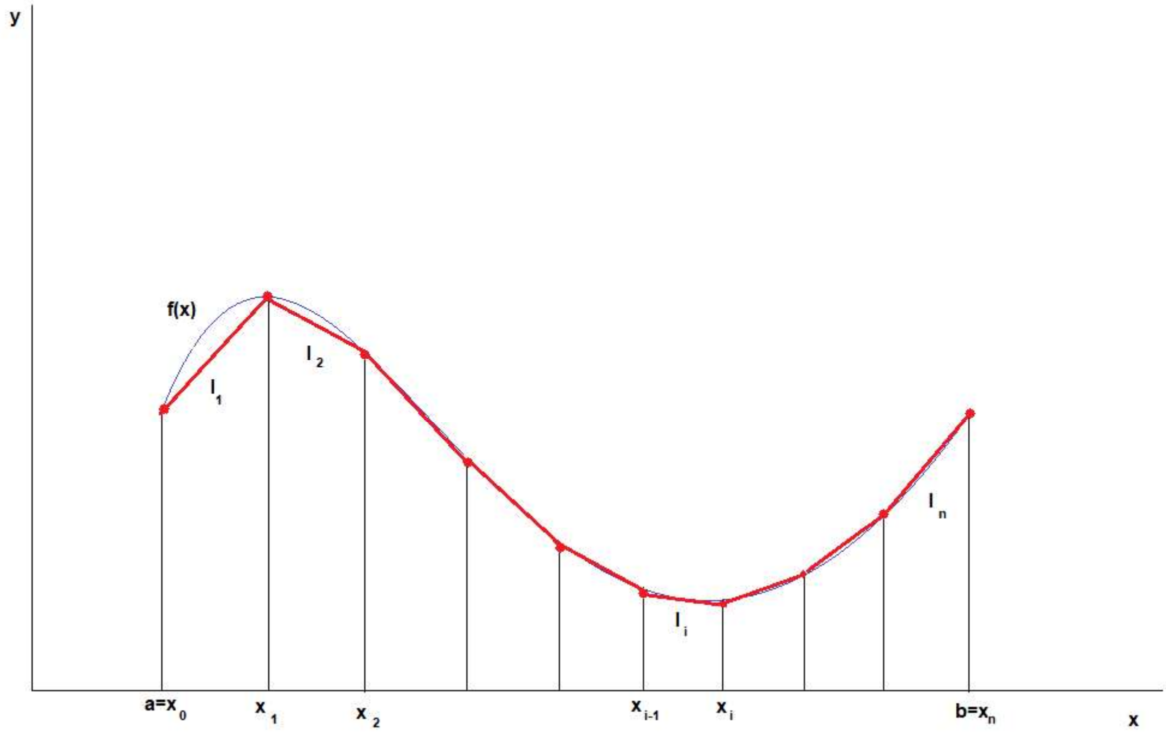
1.5 AULA 6- Comprimento de Curva

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a,b), com derivada contínua. Considere uma partição do intervalo $[a,b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideramos o segmento que une os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. É claro que cada segmento tem comprimento l_i dado por $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$



Pelo teorema do valor médio temos que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

para algum $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Assim,

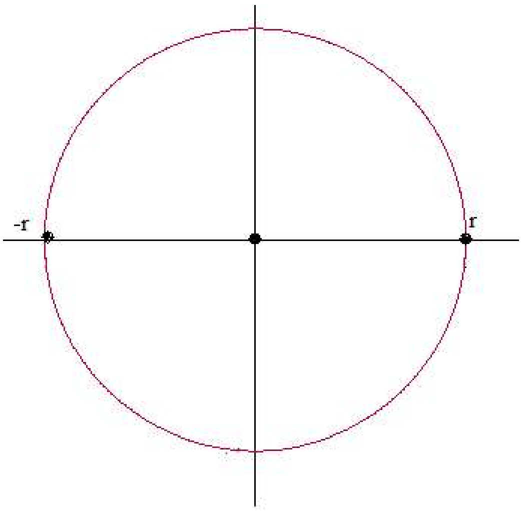
$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i))^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i$$

Agora somando todos os comprimentos l_i com $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ e tomando o limite quando n tende ao infinito, podemos definir o comprimento da curva $y = f(x)$ por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Exemplo 12. *Encontre o comprimento da circunferência de raio r.*

SOLUÇÃO: A equação $x^2+y^2=r^2$ descreve uma circunferência



de raio r e centro na origem. Calcularemos o comprimento da semicircunferência e multiplicaremos por 2. Considerando a semicircunferência superior $y=\sqrt{r^2-x^2}$, temos que $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} L = 2\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx \\ &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx \\ &= 2\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \end{aligned}$$

Fazendo $x = rsen(\theta)$, temos que $\dfrac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ e

$$\begin{aligned}
L = 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx &= 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 cos(\theta)}{rcos(\theta)} d\theta \\
&= 2r\theta\Big|_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= 2r\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi r
\end{aligned}$$

Exemplo 13. *Calcule o comprimento de arco da curva $y = ln(cos(x))$ no intervalo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.*

Solução:

Como $y = ln(cos(x))$, então $y' = -tg(x)$. Portanto, o comprimento de arco será:

$$\begin{aligned}
L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (-tg(x))^2}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{sec(x))^2}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\, dx \\
&= ln(sec(x) + tg(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= ln(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

Exercício 13. *Calcule o comprimento da curva* $y = x^{\frac{3}{2}}$ *no intervalo* $[0,4]$.

Exercício 14. *Calcule o comprimento do segmento de parábola de* $y = x^2$.