第5回　周波数応答(4)　PID制御のボード線図

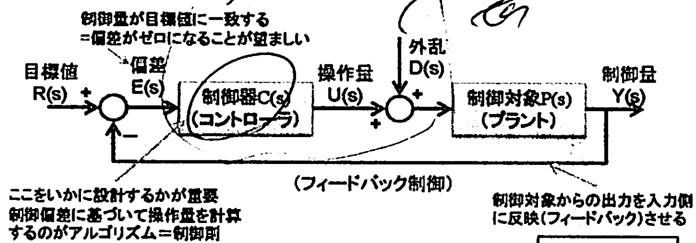
制御工学Ⅱ

SETSUDAI

- PID制御の復習
- PI制御器のボード線図
- PID制御器のボード線図
- 開ループ伝達関数のボード線図

フィードバック制御の構成(復習)

■ 目標値と制御量の差(制御偏差)に基づき、操作量を決定する



■ 入出力の関係

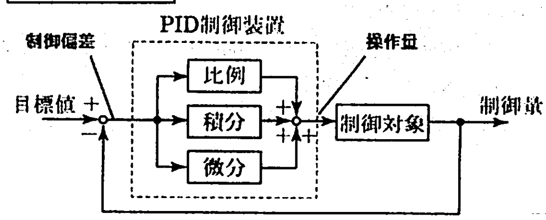
$$E(s) = R(s) - Y(s)$$
$$U(s) = C(s)E(s)$$
$$Y(s) = P(s)(U(s) + D(s))$$

$$G_{yr}(s) = \boxed{\frac{P(s)C(s)}{1+C(s)P(s)}}$$

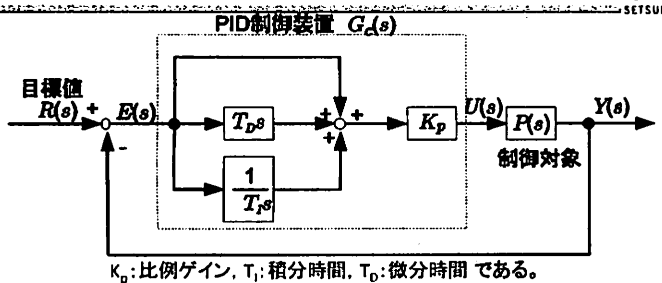
- 外乱や制御対象の変動の影響を制御器の調整によって抑制できる。
- 不安定な制御対象を制御器の調整によって安定化できる。

PID制御の復習

- 制御偏差を $\boxed{\text{比例(P)}}$, $\boxed{\text{積分(I)}}$, $\boxed{\text{微分(D)}}$ した量を加え合わせたものを操作量とする補償方式。PID補償による制御方式を $\boxed{\text{PID制御}}$ と呼ぶ。
- 温度・圧力・流量などの物理量を一定値に保つ制御(定値制御)を行う $\boxed{\text{プロセス制御}}$ において広く用いられている。



PID制御器を用いた制御ループ



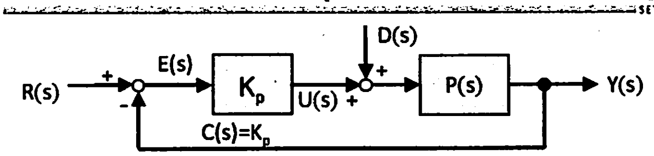
K_p:比例ゲイン, T_I:積分時間, T_D:微分時間 である。

ＰＩＤ制御器を含むフィードバックループの伝達関数は

$C(s) = \boxed{K_p\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)}$　として　$G(s) = \dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$

$1+C(s)P(s)=0$ が特性方程式となり、開ループによって安定が判別できる。

比例制御のゲインKp



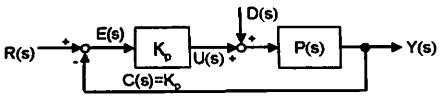
- 制御出力は, $D(s)=0$ で $P(s)=\dfrac{1}{s+1}$ としたとき

$$Y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}R(s) = \frac{\frac{K_p}{s+1}}{1+\frac{K_p}{s+1}}R(s) = \boxed{\frac{K_p}{s+1+K_p}}R(s)$$ である。

単位ステップ入力に対する $K_p=1$ の定常出力は $Y_\infty = \lim_{s\to 0} s\dfrac{K_p}{s+1+K_p}\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{2}$

比例ゲインを高め $K_p=10$ の定常出力は $Y_\infty = \lim_{s\to 0} s\dfrac{K_p}{s+1+K_p}\dfrac{1}{s} = \boxed{\dfrac{10}{11}} \approx 1$

となって目標値に近い値を得ることができる。



①$P(s)=\dfrac{1}{s+1}$のボード線図

②$Kp=1$とした閉ループ伝達関数

$G(s)=\boxed{\dfrac{Kp}{s+1+Kp}=\dfrac{1}{s+2}}$

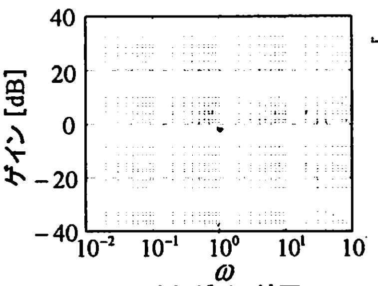
のボード線図

③$Kp=10$とした閉ループ伝達関数

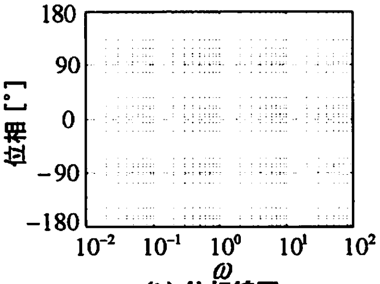
$G(s)=\boxed{\dfrac{Kp}{s+1+Kp}=\dfrac{10}{s+11}}$

のボード線図

周波数伝達関数に直し、ゲイン、位相を求める。ボード線図は折れ線近似でよい。



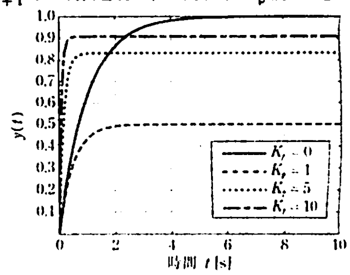
(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

P制御による単位ステップ応答の変化(図9.9)

$P(s)=\frac{1}{s+1}$ にP制御を行い、比例ゲインK_pを変化させた。



速応性は改善したが定常特性は偏差を含む。

PI制御器のボード線図

- 比例ゲインに積分要素を加えた制御器を考える
  PI制御器は偏差の過去データから制御を考える手法

伝達関数は$G(s)=K_p\left(1+\dfrac{1}{Ts}\right)=K_p\dfrac{Ts+1}{Ts}=K_p\dfrac{Tj\omega+1}{Tj\omega}$

$$20\log_{10}|G(j\omega)|=20\log_{10}K_p-20\log_{10}\omega T+20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\infty+\tan^{-1}\omega T=-\pi/2+\tan^{-1}\omega T$$

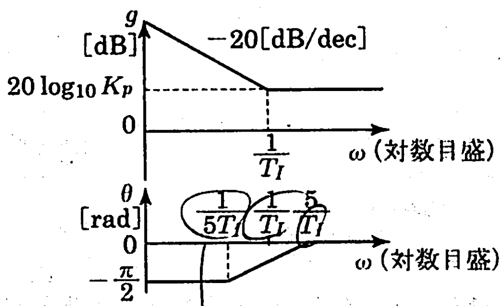
折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は積分によって-20dB/decで減少してT^{-1}から$20\log_{10}K_p$で一定となる。

位相特性はω□ T^{-1}では-90°であり$\omega=5T^{-1}$で0°に戻る。

PI制御装置のボード線図

- 高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
- 積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
- 位相遅れが安定性を損なう恐れもある。



$\frac{1}{5\times10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{5}{10}$

0.02　0.1　0.5

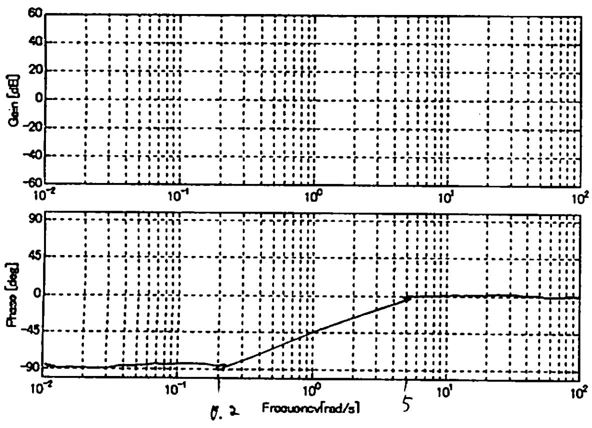
PI制御器のボード線図

伝達関数は$G(s)=K_p\left(1+\dfrac{1}{T_Is}\right)=0.316\dfrac{1+j\omega}{j\omega}$　　$Kp=0.316,\ T_I=1$として

$$20\log|G(j\omega)|=20\log K_p-20\log\omega T_I+20\log\sqrt{1+(\omega T_I)^2}$$

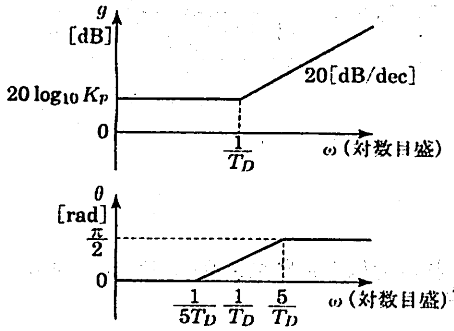
$$\cong-10-20\log\omega+20\log(1)\big|_{\omega<1}+20\log\omega\big|_{\omega\ge1}=-10\big|_{\omega\ge1}-20\log(\omega)\big|_{\omega<1}\quad[dB]$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\infty+\tan^{-1}\omega T_I=-\pi/2+\tan^{-1}\omega T_I\cong-90\big|_{\omega\le0.2}+64.3\log\omega\big|_{0.2<\omega\le5}+0\big|_{\omega>5}\quad[°]$$



PD制御装置のボード線図

■ 微分要素により，位相を進ませて位相余裕を改善して安定性を増す。
■ 入力の変化（微分）に速やかに反応することで速応性が向上する。
■ 外乱などの高い周波数に必要以上に反応することが好ましくない場合もある。



1:

PID制御器のボード線図

13

■ 比例ゲインに積分要素、微分要素を加えた制御器を考える
PID制御器は偏差の過去・未来データから制御を考える手法

伝達関数は$G(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)=K_p\frac{T_I T_D(j\omega)^2+T_I j\omega+1}{T_I j\omega}$

$\cong K_p\frac{(T_I j\omega+1)(T_D j\omega+1)}{T_I j\omega}$,　$T_D<T_I$として近似している

$$20\log|G(j\omega)|=20\log K_p-20\log\omega T_I+20\log\sqrt{1+(\omega T_I)^2}+20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T_D)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\infty+\tan^{-1}\omega T_I+\tan^{-1}\omega T_D=-\pi/4+\tan^{-1}\omega T_I+\tan^{-1}\omega T_D$$

折れ線近似で考えると、

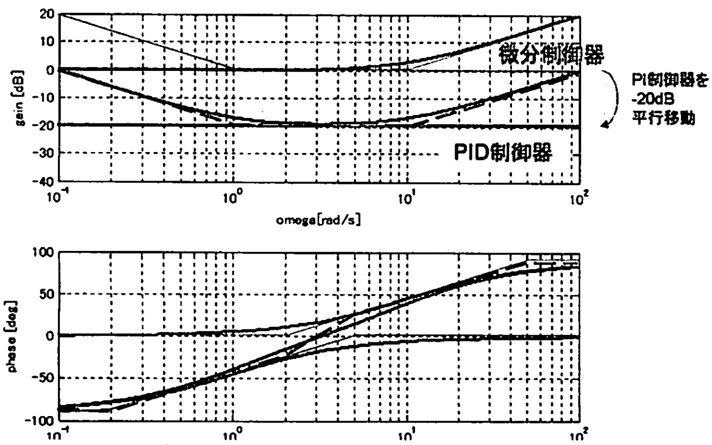
ゲイン特性は積分によって－20dB/decで減少してT_I^{-1}から
$20\log K_p$で一定となり、T_D^{-1}から20dB/decで増加する。
位相特性はω□ T^{-1}では－90°でありω=5T_D^{-1}では90°に進む。

PID制御器のボード線図

13

■ 時定数T_D=0.1,T_I=1,Kp=0.1のPID制御器

伝達関数は$G(j\omega)\cong\frac{K_p(1+j\omega T_I)(1+j\omega T_D)}{j\omega T_I}=\frac{0.1(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}{j\omega}$



PID制御器のボード線図（まとめ）

16

PI制御器では
■ 高周波領域では変化が少ないが，低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
■ 積分要素により，ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
■ 位相遅れが安定性を損なう恐れもある。

PD制御器では
■ 微分要素により，位相を進ませて位相余裕を改善して安定性を増す。
■ 入力の変化（微分）に速やかに反応することで速応性が向上する。
■ 外乱などの高い周波数に必要以上に反応することが好ましくない場合もある。

PID制御器はこれらを合わせた特徴を持つことができる

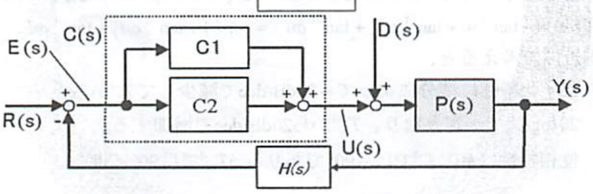
開ループ伝達関数のボード線図

システムPの伝達関数$P(s)$は

$$P(s)=\frac{1}{0.1s+1}=\frac{1}{0.1j\omega+1}$$

の一次遅れ特性で与えられるとする。下図のように制御ループを構成し、制御器$C(s)$はPI 制御器で比例C1=3, 積分C2=$\frac{1}{s}$とすると、

その伝達関数は　$C(s)=$ $\boxed{}$　となる。



開ループ伝達関数のボード線図

さらに測定装置の伝達関数を$H(s)=0.2$としたときの一巡(開ループ)伝達関数$L(s)$は

$$L(s)=C(s)P(s)H(s)=\frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)}=\frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$

となり、ループのゲイン特性と位相特性は次のようになる。

$$20\log|L(j\omega)|=20\log|C(j\omega)|+20\log|P(j\omega)|+20\log|H(j\omega)|$$

$$=\boxed{-20\log\omega+20\log\sqrt{9\omega^2+1}-20\log\sqrt{(0.1\omega)^2+1}-14}\ [dB]$$

$$\angle L(j\omega)=\boxed{-\pi/2+\tan^{-1}3\omega-\tan^{-1}0.1\omega}\ [rad]$$

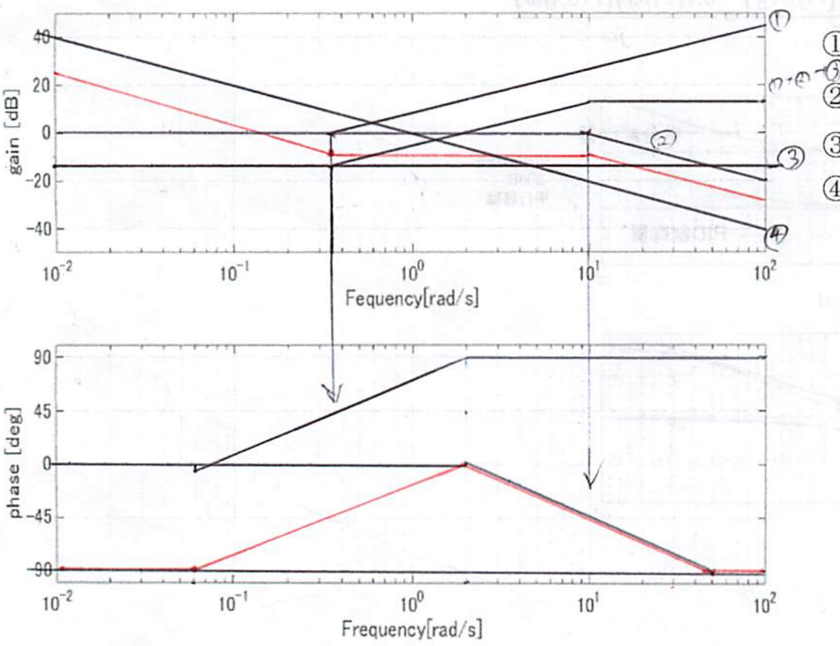
これをボード線図で示してみよう。

■演習：折れ線近似で各要素を示し、合成して開ループ特性を求めよ

演習）開ループ伝達関数のボード線図

■開ループ伝達関数

$$L(s)=C(s)P(s)H(s)=\frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)}=\frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$



① $20\log|3j\omega+1|$

② $-20\log|0.1j\omega+1|$

③ $20\log(0.2)=-14dB$

④ $-20\log|j\omega|$

まとめ

■代表的な制御器であるPID制御器について復習してその近似を折れ線でボード線図に示し、PID制御器の周波数特性について学んだ。

■PI制御器を含むシステムの開ループ特性をボード線図で表した。

来週からの予定

1. 線形システムの時間応答, ラプラス変換, ステップ応答, インパルス応答
2. 周波数応答(1) ゲイン, 位相特性, ボード線図の読み方
3. 周波数応答(2) 基本要素とボード線図演習
4. 周波数応答(3) ボード線図の合成, 折れ線近似
5. 周波数応答(4) PID制御のボード線図
6. 周波数応答(5) 閉ループと開ループの周波数特性, ベクトル軌跡
7. 制御系の安定判別(1) ナイキストの簡易判別法
8. 制御系の安定判別(2) 位相余裕とゲイン余裕
9. 総合演習 前半のまとめと総合演習
10. フォードバック制御系の設計(1) 望ましい制御系の構成と特徴
11. フィードバック制御系の設計(2) ループ整形法
12. フィードバック制御系の設計例(1) モデル化と設計仕様
13. フィードバック制御系の設計例(2) 設計仕様を満たす設計
14. フィードバック制御系の設計例(3) ロバスト安定性, 感度関数
15. まとめ