例題1

ある最新式火力発電所において、タービン入口の蒸気圧力は $p_1=3$ [MPa]、温度は $T_1=560$ [°C] で、この時の比エネルギーに相当する比エンタルピーは $h_1=3.3$ [MJ/kg]、出口の蒸気圧力は $p_2=5$ [kPa]、 $T_2=30$ [°C] で、比エンタルピーは $h_2=0.13$ [MJ/kg]、蒸気の質量流量は m=490 [kg/s] である、熱効率およびタービン、発電機等の効率を含む全体の効率 η を 45 [%] とするとき、得られる電力 P [W] を求めよ、

[解答]

タービンの有効揚程を H [m],作動流体の流量を Q [m³/s],密度を ρ [kg/m³] としたとき,出力 P [W] は,

$$P[W] = \eta \times \underbrace{\rho Q}_{\dot{m} [kg/s]} \underbrace{gH}_{\Delta E [J/kg]}$$
 (1)

なお、 $\Delta E = gH$ は、タービンが単位質量当りの流体に対してする仕事(エネルギー)である.この ΔE は、題意より、

$$\Delta E = h_2 - h_1 \tag{2}$$

式(2)を式(1)に代入して,

$$P = \eta \dot{m}(h_2 - h_1) = 0.45 \times 490[\text{kg/s}] \times (3.3 \times 10^6[\text{J/kg}] - 0.13 \times 10^6[\text{J/kg}])$$

= 6.99 × 10⁹[W] = 699[MW] (3)

例題2

図 1 に示すようなバーカー水車がある。この水車に付いている 4 本のノズルの内径はすべて同じで d=25 [mm] である。いま水車の各ノズルから水が Q=7 [L/s] で噴出し、水車が n=100 [rpm] で回転しているとき、水車の動力 L [W] を求めよ。ただし、水の密度は $\rho=1000$ [kg/m³] としてもよい。

[解答]

角運動量保存則より,ノズルから噴出する速度の周方向成分をv(静止座標系から見た絶対速度)としたとき,一本のノズルによって流体が受けるトルクT'は,

水車にはノズルが4本付いているので、水車全体が流体に与えるトルクTにすれば、T=4T'であるので、

$$T = 4\rho Q v r_2 \tag{5}$$

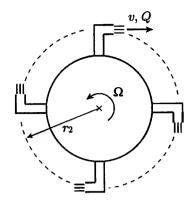


図 1: バーカー水車

ただし、水車からの噴出速度 v (静止座標系から見た絶対速度) は水車の回転速度 $r_2\Omega$ を引くことにより、

$$v = \frac{Q}{(\pi/4)d^2} - r_2\Omega \tag{6}$$

ただし、ノズル断面積は $A = (\pi/4)d^2$ である. したがって、式 (5) のトルク T は、

$$T = 4\rho Q r_2 \left[\frac{Q}{(\pi/4)d^2} - r_2 \Omega \right] \tag{7}$$

しかるに、水車の動力 Lをトルク T と角速度 Ω で表せば、

$$L = F \times \underbrace{r_2\Omega}_{\text{水車の回転周速度}} = T \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} \tag{8}$$

したがって、求めるべき動力Lは、

$$L = 4\rho Q \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} r_2 \left[\frac{Q}{(\pi/4)d^2} - r_2 \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} \right]$$

$$= 8\pi n\rho Q r_2 \left[\frac{Q}{(\pi/4)d^2} - 2\pi n r_2 \right]$$

$$= 8\pi \times \frac{100}{60} [\text{rps}] \times 1000 [\text{kg/m}^3] \times (7 \times 10^{-3} [\text{m}^3/\text{s}]) \times 0.6 [\text{m}]$$

$$\times \left(\frac{7 \times 10^{-3} [\text{m}^3/\text{s}]}{(\pi/4)(25 \times 10^{-3} [\text{m}])^2} - 2\pi \times \frac{100}{60} [\text{rps}] \times 0.6 [\text{m}] \right)$$

$$= 1.4 [\text{kW}]$$
(9)

例題3

図 2 に示すような、渦巻きポンプの羽根車の寸法は外形 $D_2=235$ [mm]、内径 $D_1=110$ [mm]、羽根幅は入口で $b_1=27$ [mm]、出口で $b_2=10$ [mm]、出口羽根角は $\beta_2=22.50$ であった. 回転数 n=3000 [rpm] のとき、流量は Q=3 [m³/min] である、羽根入口で流れ(絶対速度 v_1)は半径方向に流入するとし、すべての損失を無視して次の間に答えよ.

