

例題 —ベッツの限界（風車の最大理論効率）—

水平軸プロペラ風車の理論的な効率を下記の順序で求めよ。ただし、図1（上図）のような流管を定義し、断面内の風速・圧力分布の概略は図1（下図）で与えられるものとする。入口、出口およびプロペラ位置の流管の断面積をそれぞれ A_1 , A_2 および A とし、対応する位置における断面平均風速をそれぞれ V_1 , V_2 および V とする。また、圧力 p^+ および p^- はそれぞれプロペラ直前と直後の圧力を表しており、空気の密度は ρ とする。

- (1) 水平軸方向の運動量保存則を用いて、プロペラに加わる右向きのスラスト T を求めよ。
- (2) 前問に対して、ベルヌーイの式を用いて、プロペラの上流および下流の圧力差として、プロペラに加わる右向きのスラスト T を求めよ。
- (3) (1), (2) で求めたスラストが等しいことを用いて、プロペラ位置の断面平均風速 V を入口断面平均風速 V_1 および出口断面平均風速 V_2 を用いて表せ。
- (4) 次式に示す水平方向の風速変化を示すパラメータ a を導入するとき、プロペラにより風から取り出されるパワー P を、エネルギーの保存則から求めよ。なお、風速については入口断面平均風速 V_1 を用いて記述すること。

$$V = V_1(1 - a) \quad (1)$$

- (5) P の最大値を求めよ。また、プロペラ位置の面積 A で受ける単位時間当たりの風力エネルギーを分母としたときの、風車の理論的最大効率を算出せよ。

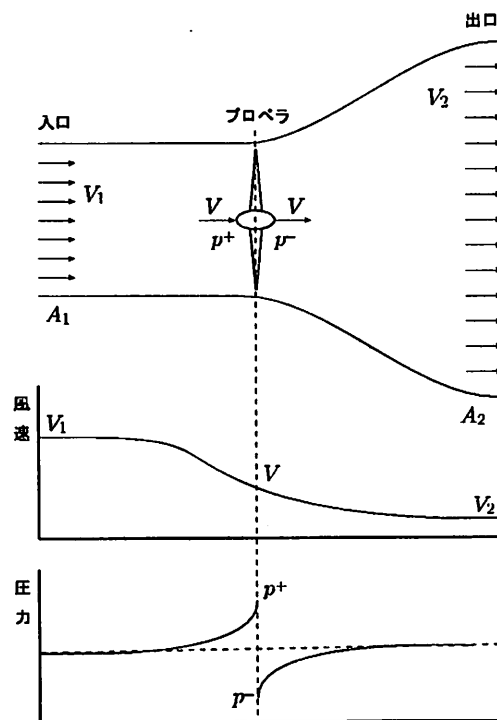


図 1: 風車を過ぎる流れの様子と風速分布・圧力分布

[解答]

- (1) 図1の入口断面と出口断面で囲まれた流体領域を検査体積とする。連続の式から、入口断面からこの検査体積に流入する流量 (Q_1) は、出口断面から流出する流量 (Q_2) に等しい。つまり、 $Q_1 = Q_2 = Q$ である。また、入口と出口の断面は風車から十分離れていることから、そこでの圧力は等しい ($p_1 = p_2$) と考えてもよい¹。そのとき、検査体積内の流体に対して運動量の法則をたてると、

$$\underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{出口の運動量}} - \underbrace{\rho Q \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{入口の運動量}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}_{\text{流体が風車から受ける力}} \quad (2)$$

ただし、 $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ である。風車が流体から受ける力 (スラスト T) は、 F_x の反作用であるので、

$$T = -F_x = \rho Q (V_1 - V_2) \quad (3)$$

- (2) 風車プロペラの上流側直前での圧力を p^+ 、速度を V 、風車プロペラの下流側直後での圧力を p^- 、速度を V とする。そのとき、検査体積入口断面と風車プロペラ上流直前、および、風車プロペラ下流直後と検査体積出口断面でベルヌーイの式をたてると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho}}_{\text{検査体積入口断面}} = \underbrace{\frac{1}{2}V^2 + \frac{p^+}{\rho}}_{\text{風車プロペラ上流直前}} \quad (4)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}V^2 + \frac{p^-}{\rho}}_{\text{風車プロペラ下流直後}} = \underbrace{\frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho}}_{\text{検査体積出口断面}} \quad (5)$$

上述のように、 $p_1 = p_2$ であるので、式 (4)–(5) は、次式のように整理される。

$$p^+ - p^- = \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) \quad (6)$$

この圧力差にプロペラの面積 A を掛けたものがプロペラに働くスラスト T である。

$$T = (p^+ - p^-)A = \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2)A \quad (7)$$

