Chapitre 4

Systèmes Linéaires

Pré-requis

- ☐ Nombres complexes.
- ☐ Espaces $\mathbb{K}^n$.
- ☐ Résolution d'équations.

Objectifs

- ☐ Savoir reconnaître un système linéaire.
- ☐ Savoir résoudre un système échelonné.
- ☐ Savoir utiliser la méthode de Gauss.

Sommaire

Séquence 1 : Systèmes linéaires échelonnés **3**

Définition d'un système linéaire - Systèmes échelonnés.

Séquence 2 : La méthode de Gauss **13**

Méthode de résolution de Gauss.

Chapitre 4 - Séquence 1

Systèmes linéaires échelonnés

1 Définition d'un système linéaire

Ce chapitre porte sur la résolution des systèmes linéaires d'équations. La première étape consiste donc à identifier un système linéaire d'équations.

Exemples

- ▷ Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$
est un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues (x et y).
- ▷ Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right.$$
est un système linéaire à 3 équations et 3 inconnues (x, y et z).
- ▷ Une simple équation comme :
$$2x + 3y + 4z + 5t = 9$$
est aussi un système linéaire mais avec 1 seule équation et 4 inconnues (x, y, z et t).
- ▷ Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & & & = & -2 \\ -2x & - & y & + & z & = & -2\sqrt{6} \end{array}\right.$$
est un système linéaire de 2 équations et 3 inconnues (x, y, z).
- ▷ Le système
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 39 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 34 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 26 \end{array}\right.$$
est un système linéaire de 3 équations et 4 inconnues (x_1, x_2, x_3 et x_4).

Remarques

- ▷ Les inconnues peuvent être écrites avec n'importe quelles lettres. En général, lorsqu'il y a 4 inconnues ou plus, on note celles-ci x_1, x_2, x_3, ...
- ▷ Le terme **linéaire** vient du fait que chaque équation est une combinaison linéaire des inconnues.

Attention

Tous les systèmes ne sont pas forcément linéaires.

Exemples — *Quelques systèmes non linéaires*

Les systèmes ci-dessous ne sont pas linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} e^x & + & y & = & 1 \\ x & + & \sin y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 1 \\ x^2 & + & (y-5)^2 & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & xy & = & 3 \\ x^2 & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

car e^x, $\sin y$, x^2, $(y-5)^2$ et xy ne s'écrivent pas ax ou by avec a, b des nombres réels ou complexes (c'est-à-dire : ce ne sont pas des combinaisons linéaires de x et de y).

Pour la suite, on utilisera les notations suivantes :

Notations

1) $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

2) n et p sont deux entiers naturels non nuls.

De manière rigoureuse, la définition générale des systèmes linéaires d'équations est donnée ci-dessous.

Définition : *Système linéaire*

On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcrcccrcll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2, & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n, & L_n \end{array}\right. \tag{1}$$

où,

- ▷ pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$, a_{ij}, b_i sont des réels ou des complexes donnés, appelés **coefficients** du système.
- ▷ $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes du système.
- ▷ $x_1, \dots, x_p$ sont des éléments inconnus de $\mathbb{K}$, appelés **inconnues** du système. Par convention les termes contenant les inconnues sont à gauche de l'égalité.
- ▷ La partie gauche de l'égalité s'appelle le **premier membre**.
- ▷ Le vecteur $b := (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le **second membre**.

Exemples

- ▷ Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & -1 \\ 3x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

est de la forme (1) avec $n = p := 2$, $a_{11} := 4$, $a_{12} := 2$, $a_{21} := 3$, $a_{22} := -1$ et $b_1 := -1$, $b_2 := 2$.

▷ Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right.$$

est de la forme (1) avec $n = p \coloneqq 3$,

$$\begin{array}{lll} a_{11} \coloneqq 3, & a_{12} \coloneqq 2, & a_{13} \coloneqq 1, \\ a_{21} \coloneqq 2, & a_{22} \coloneqq 3, & a_{23} \coloneqq 1, \\ a_{31} \coloneqq 1, & a_{32} \coloneqq 2, & a_{33} \coloneqq 3, \end{array}$$

et $b_1 \coloneqq 39$, $b_2 \coloneqq 34$, $b_3 \coloneqq 26$.

