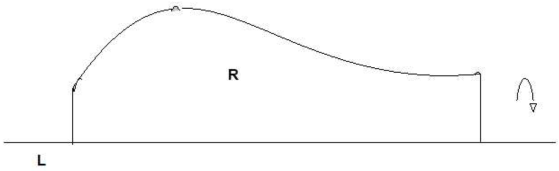
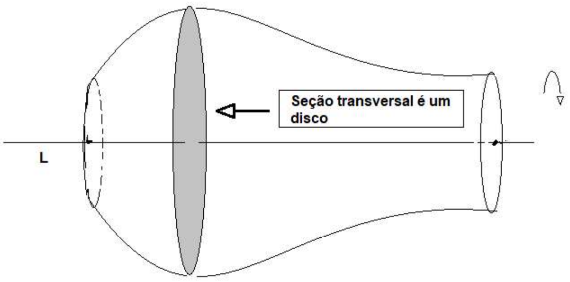
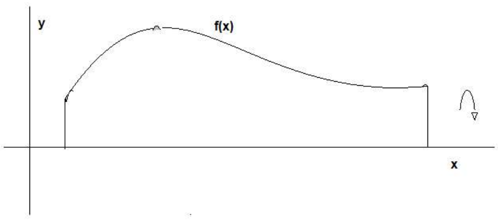
1.3 AULA 3-Volume por Discos

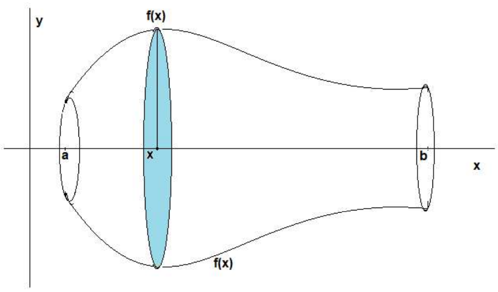
O método dos discos para cálculo de volume é um caso particular do método de fatiamento. Quando o sólido for obtido pela rotação de uma região R do plano em torno de um eixo L as seções transversais perpendiculares a esse eixo serão discos. Daí o nome do método.





Seja $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [a,b]$. Considere o sólido S obtido pela revolução da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de f, em torno do eixo Ox.



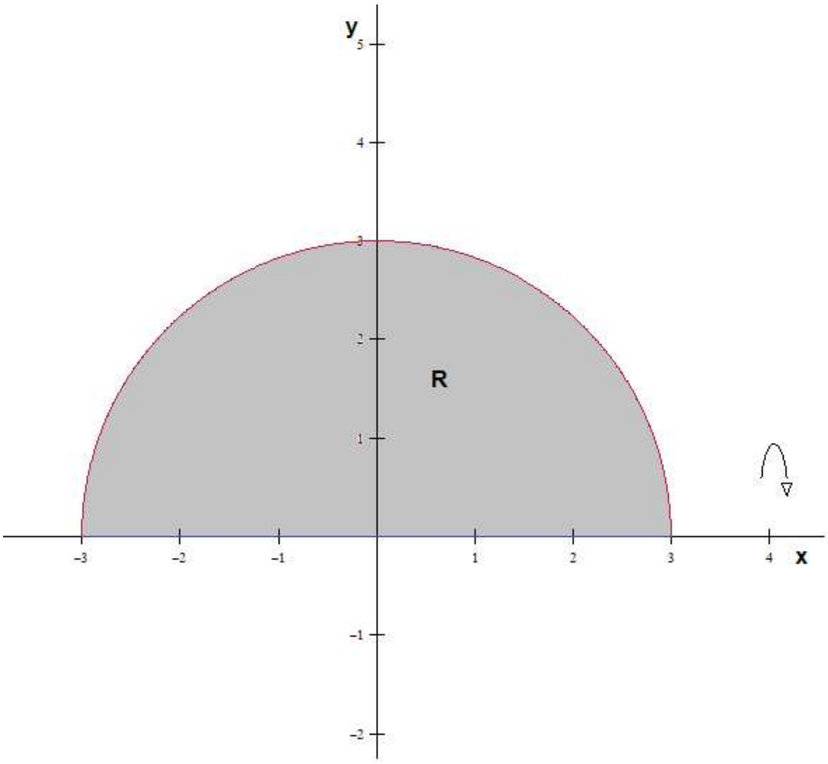


Observe que para cada x fixado, $a \leq x \leq b$, a seção transversal ao eixo Ox, passando por x é um disco com raio $r = f(x)$. Portanto temos que a área da seção será $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Logo, quando x varia de a até b, obtemos o volume do sólido de revolução por:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Exemplo 6. *Calcule o volume do sólido obtido pela revolução, em torno do eixo Ox, da região R do plano limitada pelo eixo Ox e pela curva $y = \sqrt{9-x^2}$.*

SOLUÇÃO:

