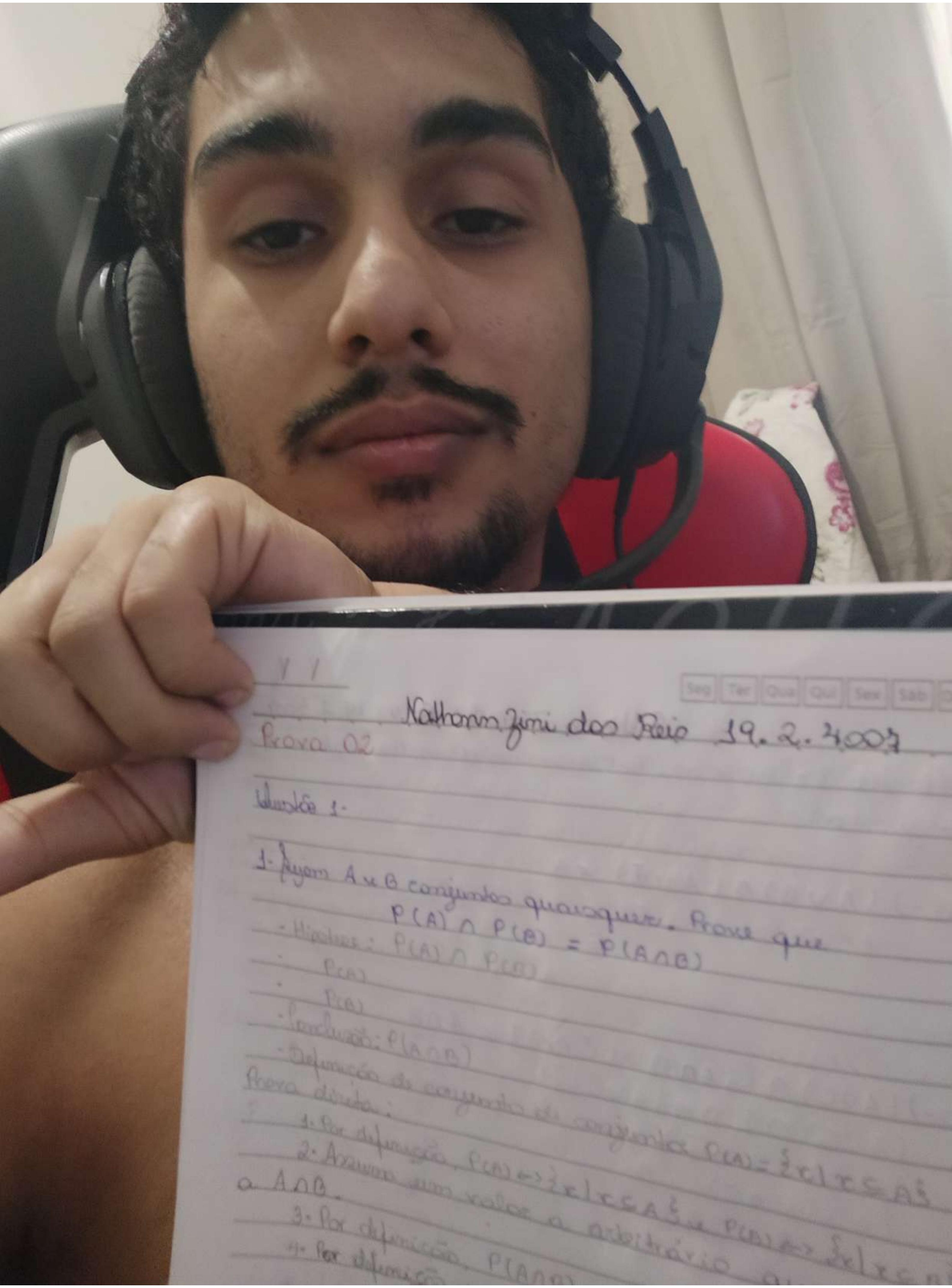
Nathann Zini dos Reis 19. 2. 2007
Prova 02
Questão 1-
1- Sejam A e B conjuntos quaisquer. Prove que
P(A) ∩ P(B) = P(A∩B)
- Hipótese: P(A) ∩ P(B)
- Conclusão: P(A∩B)
Prova direta:
1. Por definição
2. Assumo um valor a arbitrário
a A∩B.
3. Por definição
4. Por definição

79

/ /

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

Nathann Zini dos Reis 19.2.2007

Prova 02

Questão 1-

1,0 1- Sejam A e B conjuntos quaisquer. Prove que
$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

- Hipótese: $P(A) \cap P(B)$
- $P(A)$
- $P(B)$
- Conclusão: $P(A \cap B)$
- Definição de conjunto de conjunto: $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

Prova direta:

1. Por definição, $P(A) \leftrightarrow \{x \mid x \subseteq A\}$ e $P(B) \leftrightarrow \{x \mid x \subseteq B\}$ ✓
2. Assuma um valor a arbitrário que pertença a $A \cap B$.
3. Por definição, $P(A \cap B) \leftrightarrow \{x \mid x \subseteq (A \cap B)\}$ ✓
4. Por definição de interseção, $A \cap B \leftrightarrow \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ ✓

5. Da mesma forma que, por definição, $P(A) \cap P(B) \leftrightarrow \{x \mid x \in P(A) \land x \in P(B)\}$ ✓ $\leftrightarrow \{x \mid x \subseteq A \land x \subseteq B\}$.
6. Então, é correto afirmar que esse teorema é verdadeiro OK

Você precisa usar a escrita de prova:
p.ex.: Seja o conjunto $C \in P(A) \cap P(B)$. Então $C \in P(A)$ e $C \in P(B)$. Logo $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$ $\therefore C \subseteq A \cap B$.
Então $C \in P(A \cap B)$.

