Chapitre 6

Primitives et calculs d'intégrales : 2ème partie

Pré-requis

- ☐ Maîtriser la notion de fonction réelle et les opérations sur les fonctions.
- ☐ Savoir calculer des dérivées de fonctions réelles.
- ☐ Connaître les primitives des fonctions usuelles.
- ☐ Savoir calculer une primitive d'une composée usuelle.
- ☐ Savoir réaliser une intégration par parties.

Objectifs

- ☐ Apprendre à réaliser une intégration par changement de variable.

Sommaire

Chapitre 6 - Séquence 1

Intégration par changement de variable

L'objectif de cette séquence est d'apprendre à transformer une intégrale en effectuant un changement de variable qui permette de se ramener au calcul d'une intégrale plus simple.

Notation

Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

1 Changement de variable

Rappel

On dit qu'une fonction u définie sur I est continûment dérivable sur I si u est dérivable sur I et si u' est continue sur I. On dit aussi que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on écrit $u \in \mathcal{C}^1(I)$.

Théorème : *Formule d'intégration par changement de variable*

Soient $u : I \to J$ une fonction continûment dérivable sur I et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Remarques

- ▷ Dans l'intégrale de gauche, on intègre par rapport à la variable t et, dans l'intégrale de droite, on intègre par rapport à la variable x.

  Ainsi, dans le passage de l'intégrale de gauche à celle de droite, on a changé de variable. Ce qui justifie le terme de « formule d'intégration par changement de variable ».
- ▷ De plus, le terme $f(u(t))$ devenant $f(x)$ suggère que l'on a posé $x := u(t)$, ce qui signifie que l'on a $dx = u'(t)\,dt$ (notation de la dérivée issue de la physique).

  Donc l'intégrale de droite s'obtient en remplaçant

  $$u(t) \text{ par } x,\ u'(t)\,dt \text{ par } dx \text{ et les bornes } a, b \text{ par } u(a), u(b).$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur J. Comme $F' = f$, on a $(F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'$ sur I. Donc, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b (F \circ u)'(t)\,dt = \int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$

Or, une primitive de $(F \circ u)'$ est $F \circ u$, donc

$$\int_a^b (F \circ u)'(t)\,dt = \Big[(F \circ u)(t)\Big]_a^b = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big) = \Big[F(x)\Big]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Méthode – *Calcul d'une intégrale par changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt$ à l'aide d'un changement de variable, on procède comme suit :

1) Poser le changement de variable $x \coloneqq u(t)$.

2) Exprimer dt en fonction de dx selon la formule $dx = u'(t)\,dt$.

3) Appliquer la formule d'intégration par changement de variable :

- ▷ remplacer $u(t)$ par x,
- ▷ remplacer $u'(t)\,dt$ par dx,
- ▷ remplacer les bornes a, b par $u(a), u(b)$.

Ce qui donne :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Exemples

▷ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On souhaite calculer $\int_a^b \cos(t)e^{\sin(t)}\,dt$ à l'aide d'un changement de variable. On remarque que $\cos \mathrm{e}^{\sin} = \mathrm{e}^{\sin}\cos$ est de la forme $(f \circ u)\,u'$ avec

$$u := \sin, \quad u' = \cos \quad \text{et} \quad f := \exp\,.$$

1) On pose $x := \sin t$. Vérifions les hypothèses du théorème.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $u : t \mapsto \sin t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $u' = \cos$ est continue sur $[a;b]$, donc u est continûment dérivable sur $[a;b]$.

2) On a $dx = \cos(t)\,dt$.

3) On effectue le changement de variable en remplaçant $\sin(t)$ par x, $\cos(t)\,dt$ par dx et les bornes a, b par $\sin a$ et $\sin b$.

$$\int_a^b \cos(t)\,\mathrm{e}^{\sin(t)}\;dt = \int_a^b \mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t)\,dt = \int_{\sin a}^{\sin b} \mathrm{e}^x\;dx = \big[\,\mathrm{e}^x\,\big]_{\sin a}^{\sin b} = \mathrm{e}^{\sin b} - \mathrm{e}^{\sin a}\,.$$

▷ On souhaite calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\,dt$.
On reconnaît une forme $(f \circ u)\,u'$ en posant

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad u : t \mapsto \ln t, \quad u' : t \mapsto \frac{1}{t}.$$

1) On pose $x \coloneqq \ln t$. Vérifions les hypothèses du théorème.

- La fonction f est continue sur $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$.
- La fonction $u : t \mapsto \ln t$ est dérivable sur $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$ et $u' : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$. La fonction u est donc continûment dérivable sur $[\mathrm{e};\mathrm{e}^2]$.

