6

Dedução Natural

Sumário da Aula

6.1 Dedução Natural para a Lógica Proposicional

A **dedução natural** é um método de demonstração introduzido de forma independente pelos lógicos Gerhard Gentzen (1935) e Stanislaw Jaskowski (1934). Os sistemas de dedução natural são caracterizados por um conjunto de regras de inferência, projetadas em modelos de regras de introdução e eliminação de conectivos e quantificadores, que são combinadas para a construção de uma demonstração (ou prova).

O processo de **dedução natural**, comumente utilizado na lógica formal, estabelece de maneira rigorosa a validade dos argumentos derivando a **conclusão do argumento** a partir das **premissas do argumento**. O processo de construção de uma demonstração envolve encontrar um conjunto de premissas que seja suficiente para apoiar o que precisamos provar e elaborar uma cadeia de raciocínio que nos conduza a uma conclusão verdadeira.

Para verificar se o argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia deve-se impor que todas premissas sejam verdadeiras e, por meio da aplicação das regras de inferência, constatar que a conclusão também é verdadeira. As provas (demonstrações) podem ser realizadas fazendo uso de:

- **Árvores de dedução:** neste modelo as provas formam uma estrutura de árvore, onde as folhas representam as hipóteses, os ramos as regras de inferências e a raiz a conclusão. Possui seguinte formato:

Prova:

$$\frac{\textbf{Hipóteses e Provas}}{\textbf{Conclusão}}\{regra\}$$

- **Método linear:** neste modelo as linhas devem ser numeradas para facilitar a organização da demonstração e cada linha deve indicar a regra de inferência aplicada nesta etapa da prova. Assim, as primeiras linhas apresentam as premissas, as linhas intermediárias os passos de aplicação das regras de dedução que conduzem as premissas à conclusão, e, por fim, a última linha apresenta a conclusão. Possui o seguinte formato:

Prova:

Linhas	Fórmulas	Regra Usada
1.	P_1	hipótese 1
2.	P_2	hipótese 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	P_n	hipótese n
$n+1$.	fbf_1	fbf obtida aplicando-se uma regra de dedução
$n+2$.	fbf_2	fbf obtida aplicando-se uma regra de dedução
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m.	Q	conclusão obtida aplicando-se uma regra de dedução

Observação:

Independente da forma escolhida para fazer a demonstração, o sistema lógico deve conter apenas argumentos válidos e demonstráveis e, deve-se usar o menor número de regras de dedução possível.

6.2 Regras de Inferência

Os argumentos básicos são usados para estabelecer as **inferências**, que são relações que permitem passar das premissas para a conclusão. A palavra inferência vem do latim, *inferre*, e significa "conduzir para". As regras de inferência:

- **são usadas para executar os passos de uma demonstração transformando as fórmulas bem formadas;**

- **só devem ser aplicadas quando a fórmula estiver exatamente no formato descrito pela regra usada;**

- **preservam os valores lógicos das fórmulas bem formadas, permitindo gerar novas proposições verdadeiras a partir das proposições precedentes; e**

- **diferente das regras de equivalência, não funcionam em ambas as direções!**

O sistema de **Dedução Natural** é formado por regras básicas de inferência, que podem ser divididas em regras de eliminação e de introdução. As **regras de eliminação** mostram como **retirar os conectivos** para gerar as derivações e as **regras de introdução** como **introduzir os conectivos** lógicos nas derivações.

Regras para a identidade:

A **regra para identidade**, indicada na prova simbolicamente por $\{ID\}$, diz que se uma fórmula P faz parte de um conjunto de premissas, então pode-se concluir que ela é verdadeira. A regra se apresenta na forma:

$$\frac{P}{P}\ \{ID\} \qquad \textbf{ou} \qquad P \vdash P$$

Regras para a conjunção

- **Introdução da Conjunção:** indicada na prova simbolicamente por $\{\wedge I\}$, diz que dadas duas premissas verdadeiras, P e Q, deriva-se como conclusão a conjunção dessas premissas, ou seja, $P \wedge Q$ ou $Q \wedge P$. A regra se apresenta na forma:

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\ \{\wedge I\} \qquad \frac{P \quad Q}{Q \wedge P}\ \{\wedge I\} \qquad \textbf{ou} \qquad \begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline Q \wedge P \end{array}$$

  ou ainda, nas formas $P, Q \vdash P \wedge Q$ **ou** $P, Q \vdash Q \wedge P$.

