ロボットの運動（ベクトル運動）

ロボット概論 7

第7回（2019/11/11）

担当：山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - センサとは
  - 色々な内界センサ
  - 色々な外界センサ
- 今回の内容
  - ベクトルの基礎
  - 内積と外積
  - トルクと角速度のベクトル表現
  - 行列の基礎

運動学と動力学

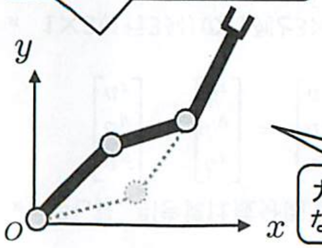
- 運動学（キネマティクス，kinematics）
  - ロボットアームのリンクの位置や速度などの関係を幾何学的に考える

どのような姿勢を
とっている／とるべきか？

各関節の角度から，先端の位置，向きを求める
⇒ 順運動学

先端の位置，向きから，各関節の角度を求める
⇒ 逆運動学

ベクトル，行列，三角関数による計算



力，トルクによってどのような運動になるか？

- 動力学（ダイナミクス，dynamics）
  - ロボットアームにかかる力やトルクと運動との関係を考える
  - 運動方程式と微積分学

ベクトルの基礎

- 向きと大きさを持った量をベクトルという
- 変位，速度，加速度，力，トルク，角速度等様々な物理量がベクトルで表される
- 一方，長さ，質量，面積など大きさのみで表される量をスカラーという
- 工学では，主に縦ベクトルが使われる

2次元縦ベクトル
（列ベクトル）

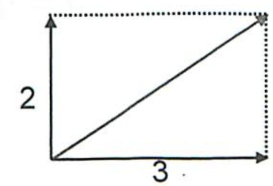
3次元横ベクトル
（行ベクトル）

例）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{13}$$



ベクトルの大きさ（スカラーになる）

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

ベクトルの計算

- ベクトルの計算は行列の計算と同じ
- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix}$$

- 1×3（1行3列）の行列と3×1の行列のかけ算 ⇒ スカラーになる（後述の内積）

$\boxed{1} \times 3$　3×1

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_xb_y + a_yb_y + a_zb_z$$

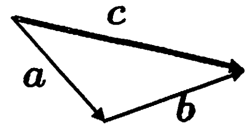
- 3×1の行列と1×3の行列のかけ算 ⇒ 3×3の行列になる

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z \\ a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z \\ a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z \end{bmatrix}$$

$\boxed{3} \times 1 \quad 1 \times \boxed{3}$

ベクトルの基礎

- ベクトルの足し算の図的意味



$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$ （終点ー始点）

- 以下の性質を持つ

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

$$(x+y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

※x, yはスカラー

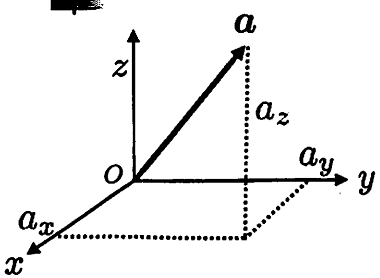
- 転置（transpose）：（上付きの）記号T

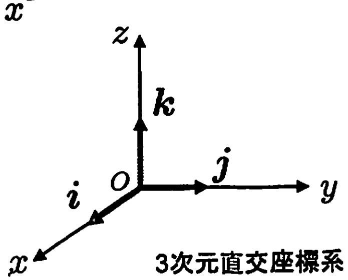
縦⇔横の変換

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

位置ベクトル





3次元直交座標系
（右手系）

- 物体の位置をベクトルで表す（位置ベクトル）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- 大きさ1のベクトル･･･単位ベクトル

例）直交単位ベクトル

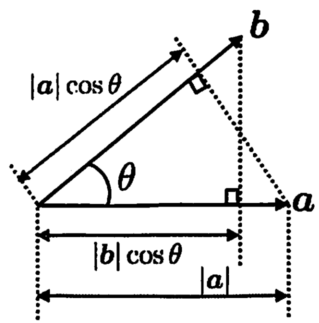
$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 単位ベクトルを用いた位置ベクトルの表現

$$\boldsymbol{a} = a_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

単位ベクトル方向成分の大きさ

ベクトルの内積（・, inner product, スカラー積）



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

各成分の積和

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \\ &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \end{aligned}$$

ベクトルの大きさ　　ベクトルのなす角度

- 値はスカラー
- 直交するベクトルの内積 ⇒ 0
- 同一直線上のベクトルの内積
  ⇒ ベクトルの大きさの積
- 直交単位ベクトルの内積

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = 1$$