Chapitre 5

Fractions rationnelles

Pré-requis

- ☐ Le corps $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- ☐ Savoir effectuer la division euclidienne de deux polynômes.
- ☐ Savoir décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
- ☐ Primitives des fonctions usuelles.

Objectifs

- ☐ Savoir déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle.
- ☐ Savoir décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Sommaire

Chapitre 5 - Séquence 1

Fractions Rationnelles

1 Définitions

Définitions : *Fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{K}$

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$.
Le quotient $F := \dfrac{P}{Q}$ est une **fraction rationnelle à coefficients dans** $\mathbb{K}$.
L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{P}{Q} \mid P \in \mathbb{K}[X],\, Q \in \mathbb{K}[X],\, Q \neq 0 \right\}.$$

Pour $F := \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, on dit que P est le **numérateur** de F et Q le **dénominateur** de F.

Remarques

- ▷ Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ (de dénominateur 1). Autrement dit, $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.
- ▷ Toute fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, $\mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$.

Attention

On prendra garde de ne pas confondre les notations :

- ▷ $\mathbb{K}[X]$ (crochets) pour les polynômes,
- ▷ $\mathbb{K}(X)$ (parenthèses) pour les fractions rationnelles.

Exemples

- ▷ Quelques fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$F_1(X) := \frac{X}{X^2 - 1}, \quad F_2(X) := X^3, \quad F_3(X) := \frac{2X^6 - 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 + 2X^2}{X^2 - X}.$$

- ▷ Quelques fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$F_4(X) := \frac{X - 1}{X^2 - 1}, \quad F_5(X) := (X + 2i)^3, \quad F_6(X) := \frac{3iX^2 - 4X + 5 - i}{X - 2}.$$

Remarque – *Fonction rationnelle*

À toute fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{K}(X)$ on peut associer une fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Son domaine de définition est

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}\,.$$

Une telle fonction est appelée **fonction rationnelle**.

Définition : *Égalité de fractions rationnelles*

Soient $(A, B, C, D) \in (\mathbb{K}[X])^4$, avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$.
On dit que les fractions rationnelles $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ et $\dfrac{C(X)}{D(X)}$ sont **égales** si

$$A(X)D(X) = B(X)C(X).$$

Remarque

Dans l'écriture d'une fraction rationnelle $F := \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, le couple (P, Q) n'est pas unique.
En effet, pour tout polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on a

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}.$$

Autrement dit, une fraction rationnelle se simplifie comme une fraction d'entiers.

Exemple

On a l'égalité suivante :

$$\frac{X-1}{X^2-1} = \frac{1}{X+1}.$$

En effet,

$$\frac{X-1}{X^2-1} = \frac{X-1}{(X-1)(X+1)} = \frac{1}{X+1}.$$

Définitions : *Fraction rationnelle irréductible*

- ▷ On dit que deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont **premiers entre eux** si le seul polynôme *unitaire qui divise à la fois P et Q est le polynôme* 1.
- ▷ *Une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est dite sous forme* **irréductible** *si P et Q sont premiers entre eux.*

Remarque

Les polynômes $P := 2X + 2$ et $Q := 2X + 6$ sont premiers entre eux car le seul polynôme unitaire qui divise P et Q est le polynôme constant 1. La fraction rationnelle $\dfrac{2X+2}{2X+6}$ est donc irréductible.
Par contre la forme irréductible d'une fraction rationnelle n'est pas unique. En effet,

$$\frac{2X+2}{2X+6} = \frac{X+1}{X+3},$$

et les deux fractions rationnelles sont sous forme irréductible. Pour avoir unicité de la forme irréductible, il faut ajouter la condition que le dénominateur *ou* le numérateur soit unitaire (ce qui sera le cas dans la plupart des exemples).

Exemples

- ▷ La fraction rationnelle $\dfrac{X}{X(X+1)} \in \mathbb{K}(X)$ n'est pas sous forme irréductible car le polynôme X est un polynôme unitaire qui divise à la fois X et $X(X+1)$. Cependant, on a

  $$\frac{X}{X(X+1)} = \frac{1}{X+1},$$

  et la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X+1}$ est sous forme irréductible car 1 est le seul polynôme qui divise 1.
- ▷ De façon plus générale, toute fraction rationnelle s'écrivant $\dfrac{1}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible. De même, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est une fraction rationnelle $P \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

Remarque

Dire que les polynômes P et Q sont premiers entre eux signifie que P et Q n'ont aucune racine commune.

Proposition

Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.

Autrement dit, pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, avec P et Q premiers entre eux tels que $F = \dfrac{P}{Q}$.

Méthode – *Détermination de la forme irréductible*

Soit $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

1) On détermine les racines de P et de Q.

Si P et Q n'ont pas de racine commune, alors $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible.

