第7回 安定判別1：フィードバック系の安定性

制御工学Ⅱ

SETSUDAI

今回7：安定判別（1） フィードバック系の安定性

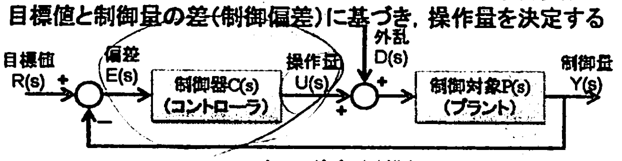
- 開ループ特性と応答
- 制御特性
- 開ループと内部安定
- ナイキストの安定判別法

前回6：ベクトル軌跡

フィードバック制御の構成

2

- 目標値と制御量の差(制御偏差)に基づき，操作量を決定する



- この制御系の伝達関数は，

$$G_{ur}(s)=\frac{C(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{ud}(s)=-\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$$

$$G_{yr}(s)=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad G_{yd}(s)=\frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \qquad (8.1)$$

いずれもC(s)を含んでいるので，制御対象P(s)が不安定であっても，制御器C(s)によって安定化できる。分母が同じに注目

開ループ特性

3

- フィードバックループを切断して得られる伝達関数
  L(s)=C(s)P(s)
  を開ループ伝達関数(Open-loop Transfer Function)という。
- 前ページの伝達関数はいずれも閉ループ伝達関数(Closed-loop Transfer Function)であるが、その分母は　1+C(s)P(s)=1+L(s)となり、この分母多項式の極の[任意]が負であれば安定であることはすでに学んだ。
  実部
- では、開ループ特性を見ることで安定を判別することはできないか、学ぶこととする。

まず2次遅れ要素のプラントにI制御を加えたループを見てみよう。

$$P(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n},\quad C(s)=\frac{K_i}{s}\quad とすると$$

$$G_{yr}(s)=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}=\frac{K_iK\omega_n^2}{s^3+2\zeta\omega_n s^2+\omega_n s+K_iK\omega_n^2},\quad (7.2)\quad となる。$$

開ループ伝達関数と安定性

4

式8.2のK=1,ωn=10,ζ=0.5として

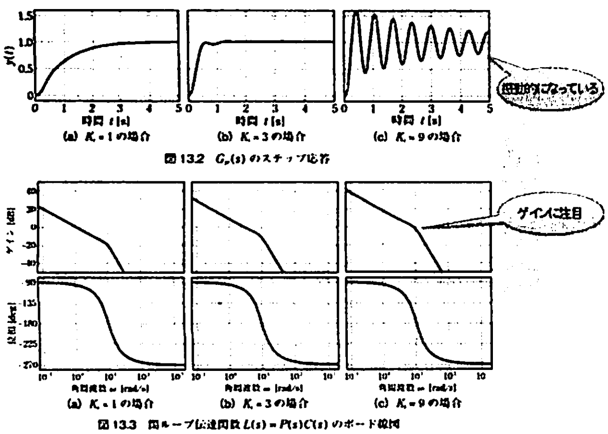
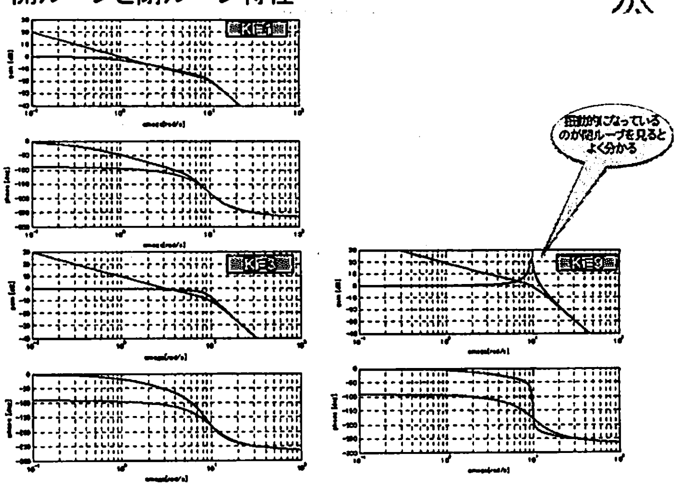


図13.2 $G_{yr}(s)$ のステップ応答
(a) K=1の場合　(b) K=3の場合　(c) K=9の場合
図13.3 開ループ伝達関数 $L(s)=P(s)C(s)$ のボード線図

開ループと閉ループ特性

5



閉ループ極と内部安定

開ループ伝達関数$L(s)=P(s)C(s)$　のそれぞれの項を

$$P(s)=\frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (7.3),\qquad C(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (7.4)$$