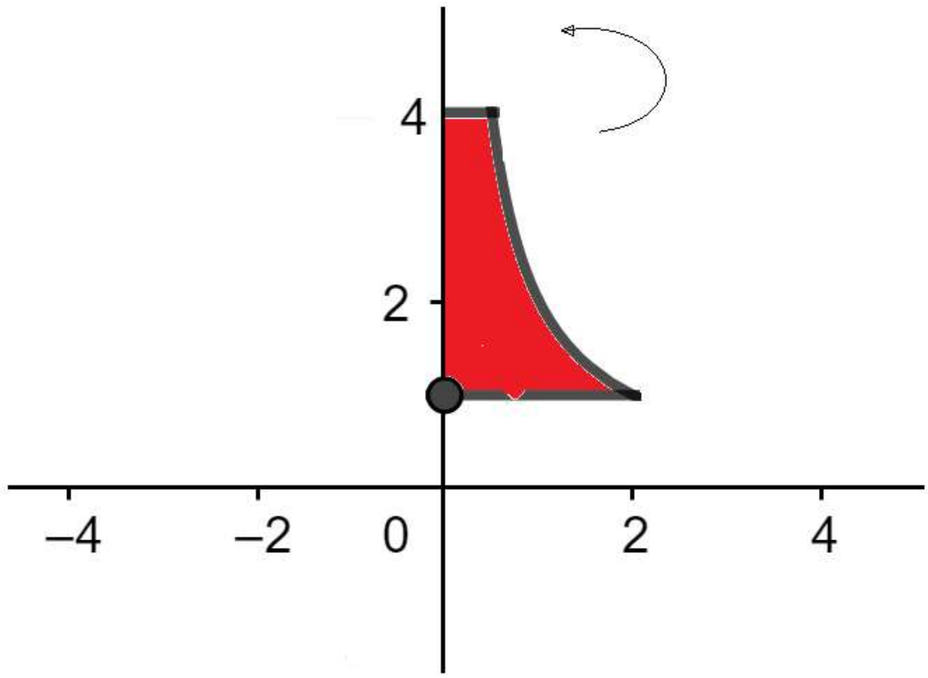


Observe que o sólido obtido é uma esfera de raio 3. Planos perpendiculares ao eixo Ox "divide"a esfera em finas fatias. Fixado $x \in [-3,3]$, a área da seção transversal que passa por x será $A(x) = \pi y^2 = \pi(9-x^2)$. Portanto, o volume será:

$$
\begin{aligned}
V = \int_a^b A(x)dx &= \int_{-3}^{3} \pi(9-x^2)dx \\
&= \pi\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=-3}^{x=3} \\
&= 36\pi\ u.v
\end{aligned}
$$

Exemplo 7. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Oy, da região compreendida entre o eixo das ordenadas e a curva* $x = \frac{2}{y}$ *com* $1 \leq y \leq 4$.

Solução:



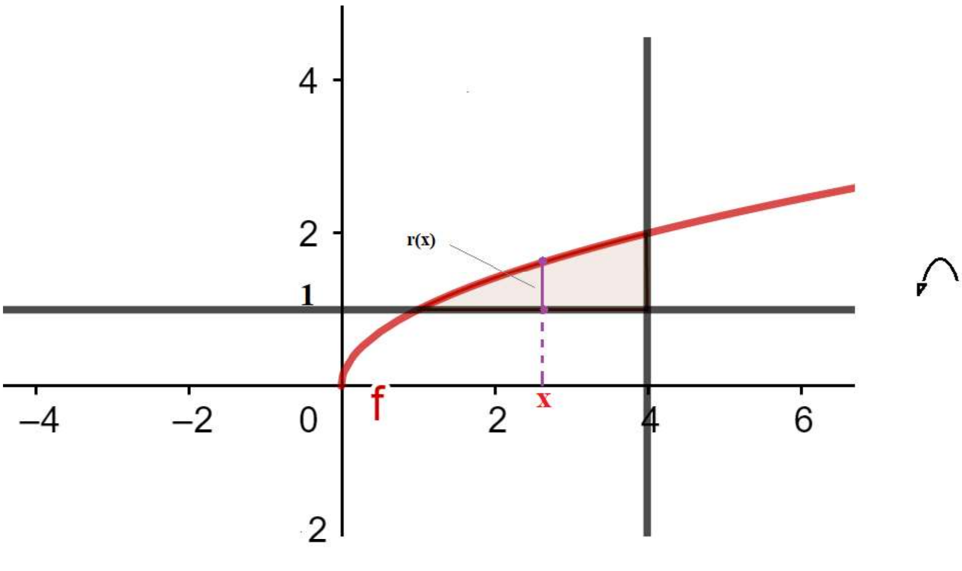
Observe que cada seção transversal ao sólido é um disco de raio $x = \frac{2}{y}$. Portanto, $A(x) = \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
V = \int_a^b A(x)dx &= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\
&= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2}\, dy \\
&= 4\pi \left(\frac{-1}{y}\right)_1^4 \\
&= 3\pi\ u.v
\end{aligned}
$$

Abaixo você encontrará duas sugestões de exercícios. Faça-os como treinamento!

Exercício 6. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno da reta* $y = 1$*, da região limitada por* $y = \sqrt{x}$ *e pelas retas* $y = 1$ *e* $x = 4$.

Solução: A diferença entre este exercício e os outros que fizemos está no fato que agora estamos rotacionando a região em torno de um eixo paralelo ao eixo Ox. Portanto, devemos observar qual o raio típico correto neste caso. O raciocínio para resolver essas questões é mesmo utilizado quando os eixos são os eixos coordenados x e y. Você deve lembrar que o raio da seção transversal de um sólido de rotacão é dado pela distância da fronteira que limita o sólido até o eixo de rotação. Neste exemplo, fixado um x, temos que o valor na fronteira para este x é $y = \sqrt{x}$ e o eixo de rotação é $y = 1$. Então a distância, ou seja o raio da seção em x será $r(x) = \sqrt{x} - 1$.



Perceba que a região mencionada corresponde $1 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq \sqrt{x}$ Para cada x fixado naquele intervalo, o raio de uma seção transversal (disco) é $r(x) = \sqrt{x} - 1$. Logo, o volume será dado por:

$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x} - 1)^2 dx = \frac{7\pi}{6}$$

Exercício 7. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, da região limitada por* $y = cotg(x)$ *e pelo eixo Ox no intervalo* $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.