

例題 1 —回転系の運動量の法則—

図 1 は遠心羽根車の構造の概略と、遠心ポンプ羽根車の 2 枚の羽根間の流れを表す速度線図を示したものである。

羽根車はその中心 O のまわりを角速度 Ω で反時計まわりに回転している。羽根車と同じ回転座標系で見たとき、羽根入口 A から流入した流体が羽根出口 B で羽根に沿った方向に流出すると仮定すれば、点 A および点 B における速度ベクトルは図 1 の w_1, w_2 (回転座標系から見た相対速度) となる。しかるに、羽根車は角速度 Ω で反時計回りに回転しているので、それによる周速度 u_1, u_2 を加え合わせたものが、絶対座標系 (静止座標系) から見た羽根車入口と出口での速度 v_1, v_2 (静止座標系から見た絶対速度) となる。

羽根入口と出口の量に対して、添え字 1 および 2 を付け、羽根角を β 、絶対速度が接線となす角を α とする。羽根車の羽根枚数を Z 、全流量を Q として、以下の問に答えよ。

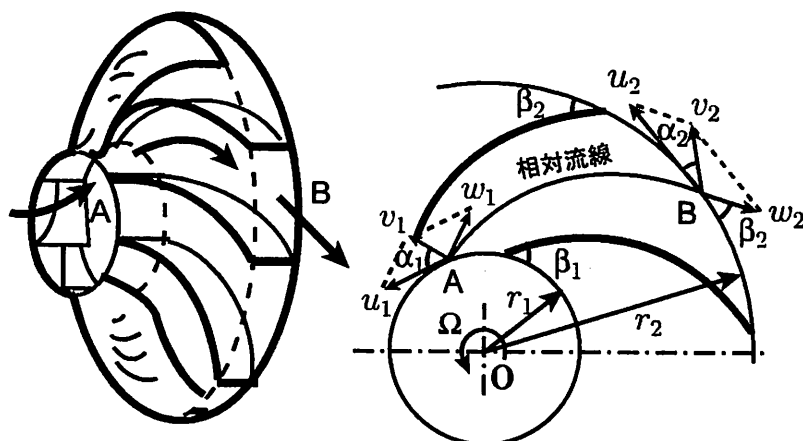


図 1: 遠心羽根車と羽根入口・出口の速度三角形

- (1) 羽根車内に図 1 (右図) のような流れを起こすのに必要なトルク T を求めよ¹。
- (2) 羽根車が流体になす動力 L を求めよ。
- (3) 理論揚程 (オイラーヘッド) H_{th} を求めよ。

[解答]

- (1) 2 枚の羽根で囲まれた領域を検査面にとる。羽根車を流れる全流量 Q に対して、羽根枚数が Z であるならば、検査面内を流れる流量は Q/Z であることに注意する。そのとき、反時計回りを正にとれば、検査面内流体に関する、接線方向の角運動量変

¹ ポンプや送風機のような原動機の場合、外部から加えられた動力 (例えば、電気的エネルギー) によって羽根が強制的に回転することによって、流体にトルクを及ぼす。したがって、ここでいうトルクとは、流体からの反作用によって羽根車を受けるトルクではなく (これは風車のような被動機の場合の考え方)、図 1 のような流れを起こすために羽根車を強制的に回転させる際に必要なトルクのことである。

化とトルク T' の関係は,

$$\underbrace{\overbrace{\rho \frac{Q}{Z}}^{\text{質量流量}\dot{m}} (r_2 \times v_2 \cos \alpha_2)}_{\text{出口での角運動量}} - \underbrace{\overbrace{\rho \frac{Q}{Z}}^{\text{質量流量}\dot{m}} (r_1 \times v_1 \cos \alpha_1)}_{\text{入口での角運動量}} = \underbrace{T'}_{\text{流体が羽根車から受けるトルク}} \quad (1)$$

羽根枚数が Z 枚の羽根車の場合, 羽根車全体が流体に及ぼすトルクは, $T = ZT'$ であるので, 結局,

$$T = \rho Q (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \quad (2)$$

となる².

