1

第8回 安定判別2 ゲイン余裕・位相余裕

制御工学Ⅱ

ナイキスト簡易安定判別法の復習
位相交差周波数、ゲイン交差周波数
ゲイン余裕、位相余裕
ボード線図を用いたゲイン余裕、位相余裕

- 前回7：安定判別（1） フィードバック系の安定性
  - 開ループ特性と応答
  - 制御特性
  - 開ループと内部安定
  - ナイキストの安定判別法

2

簡単化されたナイキストの安定判別法

開ループ伝達関数が安定な場合 $\boxed{\Pi=0}$ より
　閉ループ不安定極　Z= $\boxed{0}$
となるためには $\boxed{N=0}$ でなければならない(Z=N+Π)ことから
簡単化されたナイキストの安定判別法
[ステップ1] 開ループ伝達関数の極の中に，その実部が正となるものがないことを確認する. → N=0のこと
[ステップ2] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡P(jω)C(jω)を角周波数ω=0～+∞の範囲で描く. G(jω)のこと.
[ステップ3] ωを0から∞へ変化させたとき，この開ループ伝達関数のベクトル軌跡が点(−1,0)をつねに左に見るように動くならば，系は $\boxed{\text{安定}}$ である. また，右に見れば系は $\boxed{\text{不安定}}$ となる.

?

3

簡易判別法

■開ループ特性が安定であるとして簡易判別法を適用する

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad K = 3,\ 6,\ 12$$

→ s=0, −1, −2 → Π=0

$K = 3$ のとき
点 $(-1, 0)$ を常に左に見る
⇒ $\boxed{\text{安定}}$

N=0

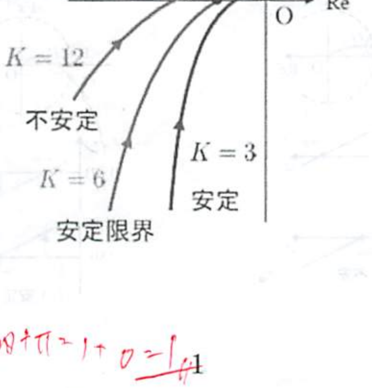
$K = 6$ のとき
ちょうど点 $(-1, 0)$ を通過する
⇒ $\boxed{\text{安定限界}}$ ← も覚

N=0

$K = 12$ のとき
点 $(-1, 0)$ を右にみるようになる
⇒ $\boxed{\text{不安定}}$

N=1

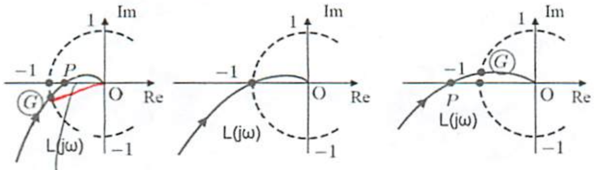
→ Z=N+Π=1+0=1



…差周波数

…は高かったゲインが周波数が上がるにつれて小さくなり
…ょうど1になる点、すなわち単位円を横切る周波数を
ゲイン交差周波数 ω_{gc} と呼び $|L(j\omega_{gc})|=1$ である。

この時　$\angle L(j\omega_{gc}) > -180°$, $|\angle L(j\omega_{gc})| < 180°$　安定
$\angle L(j\omega_{gc}) = -180°$　安定限界
$\angle L(j\omega_{gc}) < -180°$　不安定　　である。



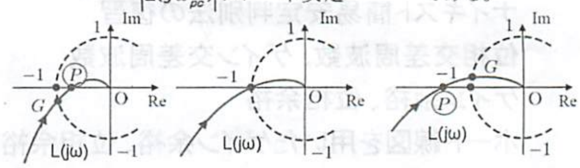
(a) 安定　(b) 安定限界　(c) 不安定

おくれる!

位相交差周波数

低周波から位相が遅れ、位相の遅れがちょうど −180°になる点、
すなわちベクトル軌跡が実軸を横切る周波数を
位相交差周波数 ω_{pc} と呼び $\angle L(j\omega_{pc}) = -180°$ である。

この時　$|L(j\omega_{pc})| < 1$　安定
$|L(j\omega_{pc})| = 1$　安定限界
$|L(j\omega_{pc})| > 1$　不安定　　である。



(a) 安定　(b) 安定限界　(c) 不安定

ナイキスト線図で見たゲイン余裕と位相余裕

■**ベクトル軌跡が点(-1,j0)から離れていれば安定であり、不安定になるまでの余裕を安定余裕という**

ベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ からある程度離れているならば，安定余裕がある。

ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと制御系が不安定になるか。

$$\mathrm{GM} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OP}}} \ (\mathrm{dB})$$
$$= 0dB - 20\log_{10}|L(j\omega_{pc})|$$

