Algèbre de base

Chapitre 7

Bases et dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Pré-requis

- ☐ Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
- ☐ Notion de sous-espaces vectoriels.
- ☐ Résolution de systèmes linéaires.

Objectifs

- ☐ Savoir montrer qu'une familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre/liée.
- ☐ Savoir déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- ☐ Maîtriser les théorèmes de complétion/extraction de bases.
- ☐ Savoir déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Sommaire

Chapitre 7 - Séquence 1

Familles libres, bases et dimension

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

1 Familles libres et liées

Rappel – *Bases en géométrie vectorielle*

Dans le cursus du lycée la notion de bases est introduite en géométrie dans le plan et dans l'espace. On rappelle ci-dessous comment celles-ci sont définies

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace sont dits *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$.

  Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires si chacun des vecteurs peut s'écrire en fonction de l'autre.
- On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires du plan (c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$) forment une *base du plan*, notée par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sont dits *coplanaires* (ce qui signifie qu'ils appartiennent à un même plan) s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u} = \lambda_1\,\vec{v} + \lambda_2\,\vec{w}$.

  Autrement dit, trois vecteurs de l'espace sont dits coplanaires si chacun peut s'écrire en fonction des deux autres (c'est-à-dire si chacun est combinaison linéaire des deux autres).
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace, non coplanaires, forment une *base de l'espace* $\mathbb{R}^3$, notée par le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Ainsi, que ce soit dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une base est constituée de vecteurs qui ne sont pas « liés » les uns aux autres. Ces notions se généralisent à tout $\mathbb{K}^n$ et ses sous-espaces vectoriels à l'aide des combinaisons linéaires.

Définition : *Famille liée*

Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, où $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est **liée**, ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont **linéairement dépendants**, s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Remarques

- L'expression « non tous nuls » dans la définition précédente signifie qu'au moins un des $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ est non nul, autrement dit qu'il existe $i \in [\![1; k]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.
- D'après la définition, une famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres (voir feuille

d'exercices pour plus de détails).

Exemples

- ▷ La famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.
  En effet, on a
  $$(1,1) = (1,0) + (0,1),$$
  donc $(1,1)$ est combinaison linéaire de $(1,0)$ et $(0,1)$.
- ▷ La famille $((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas liée. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
  $$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Alors, (λ_1, λ_2) est solution du système linéaire
  $$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
  d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Puisque les λ_1, λ_2 sont tous nuls, on en déduit que la famille $((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas liée.

Définition : *Famille libre*

Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, où $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est **libre**, ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont **linéairement indépendants**, si $(u_1, \ldots, u_k)$ n'est pas liée.
Autrement dit, la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre si et seulement si la condition suivante est vérifiée :
$$\forall\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Remarques

- ▷ La condition de la définition se lit :
  pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ *alors nécessairement* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
- ▷ On a vu qu'une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Une famille libre étant une famille qui n'est pas liée, on en déduit la caractérisation suivante :

  une famille de vecteurs est libre si aucun vecteur de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemples

- ▷ Puisque la famille $((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ vue dans l'exemple précédent n'est pas liée, elle est libre.
- ▷ Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$ et

$e_3 := (0,0,1)$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Autrement dit, on a

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

On en déduit que (e_1, e_2, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Par le même raisonnement on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre.

▷ La famille $((1,1,1),(2,1,0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Exercice 1.

Pour les familles de vecteurs ci-dessous, déterminer si celles-ci sont libres ou liées.

1) $\mathcal{F}_1 := ((1,1),(2,2),(3,1))$,

2) $\mathcal{F}_2 := ((1,0),(0,2))$,

3) $\mathcal{F}_3 := ((1,1,1),(1,1,0),(3,1,0))$.

Remarque

Une famille constituée d'un seul vecteur non nul est nécessairement libre.
En effet, si $u \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont tels que $\lambda u = 0_{\mathbb{K}^n}$ alors $u = 0_{\mathbb{K}^n}$ ou $\lambda = 0$.

2 Bases et dimension

Définition : *Base d'un sous-espace vectoriel*

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^n$ tout entier. On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de F, où $k \in \mathbb{N}^*$, est une **base** de F si

▷ $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille libre,

▷ $(u_1, \dots, u_k)$ engendre F, *i.e.* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F$.

