



# Intégration numérique d'un potentiel quelconque et trajectoires chaotiques

Hiegel Julien

	Faculté de <b>physique et ingénierie</b>
Université de Strasbourg	

	Observatoire <b>astronomique</b>
	de Strasbourg   ObAS

STRASBOURG 2019

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Méthode numérique . . . . .	2
1.2	Mouvement Chaotique . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Oscillateur Harmonique</b>	<b>3</b>
2.1	Schéma de Runge Kutta . . . . .	3
2.2	Schéma de Verlet . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Potentiel de Hénon-Heiles</b>	<b>6</b>
3.1	Description du potentiel de Hénon-Heiles . . . . .	6
3.2	Trajectoires dans le Potentiel de Hénon-Heiles . . . . .	7
3.3	Section de Poincaré . . . . .	9
3.4	Caractérisation du Chaos . . . . .	11
3.4.1	Méthode des exposants de Liapunov . . . . .	11
3.4.2	Méthode de SALI . . . . .	12
3.4.3	Résultats . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>15</b>
A.1	Espace des phases . . . . .	15
A.2	Oscillateur anharmonique . . . . .	15
<b>B</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>16</b>

# 1 Introduction

Ce projet propose de s'intéresser quant à l'importance des nouveaux outils informatiques ainsi que de l'analyse numérique pour étudier le mouvement de différents objets dans un potentiel quelconque. On pourrait par exemple s'interroger quant à la stabilité des orbites des planètes autour de leurs étoiles ou encore sur le parcours d'une étoile teste dans un potentiel gravitationnel quelconque crée par son entourage. Nous pouvons alors rapidement nous rendre compte du travail titanesque que demanderait une telle étude sur le long terme. Nous pouvons aussi citer le cas d'un astéroïde rentrant dans un système terre-soleil, les trajectoires possibles pour cet objet sont nombreuses et donne un autre exemple de trajectoire chaotique.

Dans le but d'analyser ces mouvements sur un très grand nombre de période, il est important de comprendre que l'informatique est un outil fondamental mais aussi que nous devons d'abord trouver des méthodes numériques suffisamment précises pour pouvoir les appliquer. En effet, si nous appliquons une méthode numérique à l'orbite de notre lune sur plusieurs millions d'années, nous nous attendons évidemment à une conservation du mouvement de notre satellite sans que celui ci ne s'échappe.

## 1.1 Méthode numérique

Le premier objectif est alors de trouver une méthode fiable qui permettra d'étudier le mouvement d'astres dans des potentiels gravitationnels plus complexes que pour le cas du mouvement Keplerien (Mouvement d'un objet subissant le potentiel gravitationnel autour d'un point fixe). Nous expérimenterons ici les deux méthodes suivantes :

- La méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (RK2)
- La méthode de Verlet, méthode symplectique d'ordre 2 (SY2).

Pour pouvoir comparer ces deux méthodes, nous les examinerons en détail dans le cadre de l'oscillateur harmonique (OH), d'une part car très simple à mettre en œuvre et d'autre part car nous savons parfaitement résoudre ce problème.

## 1.2 Mouvement Chaotique

Nous nous dirigerons ensuite vers la principale problématique de cet article étant d'étudier comment nous pouvons caractériser le mouvement d'une étoile teste dans un potentiel gravitationnel crée par son environnement au sein d'une galaxie. C'est pourquoi nous proposerons une analyse du potentiel de Hénon-Heiles (PHH) et montrerons en quoi un objet subissant ce potentiel décrit un mouvement chaotique.

Ainsi nous pouvons nous demander comment pouvons nous caractériser un mouvement chaotique. C'est dans cet ultime objectif que nous comparerons les deux méthodes suivante :

- La méthode de SALI (Smaller Alignment Index)
- La méthode des exposants de Liapunov.

## 2 Oscillateur Harmonique

L'oscillateur harmonique est le cas le plus classique que nous pouvons étudier. D'une part car nous connaissons sa solution analytique et pouvons donc tracer des courbes sur la position d'une particule subissant ce potentiel ou de son énergie qui devrait être conservée au court du temps aisément, d'autre part car c'est un cas extrêmement simple à mettre en œuvre.

C'est pourquoi l'OH est un choix idéal afin de tester les différentes méthodes numériques ici proposées.

Ainsi, nous pouvons poser directement l'équation du mouvement à une dimension :

$$m\ddot{u} = -ku \quad (1)$$

que nous simplifierons par :

$$\ddot{u} = -u \quad (2)$$

où  $m$  et  $k$  sont deux constantes du problème, respectivement la masse et la constante de raideur d'un ressort par exemple,  $\omega = \sqrt{k/m}$  la pulsation du système et  $u$  une fonction de la position  $x$ . Pour simplifier le problème, nous posons  $\omega = 1$  (équation (2)).

La solution à ce problème que nous prendrons pour comparer les résultats numérique est :

$$u = \cos(x) \quad (3)$$

Aussi, afin de pouvoir comparer l'énergie obtenue via les méthodes numériques à la courbe théorique, l'énergie totale du système s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2) \quad (4)$$

### 2.1 Schéma de Runge Kutta

Le principe de la méthode RK2 est similaire à une méthode d'Euler explicite c'est à dire qu'on cherche à calculer la valeur de  $x_{n+1}$  en connaissant les valeurs de  $x_n$  et de  $\dot{x}_n$  où  $x$  est la position et  $\dot{x}$  la vitesse. Contrairement à la méthode d'Euler explicite, le calcul de la pente est légèrement différente et nécessite une (ou plusieurs pour des ordres plus élevé) étape intermédiaire. Considérons donc l'équation d'un OH comme décrit plus haut, nous pouvons facilement poser ce nouveau système :

$$\begin{cases} \dot{x} = +v \\ \dot{v} = -x \end{cases} \quad (5)$$

Nous approximons alors la dérivée comme suivant :

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}, \quad \dot{v} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \quad (6)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps utilisé.

