1

Lógica Formal

Sumário da Aula

1.1 Introdução a Lógica Formal 3
1.1.1 Formalização 6
1.2 Sintaxe da Lógica Proposicional 8
1.2.1 Fórmulas Bem Formadas 9
1.3 Exercícios 10

1.1 Introdução a Lógica Formal

> O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a validade de argumentos apresentados em uma linguagem própria, a linguagem proposicional. Nessa linguagem é possível distinguir dois aspectos:o sintático e o semântico. O sintático estabelece símbolos, regras de formação e regras de dedução de validade. O aspecto semântico consiste na valoração das fórmulas com atribuição da propriedade de verdadeiro ou falso [7].

A lógica formal é usada para representar as afirmações que fazemos na linguagem natural para expor fatos ou transmitir informações. Consiste no estudo dos princípios e aspectos cognitivos da linguagem, com o objetivo de elaborar e distinguir um argumento correto de um argumento incorreto.

A lógica matemática (lógica simbólica) é uma sub-área da matemática caracterizada pela axiomatização, simbolismo e formalismo das aplicações da lógica formal. Inclui o estudo de sistemas formais e o poder dedutivo de sistemas de prova matemática, analisando o raciocínio segundo operações e relações do cálculo proposicional e/ou predicados.

Proposição 1.1. *Uma proposição (ou declaração) é qualquer sentença passível de possuir um dos valores lógicos: verdadeiro ou falso.*

São exemplos de proposições as frases "**três é menor do que quatro**" e "**Ouro Preto é capital de Minas Gerais**". A primeira porque se trata de uma declaração verdadeira e a segunda porque se trata de uma declaração falsa. As frases "**Venha aqui!**" e "$x < 4$" **não são proposições**, visto que não é possível atribuir um valor verdadeiro ou falso para elas.

Exemplo 1. Quais das seguintes sentenças podem ser consideradas proposições?

a) Dois mais três é igual a quatro. **É uma proposição, já que possui valor falso.**

b) O Atlético é o melhor time de Minas Gerais. **É uma proposição, já que possui valor verdadeiro.**

c) Quantas vezes preciso repetir a mesma coisa? **Não é uma proposição. Pois não é possível atribuir um valor verdadeiro ou falso para uma sentença interrogativa.**

d) Existe vida em Marte. **É uma proposição.**

e) Ele é um homem alto. **Não é uma proposição, pois "ele" não está especificado.**

f) A lua é feita de queijo verde. **É uma proposição, já que possui valor falso.**

g) Dois é um número primo. **É uma proposição, já que possui valor verdadeiro.**

h) $x + 1 = 2$. **Não é uma proposição, pois o valor "x" não está especificado.**

i) Pelo amor de Deus! **Não é uma proposição. Pois não é possível atribuir um valor verdadeiro ou falso para uma sentença exclamativa.**

Observação. **Observe atentamente a letra (d) do Exemplo 1**. Veja que não é preciso **saber com exatidão** se o valor da sentença é verdadeiro ou falso para indiciar que se trata de uma proposição. Basta identificar que para a sentença **cabe um único valor lógico** (verdadeiro ou falso).

A lógica matemática, na sua versão clássica, assume como propriedades fundamentais os seguintes princípios básicos:

I. Princípio da identidade: toda proposição é idêntica a si mesma.

II. Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

III. Princípio do terceiro excluído: oda proposição é verdadeira ou falsa.

Note que, no conceito de proposição **estão implícitas** as propriedades fundamentais da lógica clássica.

Definição 1.1 (Proposição Simples)**.** Uma proposição é dita simples se, e somente se, contiver uma única afirmação.

Em outras palavras, uma proposição simples **não pode ser subdividida** em proposições menores. São exemplos de proposições simples as frases "**Dez é menor que sete.**", "**Hoje vai chover.**" e "**José está feliz.**".

Definição 1.2 (Proposição Composta)**.** Uma proposição é dita composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições simples.

Em outras palavras, uma proposição composta pode ser **dividida em duas ou mais** proposições simples.

