

図 4.3 に示すような検査面内の流体に対する運動量の法則は、

$$\underbrace{\rho Q \vec{v}_2}_{\text{出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \vec{v}_1}_{\text{入口の運動量}} = \overbrace{\underbrace{\vec{F}}_{\text{流体が壁面から受ける力}} + \underbrace{p_1 A_1 \vec{e}_{n1}}_{\text{入口断面の圧力による力}} + \underbrace{p_2 A_2 \vec{e}_{n2}}_{\text{出口断面の圧力による力}}}_{\text{検査面内の流体が受ける力}} \quad (4.21)$$

である。ただし、 \vec{e}_{n1} および \vec{e}_{n2} は、それぞれ入口断面および出口断面における、検査面に対して内向きの単位法線ベクトルである。そして、壁面が流体から受ける力 \vec{F}' は $\vec{F}' = -\vec{F}$ である。 \vec{F}' の向きは、反時計まわりを正 として、 x 軸からの角度 β をとるとすれば、図 4.4 のように^a、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right) > 0 && \left(\frac{F'_y}{F'_x} > 0 \text{ のとき} \right) \\ \beta' &= \tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right) < 0 && \left(\frac{F'_y}{F'_x} < 0 \text{ のとき} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

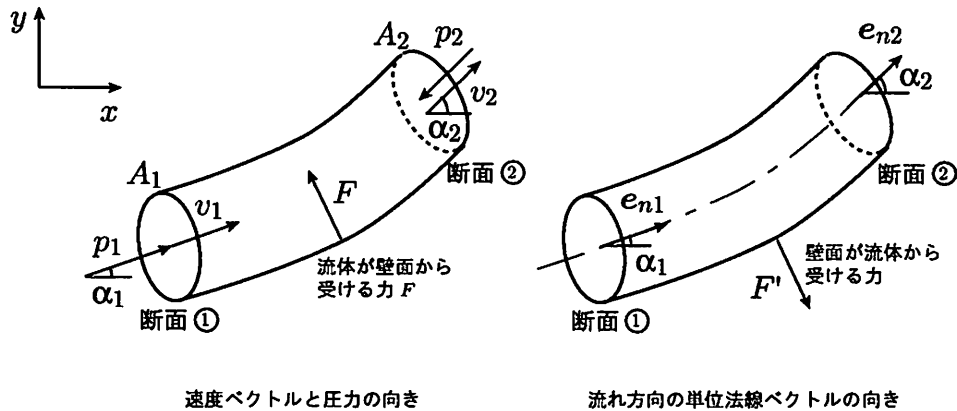


図 4.3: 運動量の法則と検査面

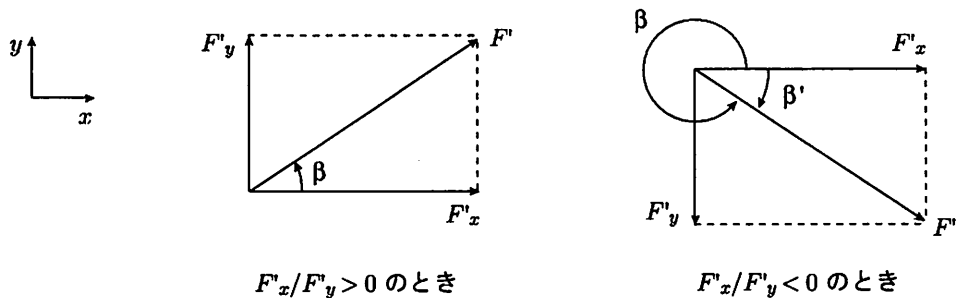


図 4.4: 壁面が流体から受ける力 \vec{F}' の向き

^a $(F'_y/F'_x) < 0$ のとき、 $\tan^{-1}(F'_y/F'_x)$ の計算には注意が必要である。つまり、図 4.4 (右図) のとき、 $\tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right)$ を計算したのでは、図中の β' になってしまい、 β として求めるためには、 $\beta = 2\pi + \tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right) > 0$ のように位相を 2π だけズラしてやる必要がある。 x 軸から反時計まわりを正方向にとった場合、 β' は時計まわりなので、負の値をとる。

4.2 例題で基本事項の確認

(例題 1)