位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れると制御系が不安定になるか。

$$\mathrm{PM} = \angle \mathrm{GOP} \ (°)$$

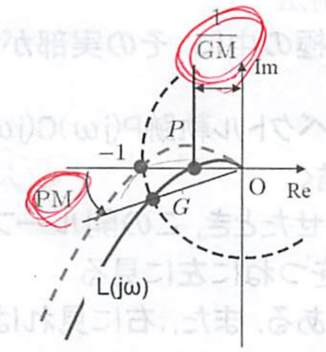
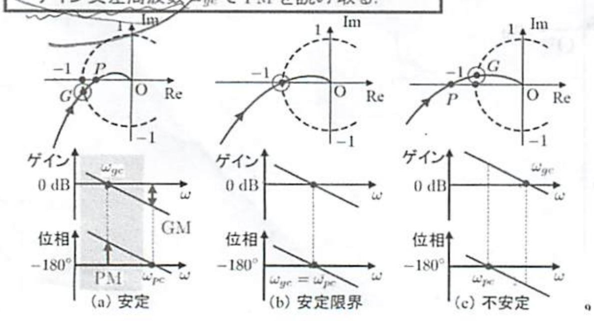


図 ゲイン余裕，位相余裕

ボード線図と対比1

ボード線図での読み取り (a) 位相が −180° より進む ⇒ 安定
(b) 位相が −180° ちょうど ⇒ 安定限界
(c) 位相が −180° より遅れる ⇒ 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} で PM を読み取る.



