Algèbre de base

Chapitre 5

Calculs avec le symbole somme

Pré-requis

- ☐ Le corps $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Objectifs

- ☐ Savoir effectuer un raisonnement par récurrence.
- ☐ Connaître les sommes arithmétiques, géométriques et constantes.
- ☐ Savoir manipuler les sommes et produits.
- ☐ Savoir calculer une somme télescopique.
- ☐ Connaître la formule du binôme de Newton et savoir l'utiliser.

Sommaire

Chapitre 5 - Séquence 1

Raisonnement par récurrence et symbole $\sum$

1 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode de raisonnement qui permet de montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang.

Exemple

Soit $q \in [0;1]$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \in [0;1]$. On a :

- ▷ $q^0 = 1 \in [0;1]$ et $q^1 = q \in [0;1]$.
- ▷ $0 \leq q \leq 1$. En multipliant par q, on obtient :

$$0 \leq qq \leq q \leq 1.$$

  Ainsi $q^2 \in [0;1]$.
- ▷ $0 \leq q^2 \leq 1$ et $q \geq 0$. En multipliant par q, on obtient :

$$0 \leq qq^2 \leq q^2 \leq 1.$$

  Ainsi $q^3 \in [0;1]$.
- ▷ ...

Il est clair que l'on peut continuer ce raisonnement de proche en proche, jusqu'à atteindre n'importe quel terme.
Cependant, en mathématiques, cela ne constitue pas une démonstration. Nous avons besoin d'un outil pour rédiger une démonstration rigoureuse. Pour cela, on fait appel au principe de récurrence.

Proposition : *Principe de récurrence*

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, une propriété $\mathcal{P}(n)$, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ▷ *la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;*
- ▷ *pour tout entier $n \geq n_0$, si la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.*

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie également.

Remarque

Ce résultat est un axiome et ne se démontre donc pas : il est supposé être toujours vérifié.

Grâce à ce principe, on peut reprendre l'exemple précédent et en donner une démonstration rigoureuse.

Exemple

Soit $q \in [0;1]$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \in [0;1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $q^n \in [0;1]$ ».
2. Par définition, on a $q^0 = 1 \in [0;1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, on a $0 \leq q^n \leq 1$. De plus, par définition, $q \geq 0$. Ainsi, en multipliant les inégalités $0 \leq q^n \leq 1$ par q, on obtient
$$0 \leq qq^n \leq q \leq 1,$$
c'est-à-dire $q^{n+1} \in [0;1]$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $q^n \in [0;1]$.

De manière générale, lorsque l'on souhaite montrer une propriété par récurrence, on suit la méthode ci-dessous.

Méthode – *Raisonnement par récurrence*

On souhaite montrer par récurrence une propriété.

1. Définir rigoureusement la propriété et sa dépendance par rapport à un entier :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « ... ».
2. Vérifier que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain n_0 donné (ou à déterminer).
3. Fixer un entier $n \geq n_0$. Supposer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrer alors que, sous cette hypothèse, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.
4. Conclure :
« Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.»

Remarques

- ▷ La deuxième étape est appelée l'**initialisation** et la troisième étape l'**hérédité**.
- ▷ La troisième étape constitue la partie principale de la récurrence. Elle est constituée de deux parties.
  - L'hypothèse de récurrence : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq n_0$.
  - La récurrence : on montre (en utilisant l'hypothèse de récurrence) que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ▷ Si l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée lors de la récurrence, alors soit il y a une erreur de raisonnement, soit on peut faire le raisonnement sans principe de récurrence.
- ▷ Lors de la récurrence, comme lors de toute démonstration, il est souvent très utile d'écrire explicitement le résultat recherché, c'est-à-dire d'écrire explicitement $\mathcal{P}(n+1)$.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $(1+a)^n \geq 1 + na$ ».

2) Pour $n = 0$, on a $(1+a)^n = 1$ et $1 + na = 1$ donc $(1+a)^n \geq 1 + na$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^n \geq 1+na$.
On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.
Puisque $(1+a) > 0$, en multipliant l'inégalité $(1+a)^n \geq 1+na$ par $(1+a)$, on obtient

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1+na+a+na^2 \geq 1+na+a = 1+(n+1)a,$$

où on a utilisé $na^2 \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4) On en déduit, par le principe de récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

2 Symbole Σ et propriétés

On a déjà utilisé précédemment le symbole Σ afin de simplifier certaines expressions données par des additions. Celui-ci permet d'écrire une expression sans utiliser la notation des pointillés qui est peu rigoureuse et source de nombreuses erreurs.

