
TD n°5 : Applications linéaires

Exercice 1 : Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \rightarrow (-x + 3y, -x + y - z, 4y - z) \end{cases}$$

- a) Montrer que f est une application linéaire
- b) Quel est le noyau $\text{Ker } f$ de f ? En donner une base.
- c) Quelle est la dimension de $\text{Im } f$?
- d) Quelle est l'image $\text{Im } f$ de f ? En donner une base.
- e) Écrire la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- f) Soient $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- g) Calculer $f(u_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.
- h) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice 2 : Même exercice avec $f(x, y, z) = (-x + y - z, 2x - 2y + 2z, x - y + z)$

Exercice 3 : Soit f l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \mapsto \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \rightarrow P(X) + (1 - X)P' \end{cases}$$

- a) f est-elle bien définie?
- b) Montrer que f est une application linéaire.
- c) Donner une base de $\text{Ker } f$.
- d) Quelle est la dimension de $\text{Im } f$?
- e) Donner une base de $\text{Im } f$.
- f) A-t-on $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercice 4 : Même exercice avec l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \mapsto \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \rightarrow XP'(X) \end{cases}$$