10

Dedução Natural na Lógica de Predicados

Sumário da Aula

Inferir conclusões corretas, a partir de um conjunto de premissas, é uma importante característica de todo sistema lógico. Na lógica de predicados, as demonstrações de Dedução Natural são semelhantes às da lógica proposicional, e continuam válidas todas as regras de equivalência e de inferência estudadas.

Exemplo 10.1. Considere o seguinte argumento:

$$\forall x P(x) \wedge [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)] \vdash \forall x Q(x).$$

A válidade do argumento pode ser demonstrada apenas por aplicação das regras de inferência da lógica proposicional. Prova:

1.	$\forall x P(x)$	**hipótese 1**
2.	$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$	**hipótese 2**
3.	$\therefore \forall x Q(x)$	**1,2 - {Modus Ponens}**

■

Existem situações em que os argumentos com fórmulas bem formadas quantificadas não são tautologias, porém são válidas devido à sua estrutura e o significado dos quantificadores que a formam **(a fórmula bem formada quantificada é válida se for verdadeira para todas as interpretações)**.

Exemplo 10.2. Sejam as fórmulas:

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
  É uma fórmula válida em qualquer interpretação, pois se todos os elementos do conjunto possui determinada propriedade, então existe um elemento do conjunto que tem essa propriedade.

- $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$
  Não é uma fórmula válida! Considere por exemplo, o universo do discurso como o conjunto dos números inteiros e a declaração "$P(x)$: x é par". "Existe um número inteiro que é par" é verdadeiro, porém é falso dizer que "se existe um número inteiro par, então todos os números inteiros terão essa propriedade.

Nos casos em que a fórmula bem formada quantificada é válida, o procedimento de demonstração consistirá em retirar os quantificadores, manipular as fórmulas e, só então, colocar os quantificadores no lugar.

10.1 Regras de Inferência para a Lógica de Predicados

O sistema de Dedução Natural para a lógica dos predicados consiste no **acréscimo de quatro novas regras de inferência** que fornecem mecanismos para a **retirada e a inserção dos quantificadores universal e existencial**. A seguir são apresentadas e descritas as quatros regras básicas de inferência para sentenças quantificadas.

10.1.1 Regras para o Quantificador Universal

Eliminação do Quantificador Universal:

A **instanciação universal**, representada simbolicamente por $\{\forall_E\}$, diz que se a é um elemento particular do universo do discurso e a premissa $\forall x[P(x)]$ é verdadeira, então tem-se que $P(a)$ também é verdadeira.

$$\frac{\forall x[P(x)]}{P(a)} \; \{\forall_E\}$$

Em outras palavras, esta regra diz que podemos deduzir $P(y), P(z)$ ou $P(a)$ de $\forall x, P(x)$ retirando o quantificador universal. A justificativa é que, se $P(x)$ é verdadeira para todos os elementos do universo de discurso, pode-se nomear um desses elementos usando uma variável arbitrária (p. ex. a) e infere-se que $P(a)$ é verdadeira.

Exemplo 10.3. Considere as seguintes sentenças:

a) Se todas as mulheres são inteligentes, então Maria é inteligente.
Seja a sentença "Todas as mulheres são inteligentes". Considere o elemento Maria pertencente ao universo de discurso (Conjunto das Mulheres). Então, pode-se concluir que "Maria é inteligente".

b) $$\frac{\forall x[A(x) \to B(x)]}{\therefore A(a) \to B(a)}$$

Exemplo 10.4. Considere o argumento: **"Sócrates é homem. Todo homem é mortal. Logo, Sócrates é mortal."**
Este argumento é um dos "silogismos" clássicos da lógica formal. A instanciação universal pode ser usada para prová-lo. Seja:

- $H(x)$ **para denotar "x é humano".**
- $M(x)$ **para denotar "x é mortal."**
- a= **Sócrates.**

O argumento pode ser reescrito como:

$$H(a), \forall x[H(x) \to M(x)] \vdash M(a)$$

e validado pela seguinte dedução:
Prova:

1.	$H(a)$	**hipótese 1**
2.	$\forall x[H(x) \to M(x)]$	**hipótese 2**
3.	$H(a) \to M(a)$	**2,** $\{\forall_E\}$
4.	$\therefore M(a)$	**1,3,** $\{$**Modus Ponens**$\}$

