8

Métodos Iterativos

Sumário da Aula

8.1 Introdução

Assim como os métodos diretos, métodos iterativos também podem ser aplicados na resolução de um sistema $Ax = B$ cujo $det(A) \neq 0$. São apresentados a seguir um breve resumo de resultados e definições necessários para a compreensão dos métodos iterativos aplicados na solução de sistemas de equações lineares.

Para determinar a solução de um sistema de equações lineares por meio de um método iterativo é preciso transformá-lo em um sistema de equações equivalente que possibilite a definição de um esquema iterativo. Ou seja, transformar $Ax = B$ na seguinte **função de iteração**:

$$x^k = Mx^{k-1} + C$$

onde M é uma matriz iterativa de ordem n e C é um vetor de tamanho $n \times 1$.

Um método iterativo é dito **estacionário** quando a matriz M da função de iteração for fixa, ou seja, quando uma nova aproximação é obtida da anterior sempre pelo mesmo processo.

Partindo de uma aproximação inicial x^0, a função de iteração fornece uma sequência de soluções aproximadas $x^1, x^2, \cdots, x^k, \cdots$, onde cada uma delas é **obtida da solução anterior** por meio da aplicação de um mesmo procedimento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^1 &= Mx^0 + C \\ x^2 &= Mx^1 + C \\ &\vdots \\ x^k &= Mx^{k-1} + C, \quad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Pretende-se que esta sequência gerada seja convergente para a solução $\bar{x}$ do sistema linear, ou seja:

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x}$$

Definição 8.1. Se a sequência $\{x^{(k)}\}$ convergir para um limite, qualquer que seja a aproximação inicial x^0, então o método iterativo é dito **convergente**.

Definição 8.2. Considere I a matriz identidade. Se os sistemas de equações $Ax = B$ e $(I - M)x = C$ possuírem a mesma solução, então o método iterativo é dito **consistente**.

Proposição 8.1. *Seja $det(A) \neq 0$. O método iterativo proposto é consistente se, e somente se,*

$$(I - M)A^{-1}B = C.$$

Prova: O sistema linear é consistente, se admite pelo menos uma solução.

Temos as seguintes relações:

$$(I) \quad x = Mx + C \Rightarrow x - Mx = C \Rightarrow (I - M)x = C$$

$$(II) \quad Ax = B \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}B \Rightarrow Ix = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B$$

Substituindo a relação (II) em (I) obtém-se

$$(I - M).(A^{-1}B) = C.$$

■

8.1.1 Revisão da Álgebra: Norma Matricial

Definição 8.3. **(Norma de vetores)** Define-se norma de um vetor $x \in V$ (espaço vetorial):

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad & V \to \mathbb{R} \\ & x \to \|x\| \end{aligned}$$

onde as seguintes condições são satisfeitas:

n_1) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

n_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall x \in V$

n_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|; \; \forall x, y \in V$

Considere $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, logo:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| && = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\
\|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} && = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\
\|x\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} |x_i| && = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}
\end{aligned}$$

De forma geral, quando $V = \mathbb{R}^n$, as normas l_p são definidas por:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \ge 1 \\
\|x\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} |x_i|
\end{aligned}$$

Exemplo 19. Seja o vetor $x = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, logo:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= |2| + |5| + |3| + |1| = 11 \\
\|x\|_2 &= \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{39} \\
\|x\|_\infty &= \max\{|2|, |5|, |3|, |1|\} = 5
\end{aligned}$$

Definição 8.4. (Norma de matrizes) Considere $V = \mathbb{R}(n,n)$ o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem $(n \times n)$ sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em V é uma aplicação indicada por $\|\cdot\|$ tal que:

$$\begin{aligned}
\|\cdot\| : \quad & \mathbb{R}(n,n) \to \mathbb{R} \\
& A \to \|A\|
\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

n_1) $\|A\| \ge 0, \;\; \forall A \in \mathbb{R}(n,n); \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

n_2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| ; \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall A \in \mathbb{R}(n,n)$

n_3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\| ; \; \forall A, B \in \mathbb{R}(n,n)$

Considere $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$. São definidas as seguintes normas de matrizes:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \|A\|_C = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) && \to \textbf{Norma coluna} \\
\|A\|_\infty &= \|A\|_L = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) && \to \textbf{Norma linha} \\
\|A\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2} && \to \textbf{Norma Euclidiana}
\end{aligned}$$

Observação

Para as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$, vale a seguinte propriedade:

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\,, \quad \forall\ A, B \in \mathbb{R}(n,n)$$

Exemplo 20. Considere, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

São calculadas as seguintes normas:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \|A\|_C = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right) \\
&= \max\{(2+3+1),(1+4+2),(3+2+5)\} = \max\{(6),(7),(10)\} = 10 \\
\|A\|_\infty &= \|A\|_L = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) \\
&= \max\{(2+1+3),(3+4+2),(1+2+5)\} = \max\{(6),(9),(8)\} = 9 \\
\|A\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2} \\
&= \sqrt{2^2+1^2+3^2+3^2+(-4)^2+2^2+1^2+2^2+(-5)^2} = \sqrt{73} \approx 8,5440
\end{aligned}$$