2) Si P et Q ont une racine commune x_0, alors

$$P(X) = (X - x_0)P_1(X) \quad \text{et} \quad Q(X) = (X - x_0)Q_1(X).$$

Donc

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{(X - x_0)P_1(X)}{(X - x_0)Q_1(X)} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}.$$

3) On reprend à l'étape **1)** avec P_1 et Q_1.

Remarque

Pour vérifier si P et Q ont des racines communes, il suffit de calculer les racines de l'un des deux polynômes et de vérifier si elles sont racines de l'autre.

Exemples

- ▷ Soient $P(X) \coloneqq X - 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) \coloneqq 2X - 4 \in \mathbb{K}[X]$.

  Le polynôme P a 1 pour seule racine, qui n'est pas racine de Q. Donc $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible.

- ▷ Soient $P(X) \coloneqq X^3 - 4X^2 + 4X - 3 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) \coloneqq (X - 3)^2 \in \mathbb{K}[X]$.

  1) D'une part, Q a une seule racine double : $x_0 = 3$.

  2) D'autre part, $P(3) = 0$ donc 3 est aussi une racine de P.

  3) La division euclidienne de P par $X - 3$ donne : $P(X) = (X^2 - X + 1)(X - 3)$. Donc

  $$\frac{X^3 - 4X^2 + 4X - 3}{(X - 3)^2} = \frac{X^2 - X + 1}{X - 3}.$$

  La seule racine de $X - 3$ est 3, qui n'est pas racine de $X^2 - X + 1$.
  Donc, $\dfrac{X^2 - X + 1}{X - 3}$ est une forme irréductible de $\dfrac{P}{Q}$.

Exercice 1.

Soient $P(X) \coloneqq X^2 - 4X + 4 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) \coloneqq X^2 - 5X + 6 \in \mathbb{K}[X]$.

1) Déterminer les racines de P et de Q.

2) Décomposer P et Q en produit de polynômes irréductibles.

3) En déduire la forme irréductible de $F \coloneqq \dfrac{P}{Q}$.

Exercice 2.

Déterminer la forme irréductible de la fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ suivante :

$$F(X) \coloneqq \frac{X^2 - 2X + 1}{X^3 - X^2 + X - 1}$$

2 Décomposition en éléments simples

On a vu dans le Chapitre 9, que tout polynôme peut se décomposer en produit de polynômes irréductibles. Dans cette section, on va utiliser ce résultat pour obtenir une décomposition du même type pour les fractions rationnelles appelée la **décomposition en éléments simples**.

Définition : *Partie entière d'une fraction rationnelle*

Soient P et Q deux polynômes de $K[X]$, avec $Q \neq 0$.
La **partie entière** de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Exemple

Soit $F(X) \coloneqq \dfrac{X^3+3X^2-X-2}{X^2-1} \in \mathbb{K}(X)$.
En effectuant la division euclidienne de X^3+3X^2-X-2 par X^2-1, on obtient

$$X^3+3X^2-X-2 = (X+3)(X^2-1)+1.$$

On en déduit

$$F(X) = \frac{(X+3)(X^2-1)+1}{X^2-1} = X+3+\frac{1}{X^2-1},$$

donc la partie entière de F est $E(X) = X+3$.

Théorème

Soit $F \coloneqq \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. *Il existe un unique couple de polynômes* (E, R) *de* $\mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad \deg R < \deg Q.$$

De plus, si $\deg P < \deg Q$*, alors la partie entière de* F *est le polynôme nul :* $E = 0$.

Exemples

- ▷ Soit $F_1(X) \coloneqq \dfrac{X^2+3X+1}{X^4+3X^2-6} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$P(X) \coloneqq X^2+3X+1 \quad \text{et} \quad Q(X) \coloneqq X^4+3X^2-6.$$

  Alors, $\deg P = 2 < 4 = \deg Q$ donc la partie entière de F_1 est $E_1 = 0$.

- ▷ Soit $F_2(X) \coloneqq \dfrac{X^3+2}{X^2-X} \in \mathbb{K}(X)$.
  En effectuant la division euclidienne de X^3+2 par X^2-X, on obtient

$$X^3+2 = (X^2-X)(X+1)+X+2.$$

On en déduit

$$F_2(X) = \frac{(X^2 - X)(X+1) + X + 2}{X^2 - X} = X + 1 + \frac{X+2}{X^2 - X},$$

donc $E_2(X) = X + 1$ et $R_2(X) = X + 2$.

Dans la suite, on s'intéresse au terme $\dfrac{R}{Q}$ du théorème précédent.

Définitions : *Pôles d'une fraction rationnelle*

Soit $F := \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle *irréductible.*

1) On appelle **pôles** (dans $\mathbb{K}$) de F les racines (dans $\mathbb{K}$) de Q.

2) Un pôle de **multiplicité** m de F est une racine de multiplicité m de Q.

De plus, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de F de multiplicité m, on dit que

- ▷ α est un **pôle simple** si $m = 1$,
- ▷ α est un **pôle double** si $m = 2$,
- ▷ α est un **pôle triple** si $m = 3$.

