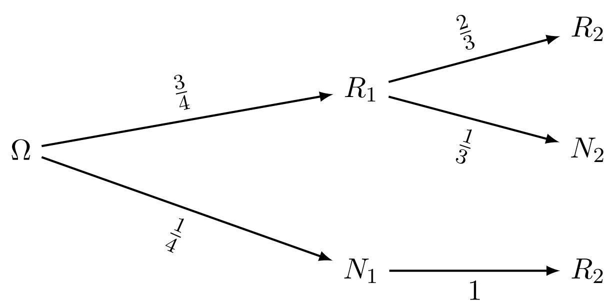
Alors, $N_1 = \overline{R_1}$. Puisque les boules sont indiscernables au toucher, on est dans le cadre de probabilités équiréparties et donc

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{4}$$

car il y a trois boules rouges sur 4 et une seule boule noire.
Lors du deuxième tirage, on a les cas suivants :

1. si auparavant on a tiré une boule rouge, dans le sac il y a encore deux boules rouges et la boule noire. Donc, la probabilité de tirer une boule rouge sera $\dfrac{2}{3}$ et la probabilité de tirer la boule noire $\dfrac{1}{3}$,
2. si auparavant on a tiré la boule noire, dans le sac on aura que des boules rouges. Donc seul l'évènement R_2 est possible, avec probabilité 1.

On en déduit que l'on a l'arbre suivant :



Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(N_2 \mid R_1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_2 \mid N_1) = 1$$

Définition : *Partition*

Soit Ω un univers fini.
On appelle **partition** de Ω une famille $A_1, \ldots, A_k$ d'évènements de Ω tels que

- ▷ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$
- ▷ pour tous i, j avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$
  (on dit alors que les évènements sont deux à deux incompatibles).

Partant de la propriété $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$, on obtient la propriété ci-après :

PROPRIÉTÉ

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Si $A_1, \dots, A_k$ est une partition de Ω, on a

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

On peut alors généraliser la notion d'arbre pondéré vu précédemment en considérant que les branches issues d'un même nœud aboutissent à des évènements formant une partition (et pas seulement à deux évènements complémentaires).

EXEMPLE

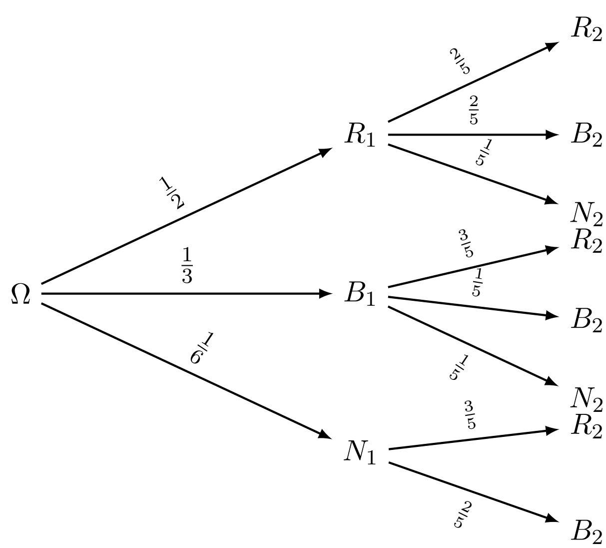
On tire deux boules de suite *sans remise* dans un sac contenant 6 boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges, 2 boules blanches et une boule noire.
On note

- ▷ R_1 l'évènement « la première boule est rouge »,
- ▷ B_1 l'évènement « la première boule est blanche »,
- ▷ N_1 l'évènement « la première boule est noire ».

De même R_2, B_2 et N_2 sont les évènements correspondant au deuxième tirage.

Alors, R_1, B_1, N_1 est une partition de Ω puisqu'au premier tour on tire soit une boule rouge, soit une boule blanche, soit une boule noire.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



On en déduit, par exemple, que l'on a

$$\mathbb{P}(B_2 \mid N_1) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_2 \mid B_1) = \frac{3}{5}$$

Remarque : *Loi des nœuds*

Tout arbre pondéré vérifie la loi des nœuds :

« la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 ».

Cette loi permet de s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur dans la construction de l'arbre.
Mathématiquement, cela signifie que si B est un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et si $A_1, \ldots, A_n$ est une partition de B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \mid B) + \mathbb{P}(A_2 \mid B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \mid B)$$

Ce résultat est une conséquence de la proposition précédente appliquée avec $\Omega = B$.

Remarque : *Intersections et arbres*

Si un chemin parcouru sur l'arbre (de gauche à droite) passe par les évènements $B_1, \ldots, B_n$, alors $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$ est le produit des probabilités associées à chacune des branches parcourues.

Théorème : *Formule des probabilités totales*

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Soit $A_1, \ldots, A_n$ une partition de Ω telle que, pour tout k, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$.
Alors, pour tout évènement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B \mid A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B \mid A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B \mid A_n)$$

EXEMPLE

Si on reprend l'exemple précédent, la loi des nœuds est bien vérifiée. Par exemple :

$$\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

et

$$\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid R_1) + \mathbb{P}(N_2 \mid R_1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\\
\mathbb{P}(B_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid B_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\\
\mathbb{P}(N_1 \cap R_2) &= \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid N_1) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid B_1) + \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}(R_2 \mid N_1)\\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 17.6

On considère une classe de 30 élèves composée de 20 filles et de 10 garçons. Parmi eux, 5 filles et 6 garçons apprennent le violon.
On choisit un élève au hasard.
Soit F l'évènement « l'élève est une fille » et V l'évènement « l'élève étudie le violon ».

1) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience.

2) En déduire la probabilité qu'une fille fasse du violon.

3) Calculer $\mathbb{P}(V)$.

DÉFINITION : *Évènements indépendants*

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et A, B deux évènements de Ω.
On dit que A et B sont **indépendants** si on a l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Remarques

- Pour A et B deux évènements indépendants, on a

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)$$

Si $B \neq \emptyset$, alors $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et donc l'égalité précédente entraîne

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

Ainsi, le fait que B soit réalisé n'influe pas sur la probabilité que A a de se réaliser, ce qui justifie le nom d'évènements indépendants.

- Si A et B sont indépendants, les évènements $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. On a :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Alors, $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \neq \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2)$ donc les évènements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

Exercice 17.7

On tire deux boules de suite *avec remise* dans un sac contenant 4 boules indiscernables au toucher (on est donc dans un cas d'équiprobabilité) : 3 boules rouges et une boule noire.
On note

- R_1 l'évènement « la première boule est rouge »,
- N_1 l'évènement « la première boule est noire ».

Alors, les évènements R_1 et N_1 forment une partition (ces deux situations ne peuvent survenir en même temps et couvrent toutes les possibilités). On définit de même R_2 et N_2.

1) Construire l'arbre pondéré correspondant.

2) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$, $\mathbb{P}(N_1 \cap R_2)$, $\mathbb{P}(R_2)$.

3) Les deux évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

4 Dénombrement

On appelle dénombrement le fait de compter des objets. En probabilités le dénombrement intervient pour déterminer l'ensemble des issues d'un évènement donné.

EXEMPLE

Considérons le jeu du pile ou face. On effectue 3 lancers d'une pièce et on souhaite calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois le côté pile.
On note P lorsque l'on a obtenu le côté pile et F lorsque l'on a obtenu le côté face. Alors, les différents cas possibles pour obtenir au moins deux fois le côté pile sont :

$$PPP, \quad PPF, \quad PFP, \quad FPP$$

Il y a donc 4 cas possibles. On est dans une situation d'équiprobabilité et chaque nouveau lancer est indépendant du précédent, on en déduit que l'on a

$$\mathbb{P}(PPP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Les autres possibilités ont la même probabilité. Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le côté pile est

$$4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Remarquons que si l'on s'intéresse à l'évènement « obtenir exactement deux fois le côté pile », il n'y a plus que 3 cas possibles :

$$PPF, \quad PFP, \quad FPP$$

Donc la probabilité de l'évènement « obtenir exactement deux fois le côté pile » est $\frac{3}{8}$.

DÉFINITION : *Permutation*

On appelle **permutation** de n éléments distincts $a_1, \ldots, a_n$ une disposition ordonnée, sans répétition, de ces n éléments.

Exemples

- ▷ Soient trois éléments distincts a, b et c. Toutes les permutations possibles de ces trois éléments sont

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$$

On remarque que le nombre de permutations ici est 6.

- ▷ Soit les éléments $1, 2, 3, 4$. Déterminons toutes les permutations commençant par 1 :

$$1234, \quad 1243, \quad 1324, \quad 1342, \quad 1423, \quad 1432$$

Il y a donc 6 permutations possibles commençant par 1.