Definição 8.5. Considere uma norma de vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e uma norma de matriz $A \in \mathbb{R}(n,n)$. Dizemos que estas normas são **consistentes** se satisfazem a expressão:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|\,, \quad \forall A \in \mathbb{R}(n,n) \ \text{ e } \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

8.1.2 Convergência dos Métodos Iterativos

Definição 8.6. (Sequência Convergente:) Considere uma sequência de vetores $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}\right)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a sequência converge para

$$\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \cdots, \bar{x_n}) \in \mathbb{R}^n$$

se $\left\|x^{(i)} - \bar{x}\right\| \to 0$, quando $i \to \infty$, para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8.1. *A condição **necessária** e **suficiente** para a convergência do processo iterativo $x^k = Mx^{k-1} + C$ é que $max|\lambda_i| < 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz M.*

Corolário 8.1. ***(Critério Geral de Convergência)*** *O processo iterativo $x^k = Mx^{k-1} + C$ **é convergente se**, para qualquer norma de matrizes, $\|M\| < 1$.*

8.1.3 Critério de Parada

Nos métodos iterativos escolhe-se um $x^{(0)}$ como uma aproximação inicial para a solução do sistema linear $Ax = B$. Esta aproximação inicial é refinada pelo processo iterativo até obter uma nova solução que possua uma determinada precisão (número de casas decimais corretas).

O **critério de parada** usado para finalizar o processo iterativo quando se obtém x^k será tal que $\max\limits_{1<i<n} |x_i^k - x_i^{k-1}|$ seja menor ou igual a uma precisão estabelecida, ou seja,

$$\max_{1<i<n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \epsilon$$

onde ϵ é uma precisão pré-fixada, x_i^k e x_i^{k-1} são duas aproximações consecutivas para $\bar{x}$. O valor de x^k é tomado como uma aproximação para a solução do sistema de equações.

Também é possível usar como critério de parada, junto com a precisão, o número máximo de iterações $k = k_{max}$ aplicado pelo método iterativo. Assim, o método poderá ser interrompido quando atingir a precisão desejada ou quando atingir o número máximo de iterações pré-estabelecido.

Nesta disciplina serão estudados dois métodos iterativos estacionários: Jacobi e Gauss-Seidel.

8.2 Método de Jacobi

Considere o sistema de equações lineares $Ax = B$, em que $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$, $det(A) \neq 0$ e com a diagonal principal $a_{ii} \neq 0, \ i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right.$$

Podemos reescrever o sistema na forma equivalente, dividindo cada linha pelo elemento da diagonal principal e explicitando x_1 na primeira coluna, x_2 na segunda coluna, x_3 na terceira coluna, e, sucessivamente, até x_n na n-ésima coluna. Assim:

$$\left\{\begin{array}{llllllll} x_1 & = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 & - \cdots - & a_{1n}x_n) \\ x_2 & = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 & - \cdots - & a_{2n}x_n) \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ x_n & = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n & -a_{n1}x_1 & -a_{n2}x_2 & -a_{n3}x_3 & - \cdots - &) \end{array}\right.$$

O sistema anterior é escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

ou na forma de função de iteração $x = Mx + C$, onde $M = (m_{ij})$ é a matriz iterativa:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \text{ e } C_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, \cdots, n$$

Assim, o **método iterativo de Jacobi** é então definido como:

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + C, \quad k = 1, 2, \cdots$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Ainda é possível escrever o método com a notação usual para sistemas:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & - \cdots - & a_{1n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & -a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 & -a_{21}x_1^{(k-1)} & & -a_{23}x_3^{(k-1)} & - \cdots - & a_{2n-1}x_{n-1}^{(k-1)} & -a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ & & \ddots & & & & \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n & -a_{n1}x_1^{(k-1)} & -a_{n2}x_2^{(k-1)} & -a_{n3}x_3^{(k-1)} & - \cdots - & a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)} &) \end{cases}$$

Observação

O método iterativo de Jacobi é escrito de forma geral por:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, \cdots, n$$

Exemplo 21. Resolva o sistema linear pelo método de Jacobi com o limite de 6 iterações ou uma precisão menor que 10^{-2}. Utilize $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ como estimativa inicial e retenha, nos cálculos, quatro casas decimais.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

Solução: A função de iteração é dada por:

$$\begin{cases} x_1^k & = 1 - 2x_2^{k-1} + 2x_3^{k-1} \\ \\ x_2^k & = 1 - x_1^{k-1} - x_3^{k-1} \\ \\ x_3^k & = 1 - 2x_1^{k-1} - 2x_2^{k-1} \end{cases}$$

e os resultados da aplicação do método de Jacobi são apresentados no quadro a seguir:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$max_{1\leq i\leq 3}\lvert x_i^k - x_i^{k-1}\rvert$
0	0	0	0	
1	1	1	1	1
2	1	-1	-3	4
3	-3	3	1	4
4	-3	3	1	0

Portanto, a solução do sistema linear é $x \approx x^4 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t$.

