例題 B-3

理想気体（気体定数 R，比熱比 $\kappa =$ 一定）を作業流体として，絶対温度 T_1，T_2（$T_1 > T_2$）の熱源の間で，温度 T_1 での等温膨張過程，等積放熱過程，温度 T_2 での等温圧縮過程，等積吸熱過程からなるサイクルを行う熱機関の熱効率を，次の二つの場合について計算せよ．

(1) 等積吸熱過程において，等積放熱過程で放出される熱エネルギーを吸収する．

(2) 等積吸熱過程においては温度 T_1 の熱源から熱エネルギーを吸収し，等積放熱過程においては温度 T_2 の熱源に熱を放熱する．

また，1 サイクル当たり，作業流体の単位質量から得られる仕事を w とするとき，このサイクルの最高圧力と最低圧力の比を求めよ．

[解答]

(1) 本問は，**スターリング・サイクル**（Stirling）に関する問題である．各過程は，図 1 の p-v 線図に示されるとおりである：

- 過程 $1 \to 2$（排熱 q'，等温圧縮）：　$T = T_2$
- 過程 $2 \to 3$（吸熱 q_0，定積変化）：　$v = v_1 =$ 一定
- 過程 $3 \to 4$（吸熱 q，等温膨張）：　$T = T_1$
- 過程 $4 \to 1$（排熱 q_0，定積変化）：　$v = v_2 =$ 一定

このサイクルは，過程 $4 \to 1$ で排出した熱量 q_0 を過程 $2 \to 3$ の吸収する熱量 q_0 に利用するという特徴をもっている[1]．なお，過程 $2 \to 3$ と過程 $4 \to 1$ はともに定積変化であるので，比熱の定義（$c = \mathrm{d}q/\mathrm{d}T$）より，

$$\text{過程 } 2 \to 3: \quad q_0 = c_v(T_1 - T_2) \tag{1}$$

$$\text{過程 } 4 \to 1: \quad q_0 = c_v(T_1 - T_2) \tag{2}$$

である．

(1) さて，熱効率 η は

$$\eta = \frac{q - q'}{q} = 1 - \frac{q'}{q} \tag{3}$$

であるので，吸熱量 q（過程 $3 \to 4$）と排熱量 q'（過程 $1 \to 2$）を求める必要がある．これらの過程では，ともに等温変化（$\mathrm{d}T = 0$）であるので，熱力学の第一法則より $\mathrm{d}q = p\,\mathrm{d}v$ である（なぜならば，$\mathrm{d}u(T) = 0$）．したがって，圧力 p に状態方程式を用いて，

$$\text{過程 } 3 \to 4: \quad q = \int_3^4 p\,\mathrm{d}v = \int_3^4 \frac{RT_1}{v}\mathrm{d}v = RT_1 \ln\frac{v_2}{v_1} \tag{4}$$

$$\text{過程 } 1 \to 2: \quad q' = \int_1^2 p\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{RT_2}{v}\mathrm{d}v = RT_2 \ln\frac{v_2}{v_1} \tag{5}$$

---

[1] 過程 $4 \to 1$ で排出した熱量と過程 $2 \to 3$ の吸収する熱量が等しいことから，この 2 つの q_0 がたがいにキャンセルし合い，結局，この熱量 q_0 によって温度 T_1 から T_2 へ（および，温度 T_2 から T_1 へ）変化させていることになる．

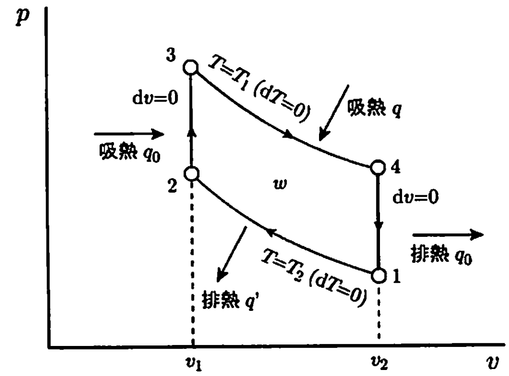


図 1: スターリング・サイクルの p-v 線図

式 (3) に式 (4) と式 (5) を代入して，熱効率 η は

$$\eta = 1 - \frac{q'}{q} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{6}$$

