復習3：同次変換行列と各座標系で見た手先位置の計算

- 並進変換

$$\mathbf{Trans}(a,\ b,\ c)=\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- y軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(y,\theta)=\begin{bmatrix}C\theta&0&S\theta&0\\0&1&0&0\\-S\theta&0&C\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- z軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(z,\theta)=\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&0&0\\S\theta&C\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- x軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(x,\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C\theta&-S\theta&0\\0&S\theta&C\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- 任意の同次変換行列はTrans(・)とRot(・)の組み合わせで表される
- 複数の変換をつなげることで，複雑な座標系の変換も扱える

$${}^0\boldsymbol{T}_C={}^0\boldsymbol{T}_A{}^A\boldsymbol{T}_B{}^B\boldsymbol{T}_C$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

演習3

- xyz直交座標系において，座標系Σ_0から(2, 0, -1)だけ平行移動した座標系Σ_1と，そこからz軸回りに$\pi/2$ rad回転し，さらにx軸回りに$\pi/2$ rad回転した座標系Σ_2がある
- なお，x, y, z軸回りの回転行列Rx, Ry, Rzは以下で表される

$$\boldsymbol{R}_x=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&C\theta&-S\theta\\0&S\theta&C\theta\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}_y=\begin{bmatrix}C\theta&0&S\theta\\0&1&0\\-S\theta&0&C\theta\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}_z=\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&0\\S\theta&C\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- 座標系Σ_iからΣ_jへ位置ベクトルを移す同次変換行列を${}^j\boldsymbol{T}_i$で表すと，

$${}^0\boldsymbol{T}_1=\boxed{\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}}\qquad {}^1\boldsymbol{T}_2=\boxed{\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$

演習3（続き）

$${}^0\boldsymbol{T}_2={}^0\boldsymbol{T}_1{}^1\boldsymbol{T}_2=\boxed{\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$

- 座標系Σ_2で点pを見た位置ベクトルが ${}^2\boldsymbol{p}=[2\ \ 3\ \ -1]^T$

のとき，これをΣ_0で見たときの位置ベクトル${}^0\boldsymbol{p}$を求めると，

$$\begin{bmatrix}{}^0p\\1\end{bmatrix}={}^0T_2\begin{bmatrix}{}^2p\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+2\times1\\2\\3-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$\therefore p=[1\ 2\ 2]^T$ //

復習4：ヤコビ行列の計算と逆運動学計算

- 各関節角度から手先位置を求めるのが順運動学計算，その逆が逆運動学計算
- 逆運動学計算を簡単にするために，ヤコビ行列を使う方法がある
- 手先位置x, yと関節角度θ_1, θ_2について以下の関係が成り立つとする

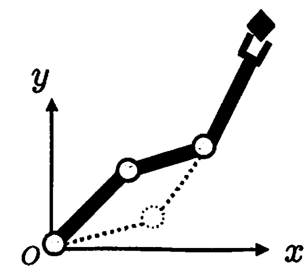
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\theta_1,\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)\end{bmatrix}$$

例）$f_1(\theta_1,\theta_2)=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
$f_2(\theta_1,\theta_2)=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

両辺を微分すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

この行列をヤコビ行列という



復習4:ヤコビ行列の計算と逆運動学計算

ここで, 手先位置ベクトル $r = [x \quad y]^T$ ヤコビ行列 $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$

関節角度ベクトル $q = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$

とおくと,

$$\dot{r} = J\dot{q}$$

各関節の速度($\dot{q}$)で, 手先の速度($\dot{r}$)がどう変化するか

となるので, (Jに逆行列があれば,)

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{r}$$

手先の速度($\dot{r}$) で, 各関節の速度($\dot{q}$)がどう変化するか

となる。

復習4:ヤコビ行列の計算と逆運動学計算

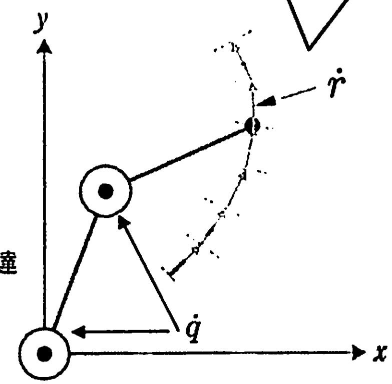
- こう動かしたいという手先位置の目標軌道(各時刻での位置, r)が与えられている
- これを微分すれば, 各時刻での軌道上の目標速度($\dot{r}$)が分かる
- 目標速度に必要な各関節の速度を

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{r}$$

で求め, 関節を動かす

- ごく短い時間間隔Δtごとに $\dot{r}$ から $\dot{q}$ を繰り返し計算し, 動かしていくことで目標軌道を達成する。(分解速度法)

細かい時間ごとに, 手先の速度$\dot{r}$ に必要な関節の速度 $\dot{q}$ を計算



図出典:木野・谷口, イラストで学ぶロボット工学

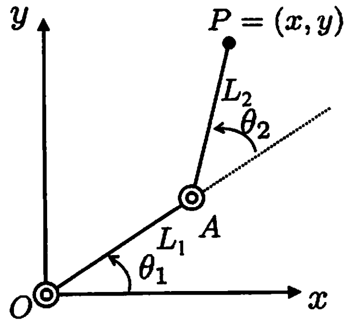
- 逆運動学計算を直接行わずに, 手先の軌道制御を実現できる!

$\frac{1}{-0.6\times 0-(-0.6)\times 0.4}\begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.4 & -0.6 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.24}\begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.4 & -0.6 \end{bmatrix}$

演習4

- 順運動学計算により

$$\begin{cases} x = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$



が得られている。L_1=40 cm, L_2=60 cm,, θ_1=0 rad, $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ radのとき, ヤコビ行列Jを計算すると,

$\sin\theta_1 = \sin 0 = 0$, $\cos\theta_1 = \cos 0 = 1$

$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(0+\frac{\pi}{2}) = 1$

$\cos(\theta_1+\theta_2) = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{matrix} -L_1\sin\theta_1 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.4\times 0 - 0.6\times 1 & -0.6\times 1 \\ 0.4\cdot 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.6 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

演習4(続き)

$|J| = \frac{1}{0.6\times(-0.6)-(-0.6)\times 1} = \frac{1}{0.24}$

$-0.36+0.6$

手先を現在の位置からx方向に 0.2 m/s, y方向に-0.3 m/s で動かしたいときは,

$\dot{r} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$

$$J^{-1} = \boxed{\frac{1}{0.24}\begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.4 & -0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}}$$

より,

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \boxed{J^{-1}\dot{r} = J^{-1}\begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}}$$

となり, 各関節を

$$\dot{\theta}_1 = \boxed{-\frac{3}{4}\ \mathrm{rad/s}} \qquad \dot{\theta}_2 = \boxed{\frac{5}{12}\ \mathrm{rad/s}}$$

で動かせば良い