Exemples

- ▷ On a vu précédemment que la famille $\mathcal{B} := ((1,0),(1,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que tout $x \in \mathbb{R}^2$ vérifie $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.
  Soit $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

  où $\lambda_1 := x_1 - x_2$ et $\lambda_2 := x_2$. Ainsi, $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^2$.
  On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- ▷ On a vu précédemment que la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$. De plus, si $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n). \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Donc la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est bien une base de $\mathbb{K}^n$.

Théorème

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (ainsi que $\mathbb{K}^n$ tout entier) différent de $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ admet une base.

Remarque

Ce résultat nous assure que tous les résultats suivants ont bien un sens.

Proposition

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^n$ tout entier et $(u_1, \ldots, u_k)$ une base de F, où $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors, pour tout $x \in F$, il existe un unique k-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont appelés les **composantes**, *ou* **coordonnées**, *de x par rapport à la base $(u_1, \ldots, u_k)$ de F.*

Remarque

Le point le plus important de la proposition est l'*unicité* du k-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$. Autrement dit, s'il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i,$$

alors

$$\forall\, i \in [\![1;k]\!]\,, \quad \lambda_i = \mu_i.$$

Exemples

- Si $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

  Autrement dit, les composantes de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique sont $x_1, \ldots, x_n$.

- On a vu précédemment que la famille $\mathcal{B} := ((1,0),(1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que, pour tout $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}).$$

  Ainsi, pour $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ses composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont $x_1 - x_2$ et x_2.

Exercice 2.

1) Montrer que la famille $\mathcal{B} := ((1,0),(0,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminer les composantes de $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^n$ tout entier et deux bases $(u_1, \ldots, u_k)$, $(v_1, \ldots, v_l)$ de F, où $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors,

$$k = l.$$

Autrement dit, les bases d'un sous-espace vectoriel ont toutes le même nombre d'éléments.

Définition : *Dimension*

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^n$ tout entier et $(u_1, \ldots, u_k)$ une base de F, où $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle **dimension** de F, notée $\dim(F)$ le nombre d'éléments de $(u_1, \ldots, u_k)$. Autrement dit,

$$\dim(F) = k.$$

Par convention, si $F := \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, on pose $\dim(F) := 0$.

Remarque

Puisque les bases d'un sous-espace vectoriel ont toutes le même nombre d'éléments, la dimension du sous-espace vectoriel ne dépend pas de la base choisie.

Exemples

- ▷ La base canonique de $\mathbb{K}^n$ contient n éléments donc $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- ▷ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F \coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

On a

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2\right\} = \left\{x_1(1, 0, 1) + x_2(0, 1, 1) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On en déduit

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2), \quad \text{où} \quad u_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on vérifie aisément que la famille (u_1, u_2) est libre. On en déduit que (u_1, u_2) est une base de F, donc $\dim(F) = 2$.

Exercice 3.

On pose

$$F \coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Exprimer F avec la notation Vect.

3) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) $(2, 2) = 2(1, 1)$ donc $\mathcal{F}_1$ est liée.

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 2) = (0, 0)$. Alors, on obtient immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\mathcal{F}_2$ libre.

3) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(3, 1, 0) = (0, 0, 0)$. On aboutit au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

On applique la méthode de Gauss en effectuant d'abord $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On aboutit à

$$\begin{cases} \lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & + 3\lambda_3 & = 0 \\ & & - 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0,0,0)$ donc $\mathcal{F}_3$ est libre.

Correction de l'Exercice 2.

1) On a déjà vu que la famille $\mathcal{B} \coloneqq ((1,0),(0,2))$ est libre. Il suffit donc de montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}^2$. Soit $x \coloneqq (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$x = x_1(1,0) + \frac{x_2}{2}(0,2) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}).$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) D'après la question précédente, les composantes de $x \coloneqq (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(x_1, \frac{x_2}{2})$.

Correction de l'Exercice 3.

On pose

$$F \coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1)
- ▷ On a $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ et $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
- ▷ Soient $x \coloneqq (x_1, x_2, x_3) \in F$, $y \coloneqq (y_1, y_2, y_3) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On pose $z \coloneqq \lambda x + y = (z_1, z_2, z_3)$. Alors, on a

  $$z_1 + 2z_2 + z_3 = \lambda(x_1 + 2x_2 + x_3) + y_1 + 2y_2 + y_3 = 0.$$

  Donc $z = \lambda x + y \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -x_1 - 2x_2\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, -x_1 - 2x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,-2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-2)). \end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, la famille $((1,0,-1),(0,1,-2))$ engendre F. De plus, celle-ci est libre (immédiat) donc c'est une base de F. On en déduit $\dim(F) = 2$.

