

Oct/19/2019

物理-熱力学

例題 B-1

ガソリンエンジンは理想的には、可逆断熱圧縮過程、体積一定のもとでの吸熱過程、可逆断熱膨張過程、体積一定のもとでの放熱過程からなるオットー (Otto) ・サイクルで作動する。作業流体が気体定数 R 、比熱比 κ (一定) の理想気体であるとして次の問に答えよ。

- (1) このサイクルの p - V 線図および T - s 線図の概略を示せ。
- (2) このサイクルの熱効率 η は、圧縮比、すなわち、可逆断熱圧縮過程の前後の作業流体の体積の比を ε とすると、 $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}$ で与えられることを示せ。
- (3) このサイクルで得られる作業流体の単位質量当たりの仕事が 1 サイクル当たり w であるとき、このサイクルにおける作業流体の絶対温度の最高値、最高圧力と最低圧力の比および比エントロピーの最大値と最小値の差を求めよ。ただし、作業流体の絶対温度の最低値を T_0 とする。

[解答]

(1) 本問は、ガソリンエンジンで用いられるオットー・サイクルに関する問題である。各過程は、図 1 の p - v 線図 (仕事を調べるのに便利) および図 2 の T - s 線図 (熱を調べるのに便利) からなる：

- 過程 1 → 2 (断熱圧縮)： $pv^\kappa = \text{一定}$, $s = \text{一定}$
- 過程 2 → 3 (吸熱 q , 定積変化)： $v = v_2 = \text{一定}$
- 過程 3 → 4 (断熱膨張)： $pv^\kappa = \text{一定}$, $s = \text{一定}$
- 過程 4 → 1 (排熱 q' , 定積変化)： $v = v_1 = \text{一定}$

なお、式 (??) より、過程 2 → 3 では

$$s_3 - s_2 = c_v \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{v_2}{v_2} = c_v \ln \frac{T}{T_2} \quad \Leftrightarrow \quad T = T_2 e^{\frac{s_3 - s_2}{c_v}} \quad (1)$$

となる。これが T - s 線図 2 の温度である。図 3 にオットー・サイクルの各過程におけるシリンダ内のピストンの位置を示してある。

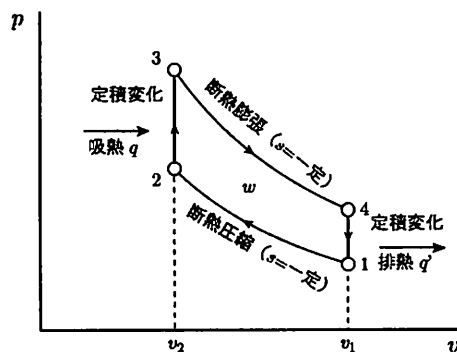


図 1: オットー・サイクルの p - v 線図

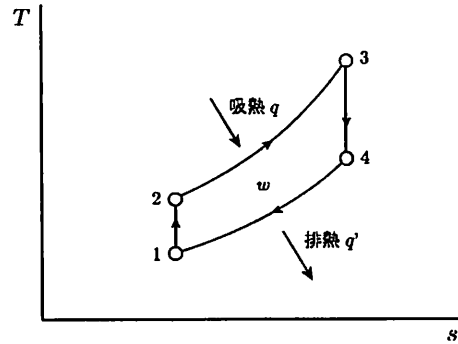


図 2: オットー・サイクルの T - s 線図

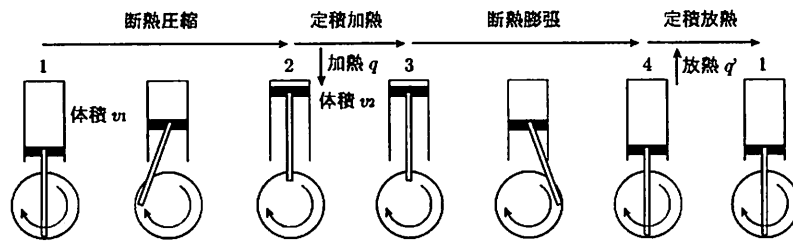


図 3: オットー・サイクル

(2) 熱サイクルの効率 η は,

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{w}{q} = \frac{q - q'}{q} \quad (\text{熱力学の第 1 法則より, } w = q - q') \\ &= 1 - \frac{q'}{q}\end{aligned}\tag{2}$$

