

Mathe 9. P1. Nathann Zini dos Reis 19.2.2024

Questão 4. $f(n) = \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = 3f(n-1) + 1, n \geq 2 \end{cases}$

Encontre uma fórmula fechada equivalente para $f(n)$.

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	4	13	40	121
$3^n - 1$	2	8	26	80	242
$\frac{1}{2}(3^n - 1)$	1	4	13	40	121

Provar que $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ é equivalente à recursividade

Indução forte:

① Base base: $n=1$, tem que $f(1) = \frac{1}{2}(3^1 - 1) = 1$, logo, $P(1)$ é verdadeira

② Hipótese Indutiva: Suponha um $k \in \mathbb{N}^+$ e que $f(k) = \frac{1}{2}(3^k - 1)$

③ Passo Indutivo: Provar que $f(k+1) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$
 $f(k+1) = 3f(k) + 1$, pelo definido de $f(n)$.
 $= 3f(k) + 1$
 $= 3\left(\frac{1}{2}(3^k - 1)\right) + 1$
 $= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 1$
 $= \frac{3(3^k - 1) + 2}{2}$ Provarando $f(k+1)$
 $= \frac{3^k - 3 + 2}{2} = \frac{(3^k - 1) \cdot 3}{2}$