Chapitre 7

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous sont-elles libres ou liées ?

1) $\mathcal{F}_1 \coloneqq ((1,1),(2,2))$,

2) $\mathcal{F}_2 \coloneqq ((1,1),(2,1))$,

3) $\mathcal{F}_3 \coloneqq ((3,2),(2,1))$,

4) $\mathcal{F}_4 \coloneqq ((1,1))$.

Exercice 2.

Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{3,4,5,6\}$, ci-dessous sont-elles libres ou liées ?

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &\coloneqq ((3,5,-2),(-6,-10,4)),\\
\mathcal{F}_2 &\coloneqq ((1,-1,-2),(3,1,4),(-1,-3,0)),\\
\mathcal{F}_3 &\coloneqq ((1,-1,-2),(3,1,4),(0,1,0)),\\
\mathcal{F}_4 &\coloneqq ((1,-1,0),(1,-2,1),(1,4,1),(1,0,1)),\\
\mathcal{F}_5 &\coloneqq ((3,5,2,1),(3,1,4,2),(3,1,0,0)),\\
\mathcal{F}_6 &\coloneqq ((1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)),\\
\mathcal{F}_7 &\coloneqq ((2,4,3,-1,-4,-1),(-1,1,-2,2,-3,3),(1,5,0,4,-1,7)).
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1) Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ tels qu'il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ avec $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$ vérifiant
$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{K}^n}.$$
Montrer que u_1 et u_2 sont colinéaires.

2) Soit $(u_1,\dots,u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, où $k \in [\![1;n]\!]$ vérifiant qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ non tous nuls tels que
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{K}^n}.$$
Supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Montrer que u_1 est combinaison linéaire de $u_2,\dots,u_k$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 4.

Déterminer pour quelles valeurs de $h \in \mathbb{R}$, la famille (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$, avec $u \coloneqq (1,0,-h)$, $v \coloneqq (2,-1,1)$ et $w \coloneqq (h,1,-1)$, est libre.

Exercice 5.

Pour chacun des sous-espaces vectoriels ci-dessous, déterminer une base et la dimension

1) $F_1 \coloneqq \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}$,

2) $F_2 \coloneqq \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

3) $F_3 \coloneqq \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$,

4) $F_4 \coloneqq \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\}$,

5) $F_5 \coloneqq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_3 = 0\}$,

6) $F_6 \coloneqq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_2 - x_3 = 0\}$.

Exercice 6.

Soit $F \coloneqq \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 + iz_2 - z_3 = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

2) Déterminer une base et la dimension de F.

Chapitre 7 - Séquence 2

Propriétés des bases et rang d'une famille de vecteurs

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

3 Propriétés des bases

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, ou $\mathbb{K}^n$ tout entier, différent de $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Alors,

$$1 \leq \dim(F) \leq n.$$

De plus, si $\dim(F) = n$, alors $F = \mathbb{K}^n$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc les sous-espaces vectoriels stricts F de $\mathbb{R}^3$ ont pour dimension : $0, 1$ ou 2.

- ▷ Si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- ▷ Si $\dim(F) = 1$, alors il existe $u \in F \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ tel que $F = \mathrm{Vect}(u)$, on note alors $F = \mathbb{R}\, u$ et F est appelé une **droite vectorielle**.
- ▷ Si $\dim(F) = 2$, alors il existe une famille libre (u, v) de F telle que

$$F = \mathrm{Vect}(u, v) = \left\{\lambda_1 u + \lambda_2 v \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

  Le sous-espace F est appelé un **plan vectoriel**.

Théorème : *Théorème d'extraction de base*

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, ou $\mathbb{K}^n$ tout entier, différent de $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ et $\mathcal{F} := (u_1, \ldots, u_k)$, où $k \in \mathbb{N}^*$, une famille génératrice de F.
Alors, il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ qui soit une base de F. On dit alors que $\mathcal{B}$ est **extraite** *de $\mathcal{F}$.*

Remarque

Si la famille $\mathcal{F}$ est libre, alors elle est génératrice de F et libre donc est une base de F, d'où $\mathcal{B} = \mathcal{F}$. Le résultat précédent est utile lorsque $\mathcal{F}$ n'est pas libre.
Dans ce cas, le théorème assure qu'il suffit de choisir certains des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ pour construire une base de F. Pour cela, il suffit d'enlever les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres.