となり，カルノー・サイクルと同じになることが分かる．
(2) もし，過程 $2 \to 3$ の吸熱量 q_0 を過程 $4 \to 1$ の放熱量 q_0 から取らないとすると，このサイクルのトータルの吸熱量は $q + q_0$ であるので，式 (1) と式 (4) より，

$$q + q_0 = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1} + \underbrace{c_v}_{=\frac{R}{\kappa-1}} (T_1 - T_2) \tag{7}$$

したがって，そのときの熱効率 η は

$$\eta = \frac{q-q'}{q+q_0} = \frac{R(T_1 - T_2)\ln \dfrac{v_2}{v_1}}{RT_1 \ln \dfrac{v_2}{v_1} + \underbrace{\dfrac{R}{\kappa - 1}(T_1 - T_2)}_{\text{過程 } 2 \to 3 \text{ の } q_0 \text{ による加熱分}}}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}_{=\text{式 (6)}} \left[\frac{1}{1 + \dfrac{(T_1 - T_2)/T_1}{(\kappa - 1)\ln(v_2/v_1)}} \right] \tag{8}$$

したがって，(2) の熱効率は (1) のそれよりも悪いことが分かる。

覚えておこう（スターリング・サイクル）

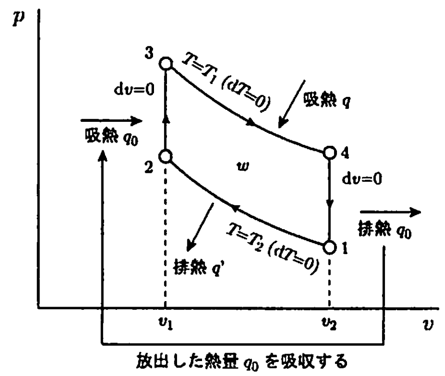


図 2: スターリング・サイクルの p–v 線図

例題 B-4

ガスタービンで用いられるブレイトン（Brayton）・サイクルにおいて，圧縮機入口の温度と燃焼器出口の温度が定まっているとき，ガスタービンの排気の温度を求めよ．ただし，ガスタービンは出力が最大になるように設計されているものとする．

[解答]

本問は，ガスタービン（図 3 参照）で用いられる**ブレイトン・サイクル**に関する問題である．各過程は，図 4 の p-v 線図に示されるとおりである：

- 過程 $1 \to 2$（断熱圧縮）： $pv^{\kappa} =$ 一定，$s =$ 一定
- 過程 $2 \to 3$（吸熱 q，定圧変化）： $v = v_2 =$ 一定
- 過程 $3 \to 4$（断熱膨張）： $pv^{\kappa} =$ 一定，$s =$ 一定
- 過程 $4 \to 1$（排熱 q'，定圧変化）： $v = v_1 =$ 一定

