4

Álgebra Booleana

Sumário da Aula

4.1 Proposições associadas a uma sentença condicional

As proposições seguintes são chamadas de **proposições associadas a proposição condicional** $(P \to Q)$:

1. **Proposição Contrapositiva:** $\neg Q \to \neg P$
2. **Proposição Recíproca:** $Q \to P$
3. **Proposição Inversa:** $\neg P \to \neg Q$

Considere o **Teorema 1: "Se um quadrilátero tem um par de lados paralelos, então ele tem um par de ângulos suplementares"**, cujas proposições simples são:

P: O quadrilátero tem um par de lados paralelos.

Q: O quadrilátero tem um par de ângulos suplementares.

O **Teorema 1** é escrito na forma simbólica pela condicional $P \to Q$. Considere agora uma segunda versão deste teorema, representada simbolicamente por $\neg Q \to \neg P$, **Teorema 2: "Se um quadrilátero não tem um par de ângulos suplementares, então ele não tem um par de lados paralelos."**

Veja na tabela verdade seguinte que o **Teorema 2** é logicamente equivalente ao **Teorema 1**.

P	Q	**Teorema 1** $P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	**Teorema 2** $\neg Q \to \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Logo, $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$. Os teoremas serem equivalentes siginifica que **se o Teorema 1 é verdadeiro, então o Teorema 2 também é**.

Considere agora uma terceira versão do teorema representada simbolicamente por $Q \to P$, **Teorema 3: "Se um quadrilátero tem um par de ângulos suplementares, então ele tem um par de lados paralelos."** Veja na tabela verdade seguinte que o **Teorema 3** não é logicamente equivalente ao **Teorema 1**.

P	Q	**Teorema 1** $P \to Q$	**Teorema 3** $Q \to P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Definição 4.1. Define-se então as seguintes propriedades em relação as proposições condicionais associadas:

- **A condicional** $P \to Q$ **é equivalente a contrapositiva**[1] $\neg Q \to \neg P$.
- A **recíproca** $Q \to P$ **é equivalente a inversa** $\neg P \to \neg Q$.

Exemplo 27. Seja a sentença S: **Se está chovendo, então o chão está molhado.** Apresente:

a) A recíproca de S: **Se o chão está molhado, então está chovendo.**

b) A contrapositiva de S: **Se o chão não está molhado, então não está chovendo.**

c) A inversa de S: **Se não está chovendo, então o chão não está molhado.**

[1] **Estudaremos esta regra com mais detalhes em aulas futuras. A contrapositiva (ou contraposição) é uma técnica importantíssima na Matemática usada na demontração de Teoremas.**

4.2 Forma Normal

Uma proposição está na **forma normal** se é **formada apenas pelos conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$**. Existem duas formas normais que são amplamente utilizadas na ciência da computação: **a forma normal conjuntiva** e a **forma normal disjuntiva**.

Forma Normal Conjutiva:

A **formal normal conjuntiva** (FNC) é utilizada como entrada para algoritmos para teste de satisfazibilidade.

Definição 4.2. Dizemos que uma fórmula bem formada da lógica proposicional está na forma normal conjuntiva se, e somente se, são verificadas as seguintes condições:

1. As constantes lógicas (T e F) são fórmulas na forma normal conjuntiva.
2. Contém apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
3. A $\neg$ não aparece repetida (como $\neg\neg$) e só incide sobre letras proposicionais (isto é, não é usado sobre fórmulas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$).
4. A $\vee$ incide apenas sobre as variáveis ou negação das variáveis, ou seja, **não ocorre em nível mais externo da fórmula, como está apresentado aqui:** $P \vee (Q \wedge R)$.
5. A $\wedge$ incide sobre fórmulas que consistem de disjunção de variáveis ou negação de variáveis.

Sejam P, Q e R variáveis da lógica proposicional. São **exemplos de fórmulas na forma normal conjuntiva**:

- $T,\ F,\ P,\ \neg P$.
- $P \vee Q,\ \neg Q \vee R,\ P \vee Q \vee R$ e $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$.
- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

São exemplos de **fórmulas que não estão na forma normal conjuntiva**:

- $A \rightarrow (B \vee C)$, por possuir o conectivo de implicação.
- $\neg(A \wedge B)$, pois a negação incide sobre fórmula e não letras proposicionais.
- $A \vee (B \wedge C)$, pois o conectivo $\vee$ deve ocorrer apenas em variáveis ou negação de variáveis.