Enfin, nous pouvons écrire les valeurs intermédiaires puis les valeurs finales telles que :

$$\begin{cases} x_* = x_n + v_n \Delta t / 2 \\ v_* = v_n - x_n \Delta t / 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_* \Delta t \\ v_{n+1} = v_n - x_* \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

Nous sommes désormais prêt pour commencer à tester cette méthode. Nous allons prendre un jeu de condition initiales pour la position et la vitesse, un temps final et deux pas de temps différents afin de mettre en évidence l'importance de ce dernier paramètre.

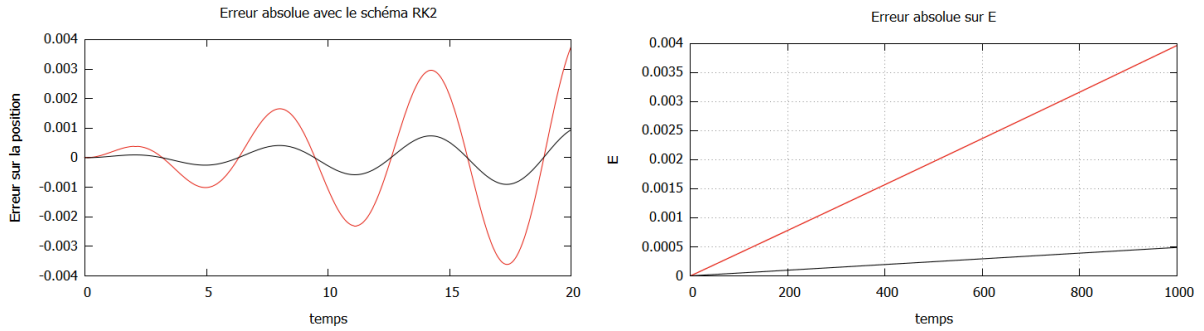


FIGURE 1 – En rouge  $\Delta t = 0.05$ , en noir  $\Delta t = 0.025$ . Courbe de gauche : erreur absolue sur la position de la particule teste et à droite l'erreur sur l'énergie pour un plus grand temps final correspondant à environ 150 périodes. Les conditions initiales sont  $x(0)=0.5$  et  $v(0)=0$ .

Sur cette première figure, nous observons une augmentation de l'erreur absolue sur la position au cours du temps. Une chose intéressante à remarquer est que l'erreur absolue sur la position diminue lorsque nous diminuons le pas de temps, par ailleurs celle ci diminue d'un facteur quatre lorsque le pas de temps est divisé par deux, ce qui reflète l'ordre de la méthode. Nous pouvons aussi constater que l'énergie totale du système n'est pas conservée au fil du temps.

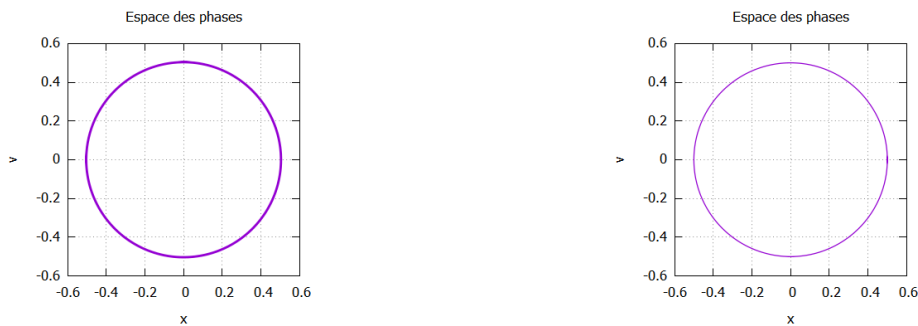


FIGURE 2 – Ici l'espace des phases pour les deux pas de temps  $\Delta t = 0.05$  et  $\Delta t = 0.025$  respectivement à gauche et à droite. Le temps final correspond à 150 périodes. Les mêmes conditions initiales sont appliquées.

Sur cette deuxième figure, nous pouvons constater que l'aire dans l'espace des phases (EP) n'est pas conservée, ce qui est intimement lié au fait que l'énergie n'est pas conservée. Aussi, le pas de temps, comme précédemment, atténue grandement ce phénomène lorsque qu'il diminue.

## 2.2 Schéma de Verlet

Comme vu précédemment, une méthode type RK2 est suffisante pour étudier le mouvement d'objet pour de courte durée, de l'ordre de quelques périodes, mais elle reste grandement limitée si on s'attaque à des orbites Kepleriennes ou encore à des potentiels comme celui de l'oscillateur anharmonique (voir **A.2**) sur de longue durée. Nous allons alors chercher une méthode qui conserve l'énergie au cours du temps.

C'est pourquoi nous proposons ici une méthode symplectique d'ordre deux. Elle est dite symplectique de part sa construction qui implique une conservation de l'aire dans l'espace des phases. Nous nous attendons donc à une conservation de l'énergie au cours du temps ainsi qu'à une plus grande précision qu'avec la méthode RK2.

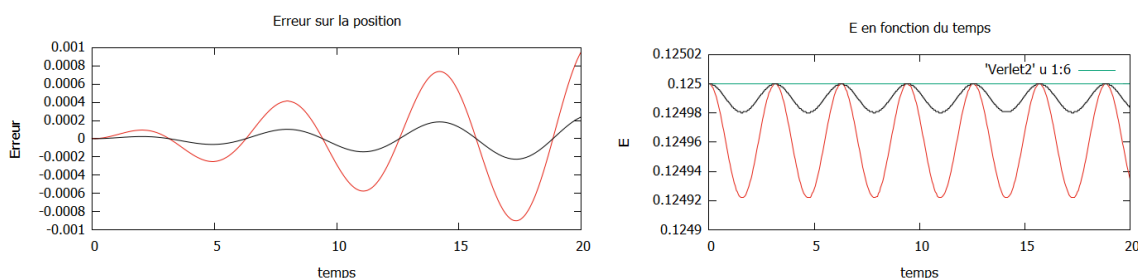


FIGURE 3 – L'erreur absolue sur la position à gauche et à droite l'évolution de l'énergie en fonction du temps. En rouge :  $\Delta t = 0.05$ , en noir :  $\Delta t = 0.025$ , en bleu clair : Énergie théorique.  $x(0)=0.5$  et  $v(0)=0$ .

