Algèbre de base

Chapitre 2

Les nombres complexes

Pré-requis

- ☐ Équations de second degré.
- ☐ Trigonométrie.
- ☐ Valeur absolue.

Objectifs

- ☐ Savoir manipuler l'écriture algébrique, l'écriture trigonométrique et l'écriture exponentielle d'un nombre complexe.
- ☐ Savoir effectuer les opérations sur les complexes.
- ☐ Savoir calculer le module et l'argument d'un nombre complexe.
- ☐ Connaître les formules d'Euler et de Moivre.
- ☐ Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe,
- ☐ Savoir résoudre une équation de second degré dans $\mathbb{C}$.

Sommaire

Chapitre 2 - Séquence 1

Calculs avec les nombres complexes

1 Généralités sur les nombres complexes

Notation

On admet l'existence d'un nombre, noté i, tel que

$$i^2 = -1.$$

Définitions : *Nombres complexes*

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme

$$z := a + i\,b, \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

- ▷ L'écriture $a + ib$ est appelée **l'écriture algébrique** du nombre complexe z.
- ▷ Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et se note $\mathcal{R}e(z)$.
- ▷ Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et se note $\mathcal{I}m(z)$.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.
Un nombre complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est nulle : $\mathcal{R}e(z) = 0$.

Remarque

Tous les réels sont des nombres complexes (avec une partie imaginaire nulle).

Notation

Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ vérifient que tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.
On dit alors que « $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$ » et on écrit

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

ce qui se lit « $\mathbb{R}$ est **inclus** dans $\mathbb{C}$ », ou « $\mathbb{R}$ est **une partie** de $\mathbb{C}$ » ou encore « $\mathbb{R}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{C}$ ».
Cela revient à dire que **si** $x \in \mathbb{R}$, **alors** $x \in \mathbb{C}$, ce que l'on note

$$(x \in \mathbb{R}) \implies (x \in \mathbb{C}).$$

Exemples – *Partie réelle et partie imaginaire*

- ▷ Soit $z_1 := 1 + i$. On a $\mathcal{R}e(z_1) = 1$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 1$.
- ▷ Soit $z_2 := -\sqrt{2}$. Alors, $z = -\sqrt{2} + 0i$, donc, $\mathcal{R}e(z_2) = -\sqrt{2}$ et $\mathcal{I}m(z_2) = 0$.
- ▷ Soit $z_3 := 2i$. Alors, z_3 est un imaginaire pur car $\mathcal{R}e(z_3) = 0$. De plus, $\mathcal{I}m(z_3) = 2$.

Attention
La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe sont des **réels**.

2 Calculs avec les nombres complexes

Propriété : *Égalité dans $\mathbb{C}$*

Soient $z_1 := a_1 + ib_1$ et $z_2 := a_2 + ib_2$, où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des réels. Alors,

$$z_1 = z_2 \text{ si et seulement si } a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

Notation

L'expression **si et seulement si** est une équivalence. Autrement dit, la phrase « $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ » signifie que :

1. si $z_1 = z_2$, alors $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$,
2. réciproquement, si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$, alors $z_1 = z_2$.

On dit aussi que 1. et 2. sont **équivalents**, ce qui se note « 1. $\iff$ 2. ». Ainsi, pour le cas de l'égalité, on a

$$(z_1 = z_2) \iff (a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 = b_2).$$

Enfin, on dit encore que $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ est une **condition nécessaire et suffisante** pour que $z_1 = z_2$.

Définition : *Somme dans $\mathbb{C}$*

Soient $z_1 := a_1 + i\, b_1$ et $z_2 := a_2 + i\, b_2$ avec a_1, a_2, b_1, b_2 des réels. La **somme** de z_1 et de z_2 est définie par :

$$z_1 + z_2 := (a_1 + i\, b_1) + (a_2 + i\, b_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

Exemple – *Somme dans $\mathbb{C}$*

Soient $z_1 := 3 + 2i$ et $z_2 := 1 - 4i$. Alors, $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i$.

Définition : *Produit dans $\mathbb{C}$*

Soient $z_1 := a_1 + i\, b_1$ et $z_2 := a_2 + i\, b_2$ avec a_1, a_2, b_1, b_2 des réels. Le **produit** de z_1 par z_2 est donné par :

$$z_1 z_2 := a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Dans le cas du produit, plutôt que d'apprendre la formule précédente, on retiendra la méthode ci-dessous.

Méthode – *Calcul du produit dans $\mathbb{C}$*

1. Développer les produits (de la même façon que dans les réels).
2. Simplifier, en remplaçant i^2 par -1.
3. Regrouper toutes les parties réelles et imaginaires.

Exemple – *Produit dans $\mathbb{C}$*

Soient $z_1 := 2 - i$ et $z_2 := -1 + 2i$. Alors,

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (2-i)(-1+2i) && \text{après développement du produit} \\
&= -2 + 4i + i - 2i^2 && \text{après remplacement de } i^2 \text{ par } -1 \\
&= -2 + 4i + i + (-2)(-1) \\
&= -2 + 4i + i + 2 && \text{après regroupement des parties réelles et imaginaires} \\
&= 0 + 5i = 5i.
\end{aligned}$$

Exercice 1.

1) Calculer $(1+i)(2-i)$.

2) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z := -1 + (1+i)i$.

3) Développer $(a+ib)^2$, où a et b sont deux nombres réels.

Remarque – *Corps des nombres complexes*

L'ensemble des nombres complexes, muni de l'addition (notée $+$) et de la multiplication (notée $\cdot$), est noté $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ et est appelé le **corps des nombres complexes**.

3 Module, conjugué et leurs propriétés

Définition : *Module d'un nombre complexe*

Soit $z := a + ib$, où a et b sont réels. Le **module** de z, noté $|z|$, est le **réel positif** défini par

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque

Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.
En effet, si $x \in \mathbb{R}$ alors $x = x + i0$ donc le module de x est $\sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.
C'est pour cela que la même notation est utilisée pour le module et la valeur absolue.

