Chapitre 2

Dérivation

Pré-requis

- ☐ Savoir résoudre des équations et des inéquations.
- ☐ Maîtriser la notion de limite d'une fonction.
- ☐ Connaître la définition d'une droite (équation d'une droite).
- ☐ Connaître les fonctions usuelles et leurs propriétés.
- ☐ Connaître les dérivées des fonctions usuelles.

Objectifs

- ☐ Savoir interpréter la signification de la droite tangente à une courbe.
- ☐ Maîtriser les opérations sur les dérivées (en particulier pour une fonction composée).
- ☐ Savoir déterminer le sens de variations d'une fonction.
- ☐ Savoir déterminer si une fonction est une bijection.
- ☐ Savoir réaliser une étude complète d'une fonction.

Sommaire

Important

Toutes les connaissances sur les fonctions usuelles nécessaires à la compréhension de ce chapitre peuvent être trouvées dans la fiche des fonctions usuelles.

Chapitre 2 - Séquence 1

Dérivabilité d'une fonction et fonction dérivée

1 Dérivabilité et dérivée d'une fonction

Définition : *Dérivabilité d'une fonction en un point*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
La fonction f est dite **dérivable** en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie.}$$

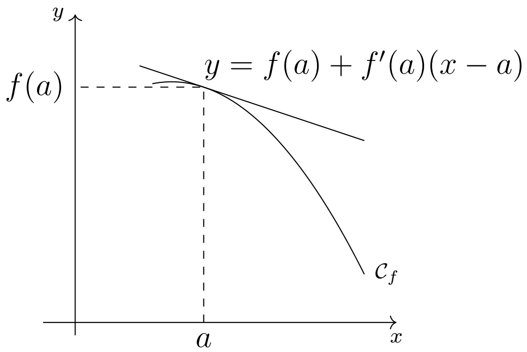
Cette limite est appelée **dérivée** de f en a et on la note $f'(a)$.

Exemples

- Soient $c \in \mathbb{R}$ et f la fonction constante égale à c. Alors, $D_f = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = c$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{c - c}{x - a} = 0$. Ainsi,
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$
Donc, la fonction f est dérivable en a et sa dérivée vérifie $f'(a) = 0$.
- Soient $g : x \mapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors $D_g = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a.$$
Ainsi,
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$
Donc, la fonction g est dérivable en a et sa dérivée est $g'(a) = 2a$.
- Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $D_h = \mathbb{R}_+$. Pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Ainsi,
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
Donc, la fonction h *n'est pas dérivable* en 0.

Remarque — *Interprétation géométrique*

Si f est dérivable en a, la valeur $f'(a)$ représente la pente de la **droite tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(a, f(a))$ dont l'équation est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$



On remarque en particulier qu'une fonction constante admet une dérivée nulle, comme calculé dans l'exemple précédent.

Définitions : *Dérivabilité et dérivée d'une fonction sur un intervalle*

Soit f une fonction réelle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$.
- ▷ La **fonction dérivée** de f est la fonction définie sur I qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$. Elle est notée f'.
- ▷ La fonction f est dite **continûment dérivable** sur I si elle est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est continue sur I.
  On dit alors que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur I, et on le note $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Remarque

La définition précédente reste valable en remplaçant I par une union d'intervalles (par exemple $\mathbb{R}^* = \,]-\infty;0[\, \cup \,]0;+\infty[\,$). De même, dans la suite, de nombreux résultats sont donnés dans un intervalle I mais restent valables pour une union d'intervalles.

Exemple

D'après les exemples précédents, les fonctions $f : x \mapsto c$ et $g : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur leurs domaines de définition $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et leurs dérivées sont données par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad g'(x) = 2x.$$

Puisque f' et g' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Propriété

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition, exceptées les fonctions $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$ qui ne sont pas dérivables en 0.

Exercice 1.

On a déjà vu dans le premier exemple que $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0.
Montrer de même que $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

À noter

- ▷ Les dérivées des fonctions usuelles sont données dans la fiche des fonctions usuelles.
- ▷ En physique, la dérivée correspond à la notion de vitesse instantanée.
  Plus précisément, si $x(t)$ désigne la position d'un objet au temps t et si Δt correspond à un pas de temps, alors $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ détermine l'évolution de la position dans le temps, c'est-à-dire une vitesse moyenne pour aller de la position $x(t)$ à la position $x(t+\Delta t)$. Ainsi, lorsque Δt tend vers 0, on obtient $x'(t)$, qui correspond donc à la vitesse instantanée de l'objet au temps t.
  En physique, pour une fonction $t \mapsto x(t)$, la dérivée se note souvent $\dfrac{dx}{dt}(t)$ ou $\dot{x}(t)$.

2 Opérations sur les dérivées

Bien souvent, pour montrer qu'une fonction est dérivable et pour calculer sa dérivée, plutôt que d'utiliser la définition, on se sert des propriétés que l'on liste ci-dessous.