- (1) 羽根車入口および出口における流れの絶対速度,相対速度,羽根車周速を求め,正確な速度三角形を描け.
- (2) 理論揚程 (オイラーヘッド) を求めよ.

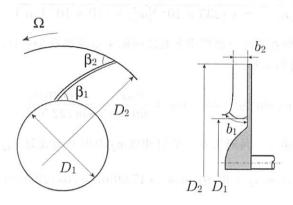


図 2: 渦巻きポンプ

[解答]

(1) まず、羽根車入口において考える.

羽根車入口の周速 u_1 は、羽根車の回転角速度を $\Omega[\mathrm{rad/s}]$ としたとき、

$$u_1 = \frac{D_1}{2} \underbrace{\Omega}_{-2\pi p} = \frac{110 \times 10^{-3} [\text{m}]}{2} \times \left(2\pi \frac{3000}{60} [\text{rps}]\right) = 17.28 [\text{m/s}]$$
 (10)

羽根車入口での絶対速度 v_1 は、羽根車入口の断面積が $A = \pi D_1 b_1$ であるので、

$$v_1 = \frac{Q}{\pi D_1 b_1} = \frac{(3/60)[\text{m}^3/\text{s}]}{\pi \times (110 \times 10^{-3}[\text{m}]) \times (27 \times 10^{-3}[\text{m}])} = 5.36 \,[\text{m/s}]$$
(11)

題意より、羽根車に流入する流れは旋回せず、半径方向に流入するので、入口での速度三角形は直角三角形となる(図3参照)。図3のに示す、羽根車入口での速度三角形より、相対速度(羽根車と共に回転する座標系から見た、羽根に沿う速度) w_1 は、

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + u_1^2} = \sqrt{(5.36[\text{m/s}])^2 + (17.28[\text{m/s}])^2} = 18.09[\text{m/s}]$$
 (12)

また、羽根車入口の羽根角 β_1 は、

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_1}{u_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.36[\text{m/s}]}{17.28[\text{m/s}]}\right) = 17.23\,[^\circ]$$
 (13)

つぎに、羽根車出口において考える.

羽根車出口の周速 u_2 は、羽根車の回転角速度を $\Omega[rad/s]$ としたとき、

$$u_2 = \frac{D_2}{2} \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = \frac{235 \times 10^{-3} [\text{m}]}{2} \times \left(2\pi \frac{3000}{60} [\text{rps}]\right) = 36.91 [\text{m/s}]$$
 (14)

羽根車出口での絶対速度 v_2 の <u>半径方向成分 v_{m2} </u> は、羽根車出口の断面積が $A=\pi D_2b_2$ であるので、連続の式(羽根車入口と出口で流量一定)から、

$$v_{m2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{(3/60)[\text{m}^3/\text{s}]}{\pi \times (235 \times 10^{-3}[\text{m}]) \times (10 \times 10^{-3}[\text{m}])} = 6.77 [\text{m/s}]$$
(15)

羽根車出口での相対速度(羽根車と共に回転する座標系から見た、羽根に沿う速度) w_2 は、速度三角形より、

$$v_{m2} = w_2 \sin \beta_2 \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = \frac{v_{m2}}{\sin \beta_2} = \frac{6.77 [\text{m/s}]}{\sin (22.5 [^{\circ}])} = 17.69 [\text{m/s}]$$
 (16)

さらに、出口の速度三角形より、絶対速度 v2 の周方向成分 vu2 は、

$$v_{u2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2 = 36.91 [\text{m/s}] - 17.69 [\text{m/s}] \cos (22.5[^{\circ}]) = 20.57 [\text{m/s}]$$
 (17)

