Chapitre 7

Équations différentielles linéaires

Pré-requis

- ☐ Le corps $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ☐ Résolution d'équations du second degré.
- ☐ Dérivation, dérivations successives.
- ☐ Primitives et intégrales.

Objectifs

- ☐ Savoir identifier les différentes classes d'équations différentielles.
- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.
- ☐ Savoir résoudre un problème de Cauchy.

Sommaire

Chapitre 7 - Séquence 1

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 Généralités

Notation

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition : *Équation différentielle linéaire du premier ordre*

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** (ou **du premier ordre**), une équation de la forme :

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I, \tag{1}$$

où

- ▷ y est une fonction inconnue et y' est sa dérivée ;
- ▷ α et β sont des fonctions données, définies sur I, appelées **coefficients** de l'équation ;
- ▷ la fonction α est non nulle ;
- ▷ f est une fonction donnée, définie sur I, appelée **second membre** de l'équation ;
- ▷ t est la variable de toutes ces fonctions.

Remarque

On parle d'équation différentielle du *premier ordre* car celle-ci ne fait intervenir que la fonction inconnue y et sa dérivée *première* y'.

Exemples

- ▷ L'équation
$$4y'(t) + 3y(t) = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec
$$\alpha : t \mapsto 4,\ \beta : t \mapsto 3 \quad \text{et} \quad f : t \mapsto t.$$
- ▷ L'équation
$$(t^2+1)y'(t) - \ln(t)y(t) = \mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$$
est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, avec
$$\alpha : t \mapsto t^2+1,\ \beta : t \mapsto -\ln(t) \quad \text{et} \quad f : t \mapsto \mathrm{e}^t\,.$$
- ▷ Les équations suivantes sont des équations différentielles d'ordre 1 mais ne sont pas linéaires :
  a) $y'(t) + 3y^2(t) = t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, à cause du terme y^2 ,
  b) $y'(t)y(t) + ty(t) = 2t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, à cause du terme $y'(t)y(t)$.

Notation

L'équation différentielle (1) se note aussi simplement

$$\alpha y' + \beta y = f, \quad \text{sur } I.$$

Autrement dit, on ne spécifie pas la variable t et, dans l'équation, l'égalité est une égalité de fonctions. Cette notation est appelée **notation fonctionnelle**.

Exercice 1.

Parmi les équations différentielles suivantes, préciser celles qui sont linéaires d'ordre 1 et identifier alors les coefficients et le second membre.

1) $\mathrm{e}^t\, y'(t) + ty(t) = 2t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

2) $y'(t) + ty^3(t) = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

3) $y(t)y'(t) + t = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

4) $3t - 2y'(t) = -y'(t) + 5 - y'(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$

Définition : *Équation différentielle homogène*

Toute équation différentielle dont le second membre est nul est dite **homogène**.

Exemples

- ▷ L'équation
$$4y'(t) + 3y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants.
- ▷ L'équation
$$(t^2 + 1)y'(t) - \ln(t)y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,$$
est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

Définition : *Solution de l'équation différentielle* (1)

Une **solution** d'une équation différentielle d'ordre 1 de la forme (1) est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

- ▷ y est dérivable sur I,
- ▷ y vérifie
$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I.$$

Méthode – *Vérifier qu'une fonction y_p est solution d'une équation différentielle*

1. Justifier que y_p est dérivable et calculer la dérivée y_p'.
2. Injecter y_p dans l'équation.
3. Si l'égalité est vérifiée, alors y_p est solution.

Exemple

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y'(t) - 2ty(t) = 4t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

▷ La fonction $y_p : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2} - 2$ est solution de cette équation. En effet,

- y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables (exponentielle et polynômes) et sa dérivée est $y_p' : t \mapsto 2t\,\mathrm{e}^{t^2}$,
- l'équation est bien vérifiée :

$$y_p'(t) - 2ty_p(t) = 2t\,\mathrm{e}^{t^2} - 2t\left(\mathrm{e}^{t^2} - 2\right) = 4t, \quad \forall\, t \in I.$$

▷ De même, pour tout réel C, la fonction $t \mapsto C\,\mathrm{e}^{t^2} - 2$ est aussi solution de cette équation.

Remarque

En particulier, on déduit de l'exemple précédent qu'une équation différentielle peut avoir plus d'une solution.

Exemple

Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y'(t) + y(t) = t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution sous la forme $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$y_p' : t \mapsto 2at + b.$$

En injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$2at + b + (at^2 + bt + c) = t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Soit encore :

$$at^2 + (2a + b)t + b + c = t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Par identification, on obtient

$$a = 1, \quad 2a + b = 0 \quad \text{et} \quad b + c = 0.$$

On en déduit $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$. Ainsi, $y_p : t \mapsto t^2 - 2t + 2$ est solution de l'équation.

Exercice 2.

Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer celles qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'(t) + 2y(t) = \cos t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

1) $y_1 : t \mapsto \frac{1}{5}(\sin t + 2\cos t)$,

2) $y_2 : t \mapsto 3\,\mathrm{e}^{-2t}$,

3) $y_3 : t \mapsto -2\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{5}(\sin t + 2\cos t)$,

4) $y_4 : t \mapsto \frac{23}{7}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{5}(\sin t + 2\cos t)$.

2 Résolution de l'équation homogène

Dans la suite de cette séquence, nous étudions comment résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = f(t), \quad \text{sur } I,$$

où, pour tout $t \in I$, $\alpha(t) \neq 0$.

En posant

$$\forall\, t \in I, \quad a(t) \coloneqq \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \quad \text{et} \quad g(t) \coloneqq \frac{f(t)}{\alpha(t)},$$

l'équation s'écrit simplement :

$$y'(t) + a(t)y(t) = g(t), \quad \text{sur } I.$$

On considère tout d'abord le cas de l'équation homogène, c'est-à-dire $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sur I.

