Chapitre 0

Calculs de base

Pré-requis

Ce chapitre a pour objectif de donner de nombreuses notations qui seront utilisées tout au long du semestre et de revoir les bases de calculs. Il ne nécessite donc pas de pré-requis particulier.

Objectifs

- ☐ Maîtriser les calculs de base (fractions, puissances, racines carrées).
- ☐ Savoir manipuler les valeurs absolues, les logarithmes et les exponentielles.
- ☐ Savoir résoudre les équations et inéquations polynomiales de degré 1 et 2.
- ☐ Savoir résoudre des équations et inéquations exponentielles et logarithmes.
- ☐ Savoir résoudre des équations et inéquations produits et quotients.
- ☐ Connaître les notations liées aux ensembles présentées dans ce chapitre.

Sommaire

Chapitre 0 - Séquence 1

Nombres réels et calculs de base

1 L'ensemble des nombres réels

Définitions : *Entiers naturels, entiers relatifs et nombres rationnels*

- Un **entier naturel** est un nombre positif sans virgule. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. On a donc :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
- Un **entier relatif** (ou **entier**) est un nombre négatif ou positif sans virgule. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. On a donc :
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
- Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ de deux entiers relatifs a et b, avec b non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

- Le nombre 2 est un entier naturel, ainsi qu'un nombre entier relatif. C'est aussi un nombre rationnel car $2 = \frac{2}{1}$.
- Le nombre -3 n'est pas un entier naturel, car il est négatif. C'est un entier relatif et un nombre rationnel : $-3 = \frac{-3}{1}$.
- Plus généralement, tout entier naturel est un entier relatif et tout entier relatif est un nombre rationnel.
- Il existe des nombres rationnels qui ne sont pas des entiers (naturels ou relatifs). Par exemple, le nombre $-\frac{3}{4}$ est un rationnel mais n'est pas entier.

Définition : *Ensemble défini en extension*

On dit qu'un ensemble est défini **en extension** lorsque celui est décrit en donnant la liste de ses éléments entre accolades.

Exemples

- Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ donnés dans la définition plus haut on été définis en extension.
- $\{2, 3\}$ est l'ensemble formé des deux entiers naturels 2 et 3.
- $\{-1, 2, 6, -8\}$ est un ensemble formé de 4 entiers relatifs.
- Dans un ensemble écrit en extension, chaque élément n'apparaît qu'une seule fois. Ainsi, on a $\{2, 2, 3\} = \{2, 3\}$. De même, l'ordre des éléments n'a pas d'importance donc

$\{1, 2, 4\} = \{4, 2, 1\}$.

▷ Un ensemble formé d'un seul élément a est appelé un **singleton** et se note $\{a\}$.

Notation : *Appartenance*

Si E est un ensemble et a est un élément de E, nous disons que « a est dans E » et nous écrivons

$$a \in E,$$

ce qui se lit « a appartient à E ». Quant au contraire a n'est pas un élément de E, nous écrivons

$$a \notin E,$$

ce qui se lit « a n'appartient pas à E ».

Exemples

▷ $2 \in \{-1, 0, 2, 5\}$ mais $3 \notin \{-1, 0, 2, 5\}$.

▷ $-2022 \notin \mathbb{N}$ car $-2022 < 0$ mais $-2022 \in \mathbb{Z}$.

▷ $\dfrac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$ mais $\dfrac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.

▷ pour tout élément a, $a \in \{a\}$.

Définition : *Ensemble des nombres réels*

Un **nombre réel** est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'un entier suivi d'une liste (finie ou infinie) de chiffres après la virgule.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Exemples

▷ Par définition, tout entier (naturel ou relatif) est un nombre réel.

▷ Tout rationnel peut s'écrire sous la forme d'un entier suivi d'une liste (finie ou infinie) de chiffres après la virgule. Par exemple :

$$\frac{-3}{4} = -0,75 \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \in \mathbb{Q}, \quad -\frac{25}{2} = -12,5 \in \mathbb{Q}$$

▷ Il existe des réels qui ne sont pas des rationnels. Par exemple (admis), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et π ne sont pas des nombres rationnels mais ce sont des nombres réels. En effet, par exemple $\sqrt{2}$ et π s'écrivent

$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \pi = 3,14159\ldots \in \mathbb{R}$$

Remarque

Lorsqu'un nombre réel n'est pas un nombre rationnel, on dit que c'est un **nombre irrationnel**.
Il y a une infinité de nombres irrationnels. En effet, on a la propriété suivante :

Entre 2 nombres rationnels distincts, il y a une infinité de nombres irrationnels.

Exercice 1.

Remplir le tableau suivant avec les symboles $\in$ et $\notin$.

x	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2022				
$-\dfrac{2022}{2}$				
$\dfrac{2022}{5}$				
$\sqrt{2022}$				

Définition : *Inclusion*

Soient E et F deux ensembles.
Si tous les éléments de E sont des éléments de F, nous disons que « E est contenu dans F » et nous écrivons

$$E \subset F,$$

ce qui se lit « E est inclus dans F ».
On utilisera aussi les expressions suivantes : « E est **une partie** de F » ou « E est un **sous ensemble** de F ».

Exemples

- ▷ Tout entier naturel est un entier relatif donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. De même, tout entier relatif étant un nombre rationnel, on a aussi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- ▷ Par définition de $\mathbb{R}$, on a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ donc on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- ▷ $\{-5, 3\} \subset \mathbb{Z}$ et $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 3\right\} \subset \mathbb{Q}$.

Remarque

Il ne faut pas confondre la notion d'appartenance à un ensemble et la notion d'inclusion.
Par exemple, on peut dire que $0 \in \mathbb{R}$ (l'élément 0 appartient à $\mathbb{R}$) et que $\{0\} \subset \mathbb{R}$ (l'ensemble $\{0\}$ est inclus dans $\mathbb{R}$).
En revanche, il est interdit de dire que l'élément 0 est inclus dans $\mathbb{R}$.

On est souvent amené à décrire un ensemble comme étant l'ensemble des éléments vérifiant une certaine propriété. À cette fin, on introduit la notation ci-après.

Notation : *Ensemble défini en compréhension*

Soit E un ensemble. Alors on note :

$$\{\ x \in E \ \mid \ P(x)\ \}$$

L'ensemble	des éléments x appartenant à E	tel que	x vérifie la propriété P

Remarque – *Ensemble des nombres rationnels*

On a vu précédemment que l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions d'entiers relatifs (avec dénominateur non nul). Avec la notation précédente, cet ensemble se note simplement

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

Exemples

- ▷ Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'ensemble des éléments de E qui sont pairs, que l'on note F se définit par
$$F = \{x \in E \mid x \text{ est pair}\}.$$
Cet ensemble F se détermine ici simplement, il s'agit de $F = \{2, 4, 6\}$.
- ▷ Soit $E = \{-4, -3, -1, 1, 2, 4, 5\}$. On pose
$$F = \{x \in E \mid -x \in E\}.$$
Alors, F est l'ensemble des éléments de E dont l'opposé est aussi dans E. On peut alors la aussi facilement déterminer F. En effet, on a $F = \{-4, -1, 1, 4\}$.
- ▷ Soit $E = \mathbb{R}$. On pose
$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}.$$
Alors, F est l'ensemble des réels qui sont compris entre -1 et 0 (-1 et 0 compris). On le note aussi $[-1; 0]$. Cet ensemble est ce que l'on appelle un intervalle, notion dont on donne la définition plus générale ci-dessous.

Définition : *Intervalle borné*

Un **intervalle** (borné) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

- ▷ $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- ▷ $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- ▷ $[a; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
- ▷ $]a; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,

où a, b sont des réels tels que $a \leq b$.

