6

Fatoração LU

Sumário da Aula

Em muitas situações, é necessário resolver vários sistemas de equações lineares que possuem em comum a matriz dos coeficientes e termos independentes diferentes, ou seja, casos em que:

$$Ax = B_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

Nestes casos, indica-se resolver os sistemas por meio de uma técnica de **fatoração da matriz** A. A técnica consiste em decompor a matriz dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas de equações lineares que conduzirá à solução do sistema original. A vantagem da utilização da técnica de fatoração é que a resolução de qualquer sistema de equações lineares que tenha A como matriz dos coeficientes é quase imediata, sendo necessário alterar apenas o vetor B.

Dentre as técnicas de fatoração mais utilizadas, destaca-se a **Decomposição LU**. Nesta técnica, a matriz A é decomposta no produto de duas matrizes L e U ($A = LU$), onde L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

6.1 Fatoração LU da Matriz A

O Teorema 6.1 apresenta em que condições é possível decompor uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ no produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior.

Definição 6.1. Chamamos de "menores principais" de ordem k de uma matriz $A = (a_{ij})$ o $\Delta_k = det(A_k)$, onde $A_k = (a_{ij})$ é formada pelas k primeiras linhas e k primeiras colunas da matriz A.

Exemplo 12. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais correspondentes são:

$$\Delta_1 = det(A_1) = det(1) = 1,$$

$$\Delta_2 = det(A_2) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5,$$

$$\Delta_3 = det(A_3) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 90.$$

Teorema 6.1. *(**Teorema LU**) Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. Se os menores principais de A, $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Então, A se decompõe de forma única, no produto de uma triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = l_{33} = \cdots = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tal que $LU = A$.*

A **fatoração** LU **da matriz** A nos fatores L e U pode ser feita por meio das seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, & i \leq j \\ \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}, & i > j \end{cases}$$

ou, de forma similar, pelo Algoritmo 4 de Fatoração LU.

para $m = 1$ to n **faça**
  para $j = m$ to n **faça**
    $u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj};$
  fim para
  $l_{mm} = 1$
  para $i = m + 1$ to n **faça**
    $l_{im} = \dfrac{a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}}{u_{mm}};$
  fim para
fim para

Algoritmo 4: Fatoração LU.

A fatoração de uma matriz no produto LU onde L tem 1 na diagonal principal também é conhecida como **Método de Doolitle**.

Exemplo 13. Use o algoritmo 4 para decompor a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ no produto LU.

Solução: Para que a matriz A satisfaça as condições da decomposição LU, conforme o Teorema 6.1 é necessário que $det(A_1) \neq 0$ e $det(A_2) \neq 0$. Temos que $det(A_1) = 2 \neq 0$ e $det(A_2) = [(2 \times 2) - (1 \times 0)] = 4 \neq 0$. Logo A satisfaz o Teorema e atende as condições de Decomposição LU.

Aplicando o Algoritmo 4 tem-se:

$(m = 1)$

Linha 1 da matriz U:

$$j = 1 \quad \Rightarrow \quad u_{11} = a_{11} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k} u_{k1} = a_{11} = 2$$

$$j = 2 \quad \Rightarrow \quad u_{12} = a_{12} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k} u_{k2} = a_{12} = 0$$

$$j = 3 \quad \Rightarrow \quad u_{13} = a_{13} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k} u_{k3} = a_{13} = 1$$

Coluna 1 da matriz L:

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad l_{11} = 1$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad l_{21} = \frac{a_{21} - \sum_{k=1}^{0} l_{2k} u_{k1}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{31} = \frac{a_{31} - \sum_{k=1}^{0} l_{3k} u_{k1}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{3}{2}$$

$(m = 2)$

Linha 2 da matriz U:

$$j = 2 \quad \Rightarrow \quad u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k2} = a_{12} - [l_{21} u_{12}] = 2 - (\frac{1}{2}(0)) = 2$$

$$j = 3 \quad \Rightarrow \quad u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k3} = a_{13} - [l_{21} u_{13}] = 0 - (\frac{1}{2}(1)) = -1/2$$

Coluna 2 da matriz L:

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad l_{22} = 1$$

$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{32} = \frac{a_{32} - \sum\limits_{k=1}^{1} l_{3k}u_{k2}}{u_{22}} = \frac{a_{32} - [l_{31}u_{12}]}{u_{22}} = \frac{1-(3/2)(0)}{2} = 1/2$$

