9

Métodos de Gauss Seidel

Sumário da Aula

9.1 Método de Gauss Seidel

Considere o sistema de equações lineares $Ax = B$, em que $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$, $det(A) \neq 0$ e com a diagonal principal $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

O sistema pode ser reescrito na forma equivalente, dividindo cada linha pelo elemento da diagonal principal e explicitando x_1 na primeira coluna, x_2 na segunda coluna, x_3 na terceira coluna, e, sucessivamente, até x_n na n-ésima coluna:

$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 & - \cdots - & a_{1n}x_n) \\
x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 & - \cdots - & a_{2n}x_n) \\
\vdots & & \ddots & & & \\
x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n & -a_{n1}x_1 & -a_{n2}x_2 & -a_{n3}x_3 & - \cdots - &)
\end{cases}
$$

ou ainda na forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

O método iterativo de Gauss-Seidel é dado por:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & - \cdots & -a_{1n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & -a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\
x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 & -a_{21}x_1^{(k)} & & -a_{23}x_3^{(k-1)} & - \cdots & -a_{2n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & -a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\
x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 & -a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & & - \cdots & -a_{3n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & -a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\
\vdots & & \ddots & & & & \\
x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n & -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -a_{n3}x_3^{(k)} & - \cdots & -a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} &)
\end{cases}
$$

cuja forma Matricial é:

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

Observação:

De forma geral, o método iterativo de Gauss-Seidel é escrito como:

$$x_i(k) = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)}{a_{ii}}, \quad i = 1, \cdots, n$$

Exemplo 24. Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel com o limite de 6 iterações ou uma precisão menor que 10^{-2}. Utilize $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]$ como estimativa inicial e retenha, nos cálculos, quatro casas decimais.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 & = 1 \end{cases}$$

Solução: A função de iteração é:

$$\begin{cases} x_1^k & = \dfrac{1 - x_2^{k-1} + x_3^{k-1}}{2} \\ \\ x_2^k & = \dfrac{1 - x_1^k + x_3^{k-1}}{3} \\ \\ x_3^k & = \dfrac{1 + x_1^k - x_2^k}{5} \end{cases}$$

e os resultados da aplicação do método de Gauss-Seidel são apresentados no quadro a seguir:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$max_{1\leq i\leq 3}\lvert x_i^k - x_i^{k-1}\rvert$
0	0	0	0	
1	0,5	0,1667	0,2667	0,5
2	0,55	0,2389	0,2622	0,0722
3	0,5117	0,2502	0,2523	0,03883
4	0,5011	0,2504	0,2501	0,0106
5	0,4999	0,2501	0,2500	0,0011
6	0,4999	0,2500	0,2500	0,0001

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 0,4999 & 0,2500 & 0,2500 \end{bmatrix}^t$ com uma precisão $\epsilon = 0,0001$.

9.1.1 Critério de Convergência

É condição suficiente para a convergência do método de Gauss-Seidel, se:

a) O **critério de Sassenfeld** for satisfeito, ou seja,

$$\max_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1,$$

onde os β_i são calculados por recorrência através de:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |m_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |m_{ij}|$$

b) O critério das linhas for satisfeito.

c) A matriz dos coeficientes for **estritamente diagonalmente dominante.**

Observações:

1. **Se a matriz dos coeficientes A for estritamente diagonal dominante, então, qualquer que seja a estimativa inicial $x^{(0)}$, tanto o método de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem.**

2. **Se A é uma matriz diagonal dominante e se o sistema linear é irredutível[1], então, para qualquer estimativa inicial, os métodos iterativos convergem.**

3. **Dado um sistema linear $Ax = b$, pode acontecer do método de Jacobi aplicado a ele gerar uma sequência de soluções que converge para a solução do sistema linear, enquanto o método de Gauss-Seidel gerar uma sequência que diverge e vice-versa.**

4. **A convergência dos métodos iterativos não dependem da aproximação inicial. Evidentemente, quanto melhor for a aproximação inicial menor será o número de iterações necessárias para atingir uma determinada precisão. Como não conhecemos a priori a solução é comum utilizar o vetor nulo ($x^{(0)} = \bar{0}$) como sendo o vetor inicial.**

Exemplo 25. Resolva o sistema linear pelo método de Gauss Seidel com precisão menor ou igual a 10^{-3} e $k_{max} = 10$. Utilize $x^{(0)} = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^t$ como estimativa inicial e retenha, nos cálculos, quatro casas decimais.

