Chapitre 1

Les fonctions réelles

Pré-requis

- ☐ Maîtriser les notions d'ensembles et leurs opérations.
- ☐ Savoir résoudre des équations et des inéquations.
- ☐ Connaître les fonctions usuelles et leurs propriétés.

Objectifs

- ☐ Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction (en particulier pour une fonction composée).
- ☐ Maîtriser les opérations sur les limites.
- ☐ Maîtriser les outils pour lever les indéterminations pour le calcul d'une limite.
- ☐ Connaître les limites remarquables.
- ☐ Connaître la notion de continuité d'une fonction.

Sommaire

Important

Ce chapitre est accompagné d'une fiche contenant toutes les informations sur les fonctions usuelles. Elle est à connaître **par cœur**.

Chapitre 1 - Séquence 1

Les fonctions réelles

1 Généralités sur les fonctions réelles

Définitions : *Fonction réelle, domaine de définition, image, antécédent*

- ▷ Soit $D \subset \mathbb{R}$. Une **fonction réelle** de D dans $\mathbb{R}$ (ou plus simplement une **fonction réelle**) est une relation qui à tout nombre $x \in D$ associie un unique réel noté $f(x)$. On note
$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : x \mapsto f(x)$$
- ▷ On appelle **domaine de définition** (ou **ensemble de définition**) de f, noté D_f, l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
- ▷ Si $x \in D_f$, le réel $y = f(x)$ est appelé l'**image** de x par f. L'ensemble de toutes les images de x par f est appelé **ensemble image** et est noté $f(D_f)$.
- ▷ Soit $y \in \mathbb{R}$. Tout élément $x \in D_f$ tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y par f.

Exemples

- ▷ Dans le Chapitre Trigonométrie (Algèbre de base), on a défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les réels $\cos x$ et $\sin x$. Ainsi, on peut définir les fonctions **cosinus** ($\cos : x \mapsto \cos x$) et **sinus** ($\sin : x \mapsto \sin x$), de domaines de définition $D_{\cos} = D_{\sin} = \mathbb{R}$.
- ▷ L'équation $\sin x = 1$ a pour solutions $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, les antécédents de 1 par la fonction sinus sont les réels $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- ▷ Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \ln x$. Le logarithme n'est défini que pour des nombres strictement positifs, donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$. De plus, on a $f(1) = \ln 1 = 0$, donc l'image de 1 par f est 0. On a $f(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} = 1$, donc un antécédent de 1 est e.
- ▷ Soit la fonction α définie par $\alpha : t \mapsto t^2$. On a $\alpha(-2) = \alpha(2) = 4$, donc 4 admet -2 et 2 comme antécédents par α.

Remarque

Tout élément de $\mathbb{R}$ peut posséder aucun, un ou plusieurs antécédents par f. En revanche, l'image d'un élément de D_f est forcément unique.

Attention

Le nom donné aux fonctions ou aux variables n'a pas d'importance, il doit juste être cohérent lors de son utilisation. Par exemple, si la fonction s'appelle g, son domaine de définition est noté D_g (et non D_f).
De plus, il ne faut pas confondre f, le nom d'une fonction, et $f(x)$ l'image de x par f.

Exemples

- ▷ Soit la fonction réelle f définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. L'inverse d'un réel x existe si et seulement si $x \neq 0$, donc
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$$
- ▷ Soit la fonction réelle g définie par $g : x \mapsto x^2$. On peut calculer le carré de n'importe quel réel x, donc
$$D_g = \mathbb{R}.$$

Exercice 1.

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^3$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \tan x$,

4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \exp(x)$, **6)** $f_6 : x \mapsto \ln x$.

Définition : *Courbe représentative*

Soit f une fonction réelle. Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$ est appelé **courbe représentative** (ou **graphe**) de f et est noté $\mathcal{C}_f$.

Remarque

Tout comme les domaines de définition, les graphes des fonctions usuelles sont donnés dans la fiche des fonctions usuelles.

2 Opérations sur les fonctions

Définition : *Égalité de fonctions*

Soient f et g deux fonctions réelles.
On dit que f **est égale à** g, noté $f = g$, si $D_f = D_g = D$ et, pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.
Autrement dit,
$$f = g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} D_f = D_g = D \\ \forall\, x \in D, \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Attention

Il ne faut pas oublier la condition $D_f = D_g$.

Exemple

On considère les fonctions $f : x \mapsto 2\ln x$ et $g : x \mapsto \ln(x^2)$. D'après les propriétés des logarithmes on sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^2) = 2\ln x,$$

donc on pourrait conclure que $f = g$. Cependant, cette conclusion est fausse.
En effet, on a $D_f = D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, on a $x^2 > 0$, donc $\ln(x^2)$ est défini et $D_g = \mathbb{R}^*$.
Puisque $D_f \neq D_g$, on a $f \neq g$.