▷ L'équation

$$2x + 3y + 4z + 5t = 9,$$

est de la forme (1) avec $n \coloneqq 1$ et $p \coloneqq 4$, $a_{11} \coloneqq 2$, $a_{12} \coloneqq 3$, $a_{13} \coloneqq 4$, $a_{14} \coloneqq 5$.

▷ Le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 - 5x_2 + 2 & = & x_1 \\ 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3 & = & x_2 \end{array}\right.$$

est un système linéaire car il s'écrit aussi sous la forme (1)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 5x_2 & & & = & -2 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2\sqrt{6} \end{array}\right.$$

avec $n \coloneqq 2$ et $p \coloneqq 3$.

Exercice 1.

Déterminer (en justifiant votre réponse) parmi les systèmes suivants lesquels sont linéaires :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} -2x + y & = & 1 \\ x^2 + (y-5)^2 & = & 4 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 1 \\ -4x + y & = & 2 \\ x - y & = & 5 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + iy + 3z & = & 0 \\ y - (1+i)z & = & 2i \\ x + y + z & = & 1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 10z & = & 4 \\ 3x + 2y - z & = & 2 \\ 4i\,x + (i-1)y & = & 1 - yz \end{array}\right.$

Définition : *Solution*

On appelle **solution** d'un sytème à n équations et p inconnues de la forme (1), tout p-uplet $(a_1, \ldots, a_p)$ de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations du système.

Pour vérifier qu'un p-uplet $(a_1, \ldots, a_p)$ est solution du système, on le substitue au p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'inconnues et on regarde si les n équations sont vraies. On dit que l'on **injecte** les solutions dans le système.

Exemple

Le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

admet comme solution $(-18, -6, 1)$, c'est-à-dire

$$x_1 = -18\,, \qquad x_2 = -6\,, \qquad x_3 = 1\,.$$

Notons que $(7, 2, 0)$ ne satisfait que la première équation et pas la seconde. Ce n'est donc pas une solution du système.

Proposition

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire, trois cas sont possibles :

- ▷ *il existe une unique solution,*
- ▷ *il existe une infinité de solutions,*
- ▷ *il n'existe aucune solution.*

Exemples

- ▷ Le système d'équations

  $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

  admet comme unique solution $(1, 1)$, c'est-à-dire $x_1 = x_2 = 1$.
- ▷ Le système d'équations

  $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right.$$

  admet une infinité de solutions : ce sont tous les couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x + y = 1$.
- ▷ Le système d'équations

  $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

  n'admet aucune solution car $2 \neq 0$.

Définition : *Système homogène*

On dit qu'un système est homogène si tous les termes du second membre sont nuls. Autrement dit, $b = 0_{\mathbb{K}^n}$ dans (1).

Exemple

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sytème linéaire homogène puisqu'il est de la forme (1) et que son second membre est nul.

Remarques

- ▷ Un système homogène de n équations à p inconnues admet toujours au moins le p-uplet $(0, 0, \dots, 0)$ pour solution.
- ▷ On peut montrer que l'ensemble des solutions d'un système homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ (ce résultat sera montré au second semestre).

Exemple

Le système linéaire homogène

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

admet une unique solution $(0, 0)$. Or on a vu que $\{(0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2 Systèmes échelonnés

Certains systèmes ont une forme particulière qui permet de les résoudre simplement, c'est le cas des systèmes dits *échelonnés*.

Définition : *Systèmes échelonnés, inconnues principales et secondaires*

1) Un système est **échelonné** si le nombre de coefficients nuls en début de ligne croît strictement ligne après ligne.

2) Dans un système échelonné, pour chaque ligne, les premières inconnues ayant un coefficient non nul sont appelées **inconnues principales**.

3) Une inconnue non principale est dite **inconnue secondaire**.