Exemples

- ▷ La fraction rationnelle $F(X) := \dfrac{X^2 - X + 1}{(X-1)^2} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible et son dénominateur $(X-1)^2$ a une unique racine $\alpha = 1$ d'ordre de multiplicité 2. Ainsi, F a un pôle double : $\alpha = 1$.
- ▷ La fraction rationnelle $F(X) := \dfrac{1}{(X+1)(X^2+1)^2} \in \mathbb{K}(X)$ est sous forme irréductible.
  - Pour $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, il y a un seul pôle simple : -1.
    En effet, le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles.
  - Par contre, pour $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, on a $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ et

    $$F(X) = \frac{1}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{1}{(X+1)(X-i)^2(X+i)^2}.$$

    Donc il y a trois pôles : un pôle simple -1, et deux pôles doubles : i et $-i$.

Définition : *Éléments simples*

- ▷ On appelle **élément simple** de $\mathbb{C}(X)$ toute fraction rationnelle de la forme

  $$\frac{a}{(X-\alpha)^k}, \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- ▷ On appelle **élément simple** de $\mathbb{R}(X)$ toute fraction rationnelle ayant une des formes suivantes :
  - $\dfrac{a}{(X-\alpha)^k}$, où $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$;

- $\dfrac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^k}$,

  où $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Remarque

La forme des éléments simples varie suivant si l'on travaille dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$, car la décomposition de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ en polynômes irréductibles est différente pour $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

Exemples

▷ La fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-1)^3}$ est un élément simple de $\mathbb{R}(X)$ et un élément simple de $\mathbb{C}(X)$ (prendre $\alpha = 1$, $a = 1$ et $k = 3$ dans la définition).

▷ Le polynôme X^2+1 n'a pas de racine réelle. Donc $\dfrac{1}{X^2+1}$ est un élément simple de $\mathbb{R}(X)$, mais ce n'est pas un élément simple de $\mathbb{C}(X)$ car cette fraction rationnelle ne s'écrit pas sous la forme $\dfrac{a}{(X-\alpha)^k}$.

▷ La fraction rationnelle $\dfrac{2X+3}{X^2-2x+6}$ est un élément simple de $\mathbb{R}(X)$ car son dénominateur est un polynôme du second degré de discriminant négatif (et donc n'a pas de racines réelles).

Théorème : *Décomposition en éléments simples*

Toute fraction rationnelle non nulle de $\mathbb{K}(X)$ dont la partie entière est nulle s'écrit comme somme d'éléments simples de $\mathbb{K}(X)$.

Exemples

▷ Soit $F(X) := \dfrac{2X+1}{X^2-X-2}$.

La partie entière de F est nulle. Le polynôme X^2-X-2 admet deux racines simples : -1 et 2, donc la fraction rationnelle F admet deux pôles simples $\alpha_1 := -1$ et $\alpha_2 := 2$. Ainsi, la décomposition en éléments simples est de la forme suivante :

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2}, \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On remarque que dans ce cas les décompositions sur $\mathbb{C}(X)$ et sur $\mathbb{R}(X)$ coïncident.

▷ Soit $F(X) := \dfrac{1}{(X-i)(X^2+2X+1)} = \dfrac{1}{(X-i)(X+1)^2} \in \mathbb{C}(X)$.

La partie entière de F est nulle. La fraction rationnelle F admet un pôle simple $\alpha_1 := i$ et un pôle double $\alpha_2 := -1$.

Alors, la décomposition en éléments simples est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a}{X-\alpha_1} + \frac{b}{X-\alpha_2} + \frac{c}{(X-\alpha_2)^2} \\ &= \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}, \quad \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

Ici, le pôle α_2 donne deux éléments simples car les polynômes $X+1$ et $(X+1)^2$ divisent tous les deux le dénominateur $Q(X) \coloneqq (X-i)(X+1)^2$.

▷ Soit $F(X) \coloneqq \dfrac{1}{X(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X)$. La partie entière de F est nulle.
La fraction rationnelle F, en tant qu'élément de $\mathbb{R}(X)$, ne possède qu'un seul pôle qui est simple : $\alpha_1 \coloneqq 0$.
On en déduit que F admet pour décomposition en éléments simples :

$$F(X) = \frac{c}{X} + \frac{aX+b}{X^2+1}, \quad \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Remarque

On donne ci-dessous l'énoncé du théorème de décomposition en éléments simples sous forme plus rigoureuse.

▷ Soit $F \coloneqq \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que $\deg(P) < \deg(Q)$ et soit

$$Q(X) \coloneqq a \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[X]$$

l'unique factorisation en polynômes irréductibles de Q.
Alors, pour tous $i \in [\![1;p]\!]$ et $j \in [\![1;m_i]\!]$, il existe un unique nombre complexe c_{ij} tel que

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{c_{i,1}}{X-\alpha_i} + \frac{c_{i,2}}{(X-\alpha_i)^2} + \ldots + \frac{c_{i,m_i}}{(X-\alpha_i)^{m_i}} \right).$$

Il s'agit de la **décomposition en éléments simples** de F dans $\mathbb{C}$.