Sur la figure 3 nous pouvons constater plusieurs choses, l'erreur sur la position augmente au cours du temps mais la précision par rapport à RK2 est grandement augmentée. De plus l'énergie est conservée avec de légères fluctuations lorsque le temps s'écoule. L'erreur sur la position et sur l'énergie diminue d'un facteur deux (l'ordre de la méthode) en diminuant le pas de temps de la même valeur.

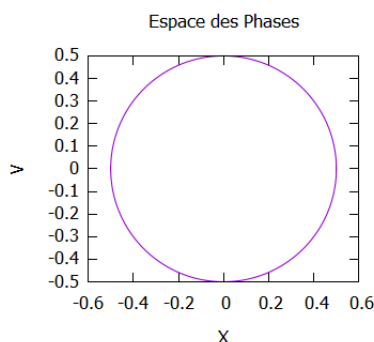


FIGURE 4 – Sur cette figures l'espace des phases correspondant aux mêmes conditions initiales et à environs 150 périodes.

Sur cette dernière courbe nous pouvons voir que ce phénomène d'accroissement du rayon remarqué dans l'EP de la méthode RK2 n'est plus présent, ce qui était attendu avec la conservation de l'énergie. (Voir A.1 pour plus de précisions)

Pour conclure sur les méthodes numérique, la méthode SY2 s'impose largement sur sa concurrente car d'une part elle possède une précision accrue et d'autre part car contrairement à la méthode RK2 elle conserve l'énergie au cours du temps et ainsi l'espace dans l'EP. En effet, si on prend l'exemple d'une orbite Keplerienne, nous savons que l'énergie est conservée ce qui nous aiguille sur notre choix. Nous pourrions bien sûr utiliser une méthode de plus grand ordre (comme une SY4) cependant pour un temps d'exécution équivalent nous devrions augmenter le pas de temps et ainsi perdre en précision. C'est pourquoi, pour des raisons de temps et de difficultés nous utiliserons la méthode SY2 par la suite.

### 3 Potentiel de Hénon-Heiles

Maintenant que nous avons testé les différentes méthodes numériques, nous pouvons étudier un potentiel plus intéressant.

Le but est d'étudier et de caractériser les trajectoires possibles d'une étoile dans un champ gravitationnel général créé par son environnement. Nous disposons ici d'un potentiel bi-dimensionnel simplifié donné par Michel Hénon et Carl Heiles qui a l'avantage d'être un potentiel relativement simple possédant des caractéristiques telles que nous pouvons obtenir une vaste étendue de trajectoires différentes pour la même énergie. Ainsi, nous pourrions étudier aussi bien des trajectoires stables que des chaotiques, d'où l'intérêt de ce potentiel.

#### 3.1 Description du potentiel de Hénon-Heiles

Le PHH ne modélise pas une forme de galaxie spéciale mais est tout à fait général et permet l'étude de mouvement chaotique. Il est décrit par l'équation mathématique suivante où  $m=1$  :

$$\begin{cases} U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) \\ E(x, y) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3) \end{cases}$$

où  $U(x,y)$  est le potentiel et  $E(x,y)$  l'énergie totale du système dont le premier terme est l'énergie cinétique.

Avec cette équation du système on peut constater que le PHH n'est rien d'autre que deux oscillateurs harmoniques couplés possédant un terme de perturbation.

Ce potentiel est symétrique avec une rotation de  $\frac{2\pi}{3}$ .

Afin de mieux visualiser ce potentiel, nous pouvons tracer les courbes d'équipotentiellles sur un graphique avec l'allure générale de la surface.

Sur la figure 5, nous pouvons bien voir qu'il y a des valeurs de l'énergie pour lesquelles nous aurons des orbites piégées et d'autres où nous aurons des orbites qui s'échappent. La limite est de  $\frac{1}{6}$ , bien que non représentées ici, les courbes équipotentiellles dont l'énergie est égale à  $\frac{1}{6}$  sont trois droites formant un triangle, toutes les trajectoires hors de ce triangles posséderont des orbites divergentes.

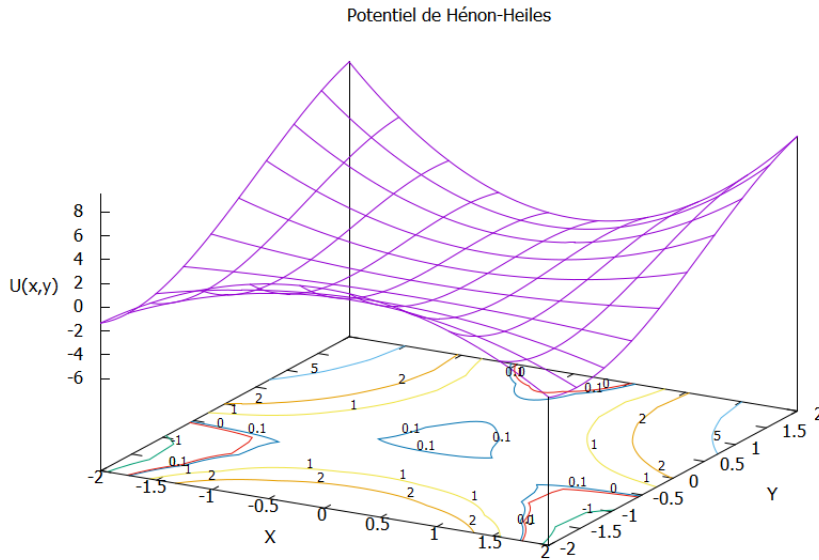
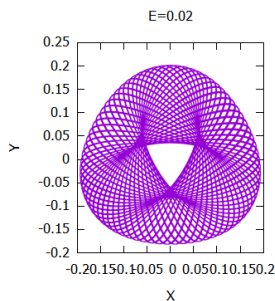