Exemplo 28. Determine a forma normal conjuntiva da proposição composta

$$\neg[((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)]$$

Solução: Aplicando as regras de equivalência sobre a fórmula composta:

$$\begin{array}{rcll}
\neg[((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)] & \equiv & \neg[(A \vee B) \wedge (\neg B)] \wedge \neg(B \wedge C) & \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
& \equiv & [\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg B)] \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\wedge - \text{DeMorgan}\} \\
& \equiv & [\neg(A \vee B) \vee B] \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\text{Dupla Negação}\} \\
& \equiv & [(\neg A \wedge \neg B) \vee B] \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
& \equiv & [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\vee - \text{Distributividade}\} \\
& \equiv & [(\neg A \vee B) \wedge T] \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\text{Terceiro Excluído}\} \\
& \equiv & (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C) & \{\wedge - \text{Identidade}\}
\end{array}$$

Tem-se que a fórmula equivalente $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)$ está na forma normal conjuntiva.

Forma Normal Disjuntiva:

A formal normal disjuntiva (FND) é aplicada em minimização de fórmulas lógicas.

Definição 4.3. Dizemos que uma fórmula bem formada da lógica proposicional está na forma normal disjuntiva se, e somente se, são verificadas as seguintes condições:

1. As constantes lógicas (T e F) são fórmulas na forma normal disjuntiva.
2. Contém apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
3. A $\neg$ não aparece repetida (como $\neg\neg$) e só incide sobre letras proposicionais (isto é, não tem alcance sobre fórmulas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$).
4. A $\wedge$ incide apenas sobre as variáveis ou negação das variáveis, isto é, **não ocorre em nível mais externo das fórmulas, como apresentado em** $P \wedge (Q \vee R)$**)**.
5. $\vee$ incide sobre fórmulas que consistem de conjunções de variáveis ou negação de variáveis.

Sejam P, Q e R variáveis da lógica proposicional. São **exemplos de fórmulas na forma normal disjuntiva**:

- $T,\ F,\ P,\ \neg P.$
- $P \wedge Q,\quad Q \wedge \neg R,\quad \neg P \wedge Q \wedge R$ e $\quad \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R.$
- $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R).$

São exemplos de **fórmulas que não estão na forma normal disjuntiva**:

- $(A \wedge B) \leftrightarrow C$, por possuir o conectivo da bi-implicação.
- $\neg(A \vee B)$, pois a negação incide sobre fórmula e não apenas letras proposicionais.
- $A \wedge (B \vee C)$, pois o conectivo $\wedge$ deve ocorrer apenas em variáveis ou negação de variáveis.

Exemplo 29. Determine a forma normal disjuntiva da proposição composta

$$(A \to B) \land (B \to A)$$

Solução: Aplicando as regras de equivalência sobre a fórmula composta:

$$\begin{aligned}
(A \to B) \land (B \to A) &\equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) && \{\text{Implicação}\} \\
&\equiv [\neg A \land (\neg B \lor A)] \lor [B \land (\neg B \lor A)] && \{\land - \text{Distrib.}\} \\
&\equiv [(\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land A)] \lor [(B \land \neg B) \lor (B \land A)] && \{\land - \text{Distrib.}\} \\
&\equiv [(\neg A \land \neg B) \lor F] \lor [F \lor (B \land A)] && \{\text{Contradição.}\} \\
&\equiv (\neg A \land \neg B) \lor (B \land A) && \{\lor - \text{Identidade.}\}
\end{aligned}$$

Tem-se que a fórmula equivalente $(\neg A \land \neg B) \lor (B \land A)$ está na forma normal disjuntiva.

4.3 Exemplos complementares

Exemplo 30. Considere a seguinte proposição:

Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula de BCC101 é chata. Suponha que a aula de BCC101 não seja chata. O que você pode concluir a respeito de Alcides?

A tradução da frase "Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado, e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula de BCC101 é chata" para a linguagem simbólica é dada considerando as seguintes proposições simples:

- P: Alcides está atrasado.
- Q: Belmiro está atrasado.
- R: A aula de BCC101 é chata.

Simbolicamente é escrita pela fórmula $(P \to Q) \land [(P \land Q) \to R]$ e a tabela verdade dada por:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \land Q$	$(P \land Q) \to R$	$(P \to Q) \land [(P \land Q) \to R]$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	V	F	T	T
F	T	F	V	F	T	T
F	F	T	V	F	T	T
F	F	F	V	F	T	T

Como a pergunta em questão é **"O que você pode concluir a respeito de Alcides?"**, estamos interessados no valor lógico da proposição P. Temos que:

- É necessário analisar as sentenças válidas. Então vamos, excluir as linhas 2, 3 e 4 que possuem valores lógicos F.
- Assumindo que a aula não é chata ($R = F$), é possível eliminar todas as linhas em que R é verdadeiro, ou seja, as linhas 1, 3, 5 e 7.