Définition : *Somme avec le symbole Σ*

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n$, et $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes.
On définit la **somme** des a_k pour k allant de m à n par

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Exemples

- Pour $n \in \mathbb{N}$, la somme des entiers naturels inférieurs à n est

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\ldots+n.$$

On pourra remarquer de plus que l'on a $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, la somme des entiers naturels pairs inférieurs à $2n$ est

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 0+2+4+\ldots+2n.$$

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la somme des entiers naturels impairs inférieurs à $2n+1$.

Remarques

- Dans la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$, l'entier k est appelé l'**indice de sommation**. Cet indice est une variable *muette* : elle n'a de sens que dans la somme. Ainsi la lettre employée n'a pas d'importance. Par exemple, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

En général, on utilise les lettres $i, j, k, \dots$ pour l'indice de sommation.

- ▷ Dans la définition, $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres réels ou complexes mais la définition peut s'étendre à d'autres objets mathématiques (par exemple des vecteurs). De plus, au lieu d'utiliser des pointillés, on écrira plutôt « pour tout $k \in [\![m;n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$ ».

La définition donnée précédemment n'est pas rigoureuse car elle utilise la notation avec des pointillés. On donne ci-dessous une définition rigoureuse.

Définition : *Somme avec le symbole Σ par récurrence*

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$ et, pour tout $k \in [\![m;n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$.
On définit la **somme** des a_k pour k allant de m à n par

- ▷ si $m = n$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n$,
- ▷ si $m < n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Remarque

Il s'agit d'une définition par récurrence car on donne une *initialisation* : le cas $m = n$, puis une propriété d'*hérédité* : le cas $m < n$ où l'on se ramène au cas de la somme avec n remplacé par $n-1$.

La définition précédente montre que l'utilisation du symbole $\sum$ est fortement associée au principe de récurrence.

Exemple

La somme des n premiers entiers naturels, $n \in \mathbb{N}$, est un exemple classique de somme que l'on peut calculer explicitement et qu'il faut connaître impérativement.
On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} k.$$

Nous allons d'abord déterminer la valeur de S_n, $n \in \mathbb{N}$, de manière intuitive (donc non rigoureuse) puis nous montrerons que le résultat ainsi obtenu est correct par un raisonnement par récurrence (donc rigoureux).

1. **Méthode intuitive.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit la somme S_n avec des pointillés, d'abord allant de 0 à n, puis allant de n à 0 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S_n & = & 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \dots & + & 0 \end{array}$$

On additionne les deux lignes :

$$2S_n = \underbrace{n+n+n+n+\ldots+n}_{(n+1)\text{-fois}} = n(n+1).$$

On en déduit

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. **Démonstration par récurrence.** Montrons par récurrence que l'on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

▷ Pour $n = 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{0 \times 1}{2} = 0$. Donc on a bien $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 0$.

▷ Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons que l'on a $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Par définition,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

ce qui est l'égalité attendue.

Par récurrence, on en déduit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3.
Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer intuitivement la valeur de S_n. *Indication* : calculer $S_n - qS_n$.

2) Montrer par récurrence le formule obtenue.

3 Propriétés des sommes

Dans cette partie, on donne deux propriétés essentielles sur les sommes permettant de calculer nombre d'entre elles.

Proposition : *Relation de Chasles*

Soient $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$, avec $m \leq n \leq p$, et, pour tout $k \in [\![m;p]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$.
Alors, on a

$$\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k.$$

Remarque

Ce résultat se montre facilement de manière intuitive. En effet, on a

$$\sum_{k=m}^{p} a_k = \underbrace{a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n}_{= \sum_{k=m}^{n} a_k} + \underbrace{a_{n+1} + \ldots + a_p}_{= \sum_{k=n+1}^{p} a_k}.$$

Mais cette démonstration n'en est par une car celle-ci n'est pas rigoureuse (utilisation des pointillés).

Proposition : *Linéarité de la somme*

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \leq n \leq p$, et , pour tout $k \in [\![m;p]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$. Alors, on a

- ▷ $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$,
- ▷ *pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(\lambda\, a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$.

Exemples

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On verra en séance que l'on a
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
On en déduit :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Exercice 4.

En utilisant le résultat de l'exercice 3, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}(3^k + k).$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $2^n > n$ ».

2) Pour $n = 0$, on a $2^n = 1 > 0 = n$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $2^n > n$.
On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $2^{n+1} > n+1$.
Puisque $2^n > n$ et $2^n \in \mathbb{N}$, on a $2^n \geq n+1$. Alors, on obtient

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n + 2 = n + 1 + n + 1 > n + 1,$$

car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

4) On en déduit, par le principe de récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Correction de l'Exercice 2.

