6

Smart and Human

常翔学園

摂南大学

計算機援用設計
有限要素法概説

有限要素法とは

英語では，

Finite Element Method

（FEM）といい，解析的に

解くことが難しい 微分方程式

の近似解を 数値的に得る方法

の一つである。

有限要素法とは

方程式が定義された領域を

小領域(要素)

に分割し、

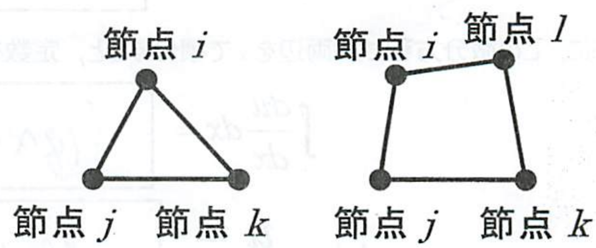
各小領域における方程式を比較的

単純で共通な 補間関数

で近似する。

有限要素（小領域）の例

■ 2次元



境界条件の物理的意味

●境界上の物理量

外力，圧力，速度，温度など

有限要素法の考え方

■ 有限要素法：等価な最小値問題に置き換えて解く

<微分方程式>

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$ を満たす u を求める

<最小値問題>

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$ を最小にする u を求める

汎関数

関数と汎関数

■関数 $u(x)$ ： u は自然数 x の関数

■汎関数 $\Pi(u)$ ：Π は「関数 $u(x)$ 」の関数

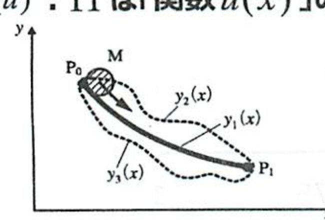


図2・2 質点Mが重力のもとで点P_0から点P_1に移動するときの経路

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 2階の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$ $\pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$

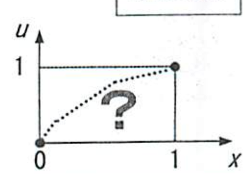
汎関数

■ 解析領域（ $0\le x\le 1$ ）

■ 境界条件

$x=0$ で $u(0)=0$

$x=1$ で $u(1)=1$



2019年11月1日

計算機援用設計　　学籍番号【 154033 】　名前【 小川夏輝 】

次の要領で，微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2} = q$ （領域 0≦x≦1 ）を，解析的に解け。

ただし，境界条件 $u(0)=0$， $u(1)=4$ とする。 q は， q=学籍番号下１桁×0.4+6 とする。

$3 \times 0.4 + 6$

$q = 1.2 + 6 = 7.2$

【解】 微分方程式の両辺を x で積分すると，定数を C_1 として

$$\int \frac{d^2u}{dx^2}dx = \int q\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = \boxed{qx + C_1}$$

$\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

さらに，この微分方程式の両辺を x で積分すると，定数を C_2 として

$$\int \frac{du}{dx}dx = \boxed{\int (qx + C_1)\,dx}$$

$$\therefore\quad u = \boxed{\frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2}$$

$x=0$ のとき， $u=0$ を代入して， $C_2 = \boxed{0}$

$0 = \frac{1}{2}q \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$

$x=1$ のとき， $u=4$ を代入して， $C_1 = \boxed{4 - \frac{1}{2}q}$

$4 = \frac{1}{2}q \cdot 1^2 + C_1 \cdot 1 + 0$

$C_1 = 4 - \frac{1}{2}q$

$$\therefore\quad u = \boxed{\frac{1}{2}qx^2 + \left(4 - \frac{1}{2}q\right)x}$$

$u = \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 + (4 - \frac{1}{2}q)x + 0$

$= \cancel{\frac{1}{2}qx^2 + (4 - \frac{1}{2}q)}$

$x = 0,\quad 0.25,\quad 0.5,\quad 0.75,\quad 1$ のとき，下図にプロットせよ。

$u_2 = u(0.25) = 0.325$

$u_3 = u(0.5) = 1.1$