Dans toute la suite, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Propriétés

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, les fonctions $u+v$, λu et uv sont dérivables sur I et on a

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (\lambda u)' = \lambda u', \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

De plus, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur $\{x \in I \mid v(x) \neq 0\}$ et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Remarques

- ▷ En combinant les formules $(u+v)' = u' + v'$ et $(\lambda u)' = \lambda u'$, on obtient que toute combinaison linéaire de deux fonctions dérivables est dérivable et

$$(u + \lambda v)' = u' + \lambda v'.$$

- ▷ En combinant les formules $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, on obtient la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$. Alors $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Posons $u : x \mapsto \ln x$ et $v : x \mapsto x-1$. Alors, $f = \dfrac{u}{v}$.
Ainsi, f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables.
De plus, pour tout $x \in D_f$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, et, en utilisant la formule, on a

$$\forall\, x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln(x)}{x(x-1)^2}.$$

Propriété : *Dérivée d'une composée*

Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $u : I \to J$ deux fonctions dérivables. Alors, la fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et

$$(f \circ u)' = (f' \circ u)u'.$$

Exemples

1. Soit $g : x \mapsto \sin^3 x$. Alors $g = f \circ u$ avec $f : x \mapsto x^3$ et $u : x \mapsto \sin x$, et $D_g = \mathbb{R}$. D'après le tableau des fonctions usuelles, on a $f' : x \mapsto 3x^2$ et $u' : x \mapsto \cos x$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3(\sin x)^2 \cos x = 3\cos x \sin^2 x.$$

2. Soit u une fonction dérivable sur D_u. Alors, pour $f : x \mapsto x^3$, la fonction $f \circ u$ est définie, pour tout $x \in D_u$, par $(f \circ u)(x) = u^3(x)$. Comme $f' : x \mapsto 3x^2$, alors

$$\forall x \in D_u, \quad (f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3\big(u(x)\big)^2 u'(x) = 3u'(x)u^2(x).$$

3. Soit v une fonction dérivable sur D_v telle que v ne s'annule pas sur D_v. Alors, pour $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, la fonction $f \circ v$ est définie sur D_v par $f \circ v : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$. Comme $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, alors

$$\forall x \in D_v, \quad (f \circ v)'(x) = f'\big(v(x)\big)v'(x) = -\frac{1}{v^2(x)}v'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Ainsi, on retrouve la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Remarque

A l'exception des valeurs absolues et des racines carrées, la plupart des fonctions que l'on manipule sont dérivables sur leur ensemble de définition.
Pour le justifier, il suffit de vérifier que la fonction étudiée est combinaison linéaire, produit, quotient et/ou composée de fonctions usuelles dérivables sur leur domaine de définition.

Propriétés : *Dérivées des fonctions composées usuelles*

Soit u une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonctions	*Dérivées*	*Condition*	*Fonctions*	*Dérivées*	*Condition*
u^n	$nu'u^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$	e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$	$-$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$	$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	$u \neq 0$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$	$\sin u$	$u' \cos u$	$-$
$\dfrac{1}{u^n}$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$	$u \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$	$\cos u$	$-u' \sin u$	$-$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	$u > 0$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\tan u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Remarque

Le tableau précédent se déduit de la formule $(f \circ u)' = (f' \circ u)u'$.

Exercice 2.

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis justifier que ces fonctions sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1) $f_1 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-3}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

3 Dérivées successives

Définitions : *Dérivée seconde et fonctions de classe $\mathcal{C}^2$*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- ▷ La dérivée de la fonction f', si elle existe, est appelée **dérivée seconde** de la fonction f et est notée f'' ou $f^{(2)}$, c'est-à-dire $f'' = (f')'$.
- ▷ Si f est deux fois dérivable sur I et de dérivée seconde f'' continue sur I, alors f est dite de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^2(I)$.

Exemples

- ▷ Soit la fonction $f : x \mapsto x^5 + 3x + \sin x$.
  Sa dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 + 3 + \cos x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = (f')'(x) = 20x^3 - \sin x.$$

De plus, puisque f'' est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

▷ La fonction $f : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}_+$, mais elle n'est pas dérivable en 0. Donc, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Définitions : *Dérivées successives*

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

▷ La **dérivée d'ordre** n de f (ou **dérivée** n**-ième** de f), notée $f^{(n)}$, est définie, lorsqu'elle existe, par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} f^{(n)} &= \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \\ f^{(0)} &= f. \end{cases}$$

▷ Si f est n fois dérivable sur I et de dérivée n-ième $f^{(n)}$ continue sur I, alors elle est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

▷ De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Dans ce cas, f est dite **indéfiniment dérivable**.

Exemples

▷ Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x + 2$. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et la dérivée seconde de f est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 2.$$

La fonction f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(x) = 0$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$, on obtient $f^{(n)} = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.
Plus généralement, toute fonction polynômiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f''(x) = (f')'(x) = \mathrm{e}^x, \quad f^{(3)}(x) = (f'')'(x) = \mathrm{e}^x, \quad \text{etc.}$$

Ainsi, par récurrence, il est possible de montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)} : x \mapsto \mathrm{e}^x .$$

On en déduit que la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Calculer les dérivées quatrièmes des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto -\frac{5}{3}x^3 + x + \frac{7}{5}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \ln|x|$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Soient f la fonction valeur absolue et $h \in \mathbb{R}$.