L'intervalle $[a; b]$ est dit **fermé** et l'intervalle $]a; b[$ est dit **ouvert**. Les deux autres intervalles sont dit **semi-ouverts** (ou **semi-fermés**). De plus, on dit que $]a; b]$ est ouvert en a et fermé en b ; tandis que $[a; b[$ est fermé en a et ouvert en b.

Remarques

- ▷ Les réels a et b sont appelés les bornes (ou les extrémités) de ces intervalles.
- ▷ Lorsque $a = b$, l'intervalle $[a; b] = [a; a]$ se réduit à l'ensemble des éléments égaux à a. Autrement dit, $[a; a] = \{a\}$.

Exemples

- ▷ $[0; 1]$ est un intervalle fermé. De plus, $x \in [0; 1]$ signifie : $0 \leq x \leq 1$ donc, en particulier, x peut être égal à 0 ou 1.
- ▷ $]0; 1[$ est un intervalle ouvert et $x \in \ ]0; 1[$ signifie $0 < x < 1$ donc, en particulier, x est différent de 0 et 1.
- ▷ $\dfrac{1}{2} \in [0; 1]$.
- ▷ On a $[0; 1] \subset \left]-1; \dfrac{3}{2}\right]$. En effet, si x est un réel tel que $0 \leq x \leq 1$, alors x vérifie aussi les inégalités : $-1 < x \leq \frac{3}{2}$.
- ▷ Pour tout réel a, l'intervalle $]a; a[$ ne contient aucun élément. En effet, il n'existe aucun réel x tel que $a < x < a$.

Le dernier exemple précédent amène à la notation suivante :

Notation : *Ensemble vide*

Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle l'**ensemble vide** et on le note $\emptyset$.

Exemple

Pour tout réel a, $]a; a[\ = \ ]a; a] = [a; a[\ = \emptyset$.

Afin de définir les intervalles non bornés, on introduit la notation ∞.

Notations : *Le symbole ∞*

1) On note ∞ pour désigner une quantité qui serait plus grande que tous les nombres réels. Le symbole ∞ n'est pas un nombre mais uniquement une notation.

2) Ainsi, $-\infty$ est une quantité plus petite que tout nombre réel et $+\infty$ est une quantité plus grande que tout nombre réel.

Définition : *Intervalle non borné*

Un **intervalle** (non borné) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

- ▷ $[a; +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$,
- ▷ $]a; +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$,
- ▷ $]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,
- ▷ $]-\infty; b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$,

où a, b sont des réels.

Exemples

- ▷ L'ensemble des réels supérieurs ou égaux 2 est l'intervalle $[2;+\infty[$.
- ▷ L'intervalle $[0;+\infty[$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls, tandis que $]0;+\infty[$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
- ▷ De même, l'ensemble des réels négatifs ou nuls est $]-\infty;0]$.

Notations

Il est souvent très commode d'utiliser les notations suivantes :

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = \,]-\infty;0] \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0;+\infty[\ .$$

Définitions : *Réunion et intersection*

Soient A, B deux ensembles.

- ▷ La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ et qui se lit « A union B », est l'ensemble :

  $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ **ou** } x \in B\}\,.$$

  Ce qui signifie que $A \cup B$ contient tous les éléments de A comme de B.
- ▷ L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ et qui se lit « A inter B », est l'ensemble :

  $$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ **et** } x \in B\}\,.$$

  Ce qui signifie que $A \cap B$ contient tous les éléments de A qui appartiennent également à B.

Exemples

- ▷ Soient $A = \{2,3\}$ et $B = \{1,2,4\}$. Alors, on a

  $$A \cup B = \{1,2,3,4\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2\}.$$

  Par contre si l'on pose $C = \{4,5\}$, on a

  $$A \cup C = \{2,3,4,5\} \qquad A \cap C = \emptyset.$$

- ▷ On a

  $$[2;5[\ \cap\ ]1;4] = [2;4] \quad \text{et} \quad]1;2] \cup [2;5[\ =\ ]1;5[\ .$$

- ▷ Il est possible aussi de décrire des ensembles uniquement en utilisant l'union ou l'intersection. Par exemple, l'ensemble ci-dessous

  $$]-\infty;1[\ \cup\ ]1;+\infty[\ ,$$

  est l'ensemble des réels différents de 1. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble de tous les réels sauf 1.

Le dernier exemple se généralise à tout élément comme le montre la notation ci-dessous.

Définition : *Complémentaire d'une partie*

Soient E un ensemble et A une partie de E.
On appelle **complémentaire** de A dans E, noté $E \setminus A$ et qui se lit « E privé de A », l'ensemble

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Autrement dit, $E \setminus A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Exemples

- ▷ En prenant $E = \mathbb{R}$ et $A = \{1\}$, on obtient

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \{1\}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[.$$

- ▷ En prenant $E = \mathbb{R}$ et $A = \{2, 8\}$, $\mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$ est l'ensemble des réels différents de 2 et 8, d'où

$$\mathbb{R} \setminus \{2, 8\} = \left]-\infty; 2\right[\cup \left]2; 8\right[\cup \left]8; +\infty\right[.$$

Notation

Dans le cas particulier où E est un ensemble contenant 0, on pose

$$E^* = E \setminus \{0\}.$$

Exemples

- ▷ $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[.$$

- ▷ $\mathbb{R}^*_-$ est l'ensemble des réel négatifs non nuls :

$$\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \left]-\infty; 0\right[.$$

- ▷ $\mathbb{R}^*_+$ est l'ensemble des réel positifs non nuls :

$$\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \left]0; +\infty\right[.$$

Exercice 2.

Décrire ces ensembles sous forme d'intervalles ou une réunion d'intervalles.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x \leq 8\}$

2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ et } x \neq 0\}$.

2 Calculs de base

Cette partie peut servir de formulaire tout au long du semestre. Elle rappelle les principales propriétés de calculs avec les fractions, les puissances, les racines carrées, les valeurs absolues mais également l'exponentielle et le logarithme népérien.

2.1 Fractions

Propriétés : *Sur les fractions*

Soient a, b deux nombres réels et c, d deux nombres réels non nuls.
On a les propriétés suivantes :

- ▷ $\dfrac{bd}{cd} = \dfrac{b}{c}$,
- ▷ $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$,
- ▷ $\dfrac{1}{\frac{c}{a}} = \dfrac{a}{c}$,
- ▷ $\dfrac{b}{c} = b \times \dfrac{1}{c}$,
- ▷ $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$,
- ▷ $\dfrac{ab}{c} = a \times \dfrac{b}{c}$,
- ▷ $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad+bc}{cd}$,
- ▷ $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{d}{b}} = \dfrac{ab}{cd}$.

Exercice 3.

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{10}$, **2)** $B = \dfrac{1}{\frac{4}{3}}$, **3)** $C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2}$.

2.2 Puissances

Définition : *Puissances d'un nombre réel*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ On appelle x **puissance** n le nombre réel noté x^n défini par

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

- ▷ On appelle x puissance $-n$ le nombre réel noté x^{-n} défini par

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

- ▷ Pour $n = 0$, on pose

$$x^0 = 1.$$

Propriétés : *Sur les puissances*

Soient a, b deux nombres réels et m, n deux nombres entiers relatifs.

- ▷ $(ab)^n = a^n b^n$,
- ▷ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$,
- ▷ $a^n a^m = a^{n+m}$.

Propriétés : *Identités remarquables*

Soient a et b deux nombres réels. Les **identités remarquables** *sont les égalités suivantes :*

▷ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ▷ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ▷ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Exercice 4.

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = 7^4 \times \dfrac{2^3}{7^7}$, **2)** $B = \dfrac{4 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-9}}$.

2.3 Valeur absolue

Définition : *Valeur absolue d'un nombre réel*

La **valeur absolue** d'un nombre réel x est le nombre réel noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

Une valeur absolue est toujours une quantité positive.