閉ループ

とすると開ループの特性方程式は$D_p(s)D_c(s)=0$であり、その極は$\boxed{}$極と呼ばれる。式7.3, 7.4を7.1式の4つの閉ループ伝達関数に適用すると

$$\left.\begin{aligned}
G_{ur}(s)&=\frac{D_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)},\quad G_{ud}(s)=\frac{N_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)}\\
G_{yr}(s)&=\frac{N_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)},\quad G_{yd}(s)=\frac{N_p(s)D_c(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)}
\end{aligned}\right\} \quad (7.5)$$

となる。これらに共通する特性方程式

$$N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)=0 \quad (7.6)$$

の極を$\boxed{}$極と言い、このすべての極の実部が負なら式7.5の4つの伝達関数がすべて安定＝内部安定となる。

この時、制御対象$P(s)$は厳密にプロパーであり、コントローラ$C(s)$はプロパーであるとする。

閉ループ

還送差は閉ループ極／開ループ極

開ループ伝達関数$L(s)$の分母・分子表現からえられる

$$L(s)=P(s)C(s)=\frac{N_p(s)N_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \quad (7.7)$$

を、閉ループの特性方程式の左辺$1+L(s)$に代入すると$\boxed{}$といわれる

還送差

$$1+L(s)=\frac{D_p(s)D_c(s)+N_p(s)N_c(s)}{D_p(s)D_c(s)}$$

$$=\frac{a(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (7.8)$$

となる。この時$p_1,p_2,\cdots p_n$は式7.7の極と同じであり、分母は開ループ極を与える。

また、分子の$z_1,z_2,\cdots z_n$は前ページの閉ループ極と同じであり、**還送差**の分母分子はともに既知の$\boxed{}$極と$\boxed{}$極から構成されていることが分かる。

閉ループ。　閉ループ

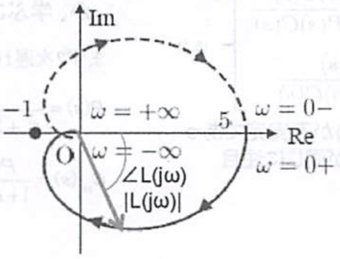
ナイキスト線図（開ループ伝達関数のベクトル軌跡）

開ループ伝達関数$P(j\omega)C(j\omega)$は複素関数であり、ある任意の$\omega\left[rad/s\right]$に対して複素平面（$P(j\omega)C(j\omega)$平面と呼ぶこともある）上の一つのベクトルを表す。

$$L(j\omega)=P(j\omega)C(j\omega)=\mathrm{Re}\left\{L(j\omega)\right\}+j\,\mathrm{Im}\left\{L(j\omega)\right\} \quad \text{(直交座標表示)}$$

$$=\left|L(j\omega)\right|\exp\left\{j\angle L(j\omega)\right\} \quad \text{(極座標表示)}$$

$\omega\left[rad/s\right]$を0から∞まで変化させたときの複素ベクトル$L(j\omega)$の先端が複素平面上に描くのがベクトル軌跡であったが、さらに実数軸に対して上下対象に描いたものをナイキスト線図という。



ナイキストの安定判別法

［ステップ1］

開ループ伝達関数のベクトル軌跡P(jω)C(jω)を，周波数ω=0～∞の範囲で描く．さらにこれを実軸に関して上下対称に描き，ナイキスト軌跡Γを得る．

［ステップ2］

ナイキスト軌跡Γが点(-1, 0)のまわりを時計方向にまわる回数を調べ，これをNとする．（反時計方向に1回の場合N=−1）

［ステップ3］

開ループ伝達関数P(s)C(s)の極の中で実部が正であるものの個数を調べ，これをΠとする．

［ステップ4］

閉ループ系の不安定な極の数はZ=N+Πとなる．したがって，Z=0ならばフィードバック制御系は安定，
Z≠0ならば系は不安定である．

ナイキスト安定判別法の利点

10 SETSUDAI

安定⇔Z=0⇔−N=Π

■ ナイキスト軌跡が点(−1,0)のまわりを反時計方向にまわる回数が，開ループ伝達関数の不安定極の個数に等しいならば，制御系は安定である．

ナイキスト安定判別法の利点

- ループを閉じる前の開ループ伝達関数の周波数応答によって図的に制御系（閉ループ系）の安定性を判別できる
- 計算の必要がなく，次数の高い系やむだ時間系にも容易に適用できる
- 実測データに基づいて判定できる
- 直感的に分かりやすく，さらに安定余裕も調べられる