▷ Si $h > 0$, on a
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = 1,$$
d'où
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1.$$

▷ Si $h < 0$, on a
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = -1,$$
d'où
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1.$$

On en déduit que $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'admet pas de limite quand $h \to 0$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'Exercice 2.

1) On a $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Alors f_1 est dérivable sur D_{f_1} comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in D_{f_1}$,
$$f_1'(x) = \frac{3(x-3)-(3x+1)}{(x-3)^2} = -\frac{10}{(x-3)^2}.$$

2) Comme $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$, on a $D_{f_2} = \mathbb{R}$. Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in D_{f_2}$,
$$f_2'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}.$$

3) On a $D_{f_3} = \mathbb{R}^*$. Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in D_{f_3}$, $f_3'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Correction de l'Exercice 3.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -5x^2 + 1$, $f_1''(x) = -10x$, $f^{(3)}(x) = -10$ et $f^{(4)}(x) = 0$.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$, $f^{(n)}(x) = 0$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}$ et $f_2''(x) = 9\,\mathrm{e}^{3x}$, $f_2^{(3)}(x) = 27\,\mathrm{e}^{3x}$, $f_2^{(4)}(x) = 81\,\mathrm{e}^{3x}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f_3''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f_3^{(3)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f_3^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.

Chapitre 2

Feuille d'exercices de la séquence 1

Exercice 1.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f_1 : x \mapsto 2x^2 - 3x - \dfrac{1}{2}$, **b)** $f_2 : x \mapsto x \ln x$, **c)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1-2x}$,

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x-3}{2x-1}$. **e)** $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$, **f)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2-3x+1}$.

2) Justifier que les fonctions ci-dessus sont dérivables sur leur domaine de définition, puis calculer leurs dérivées.

Exercice 2.

Soit u une fonction réelle dérivable sur l'intervalle I. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la formule $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$:

1) $f_1 : x \mapsto u^7(x)$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{u^3(x)}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \sqrt{u(x)}$,

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$, **5)** $f_5 : x \mapsto e^{u(x)}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \ln|u(x)|$.

Exercice 3.

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 3}$, **b)** $f_2 : x \mapsto \tan^3(x)$, **c)** $f_3 : x \mapsto \sqrt{\exp(-x)}$,

d) $f_4 : x \mapsto \exp(x^2+1)$, **e)** $f_5 : x \mapsto \ln(3\ln x)$, **f)** $f_6 : x \mapsto \ln|\cos x|$.

2) Justifier que les fonctions précédentes sont dérivables sur leur domaine de définition, puis calculer leurs dérivées.

Exercice 4.

Soient f une fonction définie sur I et $a \in I$.
Montrer que si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Exercice 5.

Soit la fonction $f := \sin$.

a) Donner la dérivée de f. En déduire la valeur de f' en 0.

b) Écrire le taux d'accroissement pour la fonction f en 0.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 6.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes dont on précisera le domaine de définition :

1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x^2+1}{x+2}}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, **3)** $f_3 : x \mapsto \left(\ln(x^2+1)\right)^7$,

4) $f_4 : x \mapsto (\sin x)^3(\cos x)^3$, **5)** $f_5 : x \mapsto \sqrt{1+x^2(\sin x)^2}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{\mathrm{e}^{1/x}+1}$.

Exercice 7.

Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^3 - 8x - 9$, **2)** $f_2 : x \mapsto \ln(x^2)$, **3)** $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{4-x^2}$,

4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x-1}$, **5)** $f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-1}$, **6)** $f_6 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$,

7) $f_7 : x \mapsto \cos(x^2)$, **8)** $f_8 : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}$, **9)** $f_9 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$.

Exercice 8.

Déterminer les dérivées successives de sin et de cos.

Exercice 9.

Soit f une fonction réelle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors f' est impaire sur $\mathbb{R}$ (*pour la définition de fonction paire et impaire faire référence à l'exercice 8 de la feuille d'exercices de la séquence 1 du chapitre 3*).

2) Montrer que si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est T-**périodique** si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Montrer que si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors f' est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}$, **2)** $f_2 : x \mapsto \cos(3x+1)$,

Exercice 11.

1) Montrer que toute fonction $f : x \mapsto Ce^{3x}$, où C est une constante réelle, satisfait l'équation $f' - 3f = 0$ dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que toute fonction $f : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$, où A et B sont des constantes réelles, satisfait l'équation $f'' + 4f = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 - Séquence 2

L'étude d'une fonction

4 Image d'une partie de $\mathbb{R}$ par une fonction

Rappel – *Antécédent*

Soit f une fonction réelle et soit $y \in \mathbb{R}$. Tout élément $x \in D_f$ tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y par f.

Définitions : *Image de x, image de I, image de f*

Soit f une fonction réelle et soit $I \subset D_f$.

- ▷ Si $x \in D_f$, le réel $y = f(x)$ est appelé **image** de x par f.
- ▷ L'ensemble des éléments de la forme $f(x)$, où $x \in I$ s'appelle **image** de I par f et il se note $f(I)$. Autrement dit,

$$f(I) := \{y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } \ x \in I \ \text{ tel que } \ y = f(x)\}.$$

- ▷ L'ensemble $f(D_f)$ s'appelle simplement l'**image** de f.

