ロボットの運動（逆運動学）

ロボット概論　11

第12回（2019/12/9）
担当：山﨑

はじめに

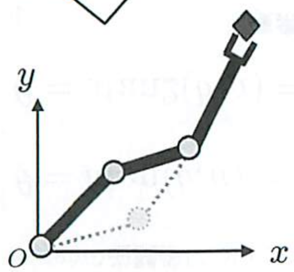
- 前回の内容
  - オイラー角
  - ロール・ピッチ・ヨー角
  - ~~逆~~運動学計算　順
  - DHパラメータ
  - 偏微分とヤコビ行列
- 今回の内容
  - 逆三角関数
  - 逆運動学（幾何的に解く手法）
  - 逆運動学（ヤコビ行列による手法）

⇨ 目標位置までロボットアームを動かすには？

（復習）運動学

- 運動学（キネマティクス，kinematics）
  - ロボットアームのリンクの位置や速度などの関係を幾何学的に考える

どのような姿勢を
とっている／とるべきか？



各関節の角度から，先端の位置，向きを求める
⇒ 順運動学

主な用途：外力による姿勢変化を調べる
目標軌道との誤差を調べる

先端の位置，向きから，各関節の角度を求める
⇒ 逆運動学

主な用途：目標の位置・軌道にロボットアームを動かす

（準備）逆三角関数

- 逆運動学では，逆三角関数（アークサイン，アークコサイン，アークタンジェント）が使われる
- 三角関数（sin, cos, tan）の値から，角度を返す
- 値域に注意

値域

$$x = \sin\theta \iff \theta = \sin^{-1} x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \cos\theta \iff \theta = \cos^{-1} x \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$x = \tan\theta \iff \theta = \tan^{-1} x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

※arcsin, asin という書き方もされる

- 計算例

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

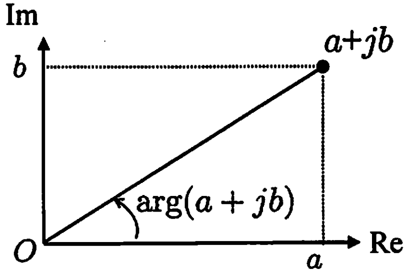
（準備）逆三角関数

- tanの逆関数についてはtan^{-1}以外にatan2という関数もしばしば使われる

$$\theta = \mathrm{atan}(b,a) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{値域}\ \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \mathrm{atan2}(b,a) = \arg(a+jb) \qquad \boxed{(-\pi < \theta \le \pi)}$$

↑ 複素平面上の偏角（argument）で角度を考える



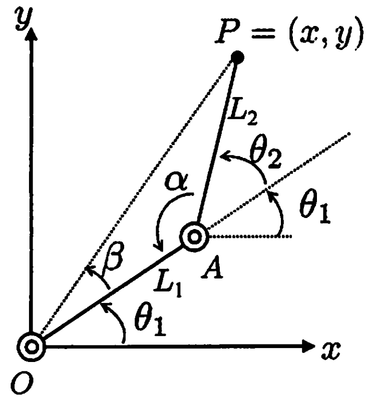
- 計算例

$$\mathrm{atan2}(2,2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{atan2}(3,\underline{0}) = \frac{\pi}{2}$$

２自由度ロボットアームの逆運動学計算

構造によっては，幾何的に解けることを確認しよう。



- 順運動学については次式で求まる
（θ_1，θ_2からx, yが求まる）

$$\begin{cases} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

- 上式を出発点に逆運動学を解いていこう
（手先位置x，yからθ_1，θ_2を求めよう）

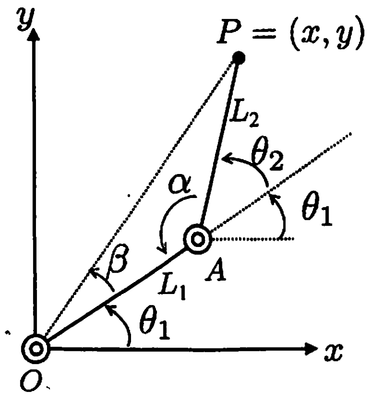
方針

1. △OAPを考える
2. 余弦定理から，$\cos\alpha$，$\cos\beta$を求める
3. 逆三角関数でα，βを求める
4. α，βからθ_1，θ_2を求める

２自由度ロボットアームの逆運動学計算

余弦定理より $\overline{OP}^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\alpha$ であるから

$$\cos\alpha = \frac{L_1^2 + L_2^2 - \overline{OP}^2}{2L_1L_2}$$



よって，逆三角関数を使って

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - \overline{OP}^2}{2L_1L_2}\right)$$

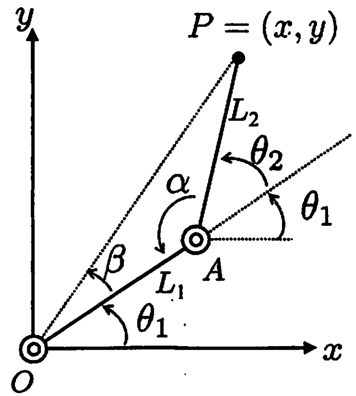
ここで $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$ より