2) On a $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

3) On applique le changement de variable en remplaçant $\ln t$ par x, $\dfrac{1}{t}\,dt$ par dx et les bornes e, e^2 par $\ln \mathrm{e}$ et $\ln \mathrm{e}^2$.

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\,dt = \int_{\ln \mathrm{e}}^{\ln \mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dt = \Big[\ln|x|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Remarque

Pour déterminer le bon changement de variable, il faut souvent choisir une fonction simple déjà présente dans l'intégrale ou dans le cas contraire, se ramener à des situations connues (voir le tableau des primitives usuelles).

Exercice 1.

Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$ en prenant $u := \ln t$ comme changement de variable.

2) $I_2 := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,dt$ en choisissant vous-même le changement de variable.

2 Application à l'intégration des éléments simples de seconde espèce.

Lors de l'intégration d'une fraction rationnelle, on est amené, après décomposition en éléments simples, à intégrer des éléments de secondes espèces,

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma},$$

avec $(a,b,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemple

Soit l'intégrale suivante :

$$I := \int_0^1 \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Puisque le polynôme $X^2 - 2X + 2$ a pour discriminant $4 - 8 = -4 < 0$, le dénominateur n'a pas de racine réelle et la fraction rationnelle $\dfrac{X+1}{X^2-2X+2}$ est déjà décomposée en éléments simples (de seconde espèce).
Calculons cette intégrale.

1) On fait apparaître le terme de la forme $\dfrac{u'}{u}$, où $u(x) := x^2 - 2x + 2$.
On a alors $u'(x) := 2x - 2$.

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{2}x+\mathbf{2}}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\frac{2x\,\mathbf{-2}+\mathbf{4}}{x^2-2x+2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\underbrace{\frac{2x-2}{x^2-2x+2}}_{=\frac{u'(x)}{u(x)}} + \mathbf{2}\frac{1}{x^2-2x+2}$$

2) L'intégrale devient alors (en utilisant $u(x) = x^2 - 2x + 2$)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|x^2-2x+2|\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx. \end{aligned}$$

3) Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$, on va effectuer un changement de variable.
On transforme $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ sous la forme $\dfrac{1}{t^2+1}$.
Pour cela, on détermine la forme canonique du polynôme $X^2 - 2X + 2$:

$$X^2 - 2X + 2 = \underbrace{(X-1)^2}_{=t^2} + 1.$$

On effectue alors le changement de variable $t \coloneqq x - 1$, ce qui donne $dt = dx$ et donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \Big[\arctan(t)\Big]_{-1}^0 = \frac{\pi}{4}.$$

4) On en déduit

$$I = -\frac{1}{2}\ln 2 + 2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Méthode – *Intégration d'un élément simple de seconde espèce d'ordre 1*

Soit $(a, b, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$ avec $\beta^2 - 4\gamma < 0$. On souhaite calculer une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma}.$$

1) On pose $u(x) \coloneqq x^2 + \beta x + \gamma$, puis on détermine $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{ax+b}{x^2+\beta x+\gamma} = c\underbrace{\frac{u'(x)}{u(x)}}_{\text{primitive connue}} + \frac{d}{x^2+\beta x+\gamma}.$$

2) En effectuant un changement de variable, on réécrit $\dfrac{d}{x^2+\beta x+\gamma}$ sous la forme

$$\frac{d}{x^2+\beta x+\gamma} = \frac{e}{t^2+1},$$

où $e \in \mathbb{R}$.

3) On calcule l'intégrale en sachant qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$ et qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $t \mapsto \arctan(t)$.

Exemple

Calculons l'intégrale

$$I \coloneqq \int_1^2 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\,dx.$$

On a

$$\frac{2X+3}{X^2-X+1} = \frac{2X-1+4}{X^2-X+1} = \frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{4}{X^2-X+1}.$$

De plus, la forme canonique de X^2-X+1 est

$$X^2-X+1 = \left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+1\right).$$

On note $\alpha \coloneqq \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, alors

$$X^2-X+1 = \frac{3}{4}\left(\left(\alpha X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1\right).$$

On en déduit, en effectuant le changement de variable $t \coloneqq \alpha x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ dans la 2ième intégrale,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-x+1}\,dx + 4\int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \Big[\ln|x^2-x+1|\Big]_1^2 + \frac{16}{3}\int_1^2 \frac{1}{\left(\alpha x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}\,dx \\
&= \Big[\ln|x^2-x+1|\Big]_1^2 + \frac{16}{3\alpha}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \ln 7 - \ln 3 + \frac{16}{3\alpha}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 2.

