TD n°3 : Espaces vectoriels

Exercice 1 : Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad -4x + 7y = -2z\right\}\\
E_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad y(x-z) = 0\right\}\\
E_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^2 - 4y = 0\right\}\\
E_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x + 2y + 2z - 2 = 0\right\}\\
E_5 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x < 4\right\}\\
E_6 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y - z = x + 5z = 0\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}[0,1]$ des fonctions définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathcal{F}[0,1]$?

$$\begin{aligned}
A &= \{f \in \mathcal{F}[0,1] \quad | \quad f(1/2) = 0\}\\
B &= \{f \in \mathcal{F}[0,1] \quad | \quad f(0) \geq 0\}\\
C &= \{f \in \mathcal{F}[0,1] \quad | \quad f(0) = 2\}
\end{aligned}$$

b) Trouver un exemple de sev U et V de $\mathcal{F}[0,1]$ tels que $U \cup V$ n'est pas un sev.

Exercice 3 : On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad \deg P \leq n\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$ pour tout $n \geq 0$.

b) L'ensemble des polynômes de degré exactement égal à un est-il un sev de $\mathbb{R}[X]$?

c) $\{P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad P(2) = P(0) = 0\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4 : On considère les ensembles U et V suivants :

$$\begin{aligned}
U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x - 2z = 0\right\}\\
V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + \frac{1}{2}y = 0\right\}
\end{aligned}$$

a) U et V sont-ils des sev de $\mathbb{R}^3$?

b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$?

c) Donner un supplémentaire de U. Même question pour V.

Exercice 5 : Soit les vecteurs $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$ et $v_4 = (1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont justes ?

a) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \oplus \mathrm{Vect}(v_3)$.

b) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4) \oplus \mathrm{Vect}(v_3)$.

c) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(v_1, v_4) \oplus \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$.

Exercice 6 : Soit les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont justes ?

a) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \oplus \mathrm{Vect}(v_3)$.
b) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \oplus \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$.
c) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_3, v_4) \oplus \mathrm{Vect}(v_2, v_5)$.
d) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_4) \oplus \mathrm{Vect}(v_3, v_5)$.