5

Argumentos

Sumário da Aula

5.1 Argumentos

A **lógica proposicional** é um formalismo matemático composto por uma linguagem formal e por um conjunto de regras de inferência que permitem analisar um argumento de forma precisa e decidir a sua validade. **Para ser um argumento, uma sequência de enunciados precisa ser finita, ter ao menos dois enunciados e ter exatamente um dos enunciados destacado como conclusão.**

As sequências de enunciados seguintes são exemplos de argumentos:

a) O aluno só aprovado em BCC101 se estudar para as provas.

O aluno foi aprovado em BCC101.

Então, o aluno estudou para as provas.

b) Todos os atleticanos são mineiros.

Logo, alguns mineiros são atleticanos.

c) Sempre que chove em Ouro Preto, faz muito frio.

Está chovendo em Ouro Preto.

Logo, hoje está fazendo frio.

Já as sequências de enunciados seguintes não são argumentos:

a) Professores do DECOM lecionam disciplinas para a Computação.

Dayanne é uma professora que leciona disciplina para a Computação.

Existem professores do DECOM que não lecionam disciplinas para a Computação.

Não é argumento, pois nenhum dos enunciados está destacado como conclusão!

b) Se Toda função polinomial é diferenciável e se toda função diferenciável é contínua, então toda função polinomial é contínua.

Não é argumento, pois possui apenas um enunciado.

c) 2 é um número par.

4 é um número par.

6 é um número par.

$\vdots$

Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, todo número escrito na forma $2n$ é par.

Não é argumento, pois possui infinitos enunciados (indicado pelo símbolo "$\vdots$")

Definição 5.1 (Argumento)**.** É uma afirmação que dada uma sequência finita de proposições $P_1, P_2, \cdots, P_n$, chamadas de premissas (**ou hipóteses**), tem como consequência uma outra proposição Q, chamada de conclusão (**ou tese**).

Notação:

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q \qquad \textbf{ou} \qquad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

O símbolo $\vdash$ é chamado de traço de asserção e indica que a proposição Q pode ser deduzida através das premissas $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Em outras palavras, o argumento pode ser definido como uma sequência de premissas seguidas de uma conclusão. A notação $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$, **denominada sequente**, pode ser lida como:

- $P_1, P_2, ..., P_n$ acarretam Q
- Q decorre de $P_1, P_2, ..., P_n$
- Q se deduz de $P_1, P_2, ..., P_n$
- Q se infere de $P_1, P_2, ..., P_n$

A identificação de uma premissa e conclusão em uma sequência de enunciados faz parte dos procedimentos que permitem verificar se o argumento está ou não bem construído. Alguns indicadores de premissa e conclusão são apresentados na Tabela 5.1.

Indicadores de Premissa	**Indicadores de Conclusão**
se, pois; porque; dado que; como foi dito; a razão é que; pela razão de que; admitindo assumindo que; pelo fato de; como; pois que; visto que; devido a; atendendo a que; que; sabendo-se que; ora; uma vez que; etc.	por isso; por conseguinte; implica que; daí que; segue-se que; pode-se inferir que; deste modo; assim; verifica-se; logo; então; o que aponta para; portanto; o que mostra que; consequentemente; por essa razão; concluo; etc.

Tabela 5.1: Indicadores de premissa e conclusão

Exemplo 32. Considere o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} P_1 :&\quad \text{Sócrates é homem.} \\ P_2 :&\quad \text{Todos os homens são mortais.} \\ Q :&\quad \text{Logo, Sócrates é mortal.} \end{aligned}$$

onde P_1 e P_2 são as **premissas do argumento** e Q é a **conclusão do argumento**. Este exemplo representa um tipo de argumento famoso, conhecido como **silogismo**.

Figura 5.1: Fonte:@hqqisso?.

Definição 5.2 (Silogismo)**.** O silogismo é um modelo de raciocínio lógico baseado na ideia da dedução e composto por duas premissas que geram uma conclusão.

5.1.1 Formalização de um Argumento

O argumento demonstra como a partir dos dados de um problema é possível chegar a uma determinada conclusão. O objetivo do estudo de **argumentos lógicos é justificar uma afirmação, ou dar as razões para que se tire uma conclusão**.

A lógica proposicional pode ser usada para formalizar um argumento. Neste processo é necessário que sejam reconhecidas todas as proposições e conectivos que compõem a sequência de afirmações, para que cada uma delas possa ser escrita na forma simbólica por uma fórmula bem formada.

Exemplo 33. Considere o seguinte argumento:

(1) Se o time vence todos os jogos, ganha o campeonato.
(2) Se o time não ganha o campeonato, os torcedores ficam zangados.
(3) Os torcedores estão contentes.
(4) Logo, o time ganhou o campeonato.