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = 57 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 & = 20 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = -4 \end{cases}$$

Solução: Da Definição 8.7, tem-se que a matriz A é estritamente diagonal dominante; isto é:

Para $i = 1$: $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \to |10| > |3| + |-2|$

Para $i = 2$: $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \to |8| > |2| + |-1|$

Para $i = 3$: $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \to |5| > |1| + |1|$

Portanto, conclui-se que o processo iterativo de Gauss-Seidel convergirá.

A função de iteração é dada por:

$$\begin{cases} x_1^k & = \dfrac{1}{10}(-3x_2^{k-1} + 2x_3^{k-1} + 57) \\ \\ x_2^k & = \dfrac{1}{8}(-2x_1^k + 1x_3^{k-1} + 20) \\ \\ x_3^k & = \dfrac{1}{5}(-x_1^k - x_2^k - 4) \end{cases}$$

Os resultados da aplicação do método de Gauss-Seidel estão sumarizados no quadro a seguir:

[1] Um sistema linear é dito **redutível** quando for possível trabalhar com um número menor de equações que o número dado no sistema linear original e, consequentemente, determinar a solução do sistema para algumas incógnitas. Quando isso não for possível, o sistema é dito **irredutível**

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$max_{1\leq i\leq 3}\lvert x_i^k - x_i^{k-1}\rvert$
0	5,7	2,5	-0,8	
1	4,79	1,2025	-1,9985	1,2975
2	4,9396	1,0153	-1,9909	0,1872
3	4,9972	1,0018	-1,9998	0,0576
4	4,9995	1,0002	-1,9999	0,0023
5	4,9999	1,0002	-2,0000	0,0004

Portanto, a solução do sistema linear é $x \approx x^5 = \begin{bmatrix} 4,9999 & 1,0002 & -2,0000 \end{bmatrix}^t$.

9.2 Complexidade dos Métodos Iterativos

A análise da complexidade (quantidade de operações requeridas) em um método iterativo, em cada iteração, é bastante simples. O que não é trivial é determinar o número total de operações realizadas por um programa de resolução de sistemas de equações lineares por meio de um método iterativo, pois este depende do critério de parada adotado. Para evitar que se entre em uma repetição infinita, realizando operações quando não ocorre convergência, ou quando não se alcança a precisão estabelecida, sempre deve ser adotado como critério de parada, além da precisão desejada, um número máximo de iterações. No pior caso, este será o número de vezes que as iterações serão executadas.

A complexidade computacional dos algoritmos de Jacobi e Gauss-Seidel é apresentada na Tabela 9.1, onde k indica as iterações do algoritmo e n a ordem do sistema linear.

Operações	Complexidade
Adições	$kn^2 + kn + k$
Multiplicações	$kn^2 - kn$
Divisões	$(k+1)n + k$

Tabela 9.1: Complexidade computacional dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

9.3 Considerações Finais

Ao resolver um sistema linear é preciso definir se a melhor estratégia a se usar é a aplicação de um método direto ou iterativo. A questão é que não se pode garantir, a priori, qual tipo de método é mais eficiente, pois é preciso fazer uma análise criteriosa das características da matriz dos coeficientes A e do porte do sistema a ser resolvido.

Métodos Diretos:

Os métodos diretos possuem a vantagem de serem mais gerais e robustos do que os métodos iterativos, podendo ser utilizados na resolução de qualquer tipo de sistema de equações. São processos finitos e, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema de equações não singular.

De forma geral, devem ser utilizados quando a matriz dos coeficientes A for densa, ou seja, apresentar poucos elementos não nulos e quando o sistema linear é de pequeno porte (dimensão pequena).

Estes métodos apresentam problemas com a propagação dos erros de arredondamento, e uma forma de minimizar este efeito é a utilização de técnicas de pivotamento.