- (3) 式 (3) と式 (7) を等しいとくと、

$$Q = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)A \quad (8)$$

となる。なお、 $Q = AV$ であるので、結局、

$$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \quad (9)$$

を得る。つまり、風車を通過する風速 V は、入口断面の風速 V_1 と出口断面の風速 V_2 の平均値であることが分かる。

¹検査体積の側面に働く圧力も、遠方での圧力に等しいと仮定する。

- (4) 空気が単位質量当りに有するエネルギーのうち、風車によって吸収されるエネルギーを ΔE とすると、ベルヌーイの式（エネルギー保存則）は次式のように書くことができる²。

$$\underbrace{\frac{1}{2}V_1^2}_{\text{入口断面でのエネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}V_2^2}_{\text{出口断面でのエネルギー}} + \underbrace{\Delta E}_{\text{風車に吸収されるエネルギー}} \quad (10)$$

風車のパワー P [W] ($=$ [J/s]) は、風車に吸収される単位質量当りのエネルギー ΔE [J/kg] に風車を通過する風の質量流量 \dot{m} [kg/s] を掛けて求められる。

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{\rho AV}_{\text{質量流量 } \dot{m}} \Delta E \\ &= \rho AV \times \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) \end{aligned} \quad (11)$$

題意で与えられた $V = V_1(1-a)$ と式 (9) より、 $V_2 = 2V - V_1 = V_1(1-2a)$ であるので、式 (11) で V_2 を消去して、風車のパワー P は、

$$P = 2\rho AV_1^3 a(1-a)^2 \quad (12)$$

のように求めることができる。

- (5) 風車のパワー P が最大となるときの風速の減衰率 a は、 $dP/da = 0$ となる a の値である。すなわち、式 (12) を a で微分すると、

$$\frac{dP}{da} = 2\rho AV_1^3 (3a-1)(a-1) \quad (13)$$

となり、 $a = 1$ と $a = 1/3$ で極値を持つが、 $a = 1$ だと式 (12) からパワーが $P = 0$ になってしまうため不適切である。したがって、 $a = 1/3$ のとき、風車のパワー P [W] (式 (12)) は最大値をとる。

$$P_{\max} = \frac{8}{27}\rho AV_1^3 \quad (14)$$

一方、プロペラ位置で受ける単位時間当たりの風力エネルギー E_{wind} [W] ($=$ [J/s]) は、

$$E_{\text{wind}} = \frac{1}{2} \underbrace{\rho AV_1}_{\text{質量流量 } \dot{m}} V_1^2 \quad (15)$$

式 (12) と式 (15) の比 η は、

$$\eta = \frac{P}{E_{\text{wind}}} = 4a(1-a)^2 \quad (16)$$

となる。これが風車の理論的効率である。なお、式 (13)–(14) で求めたように、風車のパワー P (式 (16) の分子) は $a = 1/3$ のとき最大値をとるので、式 (16) の理論効率 η もそれと同じく $a = 1/3$ のとき最大値をとり、 $\eta_{\max} = 16/27 \approx 0.59$ となる。この値をベッツの限界という (図2参照)。ただし、実際の風車では伝達機構などで損失が生じるので、効率はこの半分以下の値となる。例えば、図3からも分かるように、サボニウス型の 0.15、ダリウス型の 0.38、プロペラ型の 0.48 などである。

² 入口断面での圧力 p_1 と出口断面での圧力 p_2 は等しい。

Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnützung des Windes durch Windmotoren.

Von Dipl.-Ing. Dr. A. Betz.

Bei der gegenwärtigen Kohlenknappheit hat die Ausnützung der Energie des Windes erhöhtes Interesse gewonnen. Damit tritt für den Ingenieur in verstärktem Maße auch das Bestreben zutage, diese Energie mit möglichst hohem Wirkungsgrad in verwendbare Form

図 2: ベッツによる論文 (1920)

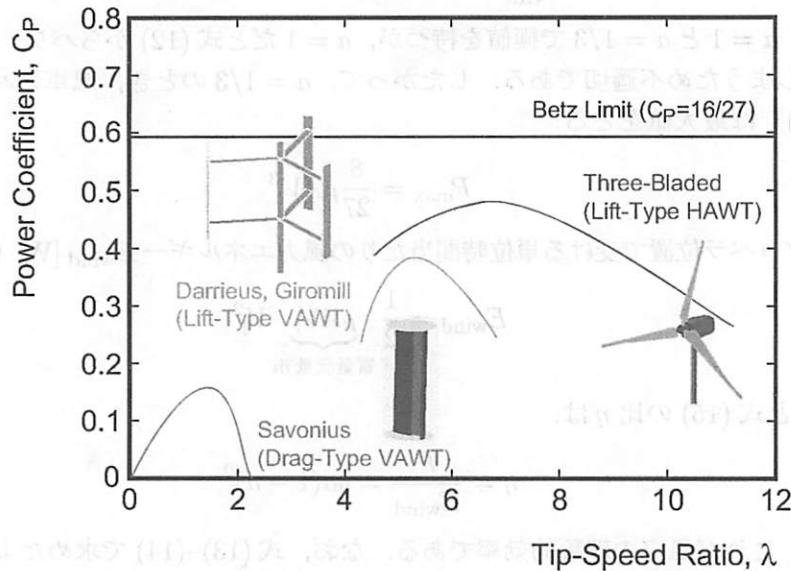


図 3: 種々な風車のパワー特性