▷ Soit $F \coloneqq \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que $\deg(P) < \deg(Q)$ et soit

$$Q(X) \coloneqq a \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{q} (X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{n_i}$$

l'unique factorisation en polynômes irréductibles de Q sur $\mathbb{R}$.
Alors, il existe des coefficients a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} uniques tels que

$$F(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}X+b_{i,j}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^j}.$$

Il s'agit de la **décomposition en éléments simples** de F dans $\mathbb{R}$.

Définitions : *Éléments simples de première et de deuxième espèces*

- $\triangleright$ Pour tous $i \in [\![1;p]\!]$ et $j \in [\![1;m_i]\!]$, le terme $\dfrac{c_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j}$ est appelé **élément simple de première espèce**.
- $\triangleright$ Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, la somme $\dfrac{c_{i,1}}{X-\alpha_i}+\ldots+\dfrac{c_{i,m_i}}{(X-\alpha_i)^{m_i}}$ est appelée la **partie polaire** de F relative au pôle α_i.
- $\triangleright$ Pour tous $i \in [\![1;q]\!]$ et $j \in [\![1;n_i]\!]$, le terme $\dfrac{a_{i,j}X+b_{i,j}}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{n_i}}$ est appelé **élément simple de seconde espèce**.

Méthode – *Décomposition en éléments simples*

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Pour déterminer la **décomposition en éléments simples** de F, on effectue les étapes ci-dessous.

1) On détermine la forme irréductible $\dfrac{P}{Q}$ de F.

2) On effectue la division euclidienne de P par Q pour obtenir la partie entière :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad \deg R < \deg Q.$$

3) On écrit le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

4) On en déduit la forme de la décomposition en éléments simples de F.

5) On calcule les différentes constantes apparaissant dans la décomposition (cette étape sera étudiée dans la séquence suivante).

Exemple – *Étude d'un cas général*

On considère la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) \coloneqq \frac{-2X^3-5X^2+8X+3}{X^2+2X-3} \in \mathbb{R}(X).$$

On pose

$$P(X) \coloneqq -2X^3-5X^2+8X+3 \in \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad Q(X) \coloneqq X^2+2X-3 \in \mathbb{R}[X].$$

1) Q a deux racines qui sont 1 et -3.

2) Comme $P(1) = 4 \neq 0$ et $P(-3) = -12 \neq 0$, 1 et -3 ne sont pas des racines de P.

3) On en déduit que F est bien sous forme irréductible et possède deux pôles simples : 1 et -3.

4) Puisque $\deg(P) > \deg(Q)$, on effectue la division euclidienne de $-2X^3-5X^2+8X+3$ par X^2+2X-3 :

$$-2X^3-5X^2+8X+3 = (X^2+2X-3)(-2X-1)+4X.$$

Donc

$$F(X) = -2X-1+\frac{4X}{X^2+2X-3} = -2X-1+\frac{4X}{(X-1)(X-3)}.$$

Ainsi, la partie entière de F est $-2X-1$ et la partie polaire est $\dfrac{4X}{(X-1)(X-3)}$.

5) Alors, puisque F a deux pôles simples 1 et -3, la décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F(X) = -2X - 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+3},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) \coloneqq \frac{3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2}{X^4 + 2X^2 + 1}.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Le polynôme P a une seule racine : 2 qui est une racine double. Tandis que Q a deux racines simples : 2 et 3. Donc 2 est la seule racine commune de P et Q.

2) On a $P(X) = (X-2)^2$ et $Q(X) = (X-2)(X-3)$.

3) On a

$$\frac{X^2-4X+4}{X^2-5X+6} = \frac{(X-2)^2}{(X-2)(X-3)} = \frac{X-2}{X-3}.$$

Alors, $\dfrac{X-2}{X-3}$ est une forme irréductible de F_1.

Correction de l'Exercice 2.

Soient $P(X) \coloneqq X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) \coloneqq X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{K}[X]$.
Le polynôme P a une racine double : 1 et $P(X) = (X-1)^2$. De plus, $Q(1) = 0$ donc 1 est aussi racine de Q. Donc 1 est la seule racine commune de P et Q. En effectuant la division euclidienne de Q par $X-1$ on obtient :

$$Q = (X-1)(X^2+1).$$

Donc

$$F(X) = \frac{(X-1)^2}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{X-1}{X^2+1}.$$

Et $\dfrac{X-1}{X^2+1}$ est une forme irréductible de F.

Correction de l'Exercice 3.

On pose

$$P(X) \coloneqq 3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2 \in \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad Q(X) \coloneqq X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X].$$

1) Déterminons les racines de Q.
On a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$ et $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$, d'où

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X-i)^2(X+i)^2.$$

Ainsi, Q a deux racines doubles qui sont i et $-i$.

