Algèbre de base

Chapitre 3

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Pré-requis

- ☐ Nombres réels et complexes.
- ☐ Notion de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Objectifs

- ☐ Savoir effectuer les opérations dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ (addition, multiplication par un scalaire).
- ☐ Maîtriser la notion de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- ☐ Maîtriser la notion de combinaison linéaire.
- ☐ Savoir écrire un sous-espace vectoriel avec la notation Vect.

Sommaire

Chapitre 3 - Séquence 1

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Dans toute la suite, n désignera un entier naturel non nul, ce que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappels

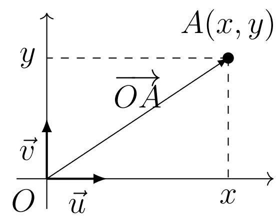
- ▷ Le plan $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de tous les couples de réels (x, y). Il s'écrit :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

- ▷ L'espace $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble de tous les triplets de réels (x, y, z). Il s'écrit :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque



Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Alors, un couple de réels (x, y) peut être représenté dans le plan soit par un point A d'abscisse x et d'ordonnée y, soit par le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
Dans la suite, on identifiera le couple de réels (x, y) au vecteur du plan par lequel il peut être représenté (dans l'exemple précédent, le vecteur $\overrightarrow{OA}$).
De même, un triplet de réels (x, y, z) sera considéré comme un vecteur de l'espace.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser cette notion de vecteur. Pour cela, on généralise tout d'abord la notion de couple et de triplet.

Définitions : *n-uplets*

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un **n-uplet** (ou liste de longueur n) est une collection ordonnée entourée par des parenthèses de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ (qui peuvent être des nombres ou tout autres objets) séparés par des virgules. On note le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.
- ▷ Deux n-uplets sont dits **égaux** s'ils ont la même longueur et les mêmes éléments dans le même ordre.

Remarques

- ▷ On peut noter aussi les n-uplets par d'autres lettres, par exemple :

$$(y_1, \ldots, y_n), \quad (z_1, \ldots, z_n), \quad (A, B, C, D) \text{ (ici } n := 4), \ldots$$

- ▷ L'égalité entre deux n-uplets s'écrit plus rigoureusement sous la forme :

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_p) \iff n = p \quad \text{et} \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n,$$

qui signifie que deux n-uplets sont égaux si et seulement s'ils ont la même longueur et les mêmes éléments dans le même ordre.

La notion de n-uplet permet de définir l'espace $\mathbb{R}^n$ généralisant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Définitions : *L'espace* $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de tous les n-uplets de nombres réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'entier n est appelé la **dimension** de $\mathbb{R}^n$. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés des **vecteurs**.
Pour tout vecteur $x := (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle **composantes** (ou **coordonnées**) de x les réels $x_1, \ldots, x_n$.
De plus, dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires**.

Remarque

En général, on écrit les vecteurs en *colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ plutôt qu'en *ligne* $(x_1, \ldots, x_n)$. Néanmoins, on utilisera souvent la notation en ligne pour un gain de place.

Exemples – *Quelques vecteurs de* $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4, 5$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
- $\begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$,
- $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 2/25 \\ 1/7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$.

Notation

On écrit $k \in [\![1; n]\!]$ pour signifier que k est un entier compris entre 1 et n.
Par exemple, $k \in [\![1; 3]\!]$ signifie que k est égal à 1,2 ou 3.

Remarque

Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a l'équivalence suivante :

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, k \in [\![1; n]\!], \quad x_k = y_k.$$

En particulier, cela signifie que l'ordre des composantes d'un vecteur est important. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarques — *Opérations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$*

- ▷ Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(c,d)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}.$$

- ▷ En particulier,

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

- ▷ De plus, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\, a\\\lambda\, b\end{pmatrix}.$$

Ces règles de calcul s'étendent à $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n\geq 2$.

