4

Eliminação de Gauss

Sumário da Aula

4.1 Definições

Definição 4.1. Matrizes Equivalentes: duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível partir de uma delas e chegar à outra por meio de um número finito de transformações elementares.

Definição 4.2. Sistemas Equivalentes: dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Considere $[A|\ B]$ a matriz aumentada de um sistema de equações $Ax = B$, tal que o determinante de A é não nulo, e $[T|\ C]$ uma matriz equivalente a ela. Então, os sistemas de equações $Ax = B$ e $Tx = C$ são equivalentes e, portanto, possuem a mesma solução.

Definição 4.3. Transformações Elementares: as transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz. No que se refere à resolução de sistemas de equações lineares, estas transformações são, normalmente, aplicadas apenas sobre as linhas da matriz dos coeficientes ou da matriz aumentada dependendo do método utilizado. São três tipos de operações:

(i) multiplicação de uma linha por uma constante não-nula:

$$l_i \leftarrow \alpha \times l_i,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,\ i = 1, 2, ..., n$$

(ii) troca de posição entre duas linhas:

$$l_i \leftrightarrows l_j;\ i, j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j$$

(iii) adição de um múltiplo de uma linha a outra linha:

$$L_i \leftarrow l_i + \beta \times l_j,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0,\ i, j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j$$

Observação

Da Álgebra Linear sabe-se que as operações elementares não alteram a solução do sistema linear, uma vez que uma operação elementar sobre uma linha equivale a uma operação sobre a respectiva equação.

4.2 Método de Eliminação de Gauss

O Método da Eliminação de Gauss é um dos mais conhecidos e utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares densos de pequeno a médio porte. A ideia fundamental do método é transformar o sistema linear $Ax = B$, por meio das transformações elementares em matrizes, em um sistema equivalente triangular superior $Ux = D$. Está dividido em duas fases:

- **Fase de Eliminação:** consiste em efetuar transformações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema de equações $Ax = B$ até que, depois de $(n-1)$ passos, se obtenha um sistema triangular superior equivalente $Ux = D$.
- **Fase de Substituição:** consiste em resolver o sistema triangular superior, $Ux = D$, por meio do algoritmo de **substituições retroativas**.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]}_{[A \mid B]} \xrightarrow{Transf.\ Elemen.} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & d_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & d_n \end{array}\right]}_{[U \mid D]}$$

4.2.1 Descrição do Algoritmo

Para a descrição do método, considere o sistema linear $Ax = B$ de ordem n, onde a matriz A tem todas as submatrizes principais não singulares, ou seja, $det(A_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$. Dados $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ e $b_i^{(1)} = b_i$, a matriz aumentada do sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ & & & \cdots & & | & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Fase de Eliminação:

Para transformar o sistema $Ax = B$ em um sistema triangular superior $Ux = D$ são necessários $(n-1)$ passos.

Passo 1 - Eliminação na primeira coluna: neste passo, devem ser zerados todos os elementos da primeira coluna que estão abaixo da diagonal principal, ou seja, eliminação da incógnita x_1 das linhas $2, 3, \cdots, n$.

- **Determinação do pivô: "suponha"** $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
- **Cálculo de multiplicadores para cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad 2 < i < n$$

- **Eliminação da incógnita x_1 nas linhas $2, 3, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i1}^{(1)} L_1, \quad 2 < i < n$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo 1:**

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & | & b_3^{(2)} \\ & & & \ddots & & | & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & | & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

Passo 2 - Eliminação na segunda coluna: neste passo, devem ser zerados todos os elementos da segunda coluna que estão abaixo da diagonal principal, ou seja, eliminação da incógnita x_2 das linhas $3, 4, \cdots, n$.

