ロボットの運動（ベクトル運動）

ロボット概論 7

第7回（2019/11/11）

担当：山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - センサとは
  - 色々な内界センサ
  - 色々な外界センサ
- 今回の内容
  - ベクトルの基礎
  - 内積と外積
  - トルクと角速度のベクトル表現
  - 行列の基礎

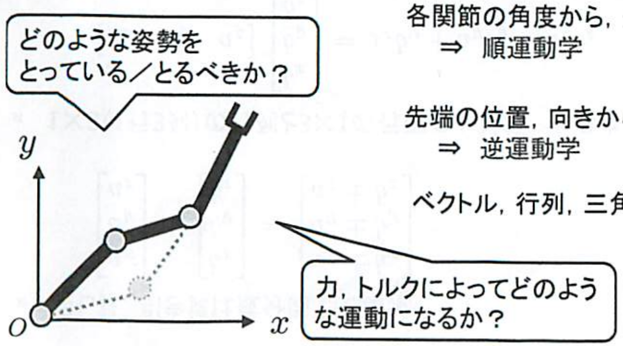
運動学と動力学

- 運動学（キネマティクス，kinematics）
  - ロボットアームのリンクの位置や速度などの関係を幾何学的に考える

各関節の角度から，先端の位置，向きを求める
⇒ 順運動学

先端の位置，向きから，各関節の角度を求める
⇒ 逆運動学

ベクトル，行列，三角関数による計算



- 動力学（ダイナミクス，dynamics）
  - ロボットアームにかかる力やトルクと運動との関係を考える
  - 運動方程式と微積分学

ベクトルの基礎

- 向きと大きさを持った量をベクトルという
- 変位，速度，加速度，力，トルク，角速度等様々な物理量がベクトルで表される
- 一方，長さ，質量，面積など大きさのみで表される量をスカラーという
- 工学では，主に縦ベクトルが使われる

2次元縦ベクトル（列ベクトル）

3次元横ベクトル（行ベクトル）

例）

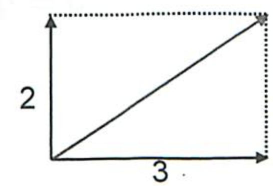
$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ベクトルの大きさ（スカラーになる）

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{13}$$



ベクトルの計算

- ベクトルの計算は行列の計算と同じ
- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$$

- 1×3（1行3列）の行列と3×1の行列のかけ算 ⇒ スカラーになる（後述の内積）

1 × 3　3 × 1

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_y + a_y b_y + a_z b_z$$

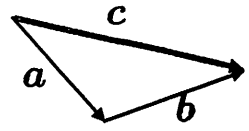
- 3×1の行列と1×3の行列のかけ算 ⇒ 3×3の行列になる

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

3 × 1　1 × 3

ベクトルの基礎

- ベクトルの足し算の図的意味



$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$ （終点ー始点）

- 以下の性質を持つ

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

$$(x+y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

※x, yはスカラー

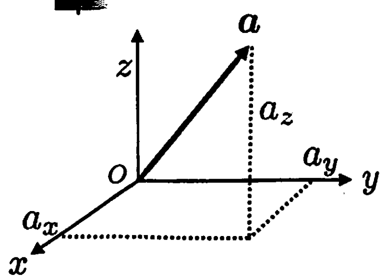
- 転置（transpose）:（上付きの）記号T

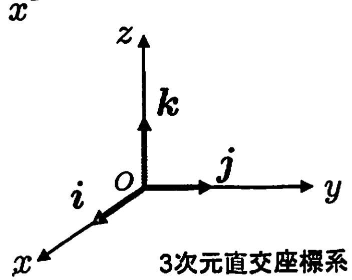
縦⇔横の変換

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

位置ベクトル





3次元直交座標系
（右手系）

- 物体の位置をベクトルで表す（位置ベクトル）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- 大きさ1のベクトル・・・単位ベクトル

例）直交単位ベクトル

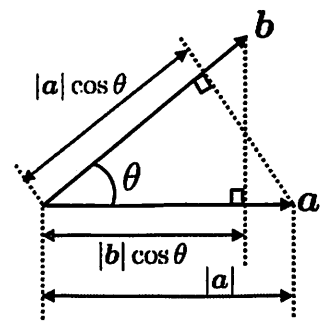
$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 単位ベクトルを用いた位置ベクトルの表現

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

単位ベクトル方向成分の大きさ

ベクトルの内積（・, inner product, スカラー積）



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \end{aligned}$$

各成分の積和

ベクトルの大きさ

ベクトルのなす角度

- 値はスカラー
- 直交するベクトルの内積 ⇒ 0
- 同一直線上のベクトルの内積
  ⇒ ベクトルの大きさの積

- 直交単位ベクトルの内積

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = 1$$

内積を使った計算

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

- ベクトル$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{i}$方向成分a_xを取り出したい

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$ の$\boldsymbol{i}$方向の単位ベクトルとの内積をとる