- (2) たとえば, 半時計回りに角速度 Ω で回転している半径 r の円周上で, 接線方向に力 F が作用している場合, 動力 (仕事率) L は,

$$L = F \times \underbrace{r\Omega}_{=v} = T\Omega \quad (3)$$

であることに注意して,

$$L = T\Omega = \rho Q \Omega (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \quad (4)$$

ただし, 図1 (右図) の速度三角形から,

$$u_1 = r_1 \Omega, \quad u_2 = r_2 \Omega \quad (5)$$

であるので, 結局, 式 (4) より, 動力 L は次式となる.

$$L = T\Omega = \rho Q (u_2 v_2 \cos \alpha_2 - u_1 v_1 \cos \alpha_1) \quad (6)$$

- (3) 作動流体は, 入口 A からポンプに入り, 出口 B からポンプを出るまでの間に, 単位質量当り ΔE だけエネルギーが増える. いま, 動力の関係式

$$\underbrace{L[W=J/s]}_{\text{流体が羽根車から得た動力}} = \underbrace{\rho Q}_{\text{羽根車を通過した質量流量 [kg/s]}} \times \underbrace{\Delta E}_{\text{流体が得た単位質量当りのエネルギー [J/kg]}} \quad (7)$$

と, 式 (6) から, このエネルギーの増分 ΔE は,

$$\Delta E = u_2 v_2 \cos \alpha_2 - u_1 v_1 \cos \alpha_1 \quad (8)$$

²本問で求める対象は, 流体が及ぼされるトルク (つまり, 図1のような流れを生み出すのに必要な外部からポンプに加えるべきトルク) であるため, 反作用を考える必要はない.

理論揚程（ヘッド）は，式 (8) の両辺を重力加速度 g で割って，単位を [m] にすることにより求められる³。

$$H_{th} = \frac{u_2 v_2 \cos \alpha_2 - u_1 v_1 \cos \alpha_1}{g} \quad (11)$$

この式 (11) の理論揚程はオイラーヘッドとも呼ばれている。流体の流入角 $\alpha_1 = 90^\circ$ のとき， $u_1 v_1 \cos \alpha_1 = 0$ となる。そのため，通常，羽根車の設計では $\alpha_1 = 90^\circ$ とする。

次に，式 (11) に含まれる \cos を消去しよう。図 1 の速度三角形を抜き出せば，図 2 のように描くことができる（ベクトルの足し算では平行移動できることに注意せよ）。そのとき，余弦定理より，

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha \quad (12)$$

この式は，羽根車入口と出口どちらでも成り立つので，添え字は省略している。式 (12) より，

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv} \quad (13)$$

この式 (13) に添え字 1 と 2 を付け，式 (11) に代入すれば，

$$H_{th} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \quad (14)$$

となる。

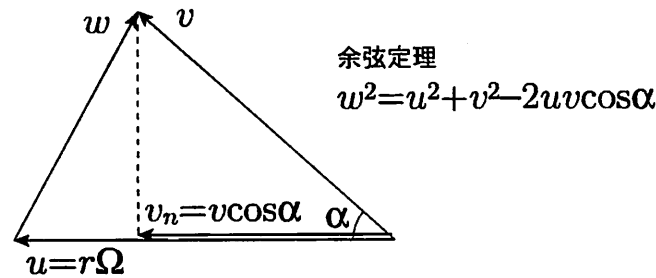


図 2: 速度三角形

³ベルヌーイの式を思い出せば，

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{一定} \quad (9)$$

式 (9) の単位は [J/kg] であるが，式 (9) の両辺を重力加速度 g で割り，[m] の単位にすれば，

$$\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{速度ヘッド}} + \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_{\text{圧力ヘッド}} + \underbrace{z}_{\text{位置ヘッド}} = \text{一定} \quad (10)$$

例題2 —羽根車の形（遠心羽根車・軸流羽根車・斜流羽根車）—

図3は遠心羽根車・軸流羽根車・斜流羽根車の構造の概略を示したものである。図1の r_1 , r_2 および式(8)の ΔE （もしくは、理論揚程 H_{th} ）をもとに、それぞれの特徴について述べよ。