Notation

En mathématiques, le symbole $\exists$ signifie **il existe**.
Ainsi, la définition

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } \ x \in I \ \text{ tel que } \ y = f(x)\}.$$

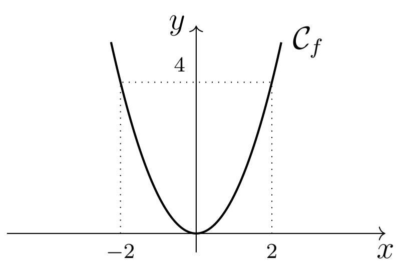
s'écrit

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in I, y = f(x)\}.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x^2$. Alors :

- ▷ $f(-2) = f(2) = 4$,
- ▷ $f(D_f) = f(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$
- ▷ $f(\,]2; +\infty[\,) = \,]4; +\infty[$
- ▷ $f\ ]-2; 2[\,) = [0; 4[$

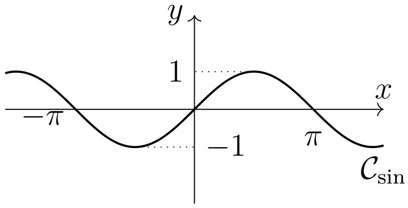


Théorème

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leq b$ *et* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, il existe* $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $c \leq d$ *tels que* $f([a;b]) = [c;d]$.
Plus généralement, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Attention
Les bornes de l'intervalle image, c et d, n'ont en général rien à voir avec $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple
Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \sin x$. Alors :
$f([-\pi;\pi]) = [-1;1]$ tandis que
$f(-\pi) = f(\pi) = 0$



Les images des bornes de l'intervalle ne sont pas les bornes de l'ensemble image :

$$f([-\pi;\pi]) \neq [f(-\pi); f(\pi)] .$$

Exercice 1.
Donner l'ensemble image des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto x^3$, **2)** $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, **3)** $f_3 : x \mapsto \sin x$,

4) $f_4 : x \mapsto \tan x$, **5)** $f_5 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, **6)** $f_6 : x \mapsto \ln x$.

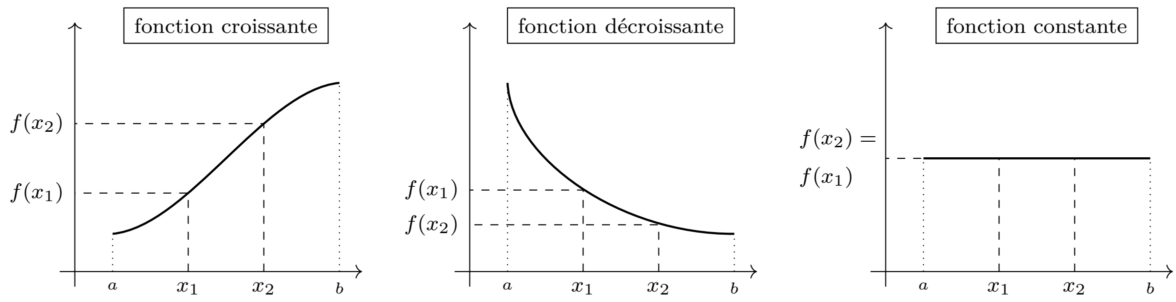
5 Étude des variations d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

- ▷ La fonction f est dite **croissante** sur D si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ▷ La fonction f est dite **décroissante** sur D si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \leq x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ▷ La fonction f est dite **constante** sur D si, pour tous x_1 et x_2 dans D, on a $f(x_1) = f(x_2)$.
- ▷ La fonction f est dite **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D.

Remarque – *Interprétation graphique*
Voici la représentation graphique d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante et d'une fonction constante sur l'intervalle $[a;b]$.



Définition

- ▷ Si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$, la fonction est dite **strictement croissante**.
- ▷ Si, pour tous x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$, la fonction est dite **strictement décroissante**.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tous $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \leq x_2$, on a

$$x_1 \leq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{x_1}.$$

Exercice 2.

1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Attention

La monotonie (croissante ou décroissance) d'une fonction dépend de l'intervalle considéré. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Définition : *Étude des variations d'une fonction*

On appelle **étude des variations** d'une fonction réelle f, l'étude qui consiste à déterminer les intervalles du domaine de définition où la fonction est croissante et ceux où elle est décroissante.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. *Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.*
2. *Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.*
3. *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, puisque $f' < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque

Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I. Et si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
Attention, ces conditions ne sont pas réciproques. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée en 0 est nulle.

Méthode – *Étude des variations d'une fonction*

1. Calculer f'.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Déterminer les intervalles de x pour lesquels $f'(x) \leq 0$ ou $f'(x) \geq 0$.
4. Dresser le tableau dit **de variations** de la fonction résumant les variations de la fonction.

Attention

Pour pouvoir étudier les variations d'une fonction, il est nécessaire de connaître son domaine de définition. Une fois déterminé, il suffit d'étudier le signe de la dérivée seulement sur ce domaine.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Donc

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1, 1\},$$

et

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \ ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\ .$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On remarquera que pour remplir ce tableau il est nécessaire au préalable de calculer les limites aux bornes du domaine de définition.

