[redacted]

(4) 風車が取り出せるエネルギー ΔEは,

$\frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}V_2^2 + \Delta E$ [J/kg]

風車の出力P [W]は,

$P = m \cdot \Delta E = (\rho Q) \cdot \Delta E$ [W]

$= \frac{1}{2}\rho A V (V_1^2 - V_2^2)$

$V_2 = 2V - V_1$

ところに,題意より,

$V = V_1(1-a)$ なので

$V_2 = 2V_1 - 2V_1 a - V_1$

$= (1-2a)V_1$

これを式(11)に代入して

V_2を消せば,

$P = \frac{1}{2}\rho A \{V_1^2 - (1-2a)^2 V_1^2\}$

$= 2\rho A V_1^3 a(1-a)^2$ — Ⓐ

風車の出力

[redacted]

α：風車の最大出力

$$\frac{dP}{d\alpha} = 2\rho A V_1^{\,3}\left[(1-\alpha)^2 + \alpha(-2)(1-\alpha)\right]$$

$$(1-\alpha)\{(1-\alpha)-2\alpha\}$$

$$= (1-\alpha)(1-3\alpha)$$

$$= 2\rho A V_1^{\,3}(1-\alpha)(1-3\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1,\ \tfrac{1}{3}$$

$V = V_1(1-\alpha) = 0$ となるため，

$\alpha=1$ は適さない

したがって．$\alpha = \frac{1}{3}$ のとき．

最大出力 P_{max} は，

$$P_{max} = \frac{8}{27}\rho A V_1^{\,3}$$

Ⓐ（オモテ）に，α 1/3 を代入したもの．

一方，風車に流入する単位時間あたりの

エネルギーは，

$$E_{wind} = \frac{1}{2}\dot{m}V_1^{\,2} = \frac{1}{2}\rho A V_1^{\,3}$$

Betzの限界

最大効率 η は．

$$\eta = P_{max}/E_{wind} = \frac{\frac{8}{27}\rho A V_1^{\,3}}{\frac{1}{2}\rho A V_1^{\,3}} = 16/27$$

← 理論最大効率

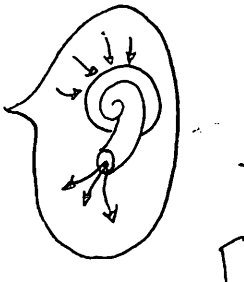
19/1/2019 エネルギー変換工学 第8回

○ ターボ機械

↳ 、遠心式 → フランシス水車

、斜流式 → 斜流水車

、軸流式 → { プロペラ水車 / 軸流タービン

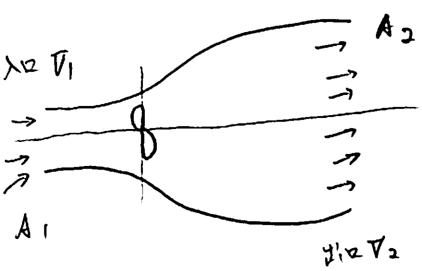


ベルヌーイの定理

$$\underbrace{\frac{v_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+Z_1}_{\text{入口}} = \underbrace{\frac{v_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+Z_2}_{\text{出口}}$$

$\Delta E = E_{in} - E_{out}$ [J/kg]

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+gh=(一定)$$



(1) 運動量の法則より

$$\underbrace{\rho Q\begin{pmatrix}V_2\\0\end{pmatrix}}_{\text{出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q\begin{pmatrix}V_1\\0\end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \underbrace{\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix}}_{\text{流体が風車から受ける力}}$$

風車が流体から受ける力は、

Fの反作用なので、

$$\begin{pmatrix}F_x'\\F_y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-F_x\\-F_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho Q(V_1-V_2)\\0\end{pmatrix}$$

スラスト

したがってスラストTは、

$$T=\rho Q(V_1-V_2) \quad \cdots (3)$$

(2) ベルヌーイの式より、

$$\begin{cases}\underbrace{\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}}_{\text{(入口断面)}}=\underbrace{\frac{V^2}{2}+\frac{P^+}{\rho}}_{\text{(風車前面)}} & (Zは0)\\ \frac{V^2}{2}+\frac{P^-}{\rho}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}\end{cases}$$