Exemples

- Soient $u := (1, 1)$, $v := (2, 2)$ et $F := \mathrm{Vect}\,(u, v)$. Par définition, la famille $\mathcal{F} := (u, v)$ est génératrice de F.

  Par contre, puisque $v = 2u$, $\mathcal{F}$ n'est pas libre. Mais, comme v et u sont colinéaires, on a $F = \mathrm{Vect}\,(u)$ et $\mathcal{B} := (u)$ est une base de F.
- Soient $u := (1, 1)$, $v := (1, 2)$, $w := (2, 3)$ et $F := \mathrm{Vect}\,(u, v, w)$.

  Puisque $w = u + v$, on a $\mathrm{Vect}\,(u, v, w) = \mathrm{Vect}\,(u, v)$. Enfin, on vérifie que (u, v) est libre (exercice) donc (u, v) est une base de F.

Exercice 1.

Soient $u := (1, 0, 1)$, $v := (0, 1, -1)$, $w := (1, 2, -1)$ et $F := \mathrm{Vect}\,(u, v, w)$. Déterminer une base de F extraite de la famille (u, v, w).

Théorème : *Théorème de la base incomplète*

Soient $k \in [\![1; n]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, ou $\mathbb{K}^n$ tout entier, de dimension k et $(u_1, \ldots, u_l)$, avec $l < k$, une famille libre de F.
Alors, il existe une famille libre $(u_{l+1}, \ldots, u_k)$ de F telle que $(u_1, \ldots, u_k)$ soit une base de F.

Remarque

C'est ce résultat qui permet de montrer que tout sous-espace vectoriel admet une base.

Exemples

- La famille réduite au seul vecteur $u := (1, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de la base incomplète, puisque $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

  Pour déterminer v, il suffit de choisir un vecteur non colinéaire à u, par exemple $v := (1, 0)$.
- Soient $u := (1, 1, 1)$, $v := (1, 0, 0)$ et $\mathcal{F} := (u, v)$. Alors, $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

  Pour déterminer w, il suffit de choisir un vecteur qui ne soit pas combinaison linéaire de u et v. Par exemple, $w := (0, 0, 1)$.

Exercice 2.

Soient $u := (1, 1, 0)$ et $v := (0, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{F} := (u, v)$ est libre puis déterminer $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème

Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{K}^n$ tout entier) et $\mathcal{F} := (u_1, \ldots, u_k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, une famille de F.
Alors, $\mathcal{F}$ est une base de F si et seulement si

▷ $k = \dim(F)$,

▷ *$\mathcal{F}$ est soit libre, soit génératrice de F.*

Exemples

▷ Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\mathcal{F} := ((1,0),(1,1))$ est libre et possède deux vecteurs. Puisque $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

▷ Dans $\mathbb{R}^3$, toute famille libre de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.

4 Rang d'une famille de vecteurs

D'après le théorème d'extraction de base, si $F := \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{B}$ de F et ainsi déterminer la dimension de F. On va voir dans cette section une méthode simple pour déterminer $\dim(F)$ dans ce cadre.

Définition : *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. Autrement dit,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) := \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})).$$

Remarque

D'après les propriétés des bases, le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ non tous nuls, vérifie

$$1 \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq \min(k, n).$$

Méthode – *Détermination du rang*

Soit $\mathcal{F} := (u_1, \ldots, u_k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

1. On écrit les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ en lignes les uns sous les autres.
2. On applique la méthode de Gauss des systèmes linéaires.
3. Le rang est le nombre de lignes non nulles à la fin de la méthode de Gauss.

Exemples

▷ Soit $\mathcal{F} := ((1,1),(2,2))$. On écrit les vecteurs en lignes les uns sous les autres :

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss (il suffit d'effectuer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$), on obtient

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Il n'y a qu'une ligne non nulle donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 1$.

▷ Soient $u_1 \coloneqq (1,1,1)$, $u_2 \coloneqq (1,0,1)$, $u_3 \coloneqq (3,2,3)$, $u_4 \coloneqq (4,2,4)$ et $\mathcal{F} \coloneqq (u_1,u_2,u_3,u_4)$. On écrit les vecteurs en lignes les uns sous les autres :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{matrix}$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$, ce qui donne

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix}$$

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, ce qui donne

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

La méthode de Gauss est terminée, il y a deux lignes non nulles donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Remarque

On peut aussi déterminer le rang d'une famille de vecteurs en écrivant ceux-ci en colonnes les uns à coté des autres puis en appliquant la méthode de Gauss.
Cela est d'autant plus utile si le nombre de vecteurs est plus grand que le nombre de composantes car ainsi la méthode de Gauss nécessite moins d'opérations.