Exemples

- ▷ Pour $z := 1 + i$, on a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- ▷ Pour $z := -2 = -2 + 0i$, on a $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$.
- ▷ Pour $z := -i = 0 - i$, on a $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$.

Propriété : *Sur le module*

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(|z| = 0) \iff (z = 0).$$

Propriétés : *Module et opérations*

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors

- ▷ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- ▷ *Si $z_2 \neq 0$, on a* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- ▷ *Le module vérifie* **l'inégalité triangulaire** *:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Notation

Au lieu d'écrire $z_2 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \neq 0$, on peut écrire $z \in \mathbb{C}^*$. Autrement dit,

$$\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}.$$

Exemple

Soit $z := 18 - 24i$.
Remarquons que :

$$z = 18 - 24i = 6(3 - 4i).$$

Le calcul du module de z peut entraîner de longs calculs :

$$|z| := \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30.$$

Soient maintenant $z_1 := 3 - 4i$ et $z_2 := 6$. On a :

$$|z_1| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{et} \quad |z_2| = \sqrt{6^2} = 6.$$

D'où, $|z_1||z_2| = 30$.
On a donc bien $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ et cette propriété permet de simplifier des calculs.

Exercice 2.

Soient $z_1 := 3 + 4i$ et $z_2 := \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Calculer :

1) $|z_1 z_2|^2$, **2)** $|z_1|^2$, **3)** $|z_2|^2$.

Définition : *Conjugué d'un nombre complexe*

Soit $z := a + ib$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le *nombre complexe* défini par :

$$\overline{z} := a - ib.$$

Exemples

- $\triangleright$ Pour $z := 1 + i$, on a $\overline{z} = 1 - i$.
- $\triangleright$ Pour $z := -2 = -2 + 0i$, on a $\overline{z} = -2 - 0i = -2$.
- $\triangleright$ Pour $z := -i = 0 - i$, on a $\overline{z} = -(-i) = i$.

Propriétés : *Sur le conjugué*

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes :

- $\triangleright$ $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\triangleright$ $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$,
- $\triangleright$ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

Exemple

Soit $z := 2 - 7i$. On a $\overline{z} = 2 + 7i$ et $\mathcal{R}e(z) = 2$.
De plus, $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \dfrac{2 - 7i + 2 + 7i}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.
On a donc bien $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \mathcal{R}e(z)$.

Remarque

Ces propriétés se démontrent facilement en utilisant la définition du conjugué.
Démontrons l'une d'elles.
Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a $\overline{z} = a - ib$. Ainsi,

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathcal{R}e(z).$$

Exercice 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$.

Propriétés : *Conjugué et opérations*

Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \text{et} \qquad \text{si } z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

De plus, on a aussi :

- ▷ $z\overline{z} = |z|^2$,
- ▷ *si* $z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

Exemple

Soient $z_1 := 2 - i$ et $z_2 := -1 + 2i$. Alors,

▷ $\overline{z_1} = 2 + i$, ▷ $\overline{z_2} = -1 - 2i$.

Ainsi,

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (2+i)(-1-2i) = -2 - 4i - i + -2i^2 = -2 - 5i + 2 = -5i.$$

Or, d'après un exemple précédent, $z_1z_2 = 5i$. D'où, $\overline{z_1z_2} = \overline{5i} = -5i$. On a bien

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Méthode – *Simplification d'une fraction complexe*

Pour simplifier une fraction de la forme $\frac{N}{D}$, où *le dénominateur D est une expression complexe*, il est possible de multiplier la fraction, en haut et en bas, par le conjugué de D :

$$\frac{N}{D} = \frac{N\overline{D}}{D\overline{D}} = \frac{N\overline{D}}{|D|^2}.$$

Exemple

Soit $z := \dfrac{1}{1+i}$. On a,

$$z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

car $|1+i|^2 = (\sqrt{1^2+1^2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Exercice 4.

1) Mettre $z := \dfrac{3-2i}{5+i}$ sous sa forme algébrique.

2) Calculer $|z|$ de deux façons différentes.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(2+i)z - 1 + 2i = 0$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) $(1+i)(2-i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 - i + 2i - 1(-1) = 3 + i$.

2) $z = -1 + (1+i)i = -1 + i + i^2 = -1 + i - 1 = -2 + i$. Donc $\mathcal{R}e(z) = -2$ et $\mathcal{I}m(z) = 1$.

3) $(a+ib)^2 = a^2 + (ib)^2 + 2aib = a^2 - b^2 + i2ab$.

Correction de l'Exercice 2.

On a

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3+4i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}i^2 \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2} + \sqrt{2}i. \end{aligned}$$

Donc $|z_1 z_2|^2 = (7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 98 + 2 = 100$. Et, $|z_1|^2 = 9 + 16 = 25$ et $|z_2|^2 = 2 + 2 = 4$. Remarquons que $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.

Correction de l'Exercice 3.

On a

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{R}e(z) + i\mathcal{I}m(z), \\ \overline{z} &= \mathcal{R}e(z) - i\mathcal{I}m(z), \end{aligned}$$

donc $z - \overline{z} = 2\, i\mathcal{I}m(z)$, d'où

$$\mathcal{I}m(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\, i}.$$

Correction de l'Exercice 4.

1) $z = \dfrac{3-2i}{5+i}\dfrac{5-i}{5-i} = \dfrac{15 - 3i - 10i - 2}{26} = \dfrac{13 - 13i}{26} = \dfrac{13}{26} - \dfrac{13}{26}i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

2) ▷ **Méthode 1 :**

$$|z| = \frac{|3-2i|}{|5+i|} = \frac{\sqrt{9+4}}{\sqrt{25+1}} = \sqrt{\frac{13}{26}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

▷ **Méthode 2 :**

$$|z| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction de l'Exercice 5.

