2.2 Integrais Impróprias do tipo 2

Definição 6 (Integrais impróprias do tipo 2)**.** *Nas integrais impróprias do tipo 2 os limites de integração são finitos, mas a função do integrando possui uma assíntota vertical em um dos extremos ou em um ponto do interior do intervalo* $[a,b]$*. Neste caso:*

1. *Se f for contínua em $(a,b]$ (assíntota em a), então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

2. *Se f for contínua em $[a,b)$ (assíntota em b), então*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

3. *Se f possui uma assíntota vertical em $c \in (a,b)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemplo 23. *Decida sobre a convergência da integral imprópria* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$*.*

Solução:

Observe que $x = 1$ é uma descontinuidade para a função integrando. Neste caso, trata-se do extremo inferior do intervalo. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx &= \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx \\
&= \lim_{c\to 1^+}\left[\frac{-1}{x-1}\right]_c^2 \\
&= -1 + \frac{1}{c-1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Portanto, a integral diverge.

Exemplo 24. *Decida sobre a convergência da integral imprópria* $\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,dx$.

Solução:

Aqui a descontinuidade está no interior do domínio da função.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{(x-2)}\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{(x-2)}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-1)}dx \\
&= \lim_{c\to 2^-} \int_1^c \frac{1}{(x-2)}\,dx + \lim_{c\to 2^+} \int_c^2 \frac{1}{(x-2)}dx \\
&= \lim_{c\to 2^-} (ln|x-2|)_1^c + \lim_{c\to 2^+} (ln|x-2|)_c^3 \\
&= \lim_{c\to 2^-} (ln|c-2| - ln|-1|) + \lim_{c\to 2^+} (ln|c-2| - ln|1|) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Esta integral também diverge!

Observação 5. *Basta que uma das parcelas da integral divirja para que a integral divirja!*

Critério da comparação

Teorema 2. *Sejam f e g funções contínuas em $[a,\infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pra qualquer $x \geq a$. Nessas condições:*

1. *Se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge então $\int_a^\infty f(x)dx$ também converge.*
2. *Se $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge então $\int_a^\infty g(x)dx$ também diverge.*

Exemplo 25. *Decida se a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{cos^2(x)}{x^2}dx$ converge ou diverge.*

Solução:

Observe que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, pois é uma integral do tipo $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ com $p = 2$. Além disso, $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ para todo $x \geq 1$. Logo,

$$0 \leq \frac{cos^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Por comparação (teorema 2) a integral $\int_1^\infty \frac{cos^2(x)}{x^2}dx$ é convergente.

Exemplo 26. *Decida sobre a convergência da integral imprópria $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x-1)^2}\,dx$.*

Solução:

Temos que $\sqrt{1+x^2} \geq 1$ e, portanto para todo x tal que $1 \leq x \leq 2$, temos

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$$

Como $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ diverge, então $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x-1)^2}\,dx$ também diverge.

Exemplo 27. *Decida se a integral imprópria $\int_3^\infty \frac{1}{x^2 ln(x)}\,dx$ converge ou diverge.*

Solução:

Começamos por observar que se $x > e$, então $ln(x) > 1$.

Assim, $x^2 ln(x) > x^2$. Isto implica que $\dfrac{1}{x^2 ln(x)} < \dfrac{1}{x^2}$

Como a integral $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, então $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2 ln(x)}\, dx$ também converge.

Critério de comparação no limite

Teorema 3. *Sejam f e g funções contínuas em $[a, \infty)$ tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ e $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, com $0 < L < \infty$, então as integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ tem o mesmo comportamento, isto é, ambas convergem ou ambas divergem.*

Exemplo 28. *Decida se a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x}}{(2x-1)}\,dx$ converge ou diverge.*

Solução:

Temos que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge, pois é uma integral do tipo $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ com $p = \frac{1}{2}$. Pela comparação no limite temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+x}}{(2x-1)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{(2x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Como o limite do quociente resultou em um número positivo, então as integrais impróprias das duas funções têm o mesmo comportamento, ou seja, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x}}{(2x-1)}\,dx$ também é divergente!

Exemplo 29. *Decida se a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx$ converge ou diverge.*

Solução:

Temos que $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge.

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^3+2x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+x}{x^3+2x+1} = 1$. A integral $\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^3+2x+1}\,dx$ também diverge.

A seguir mostraremos um teorema que estende o critério de comparação.

Teorema 4. *Seja* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ *converge, então* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *também converge.*

Demonstração:

Se $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ converge, então $\int_a^\infty 2|f(x)|\, dx$ também converge.

Como $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)|$, então por comparação

$$\int_a^\infty (|f(x)| + f(x))\, dx$$

também converge.

Temos que $\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^\infty (|f(x)| + f(x))\, dx - \int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty$.

Isto demonstra que $\int_a^\infty f(x)\, dx$ também converge.

Exemplo 30. *Decida se* $\int_1^\infty e^{-x} cos(x)\, dx$ *converge ou diverge.*

Solução:

Observe que o critério de comparação não pode ser aplicado diretamente porque a função integrando assume valores negativos.

Temos que $0 \le |cos(x)| \le 1$ *implica em* $0 \le |e^{-x} cos(x)| \le e^{-x}$.

Como $\int_1^\infty e^{-x}\, dx$ *converge, então pelo critério de comparação a integral* $\int_1^\infty |e^{-x} cos(x)|\, dx$ *converge. Logo, pelo teorema 4* $\int_1^\infty e^{-x} cos(x)\, dx$ *também converge.*

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 18. 1. *Mostre que a integral* $\int_5^\infty \frac{cos^2(x)}{x^3}$ *converge.*

2. *Mostre que a integral* $\int_5^\infty \frac{cos(5x)}{x^3}$ *converge.*

Exercício 19. *Decida se as integrais convergem ou divergem*

1. $\int_0^\infty e^{-x} sen^4(x)dx$

2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+2x+1}dx$