Contrôle n°2 : Octobre 2018

Exercice 1 :

On considère l'application f définie de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-2z, 5x+y-3z, x+5y-3z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de Ker f.
3. Quelle est la dimension de Im f ?
4. Donner une base de Im f.
5. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :

On se place dans R^4 et on définit les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. La famille $F_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ est-elle génératrice de R^4 ? Est-elle libre ?
2. La famille $F_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est-elle génératrice de R^4 ? Est-elle libre ?
3. La famille $\{v_1, v_3, v_4\}$ est-elle libre ?
4. Donner une base de Vect $\{F_3\}$. Quelle est donc la dimension de Vect $\{F_3\}$?
5. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}\{F_2\} \oplus \text{Vect}\{v_2\}$?
6. A-t-on $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}\{F_3\} \oplus \text{Vect}\{v_5\}$?

Exercice 3 :

On considère l'application f définie de la façon suivante :

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP(X) - \frac{1}{2}X^2P'(X) \end{array}$$

1. L'application f est-elle bien définie ?
2. Donner une base de Ker f.
3. Quelle est la dimension de Im f ?
4. Donner une base de Im f.
5. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$?
6. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $(1, X, X^2)$.

Exercice 4 :

Résoudre le système suivant en fonction du paramètre $a \in \mathbf{R}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x+y & = & -1 \\ x-y+z & = & 2 \\ 3x-y+az & = & 3 \end{cases}$$