Aula 03- Sistemas lineares

terça-feira, 1 de junho de 2021 08:25

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

UMA EQUAÇÃO LINEAR COM m INCÓGNITAS $x_1, x_2, \dots, x_m$ É DA FORMA

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = b$$

EM QUE $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ SÃO CHAMADOS DE COEFICIENTES E $b \in \mathbb{R}$ É O TERMO INDEPENDENTE.

Equação:

- $2x^2 + 3 = 7$
- $5x + 2^x = 3$
- $\operatorname{sen}(x) - 5 = 2$
- $3x - 2y + z^3 = 3$

$\rightarrow 2x + 4y - 3z = 19$

UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES É UM CONJUNTO DE EQUAÇÕES DA FORMA

$$* \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2m} x_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mm} x_m = b_m \end{cases}$$

EM QUE $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ E

$b_i \in \mathbb{R}$ PARA $1 \leq i \leq m$.

Exemplo 1.

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 4 \\ x - y = 6 \\ -x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$$

PODEMOS REESCREVER ESTE SISTEMA NA FORMA MATRICIAL

$$AX = B, \quad \text{EM QUE}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

É A MATRIZ DOS COEFICIENTES.

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1

$$\underset{3\times 3}{A} \cdot X = \underset{3\times 1}{B}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 3x - 3y + 2z \\ x - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \\ -x + 3y - 2z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 7 \end{array}\right)$$

3×1

Exemplo 2. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 2 & (-3) \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow * \begin{cases} -3x - 9y = -6 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$-8y = -6$

$y = 6/8 = 3/4$

$$* \begin{cases} 0 - 8y = -6 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3/4 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$x + 3\left(\frac{3}{4}\right) = 2$

$x + \frac{9}{4} = 2$

$x = 2 - \frac{9}{4} = \frac{8-9}{4} = -\frac{1}{4}$

$3x + \frac{3}{4} = 0$

$x = -1/4$

Solução : $\begin{cases} x = -1/4 \\ y = 3/4 \end{cases}$

Usando a notação matricial:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

* Considere a matriz $[A \,\vdots\, B]$ MATRIZ AUMENTADA.

$$* \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} -3L_1 \\ L_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -9 & -6 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} -3L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -8 & -6 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} -8y = -6 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \quad \ldots$$

O MÉTODO USANDO A NOTAÇÃO MATRICIAL É UMA ESPÉCIE DE ORGANIZAÇÃO DO MÉTODO DA ADIÇÃO. VAMOS USÁ-LO PARA AMPLIAR ESTE RACIOCÍNIO PARA SISTEMAS MAIORES.

PARA ISSO FAREMOS ALGUMAS DEFINIÇÕES.

AS SEGUINTES OPERAÇÕES SÃO CHAMADAS DE OPERAÇÕES ELEMENTARES:

i) TROCAR 2 OU MAIS EQUAÇÕES (LINHAS DA MATRIZ) DE POSIÇÃO.

ii) MULTIPLICAR UMA EQUAÇÃO (LINHA DA MATRIZ) POR UMA CONSTANTE (ESCALAR)

iii) SOMAR DUAS EQUAÇÕES.

CONSIDERE O SISTEMA $AX = B$ ESCRITO NA FORMA MATRICIAL.

A MATRIZ $[A \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ É CHAMADA DE MATRIZ AUMENTADA

TEOREMA 1: SE DOIS SISTEMAS LINEARES $AX = B$ E $CX = D$ SÃO TAIS QUE A MATRIZ AUMENTADA $[C \vdots D]$ PODE SER OBTIDA DE $[A \vdots B]$ POR OPERAÇÕES ELEMENTARES, ESTÃO OS DOIS SISTEMAS POSSUEM A MESMA SOLUÇÃO.

DOIS SISTEMAS QUE POSSUEM O MESMO CONJUNTO SOLUÇÃO SÃO DITOS EQUIVALENTES.

* DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ESTÁ NA FORMA ESCALONADA REDUZIDA SE

A) TODAS AS LINHAS NULAS (QUANDO EXISTEM) ESTÃO ABAIXO DAS LINHAS NÃO NULAS.