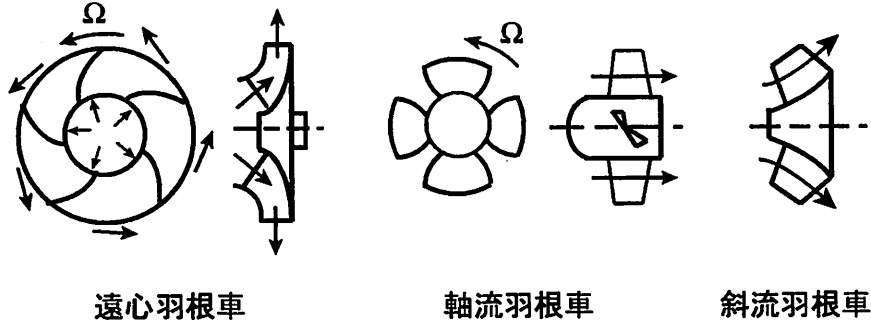


図 3: 遠心羽根車・軸流羽根車・斜流羽根車

[解答]

流体が羽根車から伝達されるエネルギー ΔE は式(8)で表され、次のように纏めることができる。

$$\begin{aligned}\Delta E &= u_2 v_2 \cos \alpha_2 - u_1 v_1 \cos \alpha_1 \\ &= \Omega(r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \begin{cases} \Delta E > 0: \text{原動機 (ポンプ, 送風機, 圧縮機)} \\ \Delta E < 0: \text{被動機 (水車, 風車, タービン)} \end{cases}\end{aligned}\quad (15)$$

ただし、式(5)の $u_1 = r_1 \Omega$, $u_2 = r_2 \Omega$ を用いた。

ターボ機械がポンプ、送風機、圧縮機のように羽根車から流体にエネルギーを与える形式のもの（原動機）であれば、流体が（ターボ機械から）受け取るエネルギー ΔE は正でなければならない。逆に、水車、風車、タービンのように流体がターボ機械にエネルギーを供給する形式のもの（被動機）であれば、流体が（ターボ機械から）受け取るエネルギー ΔE は負でなければならない。また、この絶対値 $|\Delta E|$ が大きいほど、ターボ機械は十分な仕事をすることになる。

まず、ポンプのような原動機がどのように流体にエネルギーを与えるのか考えてみよう。この場合、できるだけ大きな $\Delta E > 0$ を実現するには、式(15)の右辺第一項 ($r_2 v_2 \cos \alpha_2$) が第二項 ($r_1 v_1 \cos \alpha_1$) より十分大きくなる必要がある。これを実現するには、次の3パターンが考えられる。

- (i) $r_2 > r_1$ \Rightarrow 遠心羽根車 (外向き流れ)
 $(v_2 \cos \alpha_2 > v_1 \cos \alpha_1)$
(ii) $r_2 = r_1$ \Rightarrow 軸流羽根車
 $(v_2 \cos \alpha_2 > v_1 \cos \alpha_1)$
(iii) $r_2 > r_1$ \Rightarrow 斜流羽根車
 $(v_2 \cos \alpha_2 > v_1 \cos \alpha_1)$