As proposições simples envolvidas neste argumento são:

$P:$ **"o time vence todos os jogos"**
$Q:$ **"o time ganha o campeonato"**
$R:$ **"os torcedores ficam zangados"**

Reescrevendo cada proposição do argumento como uma fórmula bem formada, temos:

(1) $P \to Q$
(2) $\neg Q \to R$
(3) $\neg R$
(4) Q

O argumento pode então ser representado como: $P \to Q, \neg Q \to R, \neg R \vdash Q$

5.1.2 Validade de um Argumento

Os argumentos lógicos podem ser válidos ou inválidos. Um **argumento é válido** (ou bem construído) se a **sua conclusão é uma consequência necessária das suas premissas (hipóteses)**. Um **argumento é inválido** ou mal construído (falacioso), quando **a veracidade das premissas não é suficiente para garantir a verdade da conclusão.**

A validade de um argumento depende da sua estrutura, ou seja, de como este argumento está organizado. **A validade de um argumento não é uma garantia da verdade da sua conclusão**. Um argumento válido pode ter premissas falsas e uma conclusão falsa.

São exemplos de argumentos válidos:

a) Todo mamífero é vertebrado.

Os gatos são mamíferos.

Portanto, os gatos são vertebrados.

b) Maria é professora de português.
Toda professora de português é alfabetizada.
Logo, Maria é alfabetizada.

c) Todos os alunos da UFOP estudam programação.
Nenhum estudante de programação cursa engenharia.
Portanto, nenhum aluno da UFOP cursa engenharia.

Alguns argumentos, mesmo que possuam premissas e conclusão visivelmente falsas, ainda são considerados argumentos válidos. **O estudo de argumentos leva em consideração a validade da sua construção.** Na letra c) do exemplo anterior o argumento é válido, embora a veracidade das premissas e da conclusão sejam questionáveis.

Uma forma de verificar a validade do argumento da letra c) é utilizando diagramas de Venn. A afirmação "P_1**: Todos os alunos da UFOP estudam programação"**, representada na Figura 5.2, indica que todos os elementos do conjunto menor (alunos da UFOP) pertencem ao conjunto maior (estudantes de programação). Já a afirmação "P_2 : **Nenhum estudante de programação cursa engenharia"**, representada na Figura 5.3, possui a palavra-chave nenhum, que indica que não existe interseção entre os conjuntos (estudantes de programação e estudantes de engenharia).

Figura 5.2: Representação gráfica da frase "**todo A é B**".

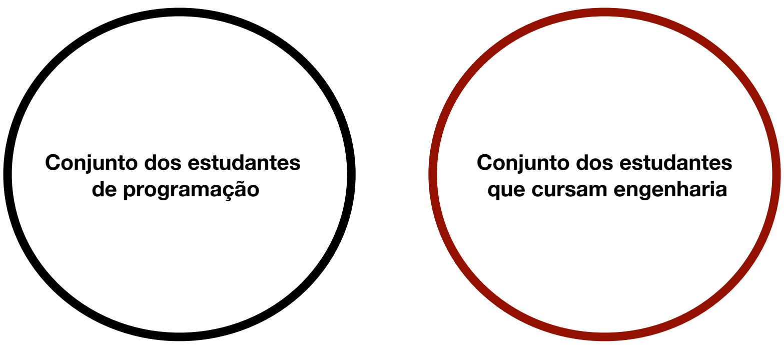

Figura 5.3: Representação gráfica da frase "**nenhum A é B**".

A análise gráfica das duas premissas em conjunto está representada na Figura 5.4. Comparando a conclusão **"nenhum aluno da UFOP cursa engenharia"** com a Figura 5.4, verifica-se que a conclusão é uma consequência das premissas. Portanto o argumento é bem construído (**válido**)!

Figura 5.4: Representação gráfica da frase “P_1 **e** P_2”.

Exemplo 34. Considere o argumento:

P_1 : Todos os alunos de Ciência da Computação gostam de lógica.

P_2 : Joaquim não é aluno de Ciência da Computação.

C : Então, Joaquim não gosta de lógica.

Neste caso, como as premissas não garantem a conclusão, dizemos que o argumento é inválido (**ou mal construído**).

Para mostrar que o argumento do exemplo anterior realmente é inválido será utilizado o diagrama de Venn. A premissa P_1 : **“Todos os alunos de Ciência da Computação gostam de lógica”**, representada na Figura 5.5, indica que todos os elementos do conjunto menor (alunos de ciência da computação) pertencem ao conjunto maior (alunos que gostam de lógica).