したがって、羽根車出口での絶対速度 v2 は

$$v_2 = \sqrt{v_{m2}^2 + v_{u2}^2} = \sqrt{(6.77[\text{m/s}])^2 + (20.57[\text{m/s}])^2} = 21.66 [\text{m/s}]$$
 (18)

(2) 羽根車の周方向成分に関する角運動量保存則より、ポンプ内部の流体全体を検査面にとれば、

$$\rho Q$$
 $\underline{(r_2 \times v_{u2})}$
 $-\rho Q$
 $\underline{(r_1 \times v_{u1})}$
 $=$
 \underline{T}
 $\Delta \Gamma \overline{C} D \overline{A} \overline{B} \overline{B} \overline{B} \overline{B}$
 $\overline{C} \overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C} D \overline{C}$
 $\overline{C} D \overline{C}$
 \overline

ただし、 v_{u1} 、 v_{u2} はそれぞれ、羽根車入口・出口における絶対速度 v_1 、 v_2 の周方向成分である。このポンプの動力 L は、 $L = \underbrace{F \times r}_{-T} \Omega = T \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = 2\pi n T$ より、

$$L = 2\pi\rho Q n \left(r_2 v_{u2} - r_1 v_{u1} \right) \tag{20}$$

しかるに、一般に動力 L は質量流量 \dot{m} と理論揚程(オイラーヘッド) H_{th} を用いて表せば、

$$L = \underbrace{\dot{m}}_{=\rho Q} g H_{th} \tag{21}$$

であるので、式 (20) と式 (21) から、羽根車入口での v_{u1} はゼロである(羽根車入口で流れは半径方向に流入する)ことに注意して、理論揚程 H_{th} は、

$$H_{th} = \frac{\overbrace{2\pi n}^{\Omega}}{g} (r_2 v_{u2} - r_1 v_{u1}) = \frac{u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}}{g}$$

$$= \frac{36.91 [\text{m/s}] \times 20.57 [\text{m/s}] - 17.28 [\text{m/s}] \times 0.0 [\text{m/s}]}{9.8 [\text{m/s}^2]} = 77.47 [\text{m}]$$
 (22)

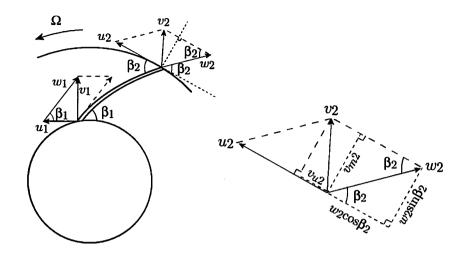


図 3: 渦巻きポンプの速度三角形

例題4

図4に示すような、軸流羽根車が $n=1200\,[\mathrm{rpm}]$ で回転している、羽根車平均半径 $r=300\,[\mathrm{mm}]$ の位置で空気(密度 $\rho=1.2\,[\mathrm{kg/m^3}]$)は軸方向に $v_1=33\,[\mathrm{m/s}]$ の絶対速度で流入し、動翼による相対速度の転向角は $\delta=18^\circ$ である、この軸流羽根車の理論揚程(オイラーヘッド)を求めよ、

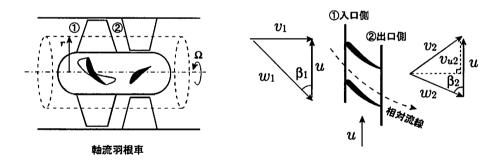


図 4: 軸流羽根車

[解答]

羽根車平均半径 $r=300\,[\mathrm{mm}]$ の位置において、羽根車の周速 u は

$$u = r \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = 2\pi n r$$

$$= 2\pi \times \left(\frac{1200}{60} [\text{rps}]\right) \times (300 \times 10^{-3} [\text{m}]) = 37.7 [\text{m/s}]$$
(23)

題意より、 $\overline{3}$ 羽根車入口 $\overline{3}$ において、流入する流れは(旋回がなく)軸方向なので、入口での速度三角形は直角三角形となり(図 4 参照)、その大きさは、 $v_1=33$ [m/s] である、羽

根車入口での速度三角形より、流入角 β_1 は

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_1}{u}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{33[m/s]}{37.7[m/s]}\right) = 41.2 \, [\circ]$$
 (24)