D'après le tableau de variations, la fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$, et elle est décroissante sur les intervalles $[-1;0[$ et $]0;1]$.

Remarque

Pour étudier le signe de la dérivée, on peut aussi utiliser un *tableau de signes*. Pour l'exemple précédent, cela donne :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 3.

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2+2x+9}.$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Calculer la dérivée f' de f.

3) En déduire les variations de f.

Propriété : *Image d'un intervalle par une fonction continue monotone*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $I := [a;b]$. Soit f une fonction continue et croissante de I dans $\mathbb{R}$. L'image de I par f est alors

$$f(I) = [f(a);f(b)].$$

Remarques

- De même, si f est une fonction continue et décroissante sur I, on aura

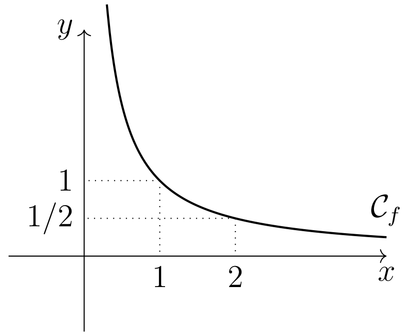
$$f(I) = [f(b);f(a)].$$

- Le résultat reste vrai pour des intervalles ouverts et des intervalles avec des bornes infinies, en passant aux limites.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On a vu auparavant que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

On voit bien sur le graphe que
$f([1;2]) = [f(2); f(1)] = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
$f(\,]0;1[\,) = \left]f(1); \lim_{x\to 0^+} f(x)\right[=]1;+\infty[$.



Exercice 4.

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto (x^2 - 3)\,\mathrm{e}^x \,.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer la dérivée de f.

3) En déduire les variations de f.

4) En déduire $f([0;1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

6 Étude de fonctions

Méthode – *Étude de fonctions*

L'étude d'une fonction f consiste à :

1. déterminer le domaine de définition D_f de f,
2. étudier les limites de f aux bornes de D_f,
3. étudier la continuité de f sur D_f,
4. étudier la dérivabilité de f sur D_f,
5. déterminer la dérivée f' de f,
6. étudier le signe de f' en résolvant l'inéquation $f'(x) \geq 0$,
7. dresser le tableau de variations de f.

Exercice 5.

Réaliser une étude complète de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x} - 2\ln x.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) $f_1(D_{f_1}) = \mathbb{R}$.

2) $f_2(D_{f_2}) = \mathbb{R}_+^*$.

3) $f_3(D_{f_3}) = [-1; 1]$.

4) $f_4(D_{f_4}) = \mathbb{R}$.

5) $f_5(D_{f_5}) = \mathbb{R}_+^*$.

6) $f_6(D_{f_6}) = \mathbb{R}$.

Correction de l'Exercice 2.

1) Pour tous nombres réels x_1 et x_2 non nuls,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Or, pour tous nombres réels $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ tels que $x_1 < x_2$, on a

$$x_1 - x_2 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 > 0, \quad \text{donc} \quad f(x_1) - f(x_2) < 0 \quad \text{soit} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Par contre, pour tous nombres réels $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ tels que $x_1 < x_2$, on a

$$x_1 - x_2 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 < 0, \quad \text{donc} \quad f(x_1) - f(x_2) > 0 \quad \text{soit} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Donc f est strictement décroissante sur $]\infty, 0]$.

2) Pour tous nombres réels x_1 et x_2 non nuls,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}.$$

Or, pour tous nombres réels $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ tels que $x_1 < x_2$, on a

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \text{et} \quad x_1 x_2 > 0, \quad \text{donc} \quad f(x_1) - f(x_2) > 0 \quad \text{soit} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Donc f est strictement décroissante sur $]\infty, 0[$.
Est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$? Non, si on prend $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, on a $x_1 < x_2$ mais $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$.

Correction de l'Exercice 3.

1) L'expression $f(x)$ existe seulement si $x^2 + 2x + 9 \neq 0$. Or, $\Delta = -32 < 0$. D'où, le polynôme $x^2 + 2x + 9$ ne possède pas de racines réelles. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient et la somme de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 9) - x(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 9)^2} = \frac{-x^2 + 9}{(x^2 + 2x + 9)^2}.$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 9 = \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3, 3\}.$$

Alors, on a le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$-x^2+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+2x+9)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

Correction de l'Exercice 4.

1) On a $D_f = \mathbb{R}$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le produit et la somme de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (x^2-3)\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x = (x^2+2x-3)\,\mathrm{e}^x\,.$$

3) Comme la fonction e est strictement positive sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3, 1\}.$$
Alors, on a le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$6\,\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$-2\,\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) D'après le tableau des variations, f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, donc
$$f([0;1]) = [f(1); f(0)] = [-2\,\mathrm{e}; -3].$$
De plus, $f(\mathbb{R}_+) = [-2\,\mathrm{e}, +\infty[$.

Correction de l'Exercice 5.