  Exemplo 38. Sejam as fórmulas:

  a) $\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg r \\ \hline (p \vee q) \wedge \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ q \vee r \\ \hline (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array} \qquad \begin{array}{l} x < 10 \\ x > 3 \\ \hline (x > 3) \wedge (x < 10) \end{array}$

  b) Sou mineira. Sou brasileira. Portanto, sou mineira e brasileira.

- **Eliminação da Conjunção:** também conhecida por **regra da simplificação** é indicada na prova simbolicamente por $\{\wedge E\}$. Esta regra diz que se a conjunção $(P \wedge Q)$ é verdadeira, então P é verdadeira e Q é verdadeira. Logo, pode-se eliminar uma parte da fórmula (a parte mais à direita ou a parte mais à esquerda) e deduzir uma das proposições (P ou Q). A regra se apresenta na forma:

$$\frac{P \wedge Q}{P}\{\wedge Ee\} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\{\wedge Ed\}$$

ou ainda, nas formas $P \wedge Q \vdash P$ **ou** $P \wedge Q \vdash Q$.

Exemplo 39. Sejam as fórmulas:

a) $\dfrac{(p \vee q) \wedge r}{(p \vee q)}$ $\qquad \dfrac{(p \vee q) \wedge r}{r}$ $\qquad \dfrac{(p \wedge \neg q)}{p}$ $\qquad \dfrac{(p \wedge \neg q)}{\neg q}$ $\qquad \dfrac{x \in A \wedge x \in B}{x \in A}$

b) Sou mineira e brasileira. Logo, sou mineira.

Regras para a disjunção

- **Introdução da Disjunção:** também conhecida por **regra da adição** é indicada na prova simbolicamente por $\{\vee I\}$. Esta regra diz que caso uma dada proposição P seja verdadeira, então é possível deduzir uma disjunção com qualquer outra proposição que o resultado também será verdadeiro, ou seja, é possível inferir $P \vee Q$, $Q \vee P$, $R \vee P$, $P \vee S$, entre outros. A regra se apresenta na forma:

$$\frac{P}{P \vee Q}\{\vee I\} \qquad P \vdash P \vee Q$$

Observe que a proposição $P \rightarrow (P \vee Q)$ é uma tautologia e pode ser lida como: "se P é verdadeira, então $P \vee Q$ também é verdadeira" ou "de P concluímos $P \vee Q$".

Exemplo 40. Sejam as fórmulas:

a) $\dfrac{p}{p \vee q}$ $\qquad \dfrac{\neg p}{q \vee \neg p}$ $\qquad \dfrac{p \vee q}{(r \wedge s) \vee (p \vee q)}$ $\qquad \dfrac{p \wedge q}{(p \wedge q) \vee r}$

b) Sou mineira. Portanto, sou mineira ou paulista.

- **Eliminação da Disjunção:** ou **dilema**, indicada simbolicamente por $\{\vee E\}$, especifica o que podemos deduzir da disjunção $P \vee Q$ quando esta possui valor lógico verdadeiro.

  Sabe-se da tabela verdade da disjunção que se a fórmula $P \vee Q$ é verdadeira, não é possível afirmar com certeza que P e Q são ambas verdadeiras. Pode acontecer também de somente P ser verdadeira ou somente Q ser verdadeira.

  A **eliminação da disjunção** diz que se $P \vee Q$ é verdadeira e existem premissas $P \rightarrow R$ e $Q \rightarrow R$ também verdadeiras, então pode-se eliminar a disjunção e deduzir R. A regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ P \rightarrow R \\ Q \rightarrow R \\ \hline R \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{(P \vee Q) \quad (P \rightarrow R) \quad (Q \rightarrow R)}{R}\{\vee E\}$$

ou ainda, na forma $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \vdash R$.