それぞれの構造および流れの様子は、図3に示してある。流れの方向および速度の変化 ($v \cos \alpha$) に注目されたい (図1および図4参照)。

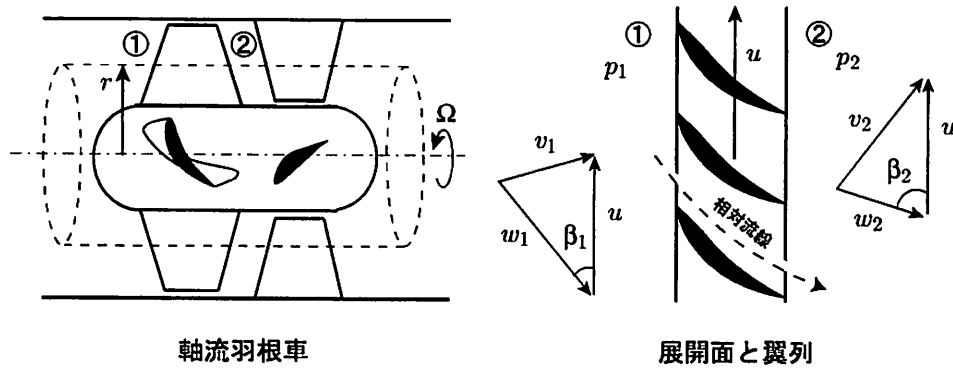


図 4: 軸流羽根の構成と翼列

以上の場合とは逆に、水車、風車、タービンのように流体のエネルギーを利用してターボ機械を駆動する場合は、これまでの話の全く逆を考えればよい。つまり、 $\Delta E < 0$ かつ $|\Delta E|$ ができるだけ大きくなる条件を構造的に実現するには次のようになる (図5参照)。

- (i') $r_2 < r_1$ \Rightarrow 遠心羽根車 (内向き流れ)
 $(v_2 \cos \alpha_2 < v_1 \cos \alpha_1)$
(ii') $r_2 = r_1$ \Rightarrow 軸流羽根車
 $(v_2 \cos \alpha_2 < v_1 \cos \alpha_1)$
(iii') $r_2 < r_1$ \Rightarrow 斜流羽根車
 $(v_2 \cos \alpha_2 < v_1 \cos \alpha_1)$

式 (16) で求めた理論揚程 (オイラーヘッド) を用いて分類すれば次のようになる。

$$H_{th} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \quad (16)$$

- (1) $(1/2)(v_2^2 - v_1^2)$: 運動エネルギーの変化 (動圧変化)。送風機、ペルトン水車、衝動タービンではこの効果を利用している。
- (2) $(1/2)(u_2^2 - u_1^2)$: 遠心力による圧力変化 (静圧変化)。遠心羽根車はこの効果を最大限に利用している (高圧力比)。
- (3) $(1/2)(w_1^2 - w_2^2)$: 流路面積変化に伴う相対速度変化による圧力変化。ディフューザ作用 (静圧変化)。相対速度を圧力に変換する際、損失が生じ易い。

- 遠心羽根車: (2) が支配的 (高圧力比)

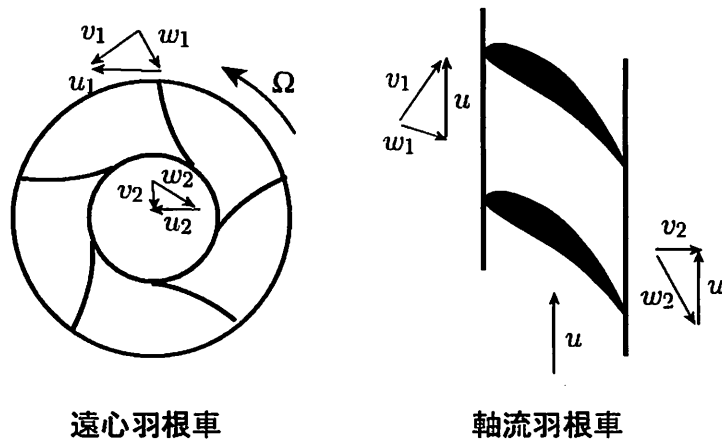


図 5: $\Delta E < 0$ の場合の羽根車の形式と流れ

- 軸流羽根車: (1) と (3) を利用 (低圧力比). (2) は無し.
- 斜流羽根車: (1) と (2) と (3) をすべて利用 (中圧力比).

例題 3 —相似則と比速度—

図 6 に示すような, 幾何学的に相似な 2 つの水車について, 次の諸量に関して相似則を考えよ.

- (1) 速度 v に関して
- (2) 流量 Q に関して
- (3) 動力 L に関して

また, それらを利用して, 水車の場合とポンプの場合における比速度について記述せよ.