Exemplo 2. São exemplos de proposições compostas:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos os melhores vinhos.
Proposição composta de uma combinação de duas proposições simples:

- **Os mineiros fabricam os melhores queijos.**
- **Os gaúchos fabricam os melhores vinhos.**

b) Se fizer todos os exercícios, então fará uma boa prova.
Proposição composta de uma combinação de duas proposições simples:

- **Faça todos os exercícios.**
- **Fará uma boa prova.**

c) Se Bolsonaro for eleito, vai acabar a corrupção e os impostos serão reduzidos.
Proposição composta de uma combinação de três proposições simples:

- **Bolsonaro eleito.**
- **Fim da corrupção.**
- **Impostos reduzidos.**

d) Se toda mulher dessa turma é aluna do curso de Ciência da Computação e se toda aluna de Ciência da Computação é inteligente, então toda mulher dessa turma é inteligente.
Proposição composta de uma combinação de três proposições simples:

- **Toda mulher dessa turma é aluna do curso de Ciência da Computação.**
- **Toda aluna de Ciência da Computação é inteligente.**
- **Toda mulher dessa turma é inteligente.**

Uma proposição composta é formada por duas ou mais proposições simples combinadas por **conectivos lógicos**. Os conectivos mais usados na lógica matemática são os **conectivos binários** (**conjunção, disjunção, condicional e bicondicional**), que juntam duas sentenças produzindo uma terceira expressão, e o **conectivo unário** (**negação**), que age em uma única sentença para produzir uma segunda expressão.

Várias palavras da língua portuguesa são utilizadas para remeter esses conectivos. A Tabela 1.1 apresenta algumas expressões comuns em português e os conectivos que elas representam.

Conectivo Lógico	**Expressão em português**
Conjunção	A **e** B; A **também** B; A **mas** B; A **além disso** B.
Disjunção	A **ou** B.
Condicional	**se** A, **então** B; A **implica** B; A **logo,** B; **basta** A **para** B; A **só se** B; A **somente se** B; B **segue de** A; A **é condição suficiente para** B; B **é condição necessária para** A.
Bicondicional	A **se e somente se** B; A **é condição necessária e suficiente para** B.
Negação	**não** A; **é falso que** A; **não é verdade que** A.

Tabela 1.1: Palavras em português relacionadas aos conectivos lógicos. Extraído de [4].

Observação. Devido a riqueza da língua portuguesa, uma mesma proposição pode ser escritas de várias maneiras diferentes, veja os exemplos:

- a sentença "**Colocarei créditos na carteirinha do RU se, e somente se, minha bolsa cair**" pode ser reescrita como "**A minha bolsa cair é condição necessária e suficiente para colocar créditos na carteirinha do RU.**"
- a sentença "**Basta fazer todos os exercícios para fazer uma boa prova**" pode ser reescrita como "**Se eu fizer todos os exercícios, então farei uma boa prova**" ou "**Fazer todos os exercícios é condição suficiente para fazer uma boa prova**".
- A sentença "**Joaquim não foi aprovado em matemática discreta**" pode ser reescrita como "**Não é verdade que Joaquim foi aprovado em matemática discreta**".

Exemplo 3. Identifique os conectivos presentes nas proposições compostas:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos os melhores vinhos. **(conjunção)**

b) Basta fazer todos os exercícios para tirar boa nota na prova. **(condicional)**

c) Amanhã vou estudar matemática discreta ou estrutura de dados. **(disjunção)**

d) Colocarei créditos na carteirinha do RU se, e somente se, minha bolsa cair. **(bicondicional)**

e) Joaquim não foi aprovado em matemática discreta. **(negação)**

1.1.1 Formalização

O processo de formalização das proposições consiste em converter um conjunto de proposições interligadas em uma fórmula composta por:

- **Letras de proposição:** A, B, $\cdots$, P, Q. **(a maioria das referências bibliográficas utilizam letras maiúsculas do alfabeto.)**

- **Conectivos lógicos:** os conectivos binários e o conectivo unário substituídos por símbolos conforme apresentados na Tabela 1.2.