■

Introdução do Quantificador Universal:

A **generalização universal**, representada simbolicamente por $\{\forall_I\}$, diz que $\forall x, P(x)$ é verdadeira, dada como premissa que $P(a)$ é verdadeira para todos os elementos a do universo de discurso. Esta regra é usada para mostrar que $\forall x P(x)$ é verdadeira tomando um elemento a qualquer do domínio e mostrando que $P(a)$ é verdadeira.

$$\frac{P(a) \textbf{ para um } a \textbf{ arbitrário}}{\forall x[P(x)]}\ \{\forall_I\}$$

Em outras palavras, sabendo que $P(a)$ é verdadeira e que a é um elemento arbitrário, ou seja, a pode ser qualquer elemento do universo de discurso, então podemos fazer a inserção de um quantificador universal e deduzir $\forall x[P(x)]$.

Exemplo 10.5. Considere os seguintes argumentos:

a) Se qualquer mulher é inteligente, então todas as mulheres são inteligentes.

Seja a sentença "x é inteligente". Para um elemento arbitrário c do universo de discurso a sentença $P(c)$ é verdadeira (isto é, a declaração "qualquer mulher é inteligente" é verdadeira), então podemos concluir que "todas as mulheres são inteligentes".

b) $$\frac{A(c) \to B(c)}{\therefore \forall x[A(x) \to B(x)]}$$

Observação

É preciso ter cuidado ao usar essa regra! Supor que o elemento c possui a propriedade P não garante que todo elemento x do domínio também possui a propriedade P.

Exemplo 10.6. Uso incorreto da regra:

1.	$P(x)$	hipótese
2.	$\forall x[P(x)]$	1, $\{\forall_I\}$

O argumento $P(x) \vdash \forall x[P(x)]$ não é válido!

O elemento x pode ter a propriedade P, mas isso não significa que todos os elementos do domínio também possuem essa propriedade. Considere, por exemplo, um caso hipotético onde o universo de discurso é um conjunto de todos os carros e $P(x)$ a sentença "x é amarelo". Neste caso, ter algum carro amarelo, não é suficiente para deduzir que todos os carros são amarelos.

10.1.2 Regras para o Quantificador Existencial

Eliminação do Quantificador Existencial:

A regra **instanciação existencial**, representada simbolicamente por $\{\exists_E\}$, permite concluir que existe um elemento c no domínio para o qual $P(c)$ é verdadeira, sabendo que $\exists x P(x)$ é verdadeira. Neste caso, não é necessário tomar um valor de c arbitrário, pode ser apenas um valor qualquer que torne $P(c)$ verdadeira.

$$\frac{\exists x[P(x)]}{P(c) \textbf{ para algum elemento } c}\ \{\exists_E\}$$

Em outras palavras, essa regra diz que a partir de $\exists x[P(x)]$ pode-se deduzir $P(a), P(b)$ ou $P(c)$, desde que essas sejam novas constantes, retirando um quantificador existencial. A justificativa é que, se $P(x)$ é verdadeira para algum elemento do universo de discurso podemos dar um nome específico a esse elemento, e não é possível supor mais nada sobre ele.

Exemplo 10.7. Considere os seguintes argumentos:

a) **Se existe pelo menos uma mulher inteligente, então alguma mulher é inteligente.**
Seja a sentença "x é inteligente". Existe um elemento c no domínio que torna a sentença verdadeira ("existe pelo menos uma mulher inteligente"). Então pode-se concluir que "alguma mulher é inteligente".

b) $\dfrac{\exists x[A(x) \wedge B(x)]}{\therefore A(c) \wedge B(c)}$

Introdução do Quantificador Existêncial:

A regra **generalização existencial**, representada simbolicamente por $\{\exists_I\}$, é usada para concluir que $\exists x[P(x)]$ é verdadeira quando é conhecido um elemento particular c no domínio para o qual $P(c)$ verdadeira.

$$\frac{P(c) \textbf{ para algum elemento } c}{\exists x[P(x)]}\ \{\exists_I\}$$

Esta regra diz que de $P(x)$ ou $P(c)$ pode-se fazer a inserção de um quantificador existencial e deduzir $\exists x[P(x)]$. Ou seja, alguma coisa foi nomeada como tendo a propriedade P, então, podemos dizer que existe alguma coisa que possui esta propriedade.