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \dfrac{1}{x} - 2\ln x = \lim\limits_{x\to 0} 1 - \dfrac{1}{x}(1 - 2x\ln x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} - 2\ln x = -\infty$

3) La fonction f est continue et dérivable sur son domaine de définition car somme de fonctions usuelles

4) $\forall\, x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1-2x}{x^2}$

5) Le tableau de variations est le suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

Chapitre 2

Feuille d'exercices de la séquence 2

Exercice 1.

Soit g la fonction définie par

$$g : x \mapsto \frac{x^2+5}{x+2}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Quelles sont les limites aux bornes du domaine de définition de g ?

3) Calculer la dérivée de g et établir le tableau de variations de g.

4) La fonction g est-elle monotone sur l'intervalle $]-2;+\infty[$?

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto |x|$. Déterminer :

1) $f(\{-1,3\})$, **2)** $f([-3;-1])$, **3)** $f([-3;1])$.

Exercice 3.

Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto 1 - \ln x + 2x^2$.

1) Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g.

2) Justifier que g est dérivable sur D_g et montrer que $g' : x \mapsto \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.

3) Étudier le signe de g' sur D_g.

4) Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

5) En déduire que, pour tout $x \in D_g$, $g(x)$ est strictement positif.

Exercice 4.

Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**, notées respectivement ch et sh, sont les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1) Montrer que ch est paire et sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

3) Étudier les variations de ces fonctions.

Exercice 5.

Réaliser une étude complète de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x - 1 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right).$$

Exercice 6.

Soit f une fonction croissante sur $D \subset \mathbb{R}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction λf est croissante sur D.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Montrer que la fonction λf est décroissante sur D.

Exercice 7.

Soient f et g deux fonctions croissantes et positives sur $D \subset \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$.

1) Pourquoi l'inégalité $f(x) \leq f(y)$ est-elle vérifiée ? En déduire que $f(x)g(x) \leq f(y)g(x)$.

2) Similairement, montrer que l'inégalité $f(y)g(x) \leq f(y)g(y)$ est vérifiée.

3) En utilisant les questions précédentes, justifier que la fonction fg est croissante sur D.

Exercice 8.

Soient I et J deux intervalles. Soit f une fonction strictement monotone et définie sur I et à valeurs dans J. Soit g une fonction définie et strictement monotone sur J.

1) Montrer que lorsque f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est strictement croissante sur I.

2) Montrer que lorsque f et g ont des sens de variation différents, alors $g \circ f$ est strictement décroissante sur I.

Exercice 9.

En étudiant le sens des variations de la fonction $f : x \mapsto \sin x - x$ sur $\mathbb{R}_+$, en déduire le signe de f puis la propriété :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin x \leq x.$$

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que $f = \dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$.

3) Montrer que la fonction f est une fonction impaire.

4) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer le signe de f.

Exercice 11.

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T (en K) sont animées d'une vitesse v (exprimée en cm.s^{-1}). Cet état d'équilibre est caractérisé par la **fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann** définie par

$$\forall\, v \in \mathbb{R}_+ \qquad f(v) \coloneqq cv^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

où m est la masse d'une molécule, et c et k sont des constantes positives.

Montrer que la valeur maximale de f a lieu en $v = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$.

7 Étude de la bijectivité d'une fonction

Définition : *Fonction bijective ou bijection*

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Soit $f : E \to F$ une fonction définie sur E. La fonction f est dite **bijective** (ou f est une **bijection**) de E sur F si

tout élément $y \in F$ possède un **unique** antécédent $x \in E$ par f.

Notation

En mathématiques, le symbole $\exists!$ signifie **il existe un et un seul.**

Ainsi, la propriété

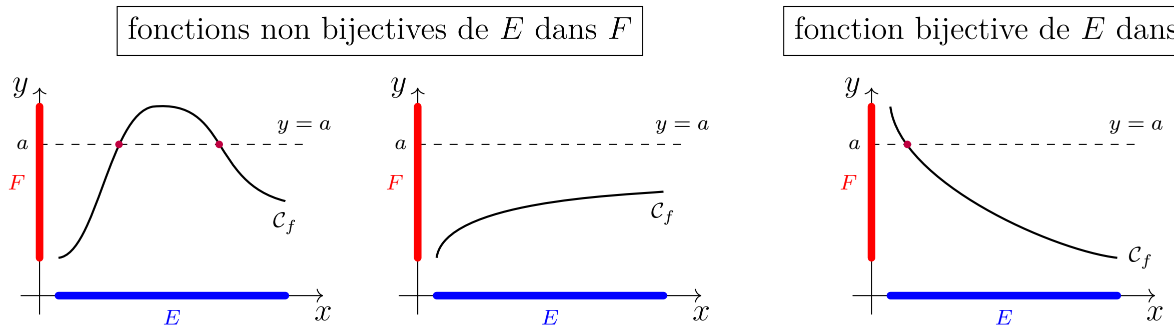
tout élément $y \in F$ possède un **unique** antécédent $x \in E$ par f

s'écrit

$$\forall\, y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ y = f(x).$$

Remarque — *Interprétation géométrique*

Une fonction f est bijective de E sur F si, pour tout $a \in F$, la droite Δ d'équation $y = a$ intersecte la courbe $\mathcal{C}_f$ en un unique point de E.