La somme des entiers naturels impairs inférieurs à $2n+1$ est

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1 + 2n + 1.$$

Correction de l'Exercice 3.

1) On a

$$\begin{cases} S_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n, \\ qS_n &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}. \end{cases}$$

On en déduit

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}.$$

Or $S_n - qS_n = (1-q)S_n$, d'où

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

- ▷ Pour $n = 0$, $S_0 = 1$ et $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1 - q}{1 - q} = 1$ donc $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ est vérifiée pour $n = 0$.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
  Montrons que
  $$S_{n+1} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$
  On a
  $$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = S_n + q_{n+1}.$$

Puisque $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, on en déduit

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + q_{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q_{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q_{n+1}(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1-q_{n+2}}{1-q}, \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat attendu.

On en déduit, par le principe de récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Correction de l'Exercice 4.

On a

$$\sum_{k=0}^{n}(3^k + k) = \sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} + \frac{n(n+1)}{2} = -\frac{1-3^{n+1}}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chapitre 5

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction réelle définie par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

1) Calculer $f^{(n)}$, pour $n \in [\![0; 5]\!]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Conjecturer une expression de $f^{(n)}$.

3) Montrer par récurrence cette expression.

Exercice 2.

Soit $P(n)$ la proposition « $n^2 \leq 2^n$ ».

1) Déterminer si $P(n)$ vraie pour $n \in [\![1; 4]\!]$.

2) Montrer que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang et déterminer ce rang.

Exercice 3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 11.

Exercice 4.

Soient f la fonction cosinus.

1) Calculer $f^{(n)}$, pour $n \in [\![0; 10]\!]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Conjecturer une expression de $f^{(n)}$.

3) Montrer par récurrence cette expression.

Exercice 5. — *Exemples de sommes*

1) Écrire à l'aide du signe $\sum$ les expressions suivantes :

a) $S_1 \coloneqq 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{12}$,

b) $S_2 \coloneqq \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \ldots + \dfrac{10}{1024}$,

c) $S_3 \coloneqq a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \ldots + \dfrac{a^n}{n}$,

d) $S_4 \coloneqq 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 50$,

e) $S_5 \coloneqq -2 + 4 - 6 + 8 + \ldots - 50$,

f) $S_6 \coloneqq 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + 50$, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Écrire avec des pointillés les expressions suivantes :

a) $S_n \coloneqq \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{1+i}$,

b) $T_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{i}{1+k}$,

c) $U_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} k - \sum_{k=0}^{n} 2k$.

Exercice 6. — *Somme d'une constante*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^{n} 1$ et $T_n := \sum_{k=0}^{n} 1$.

1) Calculer S_1, S_2, T_1, T_2. En déduire, a priori, les formules donnant S_n et T_n.

2) Montrer par récurrence les résultats conjecturés.

3) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Déterminer l'expression de $\sum_{k=p}^{q} a$.

Exercice 7. — *La somme géométrique*

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$ et $q \in \mathbb{K}^*$. Le but de cet exercice est de calculer la somme géométrique de raison q donnée par

$$S_n := \sum_{k=p}^{n} q^k.$$

1) Pour $q = 1$, calculer directement S_n.
Dans la suite, on suppose $q \neq 1$.

2) Déterminer intuitivement $S_n - qS_n$ et en déduire, a priori, la valeur de S_n.

3) Montrer par récurrence sur n la formule obtenue.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes ci-dessous.

1) $S_1 := \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$,

2) $S_2 := \sum_{k=0}^{n} 2^k \, 5^{n-k}$,

3) $S_3 := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} + 2k - n \right)$,

4) $S_4 := \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k k$,

5) $S_5 := \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$,

6) $S_6 := \sum_{k=1}^{n} \frac{2 + 4^{n+k}}{2^k}$.

Exercice 9.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 10.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n.$$

Montrer que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $x_k = 1$.

Exercice 11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

2) En déduire $S_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $T_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Sommes télescopiques et binôme de Newton

4 Sommes télescopiques

Rappel – *Suites*

Toute fonction de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E est appelée une **suite** de E (indicée par $\mathbb{N}$). Ces fonctions particulières sont notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \in E$. On peut noter aussi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, etc.
On peut définir des suites indicées sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Par exemple, sur $\mathbb{N}^*$ on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou encore $(u_n)_{n\geq 1}$. Si la suite est indicée sur l'ensemble des entiers $n \geq 4$, on notera $(u_n)_{n\geq 4}$.