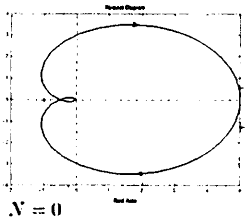
ナイキスト線図の使用例

11 SETSUDAI

■ 下記の開ループ伝達関数からナイキスト線図を描き安定を判別せよ

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

［ステップ１］



［ステップ２］ $N=0$

［ステップ３］ $\Pi=0$

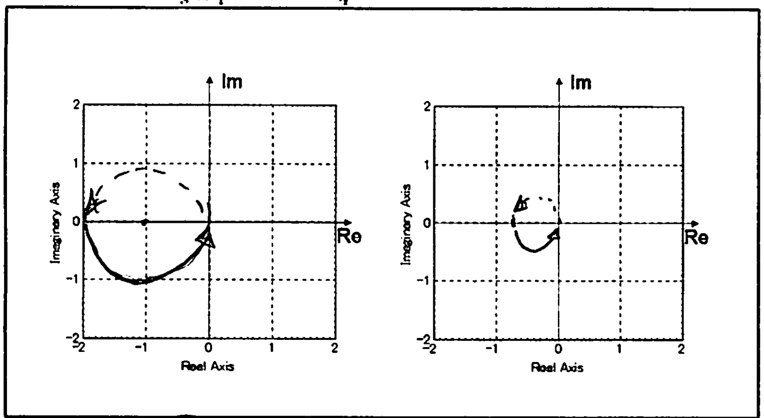
［ステップ４］ $Z=N+\Pi=0$ 制御系は安定

演習1

12 SETSUDAI

■ 開ループ伝達関数のゲインを変えた時にナイキスト線図がどのように変化するかを示し、安定を判別せよ

$$L(s) = \frac{K}{s-1} \qquad K = 2,\ \frac{3}{4}$$



$L(j\omega) = \dfrac{K}{j\omega-1} = \dfrac{2}{j\omega-1},\ \dfrac{\frac{3}{4}}{j\omega-1}$

極 = +1（不安定極）

$L(0) = \dfrac{2}{0-1},\ \dfrac{\frac{3}{4}}{0-1} = -2,\ -\dfrac{3}{4}$

$|L(j\omega)| = \dfrac{}{-\omega^2-1}$

K=2

$L(j\omega)=$, $|L(j\omega)|=$, $\angle L=$

ω	$L(j\omega)$	$\lvert L(j\omega)\rvert$	$\angle L(j\omega)$
0	$-2-j0$	2	-180
$1/T$	$-1-j1$	$\sqrt{2}$	-135
∞	$0-j0$	0	-90

極 $s=1$
$N=-1$
$\Pi=1$
$Z=0$
（安定）

K=3/4

$L(j\omega)=$, $|L(j\omega)|=$, $\angle L=$

ω	$L(j\omega)$	$\lvert L(j\omega)\rvert$	$\angle L(j\omega)$
0	$-3/4-j0$	$3/4$	-180
$1/T$	$-3/8-j3/8$	$3\sqrt{2}/8$	-135
∞	$-0-j0$	0	-90

極 $s=1$
$N=0$
$\Pi=1$
$Z=1$
（不安定）

$L(j\omega) = \dfrac{-2-j2\omega}{\omega^2+1}$, $|L(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$

$\angle L(j\omega) = \tan^{-1}(\omega)$

簡単化されたナイキストの安定判別法

13 SETSUDAI

開ループ伝達関数が安定な場合 Π＝0より
閉ループ不安定極 Z=0
となるためにはN=0でなければならない(Z=N+Π)ことから
簡単化されたナイキストの安定判別法

［ステップ1］開ループ伝達関数の極の中に，その実部が正となるものがないことを確認する．

［ステップ2］開ループ伝達関数のベクトル軌跡P(jω)C(jω)を角周波数ω=0～+∞の範囲で描く．

［ステップ3］ωを0から∞へ変化させたとき，この開ループ伝達関数のベクトル軌跡が点(−1,0)をつねに左に見るように動くならば，系は安定である．また，右に見れば系は不安定となる．