Théorème : *Résolution de l'équation homogène*

Soient a une fonction continue sur I, A une primitive de a sur I et $C \in \mathbb{R}$.
Alors, les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad \forall\, t \in I,$$

sont les fonctions, notées y_H, définies sur I par :

$$y_H : t \mapsto C \exp\left(-A(t)\right).$$

L'ensemble des solutions de cette équation homogène est noté

$$\mathcal{S}_H = \left\{\ t \mapsto C \exp\left(-A(t)\right) \mid C \in \mathbb{R}\right\},$$

Remarque

En particulier, puisque, quelque soit $C \in \mathbb{R}$, $y_H : t \mapsto C \exp\big(-A(t)\big)$ est solution de l'équation homogène, on en déduit que celle-ci admet un infinité de solutions.

Remarque – *Moyen mnémotechnique*

On suppose que y ne s'annule pas sur I, alors l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sur I s'écrit encore

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t), \quad \text{sur } I.$$

En intégrant l'égalité précédente, on obtient

$$\ln|y(t)| = -A(t) + c, \quad \forall\, t \in I,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Enfin, en passant à l'exponentielle dans l'égalité précédente, on a

$$|y(t)| = \mathrm{e}^{-A(t)+c} = \mathrm{e}^{c}\ \mathrm{e}^{-A(t)} = C\ \mathrm{e}^{-A(t)}, \quad \forall\, t \in I,$$

où $C \coloneqq \mathrm{e}^{c} \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient ainsi $y : t \mapsto \pm C\ \mathrm{e}^{-A(t)}$.

Cette méthode permet de retrouver facilement les solutions de l'équation homogène mais **n'est pas rigoureuse** car on y suppose que y ne s'annule pas sur I.

Exemples

- ▷ Les solutions de l'équation
$$y'(t) + 2y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H : t \mapsto C\exp(-2t)$, où $C \in \mathbb{R}$.
- ▷ Les solutions de l'équation
$$y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,$$
sont les fonctions y_H définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y_H : t \mapsto C\exp(-\ln t) = \dfrac{C}{t}$, où $C \in \mathbb{R}$.
En effet, une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $a : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $A : t \mapsto \ln t$.

Exercice 3.

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1) $3y' + 12y = 0$ sur $\mathbb{R}$;

2) $2y'(t) - t^4 y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

3 Résolution de l'équation avec second membre

Le théorème donné précédemment ne permet de résoudre **que** l'équation homogène, il reste donc à déterminer les solutions de l'équation lorsque $f \neq 0$.

Théorème : *Résolution de l'équation avec second membre*

Soient a et f deux fonctions définies et continues sur I, et A une primitive de a sur I.
Si y_p est une solution (particulière) de l'équation différentielle :
$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I,$$
alors les solutions de cette équation sont les fonctions, notées y_G, définies sur I par :
$$y_G : t \mapsto C\exp\big(-A(t)\big) + y_p(t), \quad C \in \mathbb{R}.$$
L'ensemble des solutions générales d'une équation différentielle linéaire est noté $\mathcal{S}_G$:
$$\mathcal{S}_G = \{t \mapsto C\exp(-A(t)) + y_p(t) \mid C \in \mathbb{R}\}\,.$$

Remarque

Le théorème signifie que toute solution y_G de $y'(t) + a(t)\,y(t) = f(t)$ s'écrit
$$y_G = y_H + y_p,$$
où y_H est une solution de l'équation homogène et y_p une solution particulière de l'équation.

Afin de déterminer une solution particulière de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$, on applique la méthode dite de **variation de la constante**

On a vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto C \exp(-A(t)) \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche alors une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p : t \mapsto c(t) \exp(-A(t)).$$

On dit qu'on fait *varier la constante*. L'objectif est donc de déterminer une telle fonction c.

Méthode – *Variation de la constante*

1. Donner l'expression d'une solution particulière en faisant varier la constante :
$$y_p : t \mapsto c(t) \exp\big(-A(t)\big).$$
2. Dériver puis injecter dans l'équation différentielle pour obtenir une expression de c'.
3. Déterminer une primitive de c'.
4. En déduire l'expression de y_p.

Exemple

Soit l'équation différentielle :

$$y'(t) + 3y(t) = t^2 \mathrm{e}^{-3t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto C \mathrm{e}^{-3t} \mid C \in \mathbb{R}\right\}.$$

On recherche alors une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p : t \mapsto c(t) \mathrm{e}^{-3t}.$$

La dérivée de y_p est

$$y_p' : t \mapsto c'(t) \mathrm{e}^{-3t} - 3c(t) \mathrm{e}^{-3t},$$

ainsi

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p'(t) + 3y_p(t) = c'(t) \mathrm{e}^{-3t} - 3c(t) \mathrm{e}^{-3t} + 3c(t) \mathrm{e}^{-3t} = c'(t) \mathrm{e}^{-3t}.$$

Donc en injectant y_p dans l'équation, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$c'(t) \mathrm{e}^{-3t} = t^2 \mathrm{e}^{-3t} \quad \text{donc} \quad c'(t) = t^2.$$

On peut donc choisir la fonction $c : t \mapsto \frac{t^3}{3}$. On en déduit

$$y_p : t \mapsto \frac{t^3}{3} \mathrm{e}^{-3t}$$

Exercice 4.

Résoudre par la méthode de la variation de la constante les équations différentielles suivantes :

1) $y'(t) + y(t) = t \mathrm{e}^{-t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

2) $y'(t) - 2ty(t) = -2t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Linéaire d'ordre 1 avec $\alpha : t \mapsto e^t$, $\beta : t \mapsto t$ et $f : t \mapsto 2t$.

2) N'est pas linéaire à cause du terme y^3.

3) N'est pas linéaire à cause du terme $y\,y'$.

4) L'équation se réécrit : $3t = 5$ qui n'est pas une équation différentielle.

