# MATRIZES

* UMA MATRIZ $A_{m \times n}$ ($m$ POR $n$) É UMA TABELA COM $m \cdot n$ DISPOSTOS EM $m$ LINHAS E $n$ COLUNAS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A $i$-ÉSIMA LINHA DA MATRIZ $A$ É

$$L_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad \text{PARA} \quad i = 1, \ldots, m$$

A $j$-ÉSIMA COLUNA DA MATRIZ $A$ É

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

USAMOS TAMBÉM A NOTAÇÃO $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ OU AINDA

É COMUM SUBSTITUIRMOS OS COLCHETES [ ] POR PARETESES ( ).

DIZEMOS QUE $a_{ij}$ OU $[A]_{ij}$ É O ELEMENTO OU A ENTRADA DE POSIÇÃO LINHA $i$, COLUNA $j$ DA MATRIZ $A$.

A É UMA MATRIZ QUADRADA SE $m = n$.

OS ELEMENTOS $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{mm}$ FORMAM A DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ QUADRADA.

EXEMPLO 1. ALGUMAS MATRIZES

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

OS ELEMENTOS $a_{ij}$:

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 0$

$a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

É UMA MATRIZ QUADRADA $3 \times 3$

OS ELEMENTOS $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$ E $a_{33} = 0$ FORMAM A DIAGONAL PRINCIPAL.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

QUANDO A MATRIZ TEM SOMENTE UMA LINHA É CHAMADA DE MATRIZ LINHA. $1 \times n$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

SE TIVER SOMENTE UMA COLUNA É CHAMADA DE MATRIZ COLUNA $m \times 1$

$$E = [5]_{1\times 1}$$

AS MATRIZES $1 \times 1$ SÃO EQUIVALENTES AO CONJUNTO DOS REAIS.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

SE A MATRIZ QUE POSSUI TODOS OS ELEMENTOS IGUAIS A ZERO É CHAMADA DE MATRIZ NULA $m \times m$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

SE A MATRIZ É QUADRADA E TODOS OS ELEMENTOS ACIMA DA DIAGONAL PRINCIPAL SÃO NULOS, ELA É CHAMADA DE MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

QUANDO OS ELEMENTOS ACIMA DA DIAGONAL PRINCIPAL SÃO NULOS ELE É DITA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR.

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

QUANDO SOMENTE OS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL SÃO NÃO NULOS ELA É DITA MATRIZ DIAGONAL

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

UMA MATRIZ DIAGONAL IMPORTANTE É A QUE POSSUI OS ELEMENTOS DA DIAGONAL IGUAIS A UM. É CHAMADA DE MATRIZ IDENTIDADE $m \times m$.

# OPERAÇÕES COM MATRIZES.

## 1 SOMA.

SEJAM $A = (a_{ij})_{m \times n}$ E $B = (b_{ij})_{m \times n}$ MATRIZES DO MESMO TAMANHO. ENTÃO, A SOMA A+B É A MATRIZ C, $m \times n$ DADA POR:

$$A + B \quad C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

EXEMPLO 1. SE $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ E $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 6 & 4 - 3 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2. SE $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E $B = \begin{bmatrix} 2b & c \\ d & b \end{bmatrix}$

DETERMINE O VALOR DE $a + b + c + d$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 2b & c \\ d & b \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & 2 + c \\ d & 1 + b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -3 = 2 + c \\ d = 0 \\ 4 = 1 + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = -5} \quad \boxed{d = 0} \quad \boxed{b = 3}$$

E $a = 1 - 2b = 1 - 6 = -5$.

LOGO, $a + b + c + d = -5 + 3 - 5 + 0 = -7$

## PROPRIEDADES DA SOMA

CONSIDERE A, B E C MATRIZES DO MESMO TAMANHO $m \times n$.

- $S_1$. A SOMA É COMUTATIVA;

$$A + B = B + A$$

- $S_2$. A SOMA É ASSOCIATIVA;

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- $S_3$. EXISTE UM ELEMENTO NEUTRO DA SOMA PARA CADA TAMANHO $m \times n$ DE MATRIZ: $O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$

É A MATRIZ NULA $m \times n$.

$$A + O_{m \times n} = A$$ PARA QUALQUER MATRIZ $A_{m \times n}$.