2) On regarde si P et Q ont des racines communes.
On a $P(i) = 4i \neq 0$ et $P(-i) = -6i \neq 0$. Donc i et $-i$ ne sont pas des racines de P.

3) On en déduit que F est bien sous forme irréductible et possède deux pôles doubles : i et $-i$.

4) On effectue la division euclidienne de $3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2$ par $X^4 + 2X^2 + 1$:

$$3X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X + 2 = (X^4 + 2X^2 + 1)(3X-2) - 8X^3 + 4X^2 - 2X + 4.$$

Donc

$$F(X) = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{X^4 + 2X^2 + 1} = 3X - 2 + \frac{-8X^3 + 4X^2 - 2X + 4}{(X-i)^2(X+i)^2}.$$

En particulier la partie entière de F est $3X - 2$.

5) Alors, puisque F a deux pôles doubles i et $-i$, la décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$F(X) = 3X - 2 + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

Chapitre 5

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Déterminer la forme irréductible des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) \coloneqq \dfrac{2X^2 - 10X + 12}{3X^2 - 9X + 6}$,

2) $F_2(X) \coloneqq \dfrac{X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 + X + 2}$,

3) $F_3(X) \coloneqq \dfrac{12X^2 + 5X - 3}{X^3 + 3X^2 + 4X}$,

4) $F_4(X) \coloneqq \dfrac{X^3 - X^2 - 4X + 4}{X^6 - X^4 - 16X^2 + 16}$.

Exercice 2.

Déterminer la partie entière des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) \coloneqq \dfrac{2X^2 + 3X + 5}{X^3 + 4X - 1}$,

2) $F_2(X) \coloneqq \dfrac{X^2 - X - 1}{X + 1}$,

3) $F_3(X) \coloneqq \dfrac{3X^3 + 16X^2 - 6X - 4}{X^2 + 6X + 2}$,

4) $F_4(X) \coloneqq \dfrac{X^5 + 3X^4 + 11X^3 + 16X^2 + 23X + 6}{X^3 + 2X^2 + 3X}$.

Exercice 3.

Pour les fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous.

1. Déterminer leur forme irréductible.
2. Justifier que la partie entière de leur forme irréductible soit nulle.
3. Donner la forme de leurs décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$.

1) $F_1(X) \coloneqq \dfrac{1}{X(X^2 + 1)}$,

2) $F_2(X) \coloneqq \dfrac{2X + 1}{(X - 3)(X^2 + 1)^2}$,

3) $F_3(X) \coloneqq \dfrac{3X^7 + 5X^5 + 25X^3 + 2}{(X^4 - 1)^2}$,

4) $F_4(X) \coloneqq \dfrac{1}{X(X - 1)^5}$.

Exercice 4.

Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$, puis sur $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ ci-dessous :

1) $F_1(X) \coloneqq \dfrac{2X^3 + X^2 - 5X - 5}{X^2 - X - 2}$,

2) $F_2(X) \coloneqq \dfrac{X^3 - 8X^2 + 18X - 12}{X^2 - 3X + 2}$,

3) $F_3(X) \coloneqq \dfrac{X^4 - 3X^2 + 6X - 4}{X^3 - 2X^2 + 2X - 1}$,

4) $F_4(X) \coloneqq \dfrac{X^5 + 3X^3 + X^2 + X + 1}{(X^2 + 1)^2}$.

Chapitre 5 - Séquence 2

Détermination des coefficients de la décomposition en éléments simples

3 Méthodes de détermination des coefficients

Notation

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $a \in \mathbb{K}$. Lorsque l'on évalue F en a, on note

$$[F(X)]_{X=a}.$$

Autrement dit, $[F(X)]_{X=a} = F(a)$.

3.1 Méthode des pôles simples

Cette méthode permet d'obtenir un coefficient pour un élément simple de première espèce.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible ayant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle *simple*. Alors, on a :

$$F(X) = \frac{P(X)}{(X-\alpha)Q_1(X)},$$

où $(P, Q_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$. La forme de F en produit d'éléments simples s'écrit :

$$F(X) = \underbrace{E(X)}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{c}{X-\alpha}}_{\substack{\text{partie polaire} \\ \text{associée à } \alpha}} + \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\substack{\text{parties polaires} \\ \text{associées aux autres pôles}}}.$$

Méthode – *Pôles simples*

On va déterminer $c \in \mathbb{K}$ tel que

$$\frac{P(X)}{(X-\alpha)Q_1(X)} = E(X) + \frac{c}{X-\alpha} + \mathcal{P}(X).$$

1) On multiplie l'égalité précédente par $(X-\alpha)$:

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = (X-\alpha)E(X) + c + (X-\alpha)\mathcal{P}(X).$$

2) On évalue en α :

$$\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = [(X-\alpha)F(x)]_{X=\alpha} = \underbrace{[(X-\alpha)]_{X=\alpha}}_{=0} E(\alpha) + c + \underbrace{[(X-\alpha)]_{X=\alpha}}_{=0} \mathcal{P}(\alpha) = c.$$

On en déduit $c = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

Exemples

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X-1)}$ s'écrit

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)}.$$

Les pôles 0 et 1 sont simples, on peut donc appliquer la méthode précédente.