- **Símbolos de pontuação:** parênteses (ou colchetes).

Conectivo	**Símbolo**	**Expressão lógica**
Negação	$\neg$	$\neg A$
Conjunção	$\wedge$	$A \wedge B$
Disjunção	$\vee$	$A \vee B$
Condicional	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$

Tabela 1.2: Notação simbólica para a formalização das proposições.

Exemplo 4. Considere as seguintes sentenças:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos os melhores vinhos.

- **Proposições simples:**

  A: Os mineiros fabricam os melhores queijos.

  B: Os gaúchos fabricam os melhores vinhos.

- **Formalização:** $A \wedge B$

b) Basta fazer todos os exercícios para fazer uma boa prova.

- **Proposições simples:**

  A: Fazer todos os exercícios.

  B: Fazer uma boa prova.

- **Formalização:** $A \rightarrow B$

c) Amanhã vou estudar matemática discreta ou estrutura de dados.

- **Proposições simples:**

  A: Amanhã vou estudar matemática discreta.

  B: Amanhã vou estudar estrutura de dados.

- **Formalização:** $A \vee B$

d) Colocarei créditos na carteirinha do RU se, e somente se, minha bolsa cair.

- **Proposições simples:**

  A: Colocarei créditos na carteirinha do RU.

  B: Minha bolsa cair.

- **Formalização:** $A \leftrightarrow B$

e) Joaquim não foi aprovado em matemática discreta.

- **Proposição simples:**

  A: Joaquim foi aprovado em matemática discreta.

- **Formalização:** $\neg A$

f) Se todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal.

- **Proposições simples:**

  R: Todos os homens são mortais.

  S: Sócrates é um homem.

  T: Sócrates é mortal.

- **Formalização:** $R \wedge S \rightarrow T$

1.2 Sintaxe da Lógica Proposicional

Tanto no português quanto na matemática e nas linguagens de programação, existem regras que determinam quando uma determinada sentença é válida ou não. Na lógica proposicional, para definir quais as sentenças são válidas é preciso definir um conjunto de fórmulas bem formadas. E, para evitar ambiguidades nas proposições compostas, será estabelecida uma pontuação adequada que segue regras de precedência dos conectivos lógicos.

Definição 1.3. A **ordem de precedência dos conectivos** é dada por:

1. Para os conectivos dentro de vários parênteses, devem ser efetuadas primeiro as expressões dentro dos parênteses mais internos.
2. $\neg$
3. $\wedge$
4. $\vee$
5. $\rightarrow$
6. $\leftrightarrow$

Observação. O **uso dos parênteses** na formação das novas expressões **é fundamental**. E cada parêntese **aberto precisa ser fechado**.

Exemplo 5. Considere as seguintes situações:

a) $P \wedge Q \vee R$ **Esta expressão é interpretada como** $(P \wedge Q) \vee R$**. Caso deseje fazer primeiro a operação** $Q \vee R$ **é necessário fazer a indicação com o uso dos parênteses da seguinte maneira:** $P \wedge (Q \vee R)$**.**

b) $A \vee \neg B$ **Esta expressão significa** $A \vee (\neg B)$**.**

c) $A \vee B \rightarrow C$ **Esta expressão é interpretada como** $(A \vee B) \rightarrow C$**. Caso deseje fazer primeiro a operação** $B \rightarrow C$ **é necessário fazer a indicação por meio dos parênteses da seguinte maneira:** $A \vee (B \rightarrow C)$**.**

Para evitar o excesso de parênteses aplicam-se critérios de associatividade aos operadores:

- os conectivos conjunção e disjunção associam-se à esquerda: a expressão $A \vee B \vee C$ é similar à $(A \vee B) \vee C$.
- os conectivos condicional e bicondicional associam-se à direita: a expressão $A \rightarrow B \rightarrow C$ é similar à $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Exemplo 6. Elimine os parênteses desnecessários:

a) $((P \vee Q) \vee (R \vee S))$ **é equivalente a** $P \vee Q \vee (R \vee S)$

b) $(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$ **é equivalente a** $P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$

c) $\neg(P \vee (Q \wedge R))$ **é equivalente a** $\neg(P \vee Q \wedge R)$

1.2.1 Fórmulas Bem Formadas

Uma sequência qualquer de elementos (uma cadeia que forma uma expressão válida) do vocabulário do cálculo proposicional constitui uma fórmula. Uma fórmula aceitável para o cálculo proposicional é chamada de **fórmula bem formada (fbf)**.