- **Determinação do pivô: "suponha"** $a_{22}^{(2)} \neq 0$.
- **Cálculo de multiplicadores para cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{i2}^{(2)} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad 3 < i < n$$

- **Eliminação da incógnita x_2 nas linhas $3, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{i2}^{(2)} L_2, \quad 3 < i < n$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo 2:**

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & & | & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & | & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

e assim, sucessivamente, até chegar ao **Passo (n-1)**.

Passo (n-1): Eliminação na coluna (n-1) neste passo, deve ser zerado o elemento da coluna (n-1) que está abaixo da diagonal principal, ou seja, eliminação da incógnita x_{n-1} da linha n.

- **Determinação do pivô: "suponha"** $a_{n-1n-1}^{(n-1)} \neq 0$.
- **Cálculo do multiplicador para o termo abaixo do pivô:**

$$m_{nn-1}^{(n-1)} = \frac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{n-1n-1}^{(n-1)}}$$

- **Eliminação da incógnita x_{n-1} na linha n:** aplica-se a seguinte operação elementar

$$L_n \leftarrow L_n - m_{nn-1}^{(n-1)} L_{n-1}$$

- **Matriz aumentada resultante do Passo (n-1):**

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ 0 & & & \ddots & & & | & \\ 0 & 0 & 0 & & a_{1n-1}^{(n-1)} & a_{nn}^{(n-1)} & | & b_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

De modo geral, o **Passo k** do método de Eliminação de Gauss é obtido por:

- **Determinação do Pivô: "suponha"** $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- **Cálculo de multiplicadores para cada termo que será zerado (elementos abaixo do pivô):**

$$m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k+1 < i < n.$$

- **Eliminação da incógnita x_k nas linhas $k+1, \cdots, n$:** aplicam-se as operações elementares

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik}^{(k)} L_k, \quad k+1 < i < n.$$

- **Obtenção da matriz aumentada resultante do Passo k.**

Fase de Substituição:

O sistema triangular superior resultante:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n-1}^{(n-1)} & a_{nn}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema linear original e, portanto, os sistemas possuem a mesma solução. Assim, nesta fase o sistema triangular superior resultante deverá ser resolvido por meio de **substituições retroativas** (Algoritmo 2).

Observação:

No algoritmo de eliminação de Gauss é necessário que o pivô seja um elemento não nulo, ou seja, $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Se no processo de eliminação um dos pivôs se anular ($a_{kk}^{(k)} = 0$), deve-se efetuar a troca da linha k por outra linha que esteja abaixo dela, de modo que o novo candidato a pivô seja um elemento não nulo. Assim, para dar continuidade ao método deve-se trocar a linha k por qualquer linha r, em que $k < r \leq n$, de tal forma que o novo $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Exemplo 8. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ 9x_1 & +8x_2 & -8x_3 & = 6 \\ -6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 0 \end{cases}$$

utilizando método de eliminação de Gauss. Efetue os cálculos retendo quatro casas decimais.

Solução: Seja a matriz aumentada do sistema linear é $[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & | & 3 \\ 9 & 8 & -8 & | & 6 \\ -6 & 4 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}$. Aplicando a etapa de eliminação de Gauss, tem-se:

Passo 1 - Eliminação na primeira coluna: dado que $a_{11}^{(1)} \neq 0$:

- **Pivô:** $a_{11}^{(1)} = 3$
- **Cálculo dos multiplicadores:** $$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3 \qquad m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$$
- **Eliminação da incógnita x_1 nas linhas 2 e 3:** operações elementares $\begin{matrix} L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)} \\ L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - (-2)L_1^{(1)} \end{matrix}$
- **Matriz aumentada resultante:** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 8 & -3 & | & 6 \end{bmatrix}$

Passo 2 - Eliminação na segunda coluna: dado que $a_{22}^{(2)} \neq 0$,logo:

- **Pivô:** $a_{22}^{(2)} = 2$
- **Cálculo de multiplicadores:** $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{8}{2} = 4$
- **Eliminação da incógnita x_2 na linha 3:** operação elementar $L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$
- **Matriz aumentada resultante:** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & -7 & | & 18 \end{bmatrix}$

