Chapitre 3

Primitives et calculs d'intégrales

Pré-requis

- ☐ Maîtriser la notion de fonction réelle et les opérations sur les fonctions.
- ☐ Savoir calculer des dérivées de fonctions réelles.

Objectifs

- ☐ Apprendre à calculer une primitive d'une composée usuelle.
- ☐ Apprendre à calculer des aires.
- ☐ Apprendre à réaliser une intégration par parties.

Sommaire

Chapitre 3 - Séquence 1

Primitives et intégration

Notation

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Primitives d'une fonction

Définition : *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur I.
Une **primitive** de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ *dérivable* sur I telle que

$$F' = f \text{ sur } I.$$

Exemples

- ▷ La fonction $F : x \mapsto x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 1$ car $F'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ La fonction $G : x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto 2x$ est car $G'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque – *Primitives de fonctions usuelles*

Les primitives des fonctions usuelles sont données dans la fiche « Fonctions usuelles ».

Exercice 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^5$,

2) $f_2 : x \mapsto -\sin x$,

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

4) $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Théorème : *Théorème fondamental de l'analyse*

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Remarques

- ▷ Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives (elles ne seront pas étudiées dans le cadre de ce cours).
- ▷ Si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité, comme le montre la proposition suivante.

Proposition

Soit f une fonction continue sur I, et soit F une primitive de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + k \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, une fonction G est une primitive de f si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$G = F + k.$$

Démonstration. Il faut prouver chaque implication du « si et seulement si ».

- ▷ On veut montrer que s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$, alors G est une primitive de f.
  Supposons donc qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$, alors $G' = (F + k)' = f$.
  D'où, G est une primitive de f.
- ▷ On veut montrer que si G est une primitive de f, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.
  Soit G une primitive de f sur I. Posons la fonction $h = G - F$.
  Alors, sur I, $h' = G' - F' = f - f = 0$, donc, h est une fonction constante sur I.
  Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.

Ce qui prouve le résultat. □

Exemples

- ▷ Les fonctions $F : x \mapsto x$, $G : x \mapsto x + 5$ ou encore $H : x \mapsto x - \sqrt{2}$ sont des primitives de $f : x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.
  Toutes les primitives de $f : x \mapsto 1$ sont données par : $F : x \mapsto x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
- ▷ Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 - 12$ ou encore $H : x \mapsto x + \pi$ sont des primitives de $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
  Toutes les primitives de $f : x \mapsto 2x$ sont données par : $F : x \mapsto x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^5$,

2) $f_2 : x \mapsto -\sin x$,

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

4) $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Proposition

Soient f une fonction continue sur I, $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive F de f telle que $F(x_0) = a$.

Démonstration. D'après ce qui précède, toutes les primitives de f sont de la forme $G = F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Or,

$$G(x_0) = a \quad \Leftrightarrow \quad F(x_0) + k = a \quad \Leftrightarrow \quad k = a - F(x_0).$$

Ainsi, l'unique primitive G de f telle que $G(x_0) = a$ est la fonction G définie sur I par,

$$\forall\, x \in I, \quad G(x) = F(x) + \big(a - F(x_0)\big).$$

□

Exercice 3.

Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2$ qui vaut 3 en 1.

Propriétés

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I. Alors

- ▷ *$F + G$ est une primitive de $f + g$;*
- ▷ *λF est une primitive de λf.*

Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{x}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$F : x \mapsto \frac{x^4}{4} - \sqrt{2}\ln(x) + k\,, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^5 + 4x^3 - 3x$,

2) $f_2 : x \mapsto -\sin x + \dfrac{1}{3}\cos x$,

Propriétés

Soit u une fonction dérivable de I dans un intervalle J et soit f une fonction dérivable sur J.
Alors, la fonction $f \circ u$ est une primitive de $(f' \circ u)u'$ sur I.