Par le même raisonnement, il y aura aussi 6 permutations possibles commençant par 2, ainsi que par 3 et par 4. Donc, finalement, il existe $4 \times 6 = 24$ permutations possibles des éléments $1, 2, 3, 4$.

Remarque

On peut déterminer toutes les permutations de n éléments distincts $a_1, \ldots, a_n$ en procédant comme dans l'exemple précédent :

- ▷ On choisit un premier élément (qui n'apparaîtra donc qu'en première position).
- ▷ On choisit un deuxième élément (qui n'apparaîtra donc qu'en deuxième position) parmi les éléments restants.
- ▷ On continue ainsi jusqu'à avoir fait apparaître tous les éléments (chacun une seule fois).

De cette façon, on peut calculer le nombre de permutations possibles. En effet,

- ▷ il y a n choix possibles pour le premier élément,
- ▷ il ne reste que $n-1$ choix possibles pour le deuxième élément,
- ▷ on a ensuite $n-2$ choix possibles pour le troisième élément,
- ▷ on continue ainsi et finalement il ne reste qu'un seul choix pour le dernier élément.

Le nombre de permutations possibles s'obtient alors en multipliant les choix possibles, ce qui donne :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

DÉFINITION : *Factorielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** n, noté $n!$, l'entier défini par

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

De plus, par convention, on pose $0! = 1$.

D'après la remarque précédente, on a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ

Le nombre de permutations de n éléments distincts est $n!$.

EXEMPLES

- ▷ Si l'on considère 3 éléments distincts (par exemple, a, b et c comme dans l'exemple précédent), on a

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

  Ainsi, on retrouve bien que le nombre de permutations de trois éléments est 6.
- ▷ De même, pour 4 éléments distincts, on a

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

  Donc il y a 24 permutations possibles de quatre éléments.
- ▷ On tire trois boules de suite *sans remise* dans une urne contenant trois boules de couleurs différentes : jaune (J), rouge (R) et bleue (B). L'ensemble des cas possibles correspond alors à toutes les permutations des éléments J, R et B. Il y a donc $3! = 6$ cas possibles.

EXERCICE 17.8

1) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre ?

2) De combien de manières différentes peut-on placer 5 personnes l'une à côté de l'autre autour d'une table ronde ?

Déterminer le nombre de permutations ne suffit pas, en général, pour dénombrer l'ensemble des cas possibles d'un évènement. Pour cela, on a besoin de la notion d'arrangement.

DÉFINITION : *Arrangement*

On appelle **arrangement** de n éléments distincts $a_1, \dots, a_n$ une disposition ordonnée, sans répétition, d'une partie de ces n éléments.

REMARQUES

- ▷ Une permutation agit sur les n éléments considérés. Tandis qu'un arrangement peut ne considérer que certains des n éléments.
- ▷ En particulier, un arrangement sur tous les n éléments est une permutation.

EXEMPLE

On tire deux boules de suite *sans remise* dans une urne contenant trois boules de couleurs différentes : jaune (J), rouge (R) et bleue (B).
On s'intéresse alors aux couleurs obtenues sans prendre en compte l'ordre d'apparition des boules. Par exemple, si l'on a obtenu une boule jaune et une boule rouge, on note le résultat JR ou RJ (les deux signifient le même résultat).

Alors, les résultats de cette expérience sont les paires BJ, BR et JR. Ce sont des arrangements de 2 éléments parmi les 3 éléments J, R et B.

Il ne s'agit pas de permutations car chaque résultat ne contient que 2 éléments.
De plus, on remarque que l'on a obtenu seulement 3 résultats possibles.

Pour calculer le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi n on utilise le résultat ci-dessous.

PROPOSITION

Soient n éléments distincts $a_1, \dots, a_n$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.
Alors, le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi les n éléments

$a_1, \ldots, a_n$ est noté $\binom{n}{k}$ et est donné par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

▷ Reprenons l'exemple précédent du tirage *sans remise* de deux boules parmi trois.
On a
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2\times 1} = 3$$
On retrouve bien ici qu'il y a 3 arrangements possibles.

▷ On lance 4 fois une pièce et l'on souhaite déterminer le nombre de possibilités d'obtenir deux fois pile.
Il s'agit alors de trouver le nombre d'arrangements de 2 éléments parmi 4 :
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{(1\times 2)(1\times 2)} = \frac{4\times 3}{2} = 6$$
On en déduit qu'il existe 6 possibilités d'obtenir deux fois le côté pile lorsque l'on effectue 4 lancers d'une pièce.

Exercice 17.9

Les trois mousquetaires (donc quatre personnes avec d'Artagnan), ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève en premier et prend deux bottes au hasard.

1) Combien de possibilités s'offrent à lui ?

2) Combien de choix a-t-il tels que les deux bottes forment une paire (une droite et une gauche quelconques) ?

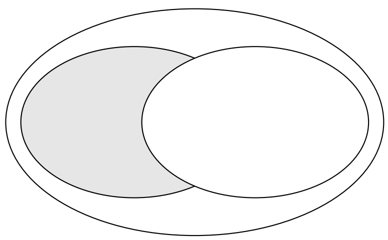
5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 17.1

On obtient :

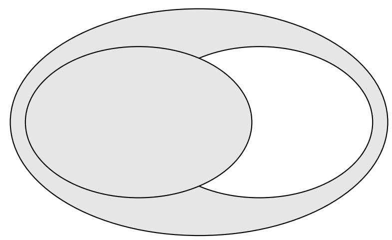
1)

$A \cap \overline{B}$



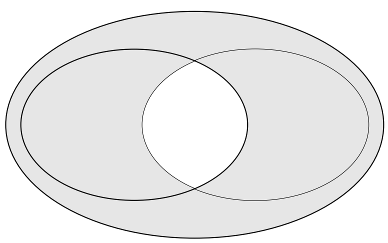
2)

$A \cup \overline{B}$



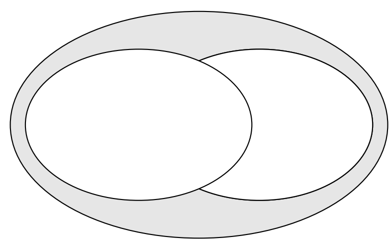
3)

$\overline{A} \cup \overline{B}$



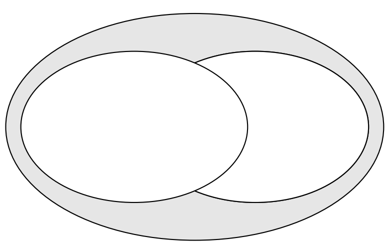
4)

$\overline{A} \cap \overline{B}$



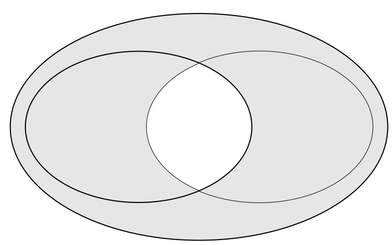
5)

$\overline{A \cup B}$



6)

$\overline{A \cap B}$



Corrigé Exercice 17.2

1) L'univers de l'expérience est $\Omega = \{R, B\}$.

2) L'univers de l'expérience est $\Omega = \{RR, RB, BR\}$.

Corrigé Exercice 17.3

On a :

1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

3) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

4) $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

5) $A \cap B = \{6, 12\}$

6) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$

7) $A \cap \overline{B} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$

8) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$

9) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$

10) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7, 11, 13\}$

11) $\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7, 11, 13\}$

12) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$

Corrigé Exercice 17.4

Puisqu'il s'agit d'un dé équilibré, toutes les faces ont la même probabilité de sortir, soit $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc équirépartie.

1) On a $A = \{2, 4, 6\}$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2) On a $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(4) + \mathbb{P}(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Corrigé Exercice 17.5

On a

1) $\mathbb{P}(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ car il y a quatre rois dans un jeu de 32 cartes ;

2) $\mathbb{P}(T) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ car il y a huit cartes de trèfles dans un jeu de 32 cartes ;

3) $\mathbb{P}(R \cap T) = \dfrac{1}{32}$ car il y a un seul roi de trèfle dans un jeu de 32 cartes ;

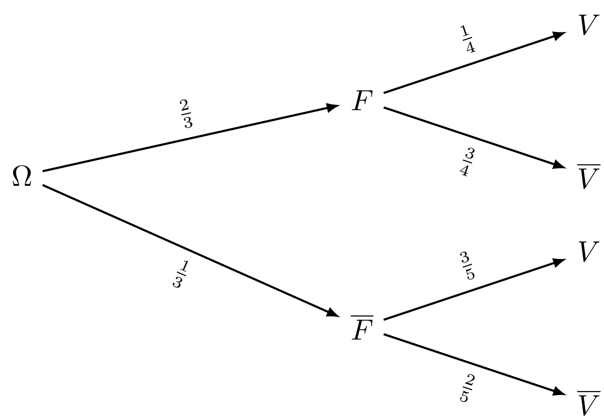
4) D'après la formule $\mathbb{P}(R \cup T) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(R \cap T)$, on obtient :

$$\mathbb{P}(R \cup T) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

On peut aussi remarquer que $R \cup T$ est l'évènement « tirer un roi ou un trèfle ». Or il y a quatre rois et 8 cartes de trèfles, mais il faut enlever le rois de trèfle qui est compté deux fois. On obtient alors $4 + 7 = 11$ possibilités parmi 32.