Exemples

▷ $|3| = 3$, ▷ $|-5| = -(-5) = 5$, ▷ $|x^2| = x^2$.

Propriétés : *Sur les valeurs absolues*

Soit x et y deux nombres réels. La valeur absolue possède les propriétés suivantes :

- ▷ *Si $|x| = 0$ alors $x = 0$.*
- ▷ *Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$.*
- ▷ *Pour tous x et y réels, $|xy| = |x| \times |y|$.*
- ▷ *Pour tout x réel et y dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.*
- ▷ *Pour tous x et y réels, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).*

Remarque

Dans l'inégalité triangulaire, remplacer y par $-y$, ne modifie pas l'expression de droite : $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$. Donc, pour tous réels x et y, on a

$$|x-y| \leq |x| + |y|.$$

Exercice 5.

1) Simplifier les expressions ci-dessous pour qu'il n'y ait plus de valeur absolue.

a) $A = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| + \left|\dfrac{7}{4} - 2\right|$ **b)** $B = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| \times \left|\dfrac{7}{4} - 2\right|$

2) Chercher une expression de $|x-2|$ en fonction de x qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue.

2.4 Racines carrées

Définition : *Racine carrée d'un nombre réel*

Soit $x \geq 0$.
Il existe un et un seul réel $r \geq 0$ pour lequel $x = r^2$.
On l'appelle la **racine carrée** de x et on le note $\sqrt{x}$.

Propriétés : *Sur les racines carrées*

Soient a et b deux réels positifs. On a les propriétés suivantes :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$,
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$,
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 6.

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \sqrt{2}\sqrt{3}$, **2)** $B = \sqrt{\dfrac{4}{9}}$, **3)** $C = \sqrt{8} + \sqrt{12}$, **4)** $D = (3 - \sqrt{5})^2$.

Remarques — $(\sqrt{x})^2$ *vs* $\sqrt{x^2}$

- La quantité $(\sqrt{x})^2$ n'est définie que si $x \geq 0$. Par définition de la racine carrée, on a : $(\sqrt{x})^2 = x$.
- La quantité $\sqrt{x^2}$, au contraire, est définie pour tout x réel et vaut $\sqrt{x^2} = |x|$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

x	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2022	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\dfrac{2022}{2} = -1011$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\dfrac{2022}{5}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{2022}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Correction de l'Exercice 2.

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x \leq 8\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{8}{3}\right\} = \left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$.

2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ et } x \neq 0\} =]-2, 0[\cup]0, +\infty[$.

Correction de l'Exercice 3.

1) $A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 5 \times 2} = \dfrac{3}{5}$,

2) $B = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$,

3) $C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{15}{6} = \dfrac{19}{6}$.

Correction de l'Exercice 4.

1) $A = 7^4 \dfrac{2^3}{7^7} = \dfrac{3}{7^{7-4}} = \dfrac{2^3}{7^3} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^3$,

2) $B = \dfrac{4 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-9}} = \dfrac{2 \times 2 \times 8 \times 10^{-5-4}}{2 \times 10^{-9}} = \dfrac{16 \times 10^{-9}}{10^{-9}} = 16$.

Correction de l'Exercice 5.

1) **a)** $A = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| + \left|\dfrac{7}{4} - 2\right| = \left|-\dfrac{1}{2}\right| + \left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) $B = \left|1 - \dfrac{3}{2}\right| \times \left|\dfrac{7}{4} - 2\right| = \left|-\dfrac{1}{2}\right| \times \left|-\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

2) On a

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Correction de l'Exercice 6.

1) $A = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$,

2) $B = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$,

3) $C = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{4 \times 3} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,

4) $D = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$.

Chapitre 0

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Considérons l'ensemble A correspondant à l'alphabet latin : $A = \{a, b, \dots, z\}$.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier les réponses.

1) $b \in A$

2) $\alpha \in A$

3) $\{z\} \in A$

4) $\{a, \alpha\} \subset A$

5) $\{c, s, v\} \subset A$

6) $g \subset A$

Exercice 2.

Pour chacun des nombres suivants, désigner parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, le plus petit ensemble auquel il appartient.

1) $\text{A}=\dfrac{-36}{-6}$,

2) $\text{B}=\sqrt{25}$,

3) $\text{C}=\dfrac{1}{5}$,

4) $\text{D}=0.15 \times 10^3$,

5) $\text{E}=-\dfrac{1}{7^{-2}}$,

6) $\text{F}=-\dfrac{\sqrt{36}}{2}$.

7) $\text{G}=(-2)^{1000}$,

8) $\text{H}=\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}$,

9) $\text{I}=\dfrac{10^{10}}{5^{10}}$,

Exercice 3.

Compléter le tableau suivant :

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
$]-10; 2[$	$[5; 13]$		
$]-\infty; 2[$	$[0; 5[$		
$[3; +\infty[$	$]-\infty; 6[$		
$]-\infty; -2[$	$]-4; -3[$		
$]-4; 2]$	$[2; 5]$		
$]-4; 2]$	$]2; 5]$		

Exercice 4.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier les réponses.

1) $]-1; 1[\ \subset \mathbb{N}$,

2) $[0; 1] \subset \mathbb{R}^*$,

3) $]-1; 1] \subset \left]-\dfrac{7}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$.

Exercice 5.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier les réponses.

1) $3^4 \times 3^2 = 3^8$,

2) $2^3 + 2^2 = 2^5$,

3) $2^3 \times 4^4 = 2^{11}$,

4) $2^3 \times 3^3 = 6^3$.

Exercice 6.

En utilisant les propriétés des fractions, des puissances et des racines, simplifier les expressions suivantes.

1) $A = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}$,

2) $B = \left(2 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{7}{4} - 1\right)$,

3) $C = (1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2$,

4) $D = (\sqrt{2\sqrt{2}})^4$,

5) $E = (2^n)^3 \cdot (2^3)^n$,

6) $F = \dfrac{(16)^n + (4)^{2n+1} - (-2)^{4n}}{5 \cdot 2^n - (-2)^{n+2}}$.

Exercice 7.

Soient x, y et z trois réels.

1) En utilisant l'identité remarquable $(x-y)^2$, montrer l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$.

2) En utilisant l'identité remarquable $(x+y)^2$ et le résultat au point précédent, montrer l'inégalité $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$.

3) En utilisant l'identité remarquable $(x-1)^2$, montrer que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

4) En utilisant le résultat au premier point, montrer l'inégalité $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 8.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $|x+3| - |x-1|$ en fonction de x qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue.

Exercice 9.

Soient x et y des réels.

1) Sachant que $|x| = |x+y-y|$ et $|y| = |y+x-x|$, monter que $|x+y| \geq |x| - |y|$ et $|x+y| \geq |y| - |x|$.

2) En déduire que $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

3 Manipulation d'égalités et d'inégalités

Notation : *Implication*

L'expression
$$P_1 \Longrightarrow P_2$$
se lit : la propriété P_1 implique la propriété P_2.
Autrement dit : si la propriété P_1 est vraie, alors la propriété P_2 l'est aussi.

Notation : *Équivalence*

L'expression
$$P_1 \Longleftrightarrow P_2$$
se lit : les propriétés P_1 et P_2 sont équivalentes.
Autrement dit : la propriété P_1 est vraie si et seulement si la propriété P_2 est vraie.

Remarque

On remarque des notations précédentes que l'équivalence correspond à une double implication.
Écrire
$$P_1 \Longleftrightarrow P_2$$
revient en effet à écrire :
$$P_1 \Longrightarrow P_2 \qquad \text{et} \qquad P_1 \Longleftarrow P_2$$

Propriétés : *Égalités : Sommes et produits*

Soient a, b et c trois nombres réels. On a les relations suivantes :

- ▷ $a = b \Longleftrightarrow a+\mathbf{c} = b+\mathbf{c}$
- ▷ *si* $c \neq 0$, *alors* $a = b \Longleftrightarrow a\times\mathbf{c} = b\times\mathbf{c}$.