Démonstration. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I car elle est la composée de deux fonctions dérivables.
De plus, pour tout $x \in I$, $(f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x).u'(x)$.
Ainsi, $f \circ u$ est une primitive de $(f' \circ u)u'$. □

Plus précisément, si u est une fonction dérivable sur I, le tableau suivant donne des primitives des fonctions composées usuelles :

Propriétés

Fonctions	*Primitives*	*Condition*	*Fonctions*	*Primitives*	*Condition*
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u'}{u^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u \neq 0$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$	$u'u^\alpha$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u > 0$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	$u \neq 0$	$u' \, \mathrm{e}^u$	e^u	–
$u' \cos u$	$\sin u$	–	$u'(1+\tan^2 u)$ $= \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$u' \sin u$	$-\cos u$	–	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	–

Exemple

Une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos x}{1+\sin^2 x},$$

est

$$x \mapsto \arctan(\sin x).$$

Exercice 5.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \cos(3x)$,

2) $f_2 : x \mapsto 5\,\mathrm{e}^{2x}$,

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2x+3}$,

4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

2 Intégrale d'une fonction continue

Définition : *Intégrale d'une fonction continue*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I et $(a,b) \in I^2$. Alors, l'**intégrale** de a à b de f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a).$$

Ce réel est aussi noté $F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$.

Attention

- $\triangleright$ L'intégrale de a à b de f est indépendante du choix de la primitive F.
- $\triangleright$ La variable x dans l'intégrale est appelée la variable d'intégration et est signalée par la notation « dx ». Cette variable est dite *muette* car elle peut-être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Cependant, il faut respecter la cohérence de l'utilisation de la variable. Par exemple, si la variable d'intégration est t, la variable x ne doit plus être présente dans f.

Exemple

Comme $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $[1;3]$, on a

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4.$$

Exercice 6.

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx$,

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$,

3) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx$,

4) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \exp(3x)\,dx$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I et soit $(a,b) \in I^2$. Alors,

- $\triangleright$ *on a*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

- $\triangleright$ *pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

On dit que l'intégrale est **linéaire**.

Exemple

Les propriétés précédentes permettent d'effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2 - x)\,dx &= 3\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx \\ &= 3\int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x\,dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 3\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 (5x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x})\,dx$, **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\,dx$.

Propriété : *Relation de Chasles*

Soient f une fonction continue sur I et $(a,b,c) \in I^3$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Remarque – *Cas particulier*

Avec les hypothèses de la propriété précédente, si $a < 0$ et $b > 0$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx.$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Si $f \leq g$ sur I, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particulier, si $f \geq 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Exercice 8.

1) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

2) En déduire que $\displaystyle\int_1^2 \frac{|\cos x|}{x}\,dx \leq \ln 2$.

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Si on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

alors $f = 0$ sur $[a;b]$.

3 Lien entre intégrale et primitive

Propriété

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $a \in I$.
Alors, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in I, \qquad F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f définie sur I qui s'annule en a.

Remarque

En effet, F est dérivable sur I avec $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Attention

Pour la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, la variable x est la *variable de la fonction* et la variable t est la *variable d'intégration*. Elles doivent donc porter deux noms différents.

Exemple

L'unique primitive de la fonction cos qui s'annule en 0 est la fonction F définie par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) &:= \int_0^x \cos t\,dt \\ &= \Big[\sin t\Big]_0^x \\ &= \sin x - \sin 0 \\ &= \sin x.\end{aligned}$$

On a bien $F(0) = 0$ car $\sin(0) = 0$.

Notation

L'expression d'une primitive d'une fonction f se note souvent $\displaystyle\int f(x)\,dx$. En particulier, si F est une primitive de f sur I, pour tout $x \in I$, on a

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Une primitive de f_1 est $F_1(x) = \frac{1}{6}x^6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Une primitive de f_2 est $F_2(x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de f_3 est $F_3(x) = \ln x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sur $\mathbb{R}_-^*$, une primitive de f_3 est $F_3(x) = \ln(-x) + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$.

4) Une primitive de f_4 sont de la forme $F_4(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'Exercice 2.

1) Les primitives de f_1 sont de la forme $F_1(x) = \frac{1}{6}x^6 + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2) Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2(x) = \cos x + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{R}$.

3) Sur $\mathbb{R}_+^*$, les primitives de f_3 sont de la forme $F_3(x) = \ln x + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, où $k \in \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}_-^*$, les primitives de f_3 sont de la forme $F_3(x) = \ln(-x) + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, où $k \in \mathbb{R}$.

4) Les primitives de f_4 sont de la forme $F_4(x) = \mathrm{e}^x + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Correction de l'Exercice 3.

La primitive de la fonction f qui vaut 3 en 1 est la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où k est le réel qui vérifie $F(1) = 3$. Or $F(1) = 3 \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{3}$. D'où, $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{8}{3}$.