A cadeia $A)) \wedge \vee \rightarrow BC$, por exemplo, **não é considerada uma fbf**. Para obter uma fbf é preciso respeitar **as regras de formação para o cálculo proposicional**.

Definição 1.4 (Fórmulas bem formadas)**.** O conjunto de fórmulas bem formadas da lógica proposicional é definido pelas seguintes regras de formação:

1. Uma letra proposicional isolada é uma fbf.
2. Se P é uma fbf, então $\neg P$ também é.
3. Se P e Q são fbfs, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ também são.

Exemplo 7. Considere as seguintes fórmulas:

a) $P \rightarrow Q \wedge R$ **Trata-se de uma fbf. Neste caso, não há necessidade de colocação do parênteses visto que a conjunção tem precedência sobre a condicional.**

b) $P \rightarrow Q \leftrightarrow$ **Não é uma fbf, pois desobedece a regra 3.**

c) $(A \wedge (B \leftrightarrow C)$ **Não é uma fbf, pois possui parêntese aberto que não foi fechado.**

d) $A\wedge\rightarrow B$ **Não é uma fbf, pois desobedece a regra 3.**

e) $A\rightarrow\neg A$ **Trata-se de uma fbf!**

Observação. Em uma fórmula bem formada com diversos conectivos, o **último conectivo** a ser aplicado **utilizando a regra de precedência** recebe o nome de **CONECTIVO PRINCIPAL.**

Exemplo 8. Considere as seguintes fórmulas:

a) Na expressão $A\wedge\neg(B\rightarrow C)$ o conectivo principal é a **conjunção** $(\wedge)$.

b) Na expressão $((A\vee B)\wedge C)\rightarrow(B\vee(\neg C))$ o conectivo principal é o **condicional** $(\rightarrow)$.

c) Na expressão $(P\rightarrow P\vee Q)\vee(R\leftrightarrow Q)$ o conectivo principal é a **disjunção** $(\vee)$.

1.3 Exercícios

E. 1. Quais dessas sentenças são proposições? Justifique.

a) Belo horizonte é capital de Minas Gerais.

b) Curitiba é capital de Santa Catarina.

c) $2+3=5$.

d) $5+7=10$.

e) $x+2=11$.

f) Responda esta questão.

g) Que horas são?

h) $2^n\geq 100$.

i) Para todo inteiro $n>1,\quad 2^n-1$ é primo.

j) Não Corra tão rápido!

k) Venha aqui!

E. 2. Para cada uma das sentenças apresente as proposições simples que a compõe e os conectivos lógicos envolvidos.

a) João é político, mas é honesto.

b) João é honesto, mas seu irmão não é.

c) Virão à festa João ou sua irmã, além da mãe.

d) A estrela do espetáculo não canta, não dança e nem representa.

e) Sempre que o trem apita, João sai correndo.

f) Caso João não perca dinheiro no jogo, ele vai a festa.

g) João vai ser multado, a menos que diminua a velocidade ou a rodovia não tenha mais radar.

h) Uma condição suficiente para que um número natural n seja primo é que seja ímpar.

i) João vai ao teatro somente se estiver em cartaz uma comédia.

j) Roberto estava com ciúmes de Ivone ou não estava de bom humor.

k) Se o barômetro descer, então vai chover ou nevar.

l) Se houver uma requisição, então ela deverá finalmente ser levada em consideração ou o processo requerido nunca poderá prosseguir.

m) Se João encontrou Maria ontem, eles tomaram uma xícara de café juntos ou passearam no parque.

n) Se os juros subirem, o preço das ações abaixará.

