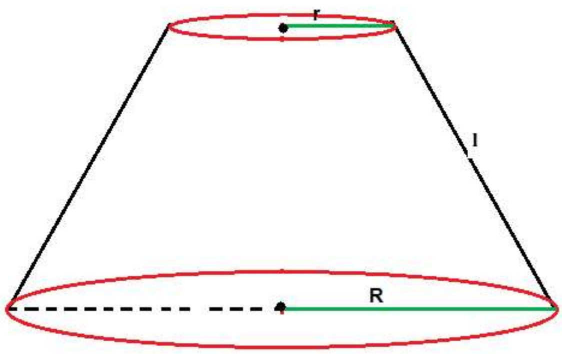
1.6 AULA 7- Área de Superfície de Revolução

Da geometria clássica sabemos que a área lateral de um tronco de cone com raios das bases r e R e geratriz l é dada por $A = \pi(r+R)l$.



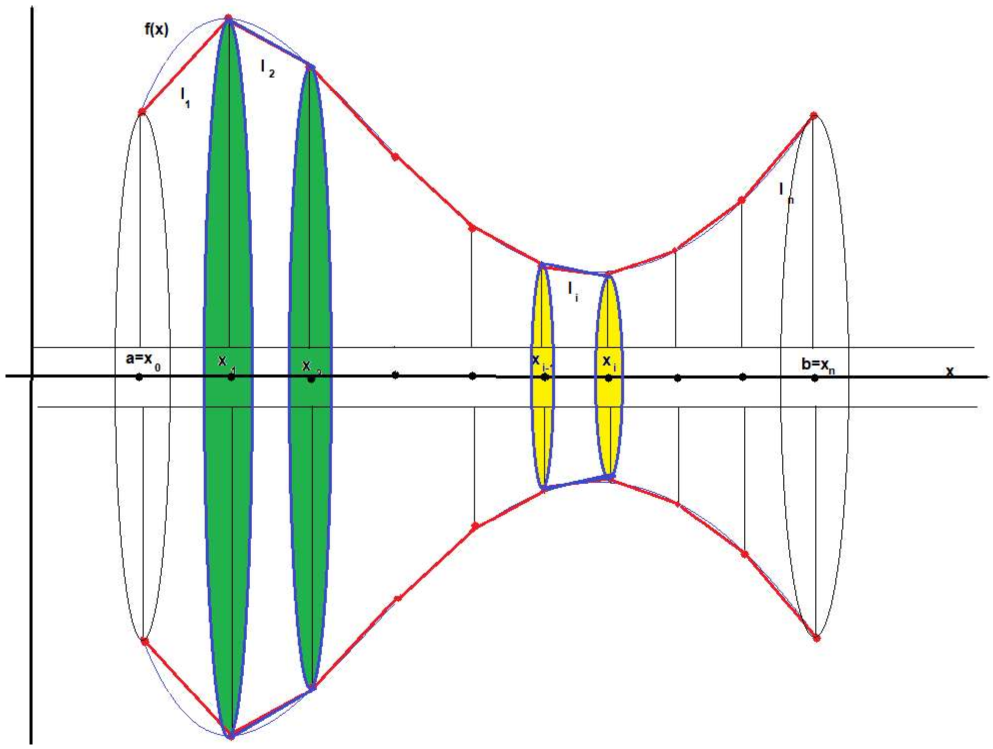
Utilizaremos essa informação para deduzirmos a área de uma superfície de revolução.

