9 Lógica de Predicados

Sumário da Aula

9.1 Sintaxe e Semantiva da Lógica de Predicados

9.1.1 Formalização de Argumentos

Formalizar as sentenças na língua portuguesa para expressões lógicas é uma tarefa crucial na matemática e na ciência da computação. Traduzir do português para expressões lógicas torna-se uma tarefa mais complicada quando quantificadores são necessários. Para a formalização de sentenças quantificadas é preciso especificar o universo de discurso, a propriedade dos predicados e dos símbolos lógicos.

Considere por exemplo a frase "**todo mineiro é atleticano**". Esta frase significa que **dado um universo de discurso, se é um mineiro, então é atleticano**. Denota-se por $P(x)$ "x é mineiro" e por $T(x)$ "x é atleticano". A declaração é escrita simbolicamente por:

$$\forall x[P(x) \rightarrow T(x)]$$

- Outras variações para esta declaração em português são as frases: **"todos os mineiros são atleticanos"** ou **"cada mineiro é atleticano"**.
- Forma incorreta de representação: $\forall x[P(x) \wedge T(x)]$.
  Esta sentença é muito mais forte que a primeira, pois diz que todo mundo do domínio é ao mesmo tempo mineiro e atleticano.

A frase "**existe um mineiro e atleticano**" significa que **existe alguma coisa no domínio, que é ao mesmo tempo mineiro e atleticano**, e simbolicamente é escrita como:

$$\exists x[P(x) \wedge T(x)]$$

- Outras variações para a declaração em português são as frases: **"alguns mineiros são atleticanos"** e **"existem mineiros atleticanos"**.
- Forma incorreta de representação: $\exists x[P(x) \rightarrow T(x)]$.
  Esta sentença significa que "existe um elemento no universo de discurso que, se é um mineiro, então é atleticano", em outras palavras, pode acontecer de não haver mineiros no universo de discurso. Esta sentença só será verdadeira se existir pelo menos um mineiro que é atleticano.

Enunciados Categóricos:

Para facilitar a formalização de argumentos na lógica de predicados, considere quatro tipos de sentenças, que são denominadas por enunciados categórigos.

I. **Universal afirmativo:** são enunciados na forma $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$. Em termos de conjunto, este tipo de enunciado (Figura 9.1(a)) diz que o conjunto P é um subconjunto de Q. Por exemplo, considere a sentença **"toda cobra é venenosa"** que pode ser escrita como $\forall x[cobra(x) \rightarrow venenosa(x)]$, ou seja, para todo x, se x pertence ao conjunto de cobras então x pertence ao conjunto de animais venenosos.

II. **Universal negativo:** são enunciados na forma $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$. Em termos de conjunto, este tipo de enunciado estabelece que os conjuntos P e Q são disjuntos[1] (Figura 9.1(b)). Por exemplo, considere a sentença **"Nenhum leão é manso"** que pode ser escrita como $\forall x[leao(x) \rightarrow \neg manso(x)]$, ou seja, para todo x, se x pertence ao conjunto de leões então x não pertence ao conjunto de animais mansos.

[1]Dois conjuntos são ditos disjuntos se não tiverem nenhum elemento em comum.

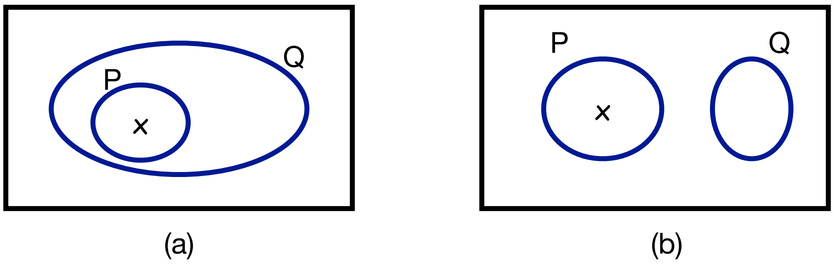

Figura 9.1: Semântica dos enunciados categóricos em termos de conjuntos: (a) universal afirmativo e (b) universal negativo.

III. **Particular afirmativo:** são enunciados na forma $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$. Em termos de conjunto, este tipo de enunciado estabelece que os conjuntos P e Q possuem uma interseção não vazia (Figura 9.2(c)). Por exemplo, considere a sentença **"Alguns homens são inteligentes"** que pode ser escrita como $\exists x[H(x) \wedge I(x)]$, ou seja, existe um x tal que x pertence ao conjunto de homens H e pertence ao conjunto de inteligentes (I).

IV. **Particular negativo:** são enunciados na forma $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$. Em termos de conjunto, este tipo de enunciado estabelece existem elementos que estão no conjunto P mas não estão em Q (Figura 9.2(d)). Por exemplo, considere a sentença **"Alguns homens não são inteligentes"** que pode ser escrita como $\exists x[H(x) \wedge \neg I(x)]$, ou seja, existe um x tal que x pertence ao conjunto de homens H, porém não pertence ao conjunto de inteligentes (I).