E. 3. Traduza as proposições seguintes usando a notação simbólica.

a) Se Alfredo escrever para a Maria, ela não irá para outra cidade.

b) Ou Alfredo escreve para Maria ou ela irá para outra cidade.

c) Alfredo não escreveu para Maria e ela irá para outra cidade.

d) O gerente despedirá Maria ou despedirá João.

e) O número de acidentes diminuirá nas estradas se, e somente se, houver mais policiamento e os motoristas forem mais conscientes.

f) Todos acertaram as questões, mas isso não significa que não devam estudar mais.

g) Se Eduardo não apresentar uma queixa, então nem Fernando investigará e nem Geraldo será desclassificado.

E. 4. Represente utilizando notação simbólica as proposições do exercício 2.

E. 5. Considere as proposições:

A : Carlos é Argentino
B : João é Brasileiro

Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:

a) $A \vee B$

b) $\neg A \wedge B$

c) $A \to B$

d) $A \to \neg B$

e) $\neg A \leftrightarrow B$

f) $\neg A \wedge \neg B$

E. 6. Escreva as afirmações compostas a seguir utilizando a notação simbólica.

a) x é menor que 3 e maior que 0 ou x não é igual a 7.

b) Se x é menor que 4 e maior que 2, então x é igual a 3.

c) Ou x é maior que 0, ou x é menor que 3 e y é maior que 0.

d) x é maior que 3 se, e somente se, y for maior que 0.

E. 7. Dadas as letras indicadas para as proposições simples, escreva as afirmações compostas utilizando a notação simbólica.

a) Se os preços subirem, então haverá muitas casas disponíveis e caras; mas se as casas não estiverem caras, ainda assim haverá muitas disponíveis.

A : os preços subirem;
B : haverá muitas casas disponíveis;
C : as casas estarão caras.

b) Ir para cama ou ir nadar é uma condição suficiente para trocar de roupa; no entanto, mudar de roupa não significa que você vai nadar.

A : ir para a cama;
B : ir nadar;
C : trocar de roupa.

c) Irá chover ou irá nevar, mas não os dois ao mesmo tempo.

A : irá chover;
B : irá nevar.

d) Se Janete vencer ou se perder, ela ficará cansada.

A : Janete vence;
B : Janete perde;
C : Janete ficará cansada.

E. 8. Dadas as seguintes proposições:

A : Rosas são vermelhas.
B : Violetas são azuis.
C : Açúcar é doce.

Reescreva as seguintes proposições compostas usando a notação simbólica:

a) Rosas são vermelhas e violetas são azuis.

b) Rosas são vermelhas e, ou violetas são azuis ou açúcar é doce.

c) Sempre que violetas forem azuis, rosas serão vermelhas e açúcar será doce.

d) Rosas só serão vermelhas se violetas não forem azuis ou se açúcar for amargo.

e) Rosas são vermelha e; se açúcar for amargo, então ou violetas não são azuis ou açúcar é doce.

Reescreva as proposições compostas seguintes usando a linguagem natural:

f) $B \vee \neg C$

g) $\neg B \vee (A \to C)$

h) $(C \wedge \neg A) \to B$

i) $C \wedge (\neg A \to B)$

E. 9. Para cada uma das fórmulas seguintes elimine os parênteses desnecessários.

a) $((A \vee B) \vee (C \vee D))$

b) $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

c) $\neg(A \vee (B \wedge C))$

d) $\neg(A \wedge (B \vee C))$

E. 10. Para cada um dos termos seguintes determine se é ou não uma fórmula bem formada.

a) A

b) $(A \to B) \wedge C$

c) $B \wedge (C \vee D)$

d) $(\neg((A \vee B) \wedge C \leftrightarrow ((D \vee \neg E) \to F))$

e) $A \wedge B \vee C$

f) $\neg(A \vee B) \vee C \to D$

g) $((\neg(A \vee (\neg B) \leftrightarrow D) \vee E)$

h) $(A \to B) \wedge \neg(A \vee B \to C)$

i) $A \to B \to C \leftrightarrow F$