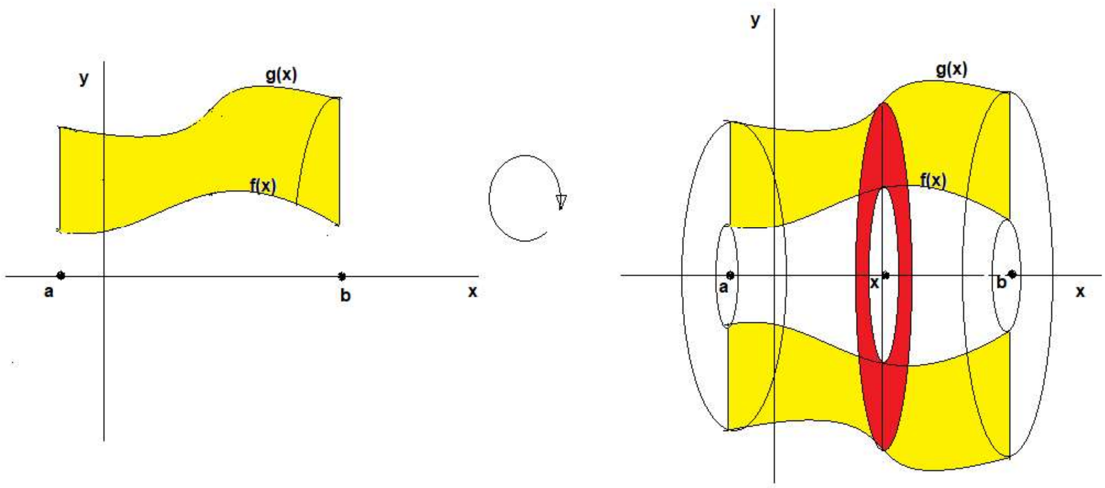
1.3.1 AULA 4 - Método do Anel

Vimos que quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo Ox ou do eixo Oy, obtemos um sólido de revolução. Se essa região não cruza o eixo de rotação obtemos um sólido com um orifício central. Neste caso, as seções transversais ao eixo de rotação serão anéis.

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, de uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Suponha que sendo $f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.



Observe que fixado $x \in [a,b]$ a seção transversal é um anel com raio maior igual a $g(x)$ e raio menor igual a $f(x)$. Neste caso, área $A(x)$ da seção transversal será:

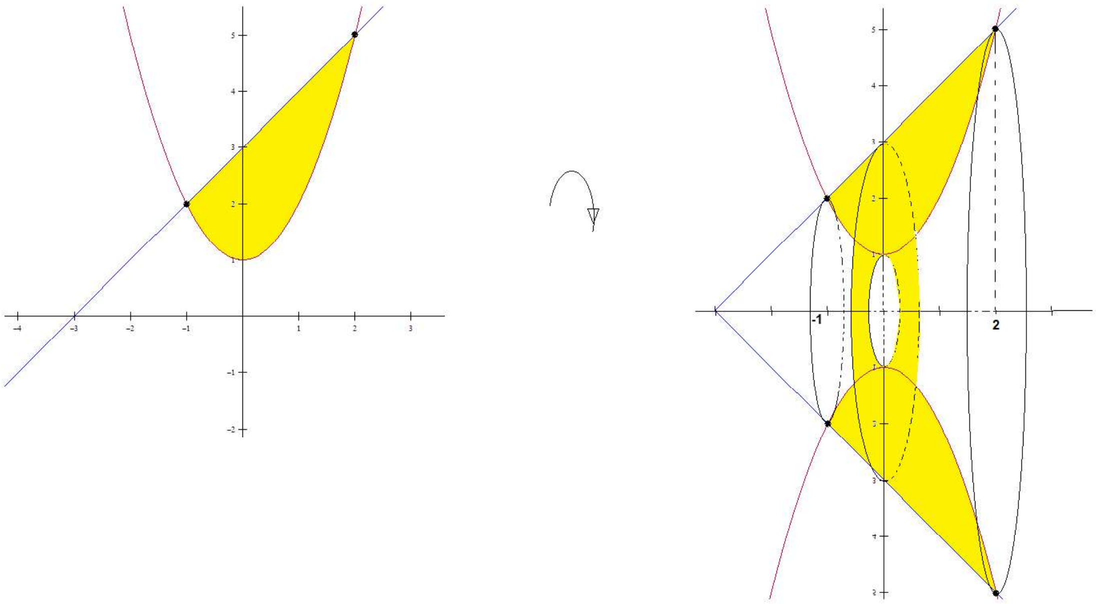
$$A(x) = \pi[g(x)]^2 - \pi[f(x)]^2.$$

Logo, o volume do sólido será dada por:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\pi[g(x)]^2 - \pi[f(x)]^2\right) dx$$

Exemplo 8. *Encontre o volume do sólido obtido pela revolução, em torno do eixo Ox, da região limitada por* $y = x^2 + 1$ *e* $y = x + 3$.

