8 Lógica de Predicados

Sumário da Aula

8.1 Introdução à Lógica de Predicados

A **Lógica dos Predicados** pode ser usada para expressar o significado de um amplo grupo de proposições na linguagem matemática de modo que nos permita raciocinar e relacionar objetos a uma determinada propriedade. Para estabelecer o conceito de predicado, considere as seguintes frases declarativas:

- Todo computador do Laboratório 13 está funcionando perfeitamente.
- Para todo x, temos que $x > 0$.

- Existe um aluno na turma de Matemática Discreta que não foi aprovado em Introdução a Programação.

- Existe um x, tal que $x - 5 > 3$.

A lógica proposicional não permite simbolizar essas sentenças de forma adequada usando apenas proposições, parênteses e conectivos lógicos. Nessas sentenças, diferente do que foi estudado até o momento, são introduzidos novos conceitos, como: elementos de um certo conjunto (**universo do discurso**); **predicados** (que representam as propriedades das variáveis), **quantificadores** (indicados pelas expressões "*todo*", "*para todo*", "*existe um*") e **variáveis** (ou parâmetros).

Predicados:

Os predicados, ou **funções proposicionais**, descrevem propriedades que os elementos do universo de discurso podem ou não possuir. No cálculo dos predicados os elementos de análise correspondem às funções proposicionais.

Definição 8.1 (**Sentença aberta**)**.** Seja $\mathbb{U} \neq \emptyset$ o universo de discurso. Defini-se por **Sentença aberta** ou **função proposicional** uma expressão $P(x)$ que depende de uma variável $x \in \mathbb{U}$.

Uma sentença aberta são frases declarativas que:

- contém uma ou mais variáveis; e

- não é uma proposição; e

- torna-se uma proposição apenas quando suas variáveis são substituídas por **constantes** que pertencem a $\mathbb{U}$.

Constantes, ou objetos, pode ser qualquer coisa a respeito da qual precisa-se dizer algo e podem ser concretos (p. ex., a lua, o João), abstratos (p. ex., o conjunto vazio, a violência), ou fictícios (p .ex., Papai Noel, Saci Pererê). Por convenção, os objetos são representados simbolicamente por letras minúsculas.

Exemplo 8.1. São sentenças abertas:

(1) $x > 3$

(2) $x = y + 3$

(3) **O computador x do laboratório está funcionando perfeitamente.**

(4) **y é uma cidade.**

A declaração (1) pode ser dividida em duas partes, o **sujeito da declaração** (variável x) e **uma propriedade do sujeito** P (“é maior que 3”), e ser representada simbolicamente por $P(x)$. observe que, não é possível dizer se esta sentença é verdadeira ou falsa. A declaração $P(x)$ refere-se ao valor da função proposicional P na variável x. **$P(x)$ só receberá valor verdade quando for atribuído valores para x.**

Definição 8.2 (Predicado). O predicado é uma sentença $P(x)$ que se torna uma proposição quando é atribuído a x um valor do universo de discurso. **O predicado terá valor verdadeiro ou falso dependendo do valor assumido por suas variáveis.**

Exemplo 8.2. Considere os seguintes predicados:

1. $P(x) : x > 3$

   - **A proposição $P(4)$ é obtida substituindo $x = 4$ na declaração. $P(4)$ representa a proposição “$4 > 3$” e possui valor verdadeiro.**
   - **A proposição $P(2)$ é obtidasubstituindo $x = 2$ na declaração. $P(2)$ representa a proposição “$2 > 3$” e possui valor falso.**

2. $x = y + 3$

   - **A afirmação possui mais de uma variável: x e y.**
   - **Sua representação simbólica é dada por $Q(x, y)$, onde x e y são as variáveis e Q o predicado.**
   - **Para $x = 1$ e $y = 2$ o valor verdade de $Q(1, 2)$ é falso, pois a proposição $Q(1, 2)$ significa que “$1 = 2 + 3$”.**
   - **Para $x = 3$ e $y = 0$ o valor verdade de $Q(3, 0)$ é verdadeiro, pois a proposição $Q(3, 0)$ significa que “$3 = 0 + 3$”.**

3. $A(c, n)$ é a representação de “O computador c está conectado à rede n”.
   Supondo que o computador $COM23$ está conectado à rede $UFOP2$, mas não a rede $UFOP1$, os valores verdade das proposições $A(COM23, UFOP1)$ e $A(COM23, UFOP2)$ são:

   - **$A(COM23, UFOP1)$ é falsa, pois $COM23$ não está conectado à rede $UFOP1$.**
   - **$A(COM23, UFOP1)$ é verdadeira, pois $COM23$ está conectado à rede $UFOP2$.**

4. Observe o comando “**if** $x > 0$ **então** $x \leftarrow x + 1$”.

   - **O valor da variável x neste ponto de execução do programa é inserido em $P(x)$, que significa “$x > 0$”.**
   - **Se $P(x)$ for verdadeiro para esse valor de x, o comando $x \leftarrow x + 1$ é executado. Se $P(x)$ for falsa para esse valor de x, o comando $x \leftarrow x + 1$ não é executado.**

Os predicados quando envolvem propriedades de uma única variável são chamados de **predicados unários**, de duas variáveis são chamados de **predicados binários**, de três variáveis são chamados de **predicados ternários** e quando envolvem propriedades de n variáveis são chamados de **predicados n-ários**.