On a

$$(2+i)z - 1 + 2i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{1-2i}{2+i}\frac{2-i}{2-i} = \frac{2 - i - 4i - 2}{4+1} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

Chapitre 2

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Soient $z_1 := 2+3i$ et $z_2 := 5-6i$. Calculer z_1+z_2, z_1-z_2 et z_1z_2.

Exercice 2.

Soient $z_1 := a_1+ib_1$ et $z_2 := a_2+ib_2$ les formes algébriques des nombres complexes z_1 et z_2, et soit λ un réel. Déterminer les formes algébriques de λz_1, z_1+z_2 et z_1z_2.

Exercice 3.

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $z_1 := 1+2i$,

2) $z_2 := -i$,

3) $z_3 := 5i-2$,

4) $z_4 := -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercice 4.

Calculer le conjugué et le module des nombres complexes suivants :

1) $z_1 := i+6-2i+5$,

2) $z_2 := \dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{i}{2}-\dfrac{1}{3}$,

3) $z_3 := (1+2i)(3-3i)$,

4) $z_4 := \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2i}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{6i}{5}\right)$,

5) $z_5 := \left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)$,

6) $z_6 := \left(3\sqrt{5}+2i\sqrt{2}\right)^2$.

Exercice 5.

Soit $z := 2-5i$. Calculer $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$ et $z\overline{z}$.

Exercice 6.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z := a+ib$.

1) Calculer $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$ et $z\overline{z}$.

2) Donner une expresion de a et b en fonction de z et $\bar{z}$.

Exercice 7.

1) Calculer les modules des nombres complexes $z_1 := 2+3i$ et $z_2 := 1-2i$.

2) Vérifier que $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

3) Vérifier que $|z_1+z_2| < |z_1|+|z_2|$.

Exercice 8.

Soient $z_1 := a_1+ib_1$ et $z_2 := a_2+ib_2$ deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. Calculer $|z_1z_2|^2$, $|z_1|^2$ et $|z_2|^2$.

Exercice 9.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $z := ia$. Déterminer le conjugué de z.

Exercice 10.

Par convention, posons $i^0 := 1$.

1) Calculer i^3, i^4, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}.

2) Calculer i^{4m}, i^{4m+1}, i^{4m+2}, i^{4m+3} pour $m \in \mathbb{Z}$.

3) En déduire i^{2022}.

Exercice 11.

Mettre sous forme algébrique (c'est-à-dire simplifier) les nombres complexes suivants :

1) $z_1 := \dfrac{-1-i}{2-2i}$, **2)** $z_2 := \dfrac{5-5i}{-3+4i}$, **3)** $z_3 := \dfrac{-1+4i}{-2-i}$,

4) $z_4 := \dfrac{7+6i}{4-i} \cdot \dfrac{3+i}{i}$, **5)** $z_5 := \dfrac{2+i}{1+3i} \cdot \dfrac{1-i}{1+i}$, **6)** $z_6 := \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 12.

Pour chacun des nombres complexes z ci-dessous, donner la forme algébrique du conjugué $\bar{z}$:

1) $z_1 := \dfrac{1}{i}$, **2)** $z_2 := \dfrac{2i-1}{1-2i}$,

3) $z_3 := (5+2i)^2$, **4)** $z_4 := \dfrac{i}{i+1}$.

Exercice 13.

Déterminer sous forme algébrique les solutions des équations suivantes :

1) $2z + 6 - 4i = 0$, **2)** $(-1-2i)z - 2 = 0$,

3) $-3z + 2 = 4iz - 2i$, **4)** $(2+i)^2 z - (1-i)^3 = 0$.

Exercice 14.

1) Montrer que $z^2 - 2z + 5 = (z-1-2i)(z-1+2i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ sans calculer le discriminant.

Exercice 15.

1) Montrer que $z^2 - 3 - 4i = (z-2-i)(z+2+i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Exercice 16.

1) Montrer que $z^2 + (4+i)z + (5+5i) = (z+1+2i)(z+3-i)$.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 4z + 5 = -iz - 5i$.

Exercice 17.

Montrer l'équivalence suivante :

$$(|z| = 0) \iff (z = 0).$$

Pour cela, on procède en 2 étapes :

1) Montrer que $(|z| = 0) \implies (z = 0)$.

2) Montrer que $(z = 0) \implies (|z| = 0)$.

Exercice 18.

Montrer l'équivalence suivante :

$$(z \in \mathbb{R}) \iff (\overline{z} = z).$$

Remarque – *Une application en électronique*

On peut rencontrer les nombres complexes lorsque l'on travaille avec les circuits électriques.

Tout d'abord une précision. En mathématiques, on a vu que le nombre i est utilisé pour définir les nombres complexes. Par contre, en électronique, ce nombre i signifie déjà courant, donc on utilise la lettre j pour les nombres complexes (parce que la lettre suivante après i est j).

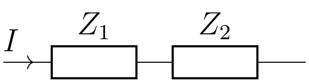
L' **impédance électrique** mesure la résistance d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal. Il correspond à un nombre complexe, noté Z. L'admittance, notée Y, est l'inverse de l'impédance : $Y = \frac{1}{Z}$.

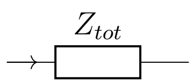
Si ω définit la pulsation (en radians par seconde) du courant sinusoïdal, alors

- ▷ l'impédance d'une résistance est $Z_R := R$, où R est la valeur (en ohms Ω) de la résistance,
- ▷ l'impédance d'un condensateur est $Z_C := \frac{1}{jC\omega}$, où C est la capacité (en farad F) du condensateur,
- ▷ l'impédance d'une bobine est $Z_L := jL\omega$, où L est l'inductance (en henry H) de la bobine.

L'impédance complexe d'un circuit se calcule en suivant les règles suivantes :

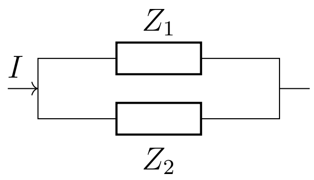
- ▷ l'impédance d'éléments en série est la somme des impédances,



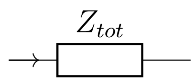
est équivalent à


avec $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$

- ▷ si on a des éléments en parallèle, l'inverse de l'impédance du circuit est la somme des inverses des impédances. Donc, dans ce cas, ce sont les admittances qui s'additionnent.



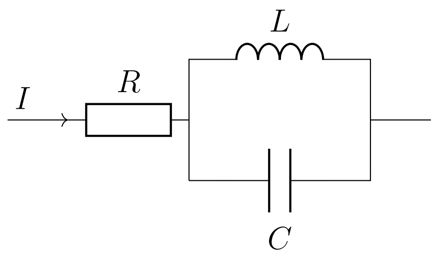
est équivalent à



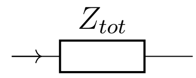
avec $\dfrac{1}{Z_{tot}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$

Exemple

Pour le circuit suivant :



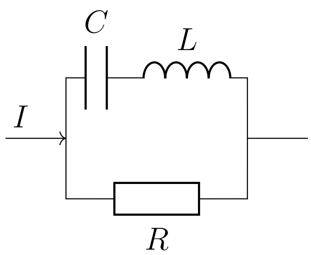
est équivalent à



avec $Z_{tot} = Z_R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_C}} = R + \dfrac{1}{\dfrac{1}{jL\omega} + \dfrac{1}{\frac{1}{jC\omega}}} = R + \dfrac{jL\omega}{1 + (jC\omega)(jL\omega)} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - CL\omega^2}$.

Exercice 19.

Calculer l'impédance complexe du circuit suivant :



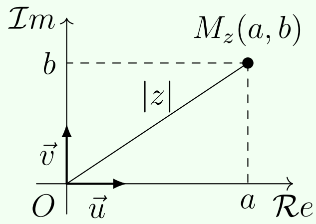
Écriture géométrique d'un nombre complexe

4 Représentation géométrique

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition : *Image d'un nombre complexe*

À tout nombre complexe $z := a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on associe le point M_z de *coordonnées cartésiennes* (a, b).
Le point M_z est appelé **image du nombre complexe** z dans le plan.



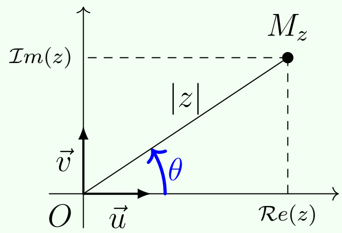
Remarques

- ▷ Si $z \neq 0$, son image M_z est distincte de O : $M_z \neq O$.
- ▷ La longueur de OM_z est égale à $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Définition : *Argument d'un nombre complexe*

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et M_z son image dans le plan.
Toute mesure θ en radians de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_z})$ est appelée **argument** de z, noté $\arg(z)$:

$$\arg(z) := \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$



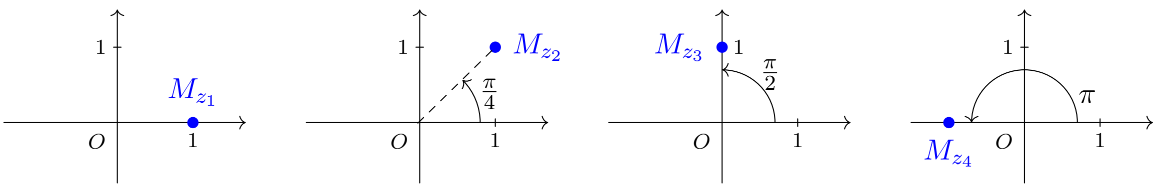
Exemples

Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1 := 1, \quad z_2 := 1 + i, \quad z_3 := i, \quad z_4 := -1.$$

À partir de leur image dans le plan, il est possible de déduire leurs arguments (où $k \in \mathbb{Z}$) :

$\boxed{z_1 = 1}$ $\boxed{z_2 = 1 + i}$ $\boxed{z_3 = i}$ $\boxed{z_4 = -1}$



$\boxed{\arg(z_1) = 0 + 2k\pi}$ $\boxed{\arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ $\boxed{\arg(z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $\boxed{\arg(z_4) = \pi + 2k\pi}$

Remarques

- ▷ Le nombre complexe $z := 0$ n'a pas d'argument.
- ▷ Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments : si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ est aussi un argument de z.
- ▷ De la représentation graphique, on déduit

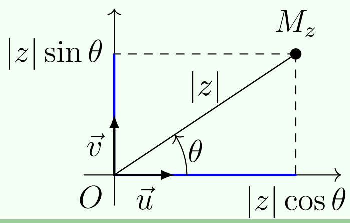
$$\mathcal{R}e(z) = |z|\cos\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(z) = |z|\sin\theta.$$

Propriétés : *Écriture trigonométrique d'un nombre complexe*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit θ un argument de z. Alors,

$$z := |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

C'est la **forme trigonométrique** *du nombre complexe z.*



Remarque

La position du point M_z dans le plan peut-être obtenue à l'aide simplement du module $|z|$ et d'un argument θ. Le couple $(|z|, \theta)$ est appelé *coordonnées polaires* de z.

