3

Sistemas Triangulares

Sumário da Aula

3.1 Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

A resolução de sistemas de equações lineares simultâneas é um problema numérico que ocorre com muita frequência em aplicações científicas nas quais faz-se necessária a simulação de situações do mundo real. É etapa fundamental na resolução de problemas que envolvem, por exemplo, equações diferenciais parciais, determinação de caminhos ótimos em redes (grafos), regressão, sistemas não lineares, interpolação de pontos, dentre outros. Em vários problemas da Engenharia há a necessidade da resolução de sistemas de equações lineares, a título de exemplo, considere a determinação do potencial em redes elétricas, o cálculo da tensão em estruturas metálicas na construção civil, o cálculo da razão de escoamento em um sistema hidráulico com derivações, a previsão da concentração de reagentes sujeitos a reações químicas simultâneas.

Chamamos de **equação linear** toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as variáveis; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são os coeficientes das variáveis, e b é o termo independente. A solução de uma equação linear é composta pelos valores das variáveis que satisfazem à equação, também chamados de *raízes da equação*.

Um **sistema de equações lineares** é um conjunto de n equações lineares:

$$AX = B \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

em que A é a matriz dos coeficientes das incógnitas, X o vetor coluna das incógnitas e B o vetor coluna dos termos independentes. A notação $AX = B$ facilita o uso algébrico do sistema linear. A segunda notação é chamada de forma desenvolvida e a terceira é a forma matricial que possibilita a implementação computacional.

As n equações de um sistema de equações lineares podem ser armazenada através de uma estrutura de dados matricial única, também conhecida como matriz aumentada (ou matriz expandida) do sistema linear. A **matriz aumentada** do sistema é obtida acrescentando à matriz dos coeficientes o vetor B dos termos independentes:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & |b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & |\vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & |b_n \end{bmatrix}$$

A solução de um sistema de equações lineares $AX = B$ é um vetor S que satisfaz, de forma simultânea, a todas as equações do sistema, ou seja, $AS = B$.

Com relação ao número de soluções, um sistema de equações lineares simultâneas pode ser classificado como:

(I) - Compatível determinado: admite uma única solução.

(II) - Compatível indeterminado: admite um número infinito de soluções.

(III) - Incompatível: não admite solução.

Um sistema de equações lineares será compatível determinado se, e somente se, a matriz dos coeficientes for não singular, ou seja, quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo ($det(A) \neq 0$). Caso contrário será compatível indeterminado ou incompatível.

Se todos os termos independentes são nulos, isto é, se $B = [0, \cdots, 0]$, o sistema é dito homogêneo. Todo sistema homogêneo é compatível, pois admite pelo menos a solução trivial $x = [0, \cdots, 0]$.

De uma forma mais ampla, pode-se considerar que resolver um sistema de equações é mais do que determinar um vetor x, uma vez que ele pode não existir ou não ser único. Resolver um sistema consiste em diagnosticar em qual das três situações ele se enquadra.

3.2 Métodos Diretos

Os métodos de solução de sistemas de equações lineares estão agrupados em dois tipos de métodos numéricos:

(a) **Métodos Diretos:** são aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número finito de operações aritméticas. Nos métodos diretos, a solução é obtida com a realização de operações algébricas nas equações.

(b) **Métodos Iterativos:** são aqueles que para resolver o sistema $AX = B$ é atribuído um candidato para a solução e posteriormente gerada uma sequência recursiva de vetores colunas, $x^{(k)}, k = 1, 2, \cdots$, cujo limite, se existir, será a solução procurada. Em outras palavras, uma solução inicial aproximada é assumida e utilizada em um processo iterativo para que soluções mais precisas sejam obtidas de forma sucessiva.

Os **métodos diretos**, geralmente, são utilizados na resolução de sistemas de equações lineares densos e de pequeno porte. Entenda-se por sistema denso aquele no qual os componentes da matriz dos coeficientes são em maioria não nulos e um sistema de pequeno porte aquele que possui uma dimensão pequena. Pertencem à classe dos métodos diretos todos os que são estudados nos cursos de 1 e 2 graus como, por exemplo, a **Regra de Cramer** e **Método de Gauss-Jordan**. Nas próximas seções são apresentados os métodos diretos de Eliminação de Gauss e Decomposição LU. Em geral, estes métodos transformam o sistema linear original em um sistema equivalente, cuja solução é obtida através da resolução de sistemas lineares triangulares.