Correction de l'Exercice 4.

1) Les primitives de f_1 sont de la forme $F_1(x) = \dfrac{1}{6}x^6 + x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2) Les primitives de f_2 sont de la forme $F_2(x) = \cos x + \dfrac{1}{3}\sin x + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Correction de l'Exercice 5.

1) Une primitive de f_1 est la fonction F_1 définie par $F_1(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Une primitive de f_2 est la fonction F_2 définie par $F_2(x) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Une primitive de f_3 est la fonction F_3 définie par $F_3(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

4) Une primitive de f_4 est la fonction F_4 définie par $F_4(x) = \dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.

Correction de l'Exercice 6.

1) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} = 1.$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = 2.$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{3}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{3}{x}\Big]_{-1}^{-2} = -\frac{3}{2}.$

4) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \exp(3x)\,dx = \Big[\frac{\exp(3x)}{3}\Big]_0^{\ln 3} = \frac{26}{3}.$

Correction de l'Exercice 7.

1) On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 (5x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x})\,dx &= 5\int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx \\ &= 5\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \Big[x\Big]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 9 + \frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)\,dx &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \\ &= 1 - 0 - 0 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 8.

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

2) Comme $\dfrac{|\cos x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$, on a $\displaystyle\int_1^2 \frac{|\cos x|}{x}\,dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

Et donc $\dfrac{|\cos x|}{x} \leq \ln 2.$

Chapitre 3

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1 : x \mapsto x^3$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, **4)** $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$,

5) $f_5 : x \mapsto \cos x$, **6)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}$, **7)** $f_7 : x \mapsto (x+3)^{83}$, **8)** $f_8 : x \mapsto \dfrac{5}{x+3}$.

Exercice 2.

1) Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ qui s'annule en 2.

2) Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ qui vaut 1 en 1.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3x)\,dx$, **2)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$, **3)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$, **4)** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1-2x}\,dx$,

5) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$, **6)** $\displaystyle\int_0^1 \exp(2x)\,dx$, **7)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x+\pi)\,dx$, **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 4.

Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :

1) $f_1 : x \mapsto x\exp(x^2)$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x)^3}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{3x^2+2}$,

4) $f_4 : x \mapsto x(x^2-1)^{2022}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \tan x$.

Exercice 5.

Soient f et g deux fonctions définies sur I, et soit $(a,b) \in I^2$. Considérons des primitives F et G de, respectivement, f et g.

1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

2) Vérifier que la fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$. En déduire que

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

4) La fonction FG est-elle une primitive de fg ?

Exercice 6.

1) En utilisant la formule d'Euler, linéariser les fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, **b)** $f_2 : x \mapsto \sin^3 x$, **c)** $f_3 : x \mapsto \sin^4 x$.

2) En déduire une primitive pour chacune des fonctions ci-dessus.

Exercice 7.

Sachant que les fonctions sinus et cosinus hyperboliques sont définies par

$$\operatorname{ch} x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1) Montrer qu'une primitive de sh est ch et qu'une primitive de ch est sh.

2) En utilisant les définitions des fonctions hyperboliques, simplifier les fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}^2 x$, **b)** $f_2 : x \mapsto \operatorname{ch}^3 x$, **c)** $f_3 : x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$.

3) En déduire une primitive pour chacune des fonctions ci-dessus.

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la linéarité de l'intégrale :

1) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - x)\, dx$, **2)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{4 - x^2}{x}\, dx$,

3) $\displaystyle\int_4^1 \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}\, dx$, **4)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)(4-x)}{\sqrt{x}}\, dx$.

Exercice 9.

Déterminer une expression simplifiée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) := \int_0^x \sqrt{1+t}\, dt.$$

Exercice 10.

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt.$$

1) Justifier que F est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

2) Montrons que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(a) **Méthode 1 :** Étudier le signe de $F(y) - F(x)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

(b) **Méthode 2 :** Calculer la dérivée de F.

Exercice 11.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{1-x}\, dx$, **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$, **3)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx$, **4)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\, dx$,

5) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\, dx$, **6)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$, **7)** $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$, **8)** $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\, dx$.