Corrigé Exercice 17.6

1) On a l'arbre pondéré suivant :



2) La probabilité qu'une fille fasse du violon est :

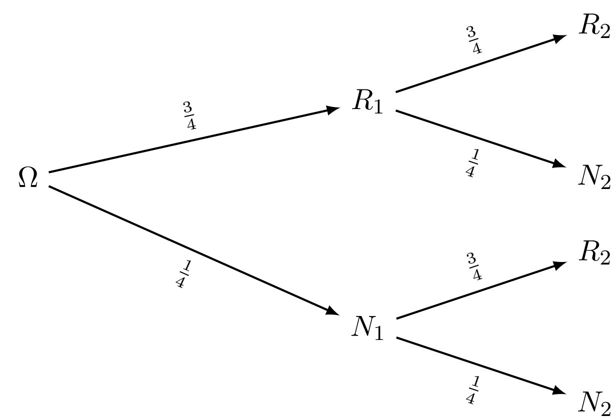
$$\mathbb{P}(F \cap V) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(V \mid F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

3) On a :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(F \cap V) + \mathbb{P}(\overline{F} \cap V) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

Corrigé Exercice 17.7

1) On a l'arbre pondéré suivant :



2) On a :

- ▷ $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$
- ▷ $\mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(R_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$
- ▷ $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) = \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

3) On a

$$\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$$

Donc R_1 et R_2 sont indépendants.
Ce résultat dépend du fait que l'on tire deux boules de suite *avec remise*. Ainsi, si l'on a tiré une boule rouge en premier, cela n'influence pas le fait de tirer une boule rouge en second.

Corrigé Exercice 17.8

1) Il y a 5 choix pour la 1ère place, 4 choix pour la 2ème place, puis 3 choix, puis 2 puis 1 choix. Donc il y a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, c'est-à-dire $5!$ manières différentes de placer ces 5 personnes.

2) On a vu dans le point précédent qu'on a $5!$ façons différentes pour placer 5 personnes. Mais il faut faire attention, ici on est dans le cas d'une table ronde. La première personne peut être placée n'importe où sans changer la disposition globale. Il y a 5 possibilités pour la position du premier et cela entraîne que le nombre obtenu 5! est 5 fois trop élevé ! Donc on a

$$\frac{5!}{5} = 4!$$

manières différentes de placer 5 personnes autour d'une table ronde.

Corrigé Exercice 17.9

1) Il s'agit de choisir deux éléments parmi 8, donc il y a $\binom{8}{2} = 5040$ choix possibles.

2) Il y a $\binom{4}{1}$ choix possibles pour une botte gauche et $\binom{4}{1}$ choix possibles pour une botte droite. Le nombre total de choix formant une paire est donc $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1}$. Ce qui donne

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} \times \frac{24}{6} = 16$$

choix possibles.

6 Exercices

Exercice 17.10

Dans un centre de vacances, on propose aux touristes deux activités sportives : le golf et le tennis. Sur les 240 personnes du centre, 126 font seulement du tennis, 42 font seulement du golf, 30 font du tennis et du golf et les autres ne font pas de sport.
On interroge une personne prise au hasard. Calculer les probabilités d'avoir choisi :

1) une personne faisant du golf,

2) une personne faisant du golf et du tennis,

3) une personne faisant du golf ou du tennis,

4) une personne faisant un seul des deux sports.

EXERCICE 17.11

Un marchand a vendu 100 voitures. On s'intéresse alors au nombre de voitures parmi ceux-ci ayant nécessité des réparations sur les trois premières années après l'achat.

Le marchand observe que 20 voitures ont nécessité une réparation dans la deuxième année qui a suivi l'achat et 5 lors de la troisième année qui a suivi l'achat, dont 10 avaient déjà été réparées lors de la deuxième année.
On note

▷ R_2 l'évènement : « la voiture a nécessité une réparation dans la deuxième année »,

▷ R_3 l'évènement : « la voiture a nécessité une réparation dans la troisième année ».

1) Quel est l'univers Ω associé à cette expérience ?

2) Déterminer à quoi correspondent les évènements $R_2 \cap R_3$, $\overline{R_2}$ et $\overline{R_2} \cap R_3$.

3) Calculer $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3)$, $\mathbb{P}(\overline{R_2})$ et $\mathbb{P}(\overline{R_2} \cap R_3)$.

4) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

  a) « la voiture a subi au moins une réparation »,

  b) « la voiture n'a subi aucune réparation »,

  c) « la voiture a subi une seule réparation ».

5) Sachant que la voiture a été réparé la seconde année, quelle est la probabilité qu'elle le soit aussi la troisième ? Exprimer ce résultat à l'aide de $\mathbb{P}(R_2)$ et $\mathbb{P}(R_2 \cap R_3)$.

EXERCICE 17.12

Evgeni Plushenko, le célèbre champion de patinage artistique, est inquiet avant la finale du championnat du monde. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0.95, la deuxième de 0.93 et la troisième de 0.9.
On suppose que le moral de Plushenko est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.

1) Quelle est la probabilité que Plushenko réussisse ses trois figures ?

2) Quelle est la probabilité d'en manquer une seule ?

3) D'en manquer deux ?

4) De manquer les trois ?

Exercice 17.13 Extrait BAC S - 2006

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée. Pour $k \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré, de sorte que l'on a

$$p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.3 \quad \text{et} \quad p_4 = 0.4$$

On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

Exercice 17.14 Extrait BAC S - 2008

Dans une kermesse, un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges. La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges. Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- ▷ Le joueur lance la roue A.
- ▷ S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- ▷ S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »,

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Déterminer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$.

EXERCICE 17.15

Une secrétaire a 6 enveloppes portant chacune l'adresse d'un client différent et elle a aussi 6 lettres différentes à envoyer à chacun des 6 clients. Elle ne sait pas pour chaque client quelle lettre doit être destinée, donc elle met au hasard chacune des 6 lettres dans chacune des 6 enveloppes et les poste.

1) Combien de combinaisons lettre-enveloppe y-a-il ?

2) Combien de possibilités y-a-t-il que personne ne reçoit sa lettre ?

EXERCICE 17.16

On tire successivement 4 jetons d'un sac contenant 20 jetons : 10 verts, 7 jaunes et 3 rouges.
Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

1) 4 jetons verts

2) 4 jetons jaunes

3) 2 jaunes et 2 rouges

4) 2 verts, 1 jaune et 1 rouge

5) au moins un jeton de chaque couleur

6) au moins 3 jeton verts

CHAPITRE 18

Variables aléatoires

Ce dernier chapitre est la continuité du précédent. Dans de nombreuses expériences aléatoires, il y a une notion de gain. Par exemple, si l'on considère deux personnes jouant au lancer de dés de sorte que celui qui obtient le plus grand résultat gagne la partie ou, plus simplement, le jeu du loto. En probabilité, la notion de gain est exprimée par l'utilisation de variables aléatoires. Ainsi, on introduit d'abord la notion de variable aléatoire discrète, définie sur un univers fini, pour laquelle on donne différentes propriétés. Ensuite, on présente deux lois de probabilités usuelles des variables aléatoires discrètes : la loi de Bernoulli et la loi binomiale. La section suivante présente les variables aléatoires continues, qui seront définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Enfin, on présente trois lois de probabilités usuelles des variables aléatoires continues : la loi uniforme continue, la loi exponentielle et la loi normale.

Sommaire

1 Variable aléatoire discrète

Dans cette première partie, on considère le cas de variables aléatoires sur un univers **fini** Ω.

DÉFINITIONS : *Variable aléatoire discrète et loi de probabilités*

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

1) On appelle **variable aléatoire** X sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

2) Soit X une variable aléatoire sur Ω. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X. Alors, on définit la **loi de probabilités** $\mathbb{P}_X$ de X par

$$\forall\ k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$

où « $X = k$ » est l'évènement correspondant aux issues pour lesquelles X vaut k.