図 4.5 のように、断面積 A のノズルから、密度 ρ の噴流が流速 V で十分に広い壁面に垂直に衝突し、その後壁面に沿って二方向に分流する。そのとき、壁面が受ける力 F' とその向き α を求めよ。ただし、この噴流は大気にさらされているため、ノズル出口断面、流体出口断面および噴流と大気が触れている自由表面での圧力は大気圧（ゲージ圧 = 0）である。また、流体は理想流体、流れは定常流れ、重力による影響は無視できるものとする。

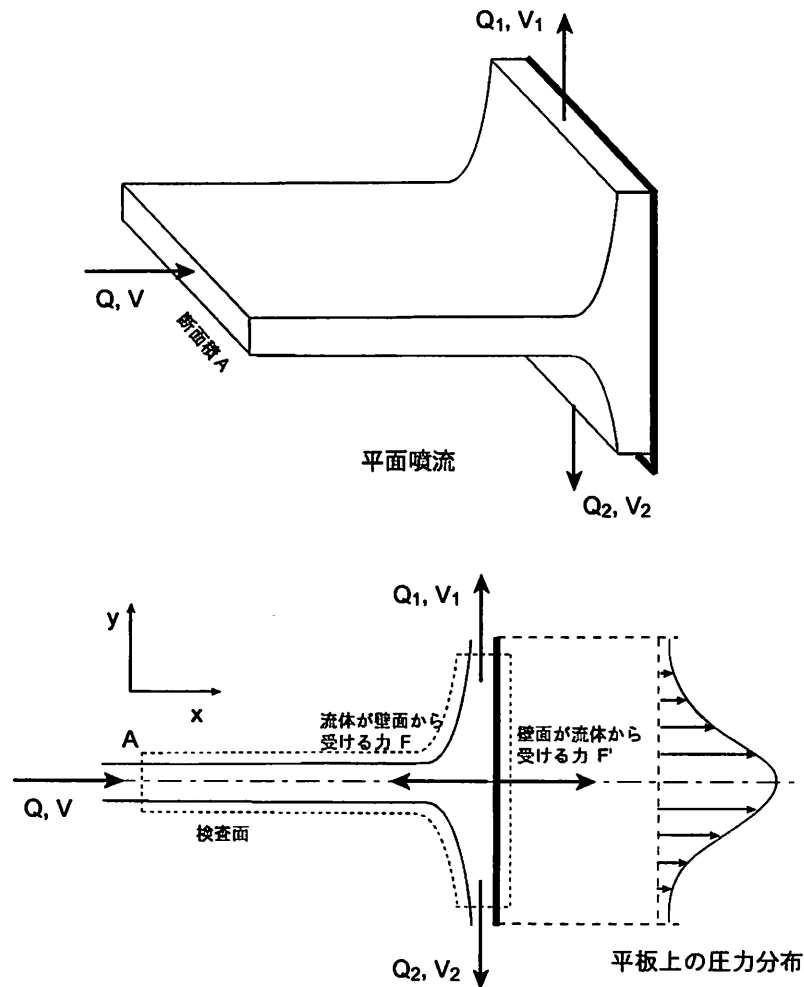


図 4.5: 平板に垂直に衝突する噴流

[解答]

題意のように、壁面にあたった噴流は、壁面に沿って上下へ流れる。図 4.5 には、この噴流による壁面上における圧力分布も併せて示している。すなわち、壁の中心で圧力は最

も大きく、その値は $\rho V^2/2$ であり、中心から遠ざかるにつれて、小さくなる。壁面が受ける力 F' は、この圧力分布を壁面上で積分することにより求めることができるが、図 4.5 の点線で示すような検査面をとり、運動量の法則を適用すると、圧力分布が分からずとも F' を求めることができる。つまり、式 (4.21) は

$$\underbrace{\rho Q_1 \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \end{pmatrix}}_{\text{上側出口の運動量}} + \underbrace{\rho Q_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -V_2 \end{pmatrix}}_{\text{下側出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}_{\text{流体が壁面から受ける力}} \quad (4.23)$$

となる。噴流の水脈上では圧力は大気圧であるので³、ベルヌーイの定理より、

$$V = V_1 = V_2 \quad (4.24)$$

である。もちろん、検査面上側出口と下側出口での流量は等しく、

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \quad (4.25)$$

である。検査面入口での流量 Q は、 $Q = AV$ である。従って、式 (4.23) は式 (4.24) と式 (4.25) より、 $F_x = -\rho QV$ 、 $F_y = 0$ となる。壁面が流体から受ける力 \vec{F}' は、 \vec{F} の反力なので、

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho QV \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho AV^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