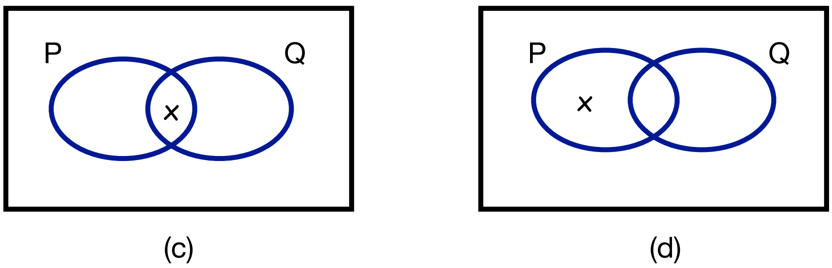

Figura 9.2: Semântica dos enunciados categóricos em termos de conjuntos: (a) particular afirmativo e (b) particular negativo.

Reconhecer o tipo de sentença que se deseja escrever usando a notação simbólica, facilita a sua tradução para a linguagem da lógica de predicados.

Exemplo 9.1. Usando a lógica de predicados, formalize as sentenças a seguir:

a) Os remédios são perigosos.

b) Nenhuma bruxa é bela.

c) Não existe bêbado feliz

d) Algumas plantas são carnívoras

e) Alguns políticos não são honestos.

f) Todo circo tem palhaço.

g) Ninguém gosta de impostos.

Dicas

Para formalização de sentenças:

- **Procure por palavras-chave que indique o tipo de quantificador:**

  $\forall$: **para todo, para qualquer, para cada.**

  $\exists$: **para algum, existe.**

- **Verifique se a declaração é algum dos enunciados categóricos.**
- **Algumas vezes o quantificador universal está subentendido: "cachorro têm pulga" é o mesmo que "todo cachorro tem pulga".**
- **Se você usar um quantificador universal, quase sempre o conectivo que irá acompanhá-lo será um condicional.**
- **Se você usar um quantificador existencial, quase sempre o conectivo que irá acompanhá-lo será uma conjunção.**
- **Qualquer coisa que venha depois de "só", "somente" ou "apenas" será a conclusão de um condicional; ou seja, a conclusão vem depois de um "então" em uma afirmação do tipo "se... então".**
- **Siga a ordem das palavras em português.**

Exemplo 9.2. Considere as declarações:

a) **"Todos gostam da mãe de Carlos."**

- **Nessa afirmação está implícito que o universo de discurso é** $\mathbb{U} = \{$**Todas as pessoas**$\}$ **e** $\forall$ **o quantificador da sentença.**
- **Seja a função** $MAE(x)$.
- **O predicado** $G(x, y)$ **que significa "**x **gosta de** y**".**
- **Forma simbólica da declaração:** $\forall x \in \mathbb{U}[G(x, MAE(CARLOS))]$.

b) **"Todos que conhecem Carlos, não gostam da mãe dele."**

- **Nessa afirmação está implícito que** $\mathbb{U} = \{$**Todas as pessoas**$\}$ **é o conjunto universo de discurso e** $\forall$ **o quantificador da sentença.**
- **Seja a função** $MAE(x)$.
- **O predicado** $G(x, y)$ **que significa "**x **gosta de** y**".**
- **O predicado** $C(x, y)$ **que significa "**x **conhece** y**".**
- **Forma simbólica da declaração:** $\forall x \in \mathbb{U}[C(x, CARLOS) \rightarrow \neg G(x, MAE(CARLOS))]$.

c) **“Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ele é mãe de alguém.”**

- **Pode ser reescrita como: “Para toda pessoa x, se x é do sexo feminino e x tem filhos, então existe uma pessoa y tal que x é mãe de y”.**
- **sejam os seguintes predicados: $F(x)$ representa “x é do sexo feminino”, $P(x)$ representa “x tem filhos” e $M(x,y)$ representa “x é mãe de y”.**
- **Forma simbólica: $\forall x[F(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y, M(x,y)]$**

Exemplo 9.3. Seja A o conjunto de todas as pessoas e $P(x,y)$ o predicado “x gosta de y”. A proposição

- $\forall x \exists y[P(x,y)]$ **significa que “para toda pessoa x existe uma pessoa y, tal que x gosta de y”, em outras palavras, “Todo mundo gosta de alguém”.**

- $\exists x \forall y[P(x,y)]$ **significa que “existe uma pessoa x para toda pessoa y, tal que que x gosta de y”, ou seja, “existe alguém que gosta de todo mundo”.**

- $\neg \exists x \forall y[P(x,y)]$ **significa que “não existe uma pessoa x para toda pessoa y, tal que x gosta de y”, ou seja, “não existe alguém que gosta de todo mundo”.**

Exemplo 9.4. Seja a declaração **“$P(x)$: x foi aprovado em Matemática Discreta”**.