$(m = 3)$

Linha 3 da matriz U:

$$j = 3 \quad \Rightarrow \quad u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}u_{k3} = a_{33} - [l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}] = 2 - \left[\frac{3}{2}(1) + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

Coluna 3 da matriz L:

$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = 1$$

Logo, as matrizes L e U resultantes da etapa de fatoração são:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A fatoração da matriz A no produto das matrizes LU também pode ser obtida através da **fase de eliminação do método de eliminação de Gauss.** Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 14. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a fase de eliminação de Gauss em A, tem-se:

Linhas	Multiplicadores	Coeficientes			Operações
$L_1^{(1)}$		2	0	1	
$L_2^{(1)}$	$m_{21} = \frac{1}{2} = 0,5$	1	2	0	
$L_3^{(1)}$	$m_{31} = \frac{3}{2} = 1,5$	3	1	2	
$L_2^{(2)}$		m_{21}	2	-1/2	$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 0,5L_1^{(1)}$
$L_3^{(2)}$	$m_{32} = \frac{1}{2} = 0,5$	m_{31}	1	1/2	$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 3/2L_1^{(1)}$
$L_3^{(3)}$		m_{31}	m_{32}	3/4	$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 1/2L_2^{(2)}$

Para **escrever as matrizes L e U** da fatoração LU da matriz A, basta **analisar as linhas marcadas em azul** da tabela. A matriz U é a matriz triangular superior resultante da etapa de eliminação de Gauss:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

e L é uma matriz triangular inferior, na qual os elementos da diagonal principal são unitários e, abaixo da diagonal principal, encontram-se os multiplicadores da etapa k da fase de eliminação:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação:

Vale ressaltar que a decomposição LU também fornece um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo do determinante de uma matriz.

Cálculo do Determinante

Se a matriz A puder ser decomposta como produto de dois fatores L e U, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários e U uma matriz triangular superior, então o **determinante de A** pode ser calculado por:

$$det(A) = det(LU) = det(L) \times det(U).$$

Sabe-se que **o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal**, assim, $det(L) = 1$ e

$$det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}.$$

Ao **utilizar o procedimento de pivotação parcial** na etapa de eliminação de Gauss, para o cálculo do determinante, deve-se levar em consideração o número total de trocas de linhas realizadas. Assim, o cálculo do determinante da matriz U deverá ser feito como:

$$det(U) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

sendo k o número mínimo de trocas de linhas necessárias durante a fase de eliminação. **Assim, o determinante da matriz A é:**

$$det(A) = det(L) \times det(U) = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

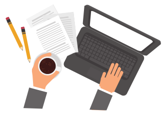
Exemplo 15. Para o cálculo do determinante da matriz A do Exemplo 14, basta calcular o determinante das matrizes triangulares L e U encontradas.

Assim, sendo:

$$det(L) = 1 \quad \text{e} \quad det(U) = (-1)^0 \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 2 \times 2 \times \frac{3}{4} = 1 \times 3 = 3.$$

obtém-se que $det(A) = det(L) \times det(U) = 1 \times 3 = 3$.

6.2 Exercícios



E. 1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Verifique se A satisfaz as condições de decomposição LU (Teorema 6.1).

b) Decompor A em LU.

c) Através da decomposição LU, calcule o determinante de A.

7

Decomposição LU

Sumário da Aula

7.1 Decomposição LU

A decomposição LU também pode ser aplicada na resolução de sistemas de equações lineares. Para tanto, considere um sistema linear $Ax = B$, cuja matriz dos coeficientes é uma matriz não singular ($det(A) \neq 0$) e satisfaz às condições do Teorema 6.1.

Para resolver o sistema linear $Ax = B$, utilizando decomposição LU, basta executar a seguinte sequência de passos:

(i) Obtenção da fatoração LU da matriz A. O sistema $Ax = B$ será reescrito como $LUx = B$.

(ii) Tomando $Ux = y$, obtém-se $Ly = B$.
O cálculo do sistema $Ax = B$ é então substituído pela resolução de dois sistemas triangulares:

(iii) Resolve-se o sistema triangular inferior $Ly = B$ por meio de substituições sucessivas.