題意より、羽根車出口②において、流出角 β_2 は

$$\beta_2 = \beta_1 + \delta = 41.2[°] + 18.0[°] = 59.2[°]$$
 (25)

羽根車の入口と出口で流量は保存される. 軸流羽根車の場合, 羽根車入口と出口の断面積は変わらないので、羽根車出口での法線方向速度は入口での v_1 に等しい. したがって、羽根車出口での速度三角形より、羽根車出口での絶対速度の周方向成分 v_{u2} は

$$v_{u2} = u - \frac{v_1}{\tan \beta_2} = 37.7 \text{[m/s]} - \frac{33 \text{[m/s]}}{\tan (59.2 \text{[°]})} = 18.0 \text{[m/s]}$$
 (26)

羽根車出口②での絶対速度 v2 は、速度三角形より、

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_{u2}^2} = \sqrt{(33[\text{m/s}])^2 + (18.0[\text{m/s}])^2} = 37.6 [\text{m/s}]$$
 (27)

羽根車の周方向成分(周方向速度 u の向き)に関する角運動量保存則より、軸流羽根車内部の流体全体を検査面にとれば、

$$\rho Q$$
 $\underbrace{(r \times v_{u2})}_{\text{出口での角運動量}}$
 $-\rho Q$
 $\underbrace{(r \times v_{u1})}_{\text{入口での角運動量}}$
 $\underbrace{T}_{\text{流体が軸流羽根車全体から受けるトルク}}$
(28)

ただし、 v_{u1} 、 v_{u2} はそれぞれ、羽根車入口・出口における絶対速度 v_1 、 v_2 の周方向成分である(つまり、 $v_{u1}=0$ [m/s]).この軸流羽根車の動力 L は、 $L=\underbrace{F\times r}_{=T}\Omega=T\underbrace{\Omega}_{=2\pi n}=2\pi nT$ より、

$$L = 2\pi\rho Q n \left(r v_{u2} - r v_{u1}\right) \tag{29}$$

しかるに,一般に動力 L は質量流量 \dot{m} と理論揚程(オイラーヘッド) H_{th} を用いて表せば,

$$L = \underbrace{\dot{m}}_{=\sigma O} g H_{th} \tag{30}$$

であるので、式 (29) と式 (30) から、羽根車入口での v_{u1} はゼロである(羽根車入口で流れは軸方向に流入する)ことに注意して、理論揚程 H_{th} は、

$$H_{th} = \frac{\overbrace{2\pi n}^{\Omega}}{g} (rv_{u2} - rv_{u1}) = \frac{uv_{u2} - uv_{u1}}{g} = \frac{u(v_{u2} - v_{u1})}{g}$$
$$= \frac{37.7[\text{m/s}] \times (18.0[\text{m/s}] - 0.0[\text{m/s}])}{9.8[\text{m/s}^2]} = 69.2[\text{m}]$$
(31)

なお、羽根車の周速 u は式 (23) で求められていることに注意せよ.

例題5

図 5 に示すような、遠心式羽根車がある。内径は D_1 (= $2r_1$) = 0.1 [m]、外形は D_2 (= $2r_2$) = 0.3 [m] で、流入部と流出部の面積比は 1:3、羽根車の出口羽根角は β_2 = 45° である。また、流体は予旋回なく流入する。羽根車入口での流入速度を v_1 = 10 [m/s]、羽根車の回転数を n = 2000 [rpm] として、羽根車入口と出口での速度三角形を描き、羽根車入口の羽根角 β_1 と羽根車出口での半径方向速度 v_r を求めよ。さらに、この羽根車の理論揚程(オイラーヘッド)を求めよ。

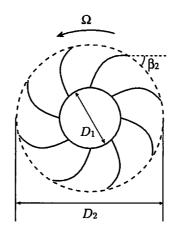


図 5: 遠心式羽根車

[解答]

まず、羽根繰り間入口において考える.