Déterminer

$$I \coloneqq \int_4^7 \frac{10}{(x-3)(x^2-8x+25)}\,dx.$$

3 Changement de variable bijectif

La formule de changement de variable vue précédemment à pour défaut qu'il faut pouvoir reconnaître une forme du type $(f \circ u)\,u'$.

Parfois, on utilise cette formule en la lisant de la droite vers la gauche, c'est-à-dire

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt,$$

sans que la fonction u présente dans les bornes soit connue.

Le problème est alors de pouvoir identifier les bornes a, b de l'intégrale de droite. Un moyen efficace est alors d'utiliser un changement de variable $t \mapsto u(t)$ bijectif.

Corollaire : *Changement de variable bijectif*

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle J et $u : I \to J$ une fonction bijective et continûment dérivable sur l'intervalle I. Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in J^2$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$

Remarque

Sous cette forme, la formule d'intégration par changement de variable ne nécessite pas de reconnaître une forme $(f \circ u)\,u'$, il suffit juste de savoir déterminer une nouvelle variable pouvant simplifier l'intégrale.

Preuve. Découle du théorème de changement de variable en posant $\alpha := u(a)$, $\beta := u(b)$ et en utilisant le fait que u est bijective de J sur I □

Méthode – *Calcul d'une intégrale par changement de variable*

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ à l'aide d'un changement de variable, on procède comme suit :

1) Poser $u(t) := x$ avec u une fonction *bijective*.

2) Exprimer dx en fonction de dt selon la formule $dx = u'(t)\,dt$.

3) Déterminer u^{-1} et en déduire $a := u^{-1}(\alpha)$, $b := u^{-1}(\beta)$.

4) Appliquer la formule d'intégration par changement de variable en remplaçant x par $u(t)$, dx par $u'(t)\,dt$ et les bornes α, β par a, b :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt.$$

Exemple

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

On ne reconnaît pas de forme $(f \circ u)u'$. La quantité à intégrer est $y := \sqrt{1 - x^2}$, donc $y^2 + x^2 = 1$. Cette égalité rappelle l'égalité $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, ce qui permet de trouver le changement de variable adéquat.

1) On pose $x := \sin(t)$. Vérifions les hypothèses du corollaire.

- ▷ La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[0; 1]$.
- ▷ La fonction sin est continûment dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- ▷ La fonction sin est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.

2) On a $dx = \cos(t)\,dt$.

3) Puisque $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, les nouvelles bornes sont 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

4) On effectue le changement de variable en remplaçant x par $\sin t$, dx par $\cos(t)\,dt$ et les bornes $0, 1$ par $0, \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \qquad \left(\text{car } \cos(t) \geq 0 \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \qquad \left(\text{car } \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\right) \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Correction des Exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Posons $u \coloneqq \ln t$. D'où, $du = \frac{1}{t}\, dt$. Alors, par intégration par changement de variable, on a

$$I_1 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{\ln^2 t} \frac{1}{t}\, dt = \int_{\ln(\mathrm{e})}^{\ln(\mathrm{e}^2)} \frac{1}{u^2}\, du = \int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du = \Big[-\frac{1}{u} \Big]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

2) Posons $u \coloneqq \mathrm{e}^t$. D'où, $du = \mathrm{e}^t\ dt$. Alors, par intégration par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+(\mathrm{e}^t)^2}\, \mathrm{e}^t\ dt \\ &= \int_{\mathrm{e}^0}^{\mathrm{e}^1} \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+u^2}\, du = \Big[\arctan u \Big]_1^{\mathrm{e}} = \arctan(\mathrm{e}) - \arctan(1). \end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 2.

On pose $F(X) = \dfrac{10}{(X-3)(X^2-8X+25)}$. Le polynôme $X^2-8X+25$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simple est de la forme

$$\frac{10}{(X-3)(X^2-8X+25)} = \frac{a}{X-3} + \frac{bX+c}{X^2-8X+25}.$$

▷ Par la méthode des pôles simples, on obtient

$$\Big[(X-3)F(X) \Big]_{X=3} = a + \Big[(X-3)\frac{bX+c}{X^2-8X+25} \Big]_{X=3}$$

d'où $a = 1$.

▷ Par la méthodes des limites, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x-3} + \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2+cx}{x^2-8x+25}$$

d'où $a+b=0$ et $b=-1$.

▷ Par évaluation de la fraction en 4 on obtient

$$\frac{10}{9} = a + \frac{4b+c}{9}$$

d'où $c = 5$.