Définitions : *Somme et produit de fonctions*

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $D_f = D_g = D$.

- La **somme** de f et de g est la fonction notée $f + g$ définie sur D par

$$\forall\, x \in D, \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

- La **multiplication de f par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction notée λf définie sur D par

$$\forall\, x \in D, \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

- Le **produit** de f par g est la fonction notée fg définie sur D par

$$\forall\, x \in D, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

Remarque

Ces définitions se généralisent au cas $D_f \neq D_g$. Dans ce cas, on définit les fonctions $f + g$ et fg simplement sur l'ensemble D des éléments communs à D_f et D_g, noté $D = D_f \cap D_g$.

Notation

Plus généralement, étant donné deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments communs à A et B est appelé l'**intersection** de A et B et est noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »). Cet ensemble est défini par :

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln x$.
On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$, et donc $D := D_f \cap D_g = \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $f + g$ et fg sont

alors définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \ln x \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Définitions : *Inverse et quotient de fonctions*

Soient f et g deux fonctions réelles et $D := D_f \cap D_g$. Supposons $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.

- L'**inverse** de g est la fonction notée $\frac{1}{g}$ de domaine de définition

$$D_{\frac{1}{g}} := \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}$$

  et définie par

$$\forall\, x \in D_{\frac{1}{g}}, \qquad \left(\frac{1}{g}\right)(x) := \frac{1}{g(x)}.$$

- Le **quotient** de f par g est la fonction $\frac{f}{g}$ de domaine de définition

$$D_{\frac{f}{g}} := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$$

  et définie par

$$\forall\, x \in D_{\frac{f}{g}}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Remarque

On peut aussi définir le quotient $\frac{f}{g}$ par $f\,\frac{1}{g}$.

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln x$. On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$. Comme g s'annule seulement en 1, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur

$$D = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \neq 1\right\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Définition : *Composition de fonctions*

Soient f et g deux fonctions réelles. La **composée** de g par f est la fonction notée $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : x \longmapsto g\big(f(x)\big).$$

Son domaine de définition est

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}\,.$$

Remarque

La structure de la fonction est :

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

Autrement dit, pour $x \in D_f$, on calcule $y := f(x)$, puis on calcule $g(y)$.

Remarques

- On définit de même $f \circ g$. Néanmoins, la fonction $g \circ f$ peut exister sans que la fonction $f \circ g$ existe, et réciproquement.
- En général,

$$g \circ f \neq f \circ g \quad \text{et} \quad D_{f\circ g} \neq D_{g\circ f}.$$

  On dit alors que l'opération $\circ$ n'est pas **commutative**.

Exemple

Soient les fonctions $f : x \mapsto x \ln x$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Alors, $g \circ f$ est définie par

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)) = g\,(x \ln x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Et, comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $D_g = \mathbb{R}^*$,

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \big\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f(x) \in \mathbb{R}^*\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \ln x \neq 0\big\}\,.$$

Or, $x \ln x \neq 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq 1$. Ainsi,

$$D_{g\circ f} = \big\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \neq 0, x \neq 1\big\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Exercice 2.

Soient les fonctions $f : x \mapsto x \ln x$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Déterminer le domaine de définition et l'expression de $f \circ g$.

Exercice 3.

Soient les fonctions $f : x \mapsto x - 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
Déterminer le domaine de définition de $g \circ f$ et $f \circ g$, puis leur expression.

Remarque

On verra dans la suite qu'au lieu de calculer $f \circ g$ pour des fonctions f et g données, on sera amené à réécrire une fonction h sous la forme $h = f \circ g$, où f et g sont à déterminer.

Exemple

Soit la fonction $h : x \mapsto \ln(x + 4)$. La fonction h est la composée des fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto x + 4$. En effet,

$$f \circ g : x \mapsto f\big(g(x)\big) = \ln(g(x)) = \ln\,(x + 4) = h(x).$$

De plus, comme $D_g = \mathbb{R}$ et $D_f = D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} D_h = D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+4>0\} = \left]-4;+\infty\right[\ . \end{aligned}$$

Exercice 4.

Montrer que les fonctions définies ci-dessous sont des composées de deux fonctions à déterminer et en déduire leurs domaines de définition.