Exemples

Soient x et y deux nombres réels. On a les équivalences suivantes :

- ▷ $3 + x = 3 + y \Longleftrightarrow x = y$,
- ▷ $3 \times x = 3 \times y \Longleftrightarrow x = y$.

Propriétés : *Inégalités : Sommes et produits*

Soient a, b et c trois nombres réels. On a les relations suivantes :

- ▷ *Si $a \leq b$, alors $-a \geq -b$,*
- ▷ $a < b \iff a+\mathbf{c} < b+\mathbf{c}$
- ▷ *si $\mathbf{c} > 0$, alors $a < b \iff a\times\mathbf{c} < b\times\mathbf{c}$.*
- ▷ *si $\mathbf{c} < 0$, alors $a < b \iff a\times\mathbf{c} > b\times\mathbf{c}$.*

Remarques

- ▷ Ajouter un même nombre réel aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.
- ▷ Le produit d'une inégalité par un nombre positif ne change pas le sens de l'inégalité.
- ▷ Le produit d'une inégalité par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

Exemples

Soient x et y deux nombres réels. On a :

- ▷ $x < y \iff 3 + x < 3 + y$,
- ▷ $x < y \iff 3 \times x < 3 \times y$,
- ▷ $x > y \iff -3 \times x < -3 \times y$,
- ▷ $x > 3 \iff -x < -3$.

Propriétés : *Passage à l'inverse*

Soient a et b deux nombres strictement positifs, alors

$$a < b \qquad \iff \qquad \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$

Propriétés : *Opérations sur les inégalités*

Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On a les relations suivantes :

- ▷ *si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$,*
- ▷ *si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$,*

Remarques – *Opérations membre à membre de deux inégalités*

- ▷ Il faut vérifier que tous les termes sont positifs avant de multiplier membre à membre deux inégalités.
- ▷ On ne peut ni soustraire ni diviser membre à membre deux inégalités.

Exemples – *Addition et soustraction membre à membre de deux inégalités*

- ▷ Si $x \leq -2$ et $y \leq \frac{3}{2}$, alors $x + y \leq -2 + \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $x + y \leq -\frac{1}{2}$.
- ▷ On sait que $4 < 9$ et $2 < 8$.
  Cependant, il est faux de dire que $4 - 2 < 9 - 8$, car 2 n'est pas inférieur à 1.

En effet, il n'est pas possible de soustraire membre à membre des inégalités.

Remarques – *Encadrements de différences ou de quotients*

- ▷ Si on souhaite encadrer $a - b$, on détermine d'abord un encadrement de $-b$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de a.
- ▷ Si on souhaite encadrer $\frac{a}{b}$, on détermine tout d'abord un encadrement de $\frac{1}{b}$. Puis on multiplie membre à membre les deux encadrements, en faisant attention que tous les termes soient positifs.

Exemples

- ▷ Pour encadrer $a - b$, sachant que $-1 \leq a \leq 2$ et $-3 \leq b \leq 4$.
  On commence par l'encadrement suivant de $-b$: $-4 \leq -b \leq 3$.
  On peut donc conclure que $-1 - 4 \leq a - b \leq 2 + 3$, c'est-à-dire $-5 \leq a - b \leq 5$.

- ▷ Supposons que $2 \leq a \leq 3$ et $3 \leq b \leq 4$. Que peut-on dire de $\frac{a}{b}$?
  On a l'encadrement suivant de $\frac{1}{b}$: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$.
  Alors, puisque a et $\frac{1}{b}$ sont des nombres positifs :

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \leq a \cdot \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \cdot 3, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 1.$$

Exercice 1.

Sachant que $2 < x < 4$, donner un encadrement de $\frac{1}{2+x}$.

Propriétés : *Passage au carré et à la racine carrée*

Soient a et b deux **nombres positifs**. *Alors :*

- ▷ $0 \leq a < b$ *équivaut à* $a^2 < b^2$,
- ▷ $\sqrt{a} = b$ *équivaut à* $a = b^2$,
- ▷ $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ *équivaut à* $0 \leq a = b$,
- ▷ $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ *équivaut à* $0 \leq a < b$.

Remarques

- ▷ Si $a < b$ avec $a < 0$ et $b > 0$, alors on peut avoir soit $a^2 < b^2$ soit $a^2 > b^2$.
- ▷ Si a et b sont tous deux négatifs $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$.

Exemple

L'inégalité -2 < 1 est vraie, mais $(-2)^2 < 1^2$ est fausse.

Exercice 2.

Préciser à quel intervalle appartient x^2 si :

1) $x \in]1, 4[$,

2) $x \in]-5, 1[$.

4 Équations et inéquations

Définition : *Équation*

Une **équation** est une égalité entre deux quantités algébriques, contenant une ou plusieurs variables, appelées **inconnues**.

Exemple

L'égalité $2x = 6$ est une équation d'inconnue x.

Propriété : *Résolution d'équation et solutions*

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ revient à trouver l'ensemble des valeurs de x réelles qui vérifient cette égalité.
Ces valeurs sont appelées ***solutions*** *de l'équation.*
L'ensemble des solutions, noté $\mathcal{S}$, est donné par :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid \textit{l'égalité est vérifiée}\}$$

Exemple

Pour résoudre l'équation $2x = 6$ d'inconnue x, on cherche les valeurs de x telles que $2x = 6$.
La solution de cette équation est $x = 3$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

Définition : *Inéquation*

Une **inéquation** est une inégalité entre deux quantités algébriques, contenant une ou plusieurs inconnues.

Exemple

L'inégalité $2x > 6$ est une inéquation d'inconnue x.

Propriété : *Résolution d'inéquation et solutions*

Résoudre une inéquation revient à trouver les valeurs des inconnues qui rendent vraie l'inégalité. L'ensemble des solutions de cette inéquation, noté $\mathcal{S}$, s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid \textit{l'inégalité est vérifiée.}\}$$

Exemple

L'inéquation $2x > 6$ d'inconnue x a pour solutions tous les x réels tels que $x > 3$.
L'ensemble des solutions peut s'écrire sous forme d'intervalle

$$\mathcal{S} =]3, +\infty[\quad \text{ou encore} \quad \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

4.1 Équations et inéquations polynomiales

4.1.1 Polynômes et racines

Définitions : *Polynôme, coefficients, degré*

On appelle **polynôme** de la variable réelle x, une expression de la forme :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

où a_0, a_2, $\cdots$, a_n sont des nombres réels, appelés **coefficients** du polynôme.
Le **degré** du polynôme est la plus grande puissance de x dont le coefficient est non nul.
Ici, le degré du polynôme est n si $a_n \neq 0$.

Définition : *Trinôme*

Un trinôme est un polynôme qui contient trois termes.

Exemples

- ▷ $2x^5 + x^4 - 6x^3 + 2$ est un polynôme de degré 5.
- ▷ $x^2 + x + 1$ est un trinôme de degré 2.

Définition : *Racines d'un polynôme*

On appelle **racines** d'un polynôme les valeurs de x pour lesquelles le polynôme s'annule, c'est à dire les valeurs de x telles que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

où a_0, a_2, $\cdots$, a_n sont des nombres réels.

Exemples

Les racines du polynôme du second degré $x^2 - 3x + 2$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
En effet, en remplaçant x par 1 et 2, on a $1^2 - 3 + 2 = 0$ et $2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$.