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\frac{P^-}{\rho}=\frac{V^2}{2}+\frac{P^+}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho}$$

$P_1=P_2=P_a$ より、

$$\frac{V_1^2}{2}+\cancel{\frac{P_a}{\rho}}+\frac{P^-}{\rho}=\frac{P^+}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+\cancel{\frac{P_a}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2}+\frac{P^-}{\rho}=\frac{V_2^2}{2}+\frac{P^+}{\rho}$$

整理して、$P^+-P^-=\frac{\rho}{2}(V_1^2-V_2^2) \quad \cdots (6)$

スラストTは、

$$T=(P^+-P^-)A=\frac{\rho}{2}(V_1^2-V_2^2)A \quad \cdots (7)$$

式(3)と式(7)をイコールでつなげれば、

$$\rho Q(V_1-V_2)=\frac{\rho}{2}\underbrace{(V_1^2-V_2^2)}_{(V_1-V_2)(V_1+V_2)}A$$

したがって、$Q=\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)A \quad \cdots (8)$

風車を通過する速度Vは、

$Q=AV$ より、

$$V\cancel{A}=\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\cancel{A}$$

$$\therefore V=\frac{V_1+V_2}{2} \quad \cdots (9)$$

↳「風車を通過する速度は、入口と出口の平均値」

(4) 風車が取り出せるエネルギー ΔE は，

$$\underbrace{\frac{1}{2}V_1^2}_{\text{入口のエネルギー}} - \underbrace{\frac{1}{2}V_2^2}_{\text{出口のエネルギー}} = \underbrace{\Delta E}_{\text{風車が受け取るエネルギー}}\ [\mathrm{J/kg}] \quad \cdots (10)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right)$$

風車の出力 $P\,[\mathrm{W}]$ は，

$$P = \dot{m}\cdot\Delta E = (\rho Q)\,\Delta E \quad [\mathrm{W}]$$

$[\mathrm{kg/s}]\times[\mathrm{J/kg}]$

$$= \frac{1}{2}\rho \underbrace{AV}_{=Q}\left(V_1^2 - V_2^2\right) \quad \cdots (1)$$

出口流速を消したい。

式(9)より，

$$V_2 = 2V - V_1$$

さらに，題意より，$V = V_1(1-\alpha)$ なので，

$$V_2 = 2\cdot V_1(1-\alpha) - V_1$$
$$= 2V_1 - 2V_1\alpha - V_1$$
$$= (1-2\alpha)V_1$$

これを式(1)に代入して，V_2 を消せば，

$$P = \frac{1}{2}\rho A\left\{V_1^2 - (1-2\alpha)^2 V_1^2\right\}$$
$$= 2\rho A_1^3\alpha(1-\alpha)^2 \quad \cdots (12)$$

風車の出力

風車の最大出力となる α の値は，

$$\frac{dP}{d\alpha} = 2\rho A V_1^3\left[\underbrace{(1-\alpha)^2 + \alpha\cdot(-2)(1-\alpha)}\right]$$

$$(1-\alpha)\{(1-\alpha)-2\alpha\}$$
$$= (1-\alpha)(1-3\alpha)$$

$$= 2\rho A V_1^3(1-\alpha)(1-3\alpha) = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha=1}$ のときか，$\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，

$V = V_1(1-\alpha) = 0$ より，不適

したがって，$\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，最大出力となる。

$$P_{max} = \frac{8}{27}\rho A V_1^3 \quad \cdots (14)$$

式(12)に，$\alpha = 1/3$ を代入

一方，風車に流入する単位時間あたりのエネルギーは，

$$E_{wind} = \frac{1}{2}\underbrace{\boxed{\dot{m}}}_{\substack{\text{質量流量}\\ \rho A V_1}} V_1^2 = \frac{1}{2}\rho A V_1^3 \quad \cdots (15)$$

風車の最大効率は，

$$\eta = P_{max}/E_{wind} = \frac{\frac{8}{27}\rho A V_1^3}{\frac{1}{2}\rho A V_1^3}$$

Betsの限界

$$= 16/27$$

風車の理論最大効率