- ▷ On multiplie par X :

$$\frac{1}{X-1} = a + X\frac{b}{(X-1)},$$

puis on évalue en 0 :

$$\underbrace{\left[\frac{1}{X-1}\right]_{X=0}}_{=-1} = a + \underbrace{\left[X\frac{b}{(X-1)}\right]_{X=0}}_{=0},$$

ce qui donne $a = -1$.

- ▷ On multiplie par $X-1$:

$$\frac{1}{X} = (X-1)\frac{a}{X} + b,$$

puis on évalue en 1 :

$$\underbrace{\left[\frac{1}{X}\right]_{X=1}}_{=1} = \underbrace{\left[(X-1)\frac{a}{X}\right]_{X=1}}_{=0} + b,$$

ce qui donne $b = 1$.

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}.$$

On remarque qu'il n'a pas été nécessaire de faire le moindre calcul.

Remarque

Cette méthode est aussi efficace pour déterminer le coefficient c de l'élément simple d'ordre maximal associé à un pôle multiple. Au lieu de multiplier par $(X-\alpha)$, on multiplie par $(X-\alpha)^m$, où α est un pôle d'ordre m et on évalue en α.
Dans ce cas, cette méthode ne s'appliquera pas pour les autres éléments simples liés à ce pôle.

Exemple

Soit $F(X) \coloneqq \dfrac{1}{X^2(X-1)^2} \in \mathbb{R}(X)$.
La décomposition en éléments simples de F est

$$F(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^2} = \underbrace{\frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X^2}}_{\substack{\text{partie polaire}\\\text{associée à 0}}} + \underbrace{\frac{c_3}{X-1} + \frac{c_4}{(X-1)^2}}_{\substack{\text{partie polaire}\\\text{associée à 1}}},$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;4]\!]$, sont à déterminer.

- ▷ On multiplie par X^2 puis on évalue en 0 : $c_2 = -1$.

▷ On multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 : $c_4 = 1$.

Au final, on a :
$$F(X) = \frac{c_1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{c_3}{(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2},$$
et les coefficients c_1 et c_3 sont à déterminer par d'autres méthodes.

Exercice 1.

Décomposer en éléments simples la fraction $F(X) := \dfrac{X^2+X-1}{X^3+3X^2+2X} \in \mathbb{R}(X)$.

3.2 Méthode des limites infinies

Méthode

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que *sa partie entière est nulle.*

1) On écrit la décomposition en éléments simples de F.

2) On calcule la limite
$$\lim_{X\to\infty} XF(X)$$

3) On en déduit une relation sur les coefficients.

Exemple

La forme de la décomposition en éléments simples de $F(X) := \dfrac{X+1}{(X-1)^2}$ est
$$\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$
Par la méthode des pôles simples, on obtient $b = 2$ (à faire en exercice).

En multipliant par X, on a
$$\frac{X^2+X}{(X-1)^2} = \frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{(X-1)^2}.$$
En prenant la limite pour $X \to \infty$, on obtient
$$\underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{X^2+X}{(X-1)^2}}_{=1} = \underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{aX}{X-1}}_{=a} + \underbrace{\lim_{X\to\infty} \frac{bX}{(X-1)^2}}_{=0}.$$
d'où $a = 1$. Au final,
$$F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}.$$

Remarque

Lorsque F admet une partie entière E non nulle, on peut appliquer la méthode à $F - E$ c'est-à-dire on calcule la limite
$$\lim_{X\to\infty} X\left(F(X) - E(X)\right).$$

Exercice 2.

Décomposer en éléments simples la fraction $F(X) \coloneqq \dfrac{3X-1}{X^3+2X^2+X} \in \mathbb{R}(X)$.

3.3 Méthode d'évaluations

Lorsqu'il ne reste qu'un ou deux coefficients de la décomposition en éléments simples à déterminer, il suffit d'évaluer la fraction rationnelle et sa décomposition en éléments simples en des valeurs adéquates de X.

Exemple

La fraction rationnelle

$$F(X) \coloneqq \frac{2X^2+1}{(X-1)^2}$$

a un pôle double qui est 1 et qui n'annule pas le numérateur : c'est une fraction irréductible. Par contre le degré du numérateur n'est pas strictement plus petit que celui du dénominateur : elle possède une partie entière.
La forme de la décomposition en éléments simples est donc :

$$F(X) = E(X) + \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$

En effectuant la division euclidienne, on a :

$$F(X) = 2 + \frac{4X-1}{(X-1)^2} = 2 + \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$

Par la méthode des pôles simples, on obtient $b = 3$.
Pour obtenir a, on évalue $F(X)$ en 0, ce qui donne

$$\underbrace{\left[\frac{2X^2+1}{(X-1)^2}\right]_{X=0}}_{=1} = 2 + \underbrace{\left[\frac{a}{X-1}\right]_{X=0}}_{=-a} + \underbrace{\left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=0}}_{=3},$$

d'où $1 = 5 - a$, donc $a = 4$. Finalement, on a

$$F(X) = 2 + \frac{4}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2}.$$

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples, en utilisant les méthodes précédentes, la fraction

$$F(X) \coloneqq \frac{1}{(X^2-1)(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

3.4 Méthode des pôles complexes conjugués

La méthode des pôles complexes conjugués s'applique lorsque la décomposition en éléments simples contient un élément simple de seconde espèce. On explique la méthode directement sur un exemple.

Exemple

Considérons la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) := \frac{X^2}{(X^2+X+1)(X-1)(X+1)} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}.$$

La méthode des pôles simples donne $c = \dfrac{1}{6}$ et $d = -\dfrac{1}{2}$. Il reste les coefficients a et b de l'élément simple de deuxième espèce à déterminer.
Soit $\rho \in \mathbb{C}$ une racine de X^2+X+1. En multipliant $F(X)$, par X^2+X+1, on a

$$\frac{X^2}{(X-1)(X+1)} = aX + b + (X^2+X+1)\left(\frac{c}{X-1} + \frac{d}{X+1}\right).$$

En évaluant en ρ les deux termes de l'égalité, on obtient

$$\underbrace{\left[\frac{X^2}{(X-1)(X+1)}\right]_{X=\rho}}_{=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}} = \underbrace{[aX+b]_{X=\rho}}_{=a\rho+b} + \underbrace{\left[(X^2+X+1)\left(\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}\right)\right]_{X=\rho}}_{=0},$$

ce qui donne

$$\frac{\rho^2}{\rho^2-1} = a\rho + b \iff \rho^2 = (a\rho+b)(\rho^2-1).$$

Puisque ρ est une racine de X^2+X+1, on a $\rho^2+\rho+1=0$, c'est-à-dire $\rho^2 = -\rho-1$, d'où

$$-\rho-1 = (a\rho+b)(-\rho-2) = -a\rho^2+(-2a-b)\rho-2b = -a(-\rho-1)+(-2a-b)\rho-2b = -(a+b)\rho+a-2b.$$

Par identification, on en déduit :

$$-(a+b)\rho + (a-2b) = -\rho-1 \iff \begin{cases} a+b &= 1, \\ a-2b &= -1, \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{3}, \\ b &= \frac{2}{3}. \end{cases}$$

D'où :

$$F(X) = \frac{X^2}{(X^2+1)(X^2-1)} = \frac{1}{3}\frac{X+2}{X^2+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+1}.$$

Remarque

Tout comme la méthode des pôles simples, cette méthode est aussi efficace pour déterminer les coefficients a_m et b_m de l'élément simple associé à un pôle multiple de seconde espèce d'ordre maximal m :

$$\frac{a_mX+b_m}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}.$$

Au lieu de multiplier par $X^2+\beta X+\gamma$, on multiplie par $(X^2+\beta X+\gamma)^m$ et on évalue en ρ, où ρ est une racine de $X^2+\beta X+\gamma$.

Exercice 4.

Retrouver le résultat de l'exercice précédent, en utilisant cette méthode.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Sa décomposition en éléments simples est

$$F(X) = \frac{X^2 + X - 1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X+1} + \frac{c_3}{X+2},$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;3]\!]$, sont à déterminer.

- $\triangleright$ On multiplie par X puis on évalue en 0 : $c_1 = \dfrac{-1}{2}$.
- $\triangleright$ On multiplie par $(X+1)$ puis on évalue en -1 : $c_2 = 1$.
- $\triangleright$ On multiplie par $(X+2)$ puis on évalue en -2 : $c_3 = \dfrac{1}{2}$.

Au final, on a :

$$F(X) = \frac{-1}{2}\frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X+2)}.$$

Correction de l'Exercice 2.

La forme de la décomposition en éléments simples de $F(X) := \dfrac{3X-1}{X^3 + 2X^2 + X}$ est

$$\frac{3X-1}{X(X+1)^2} = \frac{c_1}{X} + \frac{c_2}{X+1} + \frac{c_3}{(X+1)^2}.$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;3]\!]$, sont à déterminer.

- $\triangleright$ On multiplie par X puis on évalue en 0 : $c_1 = -1$.
- $\triangleright$ On multiplie par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 : $c_3 = 4$.

