TD n°4 : Espaces vectoriels (suite)

Exercice 1 : On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs suivants : $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-2, 1)$, $v_3 = (3, 0)$.

a) Le système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-il générateur de $\mathbb{R}^2$?

b) Le système $\{v_1, v_2\}$ est-il générateur de $\mathbb{R}^2$?

c) Quelle base peut-on extraire du système $\{v_1, v_2, v_3\}$? Quelle est donc la dimension de Vect $\{v_1, v_2, v_3\}$?

Exercice 2 : On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on définit les vecteurs suivants : $v_1 = (0, 1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 0, 2, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1, 0)$, $v_4 = (1, -1, 1, -1)$.

a) Le système $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est-il libre ? Est-il générateur ?

b) Le système $\{v_1, v_3, v_4\}$ est-il libre ? Est-il générateur ?

c) Donner une base de Vect $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et en déduire sa dimension.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On définit $P_0(x) = x + 1$, $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = x^3 - x - 2$, $P_3(x) = x^3 + x^2$.

a) La famille de vecteurs $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$?

b) Est-elle libre ?

c) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 4 : On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$. On note

$$\mathcal{P} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad P(x) = ax^4 + bx^2 + c\right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{I} = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad P(x) = ax^3 + bx\right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Avec l'exercice précédent, que peut-on dire de la dimension de $\mathbb{R}_4[X]$?

b) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sev de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Montrer que $\mathbb{R}_4[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

d) Donner une base de $\mathcal{P}$, une base de $\mathcal{I}$. En déduire une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$?

Exercice 5 : On se place dans $\mathbb{R}^3$. On note

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + 2z = 0\right\}$$
$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad -2y + z = 0\right\}$$

a) Donner une base de U et une base de V.

b) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 : Déterminer si les sev de $\mathbb{R}^3$ suivants sont en somme directe.

a) $U = \left\{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\right\}$ et $V = \left\{(0, x, y) \in \mathbb{R}^3\right\}$

b) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\right\}$ et $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad z = 0\right\}$

c) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y + z = 0\right\}$ et $V = \left\{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$

d) $U = \left\{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$ et $V = \left\{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y + z = 0\right\}$

e) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y + z = 0\right\}$ et $V = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3\right\}$