Da etapa de eliminação, obtém-se o seguinte sistema triangular equivalente ao sistema linear original:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 3 \\ & 2x_2 & +x_3 & = -3 \\ & & -7x_3 & = 18 \end{cases}$$

que, resolvido por substituições retroativas, tem-se:

$$x_3 = \frac{d_3}{u_{33}} = \frac{18}{-7} = -2,5714$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3)}{u_{22}} = \frac{-3 - [(1)(-2,5714)]}{2} = -0,2143$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)}{u_{11}} = \frac{3 - [(2)(-0,2143) + (-3)(-2,5714)]}{3} = -1,4285$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} -1,4285 & -0,2143 & -2,5714 \end{bmatrix}^t$.

Exemplo 9. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 3 \\ 9x_1 & +8x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 6 \\ -6x_1 & +4x_2 & -8x_3 & & = -16 \\ 3x_1 & -8x_2 & +3x_3 & -8x_4 & = 22 \end{cases}$$

utilizando método de eliminação de Gauss. Efetue os cálculos retendo, quando for o caso, quatro casas decimais.

Solução: Este sistema será resolvido utilizando uma tabela (ou **dispositivo prático**) para sumarizar os cálculos.

Linhas	Multiplicadores	Coeficientes				T. indep.	Operações
$L_1^{(1)}$	pivô ($a_{11} \neq 0$)	**3**	**2**	**0**	**1**	**3**	
$L_2^{(1)}$	$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{9}{3} = 3$	9	8	-3	4	6	
$L_3^{(1)}$	$m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{-6}{3} = -2$	-6	4	-8	0	-16	
$L_4^{(1)}$	$m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{3} = 1$	3	-8	3	-8	22	
$L_2^{(2)}$	pivô ($a_{22} \neq 0$)	**0**	**2**	**-3**	**1**	**-3**	$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 3L_1^{(1)}$
$L_3^{(2)}$	$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{8}{2} = 4$	0	8	-8	2	-10	$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} + 2L_1^{(1)}$
$L_4^{(2)}$	$m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-10}{2} = -5$	0	-10	3	-9	19	$L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - L_1^{(1)}$
$L_3^{(3)}$	pivô ($a_{33} \neq 0$)	**0**	**0**	**4**	**-2**	**2**	$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 4L_2^{(2)}$
$L_4^{(3)}$	$m_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{-12}{4} = -3$	0	0	-12	-4	4	$L_4^{(3)} = L_4^{(2)} + 5L_2^{(2)}$
$L_4^{(4)}$		**0**	**0**	**0**	**-10**	**10**	$L_4^{(4)} = L_4^{(3)} + 3L_3^{(3)}$

Tabela 4.1: Dispositivo prático com a sumarização dos cálculos da etapa de eliminação.

O sistema triangular resultante da etapa de eliminação, que encontra-se em destaque no dispositivo prático (Tabela 4.1) é:

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 3 \\ & 2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = -3 \\ & & 4x_3 & -2x_4 & = 2 \\ & & & -10x_4 & = 10 \end{cases}$$

Aplicando o algoritmo de substituições retroativas, tem-se:

$$x_4 = \frac{d_4}{u_{44}} = \frac{10}{-10} = -1$$

$$x_3 = \frac{d_3 - u_{34}x_3}{u_{33}} = \frac{2 - (-2)(1)}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{d_2 - (u_{23}x_3 + u_{24}x_4)}{u_{22}} = \frac{-3 - [(-3)(0) + (1)(-1)]}{2} = -1$$

$$x_1 = \frac{d_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4)}{u_{11}} = \frac{3 - [(2)(-1) + (0)(0) + (1)(-1)]}{3} = 2$$

Portanto, a solução do sistema linear original é $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^t$.

