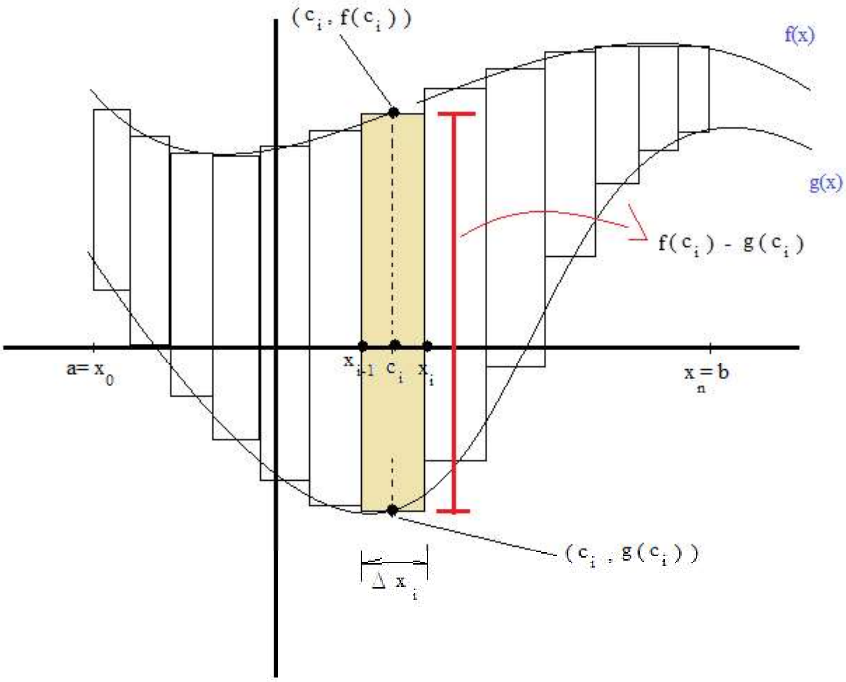
1 AULA 1 [Aplicação das Integrais]

1.1 Áreas entre Curvas

Sejam f e g funções contínuas com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. O ojetivo é determinar a área entre essas duas curvas no intervalo correspondente.

Considere uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ do intervalo $[a,b]$. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideramos o i-ésimo retângulo R_i de base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $[f(c_i) - g(c_i)]$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. A área desse retângulo é:

$$A(R_i) = [f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x_i$$



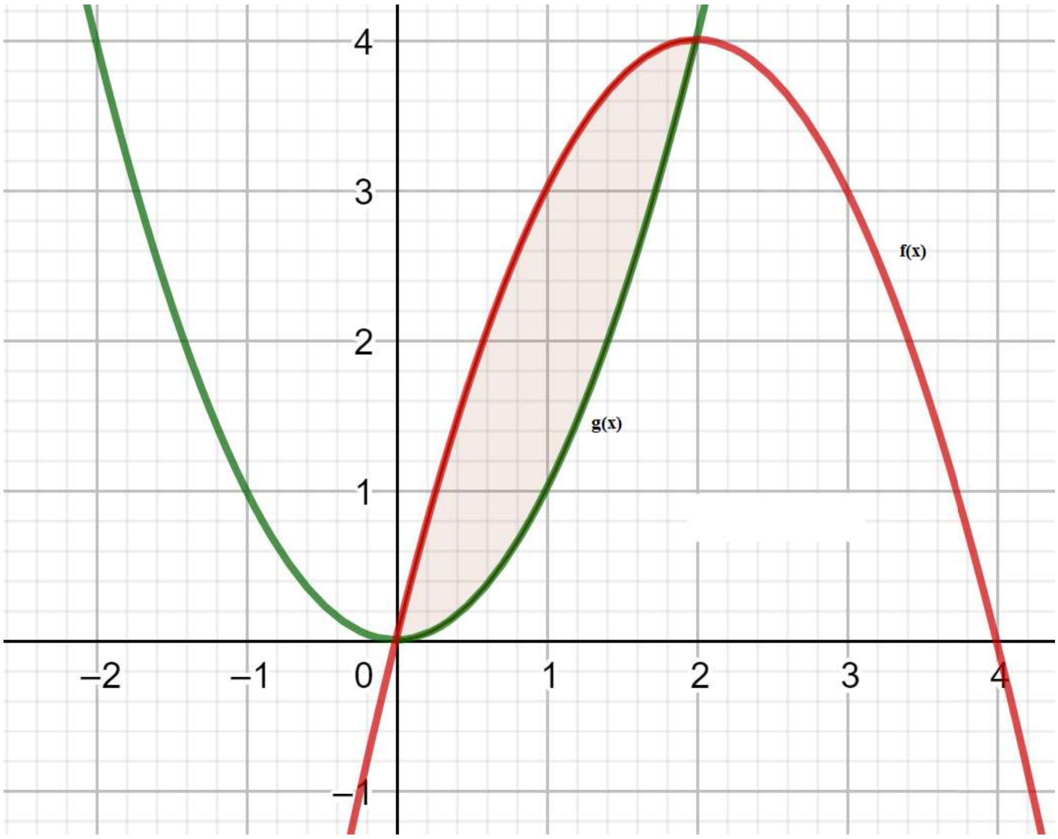
A soma das áreas dos n retângulos, $\sum_{i=1}^{n} A(R_i) = \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x_i$