On en déduit que

$$\frac{10}{(X-3)(X^2-8X+25)} = \frac{1}{X-3} - \frac{X-5}{X^2-8X+25}.$$

De plus, la forme canonique de $X^2-8X+25$ est

$$X^2-8X+25 = (X-4)^2 + 9 = 9\left(\left(\frac{X-4}{3} \right)^2 + 1 \right).$$

On en déduit, en effectuant le changement de variable $t \coloneqq \dfrac{x-4}{3}$ dans la 2ième intégrale,

$$\begin{aligned}
I &= \int_4^7 \frac{1}{x-3}\,dx - \int_4^7 \frac{x-5}{x^2-8x+25}\,dx \\
&= \Big[\ln|x-3|\Big]_4^7 - \int_0^1 \frac{x-5}{9\left(\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1\right)}\,dx \\
&= \ln|4| - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(3t+4)-5}{t^2+1}\,dt \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3t-1}{t^2+1}\,dt \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_0^1 \\
&= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{3}\Big(\arctan(1) - \arctan(0)\Big) \\
&= \frac{3}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Feuille d'exercices

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t\sin(t^2)\,dt$ en posant $x := t^2$,

2) $I_2 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{e^3} \frac{1}{t\ln t}\,dt$ en posant $x := \ln(t)$,

3) $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt$ en posant $x := \dfrac{1}{t}$,

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,dt$ en posant $x := \exp(t)$,

5) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 t^2(1+\mathrm{e}^{t^3})\,dt$ en posant $x := t^3$,

6) $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt$ en posant $x := \sqrt{t}$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1) $I_1 := \displaystyle\int_0^1 t\exp(t^2)\,dt$,

2) $I_2 := \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{e}^{\cos(t)}\,dt$,

3) $I_3 := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt$.

4) $I_4 := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,dt$.

5) $I_5 := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \frac{1+\cos(\ln t)}{t}\,dt$,

Exercice 3.

Calculer, à l'aide d'un changement de variable suivi d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \displaystyle\int_3^8 \mathrm{e}^{\sqrt{t+1}}\,dt$,

2) $I_2 := \displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{t})\,dt$,

3) $I_3 := \displaystyle\int_0^1 t^3\exp(t^2)\,dt$,

4) $I_4 := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\,dt$,

5) $I_5 := \displaystyle\int_0^1 \arctan(\sqrt{t})\,dt$.

Exercice 4.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et impaire. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période T. Montrer que, pour tout réel a, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 := \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$, **2)** $I_2 := \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,dt$, **3)** $I_3 := \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$,

4) $I_4 := \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$, **5)** $I_5 := \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t\cos(t^2+\pi)\,dt$, **6)** $I_6 := \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

Exercice 6.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1+\cos(\ln x)}{x}$

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

Exercice 7.

La *règle de Bioche* est une règle pour effectuer des changements de variable dans le cas des fonctions rationnelles trigonométriques. Considérons une fonction f définie par

$$f(t) := F(\sin t, \cos t),$$

où $F(\sin t, \cos t)$ est une expression rationnelle ne dépendant que de $\sin t$ et $\cos t$. Il est possible de poser les changements de variable suivants :

- ▷ si $f(-t) = -f(t)$, poser $x := \cos t$ et utiliser la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
- ▷ si $f(\pi - t) = -f(t)$, poser $x := \sin t$ et utiliser la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
- ▷ si $f(\pi + t) = f(t)$, poser $x := \tan t$ et utiliser les relations

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} \quad \text{et} \quad \sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}.$$

- ▷ sinon, poser $x := \tan(\frac{t}{2})$ et utiliser les relations

$$\cos t = \frac{1-\tan^2(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{2\tan(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})}.$$

Appliquer la régle de Bioche pour déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1 : t \mapsto \cos^5 t$, **2)** $f_2 : t \mapsto \cos^3 t \sin^2 t$, **3)** $f_3 : t \mapsto \tan^2 t$,

4) $f_4 : t \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 t \cos^2 t}$, **5)** $f_5 : t \mapsto \dfrac{1}{1+\sin t}$, **6)** $f_6 : t \mapsto \dfrac{1}{\sin^4 t}$,

7) $f_7 : t \mapsto \dfrac{\tan t}{1+\cos t}$.

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$, **2)** $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$.

Exercice 9.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable approprié.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\operatorname{ch} t}\, dt$,

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}\, dt$.

Exercice 10.

Appliquer la règle de Bioche pour calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) - 5\sin(t) + 6}\, dt$,

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(t)}{1+\cos(t)}\, dt$,

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) - 2}{\sin(t)}\, dt$,

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{1+\tan(t)}\, dt$,

Exercice 11.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) \coloneqq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{(t^2+1)^n}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

3) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\, dt.$$

En déduire, en faisant une intégration par parties, que pour $n \geq 2$:

$$I_n(x) = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

4) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I_2(x)$, puis $I_3(x)$.