Exemplo 41. Sejam as fórmulas:

a)
$$\begin{array}{l}
\text{x é par} \vee \text{y é par} \\
\text{x é par} \rightarrow \text{xy é par} \\
\text{y é par} \rightarrow \text{xy é par} \\
\hline
\text{xy é par}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
x > 0 \vee x < 0 \\
x > 0 \rightarrow x^2 > 0 \\
x < 0 \rightarrow x^2 > 0 \\
\hline
x^2 > 0
\end{array}$$

b) João é paulista ou mineiro. Se João é paulista, então é brasileiro. Se é João é mineiro, então é brasileiro. Logo, João é brasileiro.

Regras para a negação

As regras para negação equivalem as seguintes regras de substituições que são válidas na lógica formal: "**se a premissa P é verdadeira, então $\neg\neg P$ também é verdadeira**" e "**se $\neg\neg P$ é verdadeira, então P também é verdadeira**".

- **Introdução da negação:** simbolicamente indicada por $\{\neg I\}$, apresenta a forma:

$$\frac{P}{\neg\neg P}\ \{\neg I\} \qquad \textbf{ou} \qquad P \vdash \neg\neg P$$

- **Eliminação da negação:** simbolicamente indicada por $\{\neg E\}$, apresenta a forma:

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \{\neg E\} \qquad \textbf{ou} \qquad \neg\neg P \vdash P$$

Regras para a implicação

- **Eliminação da implicação:** também conhecida como ***Modus Ponens***, é indicada simbolicamente por $\{\rightarrow E\}$ ou $\{$Modus Ponens$\}$. Esta regra consiste na **resolução de implicações lógicas**.

  Da tabela verdade da condicional $P \rightarrow Q$, se P tem valor lógico verdadeiro, então Q também será verdadeira. **A regra *Modus Ponens*, ocorre quando sabe-se que as premissas $P \rightarrow Q$ e P são ambas verdadeiras.** Então, por consequência lógica, deduz-se que Q também é verdadeira. A regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{l} P \\ P \rightarrow Q \\ \hline Q \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q \qquad P}{Q}\ \{\rightarrow E\}$$

ou ainda, na forma $P, P \rightarrow Q \vdash Q$.

Exemplo 42. Sejam as fórmulas:

a)

$$\frac{\begin{array}{l}\neg p\\ \neg p \rightarrow \neg q\end{array}}{\neg q} \qquad \frac{\begin{array}{l}(p \wedge q) \rightarrow r\\ (p \wedge q)\end{array}}{r} \qquad \frac{\begin{array}{l}x > 0 \text{ e } y > 0 \rightarrow xy > 0\\ x > 0 \text{ e } y > 0\end{array}}{xy > 0}$$

b) Vou estudar para prova. Se estudo para a prova, então sou aprovada na disciplina. Logo, serei aprovada na disciplina.

c) Se chover, então fico em casa. Choveu. Então, fiquei em casa.

6.2.1 Regras Derivadas

As regras de introdução e eliminação dos conectivos $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$ nem sempre determinam as provas mais simples ou curtas. Para simplificar a tarefa de dedução, novas regras derivadas são obtidas a partir das regras anteriores.

Modus Tollens:

A regra *Modus Tollens*, assim como a regra *Modus Ponens*, consiste na resolução de implicações lógicas e é indicada simbolicamente por $\{\rightarrow E_{MT}\}$ ou {Modus Tollens}. A regra ocorre quando as proposições $P \rightarrow Q$ e a negação do consequente $\neg Q$ são verdadeiras. Logo, necessariamente a negação do antecedente ($\neg P$) também é verdadeira. A regra apresenta a forma:

$$\frac{\begin{array}{l}\neg Q\\ P \rightarrow Q\end{array}}{\neg P} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q \qquad \neg Q}{\neg P}\{\rightarrow E_{MT}\}$$

ou ainda, como $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$.

Exemplo 43. Sejam:

a)

$$\frac{\begin{array}{l}\neg s\\ p \wedge r \rightarrow s\end{array}}{\neg(p \wedge r)} \qquad \frac{\begin{array}{l}p \rightarrow (q \vee r)\\ \neg(q \vee r)\end{array}}{\neg p} \qquad \frac{\begin{array}{l}\text{x é par} \rightarrow x^2 \text{ é par}\\ x^2 \text{ é ímpar}\end{array}}{\text{x é ímpar.}}$$

b) Eu não estudei para a prova. Serei aprovada na disciplina, somente se estudar para a prova. Então, não serei aprovada na disciplina.

c) Se o fogo está aceso, então tem oxigênio. Não tem oxigênio. Então, o fogo não está aceso.

