Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
連続体の力学　M科

解析技術の中心になるもの

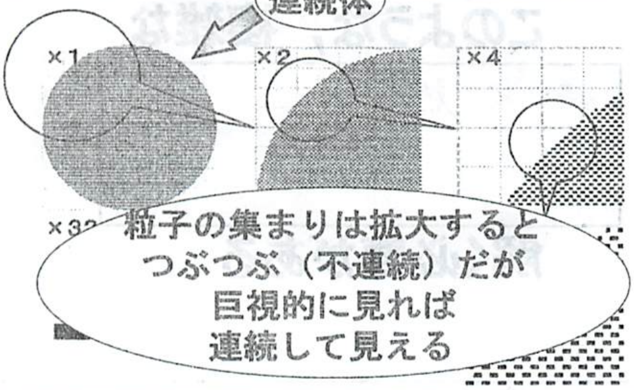
- 有限要素法

(Finite Element Method) **FEM**

解析的 に解くことが難しい
微分方程式 の近似解を
数値的 に得る方法の一つ

工学の諸事象は
微分方程式で表せるものが多い

連続体とは



気体（水蒸気）

- 分子の数　アボガドロ数＝ 6.02×10^{23}

例）水1モル＝18 g 中の分子の数
（H_2O：2×1＋16グラム分子）

- 平均分子間隔（気体）

球とみなす

100 ℃, 1 気圧の水蒸気 18 g の体積
$V = 22.4\times10^3\times(100+273) / 273$ cm³
分子１個あたりの体積 $v = V / 6.02\times10^{23}$ cm³
球の半径を r とすれば
$(4\pi / 3) r^3 = v$ より
$r = \sqrt[3]{3v/(4\pi)}$

水分子の間隔(2r)≒ 46 Å
(1 Å＝10^{-8} cm)

解析技術の中心になるもの

- 有限要素法

Finite Element Method (FEM)

- １９５０年代
- 航空機の強度解析
- 要素分割の自由度が高い
- 構造の応力・変形・振動解析，流体・熱・電磁界

連続体とは

- 粉や砂などは粒子（つぶつぶ）の集まりで，塊ではないものは，連続体ではない。

液体(流体)，固体などの連続して一つの塊としてとらえられる物質を連続体という。

- 液体や固体も粒子（分子）の集まりだが，巨視的に見ると塊であるように見えるものは連続体

固体（氷）

- 分子の数　アボガドロ数＝ 6.02×10^{23}

例）水1モル＝18 g 中の分子の数
（H_2O：2×1＋16グラム分子）

mol → g　1×16＝16 g

- 平均分子間隔（固体）

氷 18 g の体積 ＝ 18 cm³
分子１個あたりの体積 v＝18/ 6.02×10^{23} cm³
立方体の一辺の長さを a とすれば
$a^3 = v$ より
$a = \sqrt[3]{v}$

水分子の間隔　≒ 3 Å
(1 Å＝10^{-8} cm)

オングストローム

$V = 18$ cm³
$V = 18/6.02\times10^{23}$ cm³
$a^3 = V$
$a = \sqrt[3]{V}$

連続体と見なしうる条件

分子の大きさや，分子の間隔にくらべて十分大きな物体は連続体とみなす

＜固体＞
全体の
代表長さ ＞＞ 平均分子間距離

＜液体・気体＞
衝突なしに進む距離
分子サイズの1000倍程度
代表長さ ＞＞ 平均自由行程　かつ
代表時間 ＞＞ 平均衝突時間

10^{-9}秒

物質の変形・運動の数式表現

SETSUDAI

■分子の動き：個々の分子の運動を表現

↓

粒子の運動方程式 $m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\vec{F}$ を解く

解くべき支配方程式は比較的簡単であり，解き方は単純であるが，膨大な数の粒子の計算が必要

物質の変形・運動の数式表現

SETSUDAI

■連続体の動き：かたまりとしての物質の運動を表現

↓

質量・運動量・エネルギー保存式などを解く

解くべき支配方程式およびその解き方は複雑であるが，膨大な数の粒子の計算は必要としない

弾性体の変形と応力（材料力学）

SETSUDAI

■ つり合い方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0$$

σ ：垂直応力
τ ：せん断応力
F ：物体力

■ ひずみと変位の関係式

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

ε ：垂直ひずみ
u ：変位

■ 応力とひずみの関係

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$$

E ：ヤング率
ν ：ポアソン比

熱伝導（伝熱工学）

SETSUDAI

■ エネルギーの保存式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=a\nabla^2 T$$

T ：温度
a ：熱拡散率

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ナブラ

流体の運動（流体力学）

SETSUDAI

■ 質量の保存式（連続の式）

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

u,v ：速度

■ 運動量の保存式（運動方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v$$

ρ ：密度
p ：圧力
ν ：動粘性係数

実在の物質は分子の集まり → 連続体として扱う

それでも複雑な偏微分方程式を連立して解く必要がある

連続体の解析

SETSUDAI

このような，複雑な

偏微分方程式

を

解く必要がある

コンピュータによる数値解析

SETSUDAI

実際の工学的諸問題について微分方程式を解くことは容易でない

コンピュータを使って

微分方程式の近似解 を得る

. . . FEM

コンピュータで微分方程式を解く

SETSUDAI

■ 微分方程式 → 積分 → 解（連続関数）

離散化により微分方程式の 近似解 を得ることができる

■ 離散式 → 数値積分 → 近似解（離散値）

離散点の数を増やすことにより 精度向上