Exemples

- ▷ La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$, on parle alors de **suite réelle**. Cette suite est composée dans l'ordre des éléments :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

  Cette suite est aussi égale à la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- ▷ On appelle **suite arithmétique** dans $\mathbb{K}$, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $r \in \mathbb{K}$ appelé la **raison** vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

- ▷ On appelle **suite géométrique** dans $\mathbb{K}$, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{K}$ appelé la **raison** vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Définition : *Somme télescopique*

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Une somme S est dite **télescopique** lorsque celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$S = \sum_{k=m}^{n} (u_{k+p} - u_k),$$

où $p \in \mathbb{Z}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}$.

Les sommes télescopiques jouent un rôle particulier car elles peuvent se calculer très simplement.

Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right), \quad \sum_{k=0}^{n}\left((k+2)^2-k^2\right), \quad \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1)-\ln(k)\right).$$

En écrivant, par exemple, la première somme avec des pointillés on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Il reste à voir comment faire ces calculs de façon rigoureuse.

Méthode – *Calcul d'une somme télescopique*

Pour calculer $S = \displaystyle\sum_{k=m}^{n}(u_{k+p}-u_k)$,

1. on sépare en deux sommes :
$$S = \sum_{k=m}^{n} u_{k+p} - \sum_{k=m}^{n} u_k,$$
2. on effectue un *changement d'indice* : $j = k+p$
$$S = \sum_{j=m+p}^{n+p} u_j - \sum_{k=m}^{n} u_k,$$
Attention à ne pas oublier de changer les bornes de la somme.
3. Les éléments en communs dans les deux sommes disparaissent et il reste seulement quelques termes.

Exemple

On reprend l'exemple précédent de manière plus rigoureuse. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer la somme $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$.

▷ On écrit S_n comme la différence de deux sommes :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

▷ On effectue le changement d'indice $j = k+1$ dans la deuxième somme :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}.$$

▷ Il suffit maintenant d'identifier les termes communs aux deux sommes. La première somme débute à l'indice 1 tandis que la deuxième débute à l'indice 2 donc le terme d'indice 1 est en trop :
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}$$

La première somme s'arrête à l'indice n tandis que la deuxième s'arrête à l'indice $n+1$ donc le terme d'indice $n+1$ est en trop :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}$$

Les deux sommes sont bien les mêmes car l'indice de sommation est une variable muette (autrement dit l'indice j peut être remplacé par k). On obtient alors

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

5 Binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est une généralisation de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Celle-ci est à connaître par cœur.

Définitions : *Factoriel et coefficient binomial*

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$.

1. On appelle **factoriel** n l'entier noté $n!$ défini par

$$n! := n(n-1)(n-2)\ldots \times 2 \times 1.$$

2. L'entier $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial** est défini par

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Remarques

- ▷ La définition précédente de la fonction factorielle est peu rigoureuse car celle-ci fait appel à des pointillés. Une définition plus rigoureuse peut être donnée de manière récursive en posant :

$$\begin{cases} & 0! := 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, & n! := n(n-1)! \end{cases}$$

- ▷ Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ intervient en probabilités et dénombrement car celui-ci correspond au nombre de choix possibles de k éléments parmi n. On le note aussi C_n^k (mais on évitera d'employer cette dernière notation).

Proposition

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $0 < k < n$ *et* $n \neq 0$. *Alors, on a*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

La proposition précédente donne une méthode de calcul des coefficients binomiaux mais la formule reste compliquée à utiliser a priori. Néanmoins, cette proposition peut être illustrée simplement par le **triangle de Pascal**.

Méthode – *Triangle de Pascal*

Les différentes valeurs de $\binom{n}{k}$ sont données par le tableau suivant pour $n \in [\![0;6]\!]$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Ce tableau se construit en écrivant le chiffre 1 tout à gauche et tout à droite, ensuite chaque case du tableau s'obtient en additionnant le chiffre de la case du dessus avec celui à sa gauche. Par exemple, à la ligne 4 le chiffre 6 est obtenu en additionnant les chiffres 3 au dessus.

Exemple

Sur le triangle de Pascal, $\binom{5}{3}$ est le chiffre inscrit à la 5 ième ligne et 3 ième colonne. Autrement dit, on a

$$\binom{5}{3} = 10.$$

Proposition : *Formule du binôme de Newton*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. *Alors, on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque

La dernière somme s'obtient en inversant les rôles de a et b puisque $(a+b)^n = (b+a)^n$.