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pi - \alpha \\ &= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - (x^2+y^2)}{2L_1L_2}\right) \end{aligned}$$

自由度ロボットアームの逆運動学計算

また $L_2^2 = L_1^2 + \overline{OP}^2 - 2L_1\overline{OP}\cos\beta$ より $\cos\beta = \dfrac{L_1^2 + \overline{OP}^2 - L_2^2}{2L_1\overline{OP}}$

よって $\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{L_1^2 + \overline{OP}^2 - L_2^2}{2L_1\overline{OP}}\right)$

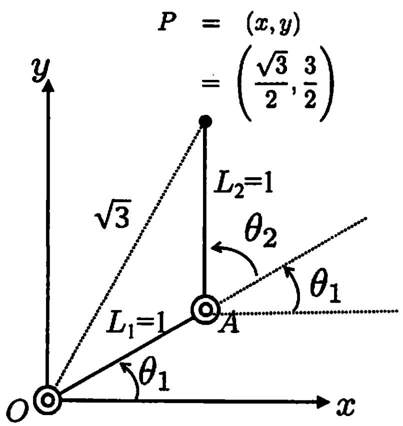


$\theta_1 + \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{\overline{OP}}\right)$ であるから，

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{x}{\overline{OP}}\right) - \beta \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &\quad - \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + x^2 + y^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

数値例

$L_1 = L_2 = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3}{2}$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{3}$

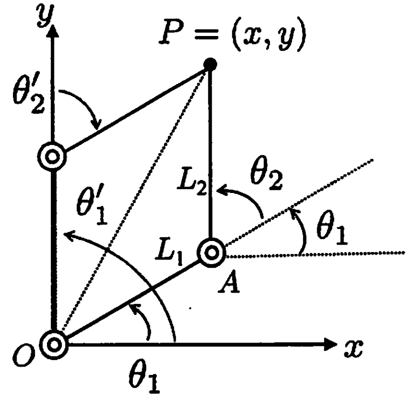


前項までの結果から,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 &= \pi - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

複数解の存在

$L_1 = L_2 = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3}{2}$



このとき,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6},\ \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

の他に

$$\theta_1' = \frac{\pi}{2},\ \theta_2' = -\frac{\pi}{3}$$

も解である。

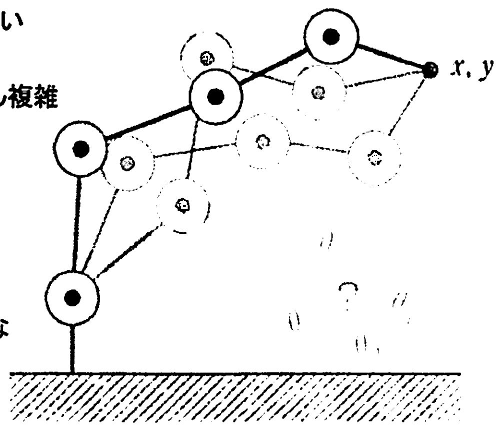
解に(0以上などの)条件をつけることで, 絞り込める

さらに複雑な場合は

- 順運動学計算
  - 自由度が増えても対応しやすい
- 逆運動学計算
  - 自由度が多い場合はどんどん複雑になる
  - 解が一意に決まらない

⇩

- ロボットの構造によらない方法はないか?



図出典:木野・谷口, イラストで学ぶロボット工学

(復習)偏微分

- 多変数関数を, ある1変数に関して微分することを偏微分という
- 注目する変数以外は定数として, (従来の)微分の操作をすれば良い
- 注目する変数方向の変化率を表している

- 例として, 以下のようなxとyの2つの変数から値が決まる関数fを考える

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^3$$

- 関数fのxによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 0$$

x^2の微分　xyの微分　y^3の微分(=0)

, yを定数としてxを微分

- 関数fのyによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x + 3y^2$$

, xを定数としてyを微分

∂ はラウンドと読む

（復習）ヤコビ行列（Jacobian matrix）

順運動学の計算により，手先位置x，yと関節角度θ_1，θ_2について

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\theta_1,\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)\end{bmatrix}$$

例） $f_1(\theta_1,\theta_2)=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
$f_2(\theta_1,\theta_2)=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

の関係が得られているとする。両辺を微分すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

全微分といわれる

行列として整理すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

この行列をヤコビ行列という

ヤコビ行列（Jacobian matrix）

ここで，手先位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}x&y\end{bmatrix}^T$　ヤコビ行列 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}$

関節角度ベクトル $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}\theta_1&\theta_2\end{bmatrix}^T$

