ロボットの運動（同次変換 その2）

ロボット概論　9

第9回（2019/11/25）

担当：山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - 行列と三角関数の復習
  - 並進と回転
  - 同次変換（平面の場合）
- 今回の内容
  - 3次元空間での同次変換行列
  - 同次変換行列の意味

⇒ 3次元空間でも，ロボットアームの手先位置や姿勢を計算できるようになろう

（復習）同次変換（homogeneous transform）（平面の場合）

- 並進と回転を一つの行列で表現する
- 位置ベクトルの次元を1つ拡大

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 同次変換行列 ${}^{B}T_E$　※座標系Σ_Eで見た座標をΣ_Bで見た座標に変換

回転成分

$${}^{B}T_E = \left[\begin{array}{cc|c} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

座標系の並進⇒回転を表す

並進成分

常に0

常に1

同次変換行列

座標系Σ_Bでの座標

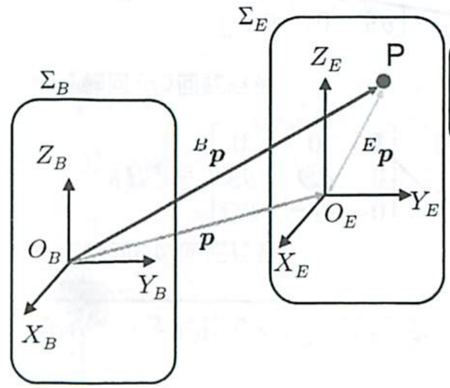
座標系Σ_Eでの座標値

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

座標系の並進移動（3次元の場合）

- 2つの座標系Σ_B, Σ_E
- $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$　：Σ_Bの原点からΣ_Eの原点への位置ベクトル
- ${}^{E}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_E & y_E & z_E \end{bmatrix}^T$　：Σ_Eの原点から点Pへの位置ベクトル
- ${}^{B}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}^T$　：Σ_Bの原点から点Pへの位置ベクトル

$${}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{E}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}$$



座標系Σ_Bでの位置ベクトル

座標系Σ_Eでの位置ベクトル

座標系Σ_BからΣ_Eへの並進

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

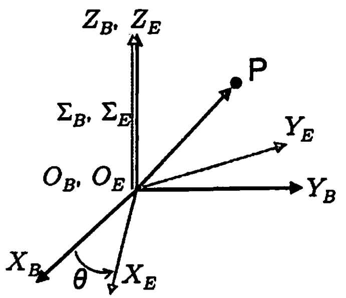
座標系の回転移動（Z軸まわりの場合）

- Σ_Bからθだけz軸回りに回転した座標系をΣ_Eとする

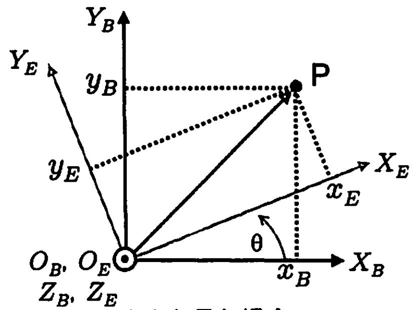
座標系Σ_Bでの位置ベクトル

座標系Σ_Eでの位置ベクトル

$$\begin{bmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\theta & -S\theta & 0\\ S\theta & C\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_E\\y_E\\z_E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_E C\theta - y_E S\theta\\ x_E S\theta + y_E C\theta\\ z_E\end{bmatrix}$$



座標系の回転



上から見た場合

各軸回りの座標系の回転移動

- Z軸回りの回転行列

$${}^0\boldsymbol{R}_A=\begin{bmatrix}C\theta & -S\theta & 0\\ S\theta & C\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3行3列目が1（Z）

- Y軸回りの回転行列

$${}^0\boldsymbol{R}_A=\begin{bmatrix}C\theta & 0 & S\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -S\theta & 0 & C\theta\end{bmatrix}$$

2行2列目が1（Y）

- X軸回りの回転行列

1行1列目が1（X）

$${}^0\boldsymbol{R}_A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\theta & -S\theta\\ 0 & S\theta & C\theta\end{bmatrix}$$

同次変換行列

- 平面の場合と同様に，同次変換行列を導入する。
- 位置ベクトルの次元を一つ拡大

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 座標系Σ_Aの座標を座標系Σ_0の座標へ変換する同次変換行列
  （4×4行列になる）

回転成分　並進成分

$${}^0\boldsymbol{T}_A=\left[\begin{array}{c|c}\boxed{{}^0\boldsymbol{R}_A} & \boxed{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\\ \hline \boxed{0\ \ 0\ \ 0} & \boxed{1}\end{array}\right]$$

常に0　常に1

座標系Σ_0での位置ベクトル　座標系Σ_Aでの位置ベクトル

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}={}^0T_A\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}$$

同次変換行列

- 並進変換

$$\textbf{Trans}(a,\ b,\ c)=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- y軸回りの回転変換

$$\textbf{Rot}(\boldsymbol{y},\theta)=\begin{bmatrix}C\theta&0&S\theta&0\\0&1&0&0\\-S\theta&0&C\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- z軸回りの回転変換

$$\textbf{Rot}(\boldsymbol{z},\theta)=\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&0&0\\S\theta&C\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- x軸回りの回転変換

$$\textbf{Rot}(\boldsymbol{x},\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C\theta&-S\theta&0\\0&S\theta&C\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$