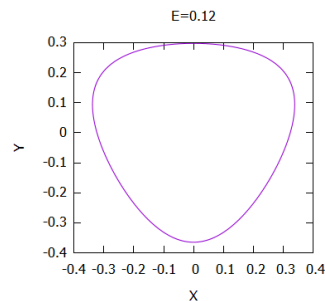
FIGURE 5 – Courbes équipotentiellles pour le PHH sur le plan  $Z=0$  et en violet l'allure de la courbe  $U(x,y)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

### 3.2 Trajectoires dans le Potentiel de Hénon-Heiles

Il y a énormément de trajectoires différentes possibles dans le PHH à toutes valeurs de l'énergie où l'orbite ne s'échappe pas. Il n'y a en effet aucun intérêt à étudier ces trajectoires. Nous nous attendons à avoir des trajectoires stables à basse énergie et des trajectoires de plus en plus chaotiques en augmentant la valeur de cette énergie. Bien évidemment, en dépassant l'énergie d'échappement donnée plus haut, nous n'aurons plus que des trajectoires ouvertes.



$$\begin{aligned} y(0) &= -0.820000 \\ \dot{x}(0) &= +0.181407 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(0) &= 0.297545 \\ \dot{x}(0) &= 0.411131 \end{aligned}$$



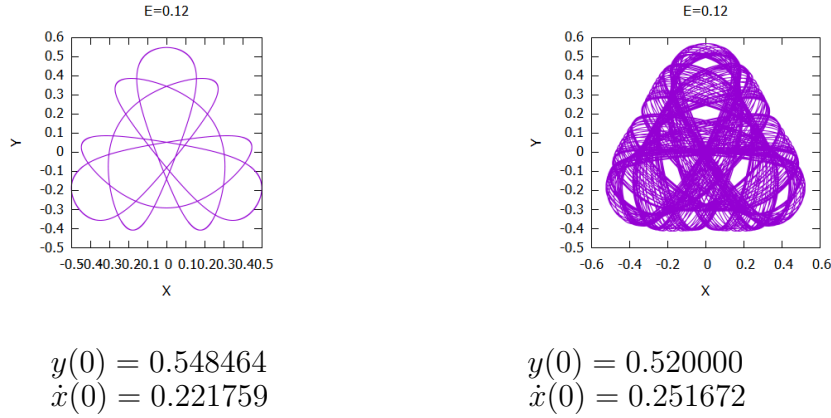


FIGURE 6 – Trajectoires dans l’espace réel pour différentes valeurs de l’énergie et différentes conditions initiales.  $x(0) = \dot{y}(0) = 0$  pour toutes ces trajectoires. Temps final (tf)=1 000 : environs 164 périodes pour la courbe (a) et 32 périodes pour la courbe (c).

La figure 6 représente quelques exemples de trajectoires dans le potentiel de Hénon-Heiles. La première (a) est une orbite de type boîte (tout comme la dernière) qui n’a pas de période avec laquelle elle retourne à un point initiale et donc est une trajectoire non fermée. La deuxième (b) et la troisième (c) courbes sont des orbites fermée dont la résonance est respectivement [1 :1] et [5 :5] qui est le nombre de tours nécessaires pour effectuer une période et donc retomber sur un même point initial. On peut aussi remarquer que pour les deux dernières figures qui partage la même énergie, la différence entre les conditions initiales est très faible mais que les trajectoires sont très différentes l’une de l’autre ce qui est le premier signe de l’aspect chaotique de ce système. Il existe évidemment d’autres type de mouvement comme des trajectoires linéaires, d’autres types de résonance (2 :2,3 :3,...) ou encore celle qui va le plus nous intéresser, les trajectoires chaotiques.

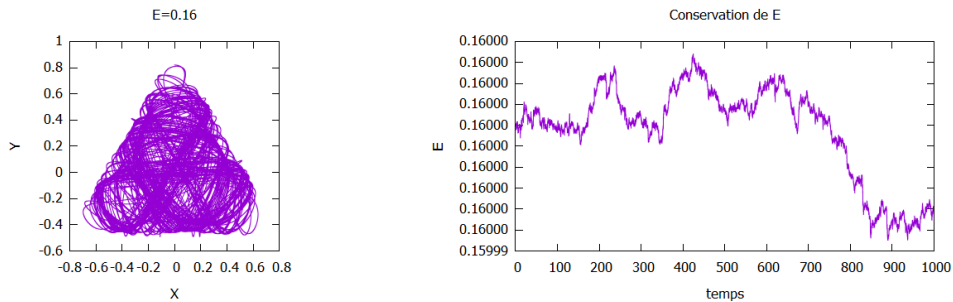


FIGURE 7 – (d) Trajectoire chaotique dans l’espace réel avec à gauche sa représentation dans l’espace 2D et à droite son énergie en fonction du temps. tf=1 000.

Comme pour les trajectoires type boîte, la trajectoire chaotique représentée sur la figure 7 est non fermée et ne semble respecter aucune suite logique. Sur le deuxième schéma à droite, l’énergie fluctue de manière infinitésimale en fonction du temps mais reste constante, ce qui est la principale caractéristique de la méthode SY2, d’où le choix de celle ci.

Si l'énergie pouvait s'accroître comme avec une méthode RK2, nous pourrions obtenir pour des orbites normalement piégées (Les trajectoires chaotiques ont aussi des orbites piégées) une trajectoire qui s'échappe après un certain temps justement à cause de cette augmentation de l'énergie.