Definição 8.3. Uma afirmação que envolve n variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é representada simbolicamente por $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, em que P é um predicado n-ário. A declaração $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é chamada de valor da função proposicional P para a n-úpla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. **Um predicado que não possui variável é chamado de variável proposicional.**

Universo de Discurso:

O universo de discurso é uma ferramenta analítica usada na lógica de predicados para indicar o conjunto relevante de entidades das quais os quantificadores se referem. De forma geral, qualquer conjunto não vazio pode ser considerado como um universo de discurso para interpretação de uma fórmula. **Dizemos que o universo de discurso (ou domínio) em um predicado são os valores que as variáveis podem assumir.**

Usaremos o termo "**universo de discurso**" para representar o conjunto completo de termos num discurso específico. São exemplos de universos de discursos válidos os conjuntos: $\{a\}$, {Maria, Paulo}, {Todos os números naturais} e {Todas as mulheres da UFOP}.

Definição 8.4. Seja $\mathbb{U}$ um conjunto dado. Uma **função proposicional** (**predicado**) definida em $\mathbb{U}$ é uma expressão $P(a)$ que tem a propriedade que $P(a)$ é verdadeira ou falsa para cada $a \in \mathbb{U}$. O conjunto $\mathbb{U}$ é chamado de **universo de discurso** (**domínio**) de $P(x)$. O conjunto T_p de todos os elementos de $\mathbb{U}$, para os quais os valores de $P(x)$ são verdadeiros, é chamado de **conjunto verdade** de $P(x)$ e é escrito como:

$$T_p = \{x : x \in \mathbb{U},\ P(x) \ \textbf{é verdade}\} \qquad \textbf{ou} \qquad T_p = \{x : P(x)\}.$$

Exemplo 8.3. Considere os predicados:

$$P(x) = \text{"x é par"} \qquad \text{e} \qquad Q(x, y) = \text{"x é mais pesado que y"}.$$

A sentença $P(8)$ é verdadeira e a sentença $Q(pena, tijolo)$ é falsa, considerando que o domínio de $P(x)$ é dado pelo conjunto dos números inteiros e o domínio de $Q(x, y)$ dado por alguma coleção de objetos físicos.

Exemplo 8.4. Obtenha o conjunto verdade de $P(x)$ considerando como universo do discurso o conjunto dos números inteiros positivos ($\mathbb{N}^*$):

1. $P(x):\ x + 2 > 7.$

2. $P(x):\ x + 5 < 3.$

Fórmulas:

Podemos definir o conjunto de fórmulas bem formadas da lógica de predicados, aplicando os conectivos da lógica proposicional como operações em declarações. Nesta seção, vamos usar os conectivos como operações em predicados. Por exemplo, dadas duas sentenças $P(x)$ e $Q(x)$, podem ser escritas as seguintes fórmulas bem formadas:

$$\neg P(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \vee Q(x),\ P(x) \rightarrow Q(x),\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

Em termos de conjunto verdade, as fórmulas:

- $\neg P(x)$ significa que a declaração $\neg P(a)$ é verdadeira quando $P(a)$ é falsa e vice-versa. Temos que $\neg P(x)$ **é o complemento de** $P(x)$.
- $P(x) \wedge Q(x)$ significa que a declaração $P(x) \wedge Q(x)$ é verdadeira quando $P(x)$ e $Q(x)$ são verdadeiras. $P(x) \wedge Q(x)$ **é a interseção de** $P(x)$ **e** $Q(x)$.
- $P(x) \vee Q(x)$ significa que a declaração $P(x) \vee Q(x)$ é verdadeira quando $P(x)$ ou $Q(x)$ é verdadeira. $P(x) \vee Q(x)$ **é a união de** $P(x)$ **e** $Q(x)$.

Observação:

As leis de De Morgan também são válidas para a lógica de predicados:

$$\neg[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \neg P(x) \vee \neg Q(x) \quad \textbf{e} \quad \neg[P(x) \vee Q(x)] \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$$

8.2 Sintaxe e Semântica da Lógica de Predicados

Os predicados sozinhos não são considerados sentenças pelo fato de possuírem **variáveis livres**. Para transformá-los em proposições é necessário substituir as variáveis por constantes pertencentes ao universo de discurso. No entanto, existem situações em que é possível obter uma proposição a partir de funções proposicionais sem usar constantes específicas, esse processo é chamado de **quantificação**.