Définitions : *Opérations dans $\mathbb{R}^n$ et vecteur nul*

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $x\coloneqq(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y\coloneqq(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- ▷ **Somme de deux vecteurs.**

$$x+y\coloneqq\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}.$$

- ▷ **Produit d'un vecteur par un scalaire.**

$$\lambda\, x\coloneqq\lambda\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\, x_1\\\vdots\\\lambda\, x_n\end{pmatrix}.$$

De plus, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on appelle **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$, le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$ défini par

$$0_{\mathbb{R}^n}\coloneqq\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Attention

La somme de deux vecteurs n'est définie que si ceux-ci ont le même nombre de composantes. Par exemple, il n'est pas possible d'additionner un vecteur de $\mathbb{R}^4$ et un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Exemples

- On a

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\12\\7\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\pi\\0\end{pmatrix}.$$

- L'expression $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ n'a pas de sens.

Exercice 1.

1) Calculer (lorsque cela est possible) le résultat des opérations suivantes (écrire les vecteurs en colonne) :

a) $(2,1,3)+(5,6,7)$, **b)** $(3,1,0)+(4,-5)$, **c)** $-2(1,3,-5)$, **d)** $-(-6,7,-8)$.

2) Soient $x \coloneqq (2,-7,1)$, $y \coloneqq (-3,0,4)$ et $z \coloneqq (0,5,-8)$. Calculer $3x-4y$ et $2x-5z$.

Propriétés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x, y, z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. **Propriétés de l'addition de vecteurs**
   (a) *l'addition est commutative :* $x+y=y+x$,
   (b) *l'addition est associative :* $x+(y+z)=(x+y)+z$,
   (c) *l'addition vérifie :* $x+0_{\mathbb{R}^n}=0_{\mathbb{R}^n}+x=x$,
   on dit alors que $0_{\mathbb{R}^n}$ *est un* **élément neutre** *pour l'addition,*
   (d) *tout vecteur admet un* **opposé** *:* $x+(-x)=0_{\mathbb{R}^n}$, *où* $-x \coloneqq (-1)x$.
2. **Propriétés de la multiplication par un scalaire**
   (a) *la multiplication vérifie* $1\,x=x$,
   on dit alors que 1 *est un* **élément neutre** *pour la multiplication par un scalaire,*
   (b) *la multiplication est associative et commutative :* $\lambda\,(\mu\,x)=(\lambda\mu)\,x=\mu\,(\lambda\,x)$.
3. **Distributivité entre l'addition et la multiplication**

$$\lambda\,(x+y)=\lambda\,x+\lambda\,y \qquad \textit{et} \qquad (\lambda+\mu)\,x=\lambda\,x+\mu\,x.$$

Définition : *Espace vectoriel*

Les propriétés précédentes font de $\mathbb{R}^n$ muni des opérations d'addition de vecteurs, notée $+$, et de multiplication par un scalaire, notée $\cdot$, un **espace vectoriel** que l'on note $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$.

Remarque

Dans un cadre plus général, lorsqu'un ensemble est muni de deux opérations vérifiant les propriétés précédentes, on dit que c'est un espace vectoriel (notion qui sera approfondie au 2^{nd} semestre).

Exercice 2.

Soient $x := (1,2,3)$ et $y := (2,3,4)$.

1) Vérifier que la somme de x et y est commutative.

2) Soit de plus $z := (4,5,6)$. Vérifier l'associativité de la somme de x, y et z.

2 L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Tout ce que l'on a vu précédemment se généralise à des vecteurs ayant des composantes complexes :

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle $\mathbb{C}^n$ l'ensemble de tous les n-uplets de nombres complexes, c'est-à-dire

$$\mathbb{C}^n := \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_1 \in \mathbb{C}, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

Dans le cadre de $\mathbb{C}^n$, les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés des **scalaires**.

