

第1回：制御工学 I の復習

制御工学 II



シラバス

本講では、まず周波数応答について説明し、ベクトル軌跡とボード線図による周波数特性の表現方法について述べる。続いて、フィードバック制御系の特性評価、ナイキストの安定判別法、さらにゲイン余裕と位相余裕について説明する。最後に、制御系の補償法について述べる。

到達目標：1) 周波数応答法の理解。2) フィードバック制御系の安定判別ができる。3) フィードバック補償により制御系の設計ができる

第1回：制御工学 I の復習

- ラプラス変換
- フィードバック制御について
- ヘビサイドの手法による逆ラプラス変換

授業概要1



授業形態

- PowerPoint + 板書
 - 毎回の積み重ねが大事
 - 教科書で予習・復習を
 - 演習を通じて理解を深めることが重要！
- 評価
- 期末テスト50% 中間テスト10%
 - 演習・課題40%
- 質問のある人は安田教授室(1号館3階)まで
- 注意！！
- 80%以上の出席が、成績評価の前提条件

授業概要2



これからの講義



科目名：制御工学 II

目的

- 制御工学に関する基礎的事項の習得
- 一般に古典制御といわれる内容を一年間で学ぶ(Iは前半)
- 制御の基礎的概念を数式を通じて理解することを目指す

テキスト：

- はじめての制御工学 改訂第2版
(佐藤和也, 平元和彦, 平田研二著, 講談社, 2019)

参考書：

- 制御工学(JSMEテキストシリーズ, 日本機械学会)
- PID制御(須田信英著者代表, システム制御情報学会編, 朝倉書店)
- その他制御の入門編

1. 線形システムの時間応答 ラプラス変換, ステップ応答, インパルス応答
2. 周波数応答(1) ゲイン, 位相特性, ボード線図の読み方
3. 周波数応答(2) ボード線図演習
4. 周波数応答(3) 基本要素のボード線図
5. 周波数応答(4) ボード線図の合成, 折れ線近似
6. 周波数応答(5) 閉ループと開ループの周波数特性, ベクトル軌跡
7. 制御系の安定判別(1) ナイキストの簡易判別法
8. 制御系の安定判別(2) 位相余裕とゲイン余裕
9. 総合演習 前半のまとめと総合演習
10. フィードバック制御系の設計(1) 望ましい制御系の構成と特徴
11. フィードバック制御系の設計(2) ループ整形法
12. フィードバック制御系の設計例(1) モデル化と設計仕様
13. フィードバック制御系の設計例(2) 設計仕様を満たす設計
14. フィードバック制御系の設計例(3) ロバスト安定性, 感度関数
15. まとめ

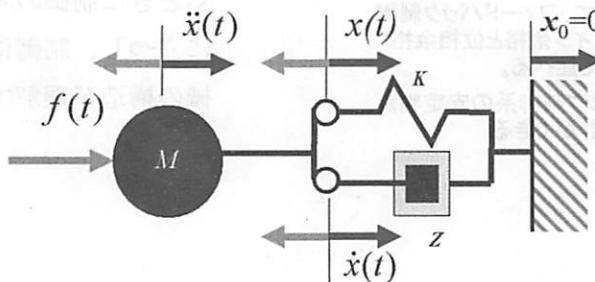
1. 微分方程式とラプラス変換



- 入力と出力の関係が微分方程式で記述できる: 動的システム

$$M\ddot{x}(t) + Z\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1.1)$$

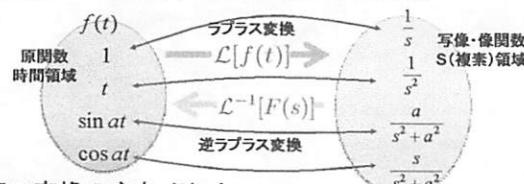
- これが解けると基本的な運動が分かる
- モデルが作れると制御ができる



ラプラス変換とは



- 制御においては、システムの挙動を表現するとき、時間tの関数ではなく、ラプラス変換という操作を行って、複素数sの関数として議論すると見通しがよい。



ラプラス変換の主なメリット

- システムの入力信号→出力信号の関係を簡潔に表現できる(伝達関数)。
- 周波数信号を使ったシステムの特性の表現や解析に便利である。
- 微分方程式を解くのに使える。

ラプラス変換の意味



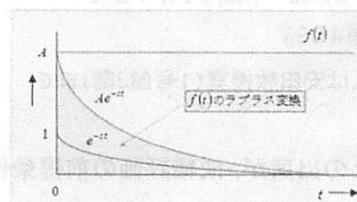
ラプラス変換の定義 $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$

この意味は 複素数 $s = c + j\omega$ とすると

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ct} e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-ct} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

c が大きければ積分は収束する。関数が $f(t) = A$ のように一定値とすると

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-ct} dt = \int_0^\infty A e^{-ct} dt = A \left[\frac{e^{-ct}}{-c} \right]_0^\infty = -\frac{A}{c} (0 - 1) = \frac{A}{c}$$



動的システムのラプラス変換



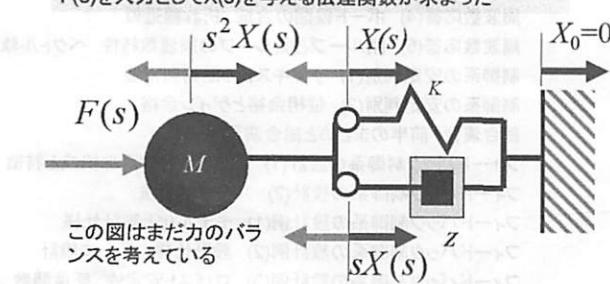
- 微分方程式の初期値を0と置いて両辺をラプラス変換する

$$L[M\ddot{x}(t) + Z\dot{x}(t) + Kx(t)] = L[f(t)]$$

$$Ms^2 X(s) + ZsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$X(s) = [Ms^2 + Zs + K]^{-1} F(s)$$

$F(s)$ を入力として $X(s)$ を与える伝達関数が求まった



原関数	原関数の呼び名	像関数
$u_s(t)$	単位ステップ関数	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	単位インパルス関数	1
$u_l(t)$	単位ランプ関数	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	指数関数	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	正弦波関数	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	余弦波関数	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

ラプラス変換による微分方程式の解法



ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

7-112 章

1. 与えられた式をラプラス変換する。微分のラプラス変換を使う。

$$\{s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)\} + 3\{sX(s) - x(0)\} + 2X(s) = \frac{4}{s}$$

2. ラプラス変換後の方程式を整理する。

$$X(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s+1)(s+2)}$$

3. 得られた式を部分分数分解する。ヘヴィサイドの方法を用いればよい。

$$X(s) = \frac{\frac{2}{s} + \frac{-2}{s+1}}{s+2}$$

4. 逆ラプラス変換して、最終的に得たい解($x(t)$)を得る。

$$x(t) = 2 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

$$\begin{cases} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \\ L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t} \\ L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t} \end{cases}$$

ヘビサイドの方法



有理多項式 $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$ の $D(s)$ が重根を持たない場合

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

で表される。ただし、 $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$ で $m \leq n$ である。この多項式を部分分数に展開すると

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n}$$

が得られる。この両辺に $(s - s_1)$ を掛けて $s = s_1$ とすると K_1 以外は零となって

$$K_1 = \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{N(s)}{(s - s_2) \dots (s - s_n)} \Big|_{s=s_1} = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2) \dots (s_1 - s_n)}$$

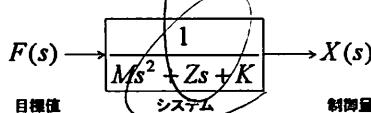
K_1 が得られ、これを繰り返すことですべての未定係数が求まる。

ただし、重根を持つ場合には微係数を求めるなど別の手法が必要となるが、ここでは深入りしない。

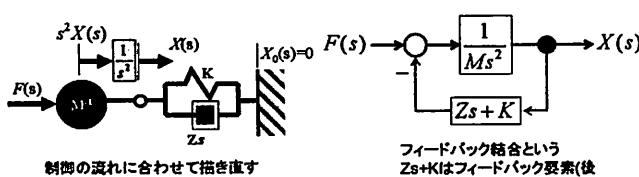
$$\begin{aligned} L[M\ddot{x}(t) + Z\dot{x}(t) + Kx(t)] &= L[f(t)] \\ M\{s^2(X(s) - x(0) - \dot{x}(0)) + Z\{sX(s) - x(0)\} + KX(s)\} &= F(s) \\ X(s) &= [Ms^2 + Zs + K]^{-1}F(s) \end{aligned}$$

2. 伝達関数とブロック線図

入出力関係をブロックに入れる



さらに動的システムの原型に近い関係を与えると



12 代表的な伝達要素(基本要素の伝達関数)