過程 $2 \rightarrow 3$ と過程 $4 \rightarrow 1$ は定積変化であるので, 定積比熱の定義 $c_v = \frac{dq}{dT}$ より,

$$\text{過程 } 2 \rightarrow 3 \text{ (吸熱): } q = c_v(T_3 - T_2)\tag{3}$$

$$\text{過程 } 4 \rightarrow 1 \text{ (排熱): } q' = c_v(T_4 - T_1)\tag{4}$$

である. 式 (3) と式 (4) を式 (2) に代入して,

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\tag{5}$$

過程 $1 \rightarrow 2$ と過程 $3 \rightarrow 4$ は断熱変化であるので,

$$pv^\kappa = \text{一定} \Leftrightarrow \underbrace{pv}_{=RT} \cdot v^{\kappa-1} = \text{一定} \Leftrightarrow Tv^{\kappa-1} = \text{一定}\tag{6}$$

が成り立つ. したがって, 過程 $1 \rightarrow 2$ では

$$T_1 v_1^{\kappa-1} = T_2 v_2^{\kappa-1} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} = \epsilon^{\kappa-1}\tag{7}$$

ただし、圧縮比 ε は次のように定義している¹。

$$\text{圧縮比: } \varepsilon = \frac{v_1}{v_2} \quad (8)$$

過程 3 → 4 では

$$T_3 v_2^{\kappa-1} = T_4 v_1^{\kappa-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1} \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) より、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad (10)$$

式 (10) より、式 (5) は

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \quad (11)$$

となる。熱効率 η を高めるには、式 (11) の分母を大きくする必要がある。すなわち、作業流体の比熱比 κ ($\approx 1.3 \sim 1.4$) が一定ならば、圧縮比 ε を大きくしなければならない。圧縮比は通常 $\varepsilon = 5 \sim 10$ 程度であるが、あまり大きくしすぎると、ノッキング（異常燃焼）などの副次的悪影響が発生してしまう。オットー・サイクルの実際の熱効率は $\eta = 18 \sim 25\%$ 程度である。

(3) 式 (7) より、

$$\frac{T_2}{T_1} = \varepsilon^{\kappa-1} \quad (12)$$

題意より、 $T_1 = T_0$ であるので、式 (12) は

$$\frac{T_2}{T_0} = \varepsilon^{\kappa-1} \quad (13)$$

過程 2 → 3 は定積変化であるので、 $T_3 = T_{\max}$ として（図 4 参照）、定積比熱の定義より、

$$q = \frac{T_{\max} - T_2}{\underbrace{c_v}_{= \frac{1}{\kappa-1} R}} \quad (14)$$

また、式 (11) より、

$$\eta = \frac{w}{q} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \quad (15)$$

であるので、式 (13)、式 (14) と式 (15) より、

$$T_{\max} = T_0 \varepsilon^{\kappa-1} + \frac{(\kappa-1)w}{(1 - \varepsilon^{1-\kappa})R} \quad (16)$$

¹圧縮比 ε は、下死点での体積 v_1 と上死点での体積 v_2 の比で、 $\varepsilon > 1$ である。

p_{\max}/p_{\min} の関係も同様にして求めることができる。過程 $1 \rightarrow 2$ は断熱変化であるので、 $pv^\kappa = \text{一定}$ より、

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_2}{\underbrace{p_1}_{=p_{\min}}} = \varepsilon^\kappa \quad (17)$$