8.2.1 Quantificadores

A quantificação nos permite concluir se um dado predicado P é verdadeiro para um conjunto de elementos. Os **quantificadores** são expressões do tipo " **para todo**", ou "**para cada**", "**para algum**" ou "**existem**" que dizem quantos objetos, em algum sentido, tem determinada propriedade. Serão estudados com mais detalhes dois tipos de quantificadores:

- **O universal ($\forall$):** significa que um predicado é verdadeiro para todos os elementos do universo de discurso.

- **O existencial ($\exists$):** indica que existe um ou mais elementos do universo de discurso para os quais o predicado é verdadeiro.

A área da lógica que estuda predicados e quantificadores é chamada de **cálculo de predicados**.

Quantificador Universal:

Algumas afirmações matemáticas referem à uma propriedade que é verdadeira **para todos** os valores que uma variável pode assumir em um determinado domínio. A quantificação universal de $P(x)$ para um domínio particular, que sempre deve ser especificado, é a proposição que afirma que $P(x)$ é **válida para todos os valores de x que pertencem ao domínio**.

Definição 8.5 (Quantificação Universal). Uma quantificação universal de $P(x)$ é toda declaração do tipo "**todo x possui a propriedade** $P(x)$" e é representada por:

$$\forall x[P(x)] \qquad ou \qquad (\forall x \in \mathbb{U})[P(x)]$$

em que o símbolo $\forall$ (**para todo**) é chamado de quantificador universal e as notações $\forall x[P(x)]$ e $(\forall x \in \mathbb{U})P(x)$ são lidas, respectivamente, como "para todo x, $P(x)$" e "para todo x pertecente a $\mathbb{U}$, $P(x)$ é verdadeira".

Observações

- **A declaração $\forall x[P(x)]$ é equivalente à expressão $T_p = \{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} = \mathbb{U}$ e significa que o conjunto verdade de $P(x)$ é todo o conjunto $\mathbb{U}$. Ou seja, $\forall x[P(x)]$ é verdadeira se, para todo elemento do conjunto $\mathbb{U}$, a propriedade P é verdadeira.**

- **A expressão $P(x)$ é uma sentença aberta, e portanto, não tem valor lógico. Entretanto, $\forall x[P(x)]$ ($P(x)$ precedido pelo quantificador universal) possui o seguinte valor lógico:**

  se $\{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} = \mathbb{U}$, então $\forall x[P(x)]$ é verdadeiro, caso contrário $\forall x[P(x)]$ é falso

- **Um quantificador $\forall x[P(x)]$ é falso se, e somente se, $P(x)$ não é verdadeiro para pelo menos um elemento do domínio, esse elemento é chamado de contra-exemplo. Para mostrar que $P(x)$ é falso, basta apresentar um contra-exemplo para a declaração $\forall x[P(x)]$.**

- **A quantificação universal $\forall$ pode ser expressa na língua portuguesa pelas palavras: para todo, todo os, para cada, dado qualquer, arbitrariamente, para cada e para qualquer.**

Exemplo 8.5. Determine o valor lógico da expressão $\forall x, P(x)$ em cada uma das declarações:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n + 4 > 3)$
   Verdadeira, pois $\{n|n + 4 > 3\} = \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

2. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n + 2 > 8)$
   Falsa, pois $\{n|n > 6\} = \{7, 8, 9, \cdots\} \neq \mathbb{N}^*$. Temos que $x = 5$ é um contra-exemplo para $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n + 2 > 8)$.

3. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x + 1 > x)$
   Verdadeira, pois $P(x)$ é verdadeiro para todo número real x.

4. $\forall x[P(x) \to Q(x)]$, onde o conjunto universo do discurso é o conjunto dos números naturais e as sentenças abertas são $P(x) : x^2 \geq 0$ e $Q(x) : x + 2 > 8$.
   Falsa, a sentença na linguagem natural é dada por "para todo número real, se $x^2 \geq 0$ então $x + 2 > 8$". Considere como contra-exemplo $x = 1$. Substituindo esse valor nas sentenças temos que $P(1) : (1)^2 \geq 0$ é verdadeiro e $Q(1) : 1 + 2 > 8$ é falso. Logo, existe um valor para x para o qual $[P(x) \to Q(x)]$ é falso.

5. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x < 2)$
   Falsa, considere como contra-exemplo $x = 3$, que representa a declaração $Q(3) : 3 < 2$, que por sua vez é falsa.