3.2.1 Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Considere o sistema linear $LX = C$, onde a matriz dos coeficientes $L = [l_{ij}],\ i, j = 1, 2, \cdots, n$ é uma matriz triangular inferior, ou seja, é uma matriz quadrada que tem seus coeficientes $(l_{ij}) = 0$ para $i < j$. O sistema $LX = C$ é escrito como:

$$\begin{cases} l_{11}x_1 & = c_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & = c_2 \\ & \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + lnnx_n & = c_n \end{cases}$$

A solução do sistema $LX = C$ é obtida por meio de **substituições sucessivas**:

1. **Cálculo de x_1:** $l_{11}x_1 = c_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{c_1}{l_{11}}$
2. **Cálculo de x_2:** $l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$
3. **Cálculo de x_3:** $l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3 \quad \longrightarrow \quad x_3 = \dfrac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}}$

$$\vdots$$

4. **Cálculo de x_n:** $l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n = c_n \quad \longrightarrow \quad x_n = \dfrac{c_n - l_{n1}x_1 - \cdots - l_{nn-1}x_{n-1}}{l_{nn}}$

De forma geral, para construir o algoritmo que calcula a solução do sistema linear triangular inferior, considere a linha genérica para o cálculo da variável x_i :

$$l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 \cdots + l_{ii}x_i = c_i$$

isolando x_i, temos:

$$x_i = \frac{c_i - l_{i1}x_1 - l_{i2}x_2 - l_{i3}x_3 - \cdots - l_{ii-1}x_{i-1}}{l_{ii}} = \frac{c_i - (l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 + \cdots + l_{ii-1}x_{i-1})}{l_{ii}}$$

ou ainda:

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad i = 2, \cdots, n \tag{3.1}$$

Temos, assim, o seguinte algoritmo:

1: $x_1 = \dfrac{c_1}{l_{11}}$;
2: **para** $(i = 2)$ até n **faça**
3: $\quad x_i = \dfrac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}$;
4: **fim para**

Algoritmo 1: Substituições Sucessivas.

Exemplo 6. Calcule $\begin{cases} 2x_1 & = 6 \\ x_1 + 4x_2 & = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições sucessivas:

Solução: dado o Algoritmo 1, temos:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} = \frac{7 - (1)(3)}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - (l_{31}x_1 + l_{32}x_2)}{l_{33}} = \frac{2 - [(1)(3) + (-1)(1)]}{1} = 0$$

Portanto, a solução do sistema é $x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$.

Sistema Triangular Superior

Considere o sistema linear $UX = D$, onde a matriz dos coeficientes $U = [u_{ij}],\ i, j = 1, 2, \cdots, n$ é uma matriz triangular superior, ou seja, é uma matriz quadrada que tem seus coeficientes $(u_{ij}) = 0$ para $i > j$. O sistema $UX = D$ é escrito como:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n & = d_1 \\ \qquad\quad u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n & = d_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad u_{nn}x_n & = d_n \end{cases}$$

A solução do sistema $UX = D$ pode ser obtida por meio de **substituições retroativas:**

1. **Cálculo da variável x_n:** $u_{nn}x_n = d_n \quad \longrightarrow \quad x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$
2. **Cálculo da variável x_{n-1}:** $u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \quad \longrightarrow \quad x_{n-1} = \dfrac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$

$$\vdots$$

3. **Cálculo da variável x_2:** $u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2 \quad \longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}}$

4. **Cálculo da variável x_1:** $u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = d_1 \quad \longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1,n}x_n}{u_{11}}$