4.2 Équations et inéquations linéaires du premier degré

Définition : *Équation du premier degré*

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Une **équation du premier degré** est de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{où } x \text{ est l'inconnue.}$$

Propriétés

Dans $\mathbb{R}$, une équation de la forme $ax + b = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Exemple

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 13 = -3x + 2$. Alors :

$$\begin{aligned} 2x - 13 = -3x + 2 &\iff 2x + 3x = 2 + 13 \\ &\iff 5x = 15 \\ &\iff x = 3. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x + 4 = 6$, **2)** $\dfrac{6}{5}x + \dfrac{7}{5} = 0$, **3)** $11x + 5 = 10 + 9x$.

Définition : *Inéquation du premier degré*

Une **inéquation du premier degré** est de la forme :

▷ $ax + b > 0$, ▷ $ax + b < 0$, ▷ $ax + b \geq 0$, ▷ $ax + b \leq 0$.

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Ici, x est l'inconnue.

Exemple

▷ On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 > 0$. On a :

$$\begin{aligned} 2x + 3 > 0 &\iff 2x > -3 \\ &\iff x > -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.

▷ On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3-5x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} 3-5x \geq 0 &\iff -5x \geq -3 \\ &\iff 5x \leq 3 \\ &\iff x \leq \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{3}{5}\right]$.

Exercice 4.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $3x-2 \geq 0$,

2) $1-3x \geq 0$,

Définition : *Équation du second degré*

Une **équation du second degré** s'écrit sous la forme :

$$ax^2+bx+c=0,$$

où x est l'inconnue, et a, b et c sont des coefficients réels fixés, avec $a \neq 0$.
Dans $\mathbb{R}$, une telle équation admet aucune, une ou deux solutions.

Propriétés : *Résolution d'une équation du second degré*

Avec les notations de la définition précédente, on pose

$$\Delta = b^2-4ac.$$

Δ *est le* **discriminant** *du polynôme* ax^2+bx+c.
On a alors trois cas :

▷ $\Delta < 0$ *: l'équation n'a pas de solution réelle,*

▷ $\Delta = 0$ *: l'équation a une solution double* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$,

▷ $\Delta > 0$ *: l'équation possède 2 solutions réelles :* $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple – *Cas où* $\Delta > 0$

Soit le polynôme $P(x) = -6x^2+x+1$ et l'équation $-6x^2+x+1=0$.
Le discriminant de P est $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times(-6)\times 1 = 25$.
Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{-12} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{-12} = -\frac{1}{3}.$$

Donc,

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Exemple – *Cas où $\Delta < 0$*

Soit le polynôme $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$ et l'équation $5x^2 + 6x + 2 = 0$.
Le discriminant de P est $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$.
Le discriminant est négatif, il n'y a pas de solutions réelles et donc

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Exemple – *Cas où $\Delta = 0$*

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8}$ et l'équation $2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$.
Le discriminant de P est $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{25}{8} = 0$.
Le discriminant est nul, il y a une solution réelle double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{4}$.
Donc,

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{4}\right\}.$$

Exercice 5.

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **2)** $x^2 - 6x + 9 = 0$, **3)** $-4x^2 - x - 6 = 0$.

Remarque

La résolution d'une inéquation du second degré passe par :
- ▷ la résolution de l'équation du second degré associée,
- ▷ l'étude du signe du polynôme.

Propriété : *Signe du polynôme*

Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Pour étudier dans $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$, on commence par calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
- ▷ *Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines (avec $x_1 < x_2$) et on obtient le tableau de signes :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		*signe de a*	0	*signe de $(-a)$*	0	*signe de a*	

- ▷ *Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine et on obtient le tableau de signes suivant :*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		*signe de a*	0	*signe de a*	

- ▷ *Si $\Delta < 0$, le signe de $P(x)$ est le même que celui de a.*

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $x^2 + 4x - 5 < 0$.

- ▷ On calcule la valeur du discriminant du polynôme associé à l'inéquation :
  Ici $a = 1$, $b = 4$ et $c = -5$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-5) = 36$.
- ▷ Le discriminant est strictement positif, on a donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = 1.$$

- ▷ Le signe du polynôme est donc :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

- ▷ Les solutions de l'inéquation sont les x pour lesquels $x^2 + 4x - 5$ est inférieur à 0. Cela revient à déterminer les x pour lesquels on a le signe $-$ dans le tableau de signe. D'où,

$$\mathcal{S} =]-5; 1[.$$

Remarque

Remarquez la différence :

- ▷ L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ est $\mathcal{S} = \{-5; 1\}$,
- ▷ L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 4x - 5 < 0$ est $\mathcal{S} =]-5; 1[$.

Dans le premier cas on a seulement les deux valeurs -5 et 1. Dans le deuxième on considère tous les x compris strictement entre -5 et 1.
Attention donc au type de parenthèses qu'on utilise !

Exercice 6.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x^2 - 5x + 6 < 0$ **2)** $x^2 - 6x + 9 > 0$, **3)** $-4x^2 - x - 6 > 0$.

5 Équations produits et équation quotients

Définition : *Équation produit*

Une équation d'inconnue x qui contient le produit de plusieurs facteurs faisant apparaître x est appelée **équation produit**.

Exemple

L'équation $(x + 1)(2x - 3) = 0$ est une équation produit.

Propriété : *Équation produit*

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Ainsi, si X et Y sont deux expressions réelles, on a :

$$X \times Y = 0 \Longleftrightarrow X = 0 \text{ ou } Y = 0.$$

Exemple

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)(2x-3) = 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(x+1)(2x-3) = 0 &\iff x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x-3 = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}.$$

Exercice 7.

Résoudre les équations suivantes :

1) $x(x-6) = 0$

2) $2(x+1)(2x+5) = 0$,

Définition : *Équation quotient*

Une équation d'inconnue x qui contient le quotient de plusieurs facteurs faisant apparaître x est appelée **équation quotient**.

Exemple

L'équation $\dfrac{2-x}{x+1} = 0$ est une équation quotient.

Propriété : *Équation quotient*

Un quotient est nul si et seulement si le dénominateur est non nul et le numérateur est nul.
Ainsi, si X et Y sont deux expressions réelles, on a :

$$\frac{X}{Y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y \neq 0 \quad \text{et} \quad X = 0.$$

Exemple

On veut résoudre l'équation $\dfrac{2-x}{x+1}=0$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{x+1}=0 &\iff x+1\neq 0 \quad \text{et} \quad 2-x=0\\ &\iff x\neq -1 \quad \text{et} \quad x=2.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{S}=\{2\}.$$

Exercice 8.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{x-3}{3x}=0$,

2) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+2x+5}=0$.

6 Inéquations produit et inéquations quotient

Remarque

La résolution d'une inéquation produit ou quotient passe par le tableau de signe de chaque facteur.

6.1 Inéquations produit

Exemple

Soit **l'inéquation produit** $(2x-4)(-x-5)\leq 0$. On construit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-4)(-x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\mathcal{S}=\,]-\infty\,;-5\,]\cup[\,2\,;+\infty\,[.$$

Exercice 9.

Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe des expressions suivantes :

1) $(x-3)(x-4)$,

2) $(1-2x)(x+2)$.

Exercice 10.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(1-2x)(x+2)<0$,

2) $x(x-1)\geq 0$.

6.2 Inéquations quotient

Exemple

On souhaite résoudre l'**inéquation quotient** $\dfrac{-2x+4}{x+3} \geq 0$.
Il faut tout d'abord que le dénominateur soit non nul. Dans le tableau de signes, la valeur interdite se traduit par une double barre :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+4}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On a donc $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$\mathcal{S} = \left]-3; 2\right].$$

Exercice 11.

Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe des expressions suivantes :

1) $\dfrac{x-3}{3x}$,

2) $\dfrac{3-2x}{7x+1}$.

Exercice 12.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{x-3}{3x} > 0$,

2) $\dfrac{2x-3}{7x+1} < 0$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Puisque $2 < x < 4$, on en déduit que $4 < 2 + x < 6$. Ainsi, $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{2+x} < \dfrac{1}{4}$.