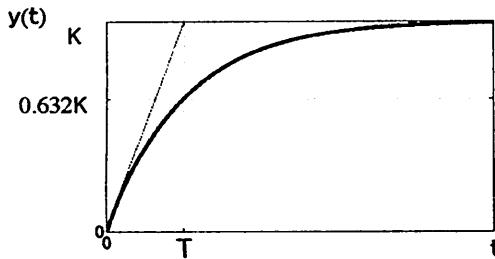
伝達関数の式の形に応じて、伝達要素には名前がついている。

- 比例要素…出力が入力の定数 K (ゲイン定数)倍。 $G(s) = K$
- 積分要素…出力が入力の積分。 $G(s) = \frac{1}{s}$
- 微分要素…出力が入力の微分。 $G(s) = s$
- むだ時間要素…入力が時間 L (むだ時間)だけ遅れて出力される。 $G(s) = e^{-Ls}$
- 1次遅れ要素(1次遅れ系) … s の1次の分母を持つ。
Tを時定数、Kをゲイン定数と呼ぶ。 $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$
- 2次遅れ要素(2次遅れ系) … s の2次の分母を持つ。
ζを減衰比(減衰係数)、 ω_n を固有角周波数(固有角振動数)と呼ぶ。 $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

1次遅れ要素の単位ステップ応答

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad T: 時定数$$

- 初期値0、十分時間が経過したとき、 K/T になる。
- 時刻Tで、 K の63.2%の値となっている。
- 時刻0での接線は、傾き K/T となる。



○: フィードバックループ
△: ブロードレス
 $T + (2\pi f)$

演習1-1



システムPの挙動が以下の方程式で与えられるとき

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$u(t)$ を入力、 $y(t)$ を出力とする伝達関数 $P(s)$ を求めよ

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

このような伝達要素は「2次遅れ系」と呼ばれるが、この要素の固有角振動数 ω_n 、減衰比 ζ とゲイン K を示せ

$$\omega_n = \sqrt{2}, \quad \zeta = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad K = \frac{1}{2}$$

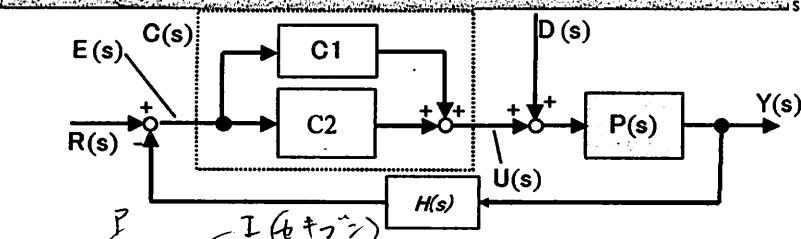
単位ステップ応答 $y(t)$ を求めよ

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right] = \frac{1}{2} L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right] = \frac{1}{2} (1 - e^{-t} + e^{-2t})$$

フィードバック制御をしっかり復習して理解すること。制御の基本であり、制御工学IIはこれをもととした制御理論について学んでいく。

予習が大事であり、次回の予定をもとに教科書に目を通して来ること。

演習1-2



$$C(s) = \frac{3s+1}{s}$$

このような制御を PI制御と呼ぶ

また測定装置 $H(s) = 2$ としたときの一巡伝達関数 $L(s)$ とループ伝達関数 $G(s)$ を示せ

$$L(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{2(3s+1)}{s(s^2+3s+2)}, \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3s+1}{s^3+3s^2+8s+12}$$

$$\frac{3s+1}{s} \cdot P(s) \cdot 2$$

まとめ

- ラプラス変換・逆ラプラス変換は十分に復習しておこう。
- 制御工学には、特有の用語が多いので、それらの意味を理解すること。
- ⇒ 英語を理解しないと分からぬ=学問を会話できない
- 部分分数分解(新しく学んだヘヴィサイドの手法をものにしよう)からの逆ラプラス変換は、単位インパルス応答や単位ステップ応答を求めるときに必須なので、そのやり方をきちんと理解しておくこと。
- ⇒ 方程式の解が簡単に得られる
- ⇒ フィードバック制御系の構造を理解しておくこと。
- ⇒ 制御理論の肝

第2回：周波数応答とボード線図

制御工学 II



制御工学 I の復習を中心に

周波数応答

正弦波入力に対する時間応答

主な要素の周波数応答とボード線図

古典制御は图形的理解が基本

ブロック線図

ボード線図

ベクトル軌跡

ナイキスト線図

振動波形(時間)と周波数(振動数)

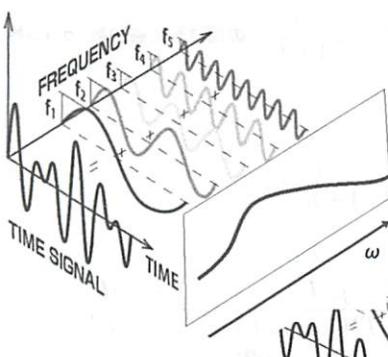


伝達関数

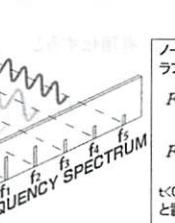
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$G(s)$ に対し $s=j\omega$ と代入した $G(j\omega)$ を計算する。

$G(j\omega)$ を周波数伝達関数あるいは周波数応答関数と呼ぶ



伝達先の伝達関数で大きさと位相が変化して出力される。



ノート ラプラス変換とフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$t < 0$ で $f(t)$ が 0 であれば $s=j\omega$ と置くとおなじになる。

$$\text{フーリエ変換 } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

周波数応答

波形は振幅と位相と周波数で決まる



- システムに正弦波信号を入力したときの出力信号(応答)。
- 正弦波信号を入力すると、定常状態においては、出力も正弦波となる。ただし、入力信号の角周波数 ω に応じて出力の 振幅 が変化する。

$$u(t) = A \sin \omega t$$

$$y_s(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \theta)$$

線形システム
 $G(s)$ $s=j\omega$ と代入した $G(j\omega)$ 

振幅の変化

- 振幅は $|G(j\omega)|$ 倍される。これを、ゲイン または利得と呼ぶ。

位相の変化

- 位相は入力信号から、 $\theta = \angle G(j\omega)$ (または $\arg G(j\omega)$) だけずれる。

正弦波入力に対する時間応答y(t)



改めて定常応答を $y_s(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ のように表すと

ゲイン* $B/A = |\theta(j\omega)| = \sqrt{(Re[\theta(j\omega)]^2 + (Im[\theta(j\omega)])^2)}$

位相 $\varphi = \angle \theta(j\omega) = \tan^{-1} \frac{Im[\theta(j\omega)]}{Re[\theta(j\omega)]}$

このように周波数応答は動的システムの入出力に着目して、一次から高次まで、周波数領域において統一的に扱うことができる→システムの次数を問題としない

実在の動的システムがあれば実験によって周波数応答を求めることがで、周波数応答が分かれれば、時間応答の算出が可能である

* $20 \log_{10} \frac{B}{A}$ をゲインと呼ぶ場合も多い(単位はdB, デシベル)

積分要素の周波数応答



積分要素の伝達関数 $G(s) = \frac{K}{s}$ の周波数応答関数、ゲイン特性、位相特性を求めよ。

周波数応答関数 $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{Kj}{j^2\omega} = \boxed{-\frac{K}{\omega} j}$

ゲイン特性

$$|G(j\omega)| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{K}{\omega}\right)^2} = \boxed{\frac{K}{\omega}}$$

位相特性

$$\angle G(j\omega) = \boxed{\text{ }} \quad (\text{実部が常に0で、虚部が負のため})$$

ω が大きくなると出力の振幅は小さくなり、位相は常に90°遅れることが分かる

(an⁻¹)

1次遅れ要素のゲイン・位相特性



ゲイン特性

$$(\text{複素数の大きさ} = \sqrt{(\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2})$$

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{|1|}{|1+j\omega T|} = \boxed{\frac{1}{(1+\omega^2 T^2)^{1/2}}}$$

位相特性

$$(\text{偏角} = \tan^{-1} \frac{\text{虚部}}{\text{実部}})$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+j\omega T} \right) = \angle 1 - \angle (1+j\omega T)$$

$$= \tan^{-1} \frac{0}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1} = \boxed{-\tan^{-1} \omega T}$$

例題: 一次遅れ要素(1)



一次遅れ要素の伝達関数 $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ の周波数応答関数、ゲイン特性、位相特性を求めよ。

周波数応答関数

$s=j\omega$ として計算すればよい

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+T(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega T}$$

有理化すると、

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2} \\ &= \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} \end{aligned}$$

例題: 一次遅れ要素(2)



ゲイン

複素数の大きさの求め方を用いればよい

$$(\text{複素数の大きさ} = \sqrt{(\text{実部})^2 + (\text{虚部})^2})$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2 T^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\omega^2 T^2} \sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \right)$$

すなわち、入力信号に対し、振幅が $\boxed{\frac{1}{(1+\omega^2 T^2)^{1/2}}}$ 倍される

ボード線図 (Bode Diagram)