過程 $2 \rightarrow 3$ は定積変化であるので式 (14) が成り立ち、さらに、気体の状態方程式より、

$$\frac{T_2}{p_2} = \frac{T_{\max}}{p_{\max}} \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{p_2}{p_{\max}} T_{\max} \quad (18)$$

式 (14) の T_2 に式 (18) を代入し、式 (11) と式 (17) より、

$$\frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \varepsilon^\kappa + \frac{(\kappa - 1)\varepsilon w}{(1 - \varepsilon^{1-\kappa})RT_0} \quad (19)$$

比エントロピーの最大値と最小値の差 Δs は、図 4 より過程 $2 \rightarrow 3$ (もしくは、過程 $4 \rightarrow 1$) で考えればよい。この過程は定積変化であるので、式 (??) より、

$$\Delta s = s_3 - s_2 = \underbrace{c_v}_{=\frac{R}{\kappa-1}} \ln \frac{T_{\max}}{T_2} + R \ln \underbrace{\frac{v_2}{v_2}}_{=0} = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \frac{T_{\max}}{T_2} \quad (20)$$

ここで、式 (13) より、

$$T_2 = \varepsilon^{\kappa-1} T_0 \quad (21)$$

であるので、これを式 (20) に代入して、

$$\Delta s = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \frac{T_{\max}}{\varepsilon^{\kappa-1} T_0} \quad (22)$$

さらに、この式の T_{\max} に式 (16) を代入して、

$$\Delta s = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \left[1 + \frac{(\kappa - 1)w}{(\varepsilon^{\kappa-1} - 1)RT_0} \right] \quad (23)$$

のように求められる。

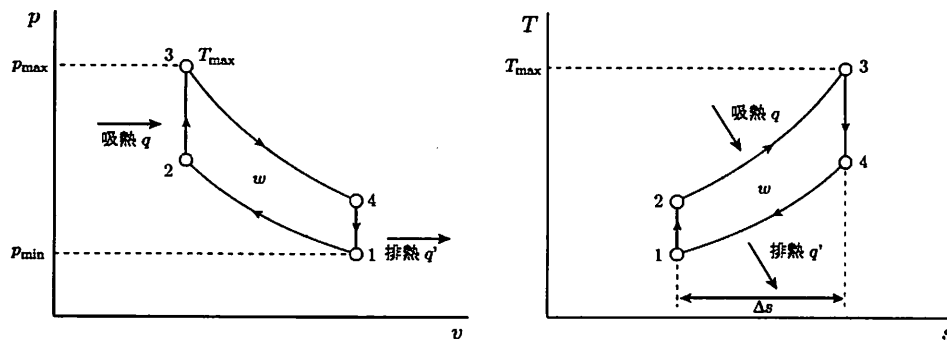


図 4: オットー・サイクルの p - v 線図と T - s 線図

覚えておこう (オットー・サイクル)

断熱変化では,

$$ds = 0 \quad (24)$$

$$pv^\kappa = \text{一定}, \quad \text{ただし}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} > 1 \quad (25)$$

が成り立つことに注意する.

$$\text{圧縮比: } \varepsilon = \frac{v_1}{v_2} \quad (26)$$

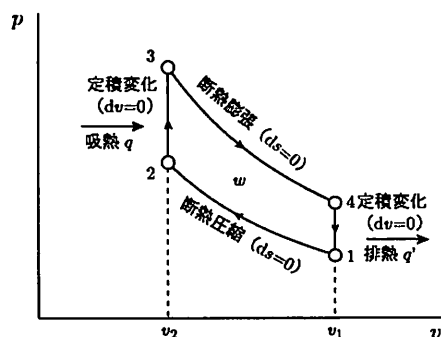


図 5: オットー・サイクルの p - v 線図

例題 B-2

ディーゼル (Diesel) ・サイクルは, 可逆断熱圧縮過程, 圧力一定のもとでの吸熱過程, 可逆断熱膨張過程, 体積一定のもとでの放熱過程からなる. 作業流体が気体定数 R , 比熱比 κ (一定) の理想気体であるとして次の問に答えよ.