Correction de l'Exercice 2.

1) $y_1 : t \mapsto \dfrac{1}{5}(\sin t + 2\cos t)$ et $y_1' : t \mapsto \dfrac{1}{5}(\cos t - 2\sin t)$ donc

$$y_1'(t) + 2y_1(t) = \frac{1}{5}(\cos t - 2\sin t + 2\sin t + 4\cos t) = \cos t.$$

Donc y_1 est solution.

2) $y_2 : t \mapsto 3\,\mathrm{e}^{-2t}$ et $y_2' : t \mapsto -6\,\mathrm{e}^{-2t}$ donc

$$y_2'(t) + 2y_2(t) = -6\,\mathrm{e}^{-2t} + 6\,\mathrm{e}^{-2t} = 0.$$

Donc y_2 n'est pas solution mais est solution de l'équation homogène.

3) Solution.

4) Solution.

Correction de l'Exercice 3.

Remarquer que la première est donnée sous forme fonctionnelle mais que la résolution reste la même, ce n'est qu'une notation.

1) L'équation se réécrit $y' + 4y = 0$ donc les solutions sont

$$y_H : t \mapsto C \exp\left(-4t\right), \; C \in \mathbb{R}.$$

2) L'équation se réécrit $y'(t) - \dfrac{t^4}{2} y(t) = 0$. Les solutions sont donc :

$$y_H : t \mapsto C \exp\left(\frac{t^5}{10}\right), \; C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'Exercice 4.

1) L'équation homogène est $y' + y = 0$ donc les solutions sont $y_H : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.
On pose $y_p : t \mapsto c(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. En injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$c'(t)\,\mathrm{e}^{-t} - c(t)\,\mathrm{e}^{-t} + c(t)\,\mathrm{e}^{-t} = t\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \forall\, t \in I.$$

On en déduit $c' : t \mapsto t$. On peut donc choisir $c : t \mapsto \frac{t^2}{2}$. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Les solutions de l'équation homogène sont $y_H : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{t^2}$, $C \in \mathbb{R}$. On pose $y_p : t \mapsto c(t)\,\mathrm{e}^{t^2}$.

En injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$c'(t)\,\mathrm{e}^{t^2} + 2tc(t)\,\mathrm{e}^{t^2} - 2tc(t)\,\mathrm{e}^{t^2} = -2t, \quad \forall\, t \in I.$$

On en déduit $c' : t \mapsto -2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$. On peut donc choisir $c : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto C\,\mathrm{e}^{t^2} + 1 \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 7

Feuille d'exercices séquence 1

Exercice 1.

Parmi les fonctions données ci-dessous, préciser celles qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + 2y(t) = 2t - 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

1) $y : t \mapsto t^2 - 2t$,

2) $y : t \mapsto t - 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-2t}$,

3) $y : t \mapsto t^2 - t - 3$,

4) $y : t \mapsto t - 1$.

Exercice 2.

Déterminer les solutions des équations différentielles homogènes suivantes :

1) $y' - 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$,

2) $\sqrt{2}y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$,

3) $2y'(t) + ty(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

4) $y'(t) - \cos(t)y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

5) $2y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$,

6) $2y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_-^*$,

7) $y'(t) + \sqrt{t}y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$.

8) $\cos(t)y'(t)+\sin(t)y(t) = 0, \forall\, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

9) $y'(t) + \ln(t)y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$,

10) $\mathrm{e}^t\, y'(t) + t^2 y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

Exercice 3.

En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

1) $y'(t) + y(t) = (1 + 2t + 3t^2)\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

2) $y'(t) + y(t) = \cos t + \sin t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

3) $ty'(t) - 2y(t) = t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$.

4) $y'(t) - \left(2t - \dfrac{1}{t}\right) y(t) = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.

Soient a une fonction continue sur I et A une primitive de a sur I.
L'objectif de cet exercice est de montrer (rigoureusement) que les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad \forall\, t \in I,$$

sont les fonctions, notées y_H, définies sur I par :

$$y_H : t \mapsto C \exp\left(-A(t)\right),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

1) Vérifier que les fonctions y_H définies ci-dessus sont solutions de l'équation.

2) Soit y une solution de l'équation homogène. On pose

$$\forall\, t \in I, \quad z(t) \coloneqq \exp\left(A(t)\right) y(t).$$

Calculer z'. En déduire z, puis y.

Exercice 5.

Soient a et f deux fonctions définies et continues sur I, et A une primitive de a sur I.
Soit y_p est une solution (particulière) de l'équation différentielle :

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \quad \forall\ t \in I.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que toute solution y_G de l'équation s'écrit sous la forme

$$y_G = y_H + y_p,$$

où y_H est une solution de l'équation homogène.

1) Vérifier que toute fonction y_G définie comme ci-dessus est bien solution de l'équation.

2) Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène.

3) Soit y une solution de l'équation. Déduire de la question précédente que $y = y_H + y_p$, où y_H est une solution de l'équation homogène.

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$y''(t) + y'(t) = \mathrm{e}^{-t}, \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Cette équation est dite d'ordre 2 car elle fait intervenir la dérivée seconde de y.
Soit y une solution de cette équation (si elle existe).

1) On pose $z \coloneqq y'$. Quelle équation différentielle vérifie z ?

2) En déduire z, puis y.

Chapitre 7 - Séquence 2

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

4 Définitions

Définition : *Équation différentielle linéaire d'ordre 2*

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2**, une équation différentielle de la forme :

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I, \tag{2}$$

où :

- ▷ y est une fonction inconnue, y' est sa dérivée et y'' est sa dérivée seconde ;
- ▷ a, b et c sont des fonctions données, définies sur I, appelées **coefficients** de l'équation ;
- ▷ la fonction a est *non nulle* ;
- ▷ f est une fonction donnée, définie sur I, appelée **second membre** de l'équation ;
- ▷ t est la variable de toutes ces fonctions.