1) $h_1 : x \mapsto \ln(1-x)$, **2)** $h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, **3)** $h_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x^2+1}$,

4) $h_4 : x \mapsto (\sin x)^3$, **5)** $h_5 : x \mapsto (\ln x)^2$, **6)** $h_6 : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) $D_{f_6} = \mathbb{R}$,

2) $D_{f_6} = \mathbb{R}^*$,

3) $D_{f_6} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,

4) $D_{f_6} = \mathbb{R}_+$.

5) $D_{f_6} = \mathbb{R}$.

6) $D_{f_6} = \mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'Exercice 2.

Comme $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $D_g = \mathbb{R}^*$, alors

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid g(x) \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} > 0\right\} = \mathbb{R}_+^*.$$

La fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x)\ln(g(x)) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Correction de l'Exercice 3.

Comme $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$, alors $D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. La fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{(f(x))^2 + 1} = \frac{1}{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

La fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x) - 1 = \frac{1}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2}{x^2+1}.$$

Donc, on a $g \circ f \neq f \circ g$.
Par ailleurs, $(fg)(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Ainsi, on a $fg \neq g \circ f$ et $fg \neq f \circ g$.

Correction de l'Exercice 4.

1) Posons $u : x \mapsto 1 - x$ et $f : x \mapsto \ln x$. Alors, $h_1 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$. Ainsi,

$$D_{h_1} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \in \mathbb{R}_+^*\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x > 0\} = \left]-\infty; 1\right[.$$

2) Posons $u : x \mapsto x + 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors, $h_2 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$. Ainsi,

$$D_{h_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \in \mathbb{R}^*\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

3) Posons $u : x \mapsto 2x^2 + 1$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors, $h_3 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$D_{h_3} = \mathbb{R}.$$

4) Posons $u : x \mapsto \sin x$ et $f : x \mapsto x^3$. Alors, $h_4 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$D_{h_4} = \mathbb{R}.$$

5) Posons $u : x \mapsto \ln x$ et $f : x \mapsto x^2$. Alors, $h_5 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}_+^*$ et $D_f = \mathbb{R}$. Ainsi,

$$D_{h_5} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid u(x) \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_+^*.$$

6) Posons $u : x \mapsto x^2 - 1$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors, $h_6 = f \circ u$. Or, $D_u = \mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$D_{h_6} = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \in \mathbb{R}_+\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\right\} = \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[.$$

Car, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[.$$

Chapitre 1

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{x+1}{1-3x}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$,

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \dfrac{1-2x}{5-x^2}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-x}$.

Exercice 2.

Déterminer la composée $f \circ g$ pour les fonctions f et g suivantes :

1) $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$, **2)** $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto 2x - 1$,

3) $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$, **4)** $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ et $g : x \mapsto \ln x$.

Exercice 3.

Soit u une fonction définie sur un domaine D_u. Déterminer les domaines de définition des fonctions définies par

1) $f_1 : x \mapsto \cos(u(x))$, **2)** $f_2 : x \mapsto u^3(x)$, **3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$,

4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{u(x)}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \ln(u(x))$, **6)** $f_6 : x \mapsto \exp(u(x))$.

Exercice 4.

1) Exprimer les fonctions définies ci-dessous comme des composées de deux fonctions à déterminer.

a) $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{3-2x}$, **b)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, **c)** $f_3 : x \mapsto \sin(\sqrt{x})$,

d) $f_4 : x \mapsto \ln(\ln x)$, **e)** $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$, **f)** $f_6 : x \mapsto (\ln x)^2$.

2) Déterminer le domaine de définition de ces fonctions.

Exercice 5.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \ln(5-7x)$, **2)** $f_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-3}{x^2+1}}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2-5x+6}$,

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln(2x+1)}{x^2-1}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^{\tan x}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-1-3x}{x^2-x-6}}$.

Exercice 6.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln x}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \ln^2(\mathrm{e}^x + 1)$,

4) $f_4 : x \mapsto \ln(\sqrt{x} - 2)$, **5)** $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1-x)}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \sin(\ln(5-2x))$,

7) $f_7 : x \mapsto \cos^3(\mathrm{e}^x + 1) + 1$, **8)** $f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$, **9)** $f_9 : x \mapsto \sqrt{\ln(x-3)}$.

Exercice 7.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in D$, $-x \in D$.

La fonction f est dite **paire** *sur D si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.*
La fonction f est dite **impaire** *sur D si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.*

1) Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \cos x$ sont paires.

2) Montrer que les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \tan x$ sont impaires.