(1) このサイクルの p - V 線図および T - s 線図の概略を示せ.

- (2) このサイクルの熱効率を圧縮比と噴射締切比の関数として表し、噴射締切比の増加とともに熱効率が低下することを示せ。
- (3) このサイクルにおける作業流体の圧力と絶対温度の最高値と最低値の比および比エントロピーの最大値と最小値の差を、圧縮比と噴射締切比を用いて表せ。

[解答]

(1) 本問は、ディーゼル・サイクルに関する問題である。ディーゼル・サイクルは圧縮率 $\varepsilon = v_1/v_2$ が高いため²、熱効率 $\eta = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1}$ が良い。ディーゼル・サイクルの各過程は、図6の p - v 線図および図7の T - s 線図からなる：

- 過程 1 → 2 (断熱圧縮)： $pv^\kappa = \text{一定}$, $s = \text{一定}$
- 過程 2 → 3 (吸熱 q , 定圧変化)： $v = v_2 = \text{一定}$
- 過程 3 → 4 (断熱膨張)： $pv^\kappa = \text{一定}$, $s = \text{一定}$
- 過程 4 → 1 (排熱 q' , 定積変化)： $v = v_1 = \text{一定}$

図8にディーゼル・サイクルの各過程におけるシリンダ内のピストンの位置を示してある。

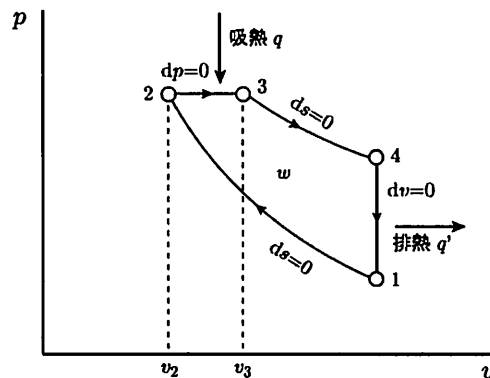


図 6: ディーゼル・サイクルの p - v 線図

過程 2 → 3 では定圧変化であるので、式(??)より、

$$s - s_2 = c_p \ln \frac{T}{T_2} - \underbrace{R \ln \frac{p_2}{p_2}}_{=0} \Leftrightarrow T = T_2 e^{\frac{s-s_2}{c_p}} \quad (27)$$

である。これが過程 2 → 3 の温度変化である。他方、オットー・サイクルの過程 2 → 3 は定積変化であるので、式(1)より、

$$T = T_2 e^{\frac{s_3-s_2}{c_v}} \quad (28)$$

ここで、 $c_p > c_v$ であるので、式(27)のほうが式(28)よりも小さくなるので、図7の波線で示すように、定積変化（オットー・サイクル）のときよりも勾配は緩やかとなる。

