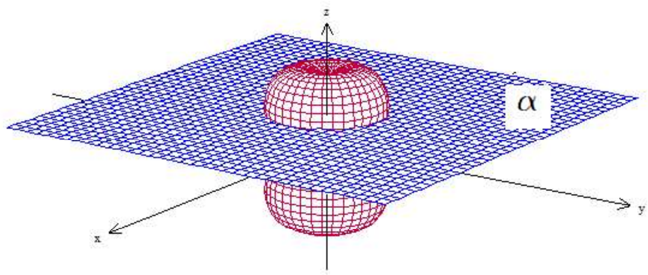
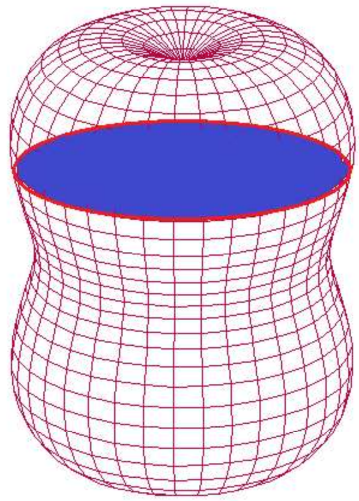
1.2 AULA 2- Volumes

Vimos no tópico anterior que uma aplicação das integrais definidas está no cálculo de áreas de regiões planas. Nesta aula ampliaremos as aplicações da integral para cálculo de volume de sólidos, comprimento de curvas e áreas de superfícies de revolução.

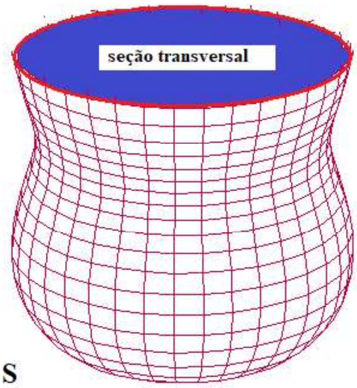
1.2.1 Volume por Fatiamento- (seções transversais)

Definição 2. *Uma seção transversal de um sólido S é a região plana formada pela interseção entre o sólido S e um plano* α.