3) Montrer que le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Exercice 8.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) Supposons que f et g sont deux fonctions impaires. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **a)** Donner une relation entre $g(-x)$ et $g(x)$. Puis appliquer la fonction f sur la relation.
- **b)** Justifier que $f(-g(x)) = -f(g(x))$. En déduire que $f \circ g$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si les fonctions f et g sont paires, alors la fonction $f \circ g$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

- ▷ *La fonction f est dite* **croissante** *sur D si pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- ▷ *La fonction f est dite* **décroissante** *sur D si pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

1) Soit f une fonction croissante sur $D \subset \mathbb{R}$.

- **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction λf est croissante sur D.
- **b)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Montrer que la fonction λf est décroissante sur D.

2) Soient f et g deux fonctions croissantes et positives sur $D \subset \mathbb{R}$. Soient $x, y \in D$ tels que $x < y$.

- **a)** Pourquoi l'inégalité $f(x) \leq f(y)$ est vérifiée ? En déduire que $f(x)g(x) \leq f(y)g(x)$?
- **b)** Similairement, montrer que l'inégalité $f(y)g(x) \leq f(y)g(y)$ est vérifiée.
- **c)** En utilisant les questions précédentes, justifier que la fonction fg est croissante sur D.

Limites

3 Définitions

Notation

Pour dire que a est soit un réel, soit $\pm\infty$, on note $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est nommé **droite réelle achevée** et s'écrit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ou $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$.

Définition : *Limite*

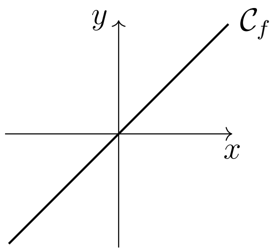
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I ou une borne de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a dans I, on écrit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

et on dit que la **limite** de f quand x tend vers a est égale à ℓ.

Exemples

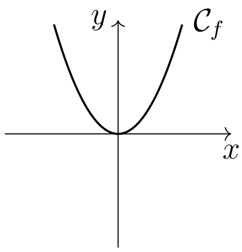
$f : x \mapsto x$, $D_f = \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

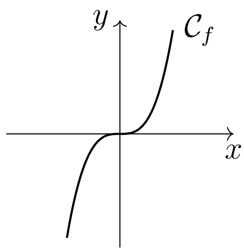
$f : x \mapsto x^2$, $D_f = \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

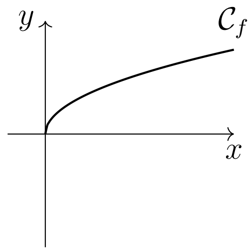
$f : x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f : x \mapsto \sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty[$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

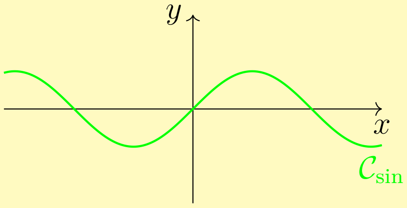
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

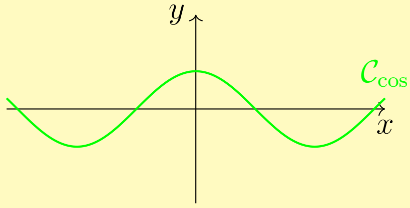
Remarque

Au lieu de dire « lorsque x tend vers a », on dit aussi « quand x tend vers a », « au point a » ou « en a ».

Attention

Certaines fonctions ne tendent ni vers un réel, ni vers $-\infty$, ni vers $+\infty$. On dit alors qu'elles n'admettent pas de limite.
C'est le cas, par exemple, des fonctions sin et cos qui n'admettent pas de limite en $+\infty$.





Définitions : *Limite à gauche et limite à droite*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I ou une borne de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
La fonction f admet ℓ comme limite **à gauche** de a si f tend vers ℓ, lorsque x tend vers a, avec $x < a$. On note indifféremment

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell.$$

La fonction f admet ℓ comme limite **à droite** de a si f tend vers ℓ, lorsque x tend vers a, avec $x > a$. On note indifféremment

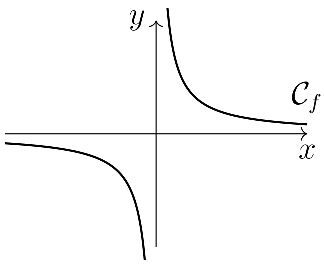
$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$

Notation

On note $x \to a^-$ lorsque x tend vers a avec $x < a$.
On note $x \to a^+$ lorsque x tend vers a avec $x > a$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^*$.
Notons qu'en 0 la limite à gauche et la limite à droite sont différentes :



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Propriété

Soient I un intervalle, a un réel de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell.$$

Remarques

- ▷ Pour montrer que f tend vers ℓ en a, on peut vérifier que f tend vers ℓ aussi bien à gauche qu'à droite de a.
- ▷ Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, on peut vérifier que f tend vers ℓ à gauche de a et f tend vers ℓ' à droite de a, mais que $\ell \neq \ell'$.