REMARQUE

La définition précédente est celle de variables aléatoires *discrètes*. Cette dénomination « discrète » vient du fait que, en mathématiques, on distingue les ensembles dits continus et les ensembles dits discrets (notions qui dépassent le niveau de ce cours). En particulier, tout ensemble fini est discret.
Dans notre cas, puisque l'univers Ω considéré est fini, l'ensemble $X(\Omega)$ est aussi fini et donc est un ensemble discret.

EXEMPLES

▷ On considère l'expérience aléatoire du lancer d'un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon il perd le double de la valeur indiquée par le dé. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on définit la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ par, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \text{le gain, positif ou négatif, du joueur s'il obtient la face } \omega$$

D'après la règle du jeu donnée plus haut et la définition de X, on a

$$X(1) = -2, \quad X(2) = 4, \quad X(3) = -6$$
$$X(4) = 8, \quad X(5) = -10, \quad X(6) = 12$$

Dans ce cas, par exemple, « $X = 4$ » est l'évènement « obtenir un gain de 4 » et, d'après les égalités ci-dessus, cet évènement a pour seule issue $\omega = \{2\}$. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(2) = \frac{1}{6}$$

De plus, on remarque que l'on a $X(\Omega) = \{-2,\ 4,\ -6,\ 8,\ -10,\ 12\}$ et la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	-10	-6	-2	4	8	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

▷ On lance une pièce deux fois de suite. À chaque fois que l'on obtient pile, on gagne 1€ et 0 sinon.
L'univers Ω est donné par $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu.
Les différents gains possibles sont les éléments de $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et on a

$$X(PP) = 2, \quad X(PF) = X(FP) = 1 \quad \text{et} \quad X(FF) = 0$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Les exemples précédents montrent qu'une variable aléatoire correspond généralement à un gain (positif ou négatif) lors d'une expérience aléatoire. Il est alors intéressant de pouvoir déterminer via une variable aléatoire quels sont les gains en moyenne. Pour cela, on introduit la notion d'espérance d'une variable aléatoire.

Définitions : *Espérance, variance et écart-type*

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω.
On note

$$X(\Omega) = \{k_1, \ldots, k_n\} \quad \text{et} \quad p_i = \mathbb{P}(X = k_i)$$

1) On appelle **espérance** de X le nombre réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= k_1 p_1 + k_2 p_2 + \ldots + k_n p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i\, p_i\end{aligned}$$

2) La **variance** de X est le nombre réel, noté $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, défini par

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= (k_1 - \mathbb{E}(X))^2 p_1 + (k_2 - \mathbb{E}(X))^2 p_2 + \ldots + (k_n - \mathbb{E}(X))^2 p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (k_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i\end{aligned}$$

3) L'**écart-type** de X est le nombre $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$.

Remarques

- ▷ L'espérance est une moyenne. Dans le cas d'un jeu, c'est un gain moyen (ou une perte moyenne, si elle est négative). Un jeu est **équilibré** si l'espérance (de gain) est nulle.
- ▷ L'écart-type est une mesure de la dispersion autour de la moyenne. Autrement dit, plus l'écart type est grand, plus il est possible que le gain s'éloigne du gain moyen.

Exemples

- ▷ Reprenons l'exemple du jeu de lancer d'un dé équilibré à 6 faces où le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire et perd le double de la valeur indiquée par le dé sinon.
  La variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie par, pour tout $\omega \in \Omega$,

  $$X(\omega) = \text{le gain, positif ou négatif, du joueur s'il obtient la face } \omega$$

  et sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	-10	-6	-2	4	8	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

  On en déduit que l'espérance de X est donnée par

  $$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{1}{6} - 6 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

  Ainsi, en effectuant ce jeu de nombreuses fois de suite, on obtient en moyenne un gain de 1.

La variance est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(X) &= \frac{(-10-1)^2}{6} + \frac{(-6-1)^2}{6} + \frac{(-2-1)^2}{6} + \frac{(4-1)^2}{6} \\ &\quad + \frac{(8-1)^2}{6} + \frac{(12-1)^2}{6} \\ &= \frac{121+49+9+9+49+121}{6} \\ &= \frac{179}{3}\end{aligned}$$

dont on déduit l'écart type

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{179}{3}} \sim 7.7$$

Ainsi, en effectuant ce jeu de nombreuses fois de suite, la plupart du temps le joueurs aura un gain compris entre $1-7.7=-6.7$ et $1+7.7=8.7$.

▷ Reprenons l'exemple du lancer d'une pièce deux fois de suite, où l'on gagne 1€ à chaque pile obtenu et 0 sinon.
Soit X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu. D'après la loi de probabilité obtenue précédemment, on a

$$\mathbb{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De plus, $\sigma(X) \sim 0.7$.

Exercice 18.1

On considère l'expérience consistant à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes avec les règles suivantes :

▷ si l'on tire un roi, on gagne 5 €,

▷ si l'on tire un cœur, on gagne 2 €,

▷ pour toute autre carte, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain obtenu.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) En déduire l'espérance de X.

REMARQUES

- ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers fini Ω.
  Alors, pour tous réels a et b, $aX+bY$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ donc $aX+bY$ est aussi une variable aléatoire sur Ω.
- ▷ Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ la fonction constante égale à $a\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)=a$. Alors, X est une variable aléatoire sur Ω et on a

$$X(\Omega)=\{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=a)=1$$

  On en déduit

$$\mathbb{E}(X)=a\mathbb{P}(X=a)=a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X)=(a-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=a)=0$$

  En général, on note simplement a la variable aléatoire constante égale à a.
- ▷ D'après les deux points vus ci-dessus, $X-\mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire

PROPOSITION

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω.
Alors, pour tous réels a et b, on a

$$\mathbb{E}(aX+b)=a\,\mathbb{E}(X)+b \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}ar(aX+b)=a^2\mathbb{V}ar(X)$$

REMARQUE

D'après la proposition précédente, on a en particulier

$$\mathbb{E}\left(X-\mathbb{E}(X)\right)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)\right)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0$$

2 Exemples de lois de variables aléatoire discrètes

Deux variables aléatoires différentes associées à des expériences aléatoires différentes peuvent avoir une même loi de probabilités (à la dépendance d'un paramètre près). Il est donc intéressant d'étudier de façon générale les lois de probabilités les plus souvent utilisées afin d'obtenir directement des résultats pour toute variable aléatoire suivant l'une de ces lois.

Dans le cadre des variables aléatoires discrètes, on donne ci-après deux exemples de lois utiles : la loi de Bernoulli et la loi binomiale.

2.1 Loi de Bernoulli

Cette loi est considérée dans le cas d'une expérience n'ayant que deux issues possibles : succès ou échec.

Définition : *Loi de Bernoulli*

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω.
On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0;1]$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

et

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

Remarque

Lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, l'évènement $(X = 1)$ est considéré comme un « succès » et l'évènement $(X = 0)$ est considéré comme un « échec ».

Exemples

- Au jeu du pile ou face, on note X la variable aléatoire valant 1 si l'on obtient pile et 0 si l'on obtient face.
  Alors, on a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
  $$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$$
  Donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- On considère le lancer d'un dé équilibré à 6 faces. On gagne le jeu si l'on obtient un 6.
  Soit Y la variable aléatoire valant 0 si l'on perd et 1 si l'on gagne. Alors, on a
  $$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$
  Donc on a $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$.

PROPOSITION

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in [0;1]$.
Alors, on a

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = p(1-p)$$

EXERCICE 18.2

Montrer la proposition précédente.

EXEMPLE

Dans les deux exemples précédents, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \frac{1}{2}$$

et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{V}ar(Y) = \frac{5}{36} \quad \text{et} \quad \sigma(Y) \sim 0.37$$

EXERCICE 18.3

On lance deux dés parfaitement équilibrés et on note le plus grand des numéros obtenus.
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le plus grand des numéros obtenus est strictement inférieur à 4 et 0 sinon.
Montrer que X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et déterminer p.

2.2 Loi binomiale

La loi binomiale est la loi que l'on considère lorsque l'on effectue plusieurs fois de suite une expérience où la variable aléatoire considérée suit une loi de Bernoulli.

DÉFINITION : *Loi binomiale*

On considère une expérience aléatoire amenant soit à un succès avec une probabilité $p \in [0;1]$, soit à un échec avec une probabilité $1 - p$.

On réitère cette expérience n fois, où $n \in \mathbb{N}^*$, de manière **indépendante**. On considère alors la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus.