Méthode – *Calculer un argument d'un nombre complexe z*

1. Vérifier que $z \neq 0$.
2. Déterminer sa forme algébrique $z = a + ib$.
3. Calculer son module $|z|$.
4. Trouver un angle θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

Exemples

- ▷ Pour $z_1 := 1$, on a $|z_1| = 1$. D'où,

$$\begin{cases} \cos\theta_1 &= 1 \\ \sin\theta_1 &= 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- ▷ Pour $z_2 := 1 + i$, on a $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

$$\begin{cases} \cos\theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- ▷ Pour $z_3 := i$, on a $|z_3| = 1$. D'où, $\cos\theta_3 = 0$ et $\sin\theta_3 = 1$. Donc, $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ Pour $z_4 := -1$, on a $|z_4| = 1$. D'où, $\cos\theta_4 = -1$ et $\sin\theta_4 = 0$. Donc, $\theta_4 = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5 Formulation exponentielle

Remarque

Soient deux nombres complexes :

$$z_1 := \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z_2 := \cos\theta' + i\sin\theta'$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &:= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i\sin\theta'\cos\theta - \sin\theta\sin\theta' \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

Ainsi, un argument du produit $z_1 z_2$ est la somme des arguments de z_1 et z_2.
Ce résultat, déterminé en utilisant les propriétés de calculs dans les complexes et les formules d'addition du chapitre Trigonométrie, met en évidence une propriété qui peut faire penser à l'exponentielle. En effet, on sait que :

$$\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Définition : *Écriture exponentielle d'un nombre complexe*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons

$$\exp(i\theta) = \mathrm{e}^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un de ses arguments, alors

$$z = |z|\exp(i\theta) = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

C'est la **forme exponentielle** du nombre complexe z.

Exemple

Reprenons les nombres complexes $z_1 := 1$, $z_2 := 1+i$, $z_3 := i$, $z_4 := -1$. Pour chacun de ces nombres, le module et un argument ont déjà été calculés dans l'exemple précédent. Ainsi,

- ▷ $z_1 = |z_1|\exp(i\theta_1) = \mathrm{e}^{i0}$,
- ▷ $z_2 = |z_2|\exp(i\theta_2) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$,
- ▷ $z_3 = |z_3|\exp(i\theta_3) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$,
- ▷ $z_4 = |z_4|\exp(i\theta_4) = \mathrm{e}^{i\pi}$.

Exercice 1.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z_1 := 1 - i$, **2)** $z_2 := \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, **3)** $z_3 := -3 + \sqrt{3}i$.

Notation

On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Autrement dit, on a

$$\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Propriétés

Soient $z_1 := r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 := r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$(z_1 = z_2) \iff (r_1 = r_2 \quad \textit{et} \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Attention

Les arguments sont égaux à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Remarque

Ces deux propriétés se démontrent assez facilement grâce aux propriétés trigonométriques :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

- ▷ $|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1.$
- ▷ $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$

Propriétés : *Formule de Moivre*

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}.$$

C'est-à-dire

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Remarque

Les outils présentés dans le chapitre de trigonométrie permettent aisément de démontrer ce résultat dans le cas où $n := 2$. En effet, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 + 2(\cos\theta)(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\,\sin\theta).$$

Or, d'après les formules d'addition trigonométrique,

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta.$$

Donc, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$.

Exercice 2.

1) Développer l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.

2) Écrire la formule de Moivre pour $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.

3) En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux expressions obtenues, déterminer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

Propriétés : *Formules d'Euler*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple – *Linéarisation d'un cosinus*

Linéarisons $\cos^2\theta$, c'est-à-dire exprimons $\cos^2\theta$ à l'aide de $\cos(2\theta)$. On a

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((e^{i\theta})^2 + 2\,e^{i\theta}\,e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2\right).$$

Or, d'après les formules de Moivre $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$ et $(e^{-i\theta})^2 = e^{-2i\theta}$. De plus, $e^{i\theta}\,e^{-i\theta} = e^0 = 1$. Donc, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2\cos(2\theta) + 2) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$.

Remarque

Déterminer une expression de $\sin^n\theta$ ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de $\sin(m\theta)$ et $\cos(m\theta)$, où m est un entier compris entre 1 et n, revient à **linéariser** cette expression.

Exercice 3.

1) Reprendre la démarche de l'exemple pour écrire $\sin^3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et de $\sin 3\theta$.

2) Faire de même pour $\cos^3\theta$.

Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ, θ_1 et θ_2. Alors

- $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$,
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\,e^{-i\theta}$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
- *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n\,e^{in\theta}$.*

Notation

En mathématiques, le symbole $\forall$ signifie **pour tout** ou encore **quelque soit**.

Ainsi, la propriété « Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n \mathrm{e}^{in\theta}$ » se note :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad z^n = |z|^n \mathrm{e}^{in\theta}.$$

Exemple

Soient $z_1 := 1 - i$ et $z_2 := 1 + \sqrt{3}i$. Alors, $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc,

$$z := z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}.$$

De plus,

$$z^2 = (2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}})^2 = (2\sqrt{2})^2\,\mathrm{e}^{i2\frac{\pi}{12}} = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

Exercice 4.

Soit $z := \dfrac{32}{(\sqrt{3}+i)^9}$.

1) Calculer une forme exponentielle de $\sqrt{3} + i$.

2) En déduire une forme exponentielle de z puis donner sa forme algébrique.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) On a $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. D'où,

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) On a $|z_2| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. D'où

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) On a $|z_3| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. D'où,

$$\cos\theta_3 = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, $z_3 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Correction de l'Exercice 2.

D'après la formule de Moivre, on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta).$$

Or

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta).\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 3.

Exprimons $\sin^3\theta$ à l'aide de $\sin\theta$ et $\sin(3\theta)$. On a

$$\begin{aligned}\sin^3\theta = (\sin\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{-8i}(e^{i3\theta} - 3e^{i2\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta})\\ &= \frac{1}{-8i}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta})\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sin(3\theta) - 3\sin(\theta)\right).\end{aligned}$$

Exprimons $\cos^3\theta$ à l'aide de $\cos\theta$ et $\cos(3\theta)$. On a

$$\begin{aligned}\cos^3\theta = (\cos\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}(e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})\\ &= \frac{1}{8}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta})\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\right).\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 4.