Il faut tout de même faire attention à ne pas se trouver trop proche de l'énergie d'échappement, car ces fluctuations aussi minime soit elle peuvent permettre un échappement de l'orbite.

### 3.3 Section de Poincaré

L'espace des phases pour le PHH possède quatre dimensions  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  par conséquent une représentation dans un espace des phases conventionnel  $(x, \dot{x})$  n'est pas possible. Par ailleurs il nous faudrait quatre axes pour pouvoir représenter un tel espaces des phases, qui n'est conceptuellement pas possible pour notre esprit. Nous avons néanmoins un outil pour pouvoir avoir une idée de l'espace des phases à quatre dimension : les sections de Poincaré (SP).

La section de Poincaré pour une trajectoire quelconque se construit dans un plan (ici ce sera le plan défini par  $x = 0$ ), chaque fois que la trajectoire coupera ce plan (dans un seul sens : de  $x < 0$  à  $x > 0$ ) un point sera tracé dans la SP (à chaque tour). De ce fait, à l'inverse d'un espace des phases qui est continue, une SP est un ensemble de point discret. Dans cet espace là, nous ne perdons aucune information. En effet, nous savons qu'à chaque fois que nous aurons un point, nous aurons la coordonnée  $x$  ainsi que les coordonnées  $y$  et  $vy$  puisque que nous traçons  $Vy(y)$  comme dans un espace des phase à deux dimensions. Aussi, une SP est tracée à énergie constante ce qui nous permet de remonter à la dernière variable  $Vx$ . Ainsi une SP est une méthode très simple pour obtenir des informations sur le nombre de trajectoire chaotique et/ou stable dans un système quelconque.

Reprenons nos courbes précédentes des figures 6 et 7.

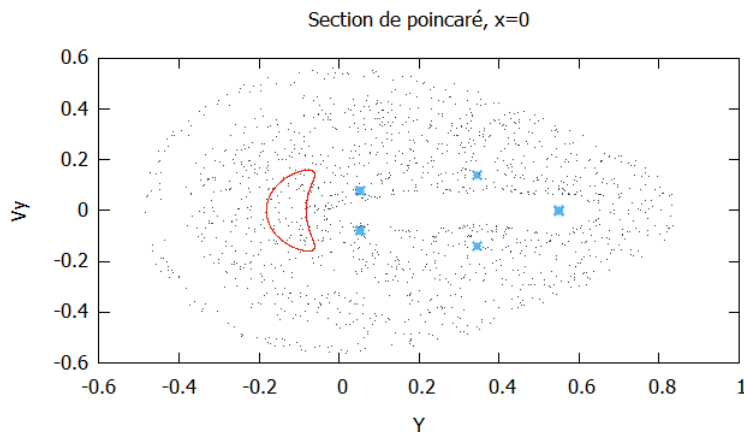


FIGURE 8 – Section de Poincaré pour trois trajectoires. En rouge la trajectoire (a). En bleu la trajectoire (c) et en noir la trajectoire chaotique (d).  $t_f=10\,000$ .

Sur les représentations des SP nous pouvons dénombrer plusieurs cas de figure. Le premier est un simple point, ce qui correspondrait à une trajectoire elliptique ou circulaire ou encore une trajectoire fermée de résonance [1 :1]. En bleu sur notre schéma nous retrouvons la trajectoire (c) de résonance [5 :5] et donc cinq points distincts. Le temps final étant dix fois plus grand que dans la sous section 3.2, cette trajectoire a fait dans ce cas environs 320 périodes. Cela montre une fois de plus la précision de la méthode SY2 puisque tous ces points sont bien superposés.

En rouge, la trajectoire n'est pas fermée, ainsi son image sur la section de Poincaré se reflète par des points qui tendent à être une courbe fermée.

Le dernier cas dont nous parlerons est le phénomène décrit par les points noirs. Ils sont distribués de manière tout à fait aléatoire sur certaines zones de la section de Poincaré. De manière général ils reflètent le chaos d'une trajectoire et ont pour limite des ilots de stabilité. Bien sûr, ici la courbe en rouge et les points noirs (ou même les croix bleus) n'ont aucun lien entre eux car l'énergie n'est pas là même.

Ainsi on peut facilement distinguer les trajectoires chaotiques aux trajectoires ordonnées ou stables. Si nous obtenons une série de point tendant à suivre un même schéma, la trajectoire sera plutôt stable. Tandis que si les points se répartissent de façon aléatoire dans une zone de la SP, la zone aura tendance à abriter des trajectoires chaotiques.

Il est alors aisé de tracer des cartes du potentiel de Hénon-Heiles en traçant plusieurs trajectoire à énergie constante sur une même section de Poincaré. Nous obtiendrons ainsi une carte délimitant les zones aux trajectoires plutôt chaotiques ou inversement, aux ilot de stabilités (pouvant contenir d'autres zones chaotiques).

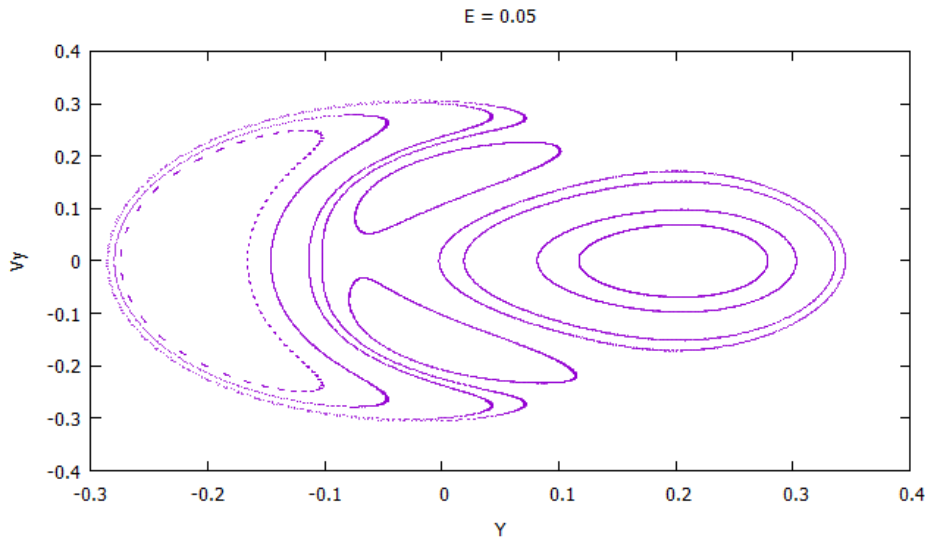


FIGURE 9 – Section de Poincaré obtenue pour dix trajectoires à énergie constante.