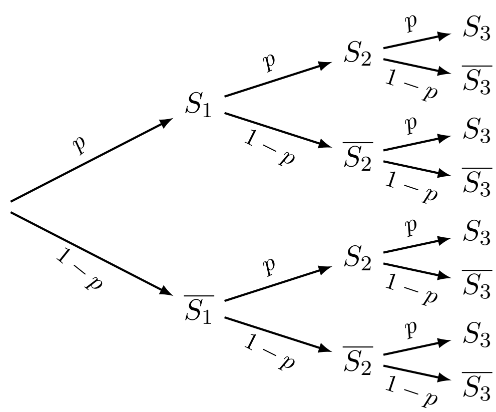
Alors, on dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, ce que l'on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

EXEMPLE

On réitère trois fois de suite une expérience aléatoire avec un succès de probabilité $p \in [0; 1]$ et un échec de probabilité $1 - p$ (on pourra penser à un jeu de pile ou face avec $p = \frac{1}{2}$).

Soit X la variable aléatoire qui dénombre les succès d'une telle expérience, où X vaut 1 pour un succès et 0 pour un échec. Autrement dit, $X \sim \mathcal{B}(3, p)$.

Afin de déterminer la loi de probabilité de X, on construit l'arbre pondéré correspondant (où S_i et $\overline{S_i}$ désignent, respectivement, les évènements « succès » et « échec » à la i-ème itération) :



À partir de cet arbre, déterminons la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
Les différentes possibilités d'obtenir $X = 2$ sont

- ▷ obtenir succès, succès, puis échec (S_1, S_2, $\overline{S_3}$),
- ▷ obtenir succès, échec, puis succès (S_1, $\overline{S_2}$, S_3),
- ▷ obtenir échec, succès, puis succès ($\overline{S_1}$, S_2, S_3).

Puisque les expériences sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) = \mathbb{P}(S_1) \times P(S_2) \times P(\bar{S}_3) = p^2(1 - p)$$

et, de même,

$$\mathbb{P}(S_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3) = \mathbb{P}(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) = p^2(1-p)$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) + \mathbb{P}(S_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3) + \mathbb{P}(\bar{S}_1 \cap S_2 \cap S_3) \\ &= 3 \times p^2(1-p)\end{aligned}$$

Remarque

Dans l'exemple précédent, pour calculer la probabilité $\mathbb{P}(X=2)$, il a suffi de déterminer tous les arrangements de 2 éléments parmi 3.

En généralisant la remarque précédente, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.
Alors, $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus, l'espérance et la variance de X sont données par

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = np(1-p)$$

Exemples

▷ On joue au jeu du pile ou face 4 fois de suite où un succès correspond à obtenir pile.

Soit X le nombre de succès obtenus. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$, donc

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \binom{4}{3}\frac{1}{2^3}\frac{1}{2^{4-3}} = 4 \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$$

▷ On considère une urne contenant : 3 boules rouges, 2 boules jaunes et 2 boules vertes.

On tire une boule dans l'urne, si celle-ci est verte c'est un succès, sinon c'est un échec. Ensuite, on remet la boule dans l'urne (les expériences sont donc bien indépendantes). On réitère l'expérience 3 fois et on note Y le nombre de succès obtenus.
Alors, $Y \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{7}\right)$, donc

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{5}{7} = \frac{60}{343}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad \sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(Y)} = \sqrt{\frac{6}{7}\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{30}}{7} \sim 0.78$$

Exercice 18.4

On lance trois dés et on considère qu'un succès correspond à obtenir un 6. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois 6 ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 exactement deux fois ? Et celle d'obtenir au moins deux fois 6 ?

3 Variables aléatoires continues

Les variables aléatoires continues sont définies sur un univers infini. Or nous n'avons pas vu comment définir une loi de probabilité sur un univers infini. Cette difficulté peut être contournée en définissant directement la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue. Pour cela, on introduit d'abord la notion de densité.

Définition : *Fonction de densité de probabilité*

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle **fonction de densité de probabilité** sur I, toute fonction f sur I qui soit continue et positive sur I et telle que

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1$$

EXEMPLES

- ▷ La fonction $x \mapsto 2x$ est une densité de probabilité sur $[0;1]$ car c'est une fonction continue et positive sur $[0;1]$ qui vérifie

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big[x^2\Big]_0^1 = 1$$

- ▷ La fonction $x \mapsto 2x$ n'est pas une densité de probabilité sur $[-1;1]$ car elle n'est pas positive sur cet intervalle.
- ▷ Pour $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto k\,x^2$ est une densité de probabilité sur $[0;1]$ si et seulement si $k = 3$. En effet, on a

$$\int_0^1 k\,x^2\,dx = \left[\frac{k}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{k}{3}$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 k\,x^2\,dx = 1$ si et seulement si $\dfrac{k}{3} = 1$, c'est-à-dire $k = 3$.

- ▷ Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Alors, $x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$. En effet, on a

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = (b-a)\,\frac{1}{b-a} = 1$$

La notion de densité de probabilité permet de définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue.

DÉFINITION : *Variable aléatoire continue*

Soient Ω un univers infini, X une fonction de Ω dans un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et f une fonction de densité de probabilité sur I.
Alors, on dit que X est une **variable aléatoire continue** de densité f si l'on définit sa loi de probabilité par : pour tous $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha \leq \beta$, on a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

De plus, dans ce cas, on note

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) = \mathbb{P}(\alpha \leq X \leq b) = \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq \beta) = \mathbb{P}(a \leq X \leq \beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$$

Remarque

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X, les évènements associés à X étaient donnés sous la forme $(X = k)$ avec $k \in X(\Omega)$.
Lorsque la variable aléatoire X est continue et de densité f sur I, pour tout $\alpha \in I$, on a

$$\mathbb{P}(X = \alpha) = \mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

En particulier, pour tous $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha < \beta$, on obtient

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha < X \leq \beta) = \mathbb{P}(\alpha \leq X < \beta) = \mathbb{P}(\alpha < X < \beta)$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire continue de densité $f : x \mapsto 3x^2$ sur $[0;1]$.
Alors, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Remarque : *Cas de bornes infinies*

Les définitions de fonctions de densité de probabilité et de variable aléatoire de densité s'étendent aux intervalles de la forme $[a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ et à $\mathbb{R}$. Pour cela on utilise la notion de limite.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On va définir $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ pour $I = [a;+\infty[$, $I = \,]-\infty;b]$ et $I = \mathbb{R}$.

- ▷ Supposons $I = [a;+\infty[$. Si

$$\int_a^M f(x)\,dx$$

admet une limite quand M tend vers $+\infty$, on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cette limite, c'est-à-dire

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

- ▷ Supposons $I = \,]-\infty;b]$. Si

$$\int_m^b f(x)\,dx$$

admet une limite quand m tend vers $-\infty$, on note $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ cette limite, c'est-à-dire

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty} \int_m^b f(x)\,dx$$

▷ Supposons $I = \mathbb{R}$. Si les deux intégrales suivantes existent :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

on note $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ leur somme, c'est-à-dire

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

D'après les définitions précédentes, on définit une fonction de densité de probabilité f sur un intervalle quelconque I comme étant une fonction continue et positive sur I telle que

$$\int_I f(x)\,dx = 1$$

Exemples

▷ Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;+\infty[$.
Alors, f est continue et positive sur $[0;+\infty[$ et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \mathrm{e}^{-x}\;dx \\ &= \lim_{M\to+\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-M}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc f est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

▷ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, où $k \in \mathbb{R}$.
Alors, f est continue et positive sur $[0;+\infty[$.
Déterminons pour quelle valeur de k, f est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

On a

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} k\int_0^M \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{k}{\lambda}\Big[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big]_0^M$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{k}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda M})$$
$$= \frac{k}{\lambda}$$

Donc $f : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité si et seulement $\frac{k}{\lambda} = 1$, c'est-à-dire $k = \lambda$.

Définitions : *Espérance, variance et écart-type*

Soient f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire continue de densité f.

- L'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \int_I x f(x)\,dx$$

- La **variance** de X, notée $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, est le réel défini par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_I (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)\,dx$$

- L'**écart-type** de X, notée $\sigma(X)$, est le réel défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$$

Remarque

Comme dans le cas des variables aléatoires discrètes, l'espérance de X est la moyenne de la variable aléatoire X et l'écart-type est l'éloignement moyen autour de $\mathbb{E}(X)$.

Autrement dit, les valeurs prises par X ont une forte probabilité d'appartenir à l'intervalle $[\mathbb{E}(X)-\sigma(X);\mathbb{E}(X)+\sigma(X)]$.

