SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

UMA EQUAÇÃO LINEAR COM n INCÓGNITAS $x_1, x_2, \dots, x_n$ É DA FORMA

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

EM QUE $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. SÃO CHAMADOS DE COEFICIENTES E $b \in \mathbb{R}$ É O TERMO INDEPENDENTE.

UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES É UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES DA FORMA

$$* \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

EM QUE $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ E

$b_i \in \mathbb{R}$ PARA $1 \leq i \leq m$.

PODEMOS REESCREVER ESTE SISTEMA NA FORMA MATRICIAL

$AX = B$, EM QUE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

É A MATRIZ DOS COEFICIENTES.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$ É A MATRIZ COM AS INCÓGNITAS E

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$ É A MATRIZ DOS TERMOS INDEPENTES.

EXEMPLO 1.

O SISTEMA
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 11 \end{cases}$$

PODE SER ESCRITO COMO

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

RESOLVER UM SISTEMA DA FORMA $*$ É ENCONTRAR A MATRIZ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ QUE SATISFAZ CADA UMA DAS EQUAÇÕES.

UM SISTEMA LINEAR PODE TER SOLUÇÃO ÚNICA, PODE NÃO TER SOLUÇÃO OU TER INFINITAS SOLUÇÕES.

VAMOS RESOLVER UM SISTEMA LINEAR, COM DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS, QUE JÁ SABEMOS RESOLVER USANDO O MÉTODO DA ADIÇÃO OU O DA SUBSTITUIÇÃO.

EXEMPLO 2.

DETERMINE x E y TAIS QUE

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \quad \times(-2) \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} +$$

$$-3y = -2$$

$$y = 2/3$$

SUBSTITUINDO EM UMA DAS EQUAÇÕES:

$$x + 2y = 1 \Rightarrow$$

$$x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 - \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{-1}{3}$$

USANDO A NOTAÇÃO MATRICIAL:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

VAMOS CONSIDERAR A MATRIZ 2×3 $[A \,\vdots\, B]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

SENDO L_1 E L_2 A PRIMEIRA E A SEGUNDA LINHA RESPECTIVAMENTE, VAMOS MULTIPLICAR A PRIMEIRA LINHA POR -2.

$$\begin{array}{c} -2L_1 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

AGORA TROCAMOS A L_2 POR $L_1 + L_2$:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_1 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

OBTEMOS O SISTEMA

$$\begin{cases} -2x - 4y = -2 \\ \quad\quad -3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4\left(\frac{2}{3}\right) = -2 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -1/3$.

O MÉTODO USANDO A NOTAÇÃO MATRICIAL É UMA ESPÉCIE DE ORGANIZAÇÃO DO MÉTODO DA ADIÇÃO. VAMOS USÁ-LO PARA AMPLIAR ESTE RACIOCÍNIO PARA SISTEMAS MAIORES.

PARA ISSO FAREMOS ALGUMAS DEFINIÇÕES.

AS SEGUINTES OPERAÇÕES ~~SÃO~~ CHAMADAS DE OPERAÇÕES ELEMENTARES:

i) TROCAR 2 OU MAIS EQUAÇÕES (LINHAS DA MATRIZ) DE POSIÇÃO.

ii) MULTIPLICAR UMA EQUAÇÃO (LINHA DA MATRIZ) POR UMA CONSTANTE (ESCALAR)

iii) SOMAR DUAS EQUAÇÕES.

CONSIDERE O SISTEMA $AX = B$ ESCRITO NA FORMA MATRICIAL.

A MATRIZ $[A \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} & b_m \end{array}\right]$ É

CHAMADA DE MATRIZ AUMENTADA

TEOREMA 1: SE DOIS SISTEMAS LINEARES $AX = B$ E $CX = D$ SÃO TAIS QUE A MATRIZ AUMENTADA $[C \vdots D]$ PODE SER OBTIDA DE $[A \vdots B]$ POR OPERAÇÕES ELEMENTARES, ENTÃO OS DOIS SISTEMAS POSSUEM A MESMA SOLUÇÃO.

DOIS SISTEMAS QUE POSSUEM O MESMO CONJUNTO SOLUÇÃO SÃO DITOS EQUIVALENTES.

* DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ESTÁ NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA SE

A) TODAS AS LINHAS NULAS (QUANDO EXISTEM) ESTÃO ABAIXO DAS LINHAS NÃO NULAS.

B) O PRIMEIRO ELEMENTO NÃO NULO DE CADA LINHA NÃO NULA É IGUAL À 1. ESTE ELEMENTO É CHAMADO DE PIVÔ DA LINHA

C) O PIVÔ DA LINHA $i+1$ OCORRE À DIREITA DO PIVÔ DA LINHA i, PARA $i = 1, 2, \dots, m-1$

D) SE UMA COLUNA CONTÉM UM PIVÔ, ENTÃO TODOS OS SEUS OUTROS ELEMENTOS SÃO IGUAIS A ZERO.

SE UMA MATRIZ SATISFAZ (A) E (C) E NÃO NECESSARIAMENTE (B) E (D), DIZEMOS QUE ELA ESTÁ NA FORMA ESCALONADA

EXEMPLO 3.

AS MATRIZES A SEGUIR SÃO ESCALONADAS REDUZIDAS

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QUALQUER MATRIZ IDENTIDADE I_n É ESCALONADA REDUZIDA.

JÁ AS MATRIZES A SEGUIR SÃO APENAS ESCALONADAS

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O MÉTODO DE GAUSS.

ESTE MÉTODO DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS CONSISTE EM FAZER OPERAÇÕES ELEMENTARES NA MATRIZ AUMENTADA $[A \vdots B]$, ATÉ QUE ELA SEJA UMA MATRIZ ESCALONADA.

EXEMPLO 4.

CONSIDERE O SISTEMA $\begin{cases} 5x + 5y = 15 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

SUA MATRIZ AUMENTADA:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \frac{L_1}{5} \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

5) $\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ y + 5z = 2 \\ -2y - 10z = -8 \end{cases} \Rightarrow$

PIVÔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x - 2z = 3 \\ y + 5z = 2 \\ 0 = -4 \ !!! \end{array}$$

ECALONADA.

CONTRADIÇÃO $\Rightarrow$

ESTE SISTEMA NÃO TEM SOLUÇÃO.

6) $\begin{cases} 3z - 9w = 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w = -45 \\ x + 3y - z + 5w = -7 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & +5 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ \frac{L_3}{3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 \\ \frac{L_2}{-5} \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ECALONADA REDUZIDA $\Rightarrow$

$\begin{cases} x + 3y + 2w = -5 \\ z - 3w = 2 \end{cases}$

PARA QUAISQUER x, y, z, w QUE SATISFAÇAM ESTA EQUAÇÃO.

SE $w = \alpha \in \mathbb{R}$,

$z = 2 + 3\alpha$. E SE $y = \beta$,

$x = -5 - 3\beta - 2\alpha$

ASSIM, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} x = -5 - 3\beta - 2\alpha \\ y = \beta \\ z = 2 + 3\alpha \\ w = \alpha \end{bmatrix}$ FORMA O CONJUNTO DE SOLUÇÕES.

PORTANTO ESTE SISTEMA TEM INFINITAS SOLUÇÕES.

UM SISTEMA LINEAR $AX = B$ PODE

* TER SOLUÇÃO ÚNICA
* NÃO TER SOLUÇÃO
* TER INFINITAS SOLUÇÕES.