周波数応答について学んできたが、

入力振幅を A 、角周波数を ω とした時の応答振幅を B とすると

その振幅比(ゲイン)は

$$g = 20 \log_{10} \frac{B}{A} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad \text{デシベル [dB]}$$

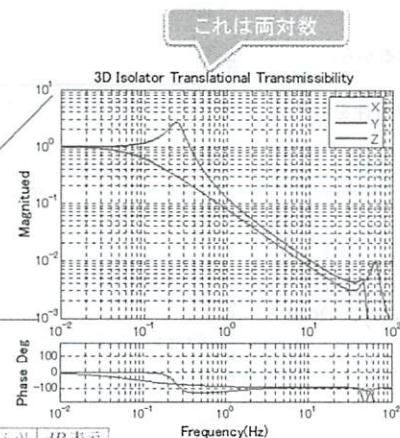
と与えられる。また位相の遅れ・進みは

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \quad ^\circ [\text{deg}]$$

と表され、これらを対数表示した横軸に周波数 ω [rad/s, Hz]とて
プロットしたゲイン線図、位相線図を合わせてボード線図と呼ぶ。

横軸の周波数 ω に対し $\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| \text{ の変化を表すゲイン線図} \\ \angle G(j\omega) \text{ の変化を表す位相線図} \end{array} \right.$

ボード線図の読み方



$ G(j\omega) $	dB 表示
0.1	-20
1	-3
$\sqrt{2}$	0
1	0
$\sqrt{2}$	3
10	20
100	40

片対数、両対数ともに用いられるが、広い領域を表す必要があり、対数尺を用いる

基本要素のボード線図(1)

■ 比例要素

比例要素は一定ゲインのみを有するから、
ゲイン特性は周波数に寄らず一定量を示す。

$$G(j\omega) = K$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |K| [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{0}{K} = 0^\circ$$

仮に $K = 2$ を与えると $g = 6.020 \dots = 6$

ゲインは比例定数によって上下するが、位相は 0° で変化しない。

基本要素のボード線図(2)



■ 積分要素

積分のゲインを $\frac{1}{T}$ として $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$ となるから、

ゲイン特性は右下がりの特性を示す。

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega T [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{0} = -90^\circ$$

ゲイン特性は ω が 10 倍 (1 decade) になると -20dB 小さくなる。

また $-20 \log_{10} \omega T = 0$ から $\omega T = 1$ であるから、 $\omega = \frac{1}{T}$ のとき

□を横切ることになる。位相は常に 90° □。

0dB

基本要素のボード線図(3)



基本要素のボード線図



■微分要素

微分のゲインを T として $G(j\omega) = j\omega T$ となるから、ゲイン特性は右上がりの特性を示す。

$$G(j\omega) = j\omega T$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega T [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T}{0} = 90^\circ$$

ゲイン特性は ω が 10 倍 (1 decade) になると $+20$ dB 大きくなる。

また $20 \log_{10} \omega T = 0$ から $\omega T = 1$ であるから、 $\omega = \frac{1}{T}$ のとき

横切ることになる。位相は常に 90° 。

積分とは伝達関数が逆関数になっていてその特性はゲイン位相ともに軸対象となる。

△

0 dB

■比例要素: 位相には何もしない

$$G(j\omega) = K$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |K| [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{0}{K} = 0^\circ$$

■積分要素: $T=1$ で 0 dB, -20 dB/dec

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega T [dB]$$

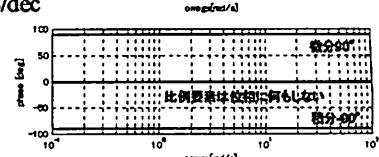
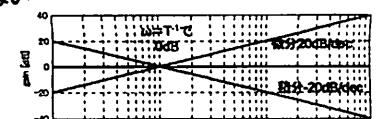
$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{0} = -90^\circ$$

■微分要素: 積分の逆特性

$$G(j\omega) = j\omega T$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega T [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T}{0} = 90^\circ$$



一次遅れ要素のボード線図



■時定数 $T=1$ として 1 次遅れ系のボード線図を書いてみよう

一次遅れ要素

一次遅れ要素の周波数伝達関数は $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ となるから、

ゲイン特性は $\omega \geq \frac{1}{T}$ において積分要素と同じ右下がり特性を示す。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

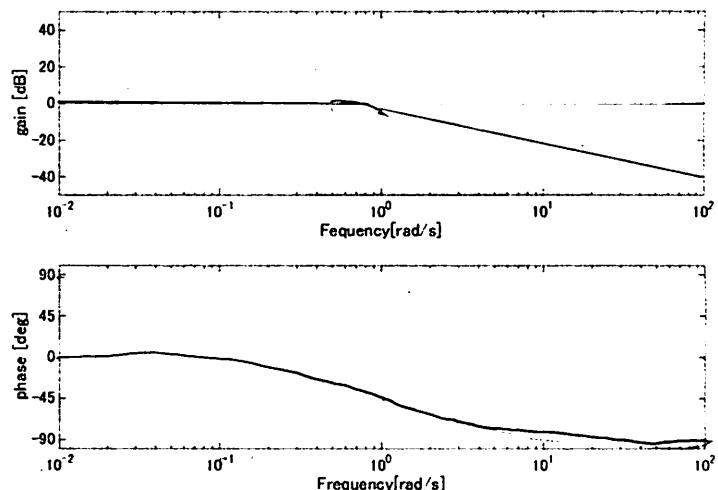
$$g =$$

ゲイン特性は $\omega \leq \frac{1}{T}$ において 0 [dB]、 $\omega \geq \frac{1}{T}$ において 1 [dec] で -20 dB で小さくなる。

また $\omega = \frac{1}{T}$ のとき $g = -3$ [dB] である。

$$-1 = \omega T \quad \omega = 1, g = -3$$

$$C_0(j\omega)^2 = \frac{1}{1+j\omega}$$



二次遅れ要素



二次遅れ要素の伝達関数は $\frac{\omega}{\omega_n} = u$ とおいて $G(j\omega) = \frac{1}{1-u^2 + j2\zeta u}$ となる。

$$G(j\omega) = \frac{1}{1-u^2 + j2\zeta u}$$

$$g = |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} (1 - u^2 - (2\zeta u)^2) [dB]$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{(2\zeta u)/(1-u^2)}{1} [deg]$$

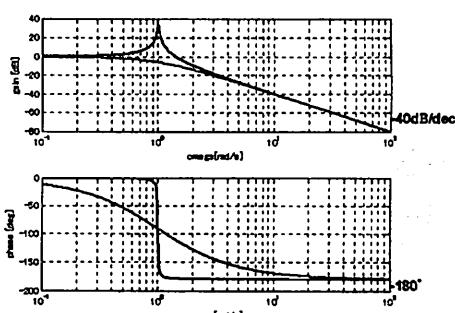
ゲイン特性は $u=1$ において 0 [dB]、 $u=1$ において 1 [dec] で -40 dB で小さくなる。 $u=1$ の近傍は共振領域である。

同様に位相は $u=1$ において 0° であり、 $u=1$ において -90° 、さらに $u=1$ においてさらに遅れて -180° となる。

二次遅れ要素のボード線図



■不足減衰 $\zeta=0.01$: -、臨界減衰 $\zeta=1$: -



まとめ



- 周波数応答について、またそのゲイン、位相の求め方を得た。
- システムの伝達関数を部分分数に展開し、それに正弦波入力を加えたときの応答について詳細に見た。
- 正弦波入力に対する時間応答について、ゲインと位相との関係を導いた。
- 主な要素の周波数応答を求め、ボード線図で表現した。

第3回 ボード線図(基本要素とその合成)

制御工学 II



ボード線図

一次進み、二次遅れ要素

一般的な要素

関数の合成

対数演算に強くなる その1



- ボード線図は対数で表示される。対数の演算則を思い出しておこう

対数の定義

任意の正の実数 x に対して

$$x = a^p$$

を満たす実数 p が唯一定まる。この p を $p = \log_a x$ と表し、 p を x の対数、 a を底、 x は真数と呼ぶ。

対数の性質

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = \log_{1/a} x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

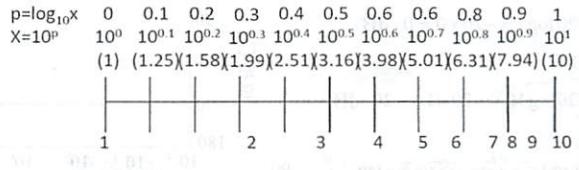
$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