であり、力の向き β は、

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right) = 0 [\text{rad.}] \quad (4.27)$$

である。つまり、 x 軸の正方向である。

(例題 2)

前問の(例題 2)は、噴流が十分広い壁面に衝突する場合であったが、本問では図 4.6 のように、断面積が A の噴流が流速 V で小さい平板に衝突し、角度 θ で二方向に分流する場合を考える。このとき、平板が流体から受ける力 F' を求めよ。ただし、流体は理想流体、流れは定常流れ、重力による影響は無視できるものとする。

[解答]

図 4.6 の点線のように検査面をとると、式 (4.21) は

$$\underbrace{\rho Q_1 \begin{pmatrix} V_1 \cos \theta \\ V_1 \sin \theta \end{pmatrix}}_{\text{上側出口の運動量}} + \underbrace{\rho Q_2 \begin{pmatrix} V_2 \cos \theta \\ -V_2 \sin \theta \end{pmatrix}}_{\text{下側出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}_{\text{流体が壁面から受ける力}} \quad (4.28)$$

³ 平行流の場合、断面内で静圧は一定であるため、噴流の流れ方向と垂直な断面内の静圧は大気圧に等しい。

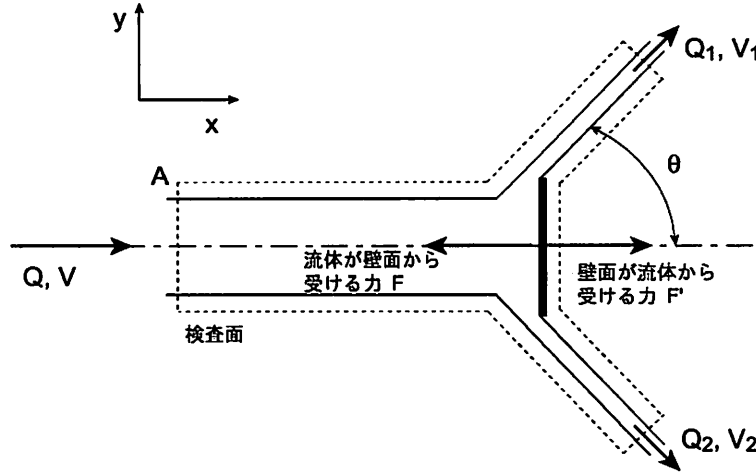


図 4.6: 小さな平板に衝突する噴流

となる。噴流の水脈上では圧力は大気圧であるので、ベルヌーイの定理より、

$$V = V_1 = V_2 \quad (4.29)$$

である。検査面上側出口と下側出口での流量は等しく、

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \quad (4.30)$$

である。検査面入口での流量 Q は、 $Q = AV$ である。従って、 $F_x = \rho QV(\cos \theta - 1)$ 、 $F_y = 0$ となる。壁面が流体から受ける力 \vec{F}' は、 \vec{F} の反力なので、

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho QV(1 - \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho AV^2(1 - \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

である。

(例題 3)

前問において、噴流が流れさる角度 θ が 90° より大きくなる場合について考える。つまり、図 4.7 のように、噴流が“水受け”に衝突する場合、水受けが流体から受ける力 F' を求めよ。

[解答]

本問の場合、式 (4.21) は

$$\underbrace{\rho Q_1 \begin{pmatrix} -V_1 \cos \alpha \\ V_1 \sin \alpha \end{pmatrix}}_{\text{上側出口の運動量}} + \underbrace{\rho Q_2 \begin{pmatrix} -V_2 \cos \alpha \\ -V_2 \sin \alpha \end{pmatrix}}_{\text{下側出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}_{\text{流体が壁面から受ける力}} \quad (4.32)$$