1) On a

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

D'où, $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc, $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2) On a

$$z = \frac{32}{(\sqrt{3}+i)^9} = \frac{32}{\left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^9} = \frac{2^5}{2^9}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2^4}\,\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{16}i.$$

Chapitre 2

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Soit $z := 2+i$. Placer dans un plan le point M_z puis les points $M_{\overline{z}}$, M_{-z} et $M_{-\overline{z}}$. Même question pour $z := -1+2i$ et $z := 3-i$.

Exercice 2.

Déterminer la relation vérifiée par tous les nombres complexes $z := a+ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) solutions de l'équation $|z| = 1$. Géométriquement, que représentent les solutions de cette équation dans le plan ?

Exercice 3.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z_1 := \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$,

2) $z_2 := 1 + \sqrt{3}i$,

3) $z_3 := 3 - 3i$,

4) $z_4 := -1 + \sqrt{3}i$,

5) $z_5 := -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\, i$,

6) $z_6 := 3+3\sqrt{3}i-3i+3\sqrt{3}$.

Exercice 4.

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que

1) $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos\theta$,

2) $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta} = 2i\sin\theta$,

3) $|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$,

4) $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$,

5) $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$,

6) $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$,

7) $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$,

8) $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$.

Exercice 5.

Soient $z_1 := r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 := r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$ avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $z_1 = z_2$.

2) Montrer que si $z_1 = z_2$, alors $r_1 = r_2$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

3) Que peut-on en déduire ?

Exercice 6.

Soit $z := \dfrac{2+2i}{1-i}$. Déterminer

1) sa partie réelle,

2) sa partie imaginaire,

3) son module,

4) sa forme exponentielle.

En déduire une simplification de z^5.

Exercice 7.

Calculer le module et les arguments des nombres complexes $u := \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v := -1 + i$. En déduire le module et les arguments de $w := uv$.

Exercice 8.

Simplifier $z := \left(\dfrac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i}{-2+i}\right)^3$.

Exercice 9.

Soient $z := 2\sqrt{3} + 2i$, $z_1 := (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i$ et $z_2 := \dfrac{z}{z_1}$.

1) Donner la forme algébrique de z_2, puis sa forme exponentielle.

2) Donner la forme exponentielle de z.

3) En déduire la forme exponentielle de z_1, ainsi que les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 10.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique :

1) $z_1 := \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, **2)** $z_2 := (1+i)^9(1-i)^7$, **3)** $z_3 := \left(\dfrac{-3+3i}{\sqrt{6} - \sqrt{18}i}\right)^6$.

Exercice 11.

Soit $\delta := i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta := r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de r et de θ telles que $\Delta^2 = \delta$?

Exercice 12.

Soit $\delta := -3 + \sqrt{3}i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de δ.

2) Soit $\Delta := r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de r et de θ telles que $\Delta^2 = \delta$?

6 Résolution d'équations du second degré à coefficients réels

Les nombres complexes permettent de résoudre les équations de second degré de discriminant négatif. Plus précisément, on a le résultat suivant concernant les équations du second degré :

Théorème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme de second degré $P(x) := ax^2 + bx + c$.

- ▷ *Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles qui sont*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- ▷ *Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet une unique racine réelle (dite double) :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a},$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$

- ▷ *Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet deux racines* **complexes** *conjuguées qui sont*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

et $P(x)$ se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2).$$

Remarques

- ▷ Lorsque $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ et donc $\sqrt{-\Delta}$ est bien définie.
- ▷ Dans le cas où le discriminant est négatif, on note les racines de P par la lettre z pour mettre en évidence le fait que celles-ci sont complexes. De plus, on écrit alors $P(z)$ au lieu de $P(x)$, ainsi la factorisation de $P(z)$ lorsque $\Delta < 0$ s'écrit plutôt

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration. La démonstration est supposée connue dans le cas $\Delta \geq 0$, on ne montre donc que le cas où $\Delta < 0$.

Le polynôme P s'écrit sous forme canonique :

$$P(z) = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right].$$

Supposons $\Delta < 0$. Alors, $-\Delta > 0$ et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$.

On en déduit

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = a(z-z_1)(z-z_2). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la factorisation de $P(z)$. De plus, on en déduit alors que $P(z) = 0$ si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$, ce qui donne le résultat. □

Exemple

On considère l'équation

$$3z^2 - 3z + 1 = 0.$$

La discriminant du polynôme $3z^2 - 3z + 1$ est $\Delta = 9 - 12 = -3$.
Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}.$$

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + z + 1 = 0$, **2)** $z^2 + 4 = 0$.

Exercice 2.

À quelles conditions sur $k \in \mathbb{R}$, l'équation $z^2 + kz + 1 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles ? Déterminer alors ces solutions.

7 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit Δ un nombre complexe donné. Le nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est appelé **racine carrée** de Δ si $\delta^2 = \Delta$.

Attention

Si Δ n'est pas un réel positif, il est **interdit** d'écrire « $\sqrt{\Delta}$ ».

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue δ

$$\delta^2 = \Delta,$$

Si $\Delta = 0$, il est clair que la seule solution est $\delta = 0$.
Supposons maintenant que $\Delta \neq 0$. Pour résoudre cette équation, il faut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- la **méthode trigonométrique**,
- la **méthode algébrique**.