Comme attendu, à basse énergie il n'y a pas beaucoup d'orbite chaotique. Il n'est pas facile de trouver d'orbites chaotiques sur des énergies aussi basse si elles existent c'est pourquoi nous ne pouvons pas en voir ici sur ce schéma. Cependant nous pouvons déjà dire qu'il y a beaucoup d'orbite non fermée (type boîte) stable pour une énergie de 0.05. Nous nous attendons par ailleurs à trouver de plus en plus de chaos en augmentant l'énergie totale.

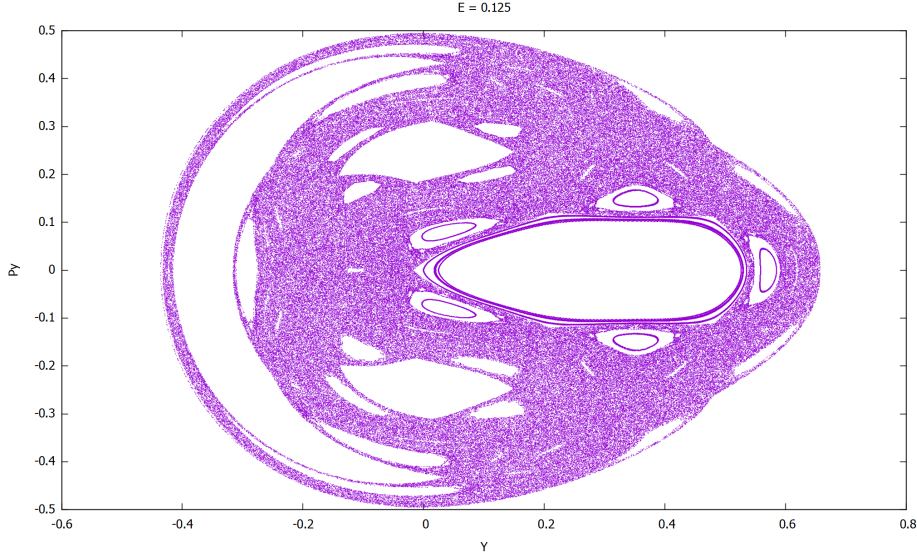


FIGURE 10 – Section de Poincaré obtenue pour une quinzaine de trajectoires à énergie constante.

L'énergie sur la figure 10 est relativement haute (L'énergie d'échappement se trouvant aux alentours de  $\frac{1}{6}$ ) par conséquent il n'est pas surprenant d'obtenir autant d'orbites chaotiques. Nous notons néanmoins la présence d'îlot de stabilité délimités par les courbes fermées (formées par des milliers de points) qui reflètent comme auparavant des trajectoires non fermées. Cependant, à une telle énergie les trajectoires chaotiques dominent largement. Ce qui montre que le pourcentage d'orbites chaotiques augmente quand l'énergie augmente. Afin de caractériser ces trajectoires, nous avons besoin d'autres outils car arrivé à ce point, nous ne pouvons rien dire de plus.

### 3.4 Caractérisation du Chaos

Pour pouvoir caractériser à quel point une trajectoire est chaotique, nous avons besoin d'autres méthodes que celles vues jusqu'à présent. Afin de nous permettre de savoir à quel point une orbite peut être chaotique nous allons comparer deux méthodes.

#### 3.4.1 Méthode des exposants de Liapunov

Un système où lorsque que les positions initiales varient très légèrement résultent en deux trajectoires très différentes est dit chaotique. Une des façon de mesurer ce chaos est de mesurer la distance d'éloignement des deux trajectoires en fonction du temps.

L'exposant de Liapunov mesure à quelle vitesse les deux trajectoires s'éloignent et est défini par :

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln(s(t)) - \ln(s_0)}{t} \quad (8)$$

où  $s(t)$  est l'espacement en fonction du temps,  $s_0$  est l'espacement initiale des trajectoires et  $\lambda$  est l'exposant de Liapunov. Lorsque cet exposant est positif, la trajectoire est chaotique, plus  $\lambda$  est grand, plus la trajectoire est chaotique. Lorsque l'exposant est négatif, la

trajectoire aura tendance à être stable. Par conséquent, en étudiant un système dynamique, si toutes ses trajectoires ont un exposant de Liapunov négatif, le système sera stable. Inversement si on obtient des exposants de Liapunov positif (pas forcément pour toutes les trajectoires) le système sera sensible aux conditions initiales et sera donc chaotique.

### 3.4.2 Méthode de SALI

La méthode des exposants de Liapunov n'est pas la plus adaptée pour caractériser le chaos dans le genre de système dynamique étudié ici. En effet, cette méthode mesure la distance à tout temps entre deux trajectoires, cependant deux trajectoires divergent aussi de part leurs comportements respectifs vis à vis de leurs directions. La méthode de SALI essaye de répondre à cette problématique. En posant deux vecteurs déviations par rapport au point initial d'où nous voulons connaître l'aspect chaotique (ou sa stabilité). La longueur de ces vecteurs n'étant guère intéressante, nous les divisons par leurs normes respectives et suivons leurs évolutions au cours du temps. Le coefficient de SALI est défini tel que :

$$\begin{cases} d_- = \hat{w}_1(t) - \hat{w}_2(t) \\ d_+ = \hat{w}_1(t) + \hat{w}_2(t) \\ SALI(t) = \min \langle \|d_-\|, \|d_+\| \rangle \end{cases}$$

où  $\hat{w}_1(t)$  et  $\hat{w}_2(t)$  sont nos deux vecteurs unitaires.