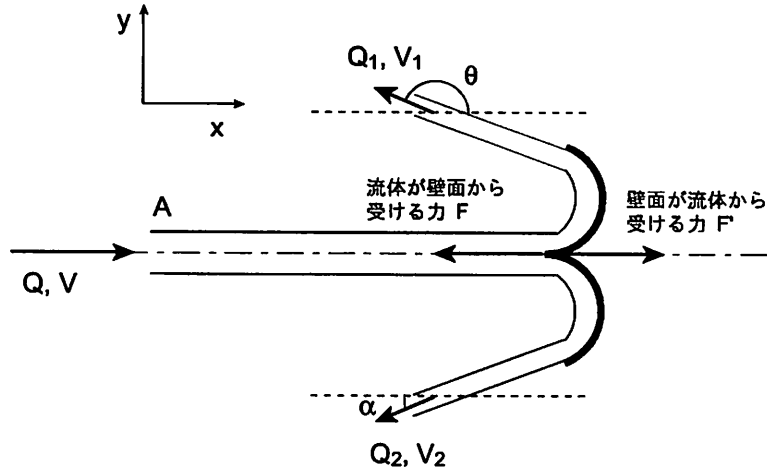


図 4.7: 上下対称な水受けに衝突する噴流

となる。噴流の水脈上では圧力は大気圧であるので、ベルヌーイの定理より、

$$V = V_1 = V_2 \quad (4.33)$$

である。検査面上側出口と下側出口での流量は等しく、

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2} \quad (4.34)$$

である。検査面入口での流量 Q は、 $Q = AV$ である。従って、 $F_x = -\rho QV(\cos \alpha + 1)$ 、 $F_y = 0$ となる。壁面が流体から受ける力 \vec{F}' は、 \vec{F} の反力なので、

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho QV(1 + \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho AV^2(1 + \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

である。噴流が 180° 方向を変え、 $\alpha = 0$ で流出する場合には、水受けに作用する力は式 (4.26) (十分に広い平板に噴流が垂直に衝突した場合) の 2 倍となる。

この原理を利用した代表的な例は、図 4.8 に示す“ペルトン水車”である。

(例題 4)

図 4.9 のように、断面積 A のノズルから密度 ρ の噴流が、角度 θ で設置された、十分に広い平板に、流速 V で衝突し、平板に沿って二方向に分流している。このとき、次の場合について、平板が流体から受ける力 F' を求めよ。

(i) 平板が静止している場合。

(ii) 平板が速度 U ($V > U$) で噴流と同じ向きに動いている場合。

ただし、この噴流は大気にさらされているため、ノズル出口断面、流体出口断面および噴流と大気が触れている自由表面での圧力は大気圧 (ゲージ圧 = 0) である。また、流体は理想流体、流れは定常流れ、重力による影響は無視できるものとする。

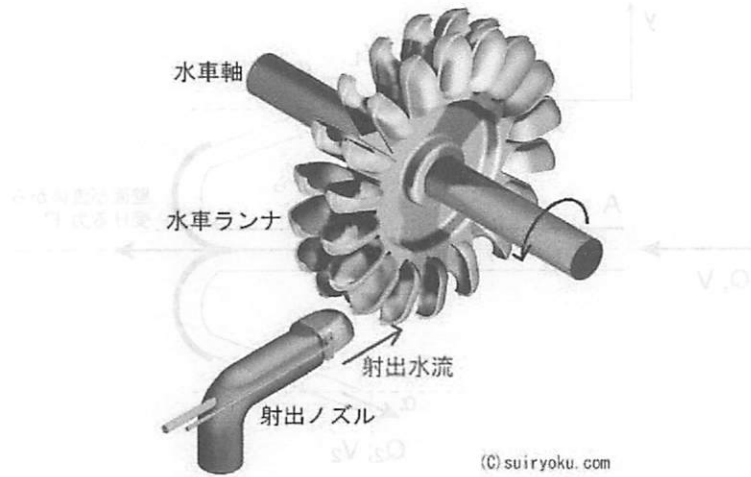


図 4.8: ペルトン水車 (<http://www.suiryoku.com/mecha/wheel/pelton/pelton.html>)

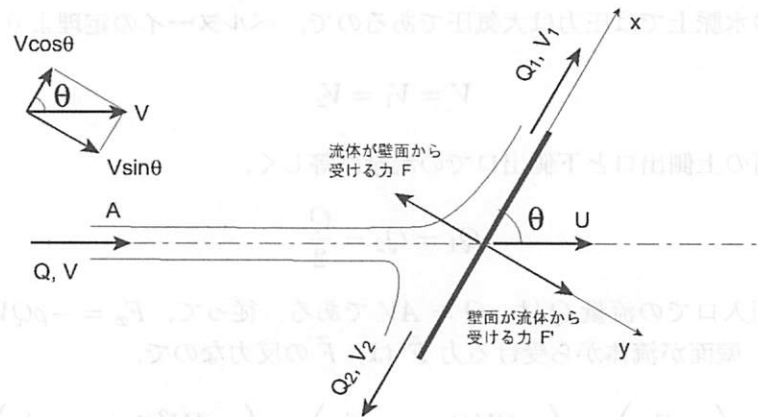


図 4.9: 斜めに設置された平板に衝突する噴流

[解答]