(iv) Resolve-se o sistema triangular superior $Ux = y$ por meio de substituições retroativas, obtendo, então, a solução do sistema de equações $Ax = B$.

Exemplo 16. Resolva o sistema linear utilizando o método de decomposição LU.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Do exemplo **??**, temos que a fatoração LU da matriz A é:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas triangulares formados:

- $Ly = B$ **(sistema triangular inferior)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Resolvendo por substituições sucessivas, obtém-se $y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}^t$

- $Ux = y$ **(sistema superior)**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

  Resolvendo por substituições retroativas, obtém-se $x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}^t$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}^t$.

Exemplo 17. Resolva o sistema de equações lineares pelo método de Decomposição LU:

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 11 \\ -2x_1 & +8x_2 & -x_3 & = & -15 \\ 4x_1 & -6x_2 & +5x_3 & = & 29 \end{cases}$$

Os cálculos da etapa de eliminação de Gauss na matriz A do sistema linear estão sumarizados na tabela seguinte:

Linhas	Multiplicadores	Coeficientes			Operações
$L_1^{(1)}$		**1**	**-3**	**2**	
$L_2^{(1)}$	$m_{21} = -2$	-2	8	-1	
$L_3^{(1)}$	$m_{31} = 4$	4	-6	5	
$L_2^{(2)}$		m_{21}	**2**	**3**	$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} + 2L_1^{(1)}$
$L_3^{(2)}$	$m_{32} = 3$	m_{31}	6	-3	$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 4L_1^{(1)}$
$L_3^{(3)}$		m_{31}	m_{32}	**-12**	$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 3L_2^{(2)}$

Na tabela, os elementos $L_i^{(k)}$ da primeira coluna indicam as linhas i da matriz A em cada passo (k) da etapa de eliminação de Gauss e não a matriz triangular inferior L.

Da tabela, a fatoração LU da matriz A é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{-12} \end{bmatrix}$$

O sistema triangular inferior, $Ly = B$, será resolvido por substituições sucessivas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}$$

E o sistema triangular superior, $Ux = y$, será resolvido por substituições retroativas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^t$.

7.2 Decomposição LU com Pivotação Parcial

A estratégia de pivotação parcial também pode ser usada no método da Decomposição LU. Para tanto, faz-se necessário utilizar um vetor de permutação, P, que é gerado atribuindo-se um número de ordem a cada equação que compõe o sistema.

Exemplo 18. Resolva o sistema de equações lineares utilizando o Método da Decomposição LU com pivotação parcial e considerando, quando for o caso, duas casas decimais:

$$\begin{cases} 4x_1 & -x_2 & & -x_4 & = & 6 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 8 \\ & 4x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & -7 \\ 5x_1 & & +5x_3 & -10x_4 & = & -40 \end{cases}$$

O vetor de permutação é $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^t$ e os cálculos da fase de eliminação para fazer a fatoração LU de A estão sumarizados na tabela seguinte:

Linhas	Multiplicadores	Coeficientes				P	Operações
$L_1^{(1)}$		4	-1	0	-1	1	L_1
$L_2^{(1)}$		1	-2	1	0	2	L_2
$L_3^{(1)}$		0	4	-4	1	3	L_3
$L_4^{(1)}$	**pivô**	5	0	5	-10	4	L_4
$L_1^{(2)}$		**5**	**0**	**5**	**-10**	4	$L_4^{(1)}$
$L_2^{(2)}$	$m_{21} = 0,2$	1	-2	1	0	2	$L_2^{(1)}$
$L_3^{(2)}$	$m_{31} = 0$	0	4	-4	1	3	$L_3^{(1)}$
$L_4^{(2)}$	$m_{41} = 0,8$	4	-1	0	-1	1	$L_1^{(1)}$
$L_2^{(3)}$		m_{21}	-2	0	2	2	$L_2^{(2)} - 0,2L_1^{(2)}$
$L_3^{(3)}$	**pivô**	m_{31}	4	-4	1	3	$L_3^{(2)} - 0L_1^{(2)}$
$L_4^{(3)}$		m_{41}	-1	-4	7	1	$L_1^{(2)} - 0,8L_1^{(2)}$
$L_2^{(4)}$		m_{31}	**4**	**-4**	**1**	**3**	$L_3^{(3)}$
$L_3^{(4)}$	$m_{32} = -0,5$	m_{21}	-2	0	2	2	$L_2^{(3)}$
$L_4^{(4)}$	$m_{42} = -0,25$	m_{41}	-1	-4	7	1	$L_1^{(3)}$
$L_3^{(5)}$		m_{21}	m_{32}	-2	2,5	2	$L_3^{(4)} + 0,5L_2^{(4)}$
$L_4^{(5)}$	**pivô**	m_{41}	m_{42}	-5	7,25	1	$L_4^{(4)} + 0,25L_2^{(4)}$
$L_3^{(6)}$		m_{41}	m_{42}	**-5**	**7,25**	**1**	$L_4^{(5)}$
$L_4^{(6)}$	$m_{43} = 0,4$	m_{21}	m_{32}	-2	2,5	2	$L_3^{(5)}$
$L_4^{(7)}$		m_{21}	m_{32}	m_{43}	**-0,4**	**2**	$L_4^{(6)} - 0,4L_3^{(6)}$