Remarque

Si f est définie en a et $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 2 \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2,$$

on peut conclure que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 1.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0.

4 Opérations sur les fonctions et limites

On donne ci-dessous la limite d'une somme $f + g$ de fonctions suivant les limites des fonctions f et g.

Notation

L'écriture **FI** signifie **forme indéterminée**.
Dans le cas d'une forme indéterminée, il n'existe pas de conclusion générale. Toutes les situations sont a priori possibles : on peut avoir une limite ℓ finie, la fonction peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou on peut avoir absence de limite.
Il faut donc traiter au cas par cas, pour lever l'indétermination.

Propriétés : *Limite d'une somme*

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $D_f = D_g = D$, $a \in D$ ou bien a est une borne de D, ℓ et ℓ' deux réels. On a :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***FI***

FI : *forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».*

Ces résultats restent vrais si x tend vers a^- ou a^+.

Exemples

▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + x^2$ en $+\infty$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2\right) = +\infty.$$

▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto x^2 + x^3$ en $-\infty$. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty,$$

donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ». On verra plus loin comment faire dans ce dernier cas pour calculer la limite.

Propriétés : *Limite d'un produit*

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $D_f = D_g = D$, $a \in D$ ou bien a est une borne de D, ℓ et ℓ' deux réels. On a :

$\lim\limits_{x\to a} f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f.g)$	$\ell.\ell'$	∞^*	∞^*	***FI***

∞^* **:** *$+\infty$ ou $-\infty$ est déterminée en appliquant la règle du signe du produit.*

FI : *forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».*

Ces résultats restent vrais si x tend vers a^- ou a^+.

Exemples

▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto (x-3)\dfrac{1}{x}$ en 0^+. On a :

$$\lim_{x\to0^+} (x-3) = -3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left((x-3)\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

- ▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$ en $-\infty$. On a :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+.$$

On a donc une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

Propriétés : *Limite d'un quotient*

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $D_f = D_g = D$, $a \in D$ ou bien a est une borne de D, ℓ et ℓ' deux réels. On a :

$\lim\limits_{x \to a} f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞^*	∞^*	***FI***	***FI***

∞^* **:** *$+\infty$ ou $-\infty$ est déterminée en appliquant la règle du signe du quotient.*

FI : *forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ »ou du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».*

Ces résultats restent vrais si x tend vers a^- ou a^+.

Remarques

- ▷ Lorsque le numérateur tend vers zéro et le dénominateur vers l'infini, le quotient tend vers zéro : 0^+ ou 0^- selon la règle des signes.
- ▷ Lorsque le numérateur tend vers l'infini et le dénominateur vers zéro, le quotient tend vers l'infini : $+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes.

Exemples

- ▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{x-3}{x}$ en 0^+. On a :

$$\lim_{x \to 0^+} (x-3) = -3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x = 0^+,$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x-3}{x}\right) = -\infty$.

- ▷ On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en 0. On a :

$$\lim_{x \to 0} (\sin x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x = 0.$$

On a donc une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Propriété : *Limites et compositions de fonctions*

Soient deux fonctions : f de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ ou bien a est une borne de I, $b \in J$ ou bien b est une borne de J et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \textit{et} \qquad \lim_{X \to b} g(X) = c,$$

alors

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c.$$

Exemple

On cherche à déterminer la limite de $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en 0^-. On a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0,$$

donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.

Exercice 2.

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2 - x)$, **2)** $\lim\limits_{x \to 2} \ln(2 - x)$, **3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

▷ pour $x < 0$, $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$, donc $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ <}} = -1$,

▷ pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} = 1$.

Puisque les deux limites à gauche et à droite sont différentes, on peut conclure que la fonction n'admet pas de limite en 0.

Correction de l'Exercice 2.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2-x) = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x \to 2} \ln(2-x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \ln(2-x) = -\infty$,

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Chapitre 1

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Compléter ce tableau.

$f(x)$	x	x^2	x^3	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^3}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$								

Exercice 2.