De plus, lorsque, pour tout $t \in I$, $f(t) \coloneqq 0$ l'équation (2) est dite **homogène**.

Exemples

- ▷ L'équation
$$3t^2y''(t) + y'(t) - \ln(t)y(t) = \mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec
$$a : t \mapsto 3t^2, \quad b : t \mapsto 1, \quad c : t \mapsto -\ln t \quad \text{et} \quad f : t \mapsto \mathrm{e}^t\,.$$
- ▷ Par contre, l'équation
$$t^2y''(t) - y^2(t) = \mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
est une équation différentielle d'ordre 2 qui n'est pas linéaire en raison de la présence du terme en y^2.

Définition : *Solution d'une équation différentielle d'ordre 2*

Une **solution** d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de la forme (2) est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ telle que

- ▷ y est deux fois dérivable sur I,
- ▷ y vérifie
$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t), \quad \forall\, t \in I.$$

Exemples

▷ Le fonction $y : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 16\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

En effet, y est deux fois dérivable (composée de polynômes et exponentielles) et on a $y' : t \mapsto \mathrm{e}^{3t} + 3t\,\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}$ et $y'' : t \mapsto 6\,\mathrm{e}^{3t} + 9t\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}$, d'où

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left(6\,\mathrm{e}^{3t} + 9t\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}\right) - 6\left(\mathrm{e}^{3t} + 3t\,\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}\right) + 9\left(t\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}\right) = 16\,\mathrm{e}^{-t}.$$

▷ Par contre, la fonction $y : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$ n'est pas solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 16\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

En effet, $y' : t \mapsto \mathrm{e}^{t} + t\,\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}$ et $y'' : t \mapsto 2\,\mathrm{e}^{t} + t\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}$, donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left(2\,\mathrm{e}^{t} + t\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) - 6\left(\mathrm{e}^{t} + t\,\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}\right) + 9\left(t\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right) = -4\,\mathrm{e}^{t} + 4t\,\mathrm{e}^{t} + 16\,\mathrm{e}^{-t} \neq 16\,\mathrm{e}^{-t}$$

5 Résolution de l'équation homogène à coefficients constants

Dans cette partie, on étudie la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à **coefficients constants homogènes**, c'est-à-dire de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad \forall\, t \in I,$$

où a, b, c sont des **constantes** réelles avec $a \neq 0$.

Définition : *Équation caractéristique*

Soit l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad \forall\, t \in I, \tag{3}$$

où a, b, c sont des **constantes** réelles avec $a \neq 0$.
L'équation

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{4}$$

est appelée **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 *homogène à coefficients constants* (3).

Remarque

L'équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 n'a de sens *que* pour les *équations homogènes à coefficients constants.*

Théorème : *Résolution de l'équation homogène*

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène suivante :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad \forall\, t \in I,$$

et on note $(\mathcal{C})$ l'équation caractéristique associée donnée par

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{$\mathcal{C}$}$$

- *Si $(\mathcal{C})$ admet deux solutions réelles distinctes notées r_1 et r_2, alors*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- *Si $(\mathcal{C})$ admet une solution réelle double r_0, alors*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto (A + Bt)\,\mathrm{e}^{r_0 t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- *Si $(\mathcal{C})$ admet deux solutions complexes conjuguées, notées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \big(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\big)\,\mathrm{e}^{\alpha t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples

- On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

C'est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Celle-ci possède deux solutions réelles : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{3t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) - 6y'(t) + 13y(t) = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

C'est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Celle-ci possède deux solutions complexes : $r_1 = 3 + 2i$ et $r_2 = 3 - 2i$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \big(A\cos(2t) + B\sin(2t)\big)\,\mathrm{e}^{3t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6 Résolution de l'équation à coefficients constants avec second membre

Théorème : *Résolution de l'équation avec second membre*

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et soit f une fonction continue sur I.
Soit y_p une solution (particulière) de l'équation différentielle :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad \forall\ t \in I.$$

Alors, y_G est une solution de cette équation si et seulement s'il existe y_H une solution de l'équation homogène

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad \forall\ t \in I,$$

telle que

$$y_G = y_H + y_p.$$

Remarques

Autrement dit, on obtient le même résultat que pour les équations d'ordre 1 : une solution générale est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Il reste donc à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle.

Dans la suite, on se restreint à déterminer une solution particulière uniquement pour certaines formes de seconds membres f, telles que :

- ▷ des termes polynômes,
- ▷ des termes exponentielles,
- ▷ des termes cosinus et sinus.

En effet, l'idée est de considérer des fonctions f dont les dérivées sont du même type.

6.1 Cas où f est un polynôme

On suppose que $f \coloneqq P \in \mathbb{R}[X]$.
L'équation est donc de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t), \quad \forall\ t \in I,$$

On cherche alors y_p sous la forme d'un polynôme : $y_p \coloneqq Q \in \mathbb{R}[X]$.

Méthode – *Déterminer le degré du polynôme Q*

- ▷ Si $c \neq 0$, $\deg(Q) = \deg(P)$.
- ▷ Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$.
- ▷ Si $c = b = 0$, $\deg(Q) = \deg(P) + 2$.