Remarques

- ▷ Dans $\mathbb{C}^n$, l'addition de vecteurs, notée $+$, et la multiplication par un scalaire, notée $\cdot$, sont définies comme dans $\mathbb{R}^n$.
- ▷ De plus, $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad i\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ 3i \end{pmatrix}, \quad (1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 3-3i \end{pmatrix}.$$

Notation

Les différentes définitions et propriétés vues dans ce chapitre étant valables aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$, on désigne en général par $\mathbb{K}$ un ensemble pouvant être aussi bien $\mathbb{R}$ que $\mathbb{C}$. Autrement dit,

$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}.$$

Ainsi, $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, désigne soit $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbb{C}^n$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) *a)* $(2,1,3)+(5,6,7)=(7,7,10)$.

b) $(3,1,0)+(4,-5)$: impossible car les vecteurs n'ont pas le même nombre de composantes.

c) $-2(1,3,-5)=(-2,-6,10)$.

d) $-(-6,7,-8)=(6,-7,8)$.

2) $3x-4y=(6,-21,3)-(-12,0,16)=(18,-21,-13)$,
$2x+3y-5z=(4,-14,2)+(-9,0,12)-(0,25,-40)=(-5,-39,54)$.

Correction de l'Exercice 2.

1) On a

$$x+y=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y+=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix},$$

donc $x+y=y+x$. Ainsi, la somme de x et y est bien commutative.

2) D'une part, on a

$$(x+y)+z=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\13\end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$y+z=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix},$$

d'où

$$x+(y+z)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\13\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a bien $(x+y)+z=x+(y+z)$. Donc la somme de x, y et z est bien associative.

Chapitre 3

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Effectuer, si possible, les opérations suivantes :

1) $(3, -4, 5) + (1, 1, -2)$,

2) $(0, 2, -3) + (4, -5)$,

3) $-3(4, -5, -6)$,

4) $2(2, 3, 7, 6) - 5(1, -2, 4, -1)$.

Exercice 2.

Soient $x \coloneqq (2, 7, 1)$, $y \coloneqq (-3, 0, 4)$ et $z \coloneqq (0, 5, -8)$. Calculer

1) $3x - 4y$,

2) $2x + 3y - 5z$,

3) $x - 2iy + (1 - i)z$,

4) $\dfrac{1 + \sqrt{2}i}{3}\, y - \dfrac{\sqrt{3} + 2i}{4}\, z$.

Exercice 3.

Soient $u \coloneqq (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$ et $v \coloneqq (5 + i, 2 - 3i, 5)$. Calculer

1) $u + v$,

2) $4i\, u$,

3) $(1 + i)\, v$,

4) $(1 - 2i)u + (3 + i)v$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inclusion $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Exercice 5.

On pose

$$F \coloneqq \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\right\}.$$

1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.

2) Soient $x \coloneqq (x_1, x_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda x \in F$.

3) Soient $x \coloneqq (x_1, x_2) \in F$ et $y \coloneqq (y_1, y_2) \in F$. Montrer que $x + y \in F$.

4) En déduire que, pour tous $x \in F$, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x + y \in F$.

5) Dessiner l'ensemble F.

Remarque : Lorsqu'un ensemble vérifie le 2) de l'exercice précédent, on dit qu'il est **stable pour le produit par un scalaire** et lorsqu'il vérifie le 3), on dit qu'il est **stable pour l'addition**.

Exercice 6.

On pose

$$F \coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.

2) Soient $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda x + y \in F$.

Exercice 7.

On pose :

$$\begin{aligned} F_1 &\coloneqq \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\right\}, \\ F_2 &\coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}, \\ F_3 &\coloneqq \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + 2iz_2 = 0\right\}. \end{aligned}$$

1) Montrer que si $x \coloneqq (x_1, x_2) \in F_1$, alors on a

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que si $x \in F_2$, alors x peut s'écrire en fonction des vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Soit $z \in F_3$. Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $z = \alpha\, u$.