簡易判別法

14 SETSUDAI

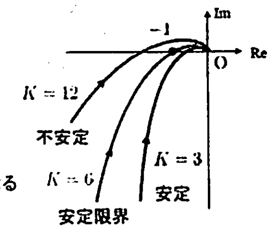
■開ループ特性が安定であるとして簡易判別法を適用する

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \qquad K = 3,\ 6,\ 12$$

$K=3$ のとき
点 $(-1,0)$ を常に左に見る
⇒ 安定

$K=6$ のとき
ちょうど点 $(-1,0)$ を通過する
⇒ 安定限界

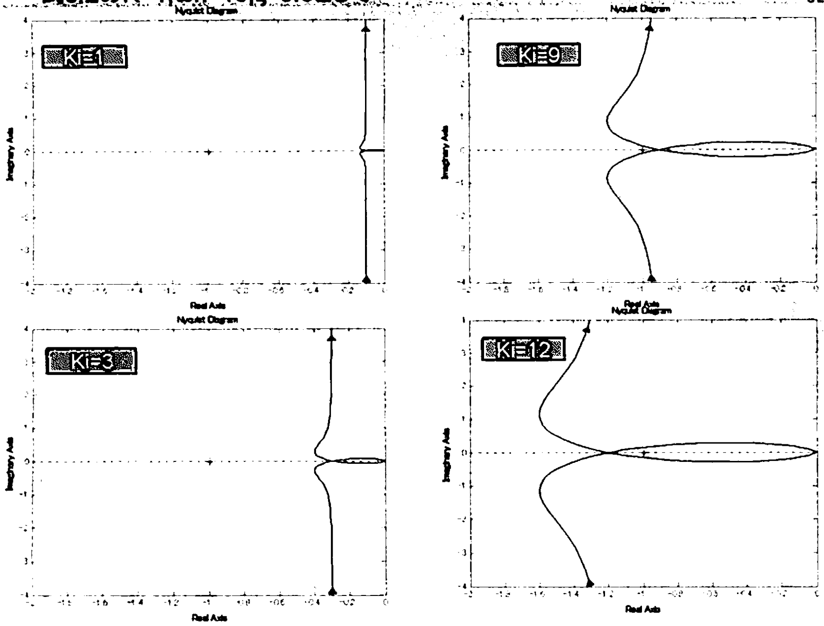
$K=12$ のとき
点 $(-1,0)$ を右にみるようになる
⇒ 不安定



ナイキスト線図の例

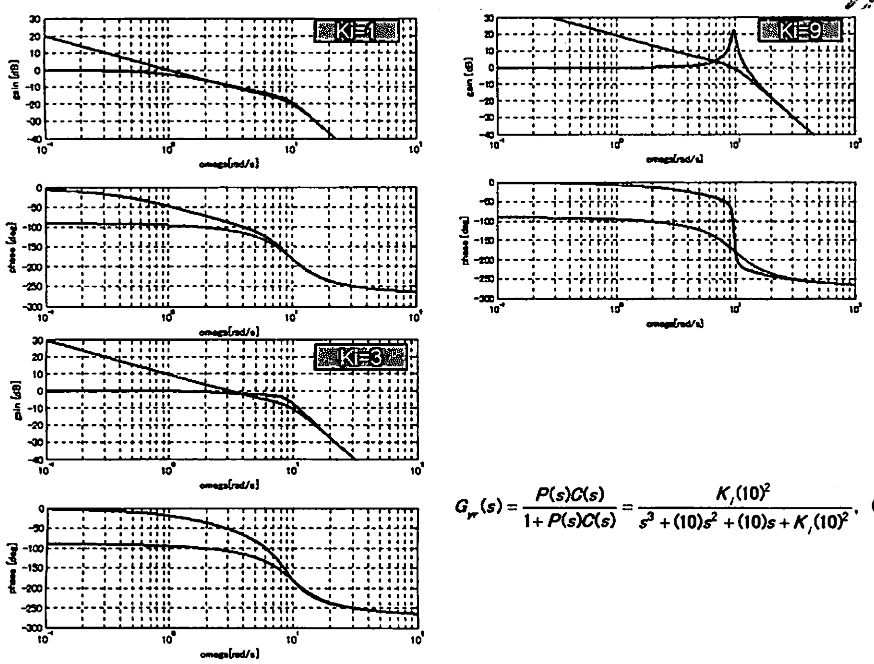
15 SETSUDAI

式8.2のK=1, ωn=10, ζ=0.5として



再度ボード線図と比較しておこう

16



$$G_{yr}(s)=\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}=\frac{K_i(10)^2}{s^3+(10)s^2+(10)s+K_i(10)^2},\quad (8.2)$$

まとめ

17 SETSUDAI

- ■フィードバック系の安定性について考察し、
- ■内部安定性について学習した。
- ■開ループ伝達関数が与えるベクトル軌跡が安定性の判別に便利であり、これを拡張したナイキスト線図による安定判別を学んだ。
- ■さらにシステムの安定性を仮定するともっと簡単に安定判別が可能となり、ベクトル軌跡が(−1,j0)の点を右に見るか左に見るかで判別が可能である。