Propriétés

Soit θ un argument du nombre complexe $\Delta \neq 0$. Alors, l'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions :

$$\delta_1 = \sqrt{|\Delta|}\,\mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \textit{et} \qquad \delta_2 = -\sqrt{|\Delta|}\,\mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Méthode – méthode trigonométrique *pour le calcul d'une racine d'un complexe*

1. Calculer une forme exponentielle de Δ, c'est-à-dire $\Delta = |\Delta|\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
2. Les solutions de l'équation $\Delta = \delta^2$ sont $\pm\sqrt{|\Delta|}\,\mathrm{e}^{\left(i\frac{\theta}{2}\right)}$.

Exemple

Résolvons l'équation $\delta^2 = 2i$ par la méthode trigonométrique. Posons $\Delta = 2i$.

1. Calculons une forme exponentielle de Δ. On a $|\Delta| = 2$, d'où $\Delta = 2(0+i)$. Donc

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & 0, \\ \sin(\theta) & = & 1. \end{cases}$$

   Ainsi, $\theta = \frac{\pi}{2}$ est un argument qui convient. Donc, $\Delta = 2\exp(i\frac{\pi}{2})$.
2. Les solutions de l'équation $\delta^2 = 2i$ sont donc

$$\delta = \pm\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1+i).$$

Remarque

La méthode trigonométrique peut être difficile à utiliser si on ne connait pas un argument de Δ. Dans ce cas, il sera nécessaire d'utiliser la **méthode algébrique**.

Propriétés

Supposons que $\Delta = a + ib$, où a et b sont deux réels. Alors, l'équation $\delta^2 = \Delta$ admet deux solutions de la forme $\delta = x + iy$, où x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} |\delta|^2 & = & x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = |\Delta|, \\ \mathcal{R}e(\delta^2) & = & x^2-y^2 = a, \\ \mathcal{I}m(\delta^2) & = & 2xy = b. \end{cases}$$

Méthode – méthode algébrique *pour le calcul d'une racine carrée d'un complexe*

1. Calculer une forme algébrique de Δ, c'est-à-dire déterminer les réels a et b tels que $\Delta = a + ib$.
2. Écrire et résoudre le système
$$\begin{cases} x^2+y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2}, \\ x^2-y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{cases}$$
où x et y sont les inconnues.
3. Pour chaque couple (x, y) trouvé, $\delta = x + iy$ est une solution de l'équation $\Delta = \delta^2$.

Exemple

Résolvons l'équation $\delta^2 = -3 + 4i$ par la methode algébrique. Posons $\Delta = -3 + 4i$.

1. Le nombre Δ est déjà sous forme algébrique avec $a = -3$ et $b = 4$.
2. Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a $|\Delta| = 5$, d'où on obtient le système :
$$\delta^2 = -3+4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 5, \\ x^2-y^2 = -3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$
En additionnant les 2 premières équations, on obtient
$$2x^2 = 2 \quad \text{donc} \quad x = \pm 1.$$
En soustrayant ces 2 mêmes équations, on obtient
$$2y^2 = 8 \quad \text{donc} \quad y = \pm 2.$$
D'après la troisième équation, on a $2xy = 4 > 0$. D'où, les nombres x et y sont de même signe. Ainsi, les solutions possibles du système sont :
$$\big(x = 1 \text{ et } y = 2\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(x = -1 \text{ et } y = -2\big).$$
3. Donc, les solutions de $\delta^2 = -3 + 4i$ sont $\delta_1 = 1 + 2i$ ou $\delta_2 = -1 - 2i$.

Exercice 3.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\delta^2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2) $\delta^2 = -3 - 4i$.

8 Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

Propriétés

Soit l'équation du second dégrée à **coefficients complexes** *:*

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où a, b, c sont des complexes avec $a \neq 0$. Alors, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, c'est-à-dire $\delta^2 = \Delta$.

Méthode – *Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes*

1. Identifier les coefficients complexes a, b et c ; et vérifier que $a \neq 0$.
2. Calculer le discriminant complexe Δ.
3. Trouver une racine carrée δ de Δ, c'est-à-dire résoudre l'équation $\delta^2 = \Delta$ à l'aide la méthode trigonométrique ou géométrique. Puis choisir une des solutions trouvées.
4. Calculer les solutions de l'équation :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Exemple

Résolvons l'équation du second degré $z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$.

1. Identifions les coefficients : $a = 1 \neq 0$, $b = -2 - 3i$ et $c = -5 + i$.
2. Calculons le discriminant de l'équation :

$$\Delta = (2+3i)^2 - 4(-5+i) = 4 - 9 + 12i + 20 - 4i = 15 + 8i.$$

3. Déterminons une racine carrée δ de $\Delta = 15 + 8i$. Résolvons l'équation :

$$\delta^2 = 15 + 8i.$$

D'où, $|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. Il n'est possible d'utiliser la méthode trigonométrique. Donc, utilisons la méthode algébrique en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, & (1) \\ x^2 - y^2 = 15, & (2) \\ 2xy = 8. & (3) \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} (1) + (2) : \quad & 2x^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4. \\ (1) - (2) : \quad & 2y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1. \end{aligned}$$

Et, d'après la troisième équation, on a $xy = 4 > 0$. Donc, les réels x et y sont de même signe, d'où

$$(x = 4 \text{ et } y = 1) \qquad \text{ou} \qquad (x = -4 \text{ et } y = -1).$$

Ainsi, les solutions de $\delta^2 = 15 + 8i$ sont $\pm(4 + i)$.