4.2.2 Avaliação do Resíduo

O **resíduo** (**erro**) produzido pela solução do sistema $Ax = B$ pode ser avaliado pela expressão:

$$\xi = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|$$

onde r_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ é a i-ésima componente do vetor resíduo R, calculado por:

$$R = B - Ax$$

Exemplo 10. Resolva o sistema linear utilizando o método de eliminação de Gauss e retendo nos cálculos três casas decimais.

$$\begin{cases} 4,5x_1 & +1,8x_2 & +2,4x_3 & = 19,62 \\ 3x_1 & +5,2x_2 & +1,2x_3 & = 12,36 \\ 0,8x_1 & +2,4x_2 & +3,6x_3 & = 9,2 \end{cases}$$

Solução: os cálculos da etapa de eliminação estão apresentados na tabela abaixo:

Linhas	Multiplicadores	Coeficientes			T. indep.	Operações
$L_1^{(1)}$		**4,5**	1,8	2,4	19,62	
$L_2^{(1)}$	$m_{21} = \frac{3}{4,5} = 0,667$	3,0	5,2	1,2	12,36	
$L_3^{(1)}$	$m_{31} = \frac{0,8}{4,5} = 0,178$	0,8	2,4	3,6	9,2	
$L_2^{(2)}$		0	**3,999**	-0,401	-0,727	$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - 0,667L_1^{(1)}$
$L_3^{(2)}$	$m_{32} = \frac{2,080}{3,999} = 0,52$	0	2,080	3,173	5,708	$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 0,178L_1^{(1)}$
$L_3^{(3)}$		0	0	**3,382**	6,086	$L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - 0,520L_2^{(2)}$

Observação:

Quando aplicada a transformação elementar para a eliminação do termo na posição linha dois coluna um (termo a_{21}), o cálculo realizado ($3,0 + (-0,667) \times (4,5)$) produz o resultado ($-0,0015$) que, considerando três casas decimais, vai a ($-0,002$) e não 0, como desejado. Este reflexo na eliminação foi causado pelo erro de arredondamento gerado no cálculo do multiplicador m_{21}. Como, no final terá utilidade apenas a parte triangular superior da matriz dos coeficientes, então, nas posições nas quais devem ocorrer a eliminação, os cálculos podem "deixar de serem feitos". Este procedimento é interessante porque reduz o esforço computacional.

O sistema triangular superior resultante da etapa de eliminação é:

$$\begin{cases} 4,5x_1 & +1,8x_2 & +2,4x_3 & = 19,62 \\ & 3,999x_2 & -0,401x_3 & = -0,727 \\ & & 3,382x_3 & = 6,086 \end{cases}$$

que, aplicando o algoritmo de substituições retroativas no sistema linear acima, resulta na seguinte solução $x = \begin{bmatrix} 3,400 & -0,001 & 1,800 \end{bmatrix}^t$. O resíduo, calculado pela expressão $R = B - Ax$, é:

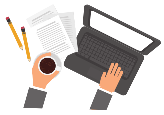
$$R = \begin{bmatrix} 19,62 \\ 12,36 \\ 9,20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,5 & 1,8 & 2,4 \\ 3,0 & 5,2 & 1,2 \\ 0,8 & 2,4 & 3,6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3,400 \\ -0,001 \\ 1,800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0052 \\ 0,0024 \end{bmatrix}$$

e o erro cometido:

$$\xi = \max_{1 \le i \le n} |r_i| = \max_{1 \le i \le 3} \{|0,0018|, |0,0052|, |0,0024|\} = 0,0052.$$

Portanto, a solução do sistema linear é $x = \begin{bmatrix} 3,400 & -0,001 & 1,800 \end{bmatrix}^t$ com erro $\xi = 0,0052$.

4.3 Exercícios



E. 1. Resolva o sistema linear pelo método de eliminação de Gauss retendo nos cálculos quatro casas decimais.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

E. 2. Resolva os sistemas lineares pelo método de Eliminação de Gauss. O que é possível afirmar em relação a quantidade de soluções desses sistemas?

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$