Exemples

- ▷ Le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

est échelonné. En effet,

- la première ligne débute par un coefficient non nul ($a_{11} := 2$), l'inconnue x_1 est donc une inconnue principale ;
- la seconde ligne débute avec un coefficient nul ($a_{21} := 0$), le premier coefficient non nul est a_{22} donc l'inconnue x_2 est une inconnue principale ;
- la troisième ligne débute avec trois coefficients nuls ($a_{31} := 0$, $a_{32} := 0$ et $a_{33} := 0$), le premier coefficient non nul est a_{34} donc l'inconnue x_4 est une inconnue principale ;
- l'inconnue x_3 n'est pas une inconnue principale, c'est donc une inconnue secondaire.

▷ Le système de 3 équations et 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

n'est pas échelonné car la deuxième et la troisième ligne débutent par le même nombre de coefficients nuls (L_2 et L_3 commencent avec x_3).

Remarque

Un système linéaire à n équations et n inconnues échelonné est dit **triangulaire supérieur**. Il est alors de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, & L_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, & L_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3, & L_3 \\ & & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n, & L_n \end{array}\right. \qquad (2)$$

où, pour tous $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$, les coefficients a_{ij} et b_i sont des réels ou des complexes donnés et $x_1, \dots, x_n$ sont les inconnues.

Méthode – *Résolution des systèmes échelonnés : le principe de remontée*

▷ Résoudre la dernière équation. Dans le cas où cette équation admet plusieurs inconnues, exprimer l'inconnue principale en fonction des inconnues secondaires.

▷ Résoudre successivement les équations en remontant le système jusqu'à la première ligne en remplaçant les inconnues par leur valeur.

Exemples

▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x & + & 2y & + & z & + & (1+i)t & = & 2 & & L_1 \\ & & y & - & z & + & t & = & 5i & & L_2 \\ & & & & z & + & 2i\,t & = & 2 & & L_3 \\ & & & & & & 3t & = & 3 & & L_4 \end{array}\right.$$

Ce système est bien échelonné (il est même triangulaire supérieur) et les inconnues x, y, z, t sont toutes principales.

- D'après la dernière ligne L_4, on a $3t = 3$ donc $t = 1$.
- En substituant t par 1 dans la troisième ligne L_3, on obtient $z + 2i = 2$, donc $z = 2 - 2i$.
- En faisant de même avec L_2, on obtient

$$y - z + t = 5i \implies y = 5i + z - t = 5i + 2 - 2i - 1 = 1 + 3i.$$

- Pour la première ligne L_1, on a

$$2x+2y+z+(1+i)t = 2 \implies 2x = 2-2y-z-(1+i)t = -3-5i \implies x = \frac{-3+5i}{2}.$$

Il y a donc une unique solution $(x, y, z, t) = \left(\frac{-3+5i}{2}, 1+3i, 2-2i, 1\right)$. On pourra vérifier que le résultat est juste en substituant au quadruplet (x, y, z, t), le quadruplet $\left(\frac{-3+5i}{2}, 1+3i, 2-2i, 1\right)$.

▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 2y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & - & z & + & 5t & = & 5 \\ & & & & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système est bien échelonné, x, y, z sont des inconnues principales et t est une inconnue secondaire.
La dernière équation contient l'inconnue principale z et l'inconnue secondaire t.
Résoudre cette équation revient donc à exprimer z en fonction de t :

$$z + 2t = 2 \implies z = 2 - 2t.$$

Ensuite, on remonte le système :

- $y - z + 5t = 5 \implies y = 5 - 5t + z = 5 - 5t + (2 - 2t) = 7 - 7t = 7(1 - t)$.
- $2x + 2y + z + t = 2 \implies 2x = 2 - 2y - z - t = 2 - 14 + 14t - 2 + 2t - t = -14 + 15t$ $\implies x = \frac{-14+15t}{2}$.

Il n'y a pas de valeur précisée pour t. Autrement dit, on peut choisir la valeur que l'on veut pour t. On en déduit que ce système admet une infinité de solutions qui forment l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{-14+15t}{2}, 7-7t, 2-2t, t\right) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le vecteur $(0, 0, 0, 0) \notin \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (le système n'est pas homogène).

Proposition

Un système échelonné admet

▷ *soit une unique solution (lorsque toutes les inconnues sont principales),*

▷ *soit une infinité de solutions (lorsque des inconnues sont secondaires).*

Exercice 2.

Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

1) $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ & & y & + & 10z & = & -28 \\ & & & - & 14z & = & 42 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ & & y & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) Non car deux termes sont non linéaires (x^2 et y^2).

2) Oui avec des coefficients réels.

3) Oui avec des coefficients complexes.

4) Non car un terme est non linéaire (yz).

Correction de l'Exercice 2.

1) On obtient

$$\begin{aligned} z &= -\frac{42}{14} = -3, \\ y &= -28 - 10z = 2, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Il y a donc une unique solution qui est $(1, 2, -3)$.

2) On obtient

$$\begin{aligned} y &= 2 + 2z, \\ x &= 6 - 2y + 3z = 6 - 4 - 4z + 3z = 2 - z, \end{aligned}$$

et pas de condition sur z. Il y a donc une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(2 - z, 2 + 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Chapitre 4

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

Déterminer (en justifiant votre réponse) parmi les systèmes suivants lesquels sont linéaires :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+y &=& 1 \\ x^2+(y-5)^2 &=& 4 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y &=& 1 \\ -4x+y &=& 2 \\ x-y &=& 5 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+iy+3z &=& 0 \\ y-(1+i)z &=& 2i \\ x+y+z &=& 1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+10z &=& 4 \\ 3x+2y-z &=& 2 \\ 4i\,x+(i-1)y &=& 1-yz \end{array}\right.$

Exercice 2.

1) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y &=& 5 \\ 12x-2y &=& 0 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

a) $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$,

b) $\left(\dfrac{1}{2}, 3, 0\right)$,

c) $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$,

d) $(1, 6)$.

2) Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{4}x+y+z &=& \dfrac{28}{15} \\ -x+3y+10z &=& 0 \\ x+6y &=& 8 \end{array}\right.$$

Parmi les n-uplets suivants, déterminer ceux qui sont solution de ce système.

a) $\left(4, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{3}\right)$,

b) $\left(4, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}\right)$,

c) $\left(\dfrac{8}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{5}\right)$,

d) $\left(\dfrac{8}{2}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+4z &=& 9 \\ -\frac{1}{2}y-z &=& -\frac{3}{2} \\ -12z &=& -24 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t &=& 0 \\ 3y+\frac{7}{2}t &=& 4 \\ 7z-\frac{7}{2}t &=& -7 \\ \frac{2}{3}t &=& \frac{10}{3} \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y-4z+t & = & 0 \\ 3y+\frac{7}{2}t & = & 4 \\ \frac{2}{3}z & = & \frac{10}{3} \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{rcl} i\,x & = & 3 \\ x+2y & = & 4 \\ x+2y+3i\,z & = & 2+3i \end{array}\right.$

Exercice 4.

1) Soient $u \coloneqq \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v \coloneqq \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $w \coloneqq \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Monter que w est combinaison linéaire des vecteurs u et v.

2) On pose

$$u_1 \coloneqq \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_2 \coloneqq \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_3 \coloneqq \begin{pmatrix}3\\1\\4\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 \coloneqq \begin{pmatrix}5\\2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Montrer que tout vecteur $w \coloneqq (w_1, w_2, w_3, w_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 5.

Résoudre les systèmes ci-dessous d'inconnues x, y, z et de paramètre m.

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x-my+2z & = & m \\ y+(m+2)z & = & m^2-5 \\ 2z & = & 2m-4. \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcl} x-(m^3-1)y+z & = & m \\ (m-1)y-(m-2)z & = & m+1 \\ (m-2)(m-1)z & = & m^2-1. \end{array}\right.$

3 Méthode de résolution de Gauss

Dans cette séquence, on présente une méthode permettant de résoudre tout système linéaire : la méthode de Gauss.

Définition : *Systèmes équivalents*

On dit que deux systèmes linéaires S_1 et S_2 sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions, ce que l'on note

$$S_1 \iff S_2.$$

Pour résoudre un système linéaire, on peut le transformer en un système linéaire équivalent plus simple à résoudre (notamment échelonné). Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Théorème

Soit S un système linéaire de lignes $L_1, \dots, L_n$. Alors, les opérations élémentaires ci-dessous transforment S en un système linéaire équivalent.