- $S_4$. TODA MATRIZ $A_{m \times n}$ TEM INVERSO ADITIVO $-A$;

SE $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ É TAL QUE

$$A + (-A) = O_{m \times n}.$$

## ② MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ POR ESCALAR.

DADOS UM NÚMERO REAL $\alpha$ E UMA MATRIZ $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

EXEMPLO 3.

SE $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$3A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 12 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $-5A = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 0 \\ -20 & -25 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 3/2 & 0 \\ 2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR:

SEJAM $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ E A E B MATRIZES DO MESMO TAMANHO.

- $M.E_1$ : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $M.E_2$ : $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $M.E_3$ : $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

③ PRODUTO ENTRE MATRIZES.

SEJA $A = (a_{ij})_{m \times \boxed{p}}$ E $B = (b_{jk})_{\boxed{p} \times n}$

COLUNA LINHA

TAIS QUE A QUANTIDADE DE COLUNAS DE A SEJA IGUAL À QUANTIDADE DE LINHAS DE B. O PRODUTO $A \cdot B$ É UMA MATRIZ $C_{m \times n}$ DADA POR:

$$AB = C = (c_{ik})_{m \times m}, \text{ EM QUE}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{ip}b_{pk}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & & b_{2k} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & & b_{pk} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ & \boxed{c_{ik}} & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 4.

SE $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ E $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-3)(-1) & 2 + 10 - 3 & -3 + 2 + 0 & 1 + 2 + 3 \\ 3 + 16 + 0 & 6 + 20 + 0 & -9 + 4 + 0 & 3 + 4 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 9 & -1 & 6 \\ 19 & 26 & -5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

OBS.: NOTE QUE, NESTE EXEMPLO, O PRODUTO B · A NÃO ESTÁ DEFINIDO, PORQUE B TEM 4 COLUNAS E A TEM 2 LINHAS

EXEMPLO 5.

SE $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ E $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 22 & 5 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

NESTE CASO, $B \cdot A$ TAMBÉM ESTA DEFINIDA E

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 15 & -2 \\ -5 & -6 & -17 \\ 6 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

PORÉM, $AB \neq BA$.

Obs:. A MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES NÃO É COMUTATIVA; $AB \neq BA$, EM GERAL.

* PROPRIEDADES DO PRODUTO:

- $M_1$ - A MULTIPLICAÇÃO É ASSOCIATIVA;

$$(AB) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- $M_2$ - SOMENTE PARA AS MATRIZES QUADRADAS $m \times m$, EXISTE UM ELEMENTO NEUTRO DA MULTIPLICAÇÃO;

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}_{m \times m}$$ É TAL QUE, SE A É $m \times m$,

$$A\, I_m = I_m\, A = A$$

- $M_3$. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + B \cdot C$ ; A MULTIPLICAÇÃO SE DISTRIBUI NA SOMA.

A POTÊNCIA $p$ DE A, EM QUE $p \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

É DADA POR:

$$\boxed{A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{p\text{-vezes}}}$$ E $A^0 = I_m$, SE A É $m \times m$.

* AS POTÊNCIAS ESTÃO DEFINIDAS SOMENTE PARA MATRIZES QUADRADAS!

## (4) TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES.

SE $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$ A TRANSPOSTA

DE A, $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$ É OBTIDA TROCANDO-SE

AS LINHAS PELAS COLUNAS DA MATRIZ A

EXEMPLO 6.

SE $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

SE $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

PARA $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 18 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -11 \end{bmatrix}$, $C^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 18 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -11 \end{pmatrix}$.

SE UMA MATRIZ C É TAL QUE $C^t = C$, DIZEMOS QUE ESTA MATRIZ É SIMÉTRICA.

PROPRIEDADES DA TRANSPOSTA.

$T_1.$ $(A^t)^t = A$

$T_2.$ $(A+B)^t = A^t + B^t$

$T_3.$ $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

$T_4.$ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

DEMONSTRAÇÃO: VAMOS DENOTAR POR $[A \cdot B]_{ij}$ O ELEMENTO DA LINHA $i$ COLUNA $j$ DA MATRIZ $A \cdot B$.

TEMOS QUE:

$$[AB]^t_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} [A^t]_{kj} [B^t]_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} [B^t]_{ik} [A^t]_{kj}$$

$$= [B^t \cdot A^t]_{ij}$$