B) O PRIMEIRO ELEMENTO NÃO NULO DE CADA LINHA NÃO NULA É IGUAL A 1. ESTE ELEMENTO É CHAMADO DE PIVÔ DA LINHA

C) O PIVÔ DA LINHA $i+1$ OCORRE A DIREITA DO PIVÔ DA LINHA i, PARA $i = 1, 2, \ldots, m-1$

D) SE UMA COLUNA CONTÉM UM PIVÔ, ENTÃO TODOS OS SEUS OUTROS ELEMENTOS SÃO IGUAIS A ZERO.

SE UMA MATRIZ SATISFAZ (A) E (C) E NÃO NECESSARIAMENTE (B) E (D), DIZEMOS QUE ELA ESTÁ NA FORMA ESCALONADA

EXEMPLO 3.

AS MATRIZES A SEGUIR SÃO ESCALONADAS REDUZIDAS

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QUALQUER MATRIZ IDENTIDADE I_n É ESCALONADA REDUZIDA.

Matrizes escalonadas

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O método de Gauss (Jordan)

* Considere o sistema

$$\begin{cases} 5x + 5y = 15 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

MATRIZ AUMENTADA:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{c} \frac{L_1}{5} \\ L_2 \\ L_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\Rightarrow
\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{array}$$

Exemplo 4.

$$\begin{cases} x - y + 2z + w = 2 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + z - w = 11 \\ x + 5w = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ \end{array}\right]
\Rightarrow
\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 12 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 4L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -20 & -38 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & -26 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3/3 \\ L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -20/3 & -38/3 \\ 0 & 0 & 3 & -13 & -26 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_3 \\ L_4 - 3L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -28/3 & -46/3 \\ 0 & 0 & 1 & -20/3 & -38/3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 12 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4/7 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -28/3 & -46/3 \\ 0 & 0 & 1 & -20/3 & -38/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12/7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 - 5L_4 \\ L_2 + \frac{28}{3}L_4 \\ L_3 + \frac{20}{3}L_4 \\ L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 24/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -26/21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12/7 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 24/7 \\ y = 2/3 \\ z = -26/21 \\ w = 12/7 \end{cases}$$

Exemplo 5.

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ y + 5z = 2 \\ -2y + 10z = -8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$x - 2z = 3$$

$$y + 5z = 2$$

$$0 = -4 \quad !!!$$ Contradição.

Não tem solução.

6) $$\begin{cases} 3z - 9w = 6 \\ 5x + 15y - 10z + 40w = -45 \\ x + 3y - z + 5w = -7 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2/5 \\ \dfrac{L_3 \leftrightarrow L_1}{3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ -(L_2 - L_1) \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & +1 & -3 & +2 \\ 0 & 0 & +1 & -3 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 3\overset{\beta}{y} + 2\underline{w} = -5 \\ \qquad z - 3w = 2 \end{cases}$$

se $w = \alpha \in \mathbb{R}$

$z = 2 + 3\alpha$

e se $y = \beta \in \mathbb{R}$

$x = -5 - 3\beta - 2\alpha$

$$S: \begin{cases} x = -5 - 3\beta - 2\alpha \\ y = \beta \\ z = 2 + 3\alpha \\ w = \alpha \end{cases}$$

Infinitas soluções.

SE $\omega = \alpha \in \mathbb{R}$,

$z = 2 + 3\alpha$. E SE $y = \beta$,

$x = -5 - 3\beta - 2\alpha$

ASSIM, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} x = -5 - 3\beta - 2\alpha \\ y = \beta \\ z = 2 + 3\alpha \\ \omega = \alpha \end{bmatrix}$ FORMA O CONJUNTO DE SOLUÇÕES.

PORTANTO ESTE SISTEMA TEM INFINITAS SOLUÇÕES.

UM SISTEMA LINEAR $AX = B$ PODE

* TER SOLUÇÃO ÚNICA
* NÃO TER SOLUÇÃO
* TER INFINITAS SOLUÇÕES.