6. $\forall x[Q(x)]$, em que $Q(x) : x^2 < 20$ e $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$.
   Verdadeira, o universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e a declaração $\forall x.P(x)$ é verdadeira somente se à conjunção $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ for verdadeira. Como a conjunção é verdadeira, temos que a quantificação também é verdadeira.

Observação:

O símbolo $\wedge$ pode, às vezes, ser usado no lugar do símbolo $\forall$. Porém, esta substituição só pode ser feita quando o universo de discurso for um conjunto finito. Caso o conjunto seja infinito a declaração na forma $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$ não poderá ser feita, uma vez que a sentença não terminará.

Quantificador Existêncial:

Algumas expressões matemáticas afirmam que existe um elemento que assume uma determinada propriedade no domínio em que é proferido. A quantificação existencial de $P(x)$ para um domínio particular, que sempre deve ser especificado, é a proposição que afirma que $P(x)$ **é válido para pelo menos um valor de x neste domínio.**

Definição 8.6 (Quantificação Existencial). Uma quantificação existencial de $P(x)$ é toda declaração do tipo "**algum x possui a propriedade** $P(x)$" e é representada por:

$$\exists x[P(x)] \qquad ou \qquad (\exists x \in \mathbb{U})P(x)$$

em que o símbolo $\exists$ (**existe**) é chamado de quantificador existencial e as notações $\exists x[P(x)]$ e $(\exists x \in \mathbb{U})P(x)$ são lidas, respectivamente, como "existe um x tal que $P(x)$" e "para algum x em $\mathbb{U}$, $P(x)$ é verdadeiro".

Observações

- **A declaração $\exists x[P(x)]$ é equivalente à expressão $T_p = \{x | x \in \mathbb{U}, P(x)\} \neq \emptyset$ e significa que o conjunto verdade de $P(x)$ não é vazio. Ou seja, $\exists x[P(x)]$ é verdadeira se a propriedade P é verdadeira para pelo menos um elemento do conjunto $\mathbb{U}$.**

- **A expressão $\exists x[P(x)]$ possui o seguinte valor lógico:**

  se $\{x | x \in \mathbb{U}, P(x)\} \neq \emptyset$, então $\exists x, P(x)$ é verdadeiro, caso contrário, é falso.

- **Um quantificador $\exists x[P(x)]$ é falso se, e somente se, o conjunto verdade de $P(x)$ for um conjunto vazio ($T_p = \emptyset$).**

- **A quantificação existencial ($\exists$) pode ser expressa na língua portuguesa pelas palavras: existe, há pelo menos um, existe um, para algum, entre outras.**

Exemplo 8.6. Determine o valor lógico da expressão $\exists x, P(x)$ em cada uma das declarações:

1. $(\exists n \in \mathbb{N})(n + 4 < 7)$
   Verdadeira, pois $\{n | n < 3\} = \{1, 2\} \neq \emptyset$.

2. $(\exists n \in \mathbb{N})(n + 6 < 4)$
   Falsa, pois $\{n | n + 6 < 4\} = \emptyset$.

3. $\exists x[P(x)]$, onde o domínio é o conjunto dos números reais e $P(x) = x > 3$.
   Verdadeira, pois $P(x)$ é verdadeira para alguns elementos do conjunto, como por exemplo $x = 4$ ou $x = 5$.

4. $\exists x[Q(x)]$, onde o domínio é o conjunto dos números reais e $Q(x) = x = x + 1$.
   Falsa, pois $Q(x)$ é falsa para todos os números reais.

5. $\exists x[Q(x)]$, em que $Q(x)$: x é primo e $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 6\}$.
   Verdadeira, o universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e a declaração $\exists x[P(x)]$ é verdadeira somente se à disjunção $P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5) \vee P(6)$ for verdadeira. Como $P(3)$ é verdadeiro, temos que a quantificação é verdadeira.

6. $\exists x[P(x)]$, em que $P(x) : x^2 > 20$ e $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 4\}$.
   Falsa, o universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ e a declaração $\exists x[P(x)]$ é verdadeira somente se à disjunção $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ for verdadeira. Como $P(x)$ é falso para todos os elementos do conjunto $\mathbb{U}$, temos que a quantificação é falsa.

Observe nos itens 5 e 6 do Exemplo 8.6 que o símbolo $\vee$ pode, às vezes, ser usado no lugar do símbolo $\exists$.

Observações

Em relação ao universo de discurso:

- **Conjunto Finito: se o conjunto universo de discurso $\mathbb{U} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ é um conjunto finito com n elementos, então a proposição:**
  - $\forall x[P(x)]$ **é verdadeira se a conjunção** $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$ **for verdadeira.**
  - $\exists x[P(x)]$ **é verdadeira se a disjunção** $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$ **for verdadeira.**
- **Conjunto Vazio: se o conjunto universo de discurso for vazio ($\mathbb{U} = \emptyset$), independente da proposição aberta $P(x)$, temos que:**
  - $\forall x[P(x)]$ **é verdadeira.**
  - $\exists x[P(x)]$ **é falsa.**

A Tabela 8.1 apresenta um resumo dos valores lógicos que os quantificadores universal e existencial podem assumir.