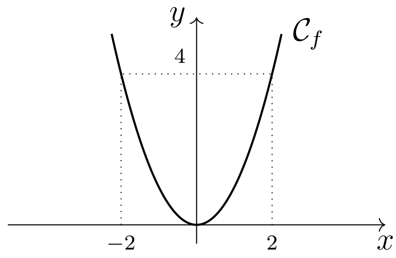
Dans le premier cas, à $y = a$ correspondent deux antécédents $x \in E$. Dans le deuxième cas, l'élément $y = a$ de F ne possède pas d'antécédent. Seul le troisième cas est une bijection.

Attention

Pour une bijection il faut toujours préciser E et F.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ dont voici le graphe



- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, $y = 4$ possède deux antécédents : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$.
- ▷ La fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$. En effet, $y = -1$ ne possède pas d'antécédents car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = x^2$: il s'agit de l'élément $x := \sqrt{y}$.

Exercice 1.

1) La fonction exp est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$? de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

2) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$? de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

3) La fonction ln est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? de $[1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$? de $]0; 1]$ sur $\mathbb{R}_-$?

Théorème : *Théorème de la bijection*

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Méthode – *Montrer qu'une fonction réalise une bijection*

- ▷ Construire le tableau de variations de f.
- ▷ Montrer que f est strictement monotone sur I (soit strictement croissante, soit strictement décroissante).
- ▷ On détermine l'image $J := f(I)$ via le tableau de variations.

Exemple

Soit la fonction $g : x \mapsto \exp(x-1) - x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

- ▷ La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$. Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction g est une bijection de $]-\infty;1]$ sur $[0;+\infty[$.

- ▷ La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Ainsi, la fonction g est une bijection de $]1;+\infty]$ sur $[0;+\infty[$.

8 Fonctions réciproques

Définition : *Fonction réciproque*

Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une bijection. La fonction $f^{-1} : F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe son antécédent par f s'appelle la **fonction réciproque de** f. On a donc :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$$

Attention

- ▷ Il ne faut pas confondre $f^{-1}(y)$ et $(f(y))^{-1}$: $f^{-1}(y) \neq \dfrac{1}{f(y)}$.
- ▷ On ne peut parler de f^{-1} que si f est une bijection.

Propriétés

Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Supposons que $f : E \to F$ est une bijection. Alors :

- ▷ *pour tous éléments $x \in E$ et $y \in F$, on a l'équivalence*

$$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y).$$

- ▷ *pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$.*
- ▷ *pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$.*

Exemples

- ▷ On a vu que la fonction $f : x \mapsto x^2$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{y}.$$

Donc la bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$.

- ▷ La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = \mathrm{e}^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y.$$

Donc la bijection réciproque de la fonction exp est la fonction ln.

Propriétés

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une bijection.

- ▷ *Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.*
- ▷ *Si f est strictement monotone, alors f^{-1} a le même sens de variations que f.*

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Sa fonction réciproque $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$ est aussi strictement croissante.

Propriété

Soit f une bijection définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Notons J l'intervalle $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors, pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. On a vu auparavant que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, elle est dérivable, sa dérivée vaut $f'(x) = 2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et s'annule en $x = 0$. Donc la fonction réciproque $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Remarque – *Moyen mnémotechnique*

La formule de la dérivée de la fonction réciproque vient des propriétés des fonctions réciproques et de la formule de la dérivée d'une fonction composée. On a vu que pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$. Intuitivement, si on dérive, on obtient :

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1,$$

c'est-à-dire

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Or, $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$, donc on obtient :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ la fonction exponentielle. Retrouver la dérivée de sa fonction réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$ en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque.

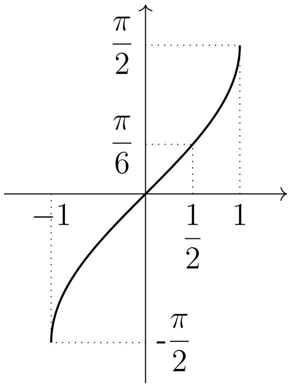
9 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

▷ La fonction sinus définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.

La bijection réciproque de la fonction sinus s'appelle **arcsinus** et se note

$$\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Son graphe est représenté ci-dessous



De plus, on retiendra les quelques valeurs remarquables suivantes

Des valeurs remarquables

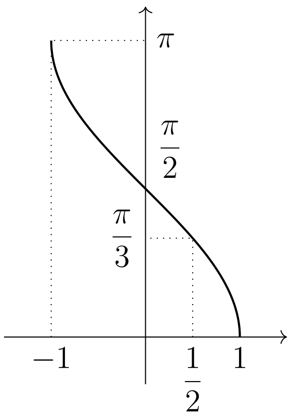
y	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin x$
$\arcsin y$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	x

▷ La fonction cosinus (notée cos) définit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$.