(i) 図 4.9 のように、傾斜平板に沿って x - y 座標系をとると、式 (4.21) は

$$\underbrace{\rho Q_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{上側出口の運動量}} + \underbrace{\rho Q_2 \begin{pmatrix} -V_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{下側出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \cos \theta \\ V \sin \theta \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

となる。噴流の水脈上では圧力は大気圧であるので、ベルヌーイの定理より、

$$V = V_1 = V_2 \quad (4.37)$$

である。また、連続の式より、

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (4.38)$$

である。理想流体の仮定から、平板に働く摩擦力は無視できるので、

$$F_x = \rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2 - \rho Q V \cos \theta = 0 \quad (4.39)$$

である必要がある。式 (4.39) は、式 (4.37) と式 (4.38) を用いて整理することができ、

$$Q_1 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) Q \quad (4.40)$$

を得る。前問のように、噴流が平板に対して垂直に衝突する場合 ($\theta = \pi/2$)、 $Q_1 = Q_2 = Q/2$ となり、上下に等しく分流することが確認できる。

さて、平板が流体から受ける力 F' は、平板に対して垂直方向 (y 方向) の力 F_y の反作用より、

$$F' = -F_y = \rho Q V \sin \theta = \rho A V^2 \sin \theta \quad (4.41)$$

である。

(ii) 平板が噴流と同じ方向に速度 U で動いている場合を扱うときは、平板と共に動く相対座標系を考えれば都合がよい。つまり、図 4.10 に示すように、静止している平板に $V - U$ の速度で噴流が衝突することと同じになる。そのとき、平板が流体から受ける力 F' は、式 (4.41) の速度 V を $V - U$ で置き換えてやればよく、

$$F' = \rho A (V - U)^2 \sin \theta \quad (4.42)$$

となる。

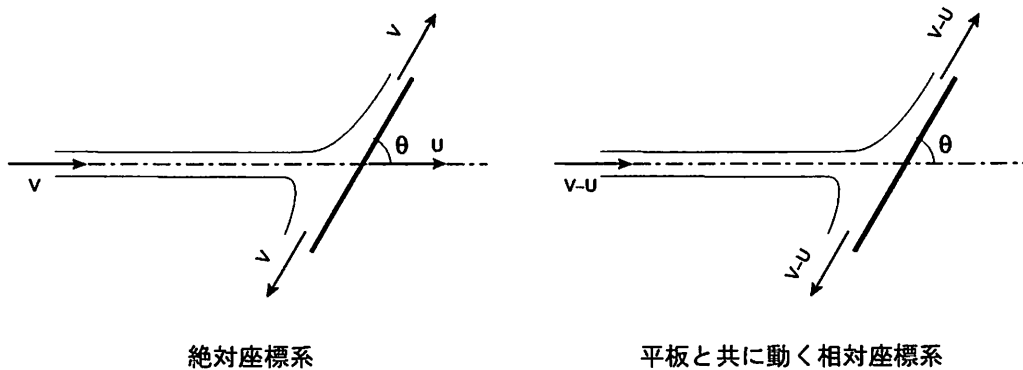


図 4.10: 斜めに設置された平板に衝突する噴流 (絶対座標系と相対座標系)

(例題 5)

図 4.11 のように、断面積 A のノズルから密度 ρ の噴流が、水平面内に設置された二次元の曲板の一方から接線方向 (x 軸と平行な方向) に流速 V で流入し、流れの方向を変えられている。このとき、次の場合について、曲板が流体から受ける力 F' とその x 軸からの向き α を求めよ。

(i) 曲板が静止している場合.

(ii) 曲板が速度 U ($V > U$) で噴流と同じ向きに動いている場合.

ただし, この噴流は大気にさらされているため, ノズル出口断面, 流体出口断面および噴流と大気が触れている自由表面での圧力は大気圧 (ゲージ圧 = 0) である. また, 流体は理想流体, 流れは定常流れ, 重力による影響は無視できるものとする.