Exemples

- ▷ On considère l'équation différentielle

$$3y''(t) + 2y'(t) - 2y(t) = -2t^2, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Puisque le second membre $t \mapsto -2t^2$ est un polynôme de degré 2, et que les coefficients de l'équation sont tous non nuls, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré 2 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) := at^2 + bt + c,$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p'(t) = 2at + b \quad \text{et} \quad y_p''(t) = 2a,$$

donc en injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$-2at^2 + (4a - 2b)t + 6a + 2b - 2c = -2t^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Par identification, on obtient $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$. On en déduit

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = t^2 + 2t + 5.$$

▷ On considère l'équation différentielle

$$2y''(t) + y'(t) = 4t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Puisque le second membre $t \mapsto 4t$ est un polynôme de degré 1 et que le coefficient c de l'équation est nul, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré 2 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) := at^2 + bt + c,$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
En injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$2at + 4a + b = 4t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Par identification, on obtient $a = 2$ et $b = -8$. Puisqu'il n'y a pas de condition sur c, on peut choisir $c = 0$. Alors, on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = 2t^2 - 8t.$$

Exercice 1.
Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 12t + 2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

6.2 Cas où $f(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$

On suppose que f s'écrit sous la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) := P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_p : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Méthode – *Déterminer le degré du polynôme Q*

- si α n'est pas solution de l'équation caractéristique, $\deg(Q) = \deg(P)$.
- si α est solution simple de l'équation caractéristique, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$.
- si α est solution double de l'équation caractéristique, $\deg(Q) = \deg(P) + 2$.

Exemples

- On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = (6t+5)\,\mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ici $\alpha := 1$, $P : t \mapsto 6t+5$ est un polynôme de degré 1 et l'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 2 = 0$. Les solutions de l'équation caractéristique sont -1 et 2. En particulier, α n'est pas solution de l'équation caractéristique.
On cherche alors y_p sous la forme d'un polynôme de degré 1 :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) := (at+b)\,\mathrm{e}^t,$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p'(t) = (at+a+b)\,\mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad y_p''(t) = (at+2a+b)\,\mathrm{e}^t\,.$$

Alors en injectant y_p dans l'équation, on obtient

$$((at+2a+b) - (at+a+b) - 2(at+b))\,\mathrm{e}^t = (6t+5)\,\mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Après simplifications, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$-2at + a - 2b = 6t + 5.$$

Par identification, on déduit $a = -3$ et $b = -4$. Donc on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = (-3t-4)\,\mathrm{e}^t\,.$$

- On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = (6t+5)\,\mathrm{e}^{2t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La seule différence avec l'équation vue précédemment est qu'ici on a $\alpha = 2$. Or 2 est solution *simple* de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Il faut donc prendre $\deg(Q) = \deg(P) + 1 = 2$.
On cherche alors y_p sous la forme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) := (at^2 + bt + c)\,\mathrm{e}^{2t},$$

En injectant de nouveau y_p dans l'équation, puis en procédant par identification (un peu plus fastidieux que le cas précédent), on obtient $a = b = 1$ et aucune condition sur c. On peut ainsi prendre $c = 0$, ce qui donne

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = (t^2 + t)\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

6.3 Cas où f contient des termes cos et sin

On suppose que f s'écrit sous la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) := P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \quad \text{ou} \quad f(t) := P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t),$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Sachant que $\mathrm{e}^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i\sin(\beta t)$, on va simplement se ramener au cas vu précédemment en travaillant avec les nombres complexes. On pose :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) &:= P(t)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t} \\ &= P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + iP(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{aligned}$$

Ainsi,

- ▷ $f = \mathcal{R}e(g)$ si $f(t)$ contient le terme $\cos(\beta t)$,
- ▷ $f = \mathcal{I}m(g)$ si $f(t)$ contient le terme $\sin(\beta t)$.

On considère ensuite l'équation avec g pour second membre :

$$az''(t) + bz'(t) + cz(t) = g(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \forall\, t \in I.$$

Enfin, on cherche une solution particulière de cette nouvelle équation sous la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) := Q(t)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t},$$

où $Q \in \mathbb{C}[X]$ (Q est un polynôme *à coefficients complexes*). Alors,

- ▷ si f contient des termes cosinus, la solution particulière est $y_p := \mathcal{R}e(z_p)$,
- ▷ si f contient des termes sinus, la solution particulière est $y_p := \mathcal{I}m(z_p)$.

Exemples

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = t\cos t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On se ramène à l'équation

$$z''(t) - z(t) = t\,\mathrm{e}^{it}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont $\alpha := i$ n'est pas solution.
Ainsi, on cherche z_p sous la forme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) := (at + b)\,\mathrm{e}^{it},$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z_p'(t) = (iat + a + ib)\,\mathrm{e}^{it} \quad \text{et} \quad z_p''(t) = (-at - b + 2ia)\,\mathrm{e}^{it}$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$(-2at - 2b + 2ia)\,\mathrm{e}^{it} = t\,\mathrm{e}^{it}\,.$$

Par identification, on obtient $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = ia = -\dfrac{i}{2}$. On en déduit

$$\forall\ t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) = -\frac{1}{2}(t+i)\,\mathrm{e}^{it} = -\frac{1}{2}(t\cos t - \sin t + i(\cos t + t\sin t)).$$

Ainsi, une solution particulière de l'équation

$$y''(t) - y(t) = t\cos t, \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

est $y_p := \mathcal{R}e(z_p) : t \mapsto -\dfrac{1}{2}(t\cos t - \sin t)$.
De plus, on obtient aussi une solution particulière de l'équation

$$y''(t) - y(t) = t\sin t, \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

en posant $y_p := \mathcal{I}m(z_p) : t \mapsto -\dfrac{1}{2}(\cos t + t\sin t)$.

On remarquera en particulier que même si f ne contient que des termes en cos, la solution particulière peut contenir des termes en cos et sin.

Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) = \sin(2t), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Puisque tous les coefficients sont non nuls, et que le second membre est un polynôme du premier degré, on cherche y_p comme polynôme du premier degré : $y_p : t \mapsto at + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En injectant dans l'équation, on obtient

$$-5a + 6at + 6b = 12t + 2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Par identification, on obtient $a = 2$ et $6b - 5a = 2$ donc $b = 2$. D'où $y_p : t \mapsto 2t + 2$.

Correction de l'Exercice 2.