ただし，状態 1 が大気の状態である．

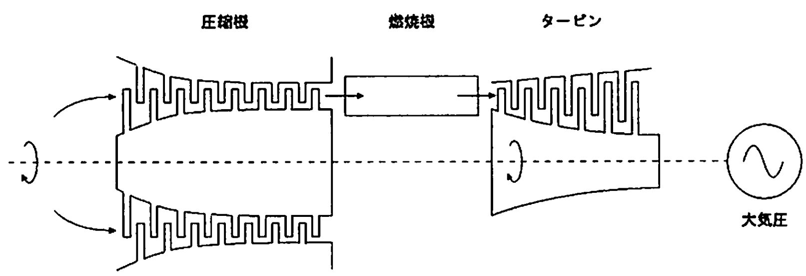


図 3: ガスタービン

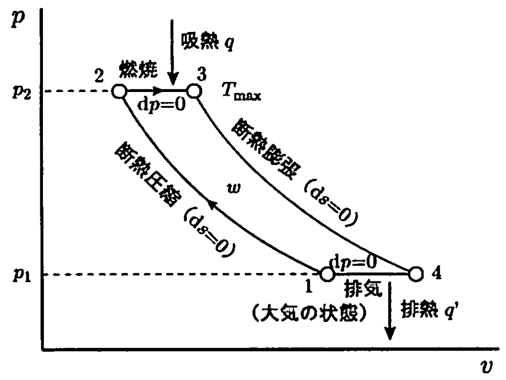


図 4: ブレイトン・サイクルの p-v 線図

熱サイクルの熱効率 η は

$$\eta = \frac{w}{q} = \frac{q - q'}{q} = 1 - \frac{q'}{q} \tag{9}$$

この熱効率を調べるためには，吸熱量 q と排熱量 q' を調べる必要がある．過程 $2 \to 3$ と過程 $4 \to 1$ は定圧変化であるので，比熱の定義（$c = \mathrm{d}q/\mathrm{d}T$）より，

$$\text{過程 } 2 \to 3: \quad q = c_p(T_3 - T_2) \tag{10}$$

$$\text{過程 } 4 \to 1: \quad q' = c_p(T_4 - T_1) \tag{11}$$

また，過程 $1 \to 2$ と過程 $3 \to 4$ は断熱変化であるので，$pv^\kappa = $ 一定 が成り立ち，この関係式を状態方程式を利用して，温度と圧力に変えると，

$$\left.\begin{aligned} pv^\kappa &= \text{一定} \\ \frac{pv}{T} &= \text{一定} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad p \times \left(\frac{T}{p}\right)^\kappa = p^{1-\kappa}T^\kappa = \text{一定} \quad \Rightarrow \quad T \propto p^{1-\frac{1}{\kappa}} \tag{12}$$

この関係を利用すると，過程 $1 \to 2$ と過程 $3 \to 4$ では，

$$\text{過程 } 1 \to 2: \quad p_1^{1-\kappa}T_1^\kappa = p_2^{1-\kappa}T_2^\kappa \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} T_1 = T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} \tag{13}$$

$$\text{過程 } 3 \to 4: \quad p_2^{1-\kappa}T_3^\kappa = p_1^{1-\kappa}T_4^\kappa \quad \Leftrightarrow \quad T_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T_3 = T_3\zeta^{\overbrace{\frac{1}{\kappa} - 1}^{<0}} \tag{14}$$

ここで，ζ は**圧力比**を表し，

$$\zeta = \frac{p_2}{p_1} \tag{15}$$

したがって，式 (13) の T_2 を式 (10) に，式 (14) の T_4 を式 (11) に代入すると，式 (9) の熱効率 η は

$$\eta = 1 - \frac{q'}{q} = 1 - \frac{T_3\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} - T_1}{T_3 - T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}}} = 1 - \frac{T_3\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} - T_1}{\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}}\left[T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} - T_1\right]}$$

$$= 1 - \zeta^{-\overbrace{\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)}^{>0}} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} \tag{16}$$

$$\underset{\text{極限では}}{\rightarrow} 1 - \frac{T_1}{T_3} \tag{17}$$

式 (16) で求めたブレイトン・サイクルの熱効率 η は，式 (12) の関係を利用すると，極限では式 (17) となることが分かる．このとき，熱効率 η は良いが，仕事 w はほとんど無い．

それではブレイトン・サイクルの仕事について調べてみよう．仕事は $w = q - q'$ であるので，式 (10)-(11) と式 (13)-(14) より，

$$w = q - q' = c_p(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = c_p\left[T_3 + T_1 - T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} - T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)}\right]$$

$$= c_p\left[T_3 + T_1 - \underbrace{\left\{T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} + T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)}\right\}}_{\text{この項を最小にすると仕事 } w \text{ は最大となる}}\right] \tag{18}$$