On détermine le dernier coefficient par la méthodes des limites

$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} c_1 + \frac{c_2 x}{x+1} + \frac{c_3 x}{(x+1)^2}.$$

d'où

$$0 = c_1 + c_2 \quad \text{et} \quad c_2 = 1.$$

Ainsi

$$F(X) = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{4}{(X+1)^2}.$$

Correction de l'Exercice 3.

La forme de la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{X+1} + \frac{c_3 X + c_4}{X^2+1}.$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;4]\!]$, sont à déterminer.

- $\triangleright$ On multiplie par $X-1$ puis on évalue en 1 : $c_1 = \frac{1}{4}$.
- $\triangleright$ On multiplie par $X+1$ puis on évalue en -1 : $c_2 = \frac{-1}{4}$.
- $\triangleright$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{c_1 x}{x-1} + \frac{c_2 x}{x+1} + \frac{c_3 x^2 + c_4 x}{x^2+1}$.

Ainsi, $0 = c_1 + c_2 + c_3$ d'où $c_3 = 0$.

▷ On détermine c_4 par évaluation de F en 0. On obtient $-1 = -c_1 + c_2 + c_4$ d'où $c_4 = \frac{-1}{2}$.

Finalement, on a

$$F(X) = \frac{1}{4}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2+1}.$$

Correction de l'Exercice 4.

La forme de la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{X+1} + \frac{c_3X+c_4}{X^2+1}.$$

où $c_k \in \mathbb{R}$, pour $k \in [\![1;4]\!]$, sont à déterminer.

La méthode des pôles simples nous a donné $c_1 = \dfrac{1}{4}$ et $c_2 = -\dfrac{1}{4}$. Il reste les coefficients c_3 et c_4 de l'élément simple de deuxième espèce à déterminer.

En multipliant $F(X)$, par X^2+1, on obtient

$$\frac{1}{X^2-1} = (X^2+1)\left(\frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{X+1}\right) + c_3X + c_4.$$

Soit $\rho \in \mathbb{C}$ une racine de X^2+1. En évaluant en ρ les deux termes de l'égalité, on obtient

$$\underbrace{\left[\frac{1}{X^2-1}\right]_{X=\rho}}_{=\frac{1}{\rho^2-1}} = \underbrace{\left[(X^2+1)\left(\frac{c_1}{X-1} + \frac{c_2}{X+1}\right)\right]_{X=\rho}}_{=0} + \underbrace{[c_3X+c_4]_{X=\rho}}_{=c_3\rho+c_4},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\rho^2-1} = c_3\rho + c_4 \iff 1 = (c_3\rho+c_4)(\rho^2-1).$$

Puisque ρ est une racine de X^2+1, on a $\rho^2+1=0$, c'est-à-dire $\rho^2=-1$, d'où

$$1 = (c_3\rho + c_4)(-2).$$

Par identification, on en déduit :

$$-2c_3\rho - 2c_4 = 1 \iff \begin{cases} -2c_3 &= 0, \\ -2c_4 &= 1, \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 &= 0, \\ c_4 &= -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{4}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2+1},$$

comme on avait trouvé auparavant.

Chapitre 5

Feuille d'Exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ ci-dessous en utilisant, suivant les cas, les méthodes :

- ▷ des pôles simples,
- ▷ des limites infinies,
- ▷ d'évaluations.

1) $F_1(X) := \dfrac{X+3}{X(X-1)}$,

2) $F_2(X) := \dfrac{X^3-2X^2-X+3}{(X+1)(X+2)}$,

3) $F_3(X) := \dfrac{X+3}{X(X-1)^3}$,

4) $F_4(X) := \dfrac{X^3-3X^2+7X-3}{(X-1)(X^2-2X+3)}$.

Exercice 2.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ ci-dessous en utilisant la méthode des pôles complexes.

1) $F_1(X) := \dfrac{X^3-3X^2+7X-3}{(X-1)(X^2-2X+3)}$,

2) $F_2(X) := \dfrac{X^2+2X-1}{(X^2+X+1)^2(X-2)}$,

3) $F_3(X) := \dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$,

4) $F_4(X) := \dfrac{X^2+X+4}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ ci-dessous.

1) $F_1(X) := \dfrac{X^2-X-2}{(X-1)(X-2)^3(X^2-4X+5)}$,

2) $F_2(X) := \dfrac{-2X-7}{(X+1)^2(X^2+4X+8)}$.

Exercice 4.

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de $\mathbb{R}[X]$ suivante :

$$F(X) := \frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$

2) En déduire la somme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Rappel

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$ admet sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$ les primitives suivantes :

- $\triangleright$ Si $n = 1$, $x \mapsto \ln|x-\alpha|$,
- $\triangleright$ Si $n \geq 2$, $x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}}$.

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^3}\,dx$, **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-6x+1}{x^2-x-6}\,dx$, **3)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-8}{(x-5)^2}\,dx$.

Exercice 6.

Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int^x \frac{t^4}{t^2-4}\,dt$, **2)** $\displaystyle\int^x \frac{1}{(t+2)(t^2-4)}\,dt$.