Figura 5.5: Representação gráfica da frase “**Todo A é B.**”

A segunda premissa, P_2 : **“Joaquim não é aluno da Ciência da Computação”**, indica que o único lugar que Joaquim não pode estar localizado é dentro do conjunto de alunos de Ciência da Computação. Assim, como apresentado na Figura 5.6, Joaquim pode estar em dois lugares distintos do diagrama: **fora do conjunto maior ou dentro do conjunto maior, porém fora do conjunto de alunos de Ciência da Computação**. A existência destas duas possibilidades mostram que as premissas P_1 e P_2 não são suficientes para afirmar que Joaquim não gosta de lógica.

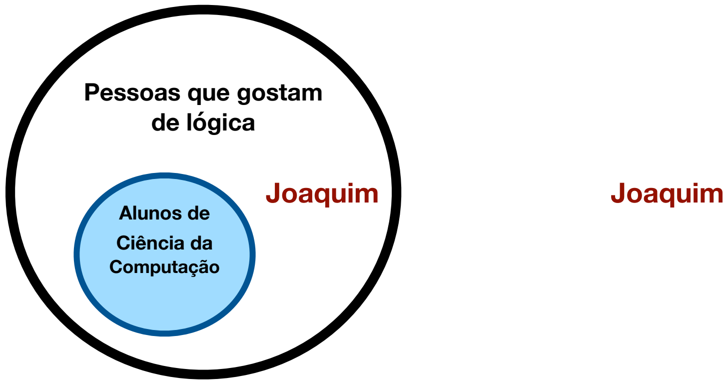

Figura 5.6: Representação gráfica da frase “P_1 **e** P_2”.

De forma sucinta, um **argumento é válido** se **todas as suas premissas são verdadeiras, no contexto em que ele é proferido, e as premissas garantem a conclusão.**

Observações:

- **Um argumento válido não pode ter premissas verdadeiras e uma conclusão falsa.**
- **Um argumento será inválido se ao menos uma de suas premissas for falsa, no contexto em que ele é proferido, ou quando suas premissas não garantirem a conclusão.**

Definição 5.3 (Argumento Válido)**.** Um argumento

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$

é dito válido se, e somente se, a conclusão Q tiver valor lógico **V** sempre que todas as premissas tiverem valores lógicos **V**. **Um argumento que não é válido é chamado de falácia.**

A Definição 5.3 diz que um argumento é considerado válido sempre que a veracidade das premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ implicar na veracidade da conclusão Q, ou ainda que, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

De forma simbólica, um argumento também pode ser representado por:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$$

onde $P_1, P_2, ..., P_n$ são as proposições **(hipóteses)** e Q é a **conclusão** do argumento. Assim, o argumento será considerado válido sempre que a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$ for verdadeira.

De forma equivalente pode-se dizer que:

- Q pode ser deduzido logicamente de $P_1, P_2, ...P_n$.

- Q é uma conclusão lógica de $P_1, P_2, ...P_n$.
- $P_1, P_2, ...P_n$ implica logicamente Q.
- Q segue logicamente de $P_1, P_2, ...P_n$.

Teorema 5.1. *Um argumento $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ é válido se, e somente se, a condicional*

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$$

for uma tautologia.

Em um **raciocínio dedutivo**, que faz uso das regras da lógica para se chegar a uma conclusão, não é possível estabelecer a verdade de uma conclusão se as premissas não forem consideradas todas verdadeiras. Assim, **estabelecendo as premissas verdadeiras e aplicando de forma correta as leis, a conclusão do argumento será necessariamente verdadeira.**

Exemplo 35. Considere o seguinte argumento:

Se você tem uma senha atualizada, então você pode entrar na rede.
Você tem uma senha atualizada.
Portanto, você pode entrar na rede.

O argumento pode ser reescrito, usando P para representar "você tem uma senha atualizada" e Q para representar "você pode entrar na rede", nas formas:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad (P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$$

Para que o argumento seja válido, as premissas $P \rightarrow Q$ e P e a conclusão Q devem ser verdadeiras.

Uma outra forma de verificar a validade do argumento é mostrar que a fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$ é uma tautologia, veja a tabela verdade a seguir:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$[(P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Tabela 5.2: Tabela verdade da fórmula bem formada $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$.

Logo, este argumento é válido.

Exemplo 36. Considere o argumento:

> George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos.
> Thomas Jefferson escreveu a declaração de independência.
> Portanto, todo dia tem 24 horas.