EXEMPLES

▷ Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto 3x^2$ sur $[0;1]$.
Alors, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x(3x^2)\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^4 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{16}x^2\,dx \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{8} + \frac{9}{16} \\ &= \frac{3}{80}\end{aligned}$$

▷ Soit Y une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;+\infty[$.
On remarque que la fonction $F : x \mapsto -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$. En effet, la formule de dérivée d'un produit entraîne

$$F' : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\Big[-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty}\Big(-(M+1)\,\mathrm{e}^{-M} + 1\Big) \\ &= 1 - \underbrace{\lim_{M\to+\infty} M\,\mathrm{e}^{-M}}_{=0} - \underbrace{\lim_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-M}}_{=0} \\ &= 1\end{aligned}$$

4 Exemples de lois de variables aléatoires continues

Comme dans le cas de variables aléatoires discrètes, on donne ci-après trois exemples de lois de variables aléatoires continues : la loi uniforme, la loi exponentielle et la loi normale.

4.1 Loi uniforme continue $\mathcal{U}([a;b])$

De même que pour la loi uniforme d'une variable aléatoire discrète il s'agit de la loi vérifiée par une variable aléatoire dans le cas d'équiprobabilités.

Définition : *Loi uniforme* $\mathcal{U}([a;b])$

Soient a, b deux réels avec $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$.

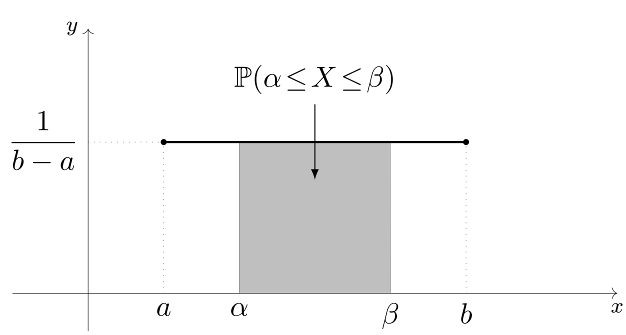
Si X est une variable aléatoire continue sur $[a;b]$ de densité f, on dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{U}([a;b])$.

Remarques

- Une variable aléatoire suit une loi uniforme lorsque l'on considère un tirage aléatoire d'un nombre dans l'intervalle $[a;b]$ avec la même probabilité pour chaque nombre.
- On a montré dans le premier exemple de la section précédente que $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ est bien une densité sur $[a;b]$.
- Par définition, si $X \sim \mathcal{U}([a;b])$, alors pour tous α, β de $[a;b]$, on a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

ce qui correspond à l'aire du rectangle grisé de la figure ci-dessous.



PROPOSITION

Soient a, b deux réels avec $a < b$ et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{U}([a;b])$.
Alors, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

EXERCICE 18.5

Montrer la proposition précédente.

EXEMPLES

▷ Si $X \sim \mathcal{U}([0;3])$, on a

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$$

▷ Soit T le temps d'attente (en minutes) à un arrêt de bus. On suppose que la variable aléatoire T suit la loi uniforme uniforme sur $[0;15]$. Alors, la probabilité d'attendre entre 7 et 12 minutes est

$$\mathbb{P}(7 \leq T \leq 12) = \frac{12-7}{15-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

EXERCICE 18.6

D'après une enquête effectuée dans un lycée, la durée du trajet entre le domicile des élèves et le lycée est comprise entre 30 minutes et 2 heures. On interroge au hasard les élèves sur leur temps de transport.
Soit X la variable aléatoire égale au temps de trajet d'un élève.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre une heure et une heure et demie ?

3) Calculer la durée moyenne du trajet domicile-lycée.

4.2 Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition : *Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$*

Soient $\lambda > 0$ et f_λ la densité définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\forall\ x \in [0;+\infty[\ ,\quad f_\lambda(x) = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}$$

Si X est une variable aléatoire continue sur $[0;+\infty[$ de densité f_λ, on dit que X suit une **loi exponentielle** sur $[0;+\infty[$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

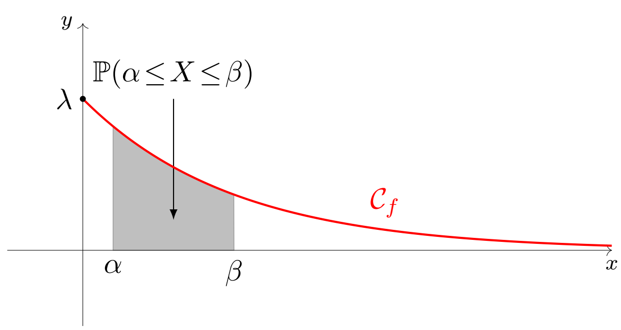
Remarques

▷ On a montré dans la section précédente (exemple pour les bornes infinies) que f_λ est bien une densité sur $[0;+\infty[$.

▷ Par définition, si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tous α, β de $[0;+\infty[$, on a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\ dx = \mathrm{e}^{-\lambda\beta} - \mathrm{e}^{-\lambda\alpha}$$

ce qui correspond à l'aire grisée de la figure ci-dessous.



Proposition

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
Alors, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

En particulier, $\sigma(X) = \mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration. On remarque que la fonction $F : x \mapsto \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \lambda x \, \mathrm{e}^{-lambdax}$.

En effet, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-1)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= (-1 + \lambda x + 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M (F(M) - F(0)) \\ &= \lim_{M\to+\infty} \left(-M - \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda M} + \frac{1}{\lambda} \\ &= -\underbrace{\lim_{M\to+\infty} M\,\mathrm{e}^{-\lambda M}}_{=0} - \frac{1}{\lambda}\underbrace{\lim_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda M}}_{=0} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Pour le calcul de $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$, on admet le résultat. □

REMARQUE

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
Alors, pour tout $\alpha \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq \alpha) &= \int_\alpha^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_\alpha^\beta \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to+\infty} (\mathrm{e}^{-\lambda\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda\beta}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda\alpha} \end{aligned}$$

La propriété de la remarque permet dans certains cas de déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle.

EXEMPLE

Considérons la variable aléatoire X modélisant la durée de vie sans panne d'un type de téléviseur. On part de l'hypothèse qu'il y a 2 chances sur 3 de ne pas avoir de panne pendant les cinq premières années.

Supposons que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminons alors λ.
D'une part, d'après l'hypothèse, on a $\mathbb{P}(X \geq 5) = \dfrac{2}{3}$.
D'autre part, puisque $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda}$ d'après la remarque.
On en déduit $\mathrm{e}^{-5\lambda} = \dfrac{2}{3}$, d'où $\lambda = -\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$. On remarque que l'on a $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, donc λ est bien positif.
Alors, la durée de vie moyenne de ce type de téléviseur est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{-5}{\ln(\frac{2}{3})} \approx 12 \text{ ans}$$

Pour chaque téléviseur de ce type, ses chances de fonctionner plus longtemps que cette durée moyenne sont

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda\frac{1}{\lambda}} = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37$$

Exercice 18.7

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On suppose que $\mathbb{P}(X \leq 2) = \dfrac{1}{2}$.

1) Déterminer λ.

2) Calculer $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$.

4.3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

La loi normale est la plus connue et la plus importante des lois de probabilité des variables aléatoires continues. Celle-ci est utilisée en biologie, physique, économie, etc.

Définition : *Loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Soient μ, σ deux réels avec $\sigma > 0$ et f la densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

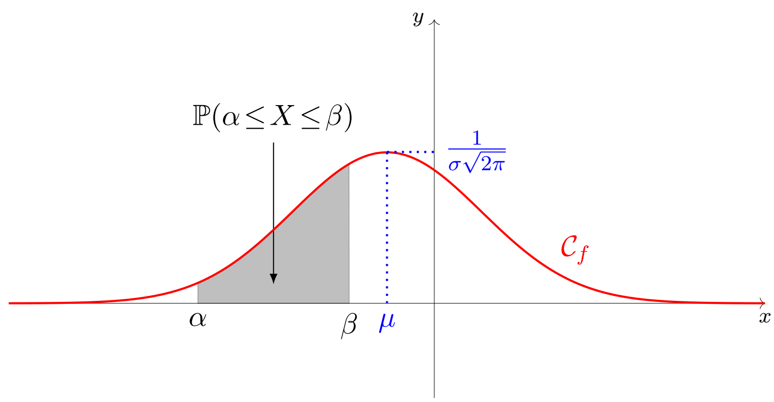
Si X est une variable aléatoire continue sur $\mathbb{R}$ de densité f, on dit que X suit une **loi normale** sur $\mathbb{R}$, ce que l'on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque

- On admet que f est bien une densité sur $\mathbb{R}$.
- Par définition, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tous α, β de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

  Mais cette densité n'admet pas de primitive que l'on puisse exprimer à l'aide de fonctions usuelles (autrement dit on ne sait pas l'écrire). Néanmoins, la probabilité précédente correspond à l'aire grisée de la figure ci-dessous.