Déterminer les limites suivantes ou dire s'il s'agit de formes indéterminées :

1) $\lim\limits_{x\to0} \quad x^3+5$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \quad \dfrac{\sin x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0} \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$

4) $\lim\limits_{x\to2} \quad \dfrac{1}{(x-2)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \quad \sqrt{x}-1+\cos x$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad \dfrac{1}{x^2}+x-1$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x+\dfrac{1}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x^2-x+1$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad -\dfrac{2}{x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad \dfrac{x}{x+1}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad (2x-1)(x^5-1)$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad x\ln x$

15) $\lim\limits_{x\to2^-} \quad -\dfrac{1}{x-2}$

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x-3} & \text{si } x<3 \\ 1-\dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>3. \end{cases}$$

La fonction f a-t-elle une limite lorsque x tend vers 3 ?

Exercice 4.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \quad \sqrt{2x-3}$

2) $\lim\limits_{x\to0} \quad \sqrt{1-\mathrm{e}^x}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \quad \left(2x-1-\dfrac{1}{x}\right)^2$

4) $\lim\limits_{x\to0} \quad \left(2x-1+\dfrac{1}{x}\right)^2$

5) $\lim\limits_{x\to-2^-} \quad \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to1^+} \quad \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \quad \frac{1}{(x-2)\cos(x-2)}$ **8)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \quad \cos\left(\frac{2}{x+1}\right)$ **9)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \quad \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

Exercice 5.

Soit f définie par $f : x \mapsto 2x + |x-1|$.

1) Donner, par intervalles, une écriture de f ne contenant plus de valeur absolue.

2) En déduire les limites de f en $\pm\infty$.

Exercice 6.

Soit f définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

1) Vérifier que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est une forme indéterminée.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$.

3) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 7.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le **taux d'accroissement** d'une fonction f en a est la fonction τ_a définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad \tau_a(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

La fonction f est dite **dérivable** en a si

$$\lim_{x\to a} \tau_a(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie.}$$

Cette limite est appelée **dérivée** de f en a et on la note $f'(a)$.

1) Calculer et simplifier le taux d'accroissement pour les fonctions f suivantes :

a) $f : x \mapsto x$, **b)** $f : x \mapsto 2x-1$, **c)** $f : x \mapsto x^2$, **d)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

2) Calculer la limite des différents taux d'accroissement τ_a précédents lorsque x tend vers a.

3) En déduire que les fonctions f ci-dessus sont dérivables en a et préciser la valeur de la dérivée.

Exercice 8.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$.

1) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, montrer que

a) $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$, **b)** $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a)$.

2) **a)** Déterminer le taux d'accroissement τ_a pour la fonction uv au point a.

b) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{u(x)-u(a)}{x-a}v(x) + u(a)\frac{v(x)-v(a)}{x-a}.$$

c) Calculer les limites des expressions $\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}$, $v(x)$ et $\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a.

d) En déduire que uv est dérivable en a avec $(uv)'(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$.

Chapitre 1 - Séquence 3

Formes indéterminées et continuité d'une fonction

5 Formes indéterminées

Rappel – *Formes indéterminées*

Les formes indéterminées vues dans la séquence précédente sont :

$$\text{« } +\infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 0 \times \infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

En présence d'une forme indéterminée, il faut lever l'indétermination, lorsque c'est possible, en transformant l'écriture de la fonction de façon à pouvoir conclure. Dans cette séquence, on considère les transformations suivantes :

- ▷ la technique de mise en facteur du terme dominant,
- ▷ la technique de modification d'écriture, par exemple en réduisant au même dénominateur ou en utilisant la quantité conjuguée,
- ▷ la technique d'encadrement.

Définition : *Polynôme*

Une fonction **polynôme** de degré n, où n est un entier naturel, est une fonction de la forme

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels et $a_n \neq 0$.

Exemples

Les polynômes de degré 1, 2 et 3 sont, respectivement, de la forme :

▷ $x \mapsto ax + b$, ▷ $x \mapsto ax^2 + bx + c$, ▷ $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$,

où a, b, c, d sont des réels.

Propriété

La limite ***à l'infini*** *d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré (ou terme dominant).*

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 + x^3$. On étudie la limite de f en $-\infty$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

On écrit alors :

$$x^2 + x^3 = x^3\left(\frac{1}{x} + 1\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$, alors

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + x^3\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} + 1\right) = -\infty.$$

Définition : *Fraction rationnelle*

Une fonction **fraction rationnelle** est une fonction de la forme

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des fonctions polynômes.

Propriété

La limite ***à l'infini*** *d'une fonction fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.*

Exemple

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1 - 4x}{x^2 + 2}$. On étudie la limite de f en $+\infty$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 4x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2 = +\infty$. On est en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
Pour $x \neq 0$, on transforme les polynômes au numérateur et au dénominateur, en les factorisant par le terme de plus haut degré :

$$\frac{1 - 4x}{x^2 + 2} = \frac{x\left(\frac{1}{x} - 4\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\,\frac{\left(\frac{1}{x} - 4\right)}{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 4\right) = -4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 4}{1 + \frac{2}{x^2}} = -4$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\,\frac{\left(\frac{1}{x} - 4\right)}{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = 0^-.$$

Exercice 1.

Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x$,

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x + 1}{3x + 2}\right)$.

Définition : *Expression conjuguée*

Soit une expression mathématique de la forme $A + B$. L'**expression conjuguée** associée à $A + B$ est l'expression $A - B$.

Méthode — *Méthode du conjugué*

Pour tenter de lever une forme indéterminée d'une limite faisant intervenir des radicaux (racines carrées) :

- ▷ on multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée,
- ▷ on développe, en utilisant l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,
- ▷ on vérifie que l'indétermination est bien levée.

Exemple

On étudie la limite de $f : x \mapsto x + \sqrt{4 + x^2}$ lorque x tend vers $-\infty$.
On a

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{4 + x^2} = +\infty,$$

on est donc en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Tentons d'appliquer la méthode du conjugué pour lever cette indétermination.
Multiplions et divisons par l'expression conjuguée de $x + \sqrt{4 + x^2}$, c'est-à-dire par $x - \sqrt{4 + x^2}$.
Alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sqrt{4 + x^2} = x + \sqrt{4 + x^2} \cdot \frac{x - \sqrt{4 + x^2}}{x - \sqrt{4 + x^2}} \\ &= \frac{x^2 - (4 + x^2)}{x - \sqrt{4 + x^2}} = \frac{-4}{x - \sqrt{4 + x^2}}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} x - \sqrt{4 + x^2} = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{x - \sqrt{4 + x^2}} = 0$.

Exercice 2.

Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$,

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x + 1}}{x - 1}$.

Propriétés : *Dominance entre les fonctions - Croissances comparées*

Soient α, β deux réels positifs. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0^-, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty.$$

Remarque

Ce qu'il faut retenir de ces propriétés est :

« Les puissances de x dominent les puissances du logarithme »
« L'exponentielle domine les puissances de x. »

Exemple

On veut déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto 2x - \ln x$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $2x$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln x$. On a donc une forme indéterminée, qui sera leveé en utilisant les croissances comparées établies auparavant. Pour ce faire, transformons l'écriture de $f(x)$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = x\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{\ln x}{x} = 2$. Par produit, on obtient donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3.

Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x - x}{x}$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 - \mathrm{e}^x$.

Propriétés : *Limites remarquables en 0*

On a les limites remarquables suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Remarque

Ces limites sont à connaître par cœur.

Exercice 4.

Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$.

Propriété : *Comparaison à l'infini*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $]b;+\infty[$.

- ▷ *Si, pour tout $x \in\ ]b;+\infty[$, on a $g(x) \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

▷ *Si, pour tout* $x \in \left]b;+\infty\right[$ *, on a* $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$*, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Remarque

Les résultats restent vrais pour des limites en $-\infty$.

Exemple

On veut déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x - \sin x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq -\sin x$, donc $x - 1 \leq x - \sin x$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Propriétés : *Théorème des gendarmes*

Soit $\ell \in \mathbb{R}$*. Soient* f*,* g *et* h *trois fonctions définies sur un intervalle* I *telles que :*

$$\forall\ x \in I, \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si, pour toute borne α *du domaine* I*, on a*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = \ell,$$

alors,

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \ell.$$

Exemple

On veut calculer la limite de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\cos x$ en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{x}\cos x \leq \dfrac{1}{x}$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$, d'après le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cos x = 0.$$

Exercice 5.

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

6 Continuité d'une fonction

Définition : *Continuité d'une fonction en un point*

Soient f une fonction réelle et $a \in D_f$ ou une borne de D_f. La fonction f est dite **continue** en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remarque

Cette définition sous-entend que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.

Définition : *Continuité d'une fonction*

Soient f une fonction réelle et $D \subseteq D_f$.

- ▷ La fonction f est dite **continue** sur D si elle est continue en tout point $a \in D$.
- ▷ Une fonction continue sur D est aussi dite **de classe** $\mathcal{C}^0$ sur D, et on le note $f \in \mathcal{C}^0(D)$.