Sejam as letras de proposição P para "George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos", Q para "Thomas Jefferson escreveu a declaração de independência" e R para representar "todo dia tem 24 horas". O argumento é então escrito na forma simbólica como:

$$P \wedge Q \rightarrow R$$

A tabela verdade 5.3 apresenta todos os possíveis valores lógicos que o argumento pode assumir.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Tabela 5.3: Tabela-verdade da sentença $P \wedge Q \rightarrow Q$.

Note, na última coluna da tabela verdade, que a fórmula $P \wedge Q \rightarrow Q$ **não é uma tautologia**. Embora todas as proposições e a conclusão sejam verdadeiras, **o argumento não é válido!** Veja que a conclusão é um fato isolado, que não está relacionada e nem segue das hipóteses.

DICA:

Para verificar se o argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia podem ser usados dois procedimentos: **tabelas verdade** ou o sistema de **regras de dedução**. A tabela verdade deve ser usada da seguinte maneira:

1. Construção da tabela verdade destacando uma coluna para cada uma das premissas e para a conclusão.

2. Verificação **apenas das linhas cujos valores lógicos de todas as premissas são verdadeiros**:

   - **argumento válido:** se para todas as linhas com premissas verdadeiras os valores lógicos da conclusão também forem verdadeiros.
   - **argumento inválido:** se ao menos um valor da conclusão, em que todas premissas são verdadeiras, for falso.

O sistema de regras de dedução será apresentado no próximo tópico.

Exemplo 37. Sejam os seguintes argumentos:

a) $P, P \to Q \vdash Q$ **(Modus Ponens)**

A tabela verdade deste argumento é:

1ª premissa P	Q	2ª premissa $P \to Q$	Conclusão Q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

Note que apenas a primeira linha da tabela possui todos os valores lógicos das premissas verdadeiros **(T)**. Como a conclusão também é verdadeira nesta linha, temos que o **argumento é válido!**

b) Se um homem é solteiro, é infeliz. Se um homem é infeliz, morre jovem. Então, solteiros morrem jovens.

Considere as proposições: P : "Ele é um solteiro"; Q : "Ele é infeliz" e R : "Ele morre jovem". O argumento é reescrito simbolicamente por:

$$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$$

A tabela verdade do argumento é:

P	Q	R	1ª Premissa $P \to Q$	2ª Premissa $Q \to R$	Conclusão $P \to R$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Tabela 5.4: Lei do Silogismo

Note que nas linhas 1, 5, 7 e 8 as premissas apresentam valores lógicos verdadeiros e conclusão também verdadeira. Portanto, o **argumento é válido!**

Lei do Silogismo

A lei do silogismo

$$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R \tag{5.1}$$

é um princípio fundamental dos argumentos lógicos.

A Equação 5.1 pode ser lida como: " **Se** P **implica** Q **e** Q **implica** R**, então** P **implica** R". A verificação da **Lei do Silogismo** pode ser observada na Tabela 5.4.

5.2 Exercícios

E. 1. Determine se os argumentos são válidos. Justifique sua resposta.

a)
P_1 : Paulo Coelho é escritor.
P_2 : Todos os escritores são alfabetizados.
Q : Logo, Paulo Coelho é alfabetizado.

b)
P_1 : Todo mamífero é vertebrado.
P_2 : Os gatos são mamíferos.
Q : Portanto, os gatos são vertebrados.

c)
P_1 : Todos os atleticanos são mineiros.
Q : Logo, alguns mineiros são flamenguistas.

d)
P_1 : Se não existir vida após a morte, então a vida não faz sentido.
P_2 : Mas a vida faz sentido.
Q : Então, há vida após a morte.

e)
P_1 : Alguns números são pares.
P_2 : Alguns números são ímpares.
Q : Então, existem números que são pares e ímpares.

E. 2. Verifique utilizando tabela verdade se os seguintes argumentos são válidos.

a) $p \to \neg q, q, \neg p \to r \wedge s \vdash r \wedge s$

b) $p \vee q, q \to r, \neg r \vee s \vdash s$

c) $p \to q, r \to s, p \vee s \vdash q \vee r$

E. 3. Considere o seguinte raciocínio:

H_1: O computador está ok, ou está com vírus.
H_2: O computador não está com vírus.
H_3: Se o computador está ok, então eu vou programar.
C: Eu vou programar.

Nas perguntas a seguir considere as seguintes variáveis proposicionais e seus respectivos significados:

O: O computador está ok.
N: O computador está com vírus.
P: Eu vou programar.

a) **Preencha a tabela abaixo com a fórmula correspondente a cada uma das sentenças acima.**

H_1 :	
H_2 :	
H_3 :	
$\mathbf{C}$:	

b) **Escreva um sequente que representa o argumento anterior.**

c) **Verifique, por meio da tabela verdade que o sequente que você escreveu no item anterior é um argumento válido.**