²具体的には、 v_1 が大きく、 v_2 が小さい。

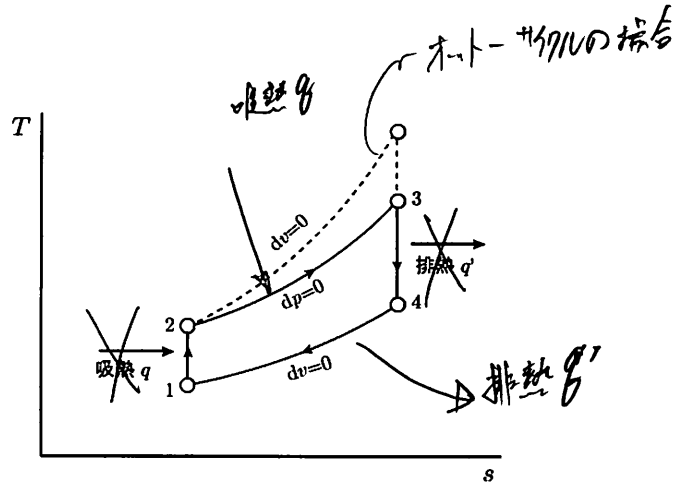


図 7: ディーゼル・サイクルの T - s 線図

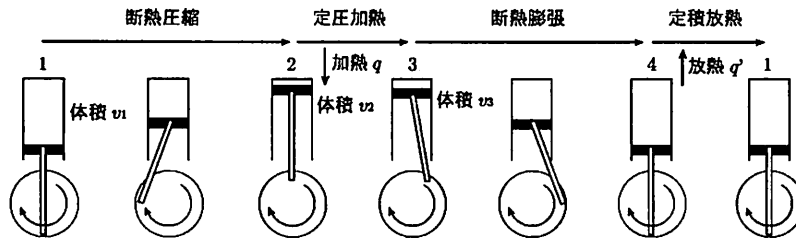


図 8: ディーゼル・サイクル

(2) サイクルの熱効率 η は

$$\eta = 1 - \frac{q'}{q} \quad (29)$$

ただし、吸熱量 q と排熱量 q' はそれぞれ、比熱の定義 $c = dq/dT$ より、

$$\text{過程 } 2 \rightarrow 3 \text{ (定圧変化): } q = c_p(T_3 - T_2) \quad (30)$$

$$\text{過程 } 4 \rightarrow 1 \text{ (定積変化): } q' = c_v(T_4 - T_1) \quad (31)$$

また、過程 $1 \rightarrow 2$ は断熱変化であるので、 $Tv^{\kappa-1} = \text{一定}$ より、

$$T_1 v_1^{\kappa-1} = T_2 v_2^{\kappa-1} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1} \quad (32)$$

過程 $2 \rightarrow 3$ は定圧変化であるので、 $v/T = \text{一定}$ (状態方程式) より、

$$\frac{v_2}{T_2} = \frac{v_3}{T_3} \Leftrightarrow T_3 = \underbrace{\frac{v_3}{v_2}}_{=\rho \text{ (噴射締切比)}} T_2 \quad (33)$$

過程 $3 \rightarrow 4$ は断熱変化であるので、 $Tv^{\kappa-1} = \text{一定}$ より、

$$T_3 v_3^{\kappa-1} = T_4 v_4^{\kappa-1} \Leftrightarrow \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{v_1}{v_3} \right)^{\kappa-1} = \underbrace{\left(\frac{v_1}{v_2} \right)}_{=\varepsilon} \times \underbrace{\left(\frac{v_2}{v_3} \right)}_{=1/\rho}^{\kappa-1} = \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{\kappa-1} \quad (34)$$

以上より、式 (30) と式 (31) は、

$$q = c_p(T_3 - T_2) = c_p T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right) = c_p T_2 (\rho - 1) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} q' &= c_v(T_4 - T_1) = c_v T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right) = c_v T_1 \left(\underbrace{\frac{T_4}{T_3}}_{=(\frac{\rho}{\epsilon})^{\kappa-1}} \times \underbrace{\frac{T_3}{T_2}}_{=\rho} \times \underbrace{\frac{T_2}{T_1}}_{=\epsilon^{\kappa-1}} - 1 \right) \\ &= c_v T_1 (\rho^{\kappa} - 1) \end{aligned} \quad (36)$$

したがって、式 (29) の熱効率 η は

$$\eta = 1 - \underbrace{\frac{c_v}{c_p}}_{=1/\kappa} \underbrace{\frac{T_1}{T_2}}_{=\epsilon^{1-\kappa}} \frac{\rho^{\kappa} - 1}{\rho - 1} = 1 - \frac{\rho^{\kappa} - 1}{\kappa \epsilon^{\kappa-1} (\rho - 1)} \quad (37)$$

実際には、噴射縮切比は $\rho = 1.5$ 程度であるので、ディーゼル・サイクルの熱効率は $\eta = 65\%$ 程度にまで達し、オットー・サイクルに比べ非常に優れていることが分かる。このディーゼル・サイクルを改良したものに、サバテ・サイクルというものがある。

