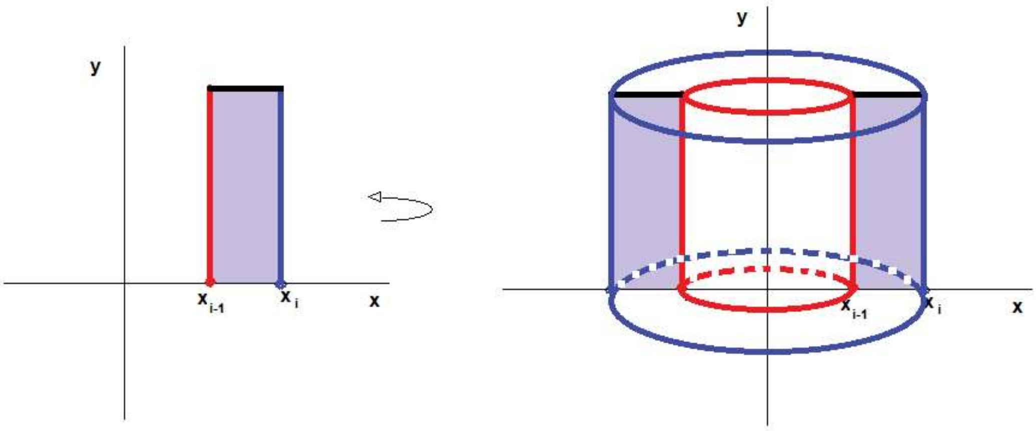
1.4 AULA 5- Método das Cascas Cilíndricas

Algumas vezes calcular o volume de um sólido de revolução pelos métodos aprendidos anteriormente neste texto pode ser uma tarefa nada fácil. Em muitos desses casos esse tarefa se torna menos árdua ao utilizarmos o método das cascas cilíndricas que descrevemos abaixo.

HEURÍSTICA DA FÓRMULA

Considere um retângulo de altura h e base $b = x_i - x_{i-1}$. Ao girarmos este retângulo em torno do eixo Oy obtemos uma casca cilíndrica C_i. (Veja figura).



O volume dessa casca é dada por:

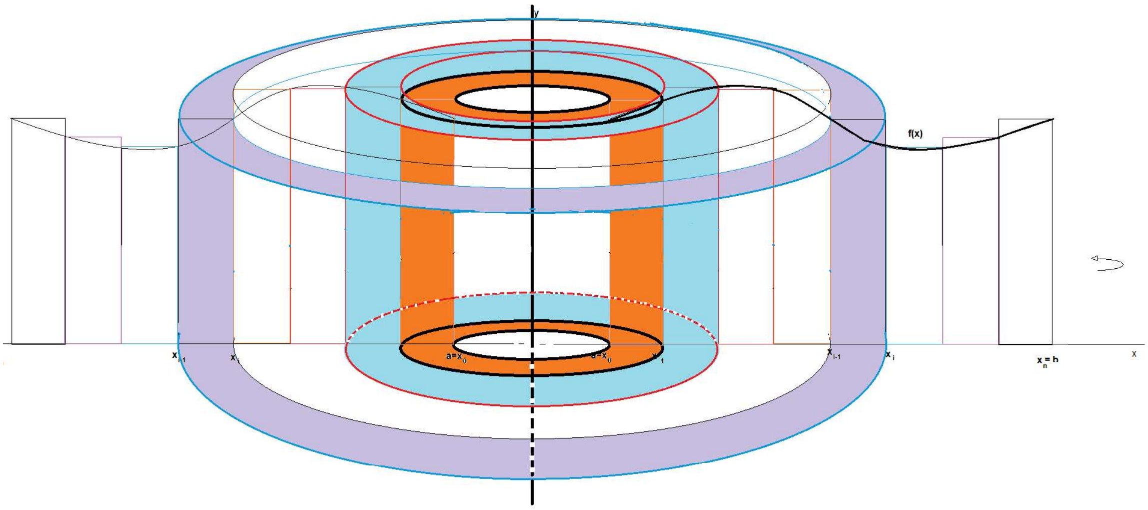
$$V_i = \pi x_i^2 h - \pi x_{i-1}^2 h = \pi h(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Nomeando por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\bar{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ temos que:

$$V_i = 2\pi h \bar{x}_i \Delta x_i$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0 \, \forall \, x \in [a,b]$, $a \geq 0$. Considere $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a,b]$. Cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ao ser girado em torno do eixo Oy, produz uma casca cilíndrica de volume $V_i = 2\pi h \bar{x}_i \Delta x_i$. Observe que a altura da casca é dada pelo valor da função em um ponto do intervalo, digamos $h = f(x_i)$. Assim, o volume de cada casca será:

$$V_i = 2\pi f(x_i)\bar{x}_i \Delta x_i$$



A soma dos volumes das cascas cilíndricas é uma soma de Riemann. Logo, o limite dessa soma resulta em:

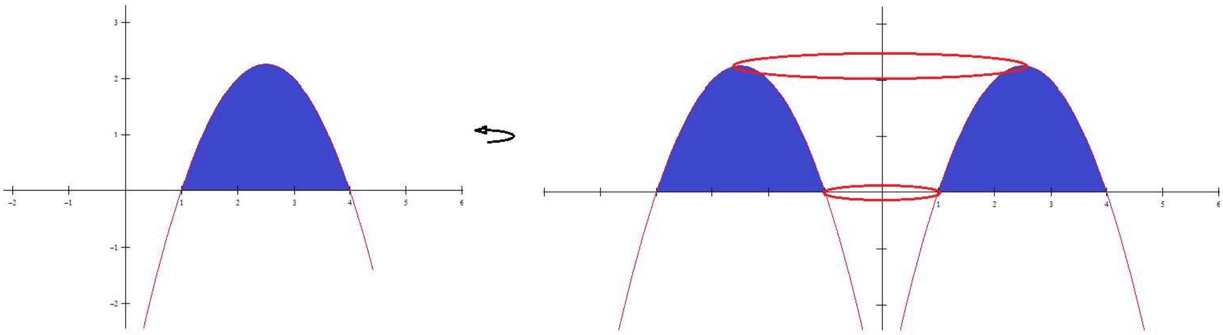
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Exemplo 10. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Oy, da região limitada pelo eixo Ox e pela parábola $y = -x^2 + 5x - 4$.*

SOLUÇÃO: Utilizando cascas cilíndricas temos que cada casca típica terá altura $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ e raio médio $r = x$.

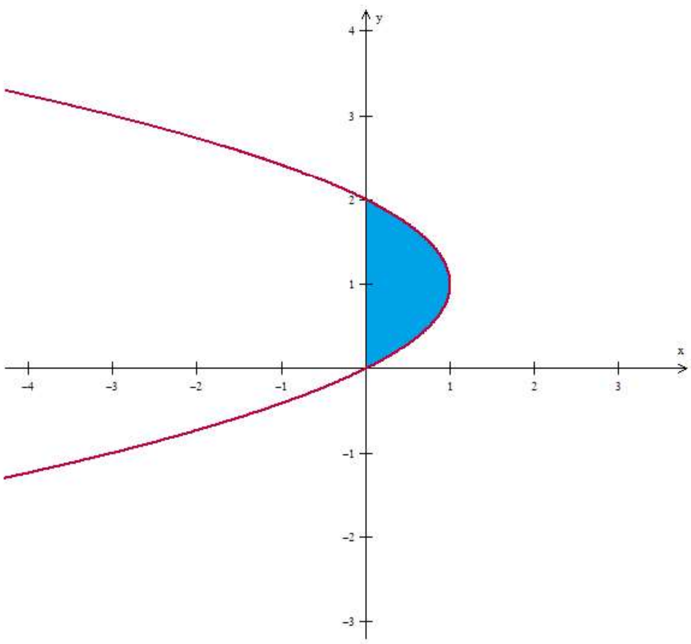
Assim, o volume será:

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx &= 2\pi \int_1^4 x(-x^2 + 5x - 4) dx \\ &= 2\pi \int_1^4 -x^3 + 5x^2 - 4x \, dx \\ &= \frac{45}{2}\pi \end{aligned}$$



Exemplo 11. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, da região limitada por $x = 2y - y^2$ e $x = 0$.*

Solução:



Como a rotação é em torno do eixo Ox, fixado y, cada casca típica terá altura dada por $x = 2y - y^2$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b y f(y) dy &= 2\pi \int_0^2 y(2y - y^2) dy \\
&= 2\pi \int_0^2 -y^3 + 2y^2 \, dy \\
&= \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Exercício 11. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Oy da região limitada pelo gráfico de* $y = sen(x)$, *no intervalo de* $[0, \pi]$.

Exercício 12. *Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de* $y = 2 + 2cos(x)$ *no intervalo* $[0, \pi]$, *em torno do eixo* Oy.