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a,b), com derivada contínua. Considere uma partição do intervalo $[a,b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideramos o segmento que une os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Ao girarmos essa curva em torno do eixo Ox, cada segmento l_i que aproxima a curva gerará uma tronco de cone. Veja figura:

Observação 1. *Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição temos um tronco de cone com raios iguais a $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ e geratriz $g = l_i$. Logo, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o volume do tronco será:*

$$V_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))l_i$$

Como f é contínua, todos os valores no intervalo $[f(x_{i-1}), f(x_i)]$ são assumidos pela função f. Em particular existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de modo que $f(c_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. Lembrando que $l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i$, temos que volume do tronco torna-se:



$$V_i = 2\pi f(c_i)\sqrt{1+(f'(c_i))^2}\Delta x_i$$

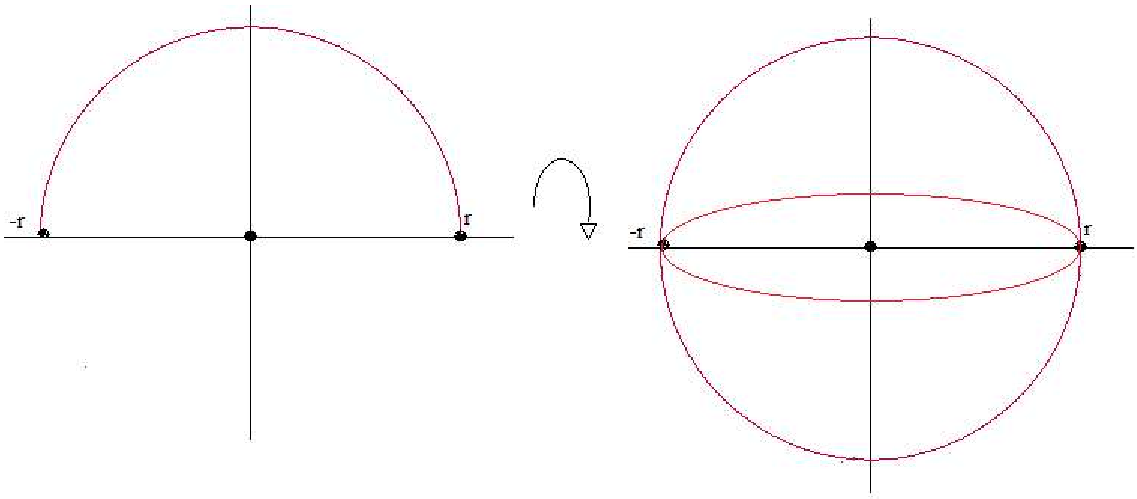
Agora, somando todos os volumes V_i dos troncos de cones e tomando o limite dessas somas de Riemann, chegamos a definição:

Definição 4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a,b), com derivada contínua. A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f, em torno do eixo Ox é dada por:*

$$\acute{A}rea = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Exemplo 14. *Calcule a área da superfície esféria de raio r.*

A esfera pode ser obtida pela rotação, em torno do eixo Ox, do gráfico de $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.



No exemplo anterior vimos que a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi r \int_{-r}^{r} dx \\
&= 2\pi r(r + r) \\
&= 4\pi r^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 15. *Encontre a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo Oy, do gráfico da função $x = \sqrt{2y - 1}$, no intervalo $\frac{5}{8} \leq y \leq 1$.*

Solução:

Observe que temos $x = f(y) = \sqrt{2y - 1}$. Assim, $f'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y - 1}}$.

Portanto

$$
\begin{aligned}
\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}dy &= 2\pi \int_{\frac{5}{8}}^{1} \sqrt{2y-1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2y-1}}\,dy \\
&= 2\pi \int_{\frac{5}{8}}^{1} \sqrt{2y-1}\cdot\sqrt{\frac{2y}{2y-1}}\,dy \\
&= 2\pi \int_{\frac{5}{8}}^{1} \sqrt{2y}\,dy \\
&= 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{5}{8}}^{1} \\
&= \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}\left[1-(\frac{5}{8})^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi\sqrt{2}\left[1-(\frac{5}{8})^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{\pi}{12}\left[16\sqrt{2}-5\sqrt{5}\right]
\end{aligned}
$$

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 15. *Utilizando a fórmula para cálculo da área de superfície de revolução comprove que área lateral do cone de revolução de base com raio r e altura h é* $A = \pi r(\sqrt{r^2 + h^2})$.

Exercício 16. *Determine a área da superfície gerada pela rotação da curva* $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, *em torno do eixo Oy, no intervalo* $0 \leq y \leq ln(2)$.