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_x\underbrace{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}}_{1}+a_y\underbrace{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}}_{0}+a_z\underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}}_{0}=\underline{\underline{a_x}}$$

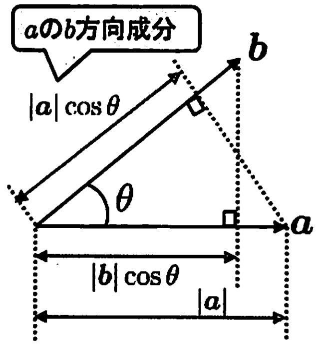
- ベクトルの，ある方向の成分を求めたい
  ⇒ その方向の単位ベクトルとの内積をとればよい

ベクトル$\boldsymbol{b}$と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\left|\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|\cos\theta$$

$$=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

ベクトル$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{b}$方向成分（スカラー）



演習1

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$ のとき，以下を計算せよ

$\boldsymbol{a}^T=$ $[2\ \ 3\ \ -1]$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $[2\ 3\ -1]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$

$=-5$

$|\boldsymbol{a}|=$ $(2^2+3^2+(-1)^2)^{1/2}$

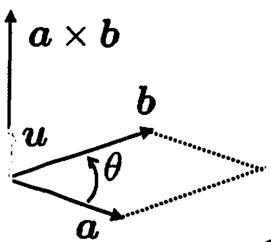
$=\sqrt{14}$

ベクトル$\boldsymbol{b}$の$\boldsymbol{a}$方向成分

$\boldsymbol{b}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cdot\left|\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|\cos\theta$

$=|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$

ベクトルの外積（×，vector product，ベクトル積）



$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)\,\boldsymbol{u}$$

※ $\boldsymbol{u}$は$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$を含む平面に垂直で，その向きを$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}$の方向に$\theta(\leq\pi)$だけ回転させたとき右ねじが進む方向の単位ベクトル

工学では，2つのベクトルに垂直なベクトルが欲しいときがある

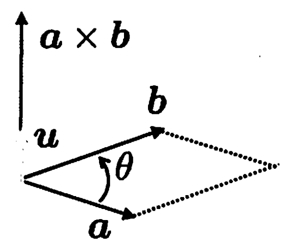
内積と異なり，計算結果はベクトルである

右ねじ･･･時計方向に回すと奥に進む
（先端を手前に見たとき，反時計回りになるように）

外積の大きさ $$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$を2辺とする平行四辺形の大きさ

外積の計算

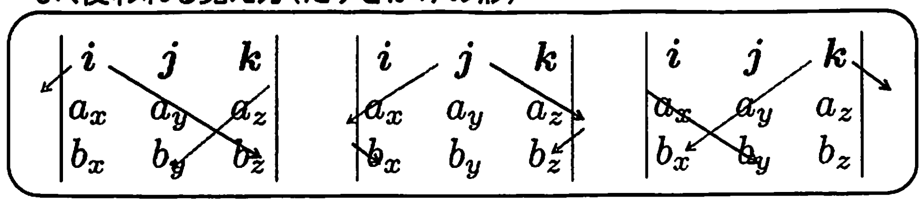


$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

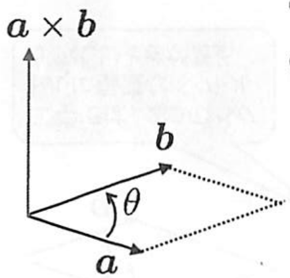
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix}$$

よく使われる覚え方（たすきがけの形）



外積の公式



$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$ （交換法則は成り立たない）

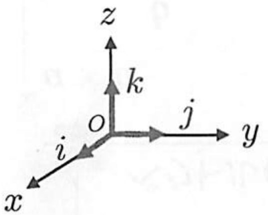
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$ （結合法則は成り立たない）

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$ （分配法則）

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

（ベクトル3重積）



直交単位ベクトルの外積

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0$$

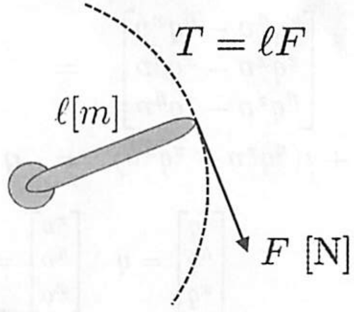
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

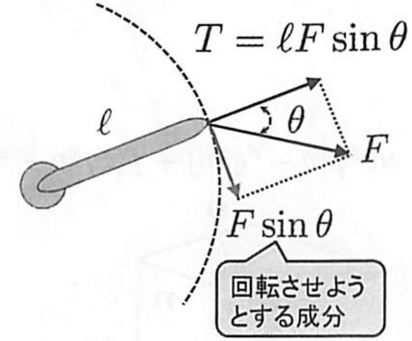
a, bの向きが同一線上のとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

（復習）トルク（力のモーメント）

- 物体を回転させようとする能力を表す物理量（単位 Nm）
- （回転軸までの距離） × （（接線方向の）力の大きさ）
- 先端にかかる力が同じでも，腕が長いほど，トルクは大きい。また，同じトルクで回転させても，腕の先ほど力は小さくなる。