- ▷ Équation caractéristique

  $$r^2 - 3r + 2 = 0$$

  solutions : $r_1 = 1 \qquad r_2 = 2$.
- ▷ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

  $$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^2\,t \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ▷ Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^t$ où Q est un polynôme de degré 1. D'où $y_p : t \mapsto (at + b)\,\mathrm{e}^t$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

  $$y_p' : t \mapsto (at + a + b)\,\mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad y_p'' : t \mapsto (at + 2a + b)\,\mathrm{e}^t.$$

  En injectant dans l'équation, on obtient

  $$(at + 2a + b) - 3(at + a + b) + 2(at + b) = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

  ce qui donne

  $$-a = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

  D'où $a = -1$ et on peut choisir $b = 0$. D'où $y_p : t \mapsto -t\,\mathrm{e}^t$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto (A - t)\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Correction de l'Exercice 3.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r = 0$ dont les solutions sont 0 et2. Donc

$$\mathcal{S}_H = \left\{ A + B\,\mathrm{e}^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) - 2z'(t) = \mathrm{e}^{2it}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Puisque le second membre est $P(t)\,\mathrm{e}^{2it}$ avec $\deg P = 0$ et $2i$ qui n'est pas une solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière $z_p : t \mapsto a\,\mathrm{e}^{2it}$ avec $a \in \mathbb{C}$. On a

$$z_p' : t \mapsto 2ia\,\mathrm{e}^{2it} \quad \text{et} \quad z_p'' : t \mapsto -4a\,\mathrm{e}^{2it}.$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$-4(1+i)a = 1,$$

donc $a = \frac{-1}{4(1+i)} = -\frac{1}{8}(1-i)$. Ainsi,

$$z_p : t \mapsto -\frac{1}{8}(1-i)\,\mathrm{e}^{2it} = -\frac{1}{8}(\cos(2t) - \sin(2t)) - \frac{i}{8}(\sin(2t) - \cos(2t)).$$

Finalement,

$$\mathcal{S}_G = \left\{A + B\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{8}(\sin(2t) - \cos(2t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Chapitre 7

Feuille d'exercices séquence 2

Exercice 1.

Parmi les équations suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$, préciser en justifiant celles qui sont différentielles linéaires d'ordre 2.

1) $\sqrt{3}y''(t) - y(t)y'(t) + 3y(t) = 0,$,

2) $y''(t) + 2y'(t) - 4 = y''(t) + 2y(t),$

3) $y(t) - 2y''(t) = y'(t) - \sin t,$

4) $y'' = 2.$

Exercice 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2 :

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On cherche une solution de la forme $y_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$, où $r \in \mathbb{R}$.
Injecter y_r dans l'équation et en déduire quelle condition doit vérifier r.

Exercice 3.

On considère les équations différentielles linéaires d'ordre 2, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes :

1) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = \mathrm{e}^{2t},$

2) $2y'' - 4y' + 2y + 6 = 0,$

3) $y''(t) + 2y'(t) - 4 = 2y(t) + \mathrm{e}^t,$

4) $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = t^2.$

5) $ty''(t) - 2y'(t) + y(t) = -\sin t,$

6) $y''(t) - 6y'(t) + 6y(t) = -3y(t) + \cos(t^2),$

7) $2y'' - 2y' + 8y = 2y',$

8) $y'' - 3 = 0.$

Pour chacune de ces équations,

a) donner l'équation homogène associée,

b) donner l'équation caractéristique associée,

c) en déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Exercice 4.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et P un polynôme. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$ay'' + by' + cy = P \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de cette équation de la forme $y_p := Q$, où Q est un polynôme.

1) Quels sont les degrés des polynômes cQ, bQ' et aQ'' ?

2) En déduire le degré du polynôme $aQ'' + bQ' + cQ$.

3) Déterminer le degré de Q selon les trois cas suivants :

a) $c \neq 0$, **b)** $c = 0$ et $b \neq 0$, **c)** $b = c = 0$.

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes :

1) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 12t + 2$,

2) $2y''(t) - 4y'(t) + 2y(t) = t^2 - 4t + 1$,

3) $y''(t) + 2y'(t) = 3t + \dfrac{1}{2}$,

4) $y''(t) - 3 = 3t$.

Exercice 6.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de cette équation de la forme $y_p : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, où Q est un polynôme.

1) Calculer $ay_p'' + by_p' + cy_p$ et en déduire P en fonction de Q, Q' et Q''.

2) Supposons que α est solution double de l'équation caractéristique associée à l'équation. Quel est le degré de Q dans ce cas ?

3) Supposons que α est solution simple de l'équation caractéristique associée à l'équation. Quel est le degré de Q dans ce cas ?

4) Supposons que α n'est pas solution de l'équation caractéristique associée à l'équation. Quel est le degré de Q dans ce cas ?

Exercice 7.

Résoudre les équations différentielles, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes :

1) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = \left(10t + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}$,

2) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = \left(10t + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}$,

3) $2y''(t) - 4y'(t) + 2y(t) = 4(2t^2 + 1)\,\mathrm{e}^{3t}$,

4) $2y''(t) - 4y'(t) + 2y(t) = (6t + 2)\,\mathrm{e}^{t}$,

5) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 9\,\mathrm{e}^{t}$,

6) $y''(t) + y(t) = \cos t$,

7) $y''(t) - 2y'(t) = 4\sin(2t)$,

8) $y''(t) + 9y(t) = 4\cos(3t)$,

9) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t\,\mathrm{e}^{t}\sin t$,

10) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2t\,\mathrm{e}^{t}\cos t$.

Chapitre 7 - Séquence 3

Principe de superposition et problèmes de Cauchy

7 Principe de superposition

Remarque

Les méthodes vues précédemment ne permettent pas de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 2 pour un second membre s'écrivant, par exemple, sous la forme :

$$f : t \mapsto P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} + Q(t)\,\mathrm{e}^{\beta t},$$

où P et Q sont deux polynômes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Cependant, si l'on pose

$$f_1 : t \mapsto P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} \quad \text{et} \quad f_2 : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\beta t},$$

on a vu comment déterminer une solution particulière pour chaque second membre f_1 et f_2.
Le résultat ci-dessous permet alors de déterminer une solution particulière pour le second membre $f = f_1 + f_2$.