  De plus, d'après la figure, on peut remarquer que
  - ⋆ la courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$;
  - ⋆ le maximum de la courbe est atteint en μ et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Proposition

Soient μ, σ deux réels avec $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors, on a

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$$

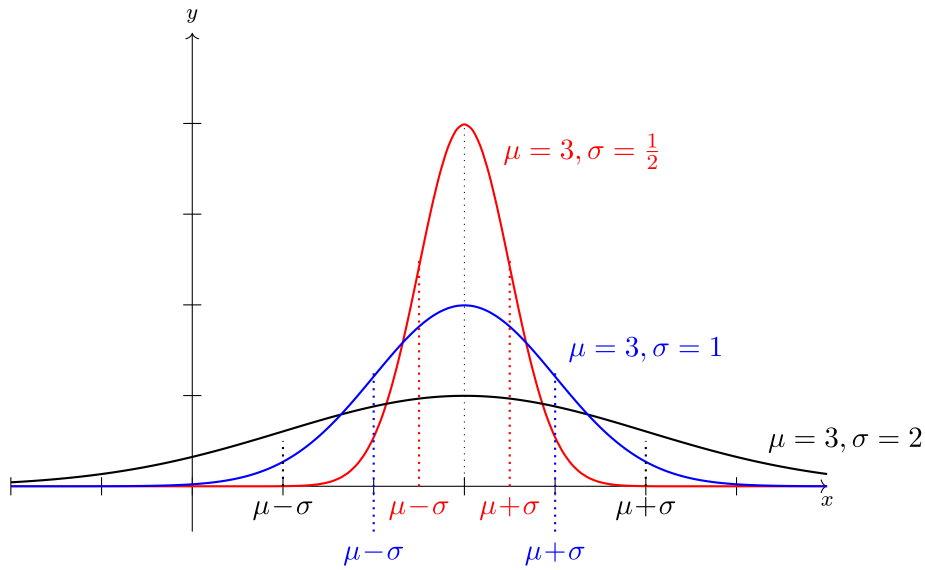
En particulier, l'écart-type de X est σ :

$$\sigma(X) = \sigma.$$

Remarque

Par définition de l'écart-type, plus l'écart-type σ est grand, plus la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ est grande.

Cela se traduit par un étalement de la courbe de f comme on peut le voir dans la figure ci-dessous.

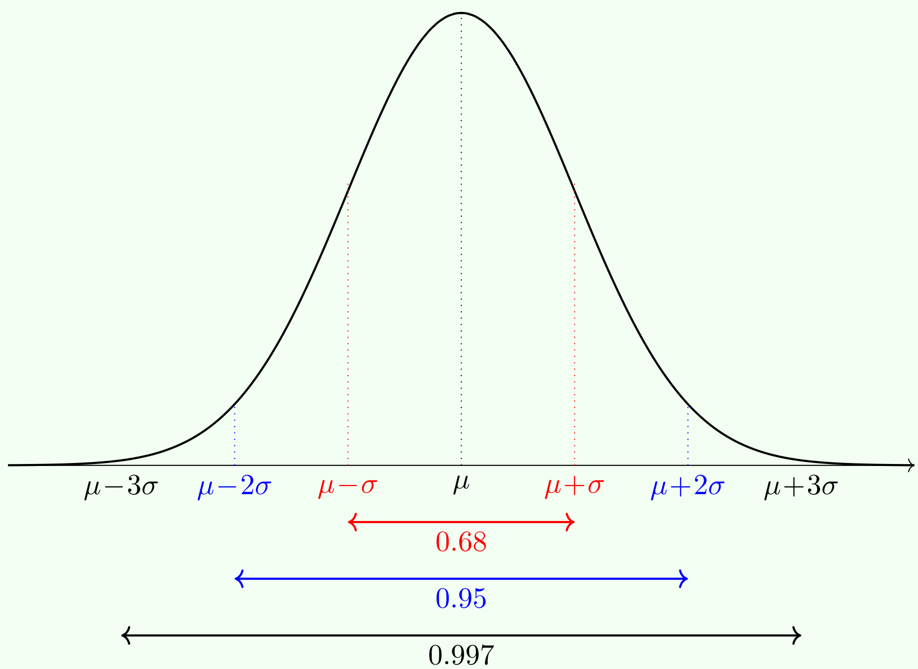


Comme cela a été dit plus haut, la difficulté principale pour la loi normale est que l'on ne sait pas exprimer de primitive de f à l'aide des fonctions usuelles. Ainsi, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on estimera la probabilité $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$ (où $\alpha < \beta$), à l'aide de la calculatrice ou des valeurs remarquables données ci-dessous.

Propriétés : *Valeurs remarquables*

Soient μ, σ deux réels avec $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors, on a

- ▷ $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$
- ▷ $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$
- ▷ $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$



EXERCICE 18.8

Soit X une variable aléatoire dont la loi est $\mathcal{N}(176, 36)$. Déterminer λ tel que l'on ait

$$\mathbb{P}(176 - \lambda \leq X \leq 176 + \lambda) \approx 0.95$$

Il est aussi possible de pouvoir effectuer les calculs de probabilité d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en ayant à disposition un tableau de valeurs de certaines probabilités.

EXEMPLE

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0.05$.
Les tableaux suivants indiquent pour chacune des valeurs de k, la probabilité que X soit inférieure ou égale à cette valeur.

k	5.82	5.86	5.88	5.92	6.04	6.12	6.18
$\mathbb{P}(X \leq k)$	0.000159	0.002555	0.008197	0.054799	0.788144	0.991802	0.999840

Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5.88 mm et 6.12 mm. On peut déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre grâce au tableau :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(5.88 \leq X \leq 6.12) &= \mathbb{P}(X \leq 6.12) - \mathbb{P}(X \leq 5.88)\\ &= 0.991802 - 0.008197\\ &= 0.983605\end{aligned}$$

On termine ce chapitre par un cas particulier de loi normale particulièrement important.

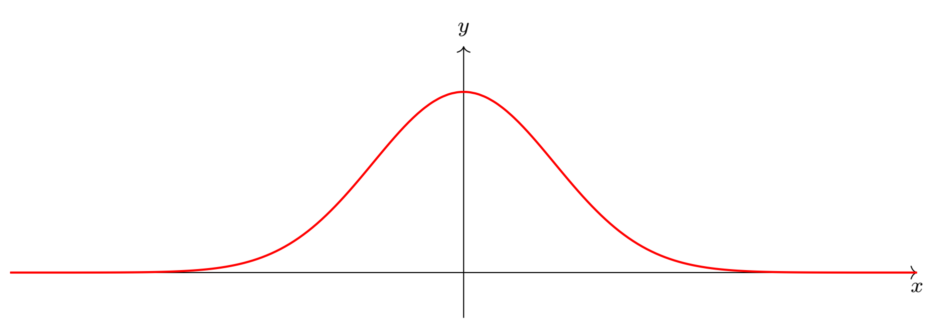
Définition : *Loi normale centrée réduite*

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** si X suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, c'est-à-dire $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
Autrement dit, pour tous réels α, β avec $\alpha < \beta$, on a

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Remarque

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est dite « centrée » car sa moyenne vaut 0 et « réduite » car son écart-type vaut 1.
La courbe de sa densité est représentée ci-dessous.



On peut remarquer que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$$

L'importance de la loi normale centrée réduite vient du résultat ci-dessous.

Proposition

Soient μ, σ deux réels avec $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Remarque

Ainsi, lorsque X suit une loi normale, on peut toujours se rapporter au calcul d'une probabilité d'une loi normale centrée réduite.

Supposons $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Pour calculer $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta)$, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \mathbb{P}\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)$$

avec Y qui suit la loi normale centrée réduite.

Exercice 18.9

Une usine fabrique des puzzles de 512 pièces.
On appelle X la variable aléatoire qui à un puzzle donné associe le nombre de pièces non conformes. On estime que X suit une loi normale de moyenne 11 et d'écart type 3.23.

On souhaite calculer la probabilité de l'évènement « le nombre de pièces non conformes est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

1) Soit Z une variable aléatoire telle que $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(7 \leq X \leq 15) = \mathbb{P}(-1.24 \leq Z \leq 1.24)$$

2) En utilisant le tableau suivant qui donne, pour quelques valeurs de $k \in \mathbb{R}$, les probabilités de l'évènement $(Z < k)$, en déduire $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 15)$.

k	-1.24	-0.93	- 0.62	- 0.31	0.00	0.31	0.62	0.93	1.24
$\mathbb{P}(Z \leq k)$)	0.108	0.177	0.268	0.379	0.500	0.621	0.732	0.823	0.892

5 Correction des exercices du cours

Corrigé Exercice 18.1

1) On a $X(\Omega) = \{7, 5, 2, -1\}$.