La bijection réciproque de la fonction cosinus s'appelle **arccosinus** et se note

$$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi].$$

Son graphe est représenté ci-dessous



De plus, on retiendra les quelques valeurs remarquables suivantes

Des valeurs remarquables

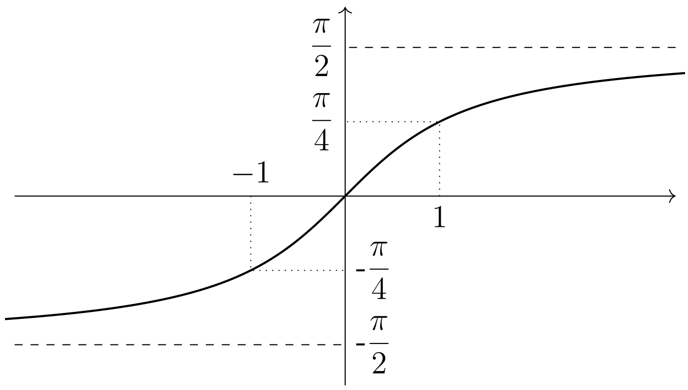
y	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x$
$\arccos y$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	x

▷ La fonction tangente (notée tan) définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque de la fonction tangente s'appelle **arctangente** et se note

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

Son graphe est représenté ci-dessous



De plus, on retiendra les quelques valeurs remarquables suivantes

Des valeurs remarquables

y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\tan x$
$\arctan y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	x

Propriétés : *Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques*

▷ *La fonction arcsinus est dérivable sur* $]-1;1[$ *et on a :*

$$\forall y \in \,]-1;1[\,, \quad (\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

▷ *La fonction arccosinus est dérivable sur* $]-1;1[$ *et on a :*

$$\forall y \in \,]-1;1[\,, \quad (\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

▷ *La fonction arctangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\arctan)'(y) = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1) ▷ La fonction exponentielle n'est pas bijective $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car l'ensemble d'arrivée de l'exponentielle est $\mathbb{R}_+^*$.

▷ La fonction exponentielle est bijective $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car à tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ il correspond un seul $x \in \mathbb{R}$.

▷ La fonction exponentielle n'est pas bijective $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car à tout $y < 1$ il ne correspond aucun $x \in \mathbb{R}_+$.

2) ▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ car l'ensemble d'arrivée de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.

▷ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car à tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ il correspond un seul $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3) ▷ La fonction ln n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car le domaine est $\mathbb{R}_+^*$.

▷ La fonction ln n'est pas bijective de $[1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ car à tout $y < 0$ il ne correspond aucun $x \in [1; +\infty[$.

▷ La fonction ln est bijective de $]0; 1]$ dans $\mathbb{R}_-$ car à tout $y \in \mathbb{R}_-$ il correspond un seul $x \in]0; 1]$.

Correction de l'Exercice 2.

On a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(^{-1}(y))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

Chapitre 2

Feuille d'exercices de la séquence 3

Exercice 1.

1) La fonction f suivante est-elle bijective ?

$$f : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

2) La fonction g suivante est-elle bijective ?

$$g : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Exercice 2.

Soit la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto x \sin x + \cos x.$$

1) Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2) En déduire que f est une bijection de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 3.

Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ?

1) $f_1 : x \mapsto \exp(x)$ de $\mathbb{R}_-$ dans $]0;1]$?

2) $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$?

3) $f_3 : x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

4) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$?

Exercice 4.

Les fonctions suivantes sont-elles bijectives sur leur domaine de définition ?

1) $f_1 : x \mapsto \ln x$,

2) $f_2 : x \mapsto \cos x$,

3) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

4) $f_4 : x \mapsto \tan x$.

Pour les fonctions qui ne sont pas bijectives, donner un intervalle où les fonctions sont bijectives.

Exercice 5.

1) Montrer que $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$ est une bijection. On note arcsin sa réciproque.

  a) Calculer $\arcsin(1)$, $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ainsi que $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

  b) Donner le domaine de dérivabilité de arcsin et calculer sa dérivée.

2) Montrer que $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ est une bijection. On note arccos sa réciproque.

a) Calculer $\arccos(1)$, $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ainsi que $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Donner le domaine de dérivabilité de arccos et calculer sa dérivée.

3) Montrer que $\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une bijection. On note arctan sa réciproque.

a) Calculer $\arctan(-1)$, $\arctan\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ ainsi que $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$.

b) Donner le domaine de dérivabilité de arctan et calculer sa dérivée.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) \coloneqq \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

1) Calculer f'.

2) En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 7.

En étudiant le sens des variations des fonctions $f : x \mapsto \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \arctan x - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

Exercice 8.

Pour les deux fonctions ci-dessous déterminer

1) le domaine de définition,

2) sur quels intervalles la fonction est bijective,

3) la réciproque.

$$f_1 : x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{2x+1}{3x+4}.$$

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x - 2\sqrt{x} + 1$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$.

2) Montrer que $f^{-1} = f$ sur $[0;1]$.

Exercice 10.

1) Soit f une fonction impaire bijective. Démontrer que sa fonction réciproque est impaire.

2) Montrer qu'une fonction paire n'est jamais bijective sur son domaine de définition.

Exercice 11.

Soit $f : x \mapsto \exp(\ln^2 x)$. Montrer que f est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera. Déterminer la bijection réciproque.