Exemple

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. En appliquant la formule du binôme de Newton et en utilisant le triangle de Pascal, on obtient

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Déterminer $(a+b)^5$ et en déduire $(a-b)^5$.

6 Produit et symbole $\prod$

De la même manière que pour les sommes, lorsque l'on doit calculer un produit contenant de nombreux termes on est amené à utiliser le symbole $\prod$.

Définition : *Symbole* $\prod$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Alors, le produit des u_k pour k allant de m à n se note $\prod_{k=m}^{n} u_k$. Autrement dit,

$$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \ldots \times u_n.$$

Exemples

- ▷ On a
$$\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1 \times 2^2 \times 3^2 = 36$$
- ▷ Pour tous $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n.$$

Remarques

On peut donner une définition récursive plus rigoureuse en posant :

$$\prod_{k=m}^{m} u_k = u_m \quad \text{et, pour } n > m, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_n \prod_{k=m}^{n-1} u_k.$$

Il s'agit du même type de définition que celle de $n!$ car $n!$ est un produit particulier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide du signe $\prod$ les expressions suivantes :

1) $P_n \coloneqq 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n$,

2) $Q_n \coloneqq 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)$,

3) $R_n \coloneqq n(n-1)\ldots(n-p+1)$, $p \in \mathbb{N}$.

Propriétés

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

▷ *On a :*

$$\prod_{k=m}^{n} (u_k v_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right).$$

▷ *Le produit vérifie la relation de Chasles :*

$$\forall\, p \in [\![m;n]\!]\,, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = \left(\prod_{k=m}^{p} u_k\right)\left(\prod_{k=p+1}^{n} u_k\right).$$

Exemple

On a

$$\prod_{k=1}^{3}(2k) = \left(\prod_{k=1}^{3} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{3} k\right) = 2^3 \times 3! = 48.$$

Exercice 4.

Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{3} k^2 \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^{4}(k-1)^2.$$

Pour le deuxième produit, on effectuera un changement d'indice comme vu précédemment pour les sommes.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}.$$

On fait le changement d'indice $j = k + 2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 2.

On a

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

On en déduit

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Correction de l'Exercice 3.

1) $P_n = \prod_{k=1}^{n} 2k.$

2) $Q_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1),$

3) $R_n = \prod_{k=n-p+1}^{n} k = \prod_{k=0}^{p-1} (n-k).$

Correction de l'Exercice 4.

On a

$$\prod_{k=1}^{3} k^2 = \left(\prod_{k=1}^{3} k \right)^2 = 36,$$

et

$$\prod_{k=2}^{4} (k-1)^2 = \prod_{j=1}^{3} j^2 = 36.$$

Chapitre 5

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant des changements d'indice, calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1) $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$,

2) $T_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$,

3) $U_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k))$,

4) $V_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 2. — *La somme géométrique*

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$ et $q \in \mathbb{R}^*$, $q \neq 1$. Le but de cet exercice est de calculer la somme géométrique de raison q donnée par

$$S_n := \sum_{k=p}^{n} q^k,$$

en utilisant cette fois un changement d'indice.

1) En utilisant un changement d'indice, calculer $T_n := S_n - qS_n$.

2) En déduire la valeur de S_n.

Exercice 3. — *Somme des carrés*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme des n premiers carrés :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k^2$$

1) Simplifier l'expression suivante :

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

2) Développer $(k+1)^3$ et en déduire une nouvelle expression de T_n en fonction de S_n.

3) Déduire des deux questions précédentes la valeur de S_n.

Exercice 4.

1) Montrer que pour tous réels a, b strictement positifs, on a

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$$

Exercice 5.

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'objectif de cet exercice est de montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1) Vérifier la formule de Newton pour $n = 1$.

2) On suppose la formule de Newton vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que l'on a

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1}\, b^k.$$

b) Montrer que l'on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

c) En déduire que la formule du binôme de Newton est vraie pour $n+1$ puis conclure.

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À partir de la formule du binôme de Newton, calculer les sommes ci-dessous

1) $S_1 \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, **2)** $S_2 \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$, **3)** $S_3 \coloneqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 7. — *Linéarisation en trigonométrie*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions ci-dessous.

1) $\cos^5(x)$, **2)** $\sin^3(x)$, **3)** $\cos^3(x)\sin^4(x)$.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits ci-dessous.

1) $P_1 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$, **2)** $P_2 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, **3)** $P_3 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$,

4) $P_4 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$, **5)** $P_5 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$, **6)** $P_6 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (6k+3)$,

7) $P_7 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\, \mathrm{e}^k$, **8)** $P_8 \coloneqq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.