式 (37) より、ディーゼル・サイクルにおいて、噴射縮切比 ρ が大きくなるとき熱効率 η は小さくなり、特に、 $\rho \rightarrow 0$ のとき、

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \eta = 1 - \frac{1}{\kappa \epsilon^{\kappa-1}} \quad (38)$$

となることに注意せよ。

式 (37) を ρ で微分すると、

$$\frac{d\eta}{d\rho} = -\frac{(\rho - 1)\kappa\rho^{\kappa-1} - \rho^{\kappa} + 1}{\kappa\epsilon^{\kappa-1}(\rho - 1)^2} \quad (39)$$

となるが、この増減を調べるには、式 (39) の分子の符号を調べれば十分である。そこで、式 (39) の分子は

$$(\text{分子}) = (\kappa - 1)\rho^{\kappa} - \kappa\rho^{\kappa-1} + 1 \quad (40)$$

であるが、この符号を調べるために、式 (40) をさらに微分する。

$$(\text{分子})' = \kappa(\kappa - 1)\rho^{\kappa-2}(\rho - 1) > 0 \quad (41)$$

また、 $\rho = 1$ のとき、式 (40) はゼロとなる（つまり、 $(\text{分子})_{\rho=1} = 0$ ）ことから、式 (40) は正となることが分かり、題意は示された。

(3) 過程 $1 \rightarrow 2$ は断熱変化であるので、 $pv^{\kappa} = \text{一定}$ より、

$$p_1 v_1^{\kappa} = p_2 v_2^{\kappa} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_1} = \epsilon^{\kappa} \quad (42)$$

T_3/T_1 は、式 (32) と式 (33) より、

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{T_3}{T_2} = \epsilon^{\kappa-1} \times \rho \quad (43)$$

となるので、比エントロピーの最大値と最小値の差 Δs は (図 9 参照) , 式 (??) より,

$$\begin{aligned}\Delta s &= s_4 - s_1 = s_3 - s_1 = c_p \ln \frac{T_3}{T_1} - R \ln \frac{p_3}{p_1} = c_p \ln (\rho \varepsilon^{\kappa-1}) - R \ln \varepsilon^{\kappa} \\ &= c_p \ln \rho + \underbrace{c_p}_{=\frac{\kappa}{\kappa-1}R} (\kappa - 1) \ln \varepsilon - R \kappa \ln \varepsilon = c_p \ln \rho\end{aligned}\quad (44)$$

となる.

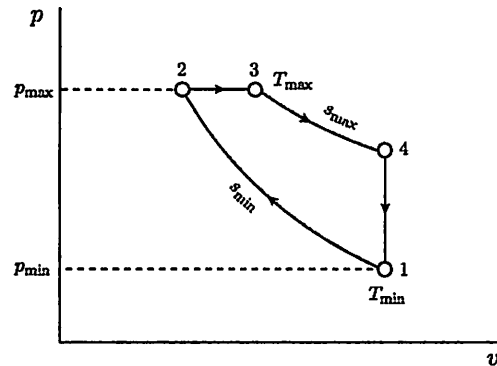


図 9: ディーゼル・サイクルの T - s 線図

覚えておこう (ディーゼル・サイクル)

$$\text{噴射縮切比: } \rho = \frac{v_3}{v_2} \quad (45)$$

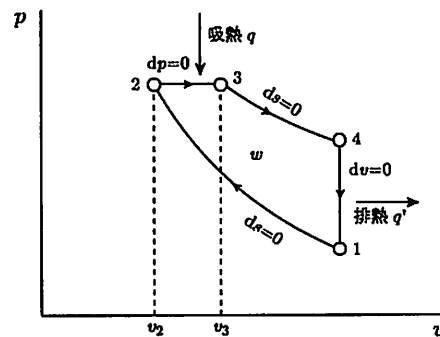


図 10: ディーゼル・サイクルの p - v 線図