Proposition : *Principe de superposition*

Soient

- ▷ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *avec* $a \neq 0$*,*
- ▷ f_1, f_2 *deux fonctions continues sur* I*,*
- ▷ y_{p_1} *une solution particulière de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = f_1$ *sur* I*,*
- ▷ y_{p_2} *une solution particulière de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = f_2$ *sur* I*.*

Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$*, la fonction*

$$y_p := \lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda\, f_1 + \mu\, f_2$*.*

Remarques

- ▷ Ce résultat est valable pour toute équation linéaire d'ordre quelconque. En effet, c'est la propriété de linéarité de ces équations qui permet de l'obtenir.
- ▷ En particulier, ce résultat est valable pour les équations linéaires d'ordre 1 mais n'est pas utile car la méthode de la variation de la constante permet de déterminer une solution particulière de l'équation.

Exemples

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t) = t(\cos t + \sin t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On a vu dans la séquence précédente que :

- $\triangleright$ $y_{p_1} : t \mapsto -\dfrac{1}{2}(t\cos t - \sin t)$ est une solution particulière de l'équation

$$y''(t) - y(t) = t\cos t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

- $\triangleright$ $y_{p_2} : t \mapsto -\dfrac{1}{2}(\cos t + t\sin t)$ est une solution particulière de l'équation

$$y''(t) - y(t) = t\sin t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} : t \mapsto -\frac{1}{2}(t(\cos t + \sin t) + \cos t - \sin t)$$

est une solution particulière de l'équation

$$y''(t) - y(t) = t(\cos t + \sin t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

De plus, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_H : t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{t}$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{2}(t(\cos t + \sin t) + \cos t - \sin t) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 1.

En appliquant le principe de superposition, résoudre les équations différentielles ci-dessous

1) $y'(t) + y(t) = (1 + 2t + 3t^2)\,\mathrm{e}^{-t} + \cos t + \sin t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

2) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 12t + 2 + \left(10t + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

8 Problème de Cauchy d'ordre 1

Définition : *Problème de Cauchy d'ordre 1*

Un **problème de Cauchy** d'ordre 1 est un problème constitué d'une équation différentielle d'ordre 1 et d'une condition initiale donnée.
C'est donc un problème de la forme :

$$\begin{cases} \alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) &= f(t), \quad \forall\, t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \tag{5}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + 2y &= 3 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

revient à déterminer une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 3$ qui vérifie $y(0) = 1$.

Théorème

Le problème (5) *admet une unique solution sur I.*

Méthode – *Résolution d'un problème de Cauchy*

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Déterminer, parmi toutes les solutions, celle qui vérifie la condition initiale donnée.
3. Conclure.

Exemple

On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + 2y &= 3 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

1. Résolution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 3$ sur $\mathbb{R}$.
   - ▷ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

     $$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

   - ▷ Déterminons une solution particulière y_p par la méthode de la variation de la constante : on cherche donc y_p sous la forme

     $$y_p : t \mapsto c(t)\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

     En injectant y_p dans l'équation on obtient :

     $$c'(t)\,\mathrm{e}^{-2t} - 2c(t)\,\mathrm{e}^{-2t} + 2c(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = 3, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+,$$

     d'où $c' : t \mapsto 3\,\mathrm{e}^{2t}$. On peut donc choisir $c : t \mapsto \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2t}$ et ainsi

     $$y_p : t \mapsto c(t)\,\mathrm{e}^{-2t} = \frac{3}{2}.$$

   Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est :

   $$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. La solution du problème de Cauchy est donc de la forme :

$$y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2},$$

où C est un réel à déterminer.
On doit avoir $y(0) = 1$. Or on a $y(0) = C + \frac{3}{2}$. On en déduit $C + \frac{3}{2} = 1$, d'où $C = -\frac{1}{2}$.
La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y : t \mapsto -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{2}.$$

9 Problème de Cauchy d'ordre 2

Définition : *Problème de Cauchy d'ordre 2*

Un **problème de Cauchy** d'ordre 2 est un problème constitué d'une équation différentielle d'ordre 2 sur I et de conditions initiales données en $y(t_0)$ et $y'(t_0)$, où $t_0 \in I$ est fixé.

En particulier, un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) & = & y_0, \\ y'(t_0) & = & y_1, \end{array}\right. \tag{6}$$

où $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème

Le problème (6) *admet une unique solution sur* $\mathbb{R}$.

Méthode — *Résolution d'un problème de Cauchy*

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Déterminer, parmi toutes les solutions, celle qui vérifie les conditions initiales données.
3. Conclure.

Exemple

On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) & = & 10, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & 4, \\ y'(0) & = & -1. \end{array}\right.$$

1. On commence par résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' - 10y = -10$ sur $\mathbb{R}$.
   - ▷ L'équation caractéristique est $r^2 + 3r - 10 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = 2$ et

$r_2 = -5$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-5t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- ▷ La forme du second membre donne celle d'une solution particulière : $y_p \coloneqq K$ où $K \in \mathbb{R}$.
  On a alors $y_p' = y_p'' = 0$ et en injectant dans l'équation, on obtient $y_p : t \mapsto 1$.
- ▷ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\mathcal{S}_G = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-5t} + 1 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. La solution du problème de Cauchy est donc de la forme

$$y : t \mapsto A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-5t} + 1, \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Il reste à déterminer les valeurs de A et B.
On a $y' : t \mapsto 2A\,\mathrm{e}^{2t} - 5B\,\mathrm{e}^{-5t}$.
Pour $t = 0$, on obtient donc $y(0) = A + B + 1$ et $y'(0) = 2A - 5B$.
Puisque les conditions initiales sont $y(0) = 4$ et $y'(0) = -1$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B + 1 & = & 4 \\ 2A - 5B & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} A & + & B & = & 3 \\ 2A & - & 5B & = & -1 \end{array} \right.$$