8.2.1 Critério de Convergência

Embora a ordem das equações em um sistema linear não exerça qualquer influência com relação à existência de solução, quando se trata da utilização de um método iterativo esta ordem será relevante, uma vez que define-se uma função de iteração.

É **condição suficiente** para que o método iterativo de Jacobi **gere uma sequência que converge** para a solução de um sistema de equações $Ax = B$, qualquer que seja a aproximação inicial x^0, que:

a) o **critério das linhas** seja satisfeito, isto é, se:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Quanto mais próxima de zero estiver a relação $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$, mais rápida será a convergência.

b) o **critério das colunas** seja satisfeito, isto é, se:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

Quanto mais próxima de zero estiver a relação $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{jj}|}$ mais rápida será a convergência.

Observe que estes dois critérios envolvem **condições que são apenas suficientes**. Assim, se pelo menos uma delas for satisfeita, então está assegurada a convergência. Entretanto, se nenhuma das duas for satisfeita nada se pode afirmar. Considere agora a Definição 8.7.

Definição 8.7. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$. Diz-se que A é **estritamente diagonal dominante** se:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Caso

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

a matriz A é dita **diagonalmente dominante**.

Exemplo 22. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Da Definição 8.7, tem-se que:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, 3$$

Para $i = 1$: $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \rightarrow |3| > |-1| + |+1|$

Para $i = 2$: $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \rightarrow |4| > |1| + |1|$

Para $i = 3$: $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \rightarrow |-5| \geq |2| + |3|$

Portanto, conclui-se que a matriz A é diagonalmente dominante.

Observação

Da Definição 8.7 é possível concluir que se a matriz A for estritamente diagonalmente dominante, então o critério de linhas é satisfeito. Assim, para testar se o método de Jacobi converge basta verificar se a matriz dos coeficientes A é estritamente diagonalmente dominante.

Exemplo 23. Resolva o sistema linear pelo método de Jacobi com precisão menor ou igual a 10^{-3} e $k_{max} = 10$. Utilize $x^{(0)} = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^t$ como estimativa inicial e retenha, nos cálculos, quatro casas decimais.

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 57 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 20 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -4 \end{cases}$$

Solução: Da Definição 8.7, tem-se que a matriz A é estritamente diagonal dominante; isto é:

Para $i = 1$: $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \rightarrow |10| > |3| + |-2|$

Para $i = 2$: $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \rightarrow |8| > |2| + |-1|$

Para $i = 3$: $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \rightarrow |5| > |1| + |1|$

Portanto, conclui-se que o processo iterativo de Jacobi convergirá.

A função de iteração é dada por:

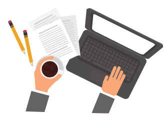
$$\begin{cases} x_1^k &= \dfrac{1}{10}(-3x_2^{k-1} + 2x_3^{k-1} + 57) \\ x_2^k &= \dfrac{1}{8}(-2x_1^{k-1} + 1x_3^{k-1} + 20) \\ x_3^k &= \dfrac{1}{5}(-x_1^{k-1} - x_2^{k-1} - 4) \end{cases}$$

Os resultados da aplicação do método de Jacobi estão sumarizados no quadro a seguir:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$max_{1\leq i\leq 3}\lvert x_i^k - x_i^{k-1}\rvert$
0	5,7	2,5	-0,8	
1	4,79	0,975	-2,44	1,64
2	4,9195	0,9975	-1,953	0,487
3	5,0102	1,0260	-1,9834	0,0907
4	4,9955	0,9995	-2,0072	0,0265
5	4,9987	1,0002	-1,9990	0,0082
6	5,0001	1,0004	-1,9998	0,0007

Portanto, a solução do sistema linear é $x \approx x^6 = \begin{bmatrix} 5,0001 & 1,0004 & -1,9998 \end{bmatrix}^t$.

8.3 Exercícios



E. 1. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 28 \\ x_1 + 10x_2 + 6x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 &= -17 \end{cases}$$

a) Verifique a condição de convergência do método de Jacobi.

b) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Jacobi com $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ e $\epsilon = 0,01$. Reordene as equações, se for preciso, de modo que a convergência esteja garantida.

E. 2. Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

a) Verifique a condição de convergência do método de Jacobi.

b) Resolva o sistema linear pelo método iterativo de Jacobi com $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ e $\epsilon = 0,01$. Reordene as equações, se for preciso, de modo que a convergência esteja garantida.