4. Il nous faut qu'une seule racine carrée. Choisissons par exemple $\delta = 4 + i$. Alors, les deux solutions de l'équation du second degré sont :

$$z_1 = \frac{(2+3i)+(4+i)}{2} = 3 + 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{(2+3i)-(4+i)}{2} = -1 + i.$$

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z^2 - 3z + 1 = 0$, **b)** $z^2 + 16 = 0$, **c)** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) L'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ qui est strictement négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

2) L'équation $z^2 + 4 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = -16 < 0$ qui est strictement négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_{1,2} = \frac{\pm i\sqrt{16}}{2} = \pm 2i.$$

3) L'équation $z^2 - 4iz + 5 = 0$ n'est pas à coefficients réels (en effet on a $b = -4i$). On peut quand-même calculer son $\Delta = (-4i)^2 - 20 = -16 - 20 = -36$. Puisque Δ est un nombre réel on peut quand-même utiliser la formule pour calculer les racines :

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4i \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4i \pm 6i}{2}.$$

On a donc

$$z_1 = \frac{4i + 6i}{2} = 5i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{4i - 6i}{2} = -i.$$

On remarque que dans ce cas les deux solutions ne sont plus conjuguées.

Correction de l'Exercice 2.

On a $\Delta = k^2 - 4$, donc le discriminant est négatif si et seulement si $k^2 - 4 < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $-2 < k < 2$.
Dans ce cas, pour tout $k \in \,]-2; 2[\,$, on a

$$z_{1,2}\frac{-k \pm i\sqrt{4 - k^2}}{2}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1) Posons $\Delta = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. D'où, $|\Delta| = \sqrt{4} = 2$. Appliquons la *méthode trigonométrique*. Or $\Delta = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\exp(-i\frac{\pi}{4})$. Donc, les solutions de l'équation $\delta^2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ sont

$$\delta = \pm\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{8}\right).$$

2) Posons $\Delta = -3 - 4i$. D'où, $|\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. Il est pas possible de déterminer un argument de Δ. Appliquons la *méthode algébrique*. En posant $\delta = x + iy$, on obtient le système à résoudre :

$$\delta^2 = -3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

En additionnant les 2 premières équations, on obtient :

$$2x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1.$$

En soustrayant ces 2 mêmes équations, on obtient :

$$2y^2 = 8 \;\Rightarrow\; y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y = \pm 23.$$

La troisième équation, $2xy = -4 < 0$, nous donne que x et y sont de signe opposé :

$$\big(x = 1 \text{ et } y = -2\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(x = -1 \text{ et } y = 2\big)$$

En conclusion, les solutions de $\delta^2 = -3 - 4i$ sont :

$$\delta_1 = 1 - 2i \qquad \text{ou} \qquad \delta_2 = -1 + 2i.$$

Correction de l'Exercice 4.

1) On doit résoudre $3z^2 - 3z + 1 = 0$. On a $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, donc $z_{1,2} = \dfrac{+3 \pm i\sqrt{3}}{6}$.

2) On a $z^2 + 16 = z^2 - (-16) = z^2 - 16i^2 = (z+4i)(z-4i)$, d'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Donc les deux solutions de l'équation sont $z_{1,2} = \pm 4i$.

3) On doit résoudre $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$. On a $\Delta = (-2i)^2 - 4(-1+2i) = -4 + 4 - 8i = -8i \in \mathbb{C}$. On applique la méthode algébrique pour déterminer δ tel que $\delta^2 = \Delta$. En posant $\delta = x + iy$, et en calculant le module de Δ, $|\Delta| = 8$, on obtient le système à résoudre :

$$\delta^2 = -8i \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy = -8. \end{cases}$$

En additionnant les 2 premières équations, on obtient :

$$2x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2.$$

En soustrayant ces 2 mêmes équations, on obtient :

$$2y^2 = 8 \;\Rightarrow\; y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y = \pm 2.$$

La troisième équation, $2xy = -8 < 0$, nous donne que x et y sont de signe opposé :

$$\big(x = 2 \text{ et } y = -2\big) \qquad \text{ou} \qquad \big(x = -2 \text{ et } y = 2\big).$$

En conclusion, une solution de $\delta^2 = -8i$ est : $\delta = 2 - 2i$ et donc

$$z_1 = \frac{2i + (2-2i)}{2} = 1 \qquad z_2 = \frac{2i - (2-2i)}{2} = -1 + 2i.$$

Chapitre 2

Feuille d'exercices séquence 3

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - z + 1 = 0$

2) $z^2 + 9 = 0$

3) $z^2 + 6z + 25 = 0$

4) $iz^2 + 4z - 5i = 0$

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\delta^2 = 1 - i$,

2) $\delta^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$,

3) $\delta^2 = -8 - 6i$,

4) $\delta^2 = 1 + i\sqrt{3}$,

5) $\delta^2 = 4 - i$,

6) $\delta^2 = 5 - 12i$.

Exercice 3.

Déterminer les racines carrées de $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 4.

Résoudre l'équation $z^2 = \sqrt{3} + i$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + 3z + 4 = 0$,

2) $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$,

3) $z^2 - 2iz + 2(1+2i) = 0$,

4) $iz^2 - 4iz - 2 + 4i = 0$,

5) $z^4 = 1$,

6) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$.

Exercice 6. — *Généralisation de la méthode trigonométrique*

Soit $\Delta = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Preuve de la méthode : Considérons $\delta = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^2 = \Delta$. Montrer que $r' = \sqrt{r}$ et $\theta' = \frac{\theta}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.

2) Généralisation de la méthode : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre $\delta \in \mathbb{C}$ est dit **racine n-ième** *de Δ si $\delta^n = \Delta$.*

Considérons $\delta = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $r' \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, tel que $\delta^n = \Delta$. Quelle relation existe-t-il entre r' et r ? Même question entre θ' et θ ? En déduire une expression des racines n-ièmes de Δ.

3) Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\delta^6 = i.$$

Exercice 7. – *Démonstration de la méthode algébrique*

Soit $\Delta = a + ib \neq 0$ avec a et b deux réels. Considérons $\delta = x + iy$, avec x et y deux réels, tel que $\delta^2 = \Delta$.

1) Simplifier δ^2. En déduire que $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$.

2) Montrer que $|\delta^2| = |\delta|^2$. En déduire que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.