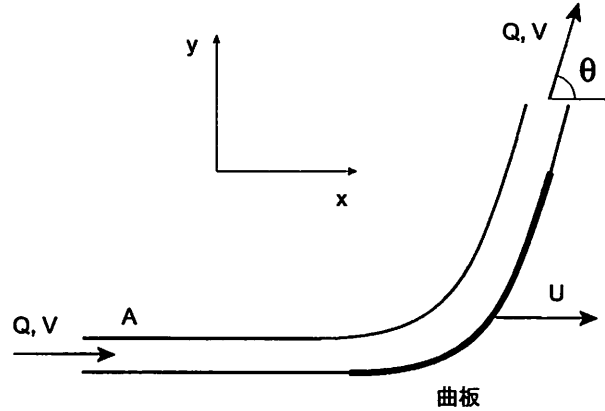


図 4.11: 曲板に衝突する噴流

[解答]

(i) 図 4.11 のように, x - y 座標系をとると, 式 (4.21) は

$$\underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \cos \theta \\ V \sin \theta \end{pmatrix}}_{\text{出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

ただし, 流量 Q は, $Q = AV$ である. 従って, $F_x = \rho QV(\cos \theta - 1)$, $F_y = \rho QV \sin \theta$ となる. 壁面が流体から受ける力 \vec{F}' は

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho QV(1 - \cos \theta) \\ -\rho QV \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho AV^2(1 - \cos \theta) \\ -\rho AV^2 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

であるので, 力の大きさ $|\vec{F}'|$ は,

$$|\vec{F}'| = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y} = \rho AV^2 \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \quad (4.45)$$

となり, 力の向き β' は,

$$\beta' = \tan^{-1} \left(\frac{F'_y}{F'_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1} \right) = \pi - \frac{\theta}{2} \quad (4.46)$$

となる⁴.

(ii) 曲板が噴流と同じ方向に速度 U で動いている場合, 曲板と共に移動する相対座標系で

⁴==== \tan^{-1} の崩し方=====

扱えば、静止している曲板に $V - U$ の速度で噴流が衝突することと同じになる。すなわち、力の大きさ $|\vec{F}'|$ は、式 (4.45) の V を $V - U$ で置き換えて、

$$|\vec{F}'| = \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2} = \rho A (V - U)^2 \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \quad (4.47)$$

となる。

4.3 演習問題

(問題 1)

図 4.12 のように、水平に置かれた入口内径 d_1 、出口内径 d_2 、角度 θ の曲管の中を密度 ρ の液体が流量 Q で流れている。いま入口での圧力が p_1 のとき、水が曲管に及ぼす力の大きさ F' と方向 β を以下の手順に従って求めよ。

- (i) 入口（断面①）と出口（断面②）で連続の式をたて、入口の速度 u_1 と出口の速度 u_2 を求めよ。
- (ii) 入口（断面①）と出口（断面②）でベルヌーイの式をたて、出口での圧力 p_2 を求めよ。
- (iii) 液体が曲管に及ぼす水平方向の力 F_x' と垂直方向の力 F_y' を求めよ。
- (iv) 液体が曲管に及ぼす合力 F' とその方向 β （もしくは、 β' ）を、設問 (iii) で求めた F_x' と F_y' を用いて記述せよ。ただし、角度 α は反時計回りを正とする。
- (v) $d_1 = 300 [\text{mm}]$ 、 $d_2 = 200 [\text{mm}]$ 、 $\theta = 60^\circ$ 、 $Q = 200 [\text{L/s}]$ 、 $p_1 = 150 \times 10^3 [\text{Pa}]$ のとき、設問 (iv) の F' と α の値はいくらになるか求めよ。ただし、 $1 [\text{L}] = 10^{-3} [\text{m}^3]$ である。

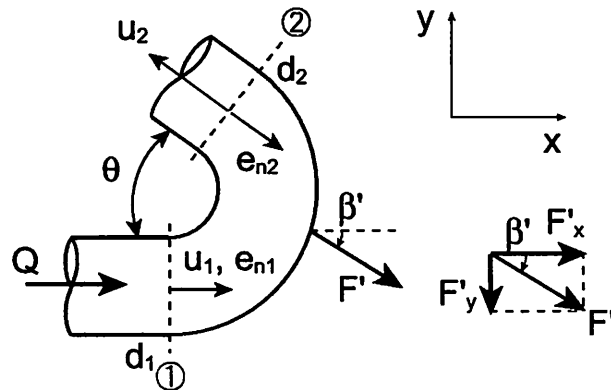


図 4.12: 曲管内の流れと運動量の法則

[解答]

- (i) 断面①と断面②での連続の式より、 $Q = \frac{\pi}{4} d_1^2 u_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 u_2$ である。従って、 $u_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}$ 、 $u_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2}$ を得る。