Observação:

De forma sucinta, a diferença entre as regras *Modus Ponens* e *Modus Tollens* é:

- **na regra *Modus Ponens* a implicação é usada para provar que a consequência é verdadeira ao verificar que a premissa é verdadeira.**
- **na regra *Modus Tollens* a implicação é usada para provar que a premissa é falsa ao verificar que a consequência é falsa.**

Silogismo Disjuntivo:

A regra **silogismo disjuntivo** – $\{SD\}$ – permite deduzir da disjunção de duas proposições $P \vee Q$ e da negação de uma delas $\neg P$ (ou $\neg Q$), a outra proposição Q (ou P). A regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \vee Q \qquad \neg P}{Q}\ \{SD\}$$

ou ainda, como $P \vee Q, \neg P \vdash Q$ **ou** $P \vee Q, \neg Q \vdash P$.

Exemplo 44. Sejam:

a)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee r \\ \neg r \\ \hline (p \wedge q) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg p \vee \neg q \\ \neg(\neg p) \\ \hline \neg q \end{array}$$

b) Sou cruzeirense ou atleticana. Não sou cruzeirense. Então, sou atleticana.

Silogismo Hipotético:

A regra **silogismo hipotético** – $\{SH\}$ – permite deduzir de duas premissas condicionais $P \to Q$ e $Q \to R$, tais que **o consequente da primeira premissa coincide com o antecedente da segunda**, uma terceira condicional $P \to R$, em que o antecedente e o consequente são respectivamente, o **antecedente da primeira e o consequente da segunda premissa**. A regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline P \to R \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \to Q \qquad Q \to R}{P \to R}\ \{SH\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$.

Exemplo 45. Sejam:

a)
$$\begin{array}{l} \neg p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \\ \hline \neg p \to \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \to q) \to r \\ r \to (q \wedge s) \\ \hline (p \to q) \to (q \wedge s) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 \in A \to 3 \subset A \\ 3 \subset A \to A \neq \emptyset \\ \hline 3 \in A \to A \neq \emptyset \end{array}$$

b) Se vou ao cinema, então assisto um filme. Se assisto um filme, então como pipoca. Portanto, se vou ao cinema eu como pipoca.

Regra da Absorção:

A **regra da absorção** – $\{RA\}$ – permite dada uma premissa condicional, deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente e cujo consequente é uma conjunção das proposições que compõem a premissa. A regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline P \to P \wedge Q \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \to Q}{P \to P \wedge Q}\ \{RA\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q \vdash P \to P \land Q$.

Exemplo 46. Sejam:

a) $\dfrac{p \to (q \land s)}{p \to p \land (q \land s)}$ $\qquad$ $\dfrac{x \in A \to x \in B}{x \in A \to x \in A \land x \in B}$

Dilema Construtivo:

A regra **Dilema Construtivo** – $\{DC\}$ – permite dadas duas premissas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, deduzir como conclusão a disjunção dos consequentes destes condicionais. Esta regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to S \\ P \lor R \\ \hline Q \lor S \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \dfrac{P \to Q \qquad R \to S \qquad P \lor R}{Q \lor S}\ \{DC\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q, R \to S, P \lor R \vdash Q \lor S$.

Exemplo 47. Sejam:

a) $\begin{array}{l} p \to (q \land s) \\ r \to \neg s \\ p \lor r \\ \hline (q \land s) \lor \neg s \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x > 0 \to x = 1 \\ x < 0 \to x = -1 \\ x > 0 \lor x < 0 \\ \hline x = 1 \lor x = -1 \end{array}$

Dilema Destrutivo:

O **Dilema Destrutivo** – $\{DD\}$ – permite dadas duas premissas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes, deduzir como conclusão a disjunção da negação dos antecedentes destes condicionais. Esta apresenta a forma:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to S \\ \neg Q \lor \neg S \\ \hline \neg P \lor \neg R \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \dfrac{P \to Q \qquad R \to S \qquad \neg Q \lor \neg S}{\neg P \lor \neg R}\ \{DD\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q, R \to S, \neg Q \lor \neg S \vdash \neg P \lor \neg R$

Exemplo 48. Sejam:

a) $\begin{array}{l} p \to (q \land s) \\ r \to \neg s \\ \neg(q \land s) \lor \neg s \\ \hline \neg p \lor \neg\neg r \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x + y = 6 \to y = 1 \\ x - y = 4 \to x = 5 \\ y \neq 1 \lor x \neq 5 \\ \hline x + 1 \neq 6 \lor x - y \neq 4 \end{array}$

Regra da Resolução:

A **regra da resolução** – $\{RR\}$ – permite dadas duas premissas disjuntivas $P \vee Q$ e $\neg P \vee R$, deduzir a disjunção $Q \vee R$. Esta regra apresenta a forma:

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \vee R \\ \hline Q \vee R \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{P \vee Q \qquad \neg P \vee R}{Q \vee R}\ \{RR\}$$

ou na forma $P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$.

Exemplo 49. Sejam:

a) $$\begin{array}{c} x > 0 \vee x < 10 \\ x \leq 0 \vee x > -3 \\ \hline x < 10 \vee x > -3 \end{array}$$

b) Está chovendo ou Ana está correndo. Não está chovendo ou José está feliz. Então, Ana está correndo ou José está feliz.

Regra da Contradição:

Definição 6.1 (Contradição)**.** A constante F $(\perp)$ é usada para identificar uma contradição:

$$P, \neg P \vdash \perp$$

A **regra da contradição**, indicada por $\{CTR\}$, permite deduzir qualquer fórmula a partir de uma dedução de falso. Esta regra apresenta a forma:

$$\frac{F}{P}\ \{CTR\} \qquad \textbf{ou} \qquad F \vdash P$$

6.2.2 Regras Hipotéticas

As regras seguintes diferem das demais por usarem um raciocínio hipotético, onde a prova de uma sentença é construída utilizando uma premissa adicional, que é descartada após a aplicação da regra. São chamadas de **premissas adicionais** quaisquer fórmulas bem formadas que são inseridas no processo de dedução, sem que sejam derivadas de outras fórmulas. Cada premissa adicional, assim como a regra que a introduziu, devem ser numeradas para facilitar a legibilidade das deduções.

Redução ao absurdo:

A regra da **Redução ao Absurdo** – $\{RRA\}$ – permite mostrar que se a suposição da falsidade de uma premissa $(P = F)$ leva logicamente a uma contradição (F), então podemos deduzir que esta premissa é verdadeira ($P = T$). Geralmente esta regra é usada quando nenhuma outra estratégia imediata tem sucesso. Possui a forma:

$$\begin{array}{c} [\neg P] \\ \vdots \\ F \\ \hline P \end{array}$$

A redução ao absurdo é uma regra bastante utilizada na matemática. De forma sucinta, para validar um argumento pode-se **introduzir a negação da conclusão** como **premissa adicional** e, a partir desta suposição, obter um resultado absurdo, ou seja, **deduzir uma contradição** ($Q \wedge \neg Q$). **Se a introdução da premissa adicional infere uma contradição, então ela pode ser descartada e deduz-se a sua negação.**

Prova por condicional:

A regra da prova por condicional (**introdução da** $\rightarrow$), indicada simbolicamente por $\{RPC\}$, diz que é possível deduzir um condicional $P \rightarrow Q$, dada uma premissa Q verdadeira e utilizando P como uma premissa adicional. Esta regra possui a forma:

$$\begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ [P]^1 \\ \hline P \rightarrow Q \end{array} \qquad \textbf{ou} \qquad \frac{Q \qquad [P]^1}{P \rightarrow Q}\ \{RPC\}^1$$

