2 AULA 8 [Integrais Impróprias]

2.1 Integrais Impróprias do tipo 1

Nas resoluções das integrais definidas exige-se que seja válido o Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, o domínio de integração $[a,b]$ deve ser fechado e limitado e as funções que limitam a região sejam contínuas naquele intervalo. Quando uma ou as duas condições não são satisfeitas, as integrais "definidas"são ditas integrais impróprias. Neste caso elas são resolvidas como limites.

Exemplo 16. *Observe que o domínio de integração da primeira integral é ilimitado e na segunda integral a função integrando não está definida no limite inferior de integração.*

1. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$
2. $\int_0^2 \frac{1}{x}dx$

Definição 5 (Integrais impróprias do tipo 1)**.** *Chamaremos de integrais impróprias do tipo 1 aquelas em que o intervalo de integração possui comprimento infinito. Neste caso teremos:*

1. *Se* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *for contínua em* $[a,\infty)$*, então*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

2. *Se* $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ *for contínua em* $(-\infty,b]$*, então*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

3. *Se $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ for contínua em $(-\infty, \infty)$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Sendo c um numero real qualquer.

*Se o limite for finito, em qualquer dos casos, dizemos que a integral imprópria **converge**, e que o limite é o valor da integral imprópria. Caso o limite não exista, dizemos que a integral **diverge**.*

Observação 2. *Se f for uma função não negativa, então a integral imprópria em qualquer das três situações definidas acima continua sendo interpretada como a área que existe sob o gráfico de f no intervalo em questão. Se a integral convergir a área é finita, e se divergir a área será infinita.*

A seguir apresentaremos alguns exemplos.

Exemplo 17. *Decida se a integral imprópria $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ converge ou diverge.*

Solução:

Pela definição, temos que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

Como a integral $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctg(x)$, então

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} arctg(x)|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} [arctg(b) - arctg(0)] \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Neste caso a integral imprópria converge e seu valor é $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemplo 18. *Decida se a integral imprópria* $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ *converge ou diverge.*

Solução:

Pela definição, temos $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^x\,dx.$

Como $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x$ *(integração por partes), então*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^x\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}[xe^x - e^x]_a^0 \\
&= \lim_{a\to-\infty}[-1 - ae^a + e^a] \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Neste caso a integral imprópria converge e seu valor é -1.

Observação 3. *Observe que* ae^a *é indeterminado quando* $a \to -\infty$. *Neste caso utiliza-se a regra de L'Hopital para encontrar o limite.*

Exemplo 19. *Decida se a integral imprópria* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$ *converge ou diverge.*

Solução: Neste caso escolheremos $c = 0$, *mas poderíamos escolher qualquer valor para c.*

Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Por substituição simples, $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{-1}{1+x^2}.$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[-1+\frac{1}{1+a^2}\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{1+b^2}+1\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Neste caso a integral imprópria converge e seu valor é 0.

Exemplo 20. *Decida se a imprópria* $\int_0^{\infty} sen(x)\,dx$ *converge ou diverge.*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} sen(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} sen(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}(-cos(x))_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}(1+cos(b))
\end{aligned}$$

Observe que este limite não existe!(oscila entre 0 e 2). Neste caso a integral imprópria DIVERGE.

Uma condição necessária para a convergência

Teorema 1. *Seja f uma função contínua, tal que $[a,\infty) \subset Dom(f)$. Se $\int_a^\infty f(x)dx$ convergir, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

Observação 4. *A condição $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ é necessária para a convergência da integral imprópria, mas não é suficiente. Veja o exemplo abaixo.*

Exemplo 21. *Apesar de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{1}{x}\, dx$ diverge!*

Solução:

De fato,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} ln(x)|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} ln(b) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Exemplo 22. *Decida sobre a convergência da integral imprópria $\int_1^\infty \frac{x^2}{5+xln(x)}dx$.*

Solução:

Observe que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{5+xln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x} = \infty$.

Portanto, pelo teorema 1, a integral diverge!

Algumas funções usadas na comparação para testes de convergência.

1. Consideremos a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$, sendo a um número real positivo.

   Para $p = 1$ o exemplo anterior nos mostrou que a integral diverge.

   a) se $p > 1$ então $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente.

   b) se $p \leq 1$ então $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é divergente.

   De fato, se $p \neq 1$, então
   $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right)$

   Se $p > 1$, então $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = 0$, isto implica que a integral imprópria convergirá para $\displaystyle\frac{1}{(p-1)(b^{p-1})}$.

   Se $p < 1$, então $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \infty$. Assim, a integral imprópria divergirá.

2. A função $\displaystyle\int_a^\infty e^{-px}\,dx$ converge se $p > 0$.(Verifique!)

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 17. *Decida se as integrais convergem ou divergem.*

1. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)} dx$
2. $\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(x^2)} dx$
3. $\int_0^1 ln(x) dx$
4. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} ln(x) dx$