Chapitre 3 - Séquence 2

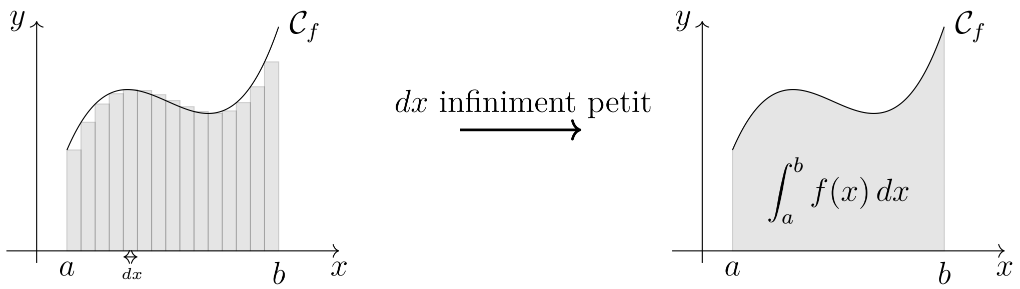
Calcul d'aires et intégration par parties

4 Interprétation géométrique d'une intégrale

Soient a, b deux réels avec $a \leq b$, et soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$. Rappelons que l'intégrale de f sur $[a;b]$ est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le symbole $\int$ représente une somme (d'où sa forme en S allongé) et dx représente une quantité infiniment petite. Enfin, $f(x)\,dx$ est l'aire du rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx.
Si f est une fonction positive sur $[a;b]$, alors l'intégrale de f entre a et b représente en réalité une somme infinie d'aires de rectangles dont le résultat donne l'aire sous la courbe de f entre a et b.



Enfin, si f est négative sur $[a;b]$, l'intégrale correspond à la valeur opposée de l'aire du domaine situé entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites $x = a$ et $x = b$.

Propriétés

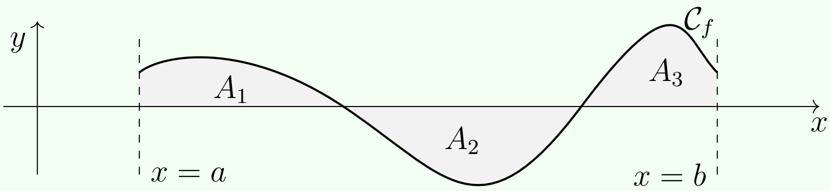
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Considérons sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Notons par

- $\mathcal{A}_+$ *l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la courbe représentative de f située au-dessus de l'axe des abscisses.*
- $\mathcal{A}_-$ *l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la courbe représentative de f située en-dessous de l'axe des abscisses.*

Alors

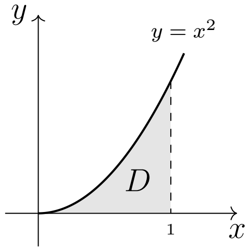
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-.$$

Dans l'exemple illustré par la figure ci-dessous, on a $\mathcal{A}_+ = A_1 + A_3$ et $\mathcal{A}_- = A_2$.



Exemple

Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont voici la représentation graphique :



Le domaine D s'écrit

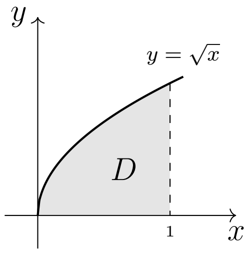
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}.$$

L'aire $\mathcal{A}_D$ du domaine D est égale à :

$$\mathcal{A}_D = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercice 1.

Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dont voici la représentation graphique :



Déterminer l'aire du domaine D.

5 Intégration par parties

Propriété : *Formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions continûment dérivables sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx,$$

où $\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$. D'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on a

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Or une primitive de $(uv)'$ est uv. Ainsi, $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b$ et donc

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx. \qquad \square$$

Méthode – *Calcul d'une intégrale par intégration par parties*

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on procède comme suit :

1. Poser une fonction u' continue (choisie de telle sorte qu'une primitive soit connue) et une fonction v dérivable telle que $f = u'v$.
2. Calculer une primitive u de u' et calculer la dérivée v' de v.
3. Appliquer la formule d'intégration par parties.