Exemplo 10.8. Considere os seguintes argumentos:

a) **Se Maria é inteligente, então existe pelo menos uma mulher inteligente.**
Seja a sentença "x é inteligente". Seja Maria um elemento que pertence ao universo de discurso: conjunto de mulheres. Da sentença verdadeira "Maria é inteligente" pode-se concluir que "existe pelo menos uma mulher inteligente".

b) $\dfrac{A(c) \wedge B(c)}{\therefore \exists x[A(x) \wedge B(x)]}$

Observação:

Durante a prova de argumentos, aplique as regras de inferência para o lógica dos predicados quando a fórmula possuir o mesmo formato que a regra. A sequência de demonstração consiste nos seguintes passos:

1. **Retirar os quantificadores.**
2. **Manipular as fórmulas bem formulada.**
3. **Inserir os quantificadores quando necessário.**

A Tabela 10.1 apresenta um resumo das regras de inferência para os quantificadores universal e existencial e as restrições quanto ao uso de cada uma delas.

Regra	De	Podemos deduzir	Restrição
$\{\forall_E\}$	$\forall x[P(x)]$	$P(a)$, em que a é uma variável arbitrária ou um símbolo constante.	Se a for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador ...
$\{\exists_E\}$	$\exists x[P(x)]$	$P(c)$, em que c é um símbolo constante não utilizado anteriormente.	É necessário que seja a primeira regra a usar.
$\{\forall_I\}$	$P(x)$	$\forall x[P(x)]$	$P(x)$ não pode ser deduzida de nenhuma hipótese na qual x é uma variável livre. Também não pode ser deduzida por meio do $\{\exists_E\}$ de uma fórmula onde x é variável livre.
$\{\exists_I\}$	$P(x)$ ou $P(c)$	$\exists x[P(x)]$	Para ir de $P(c)$ a $\exists x, P(x)$, temos que x não pode aparecer em $P(c)$.

Tabela 10.1: Regras de Inferência para quantificadores.

Exemplo 10.9. Prove o argumento $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$.

Prova:

1.	$\forall x[P(x)]$	**hipótese**
2.	$P(x)$	**1,** $\{\forall_E\}$
3.	$\therefore \exists x[P(x)]$	**2,** $\{\exists_I\}$

■

Exemplo 10.10. Mostre que as premissas: **"Todos os alunos da turma de Matemática Discreta estão fazendo um curso de Ciência da Computação"** e **"Hugo é um aluno da turma de Matemática Discreta"** implica na conclusão "Hugo está frequentando o curso de Ciência da Computação".

Solução: Sejam as declarações

$P(x)$:	x **está na turma de Matemática Discreta.**
$Q(x)$:	x **está fazendo o curso de Ciência da Computação.**
$P(Hugo)$:	**Hugo está na turma de Matemática Discreta.**
$Q(Hugo)$:	**Hugo está fazendo o curso de Ciência da Computação.**

As premissas são representadas simbolicamente por $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ **e** $P(Hugo)$ **e a conclusão por** $Q(Hugo)$**.**

A conclusão pode ser deduzida a partir dos seguintes passos:

1	$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$	**Hipótese 1**
2	$P(Hugo)$	**Hipótese 2**
3	$P(Hugo) \rightarrow Q(Hugo)$	**1,** $\{\forall_E\}$
4	$\therefore Q(Hugo)$	**3,2,** $\{$**Modus Ponens**$\}$

Exemplo 10.11. Faça a dedução do argumento:

$$\begin{array}{c} \exists x[P(x) \land Q(x)] \\ \forall x[P(x) \rightarrow S(x)] \\ \hline \exists x[S(x) \land Q(x)] \end{array}$$

Prova:

1	$\exists x[P(x) \land Q(x)]$	**Hipótese 1**
2	$\forall x[P(x) \rightarrow S(x)]$	**Hipótese 2**
3	$P(a) \land Q(a)$	**1,** $\{\exists_E\}$
4	$P(a) \rightarrow S(a)$	**2,** $\{\forall_E\}$
5	$P(a)$	**3,** $\{\land Ee\}$
6	$S(a)$	**4,5,** $\{$**Modus Ponens**$\}$
7	$Q(a)$	**3,** $\{\land Ed\}$
8	$S(a) \land Q(a)$	**6,7,** $\{\land I\}$
9	$\therefore \exists x[S(x) \land Q(x)]$	**8,** $\{\exists_I\}$

■

Exemplo 10.12. Prove o argumento $\forall x[P(x) \land Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)] \land \forall [xQ(x)]$.