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom   / /

Nathann Zini dos Reis   19.2.4007

1,5 2. Para todo inteiro positivo n, $n^2 + n + 3$ é primo

Esse argumento é INVÁLIDO, pois há contra exemplo que prova o contrario.

Contra exemplo:

$n = 2$

Se $n = 2$, $2^2 + 2 + 3 = 9$ e 9 não é primo, mas um quadrado perfeito, pois pode ser escrito na forma $i = k^2$ $(9 = 3^2)$.

1,4 3. $\sqrt[3]{2}$ não é numero racional

Hipotese: $\sqrt[3]{2}$

Conclusão: não é racional

Prova por absurdo.

1. $P \wedge \neg Q \to P$
2. Logo, suponha que $\sqrt[3]{2}$ é racional.
3. Definição de numero racional: r é racional se existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $r = p/q$ e $q \neq 0$.
4. por definição se $\sqrt[3]{2}$ é racional, $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$
5. elevando tudo ao cubo, $2 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow 2q^3 = p^3$
6. Temos que $2q^3 = p^3$, e, por definição de numero par, temos que p^3 é par, ou seja, p é par. Então, por definição $\exists\, k \in \mathbb{Z}$, tal que $p = 2k$.
7. Substituindo p, $2q^3 = (2k)^3 = 8k^3 = \frac{8}{2}k^3 = q^3 \Rightarrow 4k^3 = q^3 \Rightarrow 2(2k^3) = q^3$. Segue que q^3 é par
8. Logo, pode-se afirmar que q também é par, pela definição. Porém, uma vez que p e q podem assumir qualquer valor inteiro, é um absurdo afirmar que ambos são pares. Logo é um absurdo afirmar que $\sqrt[3]{2}$ é racional. Ou seja $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

/ /

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom

Nathann Zini dos Reis 19.2.4007

1,5

4- O produto de qualquer número racional diferente de zero e qualquer número irracional é racional.

Esse argumento é inválido, pois se você pegar qualquer número irracional e multiplicá-lo por 1 (que é um número racional) você obtém o próprio número irracional.

Contra-exemplo:

• Pegue o número irracional, que foi provado no exercício anterior, $\sqrt[3]{2}$.

• Fica $\sqrt[3]{2} \cdot 1 = \sqrt[3]{2}$, que é irracional. ✓

5- Para todo inteiro n, se $5 \nmid n^2$, então $5 \nmid n$.

1,0

• Hipótese: $5 \nmid n^2$ P

• Conclusão: $5 \nmid n$ Q

Por contraposição:

$\neg Q \to \neg P$

1 • Hipótese: $5 | n$

2 • Conclusão: $5 | n^2$

3 • Definição de divisão: a e b inteiros não nulos, então $b = a \cdot c$, para c um inteiro

4 • então $5 | n \Leftrightarrow n = 5c$ ✓

5 - Na conclusão $5 | n^2 = 5 | (5c)^2 = 5 | 25c^2 = 5 | 5(5c^2)$. As operações de soma e multiplicação são fechadas no conjunto de números inteiros, logo, $5c^2 = t$. Você está mexendo na conclusão.

6 • Portanto temos $5 | 5t$. Então é correto afirmar que se $5 | n$ então $5 | n^2$.

7 • Portanto pode-se concluir que se $5 \nmid n^2$, então $5 \nmid n$.

5. Elevando $n = 5c$ ao quadrado:
$n^2 = 25c^2 \Rightarrow n^2 = 5(5c^2) \Rightarrow n^2 = 5t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Logo $5 | n^2$. ■

/ /

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

Nathann Zimi dos Reis 19.2.2007

1,5

6- Existem dois números inteiros consecutivos tais que o primeiro deles é um cubo perfeito e o seguinte é um quadrado perfeito.

Prova por demonstração construtiva:

Considere dois inteiros consecutivos x e y que assumem os valores 8 e 9, respectivamente. x pode ser escrito por n^3 e y pode ser escrito por k^2, dessa forma 8 é um cubo perfeito, pois $2^3 = 8$, e 9 é um quadrado perfeito, pois $3^2 = 9$.

Logo é verdadeiro esse teorema.

Questão 2 - Determine quais são verdadeiros e justifique os falsos.

$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$; $B = \{a\}$; $C = \{\phi, \{a, \{a\}\}\}$

10

a-) (T) $B \subseteq A$

b-) (F) $1 \in A$ - Falsa, pois 1 não é elemento de A

c-) (F) $1 \in B$ - Falsa, pois 1 não é elemento de B.

d-) (F) $\{1\} \subseteq B$ - Falsa, pois 1 não está contido em B

e-) (F) $\{1\} \subseteq C$ - Falsa, pois 1 não está contido em C

Nathann Zini dos Reis 19.2.4007.