とおくと，

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

は

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}$$

各関節の速度($\dot{q}$)に対し，手先の速度($\dot{r}$)がどう変化するかを表している

さらに，Jに逆行列があれば，

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$$

手先の速度($\dot{r}$) に対し，各関節の速度($\dot{q}$)がどう変わるかを表している

となる

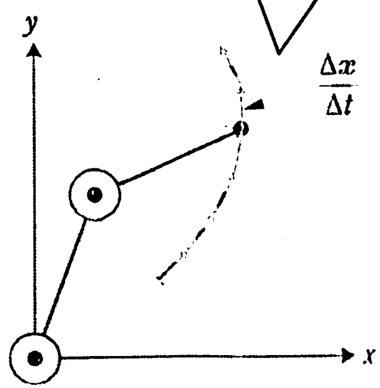
分解速度法による軌道制御

- こう動かしたいという手先位置の目標軌道（各時刻での位置）が与えられている
- これを微分すれば，各時刻での軌道上の目標速度が分かる

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$$

- 上式で，目標速度に必要な各関節の速度を求め，関節を動かす
- ごく短い時間間隔Δtごとに繰り返し計算し，動かしていくことで目標軌道を達成する。

細かい区間ごとに，手先の速度に必要な関節の速度を計算



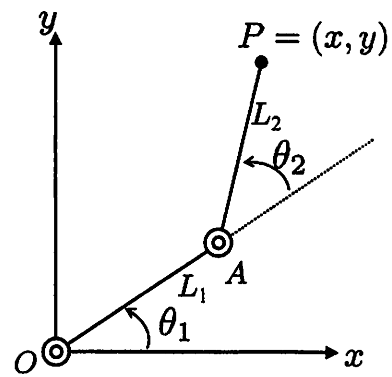
図出典：木野・谷口，イラストで学ぶロボット工学

- 逆運動学計算を直接行わずに，手先の軌道制御を実現できる！

計算例

- 順運動学計算により

$$\begin{cases}x=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\\y=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{cases}$$



- ヤコビ行列Jは

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta_1}&\frac{\partial x}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial y}{\partial\theta_1}&\frac{\partial y}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-L_1\sin\theta_1-L_2\sin(\theta_1+\theta_2)&-L_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)&L_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$

計算例

- 行列式を計算すると

$$|\boldsymbol{J}| = (-L_1L_2S_1 + C_{12} - L_2^2S_{12}C_{12}) - (-L_1L_2S_{12}C_1 - L_2^2C_{12}S_{12})$$
$$= L_1L_2(S_{12}C_1 - S_1C_{12}) + L_2^2(C_{12}S_{12} - S_{12}C_{12})$$
$$= L_1L_2\sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_1)$$
$$= L_1L_2\sin\theta_2$$

ただし，$\sin(\theta_1+\theta_2) = S_{12}$，$\cos(\theta_1+\theta_2) = C_{12}$ と略記

復習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ のとき，行列式 $|\boldsymbol{A}| = ad - bc$

逆行列 $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

計算例

$L_1 = L_2 = 1,\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{6},\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$ のときのヤコビ行列とその逆行列は

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$　$b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$　$d = \frac{1}{2}$

$$|\boldsymbol{J}| = \boxed{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \left(1 \times 1 \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)}$$

$(|L_1| \times |L_2| \times \sin\theta_2)$

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 1 & -1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}}$$

計算例

$L_1 = L_2 = 1,\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{6},\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$　とする

先端をx方向に -0.1 m/s，y方向に0.1 m/s で動かしたいときに必要な関節の角速度 $\dot{\theta}_1$，$\dot{\theta}_2$ [rad/s]を求めよ。

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

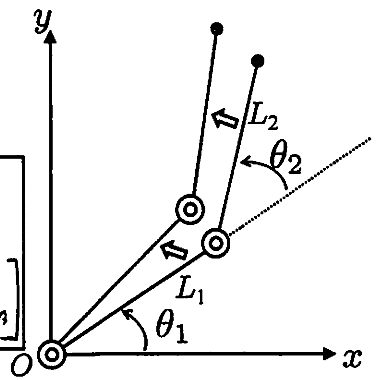
$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 1 & -1 - \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1 + 0.1\sqrt{3} \\ 0.1\sqrt{3} + 0.1 \ \ -0.1 - 0.1\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 + 0.1\sqrt{3} \\ 0.1\sqrt{3} + 0.1 \ \ -0.1 - 0.1\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

2×1

で各関節を動かせば良い。

$$= \begin{bmatrix} -0.1(1 - \sqrt{3}) \\ 0 \end{bmatrix}$$



特異姿勢

- $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$ だが，$|J|$=0のとき，逆行列が存在しない。これは？
- このとき，特定の方向に動けない状態（特異姿勢）にある
- $|J|$が0に近いと，$\dot{\boldsymbol{q}}$ が非常に大きくなる ⇒ うれしくない
- 特異姿勢（とその周辺）を避けるように膝を曲げるロボット