Universidade Federal de Ouro Preto
Cálculo Diferencial e Integral II - MTM 123
Séries Numéricas - Parte 1

Definição 1. *Uma série numérica ou simplesmente série é uma soma "infinita"da forma:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

Claramente, a soma acima não deve ser interpretada literalmente pois não é possível somar infinitos termos e assim devemos antes de tudo esclarecer o significado da expressão acima.

Para tanto, introduzimos o conceito de sequência das *somas parciais*:

Definição 2. *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *definimos a sequência* $\{s_n\}$ *de suas somas parciais como:*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Definição 3. *Dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge para o valor s ou que tem soma s, se a sequência de suas somas parciais* $\{s_n\}$ *definidas em* (2) *converge para s, ou seja:*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \tag{3}$$

Exemplos:

1) (Séries Geométricas:) Uma *série geométrica* de razão *r* e primeiro termo *a* é a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots , \tag{4}$$

note que se $a = 0$, todos os termos da série são nulos e a série converge para 0 e se $r = 0$, todos os termos da série, exceto o primeiro, são nulos e a série converge para a.

Séries geométricas são particularmente interessantes pois sabemos calcular o valor exato de sua soma quando elas são convergentes.

Para tanto, basta lembrar que:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \tag{5}$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6}$$

E segue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7}$$

2) Decida se a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{-2n+1}$ converge ou diverge.

Note que podemos reescrever a série dada como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{-2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1},$$

e a última série é geométrica com $a = 2/3$ e razão $r = 2/9 < 1$, portanto, convergente para o valor $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{6}{7}$.

3) Expresse a dízima periódica $4,3\overline{95}$ como uma razão entre dois números inteiros.

Nesse caso,

$$4,3\overline{95} = 4,395959595\cdots = 4 + 0,3 + 0,0959595\cdots =$$

$$= 4 + 0,3 + 0,095 + 0,00095 + 0,0000095 + \cdots =$$

$$4 + \frac{3}{10} + \frac{95}{10^3} + \frac{95}{10^5} + \frac{95}{10^7} + \cdots =$$

$$= 4 + \frac{3}{10} + \frac{95}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) =$$

$$= 4 + \frac{3}{10} + \frac{95}{10^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1},$$

a última série acima é geométrica com $a = 1$ e $r = 1/100$, e portanto, converge para o valor $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{100}{99}$. Logo,

$$4,3\overline{95} = 4 + \frac{3}{10} + \frac{95}{1000} \cdot \frac{100}{99}.$$

4) Outro tipo de série cuja soma pode ser encontrada explicitamente é denominada *série telescópica*, para esse tipo de série todos os termos das somas parciais se anulam, exceto o primeiro e o último, de modo que a sequência tenha uma expressão simples para o seu enésimo termo. Suponha que queiramos determinar a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

.

Observe que, decompondo-se o termo geral em frações parciais, temos:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, a enésima soma parcial é dada por:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

E segue que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Na maioria dos casos de interesse, precisaremos apenas determinar se uma dada série é convergente ou divergente. Nesse contexto, existem diversos testes que são muito úteis. O primeiro deles se aplica a séries em geral e é denominado *Teste da divergência*:

Teorema 1 (Teste da divergência). *Se o enésimo termo de uma série a_n é tal que:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \quad \textit{não existe} \quad \textit{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0,$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

5) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{7+5n}$ diverge, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{7+5n} = \frac{3}{5} \neq 0.$

6) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ diverge, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} n$ não existe.

Observação 1: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a série pode convergir ou divergir conforme veremos adiante.

Teorema 2. *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e α uma constante qualquer, então também são convergentes as séries abaixo:*

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Exemplos:

7) Encontre a soma da série:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right]$$

Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n},$$

as séries acima são geométricas de razão $1/3$ e $1/4$, respectivamente, e portanto, possuem soma $1/2$ e $1/3$.

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Observação 2: O comportamento de uma série, ou seja, o fato dela convergir ou divergir, independe de qualquer quantidade finita de seus termos. Assim, podemos retirar um número finito qualquer de termos de uma série que ela continuará convergente ou divergente. Por exemplo, se formos capazes de mostrar que a série $\sum_{n=4}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$ é convergente também será convergente a série completa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}.$$

Testes para séries com termos não-negativos: Passamos a descrever agora diversos testes que se aplicam apenas para séries de termos não-negativos, ou seja, séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ com $a_n \geqslant 0$.

Teorema 3 (Teste da integral). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uma série de termos não-negativos tal que $a_n=f(n)$ para todo $n\geqslant n_0$ para algum $n_0\in\mathbb{N}$ e para alguma função f contínua, positiva e decrescente definida no intervalo $[n_0,+\infty)$, então:*

i) Se $\int_{n_0}^{+\infty}f(x)\,dx$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ também converge.

ii) Se $\int_{n_0}^{\infty}f(x)\,dx$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ também diverge.

Exemplos:

8) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ diverge.

Note que $a_n=\ln n/n\geqslant 0$ e que $a_n=f(n)$ para todo $n\geqslant 1$, onde $f(x)=\ln x/x$ é uma função contínua não-negativa no intervalo $[1,+\infty)$. Uma vez que $f'(x)=(1-\ln x)/x^2$, temos $f'(x)<0$ para todo $x\in[e,+\infty]$ e, portanto, f é decrescente no intervalo $[e,+\infty]$. Assim, a_n é decrescente no intervalo $[3,+\infty]$ e pelo teste da integral, basta mostrar que a integral imprópria $\int_3^{\infty}\ln x/x\,dx$ diverge.

De fato,

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln b} u\,du =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{\ln^2 b - \ln^2 3}{2} = +\infty.$$

9) A família de séries conhecidas como *p-séries* é composta por todas as séries da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real qualquer.

Note que se $p \leqslant 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, a série diverge pelo teste da divergência. Se $p > 0$, então $a_n = f(n)$ onde $f(x) = 1/x^p$ satisfaz todas as hipóteses do teste da integral e uma vez que:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{converge,} & \text{se} \quad p > 1 \\ \text{diverge,} & \text{se} \quad p \leqslant 1 \end{cases}$$

Concluímos que a p-série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge quando $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

Deste modo, a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente, pois é uma p-série com $p = 1$ enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\pi$ é convergente porque é uma p-série com $p = \pi$.

10) Decida se a série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ converge ou diverge.

Nesse caso, $a_n = f(n)$, onde $f(x) = 1/x\ln x$ satisfaz todas as condições do teste da integral. Uma vez que,

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{u}\,du =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(\ln u)_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right] = +\infty,$$

pelo teste da integral, segue que a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n\ln n$ diverge.