Regras de Inferência	Nomes
$P \vdash P$	$\{ID\}$
$P \vdash \neg\neg P$	$\{\neg I\}$
$\neg\neg P \vdash P$	$\{\neg E\}$
$P, Q \vdash P \wedge Q$ ou $P, Q \vdash Q \wedge P$	$\{\wedge I\}$
$P \wedge Q \vdash P$	$\{\wedge Ee\}$
$P \wedge Q \vdash Q$	$\{\wedge Ed\}$
$P \vdash P \vee Q$	$\{\vee I\}$
$P \vee Q, P \rightarrow T, Q \rightarrow T \vdash T$	$\{\vee E\}$
$F \vdash P$	$\{CTR\}$
$\frac{[\neg P] \vdash F}{P}$	$\{RRA\}$

Regras de Inferência	Nomes
$P \vee Q, \neg Q \vdash P$ ou $P \vee Q, \neg P \vdash Q$	$\{SD\}$
$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$	$\{SH\}$
$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S$	$\{DC\}$
$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S \vdash \neg P \vee \neg R$	$\{DD\}$
$P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow P \wedge Q$	$\{RA\}$
$P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$	$\{RR\}$
$P, \neg P \vdash F$	$\{\perp I\}$
$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	$\{\rightarrow E\}$ ou {Modus Ponens}
$\neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg P$	$\{\rightarrow E_{MT}\}$ ou {Modus Tollens}
$\frac{Q \quad [P]}{P \rightarrow Q}$	$\{RPC\}$

Figura 6.1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional.

6.3 Exercícios

E. 1. Indique a regra de inferência usada em cada uma dos argumentos.

a) Esta esfriando e chovendo agora. Portanto, esta esfriando agora.

b) Se chover, então não haverá festa da turma hoje. Se não houver festa da turma hoje, haverá amanhã. Portanto, se chover hoje, então haverá festa da turma amanhã.

c) Alice é graduada em matemática. Por isso, Alice é graduada em matemática ou em ciência da computação.

d) João é um estudante de matemática e ciência da computação. Por isso, João é um estudante de matemática.

e) Se o dia estiver chuvoso, então a piscina estará fechada. O dia está chuvoso. Então, a piscina esta fechada.

f) Se for paralisação hoje, a universidade estará fechada. A universidade não está fechada hoje. Então, não tem paralisação.

E. 2. Indique a regra de Inferência que justifica a validade dos argumentos abaixo:

a) $p \to q \vdash (p \to q) \vee \neg t$

b) $x > 0 \vee x = 0, x \neq 0 \vdash x > 0$

c) $x \neq 0, x + y > 4 \vdash x \neq 0 \wedge x + y > 4$

d) $p \to q, q \to \neg s \vdash p \to \neg s$

e) $(q \vee s) \to \neg p, \neg\neg p \vdash \neg(q \vee s)$

f) $(x, y \in \mathbb{R}) \to (x + y \in \mathbb{R}), (x, y \in \mathbb{R}) \vdash (x + y \in \mathbb{R})$

g) $p \to q, r \vdash p \to q \wedge r$

h) $x > 0 \vdash x > 0 \vee x^2 > 0$

i) $p \to q \vee s \vdash p \to p \wedge (q \vee s)$

j) $\neg p \wedge (q \to r) \vdash \neg p$

k) $a \to b, b \to (c \vee d) \vdash a \to (c \vee d)$

l) $x \in A \wedge x \in B \vdash x \in B$

E. 3. Deduza a conclusão dos conjuntos de argumentos abaixo e indique qual foi a regra de inferência usada.

a) $$\begin{array}{l} (x > y \wedge y > z) \to x > z \\ x > y \wedge y > z \\ \hline \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} (p \leftrightarrow q) \to \neg(r \wedge s) \\ \neg\neg(r \wedge s) \\ \hline \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} \neg p \wedge \neg q \\ \neg\neg q \\ \hline \end{array}$$

d) $$\frac{\begin{array}{l} xy = 6 \to xy - 4 = 2 \\ xy - 4 = 2 \to x = 2 \end{array}}{}$$

e) $$\frac{\begin{array}{l} x = 2 \to y = 4 \\ x = 3 \to y = 9 \\ y \neq 4 \vee y \neq 9 \end{array}}{}$$

f) $$\frac{\begin{array}{l} x = 2 \to x^2 = 4 \\ x = 2 \vee y = 3 \\ y = 3 \to y^2 = 9 \end{array}}{}$$