TD n°2 : Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1 :

Dire dans quels cas on peut effectuer le produit $A \times B$ et, quand le produit est possible, donner la matrice obtenue :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Exercice 2 :

Soient les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, trouver la matrice A telle que l'équation $AX = B$ soit équivalente au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - y + 2z & = & a \\ x + 3z & = & b \\ -2y - z & = & c \end{array} \right.$$

Exercice 3 :

Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice augmentée équivalente et résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

a) $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y + z & = & 0 \\ -x - 3y - \frac{1}{2}z & = & 0 \\ x + 2y + 2z & = & 3 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{lcl} x + z & = & 1 \\ x - y + z & = & 0 \\ 5y + z & = & 3 \end{array} \right.$ c) $\left\{ \begin{array}{lcl} -x + 2y - z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & -1 \\ x + 5y - z & = & 0 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 2 \\ -x + y + 2z & = & 0 \\ 3x + 2z & = & 2 \end{array} \right.$ e) $\left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 2z & = & 3 \\ -x - y + z & = & 6 \end{array} \right.$ f) $\left\{ \begin{array}{ll} y + z & = 1 \\ -x + y - z & = -1 \\ -2x + y - 3z & = -3 \end{array} \right.$

$$\text{g)}\ \left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 2 \\ -2x+y-z & = & -2 \\ 4x-2y+2z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \text{h)}\ \left\{\begin{array}{lcl} x-y-z+t & = & 0 \\ x+y-2z+t & = & 0 \\ 4x-2y+4z+t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 :

Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+2z & = & 2 \\ -x+2y-z & = & -1 \\ -3y+az & = & b \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & a \\ 2x-y+z & = & b \\ -x+2y-2z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 5 :

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que $A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 6 :

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$?
2. A est-elle inversible ?