対数表現

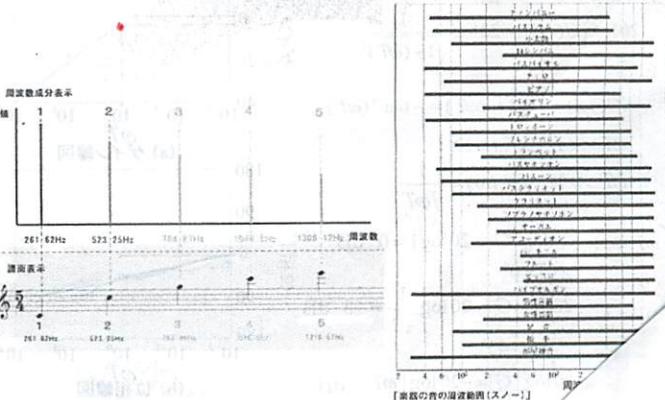
- 横軸が対数圧縮されているため、同じ比率はおなじ間隔で与えられる
1:2と2:4, 4:8はおなじ間隔
- 周波数 a と b の中間(対数尺度での真ん中)は \sqrt{ab} である。例えば1と10の中間は $\sqrt{1 \cdot 10} = 3.16$ となる。また1と2では $\sqrt{2}$ である
- 1/3Octaveは $\sqrt[3]{4}$ であり、2の1/3Octaveは $\sqrt[3]{2} = 1.2599$ であるが実用では1.25が使われている。これはまだ $\sqrt[3]{10} = 1.2589$ でもある
- 傾きを示すとき等間隔を与える比率で表現するが、代表的なのが10倍のデカード[dec]と2倍のオクターブ[Oct]で比率あたりの意味でバー・デカードとかバー・オクターブとか表現される



オクターブとは



周波数で見ると



対数演算に強くなる その2



ボード線図の読み方



■ ボード線図では常用対数を使用し、単位はデシベルdBである。

常用対数: 10を底とする対数

$$p = \log_{10} x \Leftrightarrow 10^p = x$$

ですが、デシベルはこれを20倍して用いる。

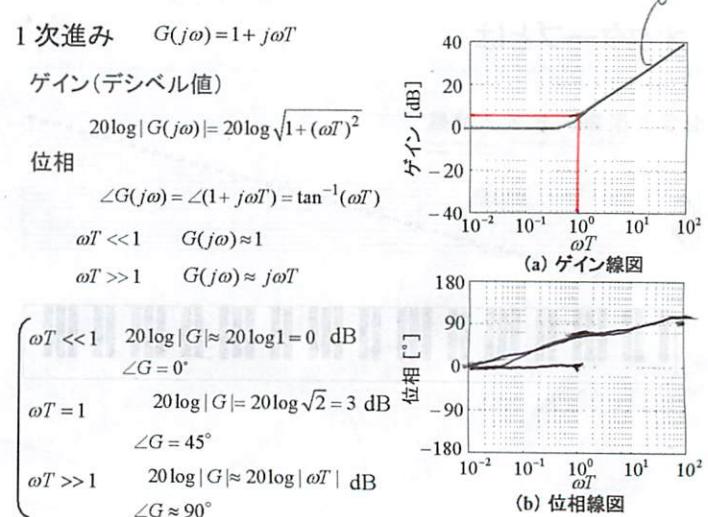
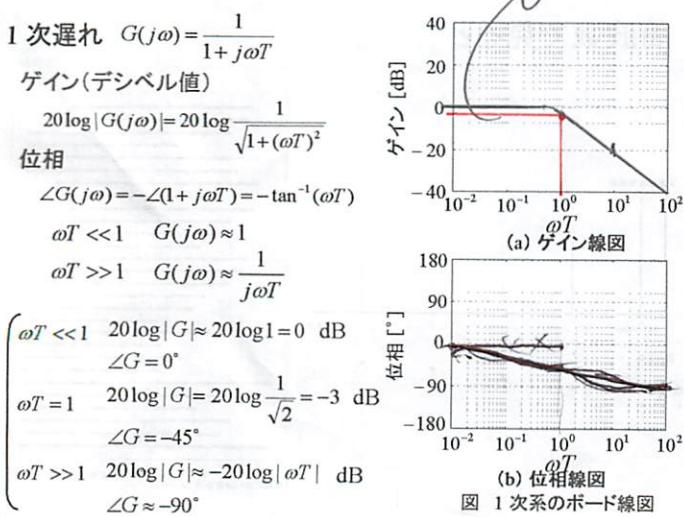
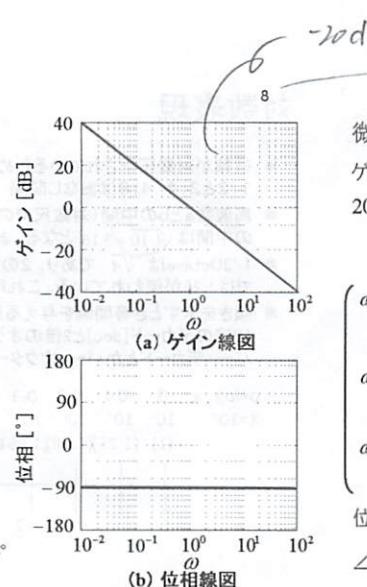
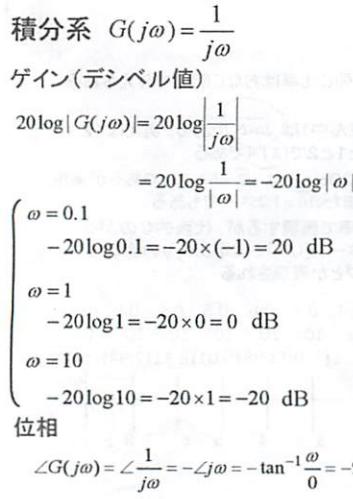
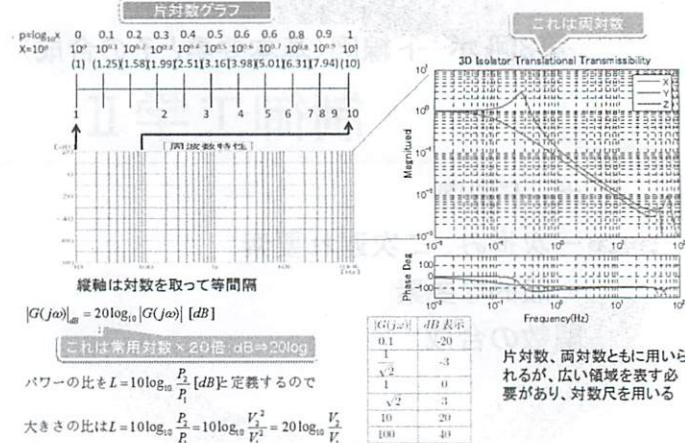
対数pはもともとペル、その10倍でデシベル。力のレベルはこれでよいがパワーは x^2 となるため慣習として

$$p = 10 \log_{10} x^2 = 20 \log_{10} x$$

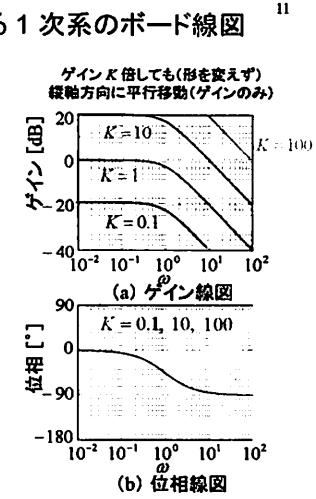
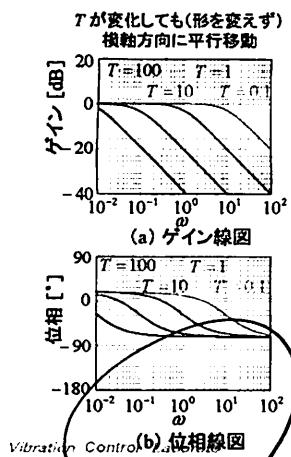
を用いることになっている。よってボード線図は

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| [dB]$$

である。



種々の時定数・ゲインに対する 1 次系のボード線図

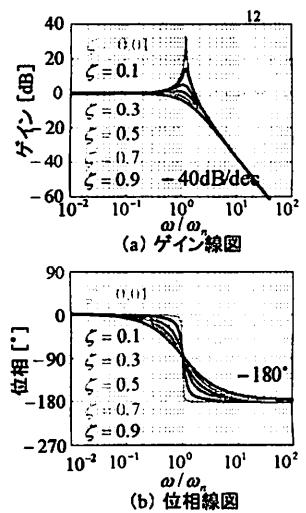


$$\begin{aligned} \text{2 次系 } G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{(1-\Omega^2)^2 + 2\zeta\Omega j} \quad (\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}) \end{aligned}$$

ゲイン(デシベル値)
 $20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$
位相
 $\angle G(j\omega) = -\angle((1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2)$

