ロボットの運動（逆運動学）

ロボット概論　11

11

第12回（2019/12/9）

担当：山﨑

はじめに

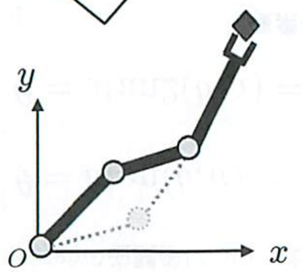
- 前回の内容
  - オイラー角
  - ロール・ピッチ・ヨー角
  - ~~逆~~運動学計算　順
  - DHパラメータ
  - 偏微分とヤコビ行列
- 今回の内容
  - 逆三角関数
  - 逆運動学（幾何的に解く手法）
  - 逆運動学（ヤコビ行列による手法）

⇨ 目標位置までロボットアームを動かすには？

（復習）運動学

- 運動学（キネマティクス，kinematics）
  - ロボットアームのリンクの位置や速度などの関係を幾何学的に考える

どのような姿勢を
とっている／とるべきか？



各関節の角度から，先端の位置，向きを求める
⇒ 順運動学

主な用途：外力による姿勢変化を調べる
目標軌道との誤差を調べる

先端の位置，向きから，各関節の角度を求める
⇒ 逆運動学

主な用途：目標の位置・軌道にロボットアームを動かす

（準備）逆三角関数

- 逆運動学では，逆三角関数（アークサイン，アークコサイン，アークタンジェント）が使われる
- 三角関数（sin, cos, tan）の値から，角度を返す
- 値域に注意

値域

$$x = \sin\theta \iff \theta = \sin^{-1} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \cos\theta \iff \theta = \cos^{-1} x \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$x = \tan\theta \iff \theta = \tan^{-1} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

※arcsin, asin という書き方もされる

- 計算例

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

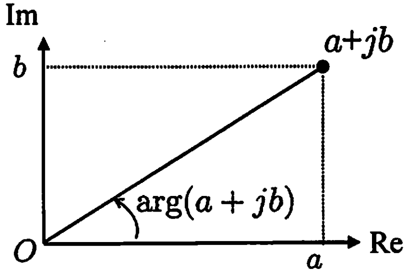
(準備)逆三角関数

- tanの逆関数についてはtan^{-1}以外にatan2という関数もしばしば使われる

$$\theta = \mathrm{atan}(b, a) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{値域} \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \mathrm{atan2}(b, a) = \arg(a + jb) \qquad \boxed{(-\pi < \theta \leq \pi)}$$

↑ 複素平面上の偏角(argument)で角度を考える



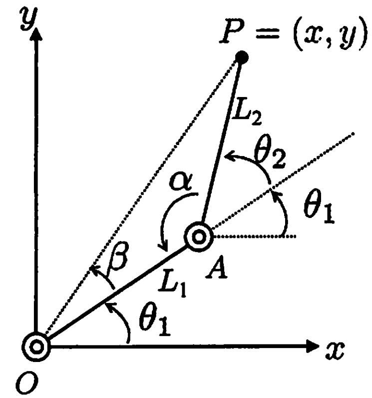
- 計算例

$$\mathrm{atan2}(2, 2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{atan2}(3, \underline{0}) = \frac{\pi}{2}$$

2自由度ロボットアームの逆運動学計算

構造によっては，幾何的に解けることを確認しよう。



- 順運動学については次式で求まる
  (θ_1, θ_2からx, yが求まる)

$$\begin{cases} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

- 上式を出発点に逆運動学を解いていこう
  (手先位置x, yからθ_1, θ_2を求めよう)

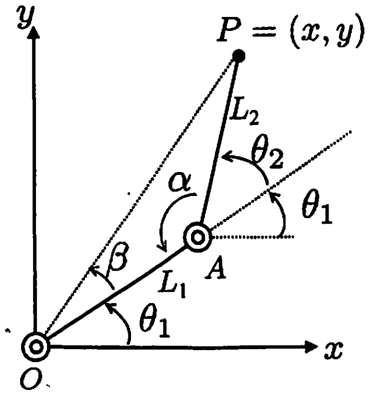
方針

1. △OAPを考える
2. 余弦定理から，$\cos\alpha$，$\cos\beta$を求める
3. 逆三角関数でα，βを求める
4. α，βからθ_1，θ_2を求める

2自由度ロボットアームの逆運動学計算

余弦定理より $\overline{OP}^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\alpha$ であるから

$$\cos\alpha = \frac{L_1^2 + L_2^2 - \overline{OP}^2}{2L_1L_2}$$



よって，逆三角関数を使って

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - \overline{OP}^2}{2L_1L_2}\right)$$

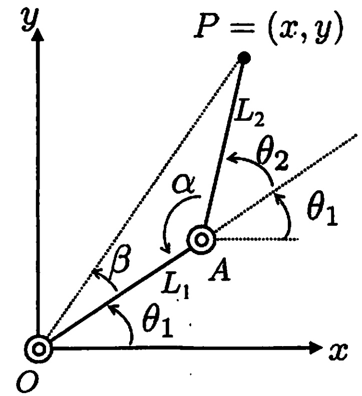
ここで $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$ より

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pi - \alpha \\ &= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - (x^2+y^2)}{2L_1L_2}\right) \end{aligned}$$

自由度ロボットアームの逆運動学計算

また $L_2^2 = L_1^2 + \overline{OP}^2 - 2L_1\overline{OP}\cos\beta$ より $\cos\beta = \dfrac{L_1^2 + \overline{OP}^2 - L_2^2}{2L_1\overline{OP}}$

よって $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{L_1^2 + \overline{OP}^2 - L_2^2}{2L_1\overline{OP}}\right)$



$\theta_1 + \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{\overline{OP}}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{x}{\overline{OP}}\right) - \beta \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &\quad - \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + x^2 + y^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$