Il est vite clair que cette méthode mesure l'alignement des deux vecteurs déviations. En effet, lorsque qu'ils sont alignés de manière parallèle  $d_-$  sera égale à zéro, et si ils sont antiparallèle ce sera  $d_+$ . Ainsi lorsque  $SALI(t)$  tend vers zéro, la trajectoire considérée est chaotique et plus vite elle tend vers 0, plus la trajectoire sera chaotique. Il est par conséquent possible de tracer une carte de section de Poincaré coloriées selon la valeur du SALI (pour chaque trajectoires) et savoir dans quelles zones le chaos est le plus présent (un peu comme les cartes d'équipotentiels avec de plus vives couleurs aux endroits les plus énergétiques).

### 3.4.3 Résultats

Afin de tester les différentes méthodes nous avons repris les trajectoires que nous connaissons déjà depuis la section 3.2.

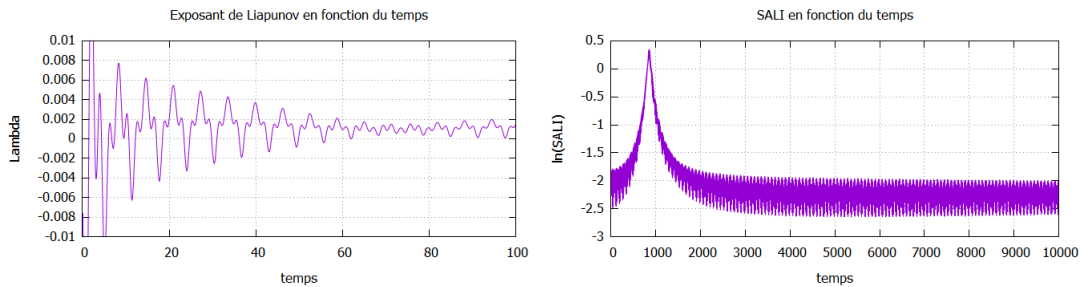


FIGURE 11 – Courbe (b) : résonance 1 :1

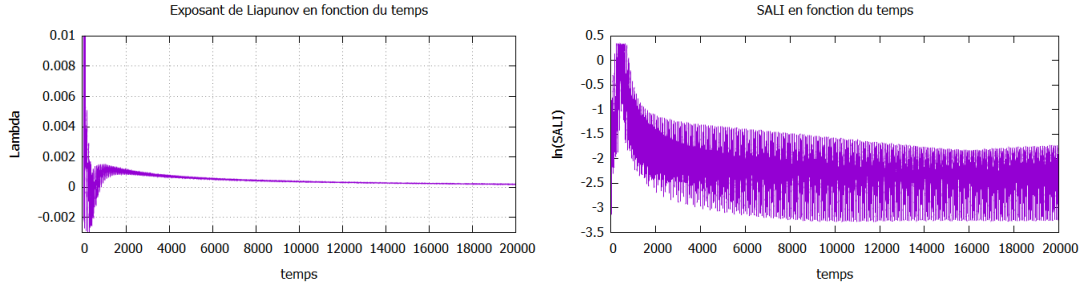


FIGURE 12 – Courbe (c) : résonance 5 :5

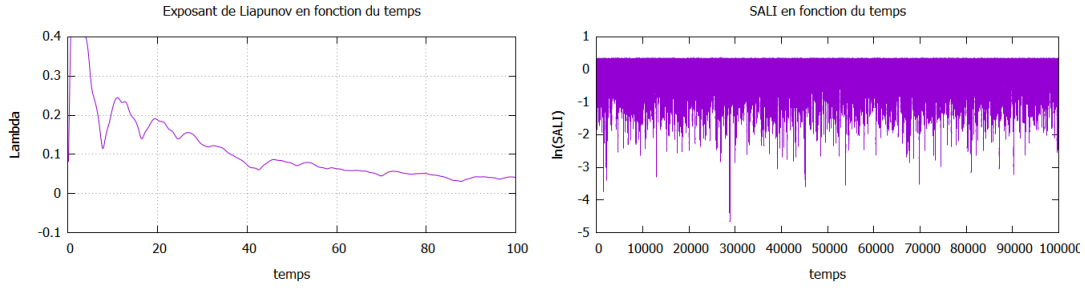


FIGURE 13 – Courbe (d) : Orbite chaotique.

Nous savions déjà que les courbes (a) et (c) étaient non chaotiques à l'inverse de la courbe (d). Les principales différences que nous remarquons entre les figures ordonnées et chaotiques sont que, pour les exposants de Liapunov, pour les temps courts, l'exposant est périodiquement négatif tandis que pour la courbe d il est constamment positif. Nous pouvons en conclure que (a) et (b) possèdent des orbites en équilibre mais très sensible aux conditions initiales. Nous pouvons aussi remarquer une certaine similarité entre leurs courbes aussi bien pour l'exposant de Liapunov que pour SALI. Quant à leur SALI, une fluctuation au court du temps est présente avec un pique aux environs d'un temps  $\sim 1\,000$  itérations puis semble converger vers un attracteur.

Contrairement à ce comportement, le SALI de la courbe (c) fluctue de manière totalement aléatoire et ne respecte pas de périodicité particulière puis subit un léger pique aux alentours d'un temps  $\sim 30\,000$ . Nous pouvons affirmer que ce comportement correspond bien à une trajectoire chaotique cependant nous n'avons pas réussi à obtenir un pique vers moins l'infini (Quand SALI tend vers 0,  $\ln(\text{SALI})$  tend vers  $-\infty$ ).