Sentença	**Quanto é verdadeira?**	**Quando é falsa?**
$\forall x[P(x)]$	quando $P(x)$ é verdadeiro **para todo** x	quando **existe pelo menos um** x tal que $P(x)$ é falso.
$\exists x[P(x)]$	quando **existe um** x tal que $P(x)$ é verdadeiro	quando $P(x)$ é falso **para todo** x

Tabela 8.1: Resumo dos valores lógicos dos quantificadores

Exemplo 8.7. Determine o valor lógico das declarações seguintes:
Para as declarações [1-3] considere a expressão $\forall x[P(x)]$ nas interpretações:

1. $P(x)$ é a propriedade de que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores.

2. $P(x)$ é a propriedade de que x é uma planta e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores.

3. $P(x)$ é a propriedade de que x é positivo e o conjunto universo é o conjunto de todos os números inteiros.

Para as declarações [4-7] considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nas interpretações:

4. $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

5. $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

6. $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

7. $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$

Outros Quantificadores:

Os quantificadores universal e existencial são os mais importantes quantificadores na matemática e na ciência da computação. Porém, existem outros quantificadores definidos, tais como: "**existem um único elemento**", "**existem exatamente dois**", "**existem não mais de três**", "**existem pelo menos 100**", entre outros. Dentre os quantificadores citados, o **quantificador de unicidade**, indicado simbolicamente por $\exists!$, também é comumente usado na matemática e será definido a seguir.

Definição 8.7 (Quantificador de Unicidade). O quantificador de unicidade cuja notação é dada por $\exists! x[P(x)]$ indica que "**existe um único x tal que $P(x)$ é verdadeiro.**".

A quantificação da unicidade também é expressa na língua portuguesa pelas expressões: **existe exatamente um** e **existe um, e somente um**.

8.2.2 Ordem de Precedência

A ordem de precedência entre conectivos lógicos e os quantificadores permite a simplificação das fórmulas e evita o uso excessivo de parênteses, com a eliminação dos símbolos de pontuação.

Definição 8.8. A **ordem de precedência** na Lógica de Predicados é dada pela listagem dos conectivos na seguinte ordem, da maior precedência para a menor: $\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow$ **e** $\leftrightarrow$.

Exemplo 8.8. Seja:

$$\forall x P(x) \vee Q(x).$$

A expressão deve ser interpretada como a disjunção de $\forall x[P(x)]$ e $Q(x)$.

- **Interpretação correta:** $[\forall x P(x)] \vee Q(x)$
- **Interpretação incorreta:** $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$**.**

8.2.3 Quantificadores com Domínio Restrito

Uma notação abreviada é frequentemente usada para restringir o domínio de um quantificador. Nessa notação, uma condição que a variável deve satisfazer é incluída depois do quantificador:

$$\forall\textbf{(restrição)}[P(x)] \qquad ou \qquad \exists\textbf{(restrição)}[P(x)]$$

Exemplo 8.9. Considere como domínio o conjunto dos números reais.

1. $\forall x < 0(x^2 > 0)$
   Esta proposição diz que para todo número real x com $x < 0$, tem-se que $x^2 > 0$, ou seja, que "o quadrado de todo número negativo é positivo". A proposição também pode ser escrita como $\forall x(x < 0 \to x^2 > 0)$.

2. $\forall x \neq 0(x^2 \neq 0)$
   Esta proposição diz que para todo número real x com $x \neq 0$, tem-se que $x^2 \neq 0$, ou seja, "o quadrado de um número não nulo também é não nulo". A proposição também pode ser escrita como $\exists x(x \neq 0 \to x^2 \neq 0)$.

3. $\exists x > 0(x^3 = 8)$
   Esta proposição diz que existe um número real x com $x > 0$, tal que $x^3 = 8$, ou seja, "existe uma raiz cúbica positiva de 8". A proposição também pode ser escrita como $\exists x(x > 0 \wedge x^3 = 8)$.

Observações

- **A restrição de um quantificador universal é equivalente a um quantificador universal de uma proposição condicional.**
- **A restrição de um quantificador existencial é equivalente a um quantificador existencial de uma conjunção.**

8.2.4 Variáveis Livres e Ligadas

A parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é chamada de **escopo do quantificador**.

Definição 8.9. Seja x uma variável e β uma fórmula. Se x ocorre em β dentro do escopo de um quantificador, $\forall x$ ou $\exists x$, então x é uma variável ligada; caso contrário, x é uma variável livre.

