TD n°6 : Déterminants

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) On définit $M_{i,j}$ comme étant le déterminant de la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j. Calculer $M_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.

b) Soit la matrice B qui a pour coefficients $B_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$. Montrer que $\frac{1}{\det A} B^T$ est l'inverse de A.

c) Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs suivants :
$v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, -2)$ et $v_4 = (0, 1, -1)$

a) La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

b) La famille $\{v_1, v_2, v_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 : Résoudre les systèmes suivants en utilisant les formules de Cramer :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y &= -1 \\ -x - y &= 3 \end{cases}, \qquad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + 7z &= -5 \\ x + y + z &= -1 \\ -x + 3y - 2z &= 5 \end{cases}$$