Correction de l'Exercice 2.

On pourra s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2$.

1) Si $x \in]1, 4[$, alors $x^2 \in]1, 16[$.

2) Si $x \in]-5, 1[$, alors $x^2 \in [0, 25[$.

Correction de l'Exercice 3.

1) $2x + 4 = 6$: cette expression se simplifie pour s'écrire $2x = 2$ ce qui donne donc $x = 1$,

2) $\dfrac{6}{5}x + \dfrac{7}{5} = 0$: cette expression s'écrit également $\dfrac{6}{5}x + \dfrac{7}{5} = -\dfrac{7/5}{6/5} = -\dfrac{7}{6}$,

3) $11x + 5 = 10 + 9x$ se simplifie pour s'écrire $2x - 5 = 0$. On a donc la solution $x = \dfrac{5}{2}$.

Correction de l'Exercice 4.

1) L'inéquation s'écrit également $x \geq \dfrac{2}{3}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$.

2) L'inéquation s'écrit également $x \leq \dfrac{1}{3}$, donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$.

Correction de l'Exercice 5.

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

- ▷ $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$
- ▷ les solutions sont donc :
  $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$,
- ▷ L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{2, 3\}$.

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$,

- ▷ $\Delta = 0$,
- ▷ l'unique solution est donc $x_0 = 3$,
- ▷ L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

3) $-4x^2 - x - 6 = 0$,

- ▷ $\Delta = -95 < 0$
- ▷ Il n'y a donc pas de solution réelle,
- ▷ L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Correction de l'Exercice 6.

1) D'après l'exercice précédent on a vu que les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. Le tableau de signe est donné par :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]2, 3[$.

2) Pour résoudre l'inéquation $x^2-6x+9 > 0$, on commence par résoudre l'équation $x^2-6x+9 = 0$, qui donne $\Delta = 0$ et qui a donc une unique solution : $x_0 = 3$.
Le tableau de signe est donné par :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$		$+$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

3) Pour résoudre l'inéquation $-4x^2 - x - 6 > 0$, on commence par résoudre l'équation $-4x^2 - x - 6 = 0$. Or, cette équation n'admet pas de solution réelle et le polynôme est donc de signe constant. Ici c'est le signe du coefficient de x^2, donc -4. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-4x^2 - x - 6 < 0$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Correction de l'Exercice 7.

1) $x(x-6) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 6$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{0, 6\}$.

2) $2(x+1)(2x+5) = 0$ si et seulement si $x + 1 = 0$ ou $2x + 5 = 0$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2}, -1\right\}$.

Correction de l'Exercice 8.

1) $\frac{x-3}{3x} = 0$. Il faut donc que $x - 3 = 0$ et $3x \neq 0$, d'où l'ensemble des solutions donné par $\mathcal{S} = \{3\}$.

2) $\frac{x^2-4x-5}{x^2+2x+5} = 0$. Il faut donc que $x^2 - 4x - 5 = 0$ et $x^2 + 2x + 5 \neq 0$, d'où l'ensemble des solutions donné par $\mathcal{S} = \{-1, 5\}$.

Correction de l'Exercice 9.

1) Signe de $(x-3)(x-4)$,

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-3)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Signe de $(1-2x)(x+2)$,

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-2x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction de l'Exercice 10.

1) $(1-2x)(x+2)<0$,

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-2x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\mathcal{S}=]-\infty,-2[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$$

2) $x(x-1)\geq 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\mathcal{S}=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$$

Correction de l'Exercice 11.

1) $\dfrac{x-3}{3x}$,

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-3}{3x}$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

2) $\dfrac{3-2x}{7x+1}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-2x}{7x+1}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Correction de l'Exercice 12.

1) $\dfrac{x-3}{3x} > 0$, voir tableau de signe exercice précédent

$$\mathcal{S} =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

2) $\dfrac{2x-3}{7x+1} < 0$, $\mathcal{S} =]-\dfrac{1}{7}, \dfrac{3}{2}[$ (voir tableau de signe exercice précédent avec changement de signe du numérateur

Chapitre 0

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Sachant que $2 < x < 4$, donner un encadrement des expressions suivantes :

1) $x + 2$,

2) $2x - 1$,

3) $5 - x$,

4) $\dfrac{1}{5-x}$.

Exercice 2.

Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse :

1) si $x > 9$ alors $x^2 > 81$,

2) si $-2\sqrt{3} < x < -1$ alors $0 < x^2 < 20$,

3) si $-1 < x \leq 5$ alors $1 < x^2 \leq 25$,

4) si $x < 3$ alors $x^2 < 9$,

Exercice 3.

Soient x et y deux nombres réels tels que $1 < x < 5$ et $-3 < y < -2$. Encadrer

1) $x + y$,

2) $x - y$,

3) $x^2 + y$,

4) y^2,

5) xy,

6) $\dfrac{y}{x}$

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes :

1) $4x - 1 = 7$,

2) $2 - \dfrac{1}{2}x = -1$,

3) $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

4) $x\sqrt{2} + \sqrt{2} = x\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - (2 - \sqrt{2})$

Exercice 5.

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$,

2) $-x^2 + 2x - 3 = 0$,

3) $x^2 + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{8} = 0$,

4) $[(x - 5)(x + 3)] + 16 = 0$,

5) $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$,

6) $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x$.

Exercice 6.

Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$.

1) Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution.

2) Déterminer alors cette solution.

Exercice 7.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $5x - 2 < 1$, **2)** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$, **3)** $4 - 2x \leq 7$,

4) $2x - 3 \geq -x + 2$, **5)** $\frac{x+3}{2} + \frac{3x-2}{6} \geq \frac{6x-2}{3}$ **6)** $\frac{x+8}{2} - \frac{5x-2}{6} \geq \frac{7x-4}{5}$

Exercice 8.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $4 - 3x^2 - 11x < 0$,

2) $4x^2 + 25 \leq 20x$,

3) $x(2x-5) \geqslant x - 6$,

4) $3(x^2+2) \leq 10x$.

Exercice 9. — *Equations et inéquations contenant une valeur absolue*

1) Si a et r sont deux réels avec $r > 0$, alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

$\triangleright$ $|x| = r$, $\triangleright$ $x = -r$ ou $x = r$.

Déterminer les valeurs de x réelles telles que :

a) $|x-2| = 3$ **b)** $\left|x + \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$

2) Si a et r sont deux réels avec $r > 0$, alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

$\triangleright$ $|x-a| \leq r$, $\triangleright$ $x \in [a-r; a+r]$

Déterminer les valeurs de x réelles telles que :

a) $|x-2| \leq 3$ **b)** $|2x-4| \geq 2$.

Exercice 10. — *Equations irrationnelles*

L'objectif de cet exercice est de résoudre des équations **irrationnelles** où l'inconnue est sous une racine carrée.

1) Soient a et b deux **nombres positifs ou nuls**. On a vu dans le cours que :

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \quad \text{équivaut à} \quad a = b.$$

On souhaite déterminer les valeurs de x réelles telles que :

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{3-x}.$$

a) Afin d'utiliser la propriété ci-dessus, quelle condition on doit imposer sur les deux membres de cette équation ?

b) Se ramener à une équation polynomiale et en déduire les solutions de l'équation irrationnelle de depart.

2) Soient a et b deux **nombres positifs ou nuls**. On a vu dans le cours que :

$$\sqrt{a} = b \quad \text{équivaut à} \quad a = b^2.$$

On remarque que la condition que a soit positif ou nul est superflue, car si l'égalité $a = b^2$ est vérifiée, alors a est nécessairement positif ou nul.
On souhaite déterminer les valeurs de x réelles telles que :

$$\sqrt{7-3x} = 3 - x$$

a) Afin d'utiliser la propriété ci-dessus, quelle condition on doit imposer sur le terme de droite ?

b) Se ramener à une équation polynomiale et en déduire les solutions de l'équation irrationnelle de depart.

3) Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+1}$, **b)** $\sqrt{x^2-1} = x+2$.

Exercice 11.

Résoudre les équations suivantes :

1) $(1-3x)(x+6) = 0$, **2)** $2(x^2+2x+1)(2x+5) = 0$,

3) $(4x-2)(6x+1)(12x-6) = 0$, **4)** $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12) = 0$,

Exercice 12.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(1-2x)(x+2) < 0$, **2)** $x(x-1) \geq 0$, **3)** $(2x-3) > (2-x)(2x-3)$.

Exercice 13.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} = 0$ **2)** $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-1} = 0$ **3)** $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$,

Exercice 14.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{x^2-x}{2x+3} > 0$, **2)** $\dfrac{2}{x+1} \leq 3$. **3)** $\dfrac{2}{2x-3} \geq 1$

7 Propriétés du logarithme et de l'exponentielle

Dans cette partie, on suppose connues les notions d'exponentielles et de logarithmes dont on ne redonne pas les définitions mais dont on rappelle uniquement les propriétés. Rappelons tout d'abord le lien existant entre le logarithme et l'exponentielle.

Proposition

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\ln(\exp(x)) = x$.
- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\exp(\ln(y)) = y$.

Remarques

- L'expression $\exp(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors que l'expression $\ln(y)$ n'est définie que pour $y \in \mathbb{R}_+^*$.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
- La Proposition précédente signifie que l'exponentielle et le logarithme sont la réciproque l'une de l'autre. Cette notion sera détaillée dans le Chapitre 2.

Propriétés : *Valeurs remarquables de l'exponentielle et du logarithme*

- *Il existe un et un seul réel strictement positif, noté* e, *tel que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
- *On a* $\mathrm{e} = \exp(1)$.
- *On a*

$$\ln(1) = 0 \quad \textit{et} \quad \exp(0) = 1.$$

On peut montrer que $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$.

Remarque

Les propriétés précédentes sont des conséquences directes de la Proposition donnée précédemment.
On notera de plus que 1 est l'unique valeur qui annule ln et que l'exponentielle ne s'annule jamais car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Propriétés : *Propriétés fondamentales de l'exponentielle et du logarithme*

- *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

▷ *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a*
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Remarques

Ces deux propriétés peuvent se résumer ainsi :

« L'exponentielle transforme une somme en produit »

et

« Le logarithme transforme un produit en somme »

La propriété fondamentale de l'exponentielle entraîne que celle-ci à les mêmes propriétés que les puissances. Cela ajouté au fait que $\mathrm{e} = \exp(1)$ amène à la notation suivante :

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note aussi l'exponentielle de x par e^x. Autrement dit, on a $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

À partir de cette propriété fondamentale, on déduit les propriétés ci-dessous.

Propriétés

▷ *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*
$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \quad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n.$$

▷ *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \text{et} \quad \ln(x^n) = n \ln x.$$

Exercice 1.

Montrer les propriétés précédentes.

Exercice 2.

En utilisant les propriétés précédentes, simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \dfrac{\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^5}$,

2) $B = (\mathrm{e}^{x+1})^2$.

3) $C = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ln\left(\dfrac{8}{3}\right)$,

4) $D = \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$,

D'après les propriétés de l'exponentielle et du logarithme, pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $a^n = \exp(\ln(a^n)) = \exp(n \ln a)$. Cette dernière égalité ayant un sens pour tout n réel, on peut ainsi définir les puissances réelles de a.

Définition : *Puissance réelles*

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
On définit a **puissance** x, noté a^x, par

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} > 0$$

Dans ce cas, le réel x est appelé l'**exposant**.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$, puisque l'exponentielle transforme une somme en produit, on a

$$a^x\, a^y = \mathrm{e}^{x \ln a}\, \mathrm{e}^{y \ln a} = \mathrm{e}^{x \ln a + y \ln a} = \mathrm{e}^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$$

On retrouve ainsi l'une des propriétés bien connues des puissances entières. De même, on montre les propriétés suivantes :

Propriétés

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a

- $a^x\, a^y = a^{x+y}$
- $a^x\, b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Remarque – *La racine carrée*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on a

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$$

Donc $a^{\frac{1}{2}}$ est un nombre strictement positif tel que $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.
Autrement dit, $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de a : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.
De même, la racine cubique est la puissance d'exposant $\dfrac{1}{3}$: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 3.
Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = 4 \ln(25) - 2 \ln(\sqrt{5})$,

2) $B = \ln\left(\dfrac{x\sqrt{y}}{y\sqrt[3]{x}}\right)$, où $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

8 Équations et inéquations exponentielles et logarithmiques

8.1 Équations et inéquations exponentielles

Définition : *Équation (et inéquation) exponentielle*

Une équation (ou inéquation) d'inconnue x qui comporte un ou plusieurs termes $\exp(x)$ est appelée **équation (ou inéquation) exponentielle**.

Exemple

- ▷ $\exp(x) = 1$ est une équation exponentielle.
- ▷ $\exp(2x) \leq \exp(4)$ est une inéquation exponentielle.

Propriétés

Pour tous x et a réels, on a les résultats suivants :

- ▷ $\exp(x) = \exp(a)$ *si et seulement si* $x = a$.
- ▷ $\exp(x) \geq \exp(a)$ *si et seulement si* $x \geq a$.
- ▷ *Pour tout* $\lambda > 0$, *l'équation* $\exp(x) = \lambda$ *possède comme unique solution le nombre* $x = \ln(\lambda)$.

Remarque

Pour résoudre une équation exponentielle, on réécrit l'expression de sorte à avoir une exponentielle de part et d'autre du signe « = ».

Exemples

- ▷ Résoudre l'équation exponentielle $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x+3}$ revient à résoudre l'équation polynomiale $2x = x + 3$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{3\}.$$

- ▷ L'équation $\exp(x) = 1$ a comme solution $x = \ln(1)$, donc $x = 0$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{0\}.$$

On peut également remarquer que $1 = \exp(0)$ donc $\exp(x) = 1$ peut s'écrire $\exp(x) = \exp(0)$, ce qui donne aussi $x = 0$.

- ▷ Résoudre l'inéquation exponentielle $\exp(2x) \leq \exp(4)$ revient à résoudre l'inéquation polynomiale $2x \leq 4$, qui donne $x \leq 2$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; 2\right].$$

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{x^2}$, **2)** $\exp(-x^2 + 9) = 1$, **3)** $\mathrm{e}^{2x} \geq \mathrm{e}^{3x-1}$.

8.2 Équations et inéquations logarithmiques

Définition : *Équations et inéquations logarithmiques*

Une équation (ou inéquation) d'inconnue x qui comporte un ou plusieurs termes $\ln(x)$ est appelée **équation (ou inéquation) logarithmique**.

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $a > 0$, on a les propriétés suivantes :

- ▷ $\ln(x) = \ln(a)$ *si et seulement si* $x = a$.
- ▷ *Pour tout réel* λ, $\ln(x) = \lambda$ *si et seulement si* $x = \mathrm{e}^{\lambda}$.