それでは，式 (18) の中括弧の中身について考えよう．

$$(\text{式 (18) の中括弧}) = T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} + T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} \tag{19}$$

いま，式 (19) の右辺第一項と第二項の積が

$$T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} \times T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} = T_1T_3 \tag{20}$$

であることに注意すると，相加・相乗平均の関係から，

$$T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} + T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} \leqslant 2\sqrt{T_1T_3} \tag{21}$$

であり，

$$T_1\zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} = T_3\zeta^{-\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta^{1-\frac{1}{\kappa}} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} \tag{22}$$

のとき，式 (21) の左辺（つまり，式 (19)）は最小となる．したがって，式 (18) の最大値は

$$w_{\max} = c_p\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2 \tag{23}$$

式 (14) より，圧力比 ζ は

$$\zeta = \left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \tag{24}$$

であるので，式 (22) と式 (24) より，ガスタービンの排気の温度 T_4 は

$$T_4 = \sqrt{T_1 T_3} \tag{25}$$

となる．

なお，例題 B-1 のオットー・サイクルは閉じた系（流れなし）であるため，仕事 w は

$$w = \int p\,\mathrm{d}v \tag{26}$$

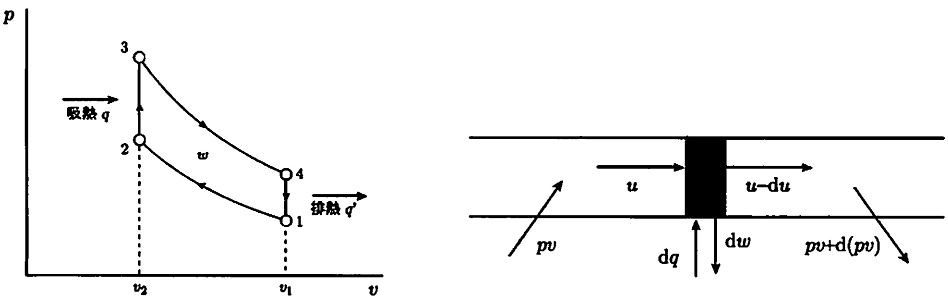
であるが，図 3 のようにブレイトン・サイクルはその中で流れがあるので，流入エネルギーと流出エネルギーの保存則より（図 5 参照），

$$\begin{aligned} & u + pv + \mathrm{d}q - \mathrm{d}w = u + \mathrm{d}u + pv + \mathrm{d}(pv) \\ \Leftrightarrow\quad & \mathrm{d}w = \underbrace{\mathrm{d}q - \mathrm{d}u}_{=p\,\mathrm{d}v} - \mathrm{d}(pv) = -v\,\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{27}$$

つまり，工業仕事

$$w = -\int v\,\mathrm{d}p \tag{28}$$

を用いる．



オットー・サイクル
（閉じている）

ブレイトン・サイクル
（流れている）

図 5: オットーサイクルとブレイトン・サイクルの仕事

覚えておこう（ブレイトン・サイクル（複合発電））

$$圧力比： \quad \zeta = \frac{p_2}{p_1} \tag{29}$$

$$工業仕事： \quad w = -\int v\,\mathrm{d}p \tag{30}$$

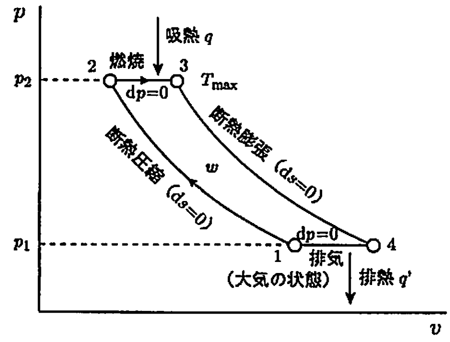


図 6: ブレイトン・サイクル（複合発電）の p–v 線図