Em problemas práticos, em que a matriz A do sistema se mantém inalterada e o vetor b sofre modificações, o método de decomposição LU é mais indicado, visto que ele faz a fatoração da matriz A uma única vez.

Métodos Iterativos:

Os métodos iterativos são indicados para resolver sistemas lineares de grande porte (centenas de equações) e quando a matriz A for esparsa (possui muitos elementos nulos).

Estes métodos convergem apenas sob determinadas condições. Com a convergência assegurada, estes métodos se mostram eficientes pois: independem da solução inicial, não alteram a estrutura da matriz A durante a aplicação, e em geral, minimizam a propagação dos erros de arredondamento no resultado final.

A Tabela 9.2 apresenta de forma sucinta uma comparação entre os métodos diretos e iterativos levando em consideração alguns indicadores.

Indicador	**Método Direto**	**Método Iterativo**
Aplicação	Para a resolução de sistemas de equações densos de pequeno a médio porte.	Para a resolução de sistemas de equações de grande porte.
Esparsidade	Destrói a esparsidade da matriz dos coeficientes durante a fase de eliminação.	Preserva a esparsidade da matriz da matriz dos coeficientes.
Convergência	Se a matriz dos coeficientes não é singular, então a solução é sempre obtida.	Há garantia de se obter a solução somente sob certas condições
Número de operações	É possível determinar a priori o número de operações necessárias.	Não é possível determinar a priori a complexidade.
Erro de arredondamento	Propaga os erros durante os cálculos. A ampliação pode ser minimizada usando técnicas de pivotação.	Os erros de arredondamento não afetam as soluções obtidas em cada iteração. Apenas a solução final pode conter erro.

Tabela 9.2: Comparação entre métodos diretos e iterativos.

9.4 Exercícios

E. 1. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 6x_3 & = 7 \\ 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 28 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 & = -17 \end{cases}$$

a) Verifique a condição de convergência do método de Gauss-Seidel.

b) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ e $\epsilon = 0,01$. Reordene as equações, se for preciso, de modo que a convergência esteja garantida.

E. 2. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

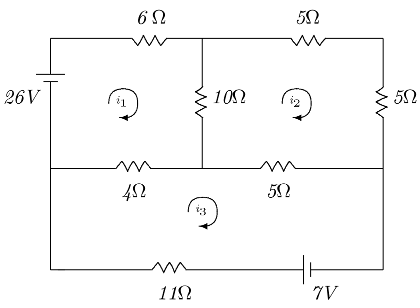
$$\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & = 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 & = -2 \end{cases}$$

a) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Jacobi com $x^{(0)} = [0 \quad 1,5 \quad 1]^t$ e $\epsilon = 0,01$ ou $k_{max} = 6$

b) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [0 \quad 1,5 \quad 1]^t$ e $\epsilon = 0,01$ ou $k_{max} = 6$

c) Compare o número de iterações e a precisão de ambos os métodos. O que é possível concluir?

E. 3. Considere o circuito da figura abaixo, com resistências e baterias tal como indicado e escolhendo arbitrariamente as orientações das correntes.



Aplicando a lei de Kirchoff, que diz que a soma algébrica das diferenças de potencial em qualquer circuito fechado é zero, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 6i_1 + 10(i_1 - i_2) + 4(i_1 - i_3) - 26 & = 0 \\ 5i_2 + 5i_2 + 5(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) & = 0 \\ 11i_3 + 4(i_3 - i_1) + 5(i_3 - i_2) - 7 & = 0 \end{cases}$$

a) É possível aplicar ao sistema linear os métodos iterativos com convergência assegurada? Justifique sua resposta e, se necessário, reordene as equações do sistema de modo que a convergência dos métodos iterativos esteja assegurada.

b) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Gauss-Seidel com uma precisão menor que $0,2$ ou o máximo de 6 iterações. Utilize como estimativa inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$.

c) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Jacobi com uma precisão menor que $0,2$ ou o máximo de 6 iterações. Utilize como estimativa inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$.

d) Compare o número de iterações e a precisão de ambos os métodos. O que é possível concluir?