- **As seguintes sentenças são interpretadas como:**
  $P(Maria)$: **Maria foi aprovada em Matemática Discreta.**
  $\forall x[P(x)]$: **Todos foram aprovados em Matemática Discreta.**
  $\exists x[P(x)]$: **Alguém foi aprovado em Matemática Discreta.**

- **O valor lógico de fbf predicada depende da interpretação considerada.**

- **Fbfs predicadas válidas são particularmente verdadeiras para todas as interpretações.**

9.1.2 Equivalências

Existem sentenças que podem ser escritas usando formas equivalentes. Por exemplo, considere a declaração **“Nem tudo que é verde é planta”**. Se a senteça diz que nem tudo que é verde é planta, então significa que existe alguma coisa que é verde e que não é planta. Assim, a sentença “Nem tudo que é verde é planta” pode ser escrita simbolicamente por $\neg\forall x[V(x) \rightarrow P(x)]$ ou $\exists x[V(x) \wedge \neg P(x)]$. Veja na demonstração seguinte que as fórmulas são equivalentes:

Prova:

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x[V(x) \rightarrow P(x)] &\equiv \exists x \neg[V(x) \rightarrow P(x)] && \{\text{DeMorgan para quantificadores}\}\\
&\equiv \exists x \neg[\neg V(x) \vee P(x)] && \{\text{implicação}\}\\
&\equiv \exists x[\neg\neg V(x) \wedge \neg P(x)] && \{\text{Dupla Negação}\}\\
&\equiv \exists x[V(x) \wedge \neg P(x)]
\end{aligned}
$$

■

Veja que as leis algébricas estudadas na lógica proposicional também são válidas para lógica de predicados. A seguir são apresentadas leis para manipulação dos quantificadores universal e existencial.

Equivalências	**Nomes**
$\neg[\forall x P(x)] \equiv \exists x[\neg P(x)]$	$\{\neg\forall\}$
$\forall x[P(x) \land Q(x)] \equiv \forall x[P(x)] \land \forall x[Q(x)]$	$\{\land\forall\}$

Equivalências	**Nomes**
$\neg[\exists x P(x)] \equiv \forall x[\neg P(x)]$	$\{\neg\exists\}$
$\exists x[P(x) \lor Q(x)] \equiv \exists x[P(x)] \lor \exists x[Q(x)]$	$\{\lor\exists\}$

Exemplo 9.5. Prove que as fórmulas $\forall x[F(x) \land \neg G(x)]$ e $\forall x[F(x)] \land \neg\exists x[G(x)]$ são equivalentes.

Prova:

$$\begin{aligned} \forall x[F(x) \land \neg G(x)] &\equiv \forall x[F(x)] \land \forall x[\neg G(x)] \quad \{\land\forall\} \\ &\equiv \forall x[F(x)] \land \neg\exists x[G(x)] \quad \{\neg\forall\} \end{aligned}$$

■

Logo, $\forall x[F(x) \land \neg G(x)] \equiv \forall x[F(x)] \land \neg\exists x[G(x)]$

Exemplo 9.6. Encontre duas formas equivalentes de representar simbolizamente a senteça **"Nem todo político brasileiro é corrupto."**.

A sentença "Nem todo político brasileiro é corrupto." é escrita simbolicamente por

$$\neg\forall x[P(x) \land B(x) \to C(x)]$$

onde o antecedente da fórmula condicional é uma conjunção. A sentença também pode ser interpretada por: se nem todo político brasileiro é corrupto, então existe pelo menos um político brasileiro que não é corrupto, que simbolicamente pode ser traduzida como:

$$\exists x[P(x) \land B(x) \land \neg C(x)]$$

A equivalência entre as fórmulas é demonstrada a seguir.

Prova:

$$\begin{aligned} \neg\forall x[P(x) \land B(x) \to C(x)] &\equiv \exists x\neg[P(x) \land B(x) \to C(x)] && \{\neg\forall\} \\ &\equiv \exists x\neg[\neg(P(x) \land B(x)) \lor C(x)] && \{\textbf{implicação}\} \\ &\equiv \exists x[\neg\neg(P(x) \land B(x)) \land \neg C(x)] && \{\lor - \textbf{DeMorgan}\} \\ &\equiv \exists x[P(x) \land B(x) \land \neg C(x)] && \{\textbf{Dupla Negação}\} \end{aligned}$$

■

Exemplo 9.7. Verifique se as sentenças a seguir são equivalentes:

a) "Nem todo mineiro é atleticano" e "Alguns mineiros não são atleticanos".

b) "Nem todo homem é machista" e "Alguns homens são machistas".