羽根車入口の周速 u_1 は、羽根車の回転角速度を $\Omega[\mathrm{rad/s}]$ としたとき、

$$u_1 = \underbrace{r_1}_{=D_1/2} \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = \frac{0.1[\text{m}]}{2} \times \left(2\pi \frac{2000}{60} [\text{rps}]\right) = 10.5 [\text{m/s}]$$
 (32)

題意より、羽根車入口で流体は予旋回なく流入するので、羽根車入口での絶対速度 v_1 は半径方向であることが分かり、速度三角形は直角三角形となる(図 6 参照)。したがって、羽根車入口での相対速度(羽根車と共に回転する座標系から見た、羽根に沿う速度) w_1 は、

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + u_1^2} = \sqrt{(10.0[\text{m/s}])^2 + (10.5[\text{m/s}])^2} = 14.5[\text{m/s}]$$
(33)

また、羽根車入口の羽根角 β_11 は、

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_1}{u_1}\right) = \tan -1\left(\frac{10.0[\text{m/s}]}{10.5[\text{m/s}]}\right) = 43.6\,[^\circ]$$
 (34)

次に、羽根車出口において考える.

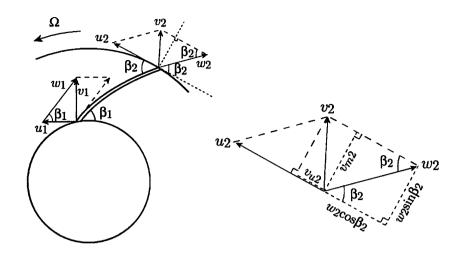


図 6: 遠心式羽根車の速度三角形

羽根車入口と出口での半径方向速度成分を v_{m1} , v_{m2} としたとき、羽根車入口断面と出口断面での連続の式より(羽根車入口と出口の幅をそれぞれ B_1 , B_2 とする)、

$$(2\pi \underbrace{r_1}_{=D_1/2} B_1) v_{m1} = (2\pi \underbrace{r_2}_{=D_2/2} B_2) v_{m2} \quad \Leftrightarrow \quad v_{m2} = \frac{2\pi (D_1/2) B_1}{2\pi (D_2/2) B_2} v_{m1} = \frac{1}{3} \times 10 [\text{m/s}] = 3.3 [\text{m/s}]$$
(35)

ただし、上式を計算する際、羽根車入口での半径方向速度 $v_{m1}=v_1$ と、羽根車入口と出口の断面積比が 1:3 なる関係を用いた.

羽根車出口の周速 u_2 は、羽根車の回転角速度を Ω [rad/s] としたとき、

$$u_2 = \underbrace{r_2}_{=D_2/2} \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = \frac{0.3[\text{m/s}]}{2} \times \left(2\pi \frac{2000}{60}\right) = 31.4 \,[\text{m/s}]$$
 (36)

羽根車出口での速度三角形より,

$$v_{m2} = w_2 \sin \beta_2 \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = \frac{v_{m2}}{\sin \beta_2} = \frac{3.3[\text{m/s}]}{\sin (45[\degree])} = 4.7 [\text{m/s}]$$
 (37)

羽根車出口における絶対速度 v_2 の周方向成分 v_{u2} は、速度三角形より、

$$v_{u2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2 = 31.4 [\text{m/s}] - 4.7 [\text{m/s}] \times \cos (45 [^{\circ}]) = 28.1 [\text{m/s}]$$
 (38)

したがって、羽根車出口での絶対速度 v_2 は、

$$v_2 = \sqrt{v_{u2}^2 + v_{m2}^2} = \sqrt{(28.1[\text{m/s}])^2 + (3.3[\text{m/s}])^2} = 28.3 \,[\text{m/s}]$$
 (39)

となる ¹.

$$v_2^2 = u_2^2 + w_2^2 - 2u_2w_2\cos\beta_2 \tag{40}$$

のようにしても求めることができる.