Exemples

- ▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^*$.
- ▷ La fonction

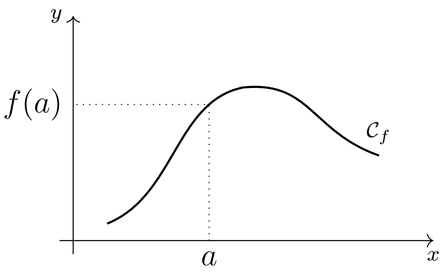
$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'existe pas, on peut conclure que f n'est pas continue en 1. Par contre, elle est continue sur $]-\infty; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[\ = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

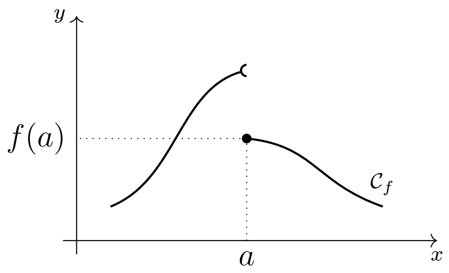
Remarque — *Interprétation géométrique*

Graphiquement, une fonction est continue sur un domaine D si le graphe de la fonction ne présente aucun saut : il est possible de tracer la courbe en continu « sans lever le stylo ».

Fonction continue en a



Fonction discontinue en a



Propriétés

▷ *Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

- *$f + g$, λf et $f\,g$ sont continues sur D,*
- *$\dfrac{f}{g}$ est continue partout où g ne s'annule pas.*

▷ *Soient f une fonction continue sur D et g une fonction continue sur une partie $E \subset \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subseteq E$. Alors, $g \circ f$ est continue sur D.*

Remarques

▷ Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

▷ Toute fonction construite comme somme, produit, quotient ou composée de fonctions usuelles est donc continue sur son domaine de définition.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}-2$ est la composée des fonctions $g : x \mapsto \sqrt{x}-2$ et $h : x \mapsto 4+x^2$. Or g et h sont continues sur, respectivement, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ comme sommes de fonctions continues donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
La fonction f est continue sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions continues.
On rappelle la limite remarquable $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
On définit alors f sur $\mathbb{R}$ tout entier, en ajoutant $f(0) := 1$. On obtient ainsi une fonction continue en 0, et donc continue partout.
On dit que l'on a **prolongé f par continuité** en 0.
On la note :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Soient x_0 et ℓ deux réels. Soit f définie autour de x_0 mais pas en x_0 et telle que $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.
Alors on prolonge f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) := \ell$.

Exercice 7.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ peut être prolongée par continuité en $x = 0$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x+1}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\pi+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\pi+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{\pi}{3}$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{3x+2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'Exercice 2.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$

2)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}\,\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})} \\
&= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 3.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x - x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - 1 = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 - \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = -\infty.$

Correction de l'Exercice 4.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}\,\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}x\sqrt{x} = 0.$

Correction de l'Exercice 5.

On veut calculer la limite de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin(x)$ en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\sin(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$, d'après le théorème des gendarmes, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sin(x) = 0.$$

Correction de l'Exercice 6.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{4+x^2}-2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}+2} \\
&= \frac{1}{4} = f(0).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, la fonction f est continue en 0.
De plus, f est continue pour tour $x \in \mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions continues.
Donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Correction de l'Exercice 7.

On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

car

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0.$$

On définit alors f sur $\mathbb{R}$ tout entier, en ajoutant $f(0) \coloneqq 0$.

Chapitre 1

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+5x$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x^3-3x^5$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\sqrt{x}+2-x^2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+4}$ **5)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x^2+2}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x}{x-x^5}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^6+2x^5-3x^3}{2x-x^2-x^3}$ **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{3x+2}\right)$ **9)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\,\mathrm{e}^x-1}{2\,\mathrm{e}^x+2}$

Exercice 2.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9+4x^2}-x$

3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+x$

Exercice 3.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-x}$ **3)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x-x$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x-3x}{3x^3}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

Exercice 4.

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^2+\sin(x)}{2x^2+1}.$$

1) Montrer que pour tout réel x, on a

$$\frac{x^2-1}{2x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2x^2+1}.$$

2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{4-2x}{-3-3x}}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x + \sin\left(\sqrt{x}\right)}{x}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

Exercice 7.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + \sin(x)}{x^2 + 1}$ **2)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2 - 1} - 3x$ **3)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$ **5)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-2x} - 1}{x}$ **6)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$

7) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}$ **8)** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$ **9)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

Exercice 8.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et sur quels intervalles ces fonctions sont continues.

1) $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, **2)** $f : x \mapsto |x|$,

3) $f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, **4)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 - |x|}$.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Déterminer sur quels intervalles la fonction f est continue.

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Donner, par intervalles, une écriture de f ne contenant plus de valeur absolue.

3) La fonction f est-elle continue en 0 ?

4) Déterminer, si elles existent, les limites de f en -1 et en 1.

5) Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ qui soit égale à f sur D_f ?