Exemples

▷ Soit

$$I \coloneqq \int_1^3 x\,\mathrm{e}^x\ dx.$$

Posons $u' : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $v : x \mapsto x$. D'où, $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $v' : x \mapsto 1$. Alors, par intégration par parties, on a

$$I = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_1^3 - \int_1^3 1\,\mathrm{e}^x\ dx = (3\,\mathrm{e}^3 - 1\,\mathrm{e}^1) - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_1^3 = (3\,\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}) - (\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^1) = 2\,\mathrm{e}^3.$$

▷ Soit

$$J \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\,dx.$$

Posons $u' : x \mapsto \cos x$ et $v : x \mapsto x$. D'où, $u : x \mapsto \sin x$ et $v' : x \mapsto 1$. Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} J = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx &= \left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 0\sin 0\right) - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{12} - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos 0\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}. \end{aligned}$$

Remarques – *Conseils d'utilisation*

▷ Pour pouvoir appliquer une intégration par parties, il est nécessaire d'apprendre à identifier un produit $u'v$ dans la fonction f de telle sorte qu'il soit facile de déterminer une primitive de la fonction u'.

▷ Il est important qu'après application de la formule d'intégration par parties, l'intégrale obtenue **ne soit pas plus difficile** que l'intégrale de départ.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 \coloneqq \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$, **2)** $I_2 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 x\exp(-3x)\,dx$, **3)** $I_3 \coloneqq \displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$.

Remarque

Il est possible d'adapter la formule d'intégration par parties pour le calcul d'une primitive d'une fonction :

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemple

Déterminons les primitives de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$. Posons $u' : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $v : x \mapsto x$. D'où, $u : x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$ et $v' : x \mapsto 1$. Ainsi, par intégration par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\ dx = \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \int \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\ dx = \frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x} + k = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

On a

$$D = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Correction de l'Exercice 2.

1) Posons $u'(x) = \sin(2x)$ et $v(x) = x$. D'où, $u(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_1 = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{2}\cos(2x)\, dx &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\, dx \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2) Posons $u'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et $v(x) = x$. D'où, $u(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}$ et $v'(x) = 1$. Alors, par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_2 = \left[-\frac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}\, dx &= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-3x}\, dx \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{3} + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3}}{9}. \end{aligned}$$

3) Posons $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$. D'où, $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors, par intégration par parties, on a

$$I_3 = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Chapitre 3

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

1) Représenter graphiquement les domaines de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D_1 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\right\} \quad \text{et} \quad D_2 \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\right\}.$$

2) En déduire les aires de chacun de ces domaines.

Exercice 2.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$.

1) Donner la dérivée de uv. Puis intégrer le résultat entre a et b.

2) En déduire une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1) $I_1 \coloneqq \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, dx$,

2) $I_2 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 x \operatorname{ch} x \, dx$,

3) $I_3 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 x \exp(-2x) \, dx$,

4) $I_4 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 (x+1) \operatorname{sh}(3x) \, dx$,

5) $I_5 \coloneqq \displaystyle\int_{-1}^{-\mathrm{e}} (2x+1) \ln(-x) \, dx$,

6) $I_6 \coloneqq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+1) \cos(3x) \, dx$,

7) $I_7 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx$,

8) $I_8 \coloneqq \displaystyle\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \, dx$.

Exercice 4.

Soient les réels

$$I \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx \qquad \text{et} \qquad J \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx.$$

1) Calculer $I + J$.

2) Montrer que $I - J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) \, dx$. Puis calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3) En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 5.

Déterminer une primitive pour la fonction ln en utilisant une intégration par parties. Même question pour la fonction arctan.

Exercice 6.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties successives

1) $I_1 \coloneqq \int_1^e (\ln x)^2 \, dx$, **2)** $I_2 \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$, **3)** $I_3 \coloneqq \int_0^1 x^2 \, \mathrm{e}^{-2x} \, dx$.

Exercice 7.

Déterminer l'aire des domaines suivants

1) $D_1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,

2) $D_2 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

Exercice 8.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode d'intégration par parties :

1) $I_1 \coloneqq \int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$, **2)** $I_2 \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x \, dx$, **3)** $I_3 \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \sin x \, dx$,

4) $I_4 \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) \, dx$, **5)** $I_5 \coloneqq \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln x) \, dx$.

Indication : il faudra observer que l'intégrale de départ réapparaît après une ou plusieurs intégrations par parties.

Exercice 9.

Calculer l'intégrale suivante :

$$I \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, \mathrm{e}^x \sin x \, dx.$$

Exercice 10.

Déterminer une primitive, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, pour les fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto \left(\frac{x-1}{x^2}\right) \mathrm{e}^x$, **2)** $f_2 : x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

Exercice 11.

En appliquant une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$