10.2 Argumentos com afirmações quantificadas

Da instanciação universal, se uma propriedade ou condição for verdadeira para todos os elementos em um domínio, ela será verdadeira para qualquer elemento específico do domínio. Por exemplo:

Cada coisa que está viva está envelhecendo.
Pedro está vivo.
Portanto, Pedro está envelhecendo.

A verdade dessa afirmação decorre naturalmente da verdade geral ou universal das propriedades associadas a um determinado domínio. (Neste caso, a propriedade de que tudo neste mundo está vivo ou não.) Além disso, se uma propriedade é verdadeira para tudo em um determinado domínio, então também é verdade para qualquer coisa particular naquele domínio .

Modus Ponens Universal:

A regra **Modus Ponens Universal** é uma combinação da aplicação das regras **instanciação universal** e **Modus Ponens**. Esta regra diz que se $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ é verdadeira, e se $P(a)$ é verdadeira para algum elemento particular a no domínio do quantificador universal, então $Q(a)$ também deve ser verdadeira. A regra é escrita como:

$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \to Q(x)] \\ P(a), \textbf{ em que } a \textbf{ é um elemento particular no domínio} \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

Modus Tollens Universal:

De forma análoga, a regra **Modus Tollens Universal** é uma combinação da aplicação das regras **Instanciação Universal** e **Modus Tollens**, e pode ser escrita por:

$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \to Q(x)] \\ \neg Q(a), \textbf{ em que } a \textbf{ é um elemento particular no domínio} \\ \hline \therefore \neg P(a) \end{array}$$

Exemplo 10.13. Prove que qualquer número inteiro múltiplo de 4 é par.
Prova: (Será usada a regra de Modus Ponens Universal para fazer a demonstração.)
1. $\forall n \in \mathbb{Z}$, **se** n **for múltiplo de 4, então** n **é par.**
2. Suponha que n **seja um inteiro particular múltiplo de 4, escolhido arbitrariamente.**
3. Então $n = 4m$ **para algum inteiro** m.
4. Veja: $n = 4m = 2 \times 2m = 2(2m)$ **por fatoração de 2.**
5. Portanto, se um inteiro (n **) é igual a duas vezes outro inteiro (** $2m$ **), então esse número é par.** ■

10.3 Exercícios

E. 1. Use as regras de inferência para mostrar que:

a) Se $\forall x[P(x) \to (Q(x) \wedge S(x))]$ e $\forall x[P(x) \wedge R(x)]$ são verdadeiras, então no domínio onde todos os quantificadores são os mesmos $\forall x[R(x) \wedge S(x)]$ também é verdadeira.

b) Se $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$; $\forall x[\neg Q(x) \vee S(x)]$; $\forall x[R(x) \to \neg S(x)]$ e $\exists x[\neg P(x)]$ são verdadeiras, então $\exists x[\neg R(x)]$ é verdadeira.

E. 2. Verifique se as fórmulas bem formadas são argumentos válidos.

a) $\forall x[P(x)] \to \forall x[P(x) \vee Q(x)]$

b) $\exists x \exists y[P(x, y)] \to \exists y \exists x[P(x, y)]$

c) $\forall x[P(x)] \wedge \exists x[\neg P(x)] \to \exists x[Q(x)]$

E. 3. Prove as equivalências:

a) $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)] \equiv \neg \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

b) $\neg \forall x \exists y[R(x, y) \wedge \neg P(x, y)] \equiv \exists x \forall [R(x, y) \to P(x, y)]$

Referências Bibliográficas

1 HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

2 EPP, S. S. *Discrete Mathematics With Applications*. Fourth. Boston - USA: Cengage Learning, 2010. ISBN 978-0-495-39132-6.

3 HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

4 GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

5 MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

6 RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

7 BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

8 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

9 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

10 ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.