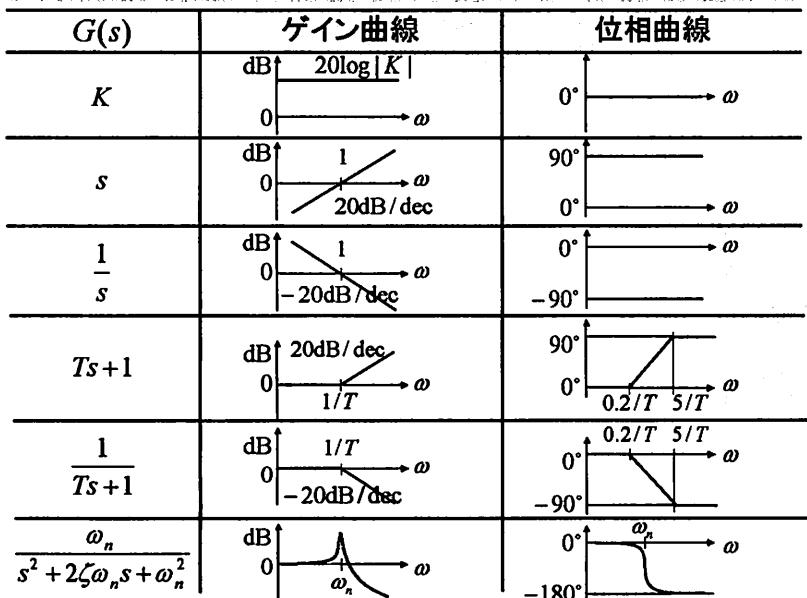
$$\begin{cases} \Omega \ll 1 & G(j\omega) \approx 1 \\ \Omega \gg 1 & G(j\omega) \approx \frac{1}{-\Omega^2} \\ \Omega \ll 1 & 20 \log |G| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0 \text{ dB} \\ \Omega = 1 & 20 \log |G| = 20 \log \frac{1}{2\zeta} \text{ dB} \\ \Omega \gg 1 & 20 \log |G| \approx -40 \log |\Omega| \text{ dB} \end{cases}$$

$\angle G \approx 0^\circ$
 $\angle G = -90^\circ$
 $\angle G \approx -180^\circ$



何がわかる? (3)(v)

基本要素のボード線図



伝達関数の合成



■ゲインや位相の性質を用いると、一般的な伝達関数のボード線図も一次遅れ要素や二次遅れ要素といった典型的な伝達関数のボード線図をグラフ上で反転させたり、加え合わせたりすることによって容易に得ることができる。

性質(1) : $H(s) = 1/G(s)$ のときに次の式が成立する

$$\begin{aligned} \log |H(j\omega)| &= -\log |G(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= -\angle G(j\omega) \end{aligned}$$

性質(2) : $H(s) = G_1(s)G_2(s)$ のときに次の式が成立する

$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\omega)| &= 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{aligned}$$

性質(1)は微分要素と積分要素の関係と同じく、ゲイン線図では 0[dB]で上下を反転させ、位相線図では 0[deg]で上下を反転させることによって得られる。性質(2)ではそれぞれ加算すればよい。

2重積分系

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

ゲイン(デシベル値)

$$20 \log \frac{1}{|(j\omega)^2|} = 20 \log \frac{1}{\omega^2}$$

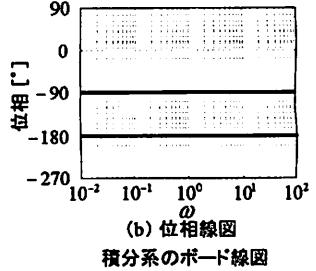
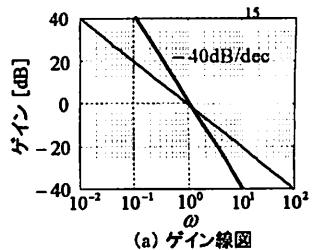
$$= -40 \log |\omega|$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \frac{1}{j\omega} = -\tan \infty - \tan \infty$$

$$= -180^\circ$$

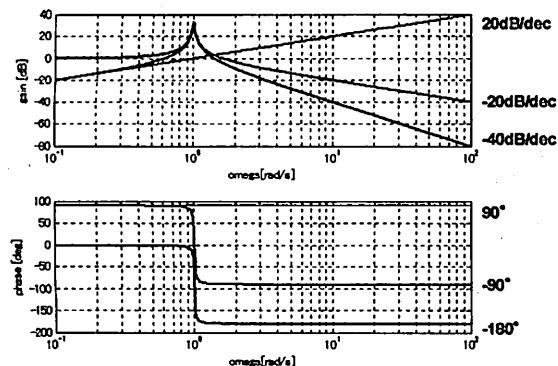
Vibration Control Laboratory



積分系のボード線図

要素の加算

■二次遅れーと微分要素ーの加算

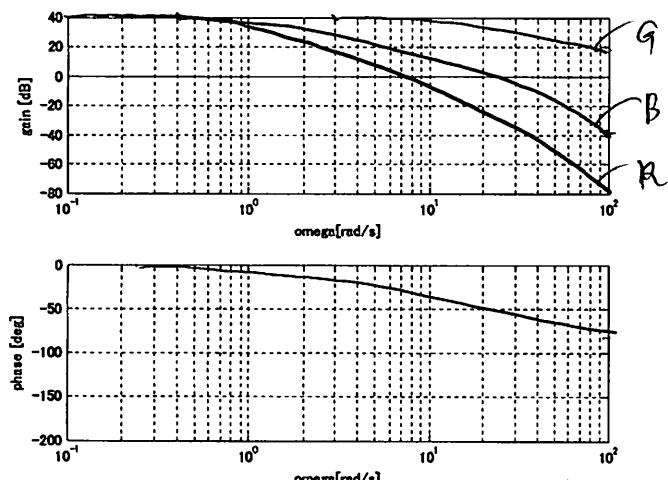


まとめ

- 対数スケールによる表現の優位さ。
 - ボード線図の表し方:ゲイン線図と位相線図について学んだ。
 - 基本要素のボード線図について、ゲイン特性、位相特性的特徴、特にlogスケール表現で新たに得られる情報を学習。
 - 一般的な伝達要素も基本要素の加算で求められる。

演習

- 時定数T=1とT=0.1の一次遅れ要素の重ね合わせをボード線図で描け



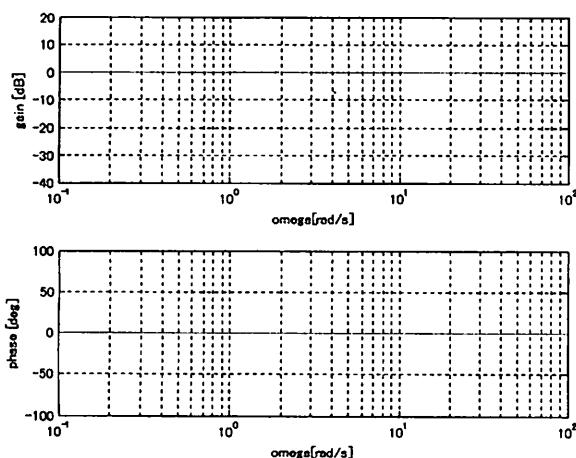
$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

△ 次級加壓室

演習

■時定数 $T_1=1$ と $T_2=0.1$ の一次遅れ、進み要素の重ね合わせをボード線図で描け

$$\text{周波数伝達関数は } G(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)} = \frac{(1+0.1j\omega)}{(1+j\omega)} = \frac{(1+0.1j\omega)(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$



$$= \frac{1 - j\omega + 0.1j\omega + 0.1\omega^2}{1 + \omega^2}$$

$$= \frac{1 - 0.9j\omega + 0.1\omega^2}{1 + j\omega^2}$$

第4回 ボード線図2折れ線近似 制御工学II



- 基本要素のボード線図(復習)
- 基本要素のボード線図上の加算
- 折れ線近似による表現法
- 位相遅れ、位相進みのボード線図

■前回: ボード線図1

- 対数に強くなる
- 周波数応答とボード線図
- 基本要素のボード線図

1次系 $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$

ゲイン(デシベル値)
 $20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$

位相
 $\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T) = -\tan^{-1}(\omega T)$

$\omega T \ll 1 \quad G(j\omega) \approx 1$
 $\omega T \gg 1 \quad G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$

$\omega T \ll 1 \quad 20 \log |G| \approx 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$
 $\angle G = 0^\circ$

$\omega T = 1 \quad 20 \log |G| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$
 $\angle G = -45^\circ$

$\omega T \gg 1 \quad 20 \log |G| \approx -20 \log |\omega T| \text{ dB}$
 $\angle G \approx -90^\circ$