é uma aproximação da área compreendida entre as curvas de f e g. Como f e g são funções contínuas, a medida que o comprimento de cada subintervalo tende a zero, ou seja, o número de retângulos tende ao infinito, essa soma tende a integral $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$. Sendo assim, damos a seguinte definição:

Definição 1. *Sejam f e g funções contínuas com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A área entre as curvas $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$ de a até b é dada pela integral $Área = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.*

Exemplo 1. *Calcule a área compreendida entre as curvas* $y = x^2$ *e* $y = -x^2 + 4x$

SOLUÇÃO:



Primeiro obteremos os limites de integração que são os ponto de interseção das duas curvas. Assim, igualando as equações $f(x) = -x^2 + 4x$ com $g(x) = x^2$, temos

$$x^2 = -x^2 + 4x$$

$$\to 2x^2 - 4x = 0$$

$$\to x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Logo,

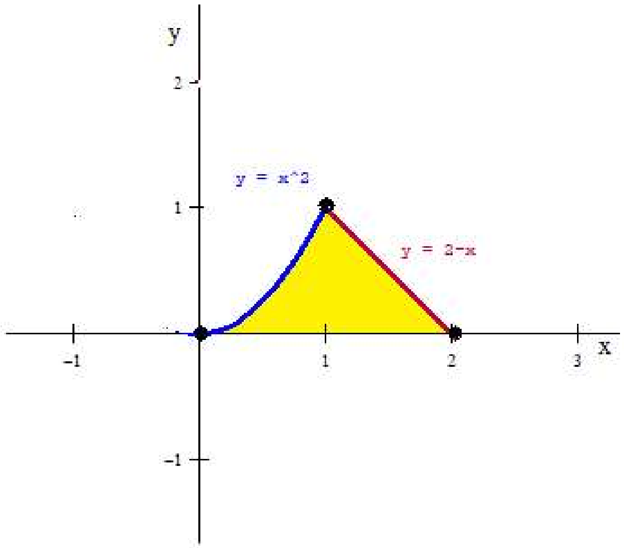
$$\begin{aligned}
\text{área} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx &= \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)dx \\
&= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx \\
&= \left(\frac{-2x^3}{3} + 2x^2 \right)_{x=0}^{x=2} \\
&= \left(\frac{-2 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 0 \right) \\
&= \frac{-16}{3} + 8 \\
&= \frac{8}{3} \text{u. a.}
\end{aligned}$$

Exemplo 2. *Encontre a área compreendida entre o eixo Ox e as curvas* $x+y=2$ *e* $y=x^2$ *no intervalo* $[0,2]$.

SOLUÇÃO:

Esboçando a figura percebemos que é melhor integrar em relação à variável y!

POR QUÊ?



Observe que a região de interesse está compreendida entre as curvas $x=\sqrt{y}$ e $x=2-y$, com $0\leq y\leq 1$.