Exemplo 8.10. Seja:

1. $\forall x[P(x)]$:
   Na fórmula x é uma variável ligada.

2. $\exists x[P(x, y)]$:
   Na fórmula x é uma variável ligada e y é uma variável livre.

3. $\exists y(y = 3x)$:
   Na fórmula y é uma variável ligada e x é uma variável livre.

8.2.5 Quantificadores Aninhados

Definição 8.10. Uma função proposicional com n variáveis definida em um conjunto produto $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é uma expressão do tipo $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, que possui a propriedade que $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é verdadeira ou falsa para uma n-úpla $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$.

A função proposicional precedida por um quantificador para cada variável é uma declaração e possui valor lógico.

Exemplo 8.11. Sejam:

- $x + 1 < y$
  A declaração é um exemplo de uma sentença aberta em $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- $\exists x \forall y(x + 1 < y)$
  A declaração é um exemplo de função proposicional precedida por quantificadores aninhados.

Nas declarações que envolvem dois quantificadores aninhados, o quantificador mais interno é tratado como uma função proposicional. A sentença $\exists x \forall y(x + 1 < y)$ por exemplo, é o mesmo que $\exists x[Q(x)]$, em que $Q(x)$ significa que $\forall y[P(x, y)]$ e, por sua vez, $P(x, y) = x + 1 < y$.

Exemplo 8.12. Assuma que o domínio para as variáveis x e y consiste em todos os números reais. Seja a sentença $Q(x, y) = x + y = 0$

a) $\forall x \forall y[Q(x, y)]$
   A declaração é equivalente a afirmação "para todo número real x e para todo número real y, temos que $x + y = 0$". Esta sentença é falsa, pois existem valores para x e y para os quais a soma deste números não resulta em zero.

b) $\forall x \exists y[Q(x, y)]$
   A declaração é equivalente a afirmação "para todo número real x existe um número real y, tal que $x + y = 0$" ou que "todo número real tem um número oposto". Esta sentença é verdadeira, pois para todo x, existe um $y = -x$ tal que $x + y = 0$.

c) $\exists x \forall y[Q(x,y)]$

A declaração é equivalente a afirmação "existe um número real x para todo número real y, tal que $x+y=0$ ". Esta sentença é falsa, pois não existe um número real x que somado a todo número real y resulte em $x+y=0$.

d) $\exists x \exists y[Q(x,y)]$

A declaração é equivalente a afirmação "existe um número real x e existe um número real y, tal que $x+y=0$." . Esta sentença é verdadeira, pois existe um valor de x e existe um valor de $y=-x$ de forma que $x+y=0$.

A Tabela 8.2 apresenta de forma sucinta os valores lógicos de sentenças quantificadas com duas variáveis.

Sentença	**Quando é verdadeira?**	**Quando é fasa?**
$\forall x \forall y[P(x,y)]$	$P(x,y)$ é verdadeira para todo par x,y	Existe um par x,y para o qual $P(x,y)$ é falsa.
$\forall x \exists y[Q(x,y)]$	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é verdadeira	Existe um x tal que $P(x,y)$ é falsa para todo y.
$\exists x \forall y[Q(x,y)]$	Existe um x tal que $P(x,y)$ é verdadeira para todo y	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é falsa
$\exists x \exists y[Q(x,y)]$	Existe um par x,y para o qual $P(x,y)$ é verdadeira.	$P(x,y)$ é falsa para todo par x,y.

Tabela 8.2: Quantificações de duas variáveis.

Exemplo 8.13. Sejam $B=\{1,2,3,\cdots,9\}$ e $P(x,y)$ a fórmula "$x+y=10$". Determine o valor lógico das sentenças, justificando sua resposta.

a) $\forall x \forall y[P(x,y)]$

b) $\forall x \exists y[P(x,y)]$

c) $\exists x \forall y[P(x,y)]$

d) $\exists x \exists y[P(x,y)]$

A mesma análise realizada para sentenças com dois quantificadores aninhados pode ser aplicada em sentenças com três ou mais quantificadores. É preciso apenas tomar cuidado com a ordem em que os quantificadores aparecem, visto que esta ordem pode afetar o valor verdade da declaração.

Exemplo 8.14. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

a) $\forall x \forall y \forall z[x + (y + z) = (x + y) + z]$ (propriedade associativa da adição para números reais):
A declaração é verdadeira e pode ser traduzida na linguagem natural por "para todos os números reais x, y e z temos que $x + (y + z) = (x + y) + z$.

b) $\forall x \forall y \exists z[x + y = z]$:
A declaração é verdadeira e é equivalente a dizer que "para todos os números reais x e y, existe um número real z tal que $x + y = z$", ou seja, "a soma de dois números reais também é um número real."

c) $\exists x \forall y \forall z[x + y = z]$:
A declaração é equivalente a dizer que "existe um número real x tal que, para todo número y e z, $x = y + z$". Como não existe um valor x que é obtido desta foram, temos que a sentença é falsa.

8.2.6 Negação dos Quantificadores

Considere as expressões:

"Todo estudante desta classe foi aprovado em introdução a ciência da computação."

- Esta declaração é uma quantificação universal do tipo $\forall x[P(x)]$, em que $P(x)$ é o sentença "x foi aprovado em introdução a ciência da computação" e o domínio consiste em todos os alunos desta classe.
- A negação desta proposição é: "**Não é o caso de todos os alunos desta classe terem sido aprovados em introdução a ciência da computação.**"
- A negação é equivalente a dizer que "**Existe pelo menos um aluno desta classe que não foi aprovado em introdução a ciência da computação.**"
- Veja que a última expressão é a quantificação existencial da negação da função proposicional original: $\exists x \neg[P(x)]$.

"Existe pelo menos um aluno nesta sala que cursa engenharia."

- Esta declaração é uma quantificação existencial do tipo $\exists x[Q(x)]$, em que $Q(x)$ é o sentença "x cursa engenharia" e o domínio consiste em todos os alunos desta classe.
- A negação desta proposição é: **"Não existem alunos nesta sala que cursam engenharia."**
- A negação é equivalente a dizer que **"Todo aluno nesta sala não cursa engenharia."**
- Veja que a última expressão é a quantificação universal da negação da função proposicional original: $\forall x[\neg Q(x)]$.

As regras para negações de quantificadores são chamadas de **leis de De Morgan para quantificadores** e são dadas por:

Quantificador	Negação	Quando a negação é verdadeira?	Quando a negação é falsa?
$\neg[\exists x P(x)]$	$\forall x[\neg P(x)]$	Para todo x, $P(x)$ é falso	Existe um x, para o qual $P(x)$ é verdadeiro
$\neg[\forall x P(x)]$	$\exists x[\neg P(x)]$	Existe um x, para o qual $P(x)$ é falso	Para todo x, $P(x)$ é verdadeiro

Observação

A proposição "$\exists x[P(x)]$", em alguns casos, pode ser verdadeira para um único $x \in \mathbb{U}$. Quando isto acontecer, é comum reescrevê-la como "$\exists ! x[P(x)]$".

Exemplo 8.15. Considere a declaração:

Todos os grandes cientistas da computação são do sexo masculino.

- **Sua negativa é:**
  - **Não ocorre que todos os grandes cientistas da computação são do sexo masculino, ou**
  - **Existe pelo menos um grande cientista da computação do sexo feminino**
- **Usando M para denotar o conjunto de grandes cientistas da computação, as expressões acima podem ser escritas simbolicamente por:**
  - $\neg(\forall x \in M)$(**x é masculino**), **ou**
  - $(\exists x \in M)$(**x não é masculino**).
- **São expressões equivalentes:**

$$\neg(\forall x \in M)(\textbf{x é masculino}) \equiv (\exists x \in M)(\textbf{x não é masculino})$$

Exemplo 8.16. Escreva a negação das seguintes declarações:

a) Para todos os inteiros positivos n, temos $n + 2 > 8$.

b) Existe uma pessoa (viva) com 150 anos.

c) Existe um político honesto.

d) Todos os brasileiros comem churrasco.

Negação dos Quantificadores aninhados:

As declarações com dois ou mais quantificadores aninhados podem ser negadas pela aplicação sucessiva das leis de DeMorgan para negar quantificadores: assim, cada quantificador $\forall$ é transformado em $\exists$ e cada $\exists$ é trasnformado em $\forall$, quando o símbolo da negação é colocado da esquerda para a direita.

Exemplo 8.17. Sejam:

- "Para todos os números reais x e y, existe um número real z tal que $x + y = z$":
  Negação: Existem números reais x e y, tal que para todo número real z, $x + y \neq z$.

- $\forall x \forall y \exists z(x + y = z)$

$$
\begin{aligned}
\neg[\forall x \forall y \exists z(x + y = z)] &\equiv \exists x \neg[\forall y \exists z(x + y = z)] \\
&\equiv \exists x \exists y \neg[\exists z(x + y = z)] \\
&\equiv \exists x \exists y \forall z \neg(x + y = z) \\
&\equiv \exists x \exists y \forall z(x + y \neq z)
\end{aligned}
$$

- "Todo estudante faz pelo menos uma disciplina em que o professor é um professor substituto.":
  Negação: Existe um estudante, tal que toda disciplina que ele faz, o professor não é um professor substituto.