Observe que é feita, de imediato, a troca de posição entre as linhas um e quatro, e a mesma troca deve ser feita no vetor de permutação. Obtém-se, então, $P^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t$ e realiza-se a eliminação dos elementos da primeira coluna.

No passo dois, que consiste na eliminação dos elementos da segunda coluna, é verificado que o pivô está na terceira linha. Logo, é necessário fazer a troca de posição entre as linhas dois e três. Esta mesma transformação deve ser realizada no vetor de permutação, obtendo, então, $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^t$.

No passo três, o pivô está na quarta linha. Logo, é necessário fazer a troca de posição entre as linhas três e quatro. Efetuando a mesma transformação no vetor de permutação, obtém-se $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Temos, a seguir, as matrizes L e U resultantes da etapa de eliminação:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7,25 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema $Ly = B$:

Aplicando $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^t$ ao vetor $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -7 \\ -40 \end{bmatrix}^t$, obtém-se $B_p = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}^t$.

Resolvendo o sistema $Ly = B$ por substituições sucessivas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 36,25 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema $Ux = y$ por substituições retroativas:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7,25 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 36,25 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

O vetor resíduo é nulo. Logo temos que $x = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}^t$ é solução exata do sistema de equações lineares.

7.3 Algoritmo e Complexidade

O pseudocódigo seguinte apresenta o algoritmo da decomposição LU com pivotação parcial para resolver um sistema linear $Ax = B$.

Entrada: A, b, n.
L = identidade(n); {Criação de uma matriz identidade de ordem} n.
para $(k = 1)$ até $(n - 1)$ **faça**
  Encontre $r \geq k$ tal que $A(r,k) = \max_{k \leq i \leq n} abs(A(i,j))$; {Escolha do elemento pivô}
  Troque a linha k com a linha r;
  para $(i = k + 1)$ até n **faça**
    $m(i,k) = -A(i,k)/A(k,k)$;
    $L(i,j) = m(i,k)$;
    para $(j = k + 1)$ até n **faça**
      $A(i,j) = A(i,j) + m(i,k)A(k,j)$;
    fim para
  fim para
fim para
y = **Algoritmo Substituições Sucessivas**(L, b);
$U = A$; $d = y$
x = **Algoritmo Substituições Retroativas**(U, d);
Saída: vetor solução x.

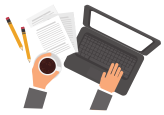
Algoritmo 5: Eliminação de Decomposição LU. (abs: valor absoluto).

A Tabela 7.1 apresenta o resumo do esforço computacional do Algoritmo de Eliminação de Gauss.

Operações	Complexidade
Adições	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}n$
Multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$
Divisões	n

Tabela 7.1: Complexidade da Decomposição LU considerando um sistema linear de ordem n. Fonte: [1].

7.4 Exercícios



E. 1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -12 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -20 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 &= -26 \end{cases}$$

a) Obtenha a fatoração LU da matriz A.

b) Calcule o determinante da matriz A.

c) Multiplique as matrizes L e U resultantes para verificar que A é produzida.

d) Utilize a decomposição LU para resolver o sistema linear.

e) Resolva o sistema linear utilizando a decomposição LU com pivotação para o vetor alternativo $B_2 = \begin{bmatrix} 12 & 18 & -6 \end{bmatrix}^t$.

E. 2. Calcule o determinante e a inversa da matriz A utilizando o método de decomposição LU.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$