SOLUÇÃO:



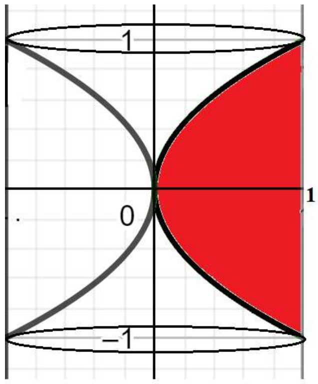
Os limites de integração são dados pela interseção das curvas limitantes. Assim $x^2 + 1 = x + 3$ implica na equação $x^2 - x - 2 = 0$, cuja raízes são $x = -1$ e $x = 2$.

Portanto, o volume do sólido será:

$$\begin{aligned}
V = \int_a^b \left(\pi[g(x)]^2 - \pi[f(x)]^2\right) dx &= \int_{-1}^{2} \pi[(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx \\
&= \int_{-1}^{2} \pi[(x^2+6x+9) - (x^4+2x^2+1)]dx \\
&= \int_{-1}^{2} \pi[x^2+6x+9-x^4-2x^2-1]dx \\
&= \int_{-1}^{2} \pi[-x^4-x^2+6x+8]dx \\
&= \pi\left[\frac{-x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{x=-1}^{x=2} \\
&= \frac{117}{5}\pi
\end{aligned}$$

Exemplo 9. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Oy, da região limitada por $x = y^2$ e $x = 1$.*

Solução:



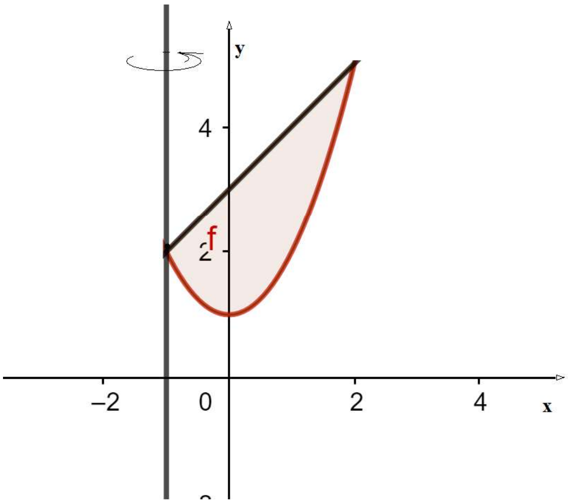
Observe que Para cada y fixado, a seção transversal ao sólido é um anel com raio externo $x = 1$ e raio interno $x = y^2$. Portanto, o volume do sólido será:

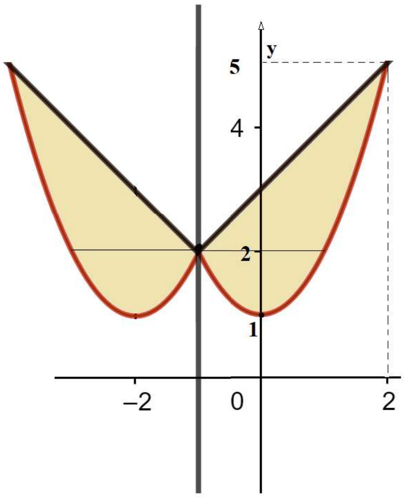
$$
\begin{aligned}
V = \int_a^b \left(\pi[g(y)]^2 - \pi[f(y)]^2\right) dy &= \int_{-1}^{1} \pi[(1)^2 - (y^2)^2]dy \\
&= \int_{-1}^{1} \pi(1 - y^4)dy \\
&= \pi \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= \frac{8}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 8. *Encontre o volume do sólido obtido pela revolução, em torno da reta $x = -1$, da região limitada por $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$.*

Solução: Observe que para o cálculo do volume do sólido formado





pela rotação dada é necessário (por este método) dividirmos a integral que fornece o volume, em duas integrais. Pois, como a rotação foi feita em torno de $x = -1$, ou seja, um eixo paralelo ao eixo Oy, a integral será em relação à variável y. No entanto, fixado um y no intervalo que corresponde à região dada, isto é $y \in [1,5]$ teremos que as curvas que limitam a fronteira não serão sempre as mesmas. Deste modo, temos:

$$V = \int_1^2 \pi(\sqrt{y-1}+1)^2 - (-\sqrt{y-1}+1)^2 dy + \int_2^5 \pi(\sqrt{y-1}+1)^2 - (-\sqrt{y-1}+1)^2 dy$$

Sugiro a vocês que tente chegar nesta fórmula. Procure entendê-la! A resposta desta questão é $V = \dfrac{27\pi}{2}$.

Uma outra sugestão é: Depois que você estudar cascas cilíndricas, faça este exercício novamente.

Por último, no enunciado desta questão troque para rotação em torno de $y=-1$ e escreva a equação que fornece o volume deste novo sólido. Você deve ter obtido $V=\int_{-1}^{2}\pi[(x+4)^2-(x^2+2)^2]dx$.

Exercício 9. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, da região dada por:*

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}|x^2+(y-2)^2\leq 1\}.$$