9.2 Exercícios

E. 1. Considere $P(x)$ como a proposição “x passa mais do que cinco horas em aula todos os dias”, em que o domínio de x são todos os estudantes. Expresse as quantificações em português:

a) $\exists x[P(x)]$

b) $\forall x[P(x)]$

c) $\exists x[\neg P(x)]$

d) $\forall x[\neg P(x)]$

E. 2. Considerando que $C(x)$ é “x é comediante”, $F(x)$ é “x é divertido” e o domínio são todas as pessoas, transcreva as proposições seguintes para o português:

a) $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$

b) $\forall x(C(x) \vee F(x))$

c) $\exists x(C(x) \rightarrow F(x))$

d) $\exists x(C(x) \vee F(x))$

E. 3. Traduza cada uma das seguintes sentenças da linguagem natural para a linguagem simbólica da Lógica de Predicados:

a) 10 é múltiplo de 5.

b) Todo número divisível por 10 é divisível por 5.

c) Todo número par é maior que 20.

d) Nenhum número impar é maior que 10.

E. 4. Transcreva cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Ninguém é perfeito.

b) Nem todos são perfeitos.

c) Todos os seus amigos são perfeitos.

d) Pelo menos um dos seus amigos é perfeito.

e) Todos são seus amigos e são perfeitos.

f) Nem todos são seus amigos ou alguém não é perfeito.

E. 5. Transcreva as proposições abaixo para o português. Considere como universo de discurso o conjunto dos números reais.

a) $\forall x \exists y (x < y)$

b) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0))$

c) $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$

E. 6. Escreva as sentenças quantificadas na forma simbólica.

a) Todo estudante de ciência da computação precisa de um curso de matemática discreta.

b) Há um estudante nesta sala que possui seu próprio computador.

c) Todo estudante nesta sala cursou de pelo menos uma disciplina de ciência da computação.

d) Há um estudante nesta sala que cursou de pelo menos uma disciplina de ciência da computação.

e) Todo estudante desta sala já esteve em todos os prédios do campus.

f) Há um estudante desta sala que já esteve em todas as salas de pelo menos um prédio do campus.

g) Todo estudante nesta sala já esteve em pelo menos uma sala de todos os prédios do campus.

E. 7. Usando os símbolos predicados indicados e quantificadores apropriados, escreva cada uma das frases em português como uma fórmula bem formada predicada, considerando o mundo inteiro como universo de discurso.

$D(x)$:	x é um dia.
$S(x)$:	x é ensolarado.
$R(x)$:	x é chuvoso.
M:	segunda-feira.
T:	terça-feira.

a) Todos os dias são ensolarados.

b) Alguns dias não são chuvosos.

c) Todo dia ensolarado não é chuvoso.

d) Alguns dias são ensolarados e chuvosos.

e) Nenhum dia é, ao mesmo tempo, ensolarado e chuvoso.

f) É sempre um dia ensolarado só se for um dia chuvoso.

g) Nenhum dia é ensolarado.

h) A segunda-feira foi ensolarada; portanto, todos os dias serão ensolarados.

i) Choveu na segunda-feira e na terça-feira.

j) Se algum dia for ensolarado, então todos os dias serão ensolarados.

E. 8. Considere o universo de discurso constituído por um conjunto de pessoas e os seguintes símbolos predicados:

$$\begin{aligned} A(x,y)&: \quad x \text{ é amigo de } y \\ I(x)&: \quad x \text{ é inteligente} \end{aligned}$$

Traduza cada uma das seguintes sentenças para fórmulas da Lógica de Predicados:

a) João tem um amigo.

b) João tem um amigo inteligente.

c) Todo mundo tem um amigo.

d) Todo mundo tem um amigo inteligente.

e) Todo amigo de João é inteligente.

f) Todo amigo de João, que não é amigo de Maria é inteligente.

g) João é amigo de quem não é amigo de Maria e é inteligente.

h) Nem todo mundo tem um amigo inteligente.

E. 9. Use predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos para expressar a proposição de que "Todo número inteiro positivo é a soma dos quadrados de quatro números inteiros."

E. 10. Use quantificadores e conectivos lógicos para expressar o fato de que todo polinômio linear (ou seja, de grau 1) com coeficientes reais e no qual o coeficiente de x é diferente de zero tem exatamente uma raiz real.

E. 11. Expresse cada uma das proposições matemáticas abaixo usando predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos.

a) O produto de dois números reais negativos é positivo.

b) A diferença entre um número real e ele mesmo é zero.

c) Todo número real positivo tem exatamente duas raízes quadradas.

d) Um número real negativo não tem uma raiz quadrada que seja um número real.

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

8 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

9 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

10 ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.