4) Soit $z \in F_3$. Montrer qu'il existe deux vecteurs $v \in \mathbb{C}^2$, $w \in \mathbb{C}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a\, v + b\, w$.
Indication : on pourra utiliser l'écriture algébrique d'un complexe α.

Exercice 8.

On pose

$$F \coloneqq \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 + 2z_3 = 0 \, et \, z_1 = iz_2\right\}.$$

1) Montrer que $0_{\mathbb{C}^3} \in F$ et que, pour tous $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda u + v \in F$.

2) Déterminer $w \in \mathbb{C}^3$ vérifiant que si $z \in F$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $z = \lambda w$.

Exercice 9.

On pose

$$u \coloneqq (1, 2) \quad \text{et} \quad F_1 \coloneqq \{au \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1) Que représente (géométriquement) l'ensemble F_1 ?

2) Montrer que F_1 est stable pour le produit par un scalaire et l'addition (voir Exercice 5), et contient l'élément neutre.

Exercice 10.

Soient $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs non nuls. On pose

$$F_1 \coloneqq \{au \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 \coloneqq \left\{bv + cw \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

1) Que représentent (géométriquement) les ensembles F_1 et F_2 ?

2) Montrer que F_1 et F_2 sont stables pour le produit par un scalaire et l'addition (voir Exercice 5), et contiennent l'élément neutre.

Chapitre 3 - Séquence 2

Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

3 Combinaisons linéaires

Étant donnés deux vecteurs u, v de $\mathbb{K}^n$ et λ, μ deux scalaires, on peut construire un troisième vecteur :

$$w \coloneqq \lambda u + \mu v.$$

On dit alors que w est une combinaison linéaire de u et v.

Cette notion se généralise avec un nombre quelconque de vecteurs et de scalaires (voir définition ci-dessous) et sera très utile pour la suite.

Définition : *Combinaisons linéaires*

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **combinaison linéaire** de $u_1, \ldots, u_k$ tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k,$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$. Cette expression s'écrit plus simplement

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i,$$

et se lit « somme des $\lambda_i u_i$ pour i allant de 1 à k ». Le symbole $\sum$ désigne une somme de plusieurs termes.

Remarque

On a utilisé la notation $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ pour ne pas avoir à écrire $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Dans la suite, on utilisera souvent la notation de n-uplet (ou k-uplet dans le cas présent) dans ce type de situation.

Exemples

▷ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $u_1 \coloneqq \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = \lambda_2 \coloneqq 1$.

▷ On a
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$
donc $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $u_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $u_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 := 1, \lambda_2 := 2$ et $\lambda_3 := 3$.

Exercice 1.

Soient
$$u_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\3\\7\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

1) Calculer les combinaisons linéaires $\frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_3$ et $u_1 + 2u_2 + 3u_3$.

2) Montrer que le vecteur $(3, 8, 6, 26)$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Définition : *Base canonique*

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on note e_k le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la k-ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres sont nulles, *i.e.*
$$e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$
On appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ le n-uplet de vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$.

Remarque

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est souvent notée (i, j) et celle de $\mathbb{R}^3$ est souvent notée (i, j, k).

Exercice 2.

1) Donner les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 2, 3, 4$.

2) Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des n vecteurs de la base canonique.

3) Même question dans $\mathbb{C}^n$.

4 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Définition : *Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$*

Un sous-ensemble F de $\mathbb{K}^n$ est appelé un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{K}^n$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1) $0_{\mathbb{K}^n} \in F$,

2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, (u, v) \in F^2, \quad \lambda\, u + v \in F$.

La condition **2**) se résume en disant que F est **stable par combinaison linéaire**.