Exemple

On reprend l'exemple de la famille $F \coloneqq \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$, où $u_1 \coloneqq (1,1,1)$, $u_2 \coloneqq (1,0,1)$, $u_3 \coloneqq (3,2,3)$ et $u_4 \coloneqq (4,2,4)$.
On écrit les vecteurs en colonnes les uns à cotés des autres :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, ce qui donne

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

On en déduit $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 3.

Déterminer le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F} \coloneqq ((1,2,1),(3,4,2),(2,2,1),(1,0,0))$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Vérifions si (u, v, w) est libre ou liée.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_2 w = 0$. Alors, on a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

La méthode de Gauss donne

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est $\{(-\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) \mid \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ donc la famille est liée. De plus, on en déduit $-u - 2v + w = 0$ donc $w = u + 2v$. Ainsi, $F = \operatorname{Vect}(u, v, w) = \operatorname{Vect}(u, v)$. On vérifie facilement que (u, v) est libre donc c'est une base de F.

Correction de l'Exercice 2.

Il est immédiat que (u, v) est libre. Pour le vecteur w, on peut prendre $w \coloneqq (0, 0, 1)$.

Correction de l'Exercice 3.

On écrit les vecteurs en colonnes

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

Enfin on effectue $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et on obtient $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Chapitre 7

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, puis de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ci-dessous déterminer son rang.

1) $\mathcal{F}_1 \coloneqq ((1,1),(2,2))$,

2) $\mathcal{F}_2 \coloneqq ((1,1),(2,1))$,

3) $\mathcal{F}_3 \coloneqq ((3,2),(2,1))$,

4) $\mathcal{F}_4 \coloneqq ((1,1))$.

Exercice 3.

Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{3,4,5,6\}$, ci-dessous déterminer son rang.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 \coloneqq ((3,5,-2),(-6,-10,4)),\\
&\mathcal{F}_2 \coloneqq ((1,-1,-2),(3,1,4),(-1,-3,0)),\\
&\mathcal{F}_3 \coloneqq ((1,-1,-2),(3,1,4),(0,1,0)),\\
&\mathcal{F}_4 \coloneqq ((1,-1,0),(1,-2,1),(1,4,1),(1,0,1)),\\
&\mathcal{F}_5 \coloneqq ((3,5,2,1),(3,1,4,2),(3,1,0,0)),\\
&\mathcal{F}_6 \coloneqq ((1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)),\\
&\mathcal{F}_7 \coloneqq ((2,4,3,-1,-4,-1),(-1,1,-2,2,-3,3),(1,5,0,4,-1,7)).
\end{aligned}$$

Exercice 4.

1) On pose

$$\mathcal{B} \coloneqq ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' \coloneqq ((0,-1,0),(1,-1,0),(2,1,1)).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de $u \coloneqq (1,2,1)$ dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Montrer que

$$\mathcal{B}'' \coloneqq ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner les coordonnées de $v \coloneqq (1,2,3,4)$ dans la base $\mathcal{B}''$.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base de $\mathbb{K}^4$. On pose

$$\begin{aligned}
x_1 &\coloneqq e_1 + 2e_2 - e_3 - 2e_4, & x_2 &\coloneqq 2e_1 + 3e_2 - e_4,\\
x_3 &\coloneqq e_1 + 3e_2 - e_3, & x_4 &\coloneqq e_1 + 2e_2 + e_3 + 4e_4.
\end{aligned}$$

1) Montrer que $\mathcal{B}' \coloneqq (x_1,x_2,x_3,x_4)$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

2) Déterminer les coordonnées du vecteur $x \coloneqq 7e_1 + 14e_2 - e_3 + 2e_4$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 6.

Montrer que la famille $\mathcal{F} \coloneqq ((1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,0,0))$ de $\mathbb{R}^4$ est libre, puis la compléter à une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7.

On pose

$$v_1 \coloneqq (2,1,-3), \quad v_2 \coloneqq (2,3,-1), \quad v_3 \coloneqq (-1,2,4) \quad \text{et} \quad v_4 \coloneqq (1,1,-1).$$

Montrer que $\operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ et en déterminer une base extraite de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4).

Exercice 8.

Trouver toutes les façons d'obtenir une base de $\mathbb{R}^2$ avec les vecteurs suivants :

$$v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$