Exemplo 8.18. Negue as declarações:

a) $\exists x \forall y(x + y < 10)$

b) $\forall x \forall y(x^2 = 2y)$

c) $\exists x \exists y \forall z(x + y = z)$

d) Todos os estudantes da UFOP moram em repúblicas.

d) Alguns estudantes têm 25 anos de idade ou mais.

8.3 Exercícios

E. 1. Considere $P(x)$ a proposição “$x \leq 4$”. Determine os valores verdade das proposições:

a) $P(0)$

b) $P(4)$

c) $P(6)$

E. 2. Considere $P(x)$ a proposição “$x = x^2$”. Se o domínio forem os números inteiros, quais serão os valores verdade das proposições?

a) $P(0)$

b) $P(1)$

c) $P(2)$

d) $P(-1)$

E. 3. Para cada uma das proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.

a) Todos estão estudando matemática discreta.

b) Todos têm mais de 18 anos.

E. 4. Seja $P(x)$ a proposição “$x = x^2$” e o universo de discurso o conjunto dos números inteiros. Determine os valores verdade das expressões quantificadas.

a) $\exists x[P(x)]$

b) $\forall x[P(x)]$

E. 5. Seja o universo de discurso o conjunto dos números inteiros. Determine o valor verdade de cada uma das proposições.

a) $\forall n(n + 1 > n)$

b) $\exists n(2n = 3n)$

d) $\exists n(n = -n)$

e) $\forall n(n^2 \geq n)$

E. 6. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Desenvolva as proposições abaixo usando conjunções, disjunções e negações.

a) $\exists x[P(x)]$

b) $\forall x[P(x)]$

c) $\forall x[\neg P(x)]$

d) $\exists x[\neg P(x)]$

e) $\neg[\forall x P(x)]$

f) $\neg[\exists x P(x)]$

E. 7. Encontre um contra-exemplo, se possível, para as proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x(x^2 \geq x)$

b) $\forall x(x > 0 \wedge x < 0)$

c) $\forall x(x = 1)$

E. 8. Verifique a veracidade das sentenças.

a) $(\exists! x \in \mathbb{N})(x^2 = 9)$

b) $(\exists! x \in \mathbb{Z})(x^2 = 25)$

c) $(\exists! x \in \mathbb{N})(x! < 10)$

d) $(\exists! x \in \mathbb{Z})(2x$ é primo$)$

E. 9. Suponha que o domínio de $Q(x, y, z)$ sejam as três variáveis $x,\ y$ e z, em que $x = 0, 1$ ou 2, $y = 0$ ou 1 e $z = 0$ ou 1. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.

a) $\forall y[Q(0, y, 0)]$

b) $\exists x[Q(x, 1, 1)]$

c) $\exists z[\neg Q(0, 0, z)]$

d) $\exists x[\neg Q(x, 0, 1)]$

E. 10. Determine o valor lógico da proposição $\forall x \exists y(xy = 1)$, considerando o domínio para as variáveis:

a) Os números reais diferentes de zero.

b) Os números inteiros diferentes de zero.

c) Os números reais positivos.

E. 11. Para cada uma das fórmulas a seguir, indique se ela é verdadeira ou falsa, para cada um dos domínios de discurso indicados.

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\{0,1\}$
$\forall x \exists y (x > y)$			
$\forall x \exists y (y > x)$			
$\exists x \forall y (x > y)$			
$\exists x \forall y (x \geq y)$			
$\exists y \forall x (x \geq y)$			
$\exists y \exists z \forall x (x = y \vee x = z)$			
$\forall x \exists y (x - y = 0)$			
$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$			
$\forall x \forall y (x \neq x \rightarrow y = 0)$			
$\forall x \exists y \exists z (x + y = z \rightarrow x = 1 \vee x = 0)$			

E. 12. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x, y)$ são os pares x e y, em que x é $1,\ 2$ ou 3 e y é $1,\ 2$ ou 3. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.

a) $\forall x \forall y [P(x, y)]$

b) $\exists x \exists y [P(x, y)]$

c) $\exists x \forall y [P(x, y)]$

d) $\forall y \exists x [P(x, y)]$

E. 13. Expresse as negações das proposições abaixo, tal que todos os símbolos de negação precedam imediatamente os predicados.

a) $\forall x \exists y \forall z [T(x, y, z)]$

b) $\forall x \exists y [P(x, y)] \vee \forall x \exists y [Q(x, y)]$

c) $\forall x \exists y [P(x, y) \wedge \exists z (R(x, y, z))]$

d) $\forall x \exists y [P(x, y) \rightarrow Q(x, y)]$

E. 14. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições de quantificadores universais, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x \exists y (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$

b) $\forall x \exists y (y^2 = x)$

c) $\forall x \forall y (xy \geq x)$

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

8 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

9 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

10 ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.