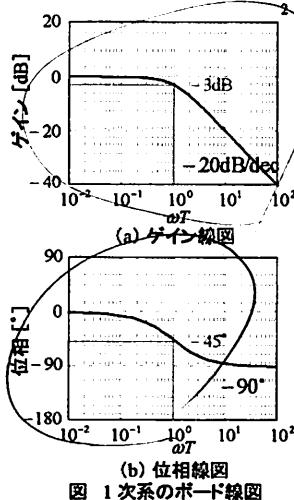
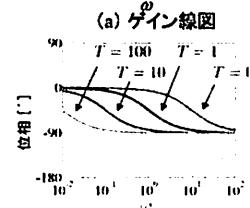
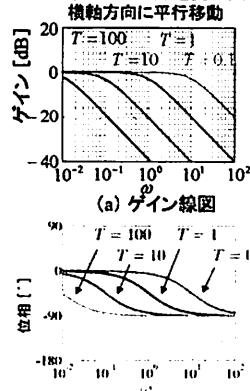


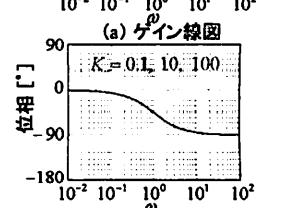
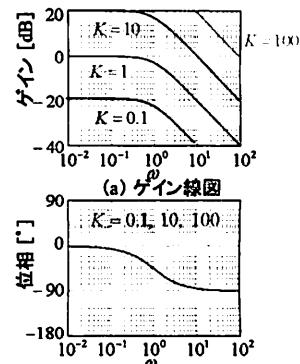
図 1 次系のボード線図

種々の時定数・ゲインに対する1次系のボード線図

T が変化しても(形を変えず)
横軸方向に平行移動



ゲイン K 倍しても(形を変えず)
横軸方向に平行移動(ゲインのみ)



$1 + (\omega T)^2$ を、 $(\omega T)^2$ で近似する。
(近似)

伝達関数の逆と合成

- ゲインや位相の性質を用いると、一般的な伝達関数のボード線図も一次遅れ要素や二次遅れ要素といった典型的な伝達関数のボード線図をグラフ上で反転させたり、加え合わせたりすることによって容易に得ることができる。

性質(1): $H(s) = 1/G(s)$ のときに次の式が成立つ

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -20 \log_{10} |G(j\omega)| = -\angle G(j\omega) \text{ ゲイン(デシベル値)}$$

性質(2): $H(s) = G_1(s)G_2(s)$ のときに次の式が成立つ

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

性質(1)は微分要素と積分要素の関係と同じく、ゲイン線図では0[dB]で上下を反転させ、位相線図では0[deg]で上下を反転させることによって得られる。性質(2)ではそれぞれ加算すればよい。

2重積分系

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

$H(j\omega)$

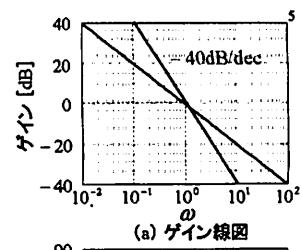
$$20 \log \frac{1}{|(j\omega)^2|} = 20 \log \frac{1}{\omega^2}$$

$$= -40 \log |\omega|$$

位相

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} + \angle \frac{1}{j\omega} = -\tan \infty - \tan \infty$$

$$= -180^\circ$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

積分系のボード線図

1次遅れ伝達関数を直線で近似する

1次遅れの伝達関数は $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ となるから

$$|G(j\omega)|_{\infty} = 20 \log 1 - 20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

これを $\omega = T^{-1}$ (折れ点周波数という) の前後で分けて直線で近似すると

$$\approx -20 \log |1|_{\omega < T^{-1}} - 20 \log \omega T |_{\omega > T^{-1}}$$

のように描ける。 $\omega \ll 1$ の $\omega \gg 1$

位相は $\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T) = -\tan \omega T$ となるから

これを $\omega = T^{-1}$ のとき -45° を通り、傾き $-64.3 \text{ deg}/\omega$ の傾斜を取る。

一方の T^{-1} で 0° であり、 T^{-1} で -90° は明らかであるから

各々を通る3本の直線で近似する。

このときの直線の交点は $\omega = 0.2T^{-1}$ と $\omega = 5T^{-1}$ である。

$$\angle G(j\omega) \approx 0 |_{\omega \leq 0.2T^{-1}} - 64.3 \log \omega |_{0.2T^{-1} < \omega < 5T^{-1}} - 90 |_{\omega \geq 5T^{-1}}$$

のように描ける。



付録: 1次遅れ進み位相線図の傾き計算

$\varphi = -\tan^{-1} \omega$ を微分して傾きを求める。

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = -(\tan^{-1} \omega)' = -\frac{1}{1+\omega^2}$$

ω は対数スケールなので $\omega = 10^x$ から真数 x に置き換えて

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{d\omega}{dx} = \frac{-1}{1+\omega^2} \frac{d\omega}{dx} = \frac{-1}{1+(10^x)^2} \frac{d10^x}{dx} = \frac{-1}{1+10^{2x}} \ln 10 \cdot 10^x = -2.3 \frac{10^x}{1+10^{2x}}$$

これに $\omega = 1$ すなわち $x = 0$ を代入して

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2.3}{2} = -1.15 [\text{rad}/x] = -65.9 [\text{deg}/x]$$

$x = \frac{-90}{-65.9} = 1.366$ となり、近似的に $x \approx \log 5 - \log 0.2 = 1.4$ として用いる。

$$x = 1.4 \text{ とすると } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{-90}{1.4} = -64.3 [\text{deg}/x]$$

$\varphi = \tan^{-1} \omega$ と φ がプラスであれば $\frac{d\varphi}{dx} = 64.3 [\text{deg}/x]$ と傾斜もプラスになる。

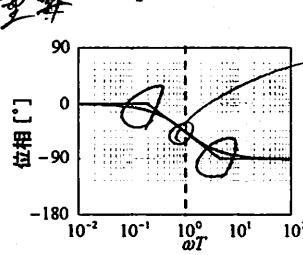
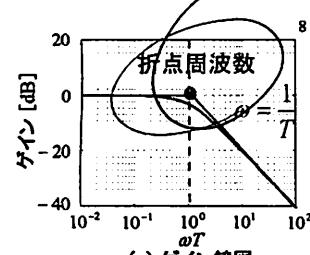
折れ線近似



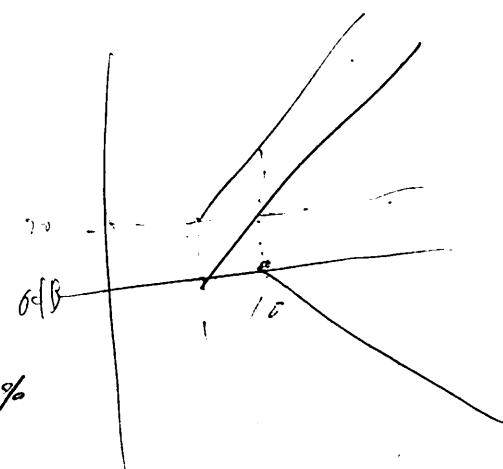
(ゲイン) 0 dB と -20 dB/dec の2本の直線

(位相) $\omega \leq \frac{0.2}{T}$ で 0°

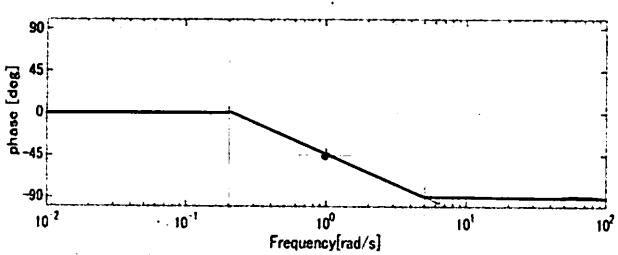
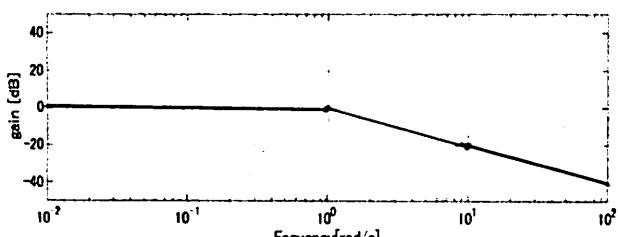
$\omega \geq \frac{5}{T}$ で -90°



1次系のボード線図



$T=1$ と 10 の一次遅れ要素を直線で



- 折れ線近似の描き方
- ① ゲイン線図の折れ点 $(T^{-1}, 0)$ にマークし、位相線図の $(T^{-1}, -45)$ にマークする。
 - ② $(0, 0)$ 折れ点 $(T^{-1}, 0)$ をむすび、 $(T^{-1}, 0)$ と $(10T^{-1}, -20)$, $(100T^{-1}, -40)$ を結ぶ、ゲイン線図ができる。
 - ③ 位相線図に折れ点 $(T^{-1}, 0)$ と $(5T^{-1}, -90)$ を追加して傾斜角を結ぶ。 $0.2T^{-1}$ より低周波は 0° 、 $5T^{-1}$ より大きい周波数は -90° の一定値をとる。
 - ④ 折れ点の周波数を書いて出来上がり。

$$(10T^{-1}, -20) : \left(\frac{10}{T}, -20 \right) \quad (100T^{-1}, -40) : \left(\frac{100}{T}, -40 \right) \quad (0, -20)$$

$$100T^{-1}, -40$$

$$\frac{100}{T}, -40$$

$$= 100, -40$$

$$\frac{0.2}{1}, 0$$

(1, 0)