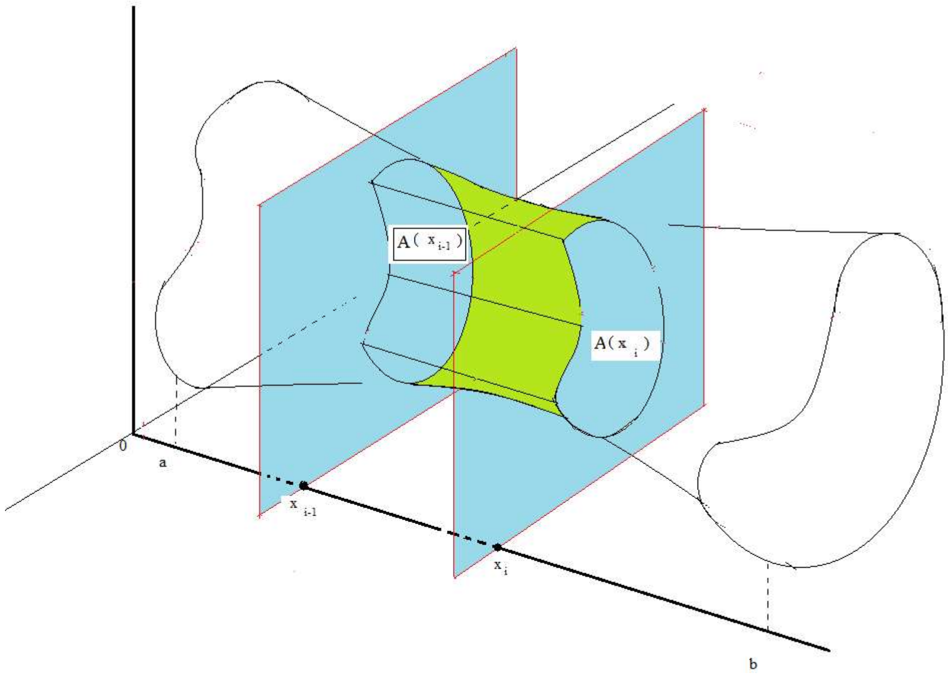


S



S

Dada uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, os planos P_{x_i}, perpendiculares ao eixo dos $x's$, em cada ponto x_i da partição, dividem o sólido em n fatias "cilíndricas"de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e área da base $A(x_i)$. O volume dessa fatia é aproximadamente $V_i = A(x_i)\Delta x_i$.



A soma do volume de todas as fatias aproxima-se do volume V do sólido, isto é, $V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i$.

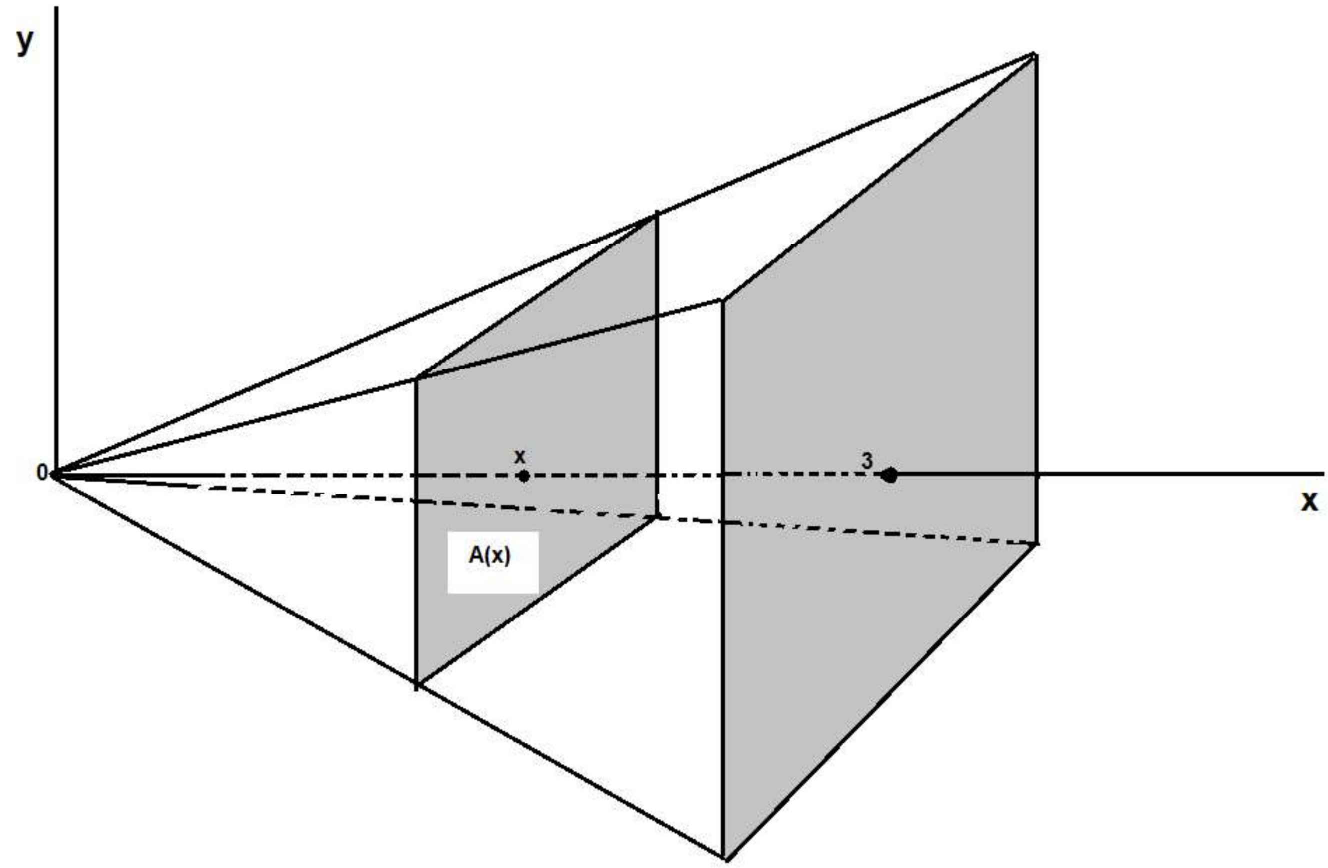
Isso é uma soma de Riemann para a função contínua $A(x)$ no intervalo $[a, b]$. O limite dessa soma é o volume do sólido. Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 3. *O VOLUME de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área da secão transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é a integral de a até b da função $A(x)$:*