P	Q	R	$P \to Q$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \wedge [(P \wedge Q) \to R]$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	V	F	T	T
F	T	F	V	F	T	T
F	F	T	V	F	T	T
F	F	F	V	F	T	T

As linhas restantes são 6 e 8. Como o interesse é no valor lógico de P e em ambas as linhas restantes esse valor é falso, pode-se concluir que **Alcides não está atrasado.**

O próximo exemplo fica para o leitor.

Exemplo 31. Considere as sentenças simples:

P: Amauri está com fome.

Q: A geladeira está vazia.

R: Amauri está zangado.

a) Escreva na forma simbólica a sentença **"Se Amauri está com fome e a geladeira está vazia, então Amauri esta zangado'**.
Forma simbólica:

b) Construa a tabela verdade para a sentença anterior.

P	Q	R	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

c) Suponha que a sentença dada em (a) seja verdadeira. Suponha também que Amauri não esteja zangado e a geladeira esteja vazia. Diante destas suposições, é possível dizer que Amauri está com fome?

4.4 Exercícios

E. 1. Verifique se as sentenças "quem tem dinheiro, não compra fiado" e "quem não tem dinheiro, compra fiado" são equivalentes.

E. 2. Considere a seguinte sentença: $S = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$.

a) Construa a tabela verdade para S.

b) Encontre uma expressão simplificada que seja logicamente equivalente a S.

E. 3. Mostre que a sentença é $[P \wedge (P \wedge Q)] \wedge \neg(P \vee Q)$ **é uma contradição.**

E. 4. Prove, usando as equivalências lógicas já estudadas, que $Q \rightarrow P \equiv \neg P \rightarrow \neg Q$

E. 5. Considere a sentença S : **Se o cachorro é um mamífero, então ele não voa. Escreva:**

a) a contrapositiva de S:

b) a recíproca de S:

c) a inversa de S:

E. 6. Determine uma forma normal conjuntiva equivalente para as proposições.

1. $P \rightarrow Q$
2. $P \rightarrow \neg P$
3. $P \leftrightarrow \neg P$
4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

E. 7. Determine uma forma normal disjuntiva equivalente para as proposições seguintes:

1. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
2. $\neg(P \rightarrow Q)$
3. $(P \rightarrow P) \wedge \neg P$
4. $\neg(P \vee Q)$
5. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
6. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

E. 8. Se Hugo é culpado, então Maria é inocente. Se Hugo é culpado, Ricardo é inocente. Se Hugo é inocente, então Ricardo é culpado. Se Maria é inocente, então Ricardo é culpado. Se Maria é culpada, então Ricardo é inocente. Logo, Hugo, Maria e Ricardo são, respectivamente:

a) Culpado, culpado, culpado.

b) Inocente, culpado, culpado.

c) Inocente, culpado, inocente.

d) Inocente, inocente, culpado.

e) Culpado, culpado, inocente.

E. 9. Um técnico suspeita que um ou mais dos processadores de um sistema distribuído não está funcionando corretamente. Os processadores A, B e C são capazes de relatar informações sobre o estado (funcionando ou não funcionando) de processadores do sistema. O técnico não tem certeza se um processador de fato não funciona, ou se o problema está nas rotinas de transmissão de estado de um ou mais processadores. Depois de sondar cada processador, o técnico recebeu o seguinte relatório de estados.

- **O processador A relata que o processador B não está funcionando e que o processador C está funcionando.**
- **O processador B relata que A está funcionando se e somente se B está funcionando.**
- **O processador C relata que pelo menos um dos outros dois processadores não está funcionando.**

Ajude o técnico a resolver as seguintes questões:

a) Sejam a : "A está funcionando", b : "B está funcionando", e c : "C está funcionando". Escreva os três relatórios de estado nos termos a, b e c, usando símbolos da lógica formal.

b) Complete a tabela verdade:

a	b	c	Relatório A		Relatório B	Relatório C	
			$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$\neg a \vee \neg b$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	T	F					

c) Assumindo que todos esses relatórios sejam verdadeiros, que(ais) processador(es) não está(estão) funcionando?

d) Assumindo que todos os processadores estejam funcionando, que relatório(s) de estado é(são) falso(s)?

E. 10. Dizer que "Guilherme não é músico ou Marcelo é professor" é, do ponto de vista lógico, dizer o mesmo que:

a) Se Marcelo é professor, então Guilherme é músico.

b) Se Guilherme é músico, então Marcelo é professor.

c) Se Guilherme não é músico, então Marcelo é professor.

d) Se Guilherme é músico, então Marcelo não é professor.

e) Se Guilherme não é músico, então Marcelo não é professor.

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.