- ▷ Le 7 s'obtient s'il on tire le roi de cœur, cet évènement a donc pour probabilité $\dfrac{1}{32}$.
- ▷ Le 5 s'obtient s'il on tire un roi qui n'est pas le roi de cœur, cet évènement a donc pour probabilité $\dfrac{3}{32}$.
- ▷ Le 2 s'obtient s'il on tire un cœur qui n'est pas le roi de cœur, cet évènement a donc pour probabilité $\dfrac{7}{32}$.
- ▷ Le -1 s'obtient s'il on tire une carte qui n'est ni un roi, ni un cœur, ce qui correspond a toutes les cartes sauf les 8 cartes de cœur et les 3 cartes de roi restantes. Cet évènement a donc pour probabilité

$$\frac{32-8-3}{32} = \frac{21}{32}$$

Ainsi la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	7	5	2	-1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{3}{32}$	$\dfrac{7}{32}$	$\dfrac{21}{32}$

2) On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 7\mathbb{P}(X=7)+5\mathbb{P}(X=5)+2\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=-1)\\ &= \frac{7+15+14-21}{32} = \frac{15}{32}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 18.2

On a $X \sim \mathcal{B}(p)$ donc $X(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$. On en déduit

$$\mathbb{E}(X) = 0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=p$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= (0-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=0)+(1-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=1)\\ &= p^2\mathbb{P}(X=0)+(1-p)^2\mathbb{P}(X=1)\\ &= p^2(1-p)+(1-p)^2p = p(1-p)(p+1-p)\\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 18.3

La variable aléatoire X prend seulement deux valeurs, 0 et 1, donc elle suit une loi de Bernoulli.
Afin de déterminer p, il faut calculer $\mathbb{P}(X=1)$. Or, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(X<4) = \mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)\\ &= \frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{5}{36} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Corrigé Exercice 18.4

1) Le lancer de chaque dé est indépendant du lancer des autres.
Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\dfrac{1}{6}$, c'est-à-dire $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$.

2) Obtenir trois 6 correspond à avoir $X = 3$. Ainsi, la probabilité d'avoir trois 6 est
$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3} p^3 (1-p)^{3-3} = \frac{1}{6^3}$$

3) Obtenir deux 6 correspond à avoir $X = 2$. Ainsi, la probabilité d'avoir deux 6 est
$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2} = 3\,\frac{1}{6^2}\,\frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$$

Obtenir au moins deux 6 correspond à avoir $X \geq 2$. Ainsi, la probabilité d'avoir deux 6 est
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\\ &= \frac{15}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{16}{6^3}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 18.5

On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b\\ &= \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}\\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \int_a^b \frac{(x-\mathbb{E}(X))^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mathbb{E}(X))^2\,dx\\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(x-\mathbb{E}(X))^3}{3}\right]_a^b\\ &= \frac{1}{3(b-a)}\left((b-\mathbb{E}(X))^3 - (a-\mathbb{E}(X))^3\right)\\ &= \frac{1}{3(b-a)}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right)\end{aligned}$$

Or $(a-b)^3 = -(b-a)^3$, donc

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$
$$= 2\,\frac{(b-a)^3}{8} = \frac{(b-a)^3}{4}$$

On en déduit

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{3(b-a)}\,\frac{(b-a)^3}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

CORRIGÉ EXERCICE 18.6

1) On interroge des élèves au hasard, donc, si on raisonne en heures, cela revient à choisir un nombre aléatoirement dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$.
Ainsi, $X \sim \mathcal{U}\left(\left[\frac{1}{2};2\right]\right)$ et la fonction densité correspondante est

$$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2};2\right], \quad f(x) = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

2) La probabilité que la durée du trajet soit comprise entre 1h et 1h30 est

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \frac{\frac{3}{2}-1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

3) La durée moyenne du trajet domicile-lycée est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

Or, $\dfrac{5}{4}$ d'une heure équivaut à 1h15.

Remarque.
On aurait pu raisonner en minutes et on aurait eu

1) $X \sim \mathcal{U}([30;120])$ et $f(x) = \dfrac{1}{120-30} = \dfrac{1}{90}$.

2) $\mathbb{P}(60 \leq X \leq 90) = \dfrac{90-60}{120-30} = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{3}$.

3) $E(X) = \dfrac{120+30}{2} = \dfrac{150}{2} = 75$. Or 75 minutes équivaut à 1h15.

Corrigé Exercice 18.7

1) On a $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = \dfrac{1}{2}$.

Or, puisque $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathrm{e}^{-2\lambda}$. On en déduit $\mathrm{e}^{-2\lambda} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\lambda = \dfrac{\ln 2}{2}$.

2) Puisque $\lambda = \dfrac{\ln 2}{2}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathrm{e}^{-2\lambda} - \mathrm{e}^{-4\lambda} = \mathrm{e}^{-2\frac{\ln 2}{2}} - \mathrm{e}^{-4\frac{\ln 2}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2} \\ &= \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Corrigé Exercice 18.8

D'après la propriété des valeurs remarquables, on a

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

Or, 176 est l'espérance de X. Donc, en comparant les deux formules, on en déduit que l'on a

$$\lambda = 2\sigma = 2 \times 6 = 12$$

Corrigé Exercice 18.9

1) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(7 \leq X \leq 15) &= \mathbb{P}\left(\frac{7-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{7-11}{3.23} \leq Z \leq \frac{15-11}{3.23}\right) \\ &= \mathbb{P}(-1.24 \leq Z \leq 1.24)\end{aligned}$$

2) D'après le tableau, on a $\mathbb{P}(Z < -1.24) = 0.108$ et $\mathbb{P}(Z < 1.24) = 0.892$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1.24 \leq Z \leq 1.24) &= \mathbb{P}(Z < 1.24) - \mathbb{P}(Z < -1.24) \\ &= 0.892 - 0.108 = 0.78\end{aligned}$$

On en déduit $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 15) = 0.78$.

6 Exercices

EXERCICE 18.10 CONTINUITÉ DE L'EXERCICE 17.12

Evgeni Plushenko, le célèbre champion de patinage artistique, est inquiet avant la finale du championnat du monde. Trois de ses figures l'inquiètent. La probabilité de réussir la première est de 0.95, la deuxième de 0.93 et la troisième de 0.9.
On suppose que le moral de Plushenko est à toute épreuve et les réussites de ses figures sont indépendantes.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de sauts réussis.

1) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.

2) Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ et $\sigma(X)$.

3) Manquer la première figure fait perdre 0.2 point et la deuxième ou la troisième 0.1 point. De plus, les pénalités s'ajoutent.
Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le total des points de pénalités ? Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

EXERCICE 18.11 CONTINUITÉ DE L'EXERCICE 17.13

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On lit le nombre sur la face cachée. Pour $k \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré, de sorte que l'on a

$$p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.3 \quad \text{et} \quad p_4 = 0.4$$

On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

1) Pour $1 \leq k \leq 10$, exprimer en fonction de k la probabilité de l'évènement $(X = k)$.

2) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

3) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

Exercice 18.12

Soit f une fonction constante de valeur k sur l'intervalle $[1;5]$.
Quelle doit être la valeur de k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire sur $I = [1;5]$?

Exercice 18.13

Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

1) Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la la loi de X.

2) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?

3) Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?

4) Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

Exercice 18.14 Extrait BAC S - 2003

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.
La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) La valeur de t pour laquelle on a $\mathbb{P}(T < t) = \mathbb{P}(T \geq t)$ est :

a) $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b)** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c)** $\dfrac{\lambda}{2}$

2) D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0.18. La valeur exacte de λ est alors :

a) $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b)** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c)** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

3) Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a) $\mathbb{P}(T \geq 1)$ **b)** $\mathbb{P}(T \geq 3)$ **c)** $\mathbb{P}(2 \leq T \leq 3)$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0.2$.

4) La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années est :

a) 0.5523 **b)** 0.5488 **c)** 0.4512

5) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

a) 0.5555 **b)** 0.8022 **c)** 0.1607

Exercice 18.15 Extrait BAC S - 2013

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0.16 et 0.18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme. L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

1) On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre. On suppose que X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 0.17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0.006$. Dans la suite. on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0.13	0.15	0.0004
0.14	0.16	0.0478
0.15	0.17	0.4996
0.16	0.18	0.9044
0.17	0.19	0.4996
0.18	0.20	0.0478
0.19	0.21	0.0004

Donner la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2) On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre. On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 0.17$ et d'écart-type σ_2. On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0.99. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$.

1) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

2) Déterminer, en fonction de σ_2, l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0.16; 0.18]$.

3) En déduire la valeur de σ_2. On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2.4324	0.985
2.4573	0.986
2.4838	0.987
2.5121	0.988
2.5427	0.989
2.5758	0.990
2.6121	0.991
2.6521	0.992
2.6968	0.993