## 4 Conclusion

Nous avons vu dans ce projet comment nous devons choisir une méthode numérique parmi plusieurs afin de bien conserver les valeurs physiques qui nous intéressent. La méthode SY2 était ici la plus adéquat afin de garantir une conservation de l'espace des phases et par conséquent de l'énergie du système. Ainsi les orbites chaotiques qui décrivent des mouvements bien plus complexes que pour un système à potentiel central ne peuvent pas

s'échapper à condition de prendre des conditions initiales où elles sont piégées.

De plus le potentiel de Hénon-Heiles nous a offert la possibilité d'étudier un cas relativement simple à mettre en œuvre de système dynamique chaotique et par la même occasion de tester deux méthodes de caractérisation du chaos. La variation de l'énergie étant un facteur crucial pour prédire si une orbite sera chaotique.

Finalement, la méthode de SALI, bien que plus difficile à mettre en œuvre, est meilleure que la méthode des exposants de Liapunov dans certains systèmes où les différences entre trajectoires dont les conditions initiales sont très proches sont bien plus que la distance qui les sépare.

De nos jours nous possédons de fabuleux outils qui nous permettent d'étudier des systèmes bien plus complexes que nous ne pouvions l'imaginer il y a encore quelques décennies. Ce sont des outils qu'il faut apprendre à manipuler et à adapter pour obtenir des résultats fiables selon les situations.

## A Annexes

### A.1 Espace des phases

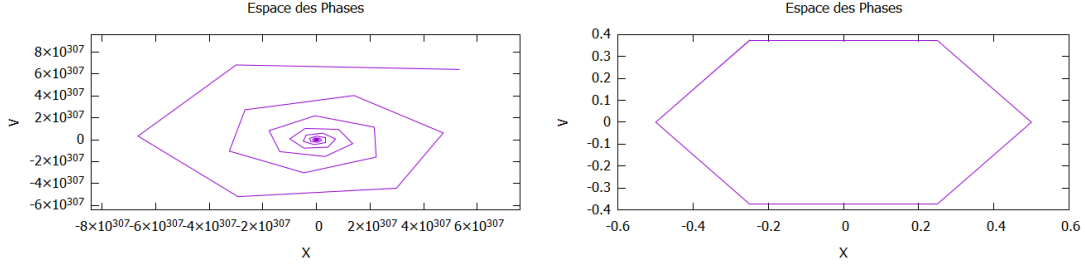


FIGURE 14 – Ici à gauche l’espace des phases pour la méthode RK2, à droite l’espace des phases pour la méthode SY2 correspondant à 150 périodes environs et à un  $\Delta t = 1$ . Les conditions initiales sont  $x(0)=0.5$  et  $v(0)=0$ .

Pour ces deux courbes dans l’espaces des phases, nous avons pris un pas de temps ridiculement grand pour mettre en avant le phénomène d’accroissement de l’aire dans l’EP (Qui ne se voit pas énormément avec des pas de temps plus petit comme décrit dans la section 2). On voit très clairement que la méthode SY2 conserve cette aire quand la RK2 diverge très rapidement.

### A.2 Oscillateur anharmonique

Le potentiel d’un oscillateur anharmonique à deux dimensions est défini tel que :

$$U(x, y) = \frac{x^6 + y^6}{6} \quad (9)$$

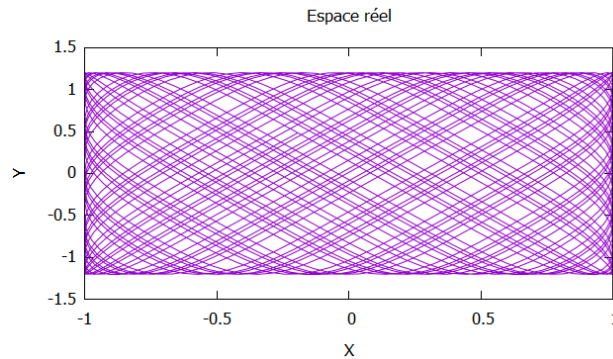


FIGURE 15 – Exemple de trajectoire possible pour un système subissant un potentiel anharmonique.



## Références

### B Bibliographie

- [1] P.Bergé, C.Vidal, Y.Pommeau  
L'ordre dans le chaos : Vers une approche déterministe de la turbulence.  
Hermann (1997)
- [2] G. Gomez, Martin Wen-Yu Lo, Josep J. (2003)  
Libration Point Orbits and Applications : Proceedings of the Conference.
- [3] A.-S. Libert, Ch. Hubaux and T. Carletti  
Symplectic integration of deviation vectors and chaos determination. Application to the Hénon-Heiles model and to the restricted three-body problem.  
<https://arxiv.org/pdf/1005.5611v2.pdf>
- [4] G. Contopoulos, P. A. Patsis  
Chaos in Astronomy : Conference (2007)
- [5] Charalampos Skokos, Chris Antonopoulos, Tassos C. Bountis<sup>1</sup>, and Michael N. Vrahatis  
How Does the Smaller Alignment Index (SALI) Distinguish Order from Chaos?
- [6] Michel Henon and Carl Heiles  
The Applicability of the Third Integral Of Motion : Some Numerical Experiments  
Princeton University Observatory, Princeton, New Jersey (1963)
- [7] Christian Emanuelsson, University of Karlstad  
Chaos in the Hénon-Heiles system  
[https://jfuchs.hotell.kau.se/kurs/amek/prst/11\\_hhe.pdf](https://jfuchs.hotell.kau.se/kurs/amek/prst/11_hhe.pdf)
- [8] Charalampos(Haris) Skokos and Thanos Manos  
The Smaller (SALI) and the Generalized (GALI) Alignment Indices : Efficient Methods of Chaos Detection.  
<http://mathresearch.uct.ac.za/hskokos/SKOKOSpublications/BookChapters/BC02.pdf>