De forma geral, para construir o algoritmo que calcula a solução do sistema linear, considere a linha genérica para o cálculo da variável x_i :

$$u_{ii}x_i + u_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + u_{in}x_n = d_i$$

isolando x_i, temos:

$$x_i = \frac{d_i - u_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - u_{in}x_n}{u_{ii}} = \frac{d_i - (u_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - u_{in}x_n)}{u_{ii}}$$

ou ainda,

$$x_i = \frac{d_i - \displaystyle\sum_{j=(i+1)}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = 2, \cdots, n \tag{3.2}$$

Temos, assim, o seguinte algoritmo:

$x_n = \dfrac{d_n}{u_{nn}}$;
para $(i = n - 1)$ até 1 **faça**
    $x_i = \dfrac{d_i - \displaystyle\sum_{j=(i+1)}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}$;
fim para

Algoritmo 2: Substituições Retroativas

Exemplo 7. Calcule $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 4 \\ 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 0 \end{cases}$ utilizando o algoritmo de substituições retroativas:

Solução: usando o Algoritmo 2, temos:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} = \frac{2 - (-1)(0)}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)}{u_{11}} = \frac{4 - [(1)(1) + (-5)(0)]}{3} = 1$$

Portanto, a solução do sistema é $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$.

Observação

O esforço computacional (E_c) de um algoritmo é a quantidade de operações elementares necessárias para resolver um determinado problema.

Considerando que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$, o esforço computacional dos algoritmos de substituições sucessivas (retroativas) encontra-se resumido na Tabela 3.1.

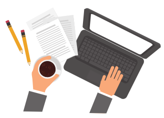
Substituições sucessivas		Substituições retroativas	
Operações	Complexidade	Operacões	Complexidade
Adições	$\dfrac{n^2+3n}{2} - 2$	Adições	$\dfrac{n^2+3n}{2} - 1$
Multiplicações	$\dfrac{n^2-n}{2}$	Multiplicações	$\dfrac{n^2-n}{2}$
Divisões	n	Divisões	n

Tabela 3.1: Complexidade dos métodos de substituições sucessivas e retroativas, sendo n é a ordem do sistema linear. Fonte: [1].

"Como o número de operações aritméticas das substituições sucessivas e retroativas é descrito por polinômios, esses algoritmos são ditos polinomiais." [1]. Para a resolução de um sistema de equações triangular inferior de ordem $n = 10$, por exemplo, estão envolvidas um total de 10 operações de divisão, 63 operações de adição (ou subtração) e 45 operações de multiplicação. O que sugere um esforço computacional total de 118 operações.

O fato dos métodos de resolução de sistemas triangulares apresentarem um esforço computacional baixo para a obtenção de uma solução, instiga o estudo por técnicas de resolução de sistemas que se baseiam em transformar o sistema $AX = B$ em um sistema equivalente triangular, que permite a aplicação dos algoritmos de substituições sucessivas ou retroativas para resolvê-lo. Esta ideia básica será usada nas próximas seções para descrever os métodos diretos de eliminação de Gauss e decomposição LU, que basicamente aplicam operações elementares sobre linhas da matriz A do sistema linear original, sempre que possível, para obter um sistema linear triangular equivalente.

3.3 Exercícios



E. 1. Resolva os sistemas lineares utilizando o método de substituição retroativa ou sucessiva:

a) $$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & & & & = & 4 \\ 3x_1 & +5x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & -6x_2 & +8x_3 & & = & 48 \\ -x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +9x_4 & = & 6 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +x_4 & = & 1 \\ & +3x_2 & +7x_3 & -4x_4 & = & -2 \\ & & +4x_3 & +5x_4 & = & 28 \\ & & & +2x_4 & = & 8 \end{array}\right.$$

E. 2. Implementar, em qualquer linguagem de programação, os algoritmos de substituições sucessivas e retroativas.

E. 3. Calcular a solução dos sistemas triangulares a seguir, utilizando um dos programas implementados no exercício anterior.

a) $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & & & = & 2 \\ -4x_1 & +5x_2 & & = & 3 \\ 1x_1 & 4x_2 & -3x_3 & = & -4 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = & 1 \\ & +4x_2 & -1x_3 & = & 3 \\ & & 6x_3 & = & 12 \end{array}\right.$$