La résolution du système donne $A = 2$ et $B = 1$. On en déduit que la solution du problème de Cauchy est :

$$y : t \mapsto 2\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-5t} + 1.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) vu dans l'exercice 3 feuille d'exercice séquence 1 :

▷ On sait que les solutions de $y'(t)+y(t)=(1+2t+3t^2)\,\mathrm{e}^{-t}$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{t\mapsto (C_1+t+t^2+t^3)\,\mathrm{e}^{-t} \mid C_1\in\mathbb{R}\right\}.$$

▷ De plus, les solutions de $y'(t)+y(t)=\cos t+\sin t$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{t\mapsto C_2\,\mathrm{e}^{-t}+\sin t \mid C_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

▷ Les solutions de $y'(t)+y(t)=(1+2t+3t^2)\,\mathrm{e}^{-t}+\cos t+\sin t$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{t\mapsto (C_1+t+t^2+t^3)\,\mathrm{e}^{-t}+C_2\,\mathrm{e}^{-t}+\sin t \mid (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2) vus dans la feuille d'exercice séquence 2 :

▷ On sait que les solutions de $y''(t)-5y'(t)+6y(t)=12t+2$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{t\mapsto A_1e^{2t}+B_1e^{3t}+2t+2 \mid (A_1,B_1)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

▷ De plus, les solutions de $y''(t)-5y'(t)+6y(t)=\left(10t+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{A_2\,\mathrm{e}^{2t}+B_2\,\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{4}(2t+1)\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (A_2,B_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

▷ Les solutions de $y''(t)-5y'(t)+6y(t)=12t+2+\left(10t+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2t}$ sont

$$\mathcal{S}_G=\left\{t\mapsto A_1e^{2t}+B_1e^{3t}+2t+2+A_2\,\mathrm{e}^{2t}+B_2\,\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{4}(2t+1)\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (A_1,A_2,B_1,B_2)\in\mathbb{R}^4\right\}.$$

Chapitre 7

Feuille d'exercices séquence 3

Exercice 1.

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + y(x) = 2\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x} + 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1) Résoudre $y'(x) + y(x) = 2\sin x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre $y'(x) + y(x) = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

3) Conclure.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1) $2y''(t) - 4y'(t) + 2y(t) = 4(2t^2+1)\,\mathrm{e}^{3t} + (6t+2)\,\mathrm{e}^{t}$.

2) $y''(t) - 2y'(t) = 4(\sin(2t) + \cos(2t))$

Exercice 3.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) + y(t) & = & (1+2t+3t^2)\,\mathrm{e}^{-t},\ t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & 2. \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) + y(t) & = & \cos t + \sin t,\ t \in \mathbb{R}, \\ y(\frac{\pi}{2}) & = & \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + 1. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} ty'(t) - 2y(t) & = & t^2,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(1) & = & \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) - \left(2t - \dfrac{1}{t}\right) y(t) & = & 1,\ t \in \mathbb{R}_+^*, \\ y(1) & = & 1. \end{array}\right.$

Exercice 4.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) + y(t) & = & \cos t,\ t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & 1, \\ y'(0) & = & \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) + y'(t) - 2y(t) & = & 9\,\mathrm{e}^{t},\ t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & 2, \\ y'(0) & = & 2. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) & = & 2t\,\mathrm{e}^{t}\cos t,\ t \in \mathbb{R}, \\ y(0) & = & -\dfrac{1}{2}, \\ y'(0) & = & \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2y''(t) - 4y'(t) + 2y(t) & = & (6t+2)\,\mathrm{e}^{t},\ t \in \mathbb{R}, \\ y(1) & = & 0, \\ y'(1) & = & 0. \end{array}\right.$

Exercice 5.

On appelle **équation différentielle de Bernoulli**, toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)y^m(x) = 0, \quad \forall\, x \in I,$$

où I est un intervalle, a, b, c sont des fonctions continues sur I et $m \in \mathbb{N}$.

1) Que se passe t-il si $m := 0$ ou $m := 1$?
Dans la suite, on suppose $m \neq 0$ et $n \neq 1$.

2) Vérifier que $y = 0$ est solution.
Si $y \neq 0$ alors il existe une intervalle $J \subset I$ tel que y et a ne s'annulent pas sur J (admis).
Dans la suite, on considère l'équation sur cet intervalle J.

3) Diviser l'équation par y^m puis déterminer l'équation vérifiée par $z := y^{1-m}$.

4) En déduire une méthode de résolution des équations différentielles de Bernoulli.

5) *Application* : résoudre l'équation

$$xy'(x) + y(x) = y^2(x) \ln x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 6.

On appelle équation différentielle du premier ordre **à variables séparées** toute équation du premier ordre de la forme

$$y'(t) = a(t) f\left(y(t)\right), \quad t \in I,$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ sont continues.
Dans la suite, on considère des problèmes de Cauchy *non linéaires* de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t) f\left(y(t)\right), \quad t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{7}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
On peut montrer que, si $f(y_0) \neq 0$, alors il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $t_0 \in J$ pour lequel il existe une solution de (7) définie sur J.
L'objectif de cet exercice est de vérifier ce résultat sur deux exemples.

1) Vérifier que le problème de Cauchy ci-dessous est de la forme (7).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2t + y'(t)y(t) & = & 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ y(1) & = & 1. \end{array} \right.$$

Déterminer une solution y de ce problème et le plus grand intervalle J associé.

2) Faire de même avec le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (4 - t^2)y'(t)y(t) & = & 2(1 + y(t)^2),\ t \in \mathbb{R}, \\ y(1) & = & 0. \end{array} \right.$$