¹羽根車出口での絶対速度 12 は、余弦定理を用いて、

次に、理論揚程(オイラーヘッド) H_{th} について考える、羽根車の周方向成分に関する角運動量保存則より、ポンプ内部の流体全体を検査面にとれば、

ただし、 v_{u1} 、 v_{u2} はそれぞれ、羽根車入口・出口における絶対速度 v_1 、 v_2 の周方向成分である。このポンプの動力 L は、 $L=\underbrace{F\times r}_{=T}\Omega=T\underbrace{\Omega}_{=2\pi n}=2\pi nT$ より、

$$L = 2\pi \rho Q n \left(r_2 v_{u2} - r_1 v_{u1} \right) \tag{42}$$

しかるに、一般に動力 L は質量流量 \dot{m} と理論揚程(オイラーヘッド) H_{th} を用いて表せば、

$$L = \underbrace{\dot{m}}_{=\rho Q} g H_{th} \tag{43}$$

であるので、式 (42) と式 (43) から、羽根車入口での v_{u1} はゼロである(羽根車入口で流れは予旋回なく(半径方向に)流入する)ことに注意して、理論揚程 H_{th} は、

$$H_{th} = \frac{\overbrace{2\pi n}^{\Omega}}{g} (r_2 v_{u2} - r_1 v_{u1}) = \frac{u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}}{g}$$

$$= \frac{31.4[\text{m/s}] \times 28.1[\text{m/s}] - 10.5[\text{m/s}] \times 0.0[\text{m/s}]}{9.8[\text{m/s}^2]} = 90.0[\text{m}]$$
(44)

例題6

図7に示すような、軸流式羽根車がある.羽根車の入口羽根角 $\beta_1=45^\circ$ 、出口羽根角 $\beta_2=60^\circ$ である.作動流体は、羽根車入口で予旋回なく流入する.羽根車回転数を $n=9000/\pi$ [rpm] として、羽根車平均半径 r=0.1 [m] における速度三角形を描け.また、この羽根車の理論揚程(オイラーヘッド)を求めよ.

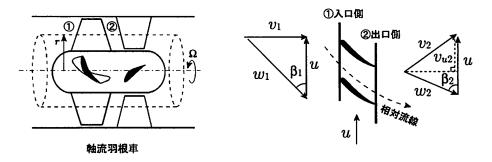


図 7: 軸流式羽根車

[解答]

羽根車平均半径 r=0.1 [m] に位置において、羽根車の周速 u は、

$$u = r \underbrace{\Omega}_{=2\pi n} = 2\pi n r = 2\pi \times \left(\frac{9000}{60\pi} [\text{rps}]\right) \times 0.1 [\text{m}] = 30 [\text{m/s}]$$
 (45)

題意より、羽根車入口①において、流入する流れは(予旋回がなく)軸方向であり、かつ、入口の羽根角が $\beta_1=45^\circ$ であることから、羽根車入口での速度三角形は直角二等辺三角形となる(図 7 参照). すなわち、羽根車入口での絶対速度 v_1 は周速度 u_1 と一致し、相対速度 w_1 は

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + u_1^2} = \sqrt{(30.0[\text{m/s}])^2 + (30.0[\text{m/s}])^2} = 42.3 [\text{m/s}]$$
 (46)

軸流羽根車の場合,羽根車入口①と出口②で断面積変化がしないので,連続の式から,軸流方向速度(法線方向速度)は入口での絶対速度 v_1 に等しい.したがって,羽根車出口での速度三角形より,羽根車出口での絶対速度の周方向成分 v_{u2} は

$$v_{u2} = u - \frac{v_1}{\tan \beta_2} = 30.0 [\text{m/s}] - \frac{30.0 [\text{m/s}]}{\tan (60.0 [^{\circ}])} = 12.7 [\text{m/s}]$$
 (47)

羽根車出口②での絶対速度 v_2 は、速度三角形より、

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_{u2}^2} = \sqrt{(30.0[\text{m/s}])^2 + (12.7[\text{m/s}])^2} = 32.6 \,[\text{m/s}]$$
 (48)

この軸流式羽根車の理論揚程(オイラーヘッド)は、式(31)と同様にして、

$$H_{th} = \frac{\overbrace{2\pi n}^{\Omega}}{g} (rv_{u2} - rv_{u1}) = \frac{uv_{u2} - uv_{u1}}{g} = \frac{u(v_{u2} - v_{u1})}{g}$$
$$= \frac{30.0[\text{m/s}] \times (12.7[\text{m/s}] - 0.0[\text{m/s}])}{9.8[\text{m/s}^2]} = 38.9 [\text{m}]$$
(49)