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Exemplo 4. *Calcule o volume da pirâmide de base quadrada com 3 metros de lado e altura 3 metros.*

SOLUÇÃO: Desenhando a pirâmide com altura ao longo do eixo



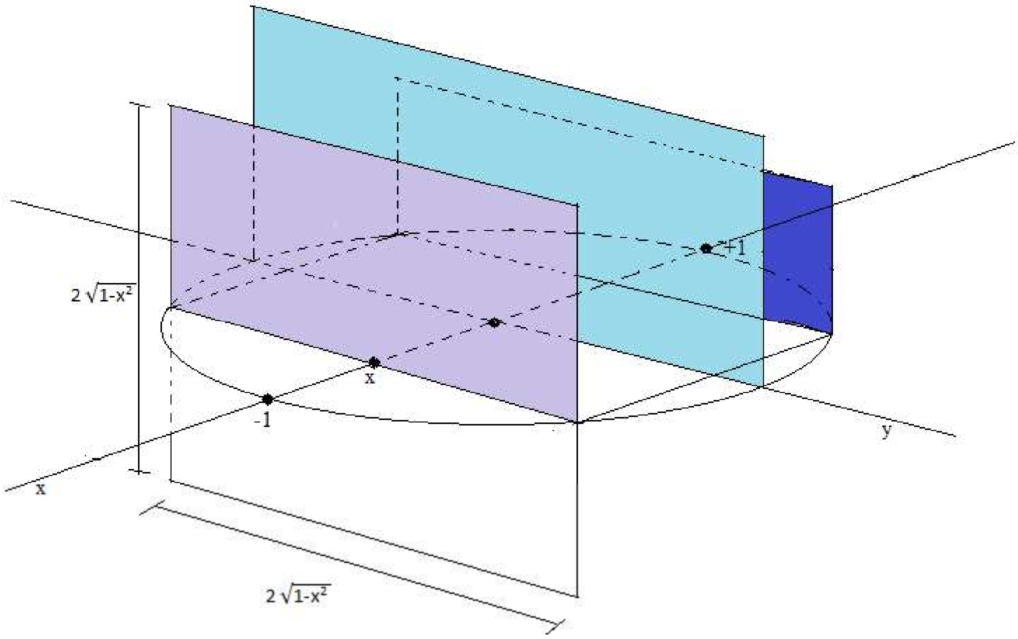
dos $x's$ e com vértice na origem temos uma seção transversal típica de área $A(x)$ obtida pela interseção da pirâmide com um plano perpendicular ao eixo dos x.

Observe que para cada x variando de $x = 0$ a $x = 3$, obtemos um quadrado de lado x. Portanto, o volume da pirâmide será:

$$V = \int_a^b A(x) = dx \int_0^3 x^2 dx = 9m^3$$

Exercício 3. *Encontre o volume do sólido que se situa entre os planos perpendiculares ao eixo x em $x = -1$ e $x = 1$ cuja seções transversais perpendiculares ao eixo x, entre esses planos, são quadrados com bases indo do semicírculo $y = -\sqrt{1-x^2}$ ao semicírculo $y = \sqrt{1-x^2}$.*

Solução:

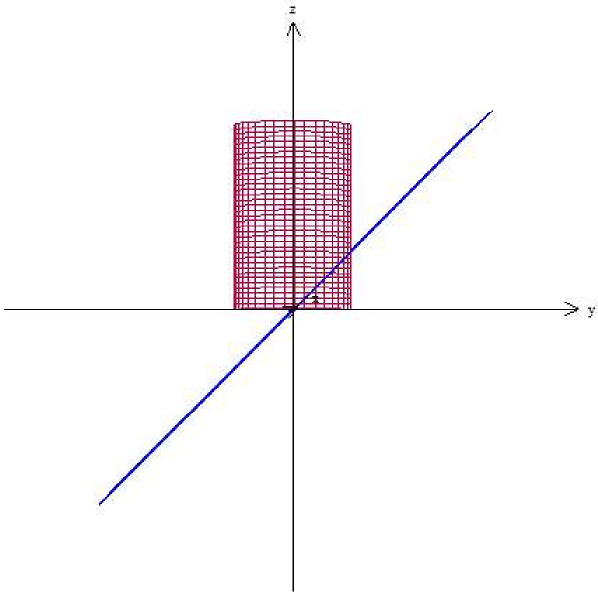


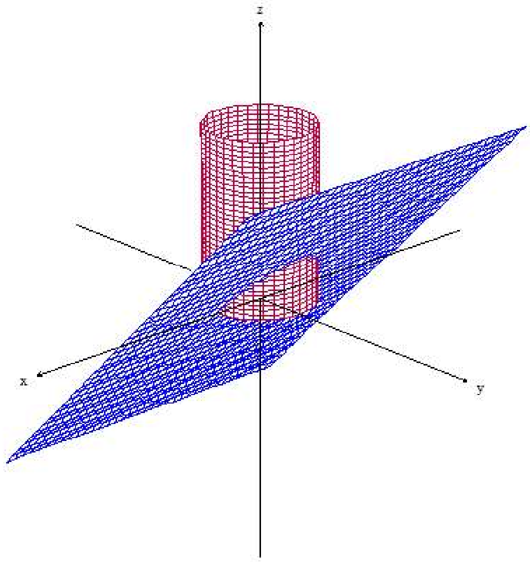
Para cada x fixado no intervalo $[-1, 1]$ a seção transversal é um quadrado cujo lado mede $2\sqrt{1-x^2}$. Logo, o volume do sólido será dado por:

$$
\begin{aligned}
V = \int_a^b A(x)dx &= \int_{-1}^{1} [2\sqrt{1-x^2}]^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4[1-x^2]dx \\
&= 4\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= 4\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{16}{3} u.v
\end{aligned}
$$

Exemplo 5. *Calcule o volume de uma cunha que é cortada do cilindro sólido de raio 1 ,* $x^2 + y^2 \leq 1$ *pelos planos* $z = 0$ *e* $z = y$

Solução:





Observe que podemos tomar seções transversais perpendiculares ao eixo dos Oy. fixado um y no intervalo $[0,1]$, cada seção será um retângulo com altura medindo $z = y$ e largura medindo $2\sqrt{1-y^2}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
V = \int_a^b A(y)dy &= \int_0^1 (y)(2\sqrt{1-y^2})dy \\
&= \int_0^1 2y(\sqrt{1-y^2})dy \\
&= -\frac{2}{3}\left[(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= 0 + \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3} u.v
\end{aligned}
$$

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 4. *as retas* $x = 0$*,* $x + 2y = 4$ *e* $x - 2y = 4$ *determinam um triângulo no plano* xy*. As secões transversais ao eixo* Ox *de um sólido que tem como base esse triângulo, são semicírculos. Calcule o volume desse sólido.*

Exercício 5. *Em uma esfera de raio 1 foi cavado um buraco cilíndrico, cujo eixo de simetria é um diâmetro máximo da esfera. Calcule o volume obtido da esfera menos o cilindro, sabendo que o raio do cilindro é* $\frac{1}{2}$.