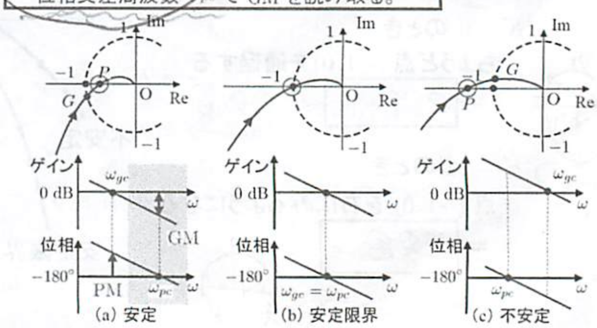
(a) 安定　(b) 安定限界　(c) 不安定

ボード線図と対比2

$G = 20\log_{10}|L(j\omega_{pc})|$

(a) ゲインが 0 dB より低い ⇒ 安定
(b) ゲインが 0 dB ちょうど ⇒ 安定限界
(c) ゲインが 0 dB より高い ⇒ 不安定

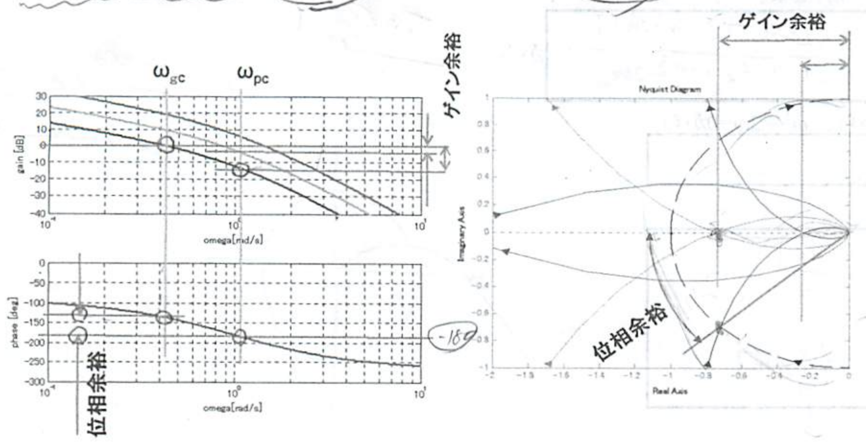
位相交差周波数 ω_{pc} で GM を読み取る。



(a) 安定　(b) 安定限界　(c) 不安定

ボード線図とナイキスト線図の比較

- ゲイン交差周波数で-180° までの位相角＝位相余裕を見る
- 位相交差周波数で0dBまでのゲイン＝ゲイン余裕を見る



ボード線図の事例

- 虚軸に極を持つ安定な事例
  （虚軸上に極がある場合）

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

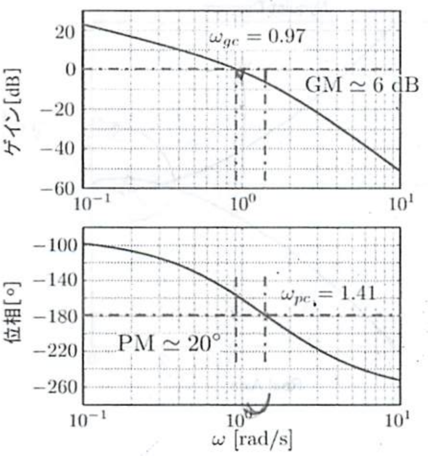
$(K = 3)$

ゲイン交差周波数
$\omega_{gc} \simeq 0.97$

位相余裕
$\mathrm{PM} \simeq 20^\circ$

位相交差周波数
$\omega_{pc} \simeq 1.41$

ゲイン余裕
$\mathrm{GM} \simeq 6$ dB



16

158

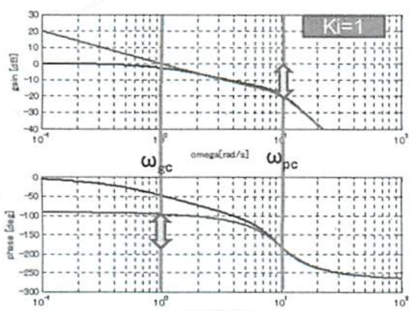
−180

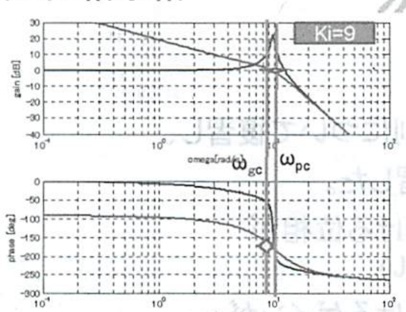
+158−180

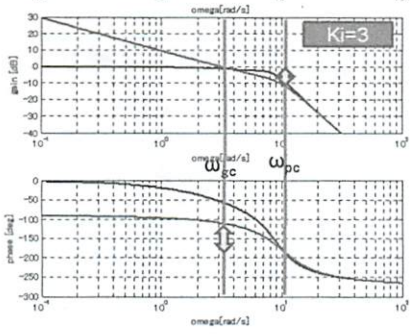
180−155

=35

ボード線図で見たゲイン余裕と位相余裕







$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{K_i(10)^2}{s^3+(10)s^2+(10)s+K_i(10)^2}, \quad (8.2)$$

演習1

開ループ伝達関数を$L(s)=\dfrac{20}{s(s^2+5s+2)}$とした場合、ゲイン余裕を求め、
さらにフィードバック制御系の安定を判別せよ。

1) $L(j\omega)=$ $\boxed{\dfrac{20}{j\omega\{(j\omega)^2+5j\omega+2\}}=\dfrac{20[-5\omega^2+j(\omega^3-2\omega)]}{(-5\omega^2)^2+(\omega^3-2\omega)^2}}$ から

2) 位相交差周波数は虚部が0であるから、$\omega^3-2\omega=0$から

$\omega_{pc}=$ $\boxed{\sqrt{2}}$

3) この時のゲイン余裕は

$|L(j\omega_{pc})|=\left|\dfrac{20[-5\omega_{pc}^2]}{(-5\omega_{pc}^2)^2}\right|=\left|\dfrac{20}{-5\cdot 2}\right|=2$

$GM=$ $20\log_{10}\dfrac{1}{|L(j\omega)|}=-6\,[\mathrm{dB}]$

はたしてこれは安定か？

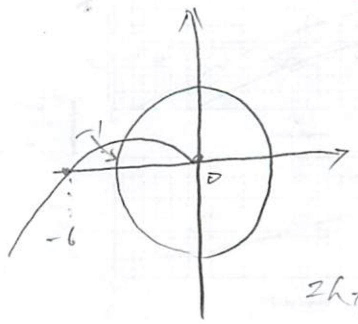
不安定

$s=0,\ s=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 2}}{2\cdot 1}$

$\pi=0$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

$=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}<0,\ \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}<0$

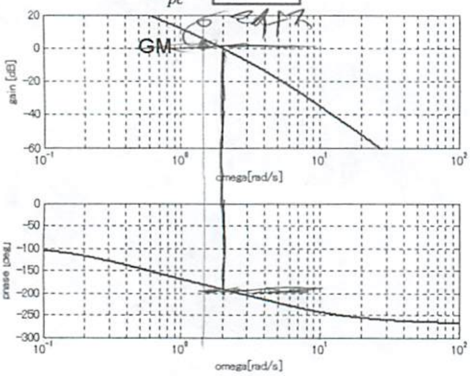


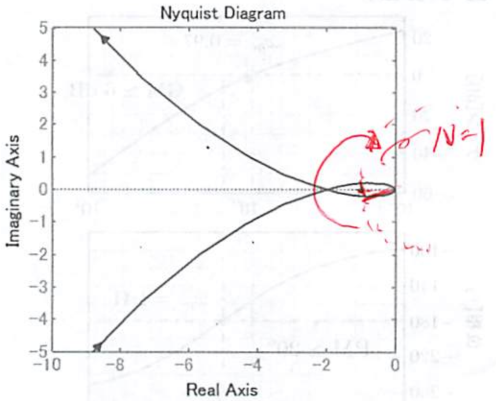
こんなイメージ(?)

演習1・・・続き

■安定判別はゲイン余裕がマイナスとなって $\boxed{不安定}$

$\omega_{pc}=$ $\boxed{\sqrt{2}}$





~~N=-1~~
~~π=0~~

N=1
π=1　∴Z=2

まとめ

■簡略化されたナイキストの安定判別について復習し、

■位相余裕・ゲイン余裕について学習した。

■位相余裕はゲイン交差周波数における位相が
－180°に至るまでの遅れ角をいい、

■ゲイン余裕は位相交差周波数におけるゲインが
0dBを越さない大きさをいう。

■これらをボードで線図で見て、安定を判別することを学
習した。