Exemples

▷ Montrons que $F_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- On a $0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F_1$.
- Soient $x := (x_1, x_2)$ et $y := (y_1, y_2)$ des éléments de F_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 = 0.$$

On pose $z := \lambda x + y = (z_1, z_2)$. Montrons que $z_1 + z_2 = 0$. On a

$$z_1 = \lambda x_1 + y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = \lambda x_2 + y_2.$$

Donc

$$z_1 + z_2 = \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 = \lambda(\underbrace{x_1 + x_2}_{=0}) + \underbrace{y_1 + y_2}_{=0},$$

d'où $z = \lambda x + y \in F_1$. Ainsi, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

▷ Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $F_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, $0 + 0 = 0 \neq 1$ donc $0_{\mathbb{R}^2} \notin F_2$.

▷ Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $F_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2 = 0\}$ n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, $(1, -1) \in F_3$ mais $2(1, -1) \notin F_3$ car $2^2 - 2 = 2 \neq 0$, ce qui montre que F_3 n'est pas stable par combinaison linéaire.

Exercice 3.

On pose

$$F := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1) Montrer que $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.

2) Soient $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda x + y \in F$.

3) Conclure.

Remarques

▷ L'ensemble F constitué uniquement de l'élément neutre $0_{\mathbb{K}^n}$, noté $F := \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, est un sous-espace vectoriel. En effet, par définition $0_{\mathbb{K}^n} \in F$, et si $(x, y) \in F^2$, alors $x = y = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + y = 0_{\mathbb{K}^n} \in F$.

▷ Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel. De même, dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** *par $u_1, \ldots, u_k$ et on le note $Vect(u_1, \ldots, u_k)$.*
Autrement dit,

$$Vect(u_1, \ldots, u_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k \right\}.$$

On dit aussi que $(u_1, \ldots, u_k)$ est une **famille génératrice** *de ce sous-espace vectoriel.*

Démonstration.
Montrons que $F := \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Pour cela, on montre que $0_{\mathbb{K}^n} \in F$ et que F est stable par combinaison linéaire.

- ▷ Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) := (0, \ldots, 0)$. Alors, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc $0_{\mathbb{K}^n} \in F$.
- ▷ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in F^2$. Alors, par définition de Vect, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{K}^k$ tels que
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i.$$
On obtient ainsi
$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda\, \lambda_i + \mu_i) u_i.$$
Puisque, pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, $\lambda\, \lambda_i + \mu_i \in \mathbb{K}$, on en déduit $\lambda x + y \in F$ (ce qui signifie plus simplement qu'une combinaison linéaire de combinaisons linéaires est une combinaison linéaire).

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. □

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire en utilisant la notation Vect (cela sera démontré dans le Chapitre 7).

Méthode – *Écrire un sous-espace vectoriel avec Vect*

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

1) Soit $x \in F$. On détermine des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$, de $\mathbb{R}^n$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, tels que
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, u_i,$$
où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. Ainsi, $x \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$. On en déduit que l'on a
$$F \subset \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

2) On montre que, pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, on a $u_i \in F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on en déduit
$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) \subset F.$$

3) D'après **1)** et **2)**, on a
$$F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

Exemple

Soit $F := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (Exercice).
Déterminons des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ de $\mathbb{R}^3$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.

1) Soit $x \in F$. Alors, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et x vérifie $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. En particulier, on obtient

$$x_3 = -4x_1 + 2x_2,$$

d'où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$ donc x est combinaison linéaire de u_1 et u_2. On en déduit $x \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, d'où

$$F \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

2) Les coordonnées de u_1 et u_2 vérifient

$$4 \times 1 - 2 \times 0 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 4 \times 0 - 2 \times 1 + 2 = 0$$

donc $u_1 \in F$ et $u_2 \in F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on en déduit

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset F.$$

3) D'après **1)** et **2)**, on obtient

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

Exercice 4.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$F := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Déterminer deux vecteurs $u_1 \in \mathbb{R}^3$ et $u_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) On a

$$\frac{1}{4} u_1 + \frac{1}{2} u_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, 1, 1, 1\right),$$

et

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 = (1, 2, 0, 4) + (0, 2, 6, 14) + (3, 3, 6, 0) = (4, 7, 12, 18).$$

2) On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(3,8,6,26) = au_1 + bu_2$. On aboutit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ 2a+b & = & 8 \\ 3b & = & 6 \\ 4a+7b & = & 26 \end{array}\right.$$

dont la seule solution est $a = 3$ et $b = 2$. On en déduit $(3,8,6,26) = 3u_1 + 2u_2$.