Exemple

- ▷ On veut résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(x) = 4$.
  On a $\ln(x) = 4$ si et seulement si $x = \mathrm{e}^4$ donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^4\}$$

- ▷ On veut résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $2\ln(x) - \ln(x^3) = -5$.
  On réécrit cette équations pour n'avoir qu'un seul logarithme contenant x en utilisant les propriétés du logarithme $n\ln(a) = \ln(a^n)$ et $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.
  On a donc :

$$\begin{aligned} 2\ln(x) - \ln(x^3) = -5 &\iff \ln(x^2) - \ln(x^3) = \ln(e^{-5}) \\ &\iff \ln\left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-5}) \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-5}). \end{aligned}$$

Résoudre l'équation $2\ln(x) - \ln(x^3) = -5$ revient donc à résoudre l'équation $\frac{1}{x} = \mathrm{e}^{-5}$.
Ainsi on obtient $x = \mathrm{e}^5$.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc :

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^5\}$$

Propriétés

Pour tous réels x et a strictement positifs, on a les propriétés suivantes :

- ▷ $\ln(x) < 0$ *si et seulement si* $0 < x < 1$.
- ▷ $\ln(x) > 0$ *si et seulement si* $x > 1$.
- ▷ $\ln(x) < \ln(a)$ *si et seulement si* $x < a$.

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $\ln(x^2-4) > \ln(3x)$.

- ▷ Tout d'abord, l'inéquation n'a de sens que si $x^2-4>0$ et $3x>0$.
  La résolution de ces inéquations polynomiales nous permet de conclure que l'inéquation à résoudre est définie sur l'ensemble

$$D = \left]2;+\infty\right[.$$

- ▷ De plus, on a

$$\begin{aligned}\ln(x^2-4) > \ln(3x) &\iff x^2-4>3x\\ &\iff x^2-3x-4>0\end{aligned}$$

  Les solutions de l'équation du second degré correspondante ($x^2-3x-4=0$) sont $x_1=-1$ et $x_2=4$.
  Le polynôme x^2-3x-4 est donc positif à l'extérieur de ses racines -1 et 4.
  Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]4;+\infty\right[$.

- ▷ Les solutions de l'inéquation logarithmique $\ln(x^2-4) > \ln(3x)$ sont donc les solutions de l'inéquation polynomiale $x^2-3x-4>0$ qui appartiennent à D.
  Comme $\left]-\infty;-1\right[$ n'est pas inclus dans D et $\left]4;+\infty\right[$ est bien inclus dans D, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation logarithmique est :

$$\mathcal{S} = \left]4;+\infty\right[.$$

Exercice 5.

Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

1) $\ln(x)=5$,

2) $\mathrm{e}^{-2x} > \dfrac{4}{25}$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

▷
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}$$
On en déduit $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^x\,\frac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{x-y}$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$\mathrm{e}^{nx} = \mathrm{e}^{\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n \text{ fois}}} = \underbrace{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x\cdots\mathrm{e}^x}_{n \text{ fois}} = (\mathrm{e}^x)^n$$

▷
- Pour tout $x > 0$, on a
$$0 = \ln(1) = \ln\left(x\,\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
On en déduit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.
- Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, on a
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\,\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$
On en déduit $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
- $\ln(x^n) = \ln(\underbrace{xx\cdots x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\ln(x)+\ln(x)+\cdots+\ln(x)}_{n \text{ fois}} = n\ln(x)$

Correction de l'Exercice 2.

1) $A = \dfrac{\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^5} = \mathrm{e}^{2+3-5} = \mathrm{e}^0 = 1,$

2) $B = (\mathrm{e}^{x+1})^2 = \mathrm{e}^{2(x-1)}.$

3) $C = \ln(3) - \ln(4) + \ln(8) - \ln(3) = -\ln(2^2) + \ln(2\times 2^2) = -2\ln(2) + \ln(2) + 2\ln(2) = \ln(2),$

4) $D = 1 - (\ln(1) - \ln(e)) = 1 - 0 + 1 = 2.$

Correction de l'Exercice 3.

$\triangleright$ $A = 4\ln(25) - 2\ln(\sqrt{5})$
$= 4\ln(5^2) - 2\ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right)$
$= 4 \times 2\ln(5) - 2 \times \frac{1}{2}\ln(5)$
$= 8\ln(5) - \ln(5)$
$= 7\ln(5)$

$\triangleright$ $B = \ln\left(\frac{x\sqrt{y}}{y\sqrt[3]{x}}\right)$
$= (\ln(x) + \ln(\sqrt{y})) - (\ln(y) + \ln(\sqrt[3]{x}))$
$= \left(\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)\right) - \left(\ln(y) + \frac{1}{3}\ln(x)\right)$
$= \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) - \ln(y) - \frac{1}{3}\ln(x)$
$= \frac{2}{3}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(y)$

Correction de l'Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $e^x \times e^{3x} = e^{x^2}$ donne $e^{x+3x} = e^{x^2}$ et donc $e^{4x} = e^{x^2}$.
Il faut donc résoudre $4x = x^2$, c'est à dire $x^2 - 4x = 0$.
Or $x^2 - 4x = x(x-4)$.
Comme un produit est nul si et seulement si l'un des facteur est nul, les solutions sont : $x = 0$ ou $x = 4$.
Donc l'ensemble des solutions est donné par $\mathcal{S} = \{0, 4\}$,

2) $\exp(-x^2 + 9) = 1 = e^0$, il faut donc résoudre l'équation : $-x^2 + 9 = 0$.
Cette équation donne $x = \pm 3$.
Donc l'ensembre des solutions est $\mathcal{S} = \{-3, +3\}$,

3) $e^{2x} \geq e^{3x-1}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, on a l'inéquation $2x \geq 3x - 1$ et donc $x \leq 1$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\} =]-\infty, 1]$.

Correction de l'Exercice 5.

1) Le passage à l'exponentielle de part et d'autre du signe = donne : $x = e^5$.

2) $e^{-2x} > \frac{4}{25}$ s'écrit aussi $e^{-2x} > \exp\left(\ln\left(\frac{4}{25}\right)\right)$ ce qui donne donc $-2x > \ln\left(\frac{4}{25}\right)$.
Ainsi, on a $x < -\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ et donc $x < \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.
Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right[$.
Attention : la borne inférieure de $\mathcal{S}$ n'est pas 0, mais $-\infty$. On a une équation exponentielle au départ, donc on cherche des solutions dans tout $\mathbb{R}$.

Chapitre 0

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

En utilisant les propriétés du logarithme et de l'exponentielle, simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \ln\left(\dfrac{9}{4}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$,

2) $B = \mathrm{e}^{\ln(5)}$,

3) $C = \ln(\mathrm{e}^2) + \ln(\mathrm{e})$,

4) $D = (\ln(\mathrm{e}))^2 + \ln(\mathrm{e})$,

5) $E = \dfrac{\mathrm{e}^{3x-2}\, e^{-4x+2}}{e^{x^2}}$,

6) $F = \sqrt{27}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}\,\sqrt{\mathrm{e}^{-2\ln 2}}$

Exercice 2.

Résoudre les équation suivantes

1) $\mathrm{e}^{4-x} = \mathrm{e}^2$

2) $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{3x+2} = 1$

3) $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$

Exercice 3.

Résoudre les inéquation suivantes

1) $\mathrm{e}^{2x} \geq \mathrm{e}^{x-1}$

2) $\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} > 0$

3) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > \mathrm{e}^{x-2}$

4) $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 \geq 0$.

Exercice 4.

Résoudre les équation suivantes

1) $\ln(2x) = -3$

2) $\ln(1-x) = 2$,

3) $\ln(x) = \ln 5 + 3\ln 2$,

4) $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

Exercice 5.

Résoudre les inéquation suivantes

1) $\ln(x+1) \leq 0$

2) $\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$,

3) $\ln(2x+4) \geq \ln(6-2x)$

Exercice 6.

Résoudre les équations suivantes :

1) $(\mathrm{e}^{x} - 1)^2(x-3) = 0$,

2) $(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{3x+1})(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{3}) = 0$,

3) $(\ln(2x)+3)(\ln(1-x)-2) = 0$,

4) $\dfrac{\ln(x) - 1}{x^2 - 7x + 12} = 0$.