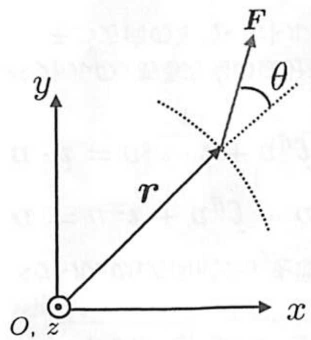


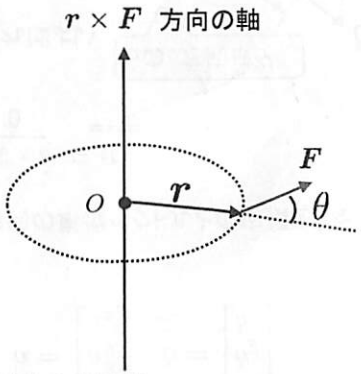


- 正しくはベクトル量であり，位置ベクトルと力ベクトルの外積 $\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{F}$

トルク（力のモーメント）のベクトル表現

- 位置ベクトルrの先端にFの力が作用するとき，外積 $r\times F$ の向きが回転軸，大きさが| $r\times F$ | のトルクが発生する
- rとFがともにx-y平面上ならば，トルクのベクトルの向きは，平面に垂直になる
- トルクの大きさは $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$





※ ⊙ は画面の奥から手前に向けてz軸があることを示す

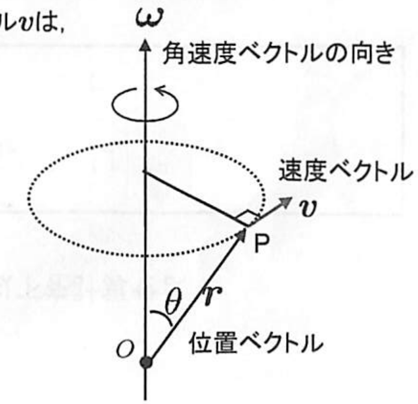
角速度のベクトル表現

- 角速度もベクトルで表現される
- 角速度ベクトルωは，ωの向きが回転軸，|ω|が角速度の大きさを示す。（回転の向きは右ネジの向き）
- 点Pの位置ベクトルがrのとき，速度ベクトルvは，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

加速度ベクトルaは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\end{aligned}$$



- また，角運動量をベクトルで表すと，

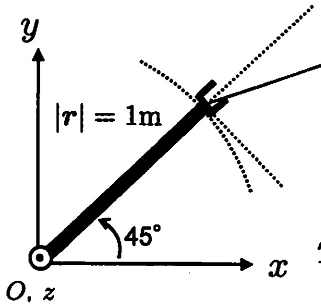
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = J\boldsymbol{\omega}$$

ただし，Jは慣性モーメント

- 剛体の回転運動を表すオイラーの運動方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{T}$

演習2

下図のように，x-y平面上を動くロボットアームの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の先端に，力$\boldsymbol{F}$ [N] が作用している。このときのロボットアームのトルク$\boldsymbol{T}$を求めよ。



$\boldsymbol{F} = [2 \ \ 1 \ \ -1]^T$

位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = [\frac{1}{\sqrt{2}} \ \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ 0]^T$

よって

$\boldsymbol{T} = |r \times F| = |r||F| \sin\theta$

$= |r||F| \sin 45°$

$= 1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

行列の基礎

- 要素を四角に並べることで行列(matrix)が作られる

例） 2行3列(2×3)の行列

列(column)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{行 (row)}$$

2次正方行列
（縦横のサイズが同じ）

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 単位行列(I, E, I_n)
対角成分が1，他は0

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 転置行列(T)
行と列が入れ替わる

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

行列の計算

- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

- 行列の掛け算 （$\ell \times m$行列 と $m \times n$行列 の掛け算 ⇒ $\ell \times n$行列）

2×2行列 と 2×1行列(列ベクトル) ⇒ 2×1行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$$

2×2行列 と 2×2行列 ⇒ 2×2行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ $\qquad (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ ⇐結合法則

$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ $\qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ ⇐分配法則

逆行列(inverse matrix)

- 掛けると単位行列になる

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

- 行列式(determinant) $|\boldsymbol{A}|$ あるいは $\det A$
$|\boldsymbol{A}|$ =0 のとき逆行列は存在しない

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ |\boldsymbol{A}| = ad - bc$$

※3次の場合はサラスの展開
一般には余因子展開等で計算

- 2次正方行列の逆行列

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

※一般には余因子行列や掃き出し法で計算

演習3

- 次の行列計算をせよ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3$$
$$= 1 - 6$$
$$= -5$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 1 + 3 \times (-2) & 1 \times (-1) + 3 \times 3 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 1 & 2 \times 1 + (-1) \times (-2) & 2 \times (-1) + (-1) \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$