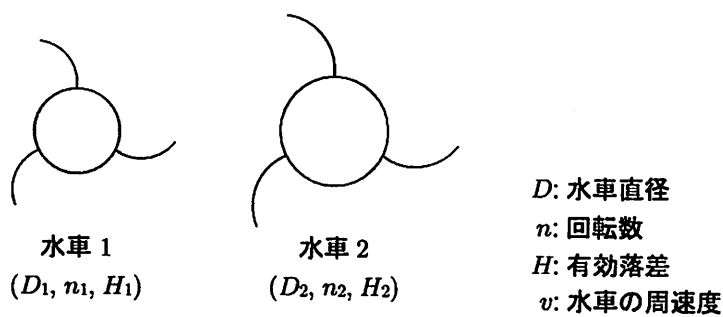


図 6: 幾何学的に相似な 2 つの水車

[解答]

- (1) 図6のように、水車の羽根車の直径を D 、回転数を n としたとき、速度 v は $v \propto nD$ 、 $v \propto \sqrt{H}^4$ であるので、水車1と水車2の間で

$$\frac{n_1 D_1}{\sqrt{H_1}} = \frac{n_2 D_2}{\sqrt{H_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad (17)$$

- (2) 流量 Q は、断面積 A と速度 v から、

$$Q = Av \propto D^2 v \propto D^2 (nD) = nD^3 \quad (18)$$

水車1と水車2の間で、

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1 D_1^3}{n_2 D_2^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{3/2} \quad (19)$$

なお、上式の第2式を導出する際には、式(18)を用いている。

- (3) 動力 L [W] は、

$$L = \underbrace{\rho Q}_{\text{質量流量 } \dot{m}} gH \text{ [W]} \quad (20)$$

であるので、水車1と水車2の間で、

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\rho Q_1 g H_1}{\rho Q_2 g H_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{5/2} \quad (21)$$

なお、上式の右边を導出する際には、式(19)を用いている。

以上の式(17), (19), (21) から、同じポンプ ($D_1 = D_2$) が異なる回転速度 ($n_1 \neq n_2$) で運転されているとき、

$$Q \propto n, \quad H \propto n^2, \quad L \propto n^3 \quad (22)$$

であることが分かる。

比速度（水車の場合）

与えられた水車と幾何学的に相似で落差 1 [m] の下で出力 1 [kW] の水車を考え、この水車の回転数を与えられた水車の比速度という。与えられた水車の落差を H [m]、出力を L [kW]、回転数を n [rpm] とし、式(21)の H_1 、 L_1 、 n_1 のかわりに H 、 L 、 n とおき、 $H_2 = 1$ [m]、 $L_2 = 1$ [kW]、 $n_2 = n_s$ とおくと、

$$n_s = n \frac{L^{1/2}}{H^{5/4}} \quad (23)$$

であり、この n_s を与えられた水車の比速度という。式(23)で注意すべきことは、水車の寸法を表す量が入っていないことであって、幾何学的に相似な水車は同一の比速度をもつ。ただし、同じ水車であっても回転数、出力、落差を変えると n_s も変わるので、普通は設計点の値をとる。また、 n_s は無次元量でないので採用する単位によって値が異なる。

⁴ベルヌーイの式を参照せよ。

比速度（ポンプの場合）

与えられたポンプと幾何学的に相似で単位の揚程，単位の流量のポンプを考え，このポンプの回転数を与えられたポンプの比速度という．与えられたポンプの揚程を H ，流量を Q ，回転数を n とし，式 (19) で $H_1 = H$ ， $Q_1 = Q$ ， $n_1 = n$ とおき， $H_2 = 1 [\text{m}]$ ， $Q_2 = 1 [\text{m}^3/\text{s}]$ ， $n_2 = n_s$ と置き換えると，

$$n_s = n \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad (24)$$

となり，この n_s が比速度を与える．水車の場合と同様に，この比速度も無次元量ではなく，単位の取り方によって異なる．

ポンプの形式と比速度 n_s の関係は表のとおりである．

表 1: ポンプの比速度と羽根車形状の関係

ポンプの形式	比速度 n_s [rpm, m ³ /min, m]
遠心形ポンプ	100 ~ 300
斜流（混流）形ポンプ	800 ~ 1000
軸流形ポンプ	1200 以上