1次進み伝達関数を直線で近似する



1次進み系の折れ線近似



1次進みの伝達関数は $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ となるから

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 1 + 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

これを $\omega = T^{-1}$ (折れ点周波数という) の前後で分けて直線で近似すると

$$\approx 20 \log |1|_{\omega < T^{-1}} + 20 \log |\omega T|_{\omega > T^{-1}}$$

のように描ける。

位相は $\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) = \tan \omega T$ となるから

これを $\omega = T^{-1}$ のとき 45° を通り、傾き $64.3 \text{ deg}/\log \omega$ の傾斜を取る。

一方 $\omega = T^{-1}$ で 0° であり、 $\omega = T^{-1}$ で 90° は明らかであるから

各々を通る3本の直線で近似する。

このときの直線の交点は $\omega = 0.2T^{-1}$ と $\omega = 5T^{-1}$ である。

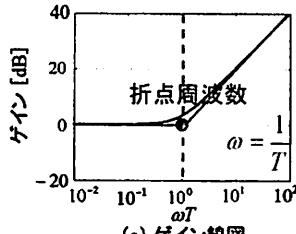
$$\angle G(j\omega) \approx 0|_{\omega < 0.2T^{-1}} + 64.3 \log \omega|_{0.2T^{-1} < \omega < 5T^{-1}} + 90|_{\omega > 5T^{-1}}$$

のように描ける。

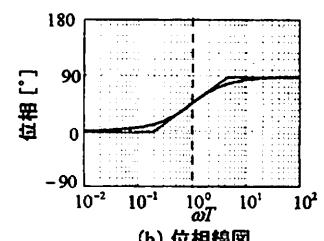
(ゲイン) 0 dB と 20 dB/dec
の2本の直線

(位相) $\omega \leq \frac{0.2}{T}$ で 0°

$\omega \geq \frac{5}{T}$ で 90°



(a) ゲイン線図



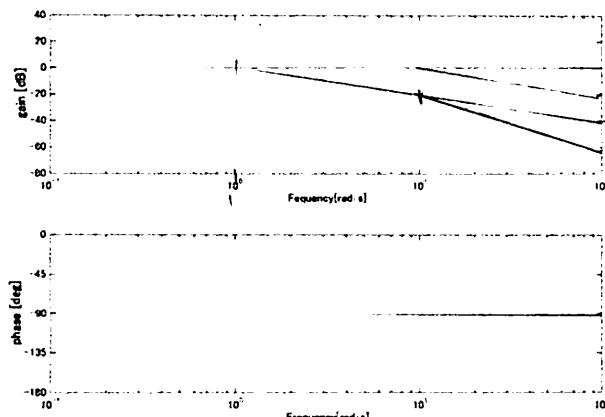
1次系のボード線図

演習 関数の合成



■時定数T=1とT=0.1の一次遅れ要素の重ね合わせを ボード線図の折れ線近似で描け

$$\text{伝達関数は } G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = \frac{1}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$$



位相遅れ要素



- 一次遅れの極 T_1^{-1} が低周波になるように一次進み要素(極が遅れ要素より高い周波数 T_2^{-1})を重ね合わせると、
 $\omega_1 = T_1^{-1}$ と $\omega_2 = T_2^{-1}$ の間の位相が遅れる
- $\omega_2 > \omega_1$ の条件で $0 \sim 90^\circ$ の位相遅れ特性が得られる

$$\text{伝達関数は } G(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)}$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2$$

$T_1 = \alpha T_2$ (ただし $\alpha > 1$) として、折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は T_1^{-1} から -20 dB/dec で減少して $-20 \log_{10} \alpha$ で一定となる。

位相特性は $\omega = 0, \omega = \infty$ では 0° であり $\omega = T_2^{-1}(\alpha^{-1} + 1)/2$ で最大遅れとなる。

位相進み要素



- 一次進み要素の極 T_2^{-1} が代表極(低い側)に来るよう位相遅れ要素を重ね合わせると、
 $\omega_1 = T_1^{-1}$ と $\omega_2 = T_2^{-1}$ の間の位相が進む
- $\omega_1 > \omega_2$ の条件で $0 \sim 90^\circ$ の位相進み特性が得られる

$$\text{伝達関数は } G(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)}$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2$$

$T_1 = \alpha T_2$ (ただし $0 < \alpha < 1$) として、折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は T_1^{-1} から 20 dB/dec で増大して $20 \log_{10} \alpha$ で一定となる。

位相特性は $\omega = 0, \omega = \infty$ では 0° であり $\omega = T_2^{-1}(\alpha^{-1} + 1)/2$ で最大進みとなる。

位相遅れと進み要素のまとめ



15

- 一次遅れと一次進み要素を重ね合わせると、
 $\omega_1 = T_1^{-1}$ と $\omega_2 = T_2^{-1}$ の間の位相が進むあるいは遅れる
- $\omega_2 > \omega_1$ の条件で $0 \sim 90^\circ$ の位相遅れ特性が得られ、
 $\omega_2 < \omega_1$ の条件で $0 \sim 90^\circ$ の位相進み特性が得られる

伝達関数は $G(j\omega) = (1+j\omega T_2)/(1+j\omega T_1)$

$$g = 20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1+(\omega T_1)^2} + 20 \log \sqrt{1+(\omega T_2)^2}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2$$

■ 遅れる場合

$$g|_{T_1^{-1} \leq T_2^{-1}} \approx 0|_{\omega \leq \omega_1} - 20 \log \omega T_1|_{T_1^{-1} \leq \omega \leq T_2^{-1}} - 20 \log T_2^{-1} T_1|_{T_2^{-1} \leq \omega}$$

$$\varphi|_{T_1^{-1} \leq T_2^{-1}} \approx 0|_{\omega \leq 0.2 T_1^{-1}} - 64.3 \log \omega|_{0.2 T_1^{-1} \leq \omega \leq 3 T_1^{-1}} - 90|_{3 T_1^{-1} \leq \omega} + 64.3 \log \omega|_{0.2 T_1^{-1} \leq \omega \leq 3 T_1^{-1}} + 0|_{3 T_1^{-1} \leq \omega}$$

■ 進む場合

$$g|_{T_1^{-1} \geq T_2^{-1}} \approx 0|_{\omega \leq \omega_1} + 20 \log \omega T_2|_{T_2^{-1} \leq \omega \leq T_1^{-1}} + 20 \log T_1^{-1} T_2|_{T_1^{-1} \leq \omega}$$

$$\varphi|_{T_1^{-1} \geq T_2^{-1}} \approx 0|_{\omega \leq 0.2 T_1^{-1}} + 64.3 \log \omega|_{0.2 T_1^{-1} \leq \omega \leq 3 T_1^{-1}} + 90|_{3 T_1^{-1} \leq \omega} - 64.3 \log \omega|_{0.2 T_1^{-1} \leq \omega \leq 3 T_1^{-1}} + 0|_{3 T_1^{-1} \leq \omega}$$

$\sim 0.02, 0.02 \sim 0.5, 0.5 \sim 50, 2 \sim 50, 50 \sim$

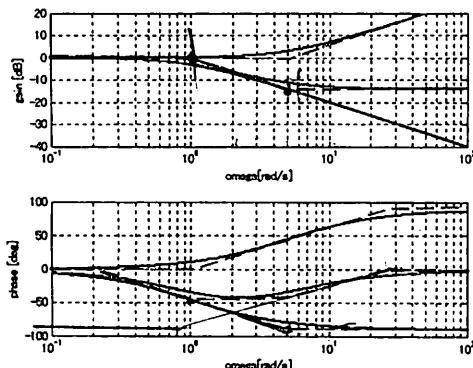
位相遅れ要素



16

- 時定数 $T_1=1$ と $T_2=0.2$ の位相遅れ要素をボード線図で描け、折れ線近似で良い

伝達関数は $G(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)} = \frac{(1+0.2j\omega)}{(1+j\omega)}$



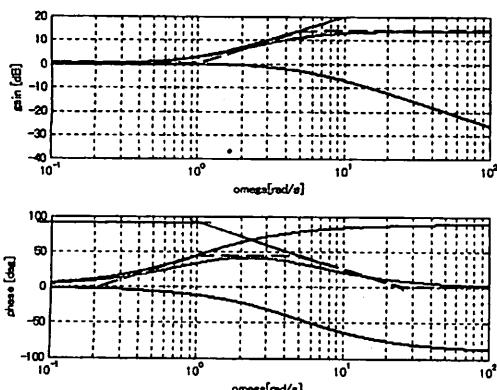
位相進み要素



17

- 時定数 $T_1=0.2$ と $T_2=1$ の位相進み要素をボード線図で描け
折れ線近似で良い

伝達関数は $G(j\omega) = \frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)} = \frac{(1+j\omega)}{(1+0.2j\omega)}$