Correction de l'Exercice 2.

1)
- $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
- $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
- $\triangleright$ Dans $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, \ldots, x_n$. Alors,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\, e_1 + \ldots + x_n\, e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

donc x est combinaison linéaire des n vecteurs de la base canonique.

3) Idem.

Correction de l'Exercice 3.

1) On a $4 \times 0 - 2 \times 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$,

2) Soient $x \coloneqq (x_1, x_2, x_3)$ et $y \coloneqq (y_1, y_2, y_3)$ des éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \text{et} \quad 4y_1 - 2y_2 + y_3 = 0.$$

On pose $z \coloneqq \lambda x + y = (z_1, z_2, z_3)$. Montrons que $4z_1 - 2z_2 + z_3 = 0$. On a

$$z_1 = \lambda x_1 + y_1, \quad z_2 = \lambda x_2 + y_2 \quad \text{et} \quad z_3 = \lambda x_3 + y_3.$$

Donc

$$\begin{aligned} 4z_1 - 2z_2 + z_3 &= 4(\lambda x_1 + y_1) - 2(\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3 \\ &= \lambda(\underbrace{4x_1 - 2x_2 + x_3}_{=0}) + \underbrace{4y_1 - 2y_2 + y_3}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z = \lambda x + y \in F$.

Correction de l'Exercice 4.

1) Soit $x \in F$. Alors, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et on a $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
Ainsi, $x_3 = 2x_1 + x_2$. On en déduit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$u_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$, d'où $F \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

2) Les coordonnées de u_1 et u_2 vérifient

$$2 \times 1 + 0 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \times 0 + 1 - 1 = 0,$$

donc $u_1 \in F$ et $u_2 \in F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, on en déduit $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset F$.

3) D'après **1)** et **2)**, on a $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Chapitre 3

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Montrer que $(1, 2)$ est combinaison linéaire de $(1, -2)$ et $(2, 3)$.

Exercice 2.

Soient $v_1 := (2, -1, 1)$, $v_2 := (4, -2, 2)$, $v_3 := (1, 1, 0)$ et $v_4 := (0, -3, 1)$.
Vérifier que l'on a $v_4 = 3v_1 - v_2 - 2v_3$ et $v_4 = 5v_1 - 2v_2 - 2v_3$.

Exercice 3.

Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

1) $(a, 3) = (2, a + b)$,

2) $(4, b) = a(2, 3)$,

3) $(2, -3, 4) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0)$.

Exercice 4.

Déterminer, s'il existe, un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ solution de l'équation

$$2((1, 1, 0) - x) + 4(x + (0, 1, -1)) = (2, -1, 2).$$

Même chose pour l'équation $2((1, 1, 0) - x) + 3(x + (0, 1, -1)) - x = (2, 1, -2)$.

Exercice 5.

Déterminer (en justifiant) si les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels.

$$E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}, \qquad F := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 1\},$$
$$G := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_1x_2 = 0\}, \qquad H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}.$$

Exercice 6.

On pose

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_3 = 0\}, \\ F_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_2 - x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.

Pour tout nombre réel λ, on note

$$F_\lambda := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda\right\}.$$

Montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\lambda = 0$.

Exercice 8.

Écrire chacun des sous-espaces vectoriels ci-dessous avec la notation Vect.

$$
\begin{aligned}
F_1 &\coloneqq \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\right\}, \\
F_2 &\coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}, \\
F_3 &\coloneqq \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\right\}, \\
F_4 &\coloneqq \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\right\}.
\end{aligned}
$$