Correction Contrôle Septembre

Exercice 1 :

1- $z^2 - 4z - i + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4-i) = 16 - 16 + 4i = 4i$

On pose $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = x + iy$.

Il faut résoudre $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = y^2 = 2 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

Ainsi, x et y ont le même signe donc $(x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2})$ et $(x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{2})$ sont solutions.

D'où $\delta = \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ et finalement,

$\boxed{z_1 = \frac{4 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} i}$ et $\boxed{z_2 = \frac{4 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}}$ sont solutions de l'équation

2- $z^4 = 64$ donc $z^2 = \pm 8$

Pour $z^2 = 8$, $\boxed{z_1 = \sqrt{8}}$, $\boxed{z_2 = -\sqrt{8}}$

Pour $z^2 = -8$, $\boxed{z_3 = \sqrt{8}\, i}$, $\boxed{z_4 = -\sqrt{8}\, i}$

Ainsi, z_1, z_2, z_3 et z_4 sont solutions de l'équation.

3- $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

$z_1 = 1$ est racine évidente. L'équation se réécrit

$(z-1)(z^2+1) = 0$

On résoud $z^2 + 1 = 0$ i.e. $z^2 = -1$, $z_2 = i$ et $z_3 = -i$ sont solutions.

Ainsi, z_1, z_2 et z_3 sont solutions de l'équation.

Exercice 2 :

$$z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

1- $|z| = \sqrt{\frac{9\times 3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$

$$z = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 3e^{i\pi/6}$$

$\arg(z) = \pi/6 \mod (2\pi)$

2 - $\frac{1}{z} = \boxed{\frac{1}{3}e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{6}}$

↳ forme exponentielle ↳ forme cartésienne

$z^3 = \left(3e^{i\pi/6}\right)^3 = \boxed{27e^{i3\pi/6}} = 27e^{i\pi/2} = \boxed{27i}$

↳ forme exponentielle ↳ forme cartésienne

Exercice 3 :

1- $A \in M_{2,3}$ et $B \in M_{2,2}$ avec $2 \neq 3$ donc le produit est impossible.

2- $AB = \begin{pmatrix} 18 \\ 23 \end{pmatrix}$

3- $AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 15 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

4 - $A \in M_{2,2}$ et $B \in M_{1,3}$ avec $2 \neq 1$ donc le produit est impossible.

5- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -5 & -5 & 5 \\ 22 & 3 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -8 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow -L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \tfrac{1}{9} L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$(-3, 1, 3)$ est solution unique.

Exercice 5

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Si $a = -1$, alors il n'y a pas de solution.

si $a = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = -1/3 + z \\ y = 2/3 \end{cases}$ $\mathcal{S} = \{(-1/3+z, 2/3; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Si $a \neq \{-1; 2\}$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1+a}{(2-a)} L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

et à nouveau, il n'y a pas de solutions.

Ainsi, si $a = 2$, $\mathcal{S} = \{(-1/3+z, 2/3; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

si $a \neq 2$, il n'y a pas de solutions.