Dessa forma, teremos $f(y)=2-y$ e $g(y)=\sqrt{y}$

Portanto,

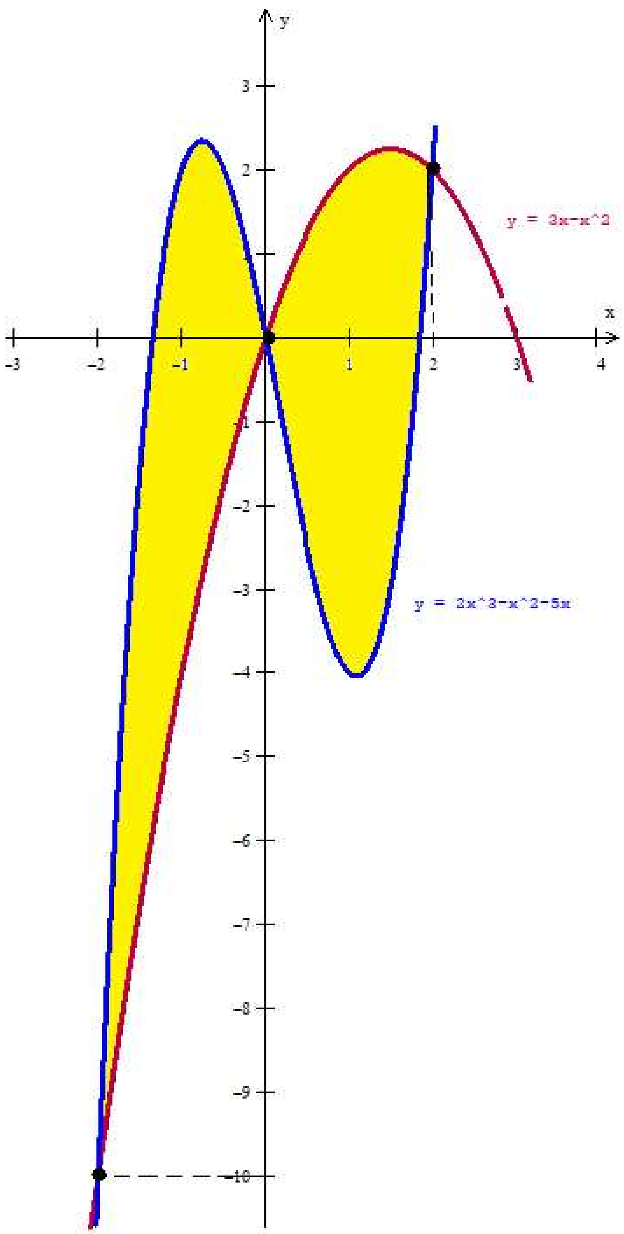
$$\begin{aligned} \text{área} = \int_a^b (f(y)-g(y))dy &= \int_0^1 (2-y-\sqrt{y})dy \\ &= \left[2y-\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{5}{6}\text{u. a.} \end{aligned}$$

Exemplo 3. *Encontre a área compreendida entre as curvas* $y = -x^2 + 3x$ *e* $y = 2x^3 - x^2 - 5x$.

SOLUÇÃO:

Esboçando a região percebemos que devemos dividir a região em duas partes!

POR QUÊ ?



Igualando as duas equações obteremos os limites de integração.

$2x^3 - x^2 - 5x = -x^2 + 3x \longrightarrow \quad 2x^3 - 8x = 0 \longrightarrow \quad 2x(x^2 - 4) = 0.$

Assim, $x = 0$ ou $\quad x = -2$ ou $\quad x = 2.$

Observe que no intervalo $[-2, 0]$ a função superior (que está por "cima") será $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x$ e a função inferior será $g(x) = -x^2 + 3x$. Já no intervalo $[0, 2]$ essas funções invertem os papéis.

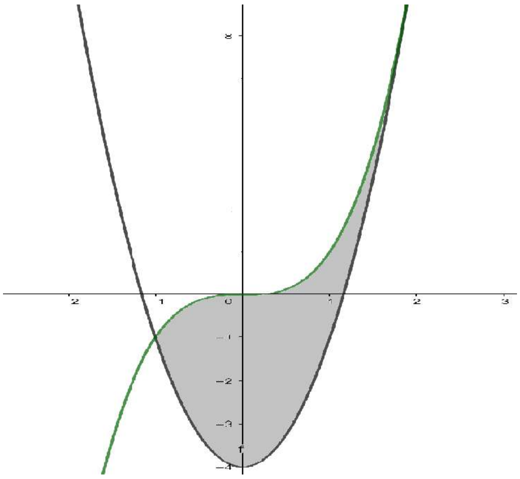
Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_a^b (f(x) - g(x))dy \\
&= \int_{-2}^0 (2x^3 - x^2 - 5x - (-x^2 + 3x))dx + \int_0^2 (-x^2 + 3x - (2x^3 - x^2 - 5x))dx \\
&= \int_{-2}^0 2x^3 - 8x \ dx + \int_0^2 8x - 2x^3 \ dx \\
&= \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_{x=-2}^{x=0} + \left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= 8 + 8 = 16\text{u. a.}
\end{aligned}$$

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento! Neste primeiro momento, o esboço da região foi fornecido para facilitar o desenvolvimento da resolução da questão, mas é importante que você certifique de que está correto! Mesmo porque em todos exercícios caberá a você a determinação da região!

Exercício 1. *Encontre a área compreendida entre as curvas* $y = x^3$ *e* $y = 3x^2 - 4$

SOLUÇÃO:



Exercício 2. *Encontre a área compreendida entre as curvas* $y = x$, *e* $y = x^2$ *e* $y = 1$.

SOLUÇÃO: