1

第1回：制御工学Ⅰの復習

制御工学Ⅱ

SETSUDAI

シラバス

本講では、まず周波数応答について説明し、ベクトル軌跡とボード線図による周波数特性の表現方法について述べる。続いて、フィードバック制御系の特性評価、ナイキストの安定判別法、さらにゲイン余裕と位相余裕について説明する。最後に、制御系の補償法について述べる。

到達目標：1）周波数応答法の理解。2）フィードバック制御系の安定判別ができる。3）フィードバック補償により制御系の設計ができる

第1回：制御工学Ⅰの復習

- ラプラス変換
- フィードバック制御について
- ヘビサイドの手法による逆ラプラス変換

Note

制御Ⅰ引き継いで制御理論の基礎学習を行い、この講義の終了時点では制御系の設計ができるようになる。

今後、皆さんが工学と係っていくときに制御の考え方は必ず役に立つし、制御に関連付けて機械の構造が理解できるようになろう。

授業概要1

2

SETSUDAI

- 授業形態
  - PowerPoint ＋ 板書
  - 毎回の積み重ねが大事
  - 教科書で予習・復習を
  - 演習を通じて理解を深めることが重要！
- 評価
  - 期末テスト50%　中間テスト10%
  - 演習・課題40%
- 質問のある人は安田教授室（1号館3階）まで
- 注意！！
  - 80%以上の出席が，成績評価の前提条件

授業概要2

SETSUDAI

- 科目名：制御工学Ⅱ
- 目的
  - 制御工学に関する基礎的事項の習得
  - 一般に古典制御といわれる内容を一年間で学ぶ（Ⅰは前半）
  - 制御の基礎的概念を数式を通じて理解することを目指す
- テキスト：
  - はじめての制御工学　改訂第2版
    （佐藤和也，平元和彦，平田研二著，講談社，2019）
- 参考書：
  - 制御工学（JSMEテキストシリーズ，日本機械学会）
  - PID制御（須田信英著者代表，システム制御情報学会編，朝倉書店）
  - その他制御の入門編

これからの講義

4

SETSUDAI

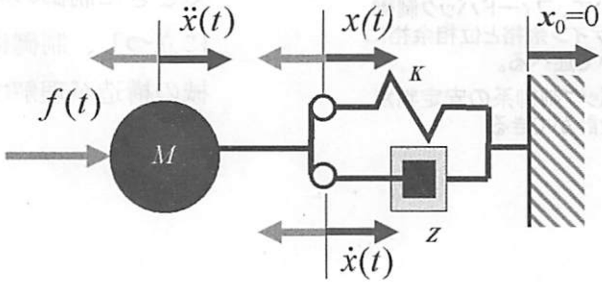
1. 線形システムの時間応答 ラプラス変換，ステップ応答，インパルス応答
2. 周波数応答(1)　ゲイン，位相特性，ボード線図の読み方
3. 周波数応答(2)　ボード線図演習
4. 周波数応答(3)　基本要素のボード線図
5. 周波数応答(4)　ボード線図の合成，折れ線近似
6. 周波数応答(5)　閉ループと開ループの周波数特性，ベクトル軌跡
7. 制御系の安定判別(1)　ナイキストの簡易判別法
8. 制御系の安定判別(2)　位相余裕とゲイン余裕
9. 総合演習　前半のまとめと総合演習
10. フォードバック制御系の設計(1)　望ましい制御系の構成と特徴
11. フィードバック制御系の設計(2)　ループ整形法
12. フィードバック制御系の設計例(1)　モデル化と設計仕様
13. フィードバック制御系の設計例(2)　設計仕様を満たす設計
14. フィードバック制御系の設計例(3)　ロバスト安定性，感度関数
15. まとめ

1. 微分方程式とラプラス変換

- 入力と出力の関係が微分方程式で記述できる：動的システム

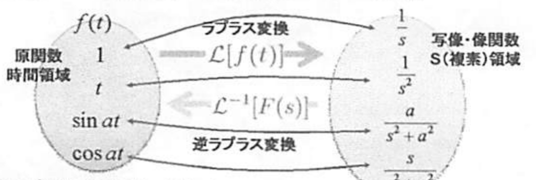
$$M\ddot{x}(t)+Z\dot{x}(t)+Kx(t)=f(t) \qquad (1.1)$$

- これが解けると基本的な運動が分かる
- モデルが作れると制御ができる



ラプラス変換とは

- 制御においては，システムの挙動を表現するとき，時間tの関数ではなく，ラプラス変換という操作を行って，複素数sの関数として議論すると見通しがよい。



- ラプラス変換の主なメリット
  - システムの入力信号→出力信号の関係を簡潔に表現できる（伝達関数）。
  - 周波数信号を使ったシステムの特性の表現や解析に便利である。
  - 微分方程式を解くのに使える。

ラプラス変換の意味

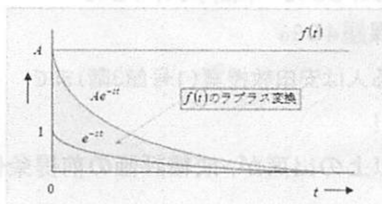
ラプラス変換の定義　$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

この意味は　複素数 $s=c+j\omega$ とすると

$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-ct}f(t)e^{-j\omega t}dt$

cが大きければ積分は収束する。関数が$f(t)=A$のように一定値とすると

$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty Ae^{-st}dt=A\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=-\frac{A}{s}(0-1)=\frac{A}{s}$



動的システムのラプラス変換

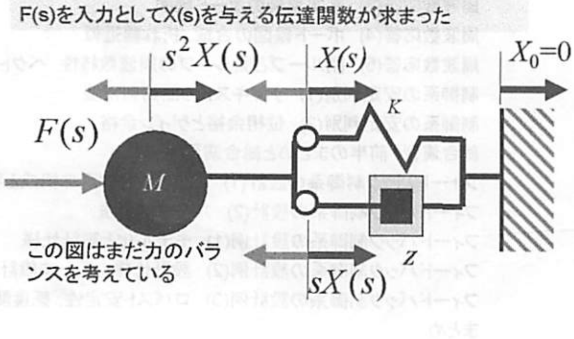
- 微分方程式の初期値を0と置いて両辺をラプラス変換する

$$L\left[M\ddot{x}(t)+Z\dot{x}(t)+Kx(t)\right]=L\left[f(t)\right]$$

$$Ms^2X(s)+ZsX(s)+KX(s)=F(s)$$

$$X(s)=\left[Ms^2+Zs+K\right]^{-1}F(s)$$

F(s)を入力としてX(s)を与える伝達関数が求まった



原関数	原関数の呼び名	像関数
$u_s(t)$	単位ステップ関数	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	単位インパルス関数	1
$u_l(t)$	単位ランプ関数	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	指数関数	$\frac{1}{s-a}$
$\sin\omega t$	正弦波関数	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	余弦波関数	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

ラプラス変換による微分方程式の解法

10 SETSUDAI

フーリエ変換

▫ ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=4,\ x(0)=1,\ x'(0)=0$$

1. 与えられた式をラプラス変換する。微分のラプラス変換を使う。

$$\{s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\}+3\{sX(s)-x(0)\}+2X(s)=\frac{4}{s}$$

2. ラプラス変換後の方程式を整理する。

$$X(s)=\frac{s^2+3s+4}{s(s^2+3s+2)}=\frac{s^2+3s+4}{s(s+1)(s+2)}$$

3. 得られた式を部分分数分解する。ヘヴィサイドの方法を用いればよい。

$$X(s)=\boxed{\frac{2}{s}+\frac{-2}{s+1}+\frac{1}{s+2}}$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}^{-1}[1/s]=1\\ \mathcal{L}^{-1}[1/(s+1)]=e^{-t}\\ \mathcal{L}^{-1}[1/(s+2)]=e^{-2t}\end{cases}$$

4. 逆ラプラス変換して，最終的に得たい解(x(t))を得る。

$$x(t)=2-2e^{-t}+e^{-2t}$$

ヘビサイドの方法

11 SETSUDAI

有理多項式$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}$の$D(s)$が重根を持たないない場合

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)$$

で表される。ただし、$s_1\neq s_2\neq\cdots\neq s_n$で$m\leq n$である。この多項式を部分分数に展開すると

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

が得られる。この両辺に$(s-s_1)$を掛けて$s=s_1$とするとK_1以外は零となって

$$K_1=\frac{N(s)}{D(s)}(s-s_1)\bigg|_{s=s_1}=\frac{N(s)}{(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\bigg|_{s=s_1}=\frac{N(s_1)}{(s_1-s_2)\cdots(s_1-s_n)}$$

K_1が得られ、これを繰り返すことですべての未定係数が求まる。
ただし、重根を持つ場合には微係数を求めるなど別の手法が必要となるが、
ここでは深入りしない。

$$\mathcal{L}[M\ddot{x}(t)+Z\dot{x}(t)+Kx(t)]=\mathcal{L}[f(t)]$$

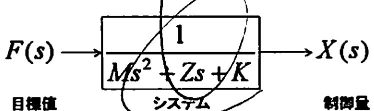
$$M\{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\}+Z\{sX(s)-x(0)\}+KX(s)=F(s)$$

$$X(s)=[Ms^2+Zs+K]^{-1}F(s)$$

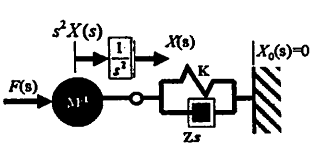
2. 伝達関数とブロック線図

12 SETSUDAI

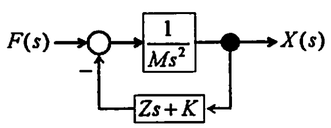
▫ 入出力関係をブロックに入れる



▫ さらに動的システムの原型に近い関係を与えると



制御の流れに合わせて描き直す



フィードバック結合という
Zs+Kはフィードバック要素(後ろ向き要素)である

代表的な伝達要素(基本要素の伝達関数)

13 SETSUDAI

伝達関数の式の形に応じて，伝達要素には名前がついている。

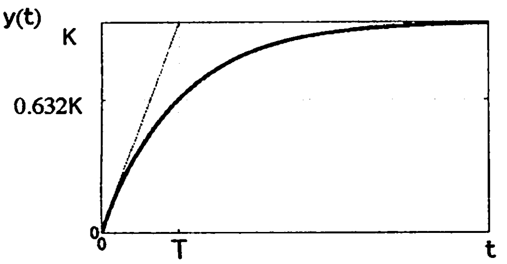
- 比例要素・・・出力が入力の定数K(ゲイン定数)倍.　$G(s)=K$
- 積分要素・・・出力が入力の積分.　$G(s)=\dfrac{1}{s}$
- 微分要素・・・出力が入力の微分.　$G(s)=s$
- むだ時間要素・・・入力が時間L(むだ時間)だけ遅れて出力される.　$G(s)=e^{-Ls}$
- 1次遅れ要素(1次遅れ系)
  ・・・sの1次の分母を持つ.
  Tを時定数，Kをゲイン定数と呼ぶ.　$G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$
- 2次遅れ要素(2次遅れ系)
  ・・・sの2次の分母を持つ.
  ζを 減衰比(減衰係数)，
  ω_nを 固有角周波数(固有角振動数)と呼ぶ.　$G(s)=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

1次遅れ要素の単位ステップ応答

$$G(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

T：時定数
K：比例ゲイン

- 初期値0，十分時間が経過したとき，Kになる。
- 時刻Tで，Kの63.2%の値となっている。
- 時刻0での接線は，傾きK/Tとなる。



$\frac{D}{1-C}$

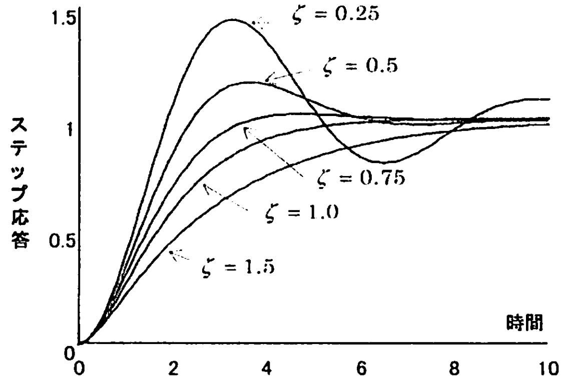
符号を逆に.

C：フィードバックのトルク

D：トルク $\frac{Ms^2}{T+(Zs+K)}$

2次遅れ要素の単位ステップ応答（ω_n=1）

- ζ(＝減衰比)が1より小さい場合，振動しながら定常状態に向かっていく。
- ζが小さいと立ち上がりは早いが，振動が大きい



演習1－1

システムPの挙動が以下の方程式で与えられるとき

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=1u(t),\quad y(0)=\dot{y}(0)=0$$

$u(t)$を入力，$y(t)$を出力とする伝達関数$P(s)$を求めよ

$P(s)=\boxed{\frac{1}{s^2+3s+2}}$

このような伝達要素は $\boxed{2次遅れ要素}$ と呼ばれるが，この要素の固有角振動数ω_n、減衰比ζとゲインKを示せ

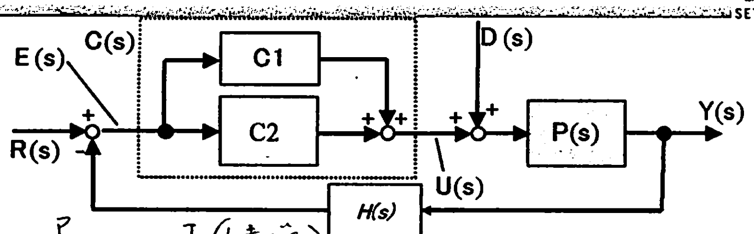
$\omega_n=\boxed{\sqrt{2}}$　$\zeta=\boxed{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$，　$K=\boxed{\frac{1}{2}}$

単位ステップ応答$y(t)$を求めよ

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}(1-e^{-t}+e^{-2t})}$$

フィードバック制御をしっかり復習して理解すること．制御の基本であり、制御工学Ⅱはこれをもととした制御理論について学んでいく。
予習が大事であり、次回の予定をもとに教科書に目を通して来ること。

演習1－2



P　I（セキブン）

制御器C1=3，C2=$\frac{1}{s}$としたときの制御器C(s)をもとめよ

$C(s)=\boxed{\frac{3s+1}{s}}$　　このような制御を $\boxed{PI}$ 制御と呼ぶ

また測定装置$H(s)=2$ としたときの一巡伝達関数$L(s)$とループ伝達関数$G(s)$を示せ

$L(s)=C(s)P(s)H(s)=\boxed{\frac{2(3s+1)}{s(s^2+3s+2)}}$，$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\boxed{\frac{3s+1}{s^3+3s^2+8s+2}}$

$\frac{3s+1}{s}\cdot P(s)\cdot 2$

まとめ

- ラプラス変換・逆ラプラス変換は十分に復習しておこう。
- 制御工学には，特有の用語が多いので，それらの意味を理解すること。
⇒言葉を理解しないと分からない＝学問と会話できない
- 部分分数分解（新しく学んだヘヴィサイドの手法をものにしよう）からの逆ラプラス変換は，単位インパルス応答や単位ステップ応答を求めるときに必須なので，そのやり方をきちんと理解しておくこと。
⇒方程式の解が簡単に得られる
- フィードバック制御系の構造を理解しておくこと。
⇒制御理論の肝