- ▷ *Permuter deux lignes L_i et L_j, cela sera noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.*
- ▷ *Multiplier une ligne L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$, cela sera noté $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.*
- ▷ *Ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j, avec $j \neq i$, cela sera noté $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

À travers des exemples, on applique ce théorème pour transformer un système linéaire donné en un système échelonné.
La méthode de résolution employée s'appelle la **méthode de Gauss**. Elle consite à choisir une équation que l'on garde intacte dans laquelle on choisit une inconnue qui devra être éliminée dans les autres équations en utilisant le théorème précédent. Le coefficient de cette inconnue sera appelé **pivot de Gauss** ou tout simplement **pivot**.

Exemple

Considérons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

- ▷ Pour obtenir un système échelonné, on conserve la première équation car le premier pivot vaut 1 ce qui facilite les calculs pour éliminer x dans les deux dernières équations. Pour cela, on effectue les deux opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

▷ On conserve la deuxième équation et on élimine y dans la dernière équation (le deuxième pivot est encore égal à 1). Pour cela, on effectue $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & & & & 5z & = & -16 \end{array}\right.$$

Ces deux étapes peuvent s'écrire succinctement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & - & 3y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & & & = & -5 \\ & & & & 5z & = & -16 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Il reste donc à résoudre le système échelonné obtenu (exercice).

Attention

Lorsque l'on effectue des opérations sur les lignes, il ne faut pas oublier d'appliquer ces opérations sur le second membre (terme à droite de l'égalité).

On donne ci-dessous d'autres exemples de résolution.

Exemples

▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 6y & + & 9z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & 6y & + & 9z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right. & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & -7 \\ & & 4y & - & z & = & -7 \end{array}\right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ & & 2y & + & 3z & = & -7 \\ & & & - & 7z & = & 7 \end{array}\right. \end{aligned}$$

La résolution du système échelonné donne la solution $(11, -2, -1)$ (exercice). On peut alors vérifier que $(11, -2, -1)$ est bien la solution du système linéaire initial.

▷ Résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 10 \\ & - & 7y & + & 11z & = & 7 \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $0 = 3$. Le système n'admet donc aucune solution et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

▷ On considère le système linéaire à 4 inconnues x, y, z, t et trois équations suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0. \end{array}\right.$$

On va effectuer diverses opérations simples sur les lignes pour obtenir un système échelonné équivalent. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0. \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \\ & & 2y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & & & - & t & = & 0 \\ & & & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est échelonné d'inconnues principales x, y, z et d'inconnue secondaire t. On obtient alors $x = 0$ et $y = z = -t$. Ainsi, il existe une infinité de solutions et l'ensemble de ces solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{(0, -t, -t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (exercice).

Remarques

▷ Afin de se ramener à un système simple, il peut être nécessaire de faire des permutations de lignes comme on peut le voir dans les exemples ci-dessous.

▷ Lorsque le pivot considéré est nul, on effectue une permutation de lignes afin d'obtenir un pivot non nul (et si possible égal à 1).

Exemples

▷ On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

Le coefficient de x dans la 1ère équation est 2. Il est plus simple de travailler avec un pivot égal à 1 pour cela on effectue une permutation des lignes L_1 et L_2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & & & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

on se ramène ainsi au système déjà résolu dans un exemple précédent.

▷ Résolvons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

Ici, puisque L_1 ne contient pas l'inconnue x, le premier pivot est nul, il faut d'abord permuter la ligne L_1 avec la ligne L_2 pour pouvoir ensuite éliminer x dans la ligne L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 10y & + & 8z & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{2}z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 6y & + & 4z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & z & = & 4 \end{array}\right.$$

▷ Résolvons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & - & t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 3x & + & y & - & z & - & t & = & 4 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & - & 2y & - & 4z & - & 4t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & - & 2y & - & 4z & - & 4t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & - & 2z & - & 2t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

La dernière égalité est impossible. On en déduit qu'il n'existe pas de solution.

Exercice 1.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 3 \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1+2i \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3i \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Il y a donc une unique solution qui est $(3,-2,1)$.

