Correction Contrôle Octobre 2018

Exercice 1 :

1- Montrons que f est une application linéaire.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^3$, montrons que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

On pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors $\lambda x + \mu y = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\
&= \big(2(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z'), 5(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z'), \\
&\qquad \lambda x + \mu x' + 5(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z')\big) \\
&= \big(\lambda(2x + 2y - 2z) + \mu(2x' + 2y' - 2z'), \lambda(5x + y - 3z) + \mu(5x' + y' - 3z'), \\
&\qquad \lambda(x + 5y - 3z) + \mu(x' + 5y' - 3z')\big) \\
&= \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z') \\
&= \lambda f(u) + \mu f(v).
\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

2- Soit $u \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(u) = 0$. On pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

D'où $f(u) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \\ x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 4y - 2z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \\ 6y - 6y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$

L'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned}
S &= \{(y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

D'où $\ker f$ est de dimension 1 et (v_1) avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker f$.

3- D'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$$
$$= 3 - 1 = 2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$

4- $$f(x, y, z) = x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

D'où $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ car ces deux vecteurs appartiennent à $\operatorname{Im} f$ et sont non colinéaires donc sont libres.

5- $$\operatorname{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1- Card $F_2 = 4$ donc pour montrer qu'elle est génératrice, il suffit de montrer qu'elle est libre car ce serait alors une base.

Soit $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ tq

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \\ 2\lambda_1 = -2\lambda_5 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 - \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_5 = -\lambda_1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_1 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_5 = -\lambda_1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

D'où cette famille est libre. Or card $F_2 = 4$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et donc c'est une famille génératrice.

2 - À nouveau, soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_1 + \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

D'où pour $\lambda_1 = 1$, $v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = 0$

Ainsi, cette famille n'est pas libre. Elle n'est donc pas génératrice car si elle l'était, ce serait une base de $\mathbb{R}^4$ et donc elle serait libre.

3 - Soit $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ tq $\lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_4 = \lambda_3 \\ -\lambda_3 + 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

D'où $\{v_1, v_3, v_4\}$ est une famille libre.

4 - $\dim F_3 \leq 3$ car c'est une famille liée

Or $\dim \mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\} = 3$ d'après la question précédente. D'où, comme

$\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\} \subset F_3$ alors $3 \leq \dim F_3$.

D'où finalement $\dim F_3 = 3$ et (v_1, v_3, v_4) en est une base.

5 - $\dim \mathrm{Vect}\, F_2 = 4$ donc

$\dim \mathrm{Vect}\, F_2 + \dim \mathrm{Vect}\{v_2\} = 4 + 1 = 5 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$

Ainsi, $\mathrm{Vect}\{F_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2\}$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

6 - Soit $u \in \mathrm{Vect}\{F_3\} \cap \mathrm{Vect}\{v_5\}$

alors $u = \mu_1 v_1 + \mu_3 v_3 + \mu_4 v_4$ et $u = \mu_5 v_5$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 + 2\mu_3 + \mu_4 = \mu_5 \\ -\mu_3 + \mu_4 = -\mu_5 \\ -\mu_1 + \mu_4 = -\mu_5 \\ \mu_1 + \mu_3 = 2\mu_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 + 2\mu_3 + \mu_4 = \mu_5 \\ \mu_1 = \mu_3 \\ -\mu_1 + \mu_4 = -\mu_5 \\ 2\mu_1 = 2\mu_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \mu_3 \\ \mu_1 = \mu_5 \\ \mu_4 = 0 \\ \mu_1 + 2\mu_1 = \mu_1 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$$

D'où $\mathrm{Vect}\{F_3\} \cap \mathrm{Vect}\{v_5\} = \{0\}$

De plus, $\dim \mathrm{Vect}\{F_3\} + \dim \mathrm{Vect}\{v_5\} = 3+1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Donc on a bien $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}\{F_3\} + \mathrm{Vect}\{v_5\}$

Exercice 3 :

1- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

Alors $f(P) = (a_2 X^3 + a_1 X^2 + a_0 X) - \frac{1}{2} X^2 (2 a_2 X + a_1)$

$$= a_1 X^2 + a_0 X - \frac{a_1}{2} X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$$

Donc l'application f est bien définie.

2- Soit $P \in \mathrm{Ker} f$ avec $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

alors $f(P) = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{2} X^2 + a_0 X = 0 \Rightarrow a_1 = a_0 = 0$

D'où $P = a_2 X^2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$

Ainsi (X^2) est une base de $\mathrm{Ker} f$.

3- D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \mathrm{Ker} f$$
$$= 3 - 1 = 2.$$

4- $f(1) = X$

$f(X) = X^2/2 \Rightarrow f(2X) = X^2$

D'où $X \in \mathrm{Im} f$ et $X^2 \in \mathrm{Im} f$

(X, X^2) est une base de $\mathrm{Im} f$.

5- Soit $P \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$

alors $P = a_2 X^2$ or $X^2 \in \mathrm{Im} f$

D'où $X^2 \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

6- $f(X^2) = 0$

D'où $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + az = 3 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & a & 6 \end{pmatrix}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$

Si $a = 2$,

$\underset{L_2 \leftarrow -1/2 L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et ainsi $\begin{cases} x + z/2 = 1/2 \\ y - z/2 = -3/2 \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \left\{ \left(1/2 - z/2, -3/2 + z/2, z\right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

et il y a une infinité de solutions.

Si $a \neq 2$,

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{a-2} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1/2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 1/2 L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $(1/2, -3/2, 0)$ est l'unique solution du système.