ロボットの運動（同次変換）

ロボット概論 8

第7回（2019/11/18）
担当：山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - ベクトルの基礎
  - 内積と外積
  - トルクと角速度のベクトル表現
  - 行列の基礎
- 今回の内容
  - 行列と三角関数の復習
  - 並進と回転
  - 同次変換（平面の場合）

⇨ ロボットアームの手先位置や姿勢を計算できるようになろう

行列の基礎（復習）

- 要素を四角に並べることで行列（matrix）が作られる

例） 2行3列（2×3）の行列

列（column）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

行 (row)

2次正方行列
（縦横のサイズが同じ）

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

- 単位行列（$I,\ E,\ I_n$）
対角成分が1，他は0

$$\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 転置行列（T）
行と列が入れ替わる

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{C}^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

行列の計算（復習）

- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22}\end{bmatrix}$$

- 行列の掛け算　（$\ell\times m$行列 と $m\times n$行列 の掛け算 ⇒ $\ell\times n$行列）

2×2行列 と 2×1行列（列ベクトル） ⇒ 2×1行列

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\ a_{21}x+a_{22}y\end{bmatrix}$$

2×2行列 と 2×2行列 ⇒ 2×2行列

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

$$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$ ⇐結合法則

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$ ⇐分配法則

逆行列(inverse matrix) (復習)

- 掛けると単位行列になる

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- 行列式(determinant) $|A|$ あるいは $\det A$
  $|A|$ =0 のとき逆行列は存在しない

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad - bc$$

※3次の場合はサラスの展開
一般には余因子展開等で計算

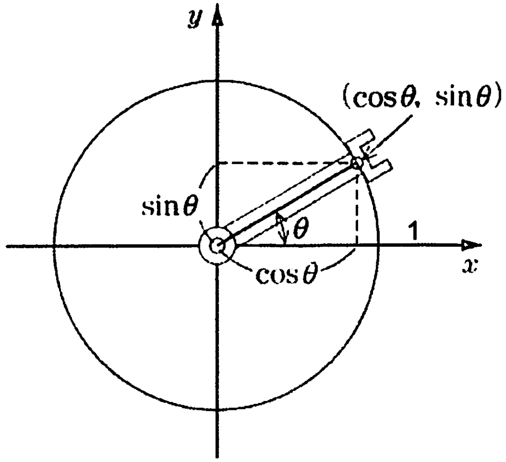
- 2次正方行列の逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

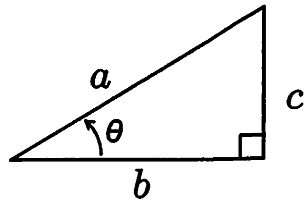
※一般には余因子行列や掃き出し法で計算

三角関数

- 単位円上(a=1のとき)の点の座標が, 三角関数(sinとcos)の値になっている



図出典:川嶋, 只野, 絵ときでわかるロボット工学第2版



$$\sin\theta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

三角関数の定理

- 基本相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

- 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

- 余角公式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$$

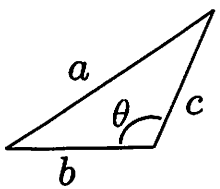
- 負角公式

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

- 余弦定理

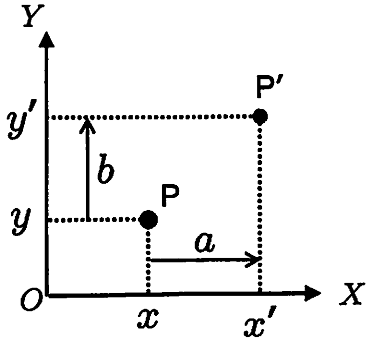
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



点の並進移動

- 点Pの位置ベクトルP=[x y]^T をP'=[x' y']^T に並進移動

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ x + b \end{bmatrix}$$



次スライド以降,
表記の簡単化のため,

$$\begin{cases} S\theta = \sin\theta \\ C\theta = \cos\theta \end{cases}$$

と記述する