2)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1+2i \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3i \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -1+i \\ & & y & & & = & -1-4i \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & -1-4i \\ & & y & + & z & = & -1+i \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & -1-4i \\ & & & & z & = & 5i \end{array}\right.$$

Il y a donc une unique solution qui est $(3-i,-1-4i,5i)$.

Chapitre 4

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 2.

Déterminer à quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d le système ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & 0 \\ cx + dy & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3.

Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} y + z & = & 2 \\ x + 3y + 3z & = & 0 \\ x + 3y + 6z & = & 3 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z & = & 5 \\ 3x - 2y + 2z & = & 5 \\ 5x - 3y - z & = & 16 \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 5 \\ x - 2y + 3z & = & 2 \\ 4x - y + 4z & = & 1 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 3 \\ 2x + 3y + 8z & = & 4 \\ 3x + 2y - 17z & = & 1 \end{array}\right.$ **6)** $\left\{\begin{array}{rcl} -2x - 2y + z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & -2 \\ x - 2y - 2z & = & 1 \end{array}\right.$

7) $\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + iz_2 - iz_3 & = & -1 - i \\ -z_1 + (1-i)z_2 + 2iz_3 & = & 2 + 3i \\ 2z_1 + (1-2i)z_2 - 3iz_3 & = & 1 - 2i \end{array}\right.$ **8)** $\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y + z - t & = & 2 \\ x + 4y + 2z + t & = & 3 \\ x + 2y - z - 2t & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 4.

1) Soient $e_1 \coloneqq (1, 0)$, $u_1 \coloneqq (3, 1)$ et $u_2 \coloneqq (-1, 5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $e_1 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ en écrivant explicitement que le vecteur e_1 est combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

2) Soient $e_1 \coloneqq (1, 0, 0)$, $u_1 \coloneqq (-1, 1, 3)$, $u_2 \coloneqq (1, 2, 5)$ et $u_3 \coloneqq (1, 7, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $e_1 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 5.

Soient $u_1 := (3, 4, 2)$, $u_2 := (0, 1, -1)$, $v_1 := (-1, 2, 1)$ et $v_2 := (-4, 2, 0)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. On se ramènera à l'étude d'un système linéaire.

Exercice 6.

On donne ci-dessous deux systèmes d'inconnues x, y, z avec $k \in \mathbb{R}$ un paramètre. Déterminer (lorsque cela est possible) les valeurs de k de sorte que ces systèmes admettent

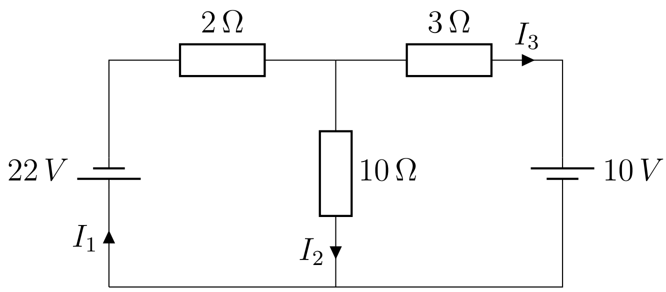
- ▷ une unique solution,
- ▷ aucune solution,
- ▷ une infinité de solutions.

1) $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & + & 8z & = & 3 \end{array}\right.$$

2) $$\left\{\begin{array}{ccccccc} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 7. — *Application à un circuit électrique*

On considère le circuit électrique ci-dessous dont on souhaite déterminer la valeur des courants I_1, I_2 et I_3.



D'après la loi de Kirchhoff, on a $I_1 = I_2 + I_3$. En appliquant la loi d'Ohm dans le circuit de gauche, on obtient $22 = 2I_1 + 10I_2$. De même, la loi d'Ohm appliquée au circuit de droite entraîne $10 = 10I_2 - 3I_3$. On en déduit que les courants I_1, I_2, I_3 sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ 2I_1 & + & 10I_2 & & & = & 22 \\ & & 10I_2 & - & 3I_3 & = & 10 \end{array}\right. \tag{3}$$

Appliquer la méthode de Gauss à ce système et en déduire que les solutions sont $I_1 = \dfrac{93}{28}$, $I_2 = \dfrac{129}{84}$ et $I_3 = \dfrac{25}{14}$.