まとめ

- 基本要素のボード線図について復習して、その折れ線表示について学んだ。
- 折れ線表示を用いて、関数の加算をボード線図上で行った。
- 1次遅れ、1次進み要素を合成すると、位相進み、位相遅れ要素と呼ばれる関数が構成されることを学習した。
- 位相を遅らせたり、進めたりすることは制御にとって特性を高める重要な操作。



18

第5回 周波数応答(4) PID制御のボード線図

制御工学II



PID制御の復習

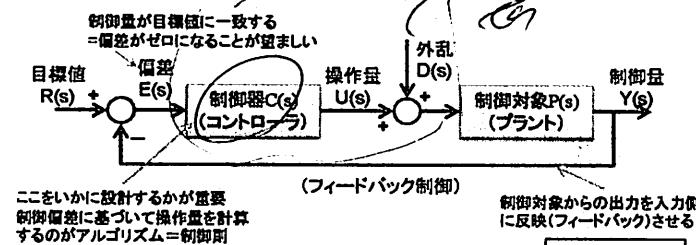
PI制御器のボード線図

PID制御器のボード線図

開ループ伝達関数のボード線図

フィードバック制御の構成(復習)

■ 目標値と制御量の差(制御偏差)に基づき、操作量を決定する

■ 入出力の関係 $E(s) = R(s) - Y(s)$

$$U(s) = C(s)E(s)$$

$$Y(s) = P(s)(U(s) + D(s))$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

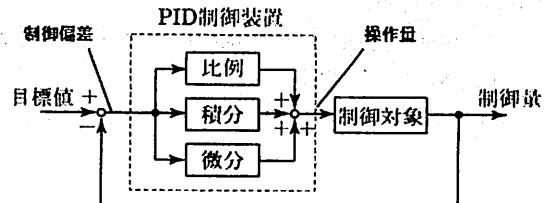
■ 外乱や制御対象の変動の影響を制御器の調整によって抑制できる。

■ 不安定な制御対象を制御器の調整によって安定化できる。

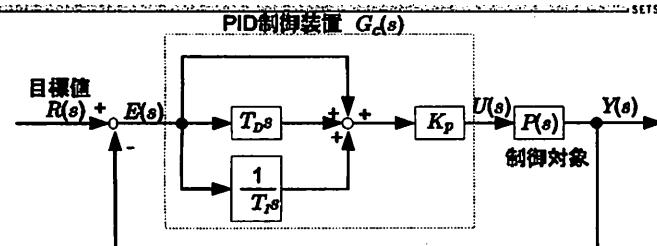
PID制御の復習

制御偏差を **比例(P)**・**積分(I)**・**微分(D)** した量を加え合わせたものを操作量とする補償方式。PID補償による制御方式を **PID制御** と呼ぶ。

温度・圧力・流量などの物理量を一定値に保つ制御(定值制御)を行う **フィードバック制御** において広く用いられている。



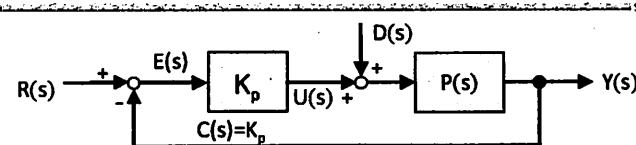
PID制御器を用いた制御ループ



PID制御器を含むフィードバックループの伝達関数は

$$C(s) = \left[K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \right] \quad \text{として } G(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$1 + C(s)P(s) = 0$ が特性方程式となり、開ループによって安定が判別できる。

比例制御のゲイン K_p 

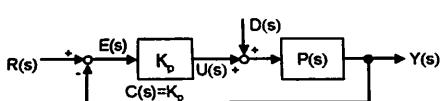
■ 制御出力は、 $D(s) = 0$ で $P(s) = \frac{1}{s+1}$ としたとき

$$Y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} R(s) = \frac{\frac{K_p}{s+1}}{1 + \frac{K_p}{s+1}} R(s) = \frac{K_p}{s+1 + K_p} R(s) \quad \text{である。}$$

単位ステップ入力に対する $K_p = 1$ の定常出力は $Y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_p}{s+1 + K_p} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$

比例ゲインを高め $K_p = 10$ の定常出力は $Y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_p}{s+1 + K_p} \frac{1}{s} = \frac{10}{11} \approx 1$

となって目標値に近い値を得ることができる。



① $P(s) = \frac{1}{s+1}$ のボード線図

② $K_p = 1$ とした閉ループ伝達関数

$$G(s) = \frac{K_p}{s+1+K_p} = \frac{1}{s+2}$$

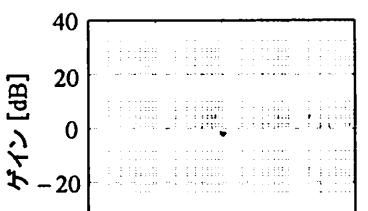
のボード線図

③ $K_p = 10$ とした閉ループ伝達関数

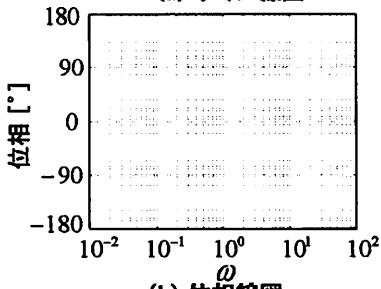
$$G(s) = \frac{K_p}{s+1+K_p} = \frac{10}{s+11}$$

のボード線図

周波数伝達関数に直し、ゲイン、位相を求める。ボード線図は折れ線近似でよい。



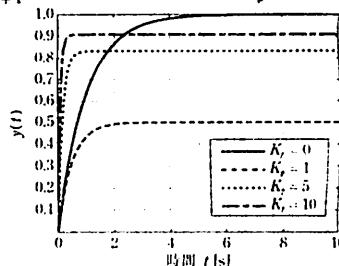
(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

P制御による単位ステップ応答の変化(図9.9)

$P(s) = \frac{1}{s+1}$ にP制御を行い、比例ゲイン K_p を変化させた。



速応性は改善したが定常特性は偏差を含む。

PI制御器のボード線図

比例ゲインに積分要素を加えた制御器を考える

PI制御器は偏差の過去データから制御を考える手法

$$\text{伝達関数は } G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_s}\right) = K_p \frac{T_s + 1}{T_s} = K_p \frac{T_j \omega + 1}{T_j \omega}$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} K_p - 20 \log_{10} \omega T + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \infty + \tan^{-1} \omega T = -\pi/2 + \tan^{-1} \omega T$$

折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は積分によって-20dB/decで減少して T^{-1} から

$$20 \log_{10} K_p \text{ で一定となる。}$$

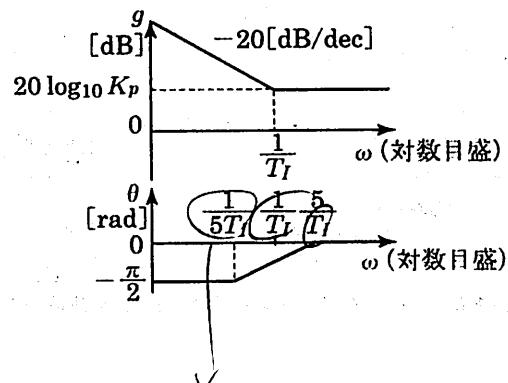
位相特性は $\omega = T^{-1}$ では -90° であり $\omega = 5T^{-1}$ で 0° に戻る。

PI制御装置のボード線図

高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。

積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。

位相遅れが安定性を損なう恐れもある。



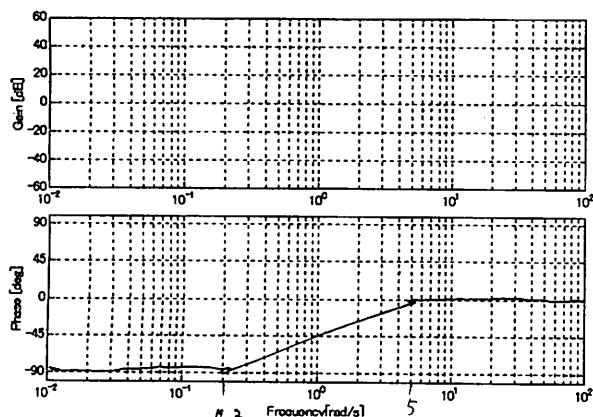
PI制御器のボード線図

$$\text{伝達関数は } G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_s s}\right) = 0.316 \frac{1+j\omega}{j\omega} \quad K_p = 0.316, T_s = 1 \text{ として}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K_p - 20 \log \omega T_s + 20 \log \sqrt{1 + (\omega T_s)^2}$$

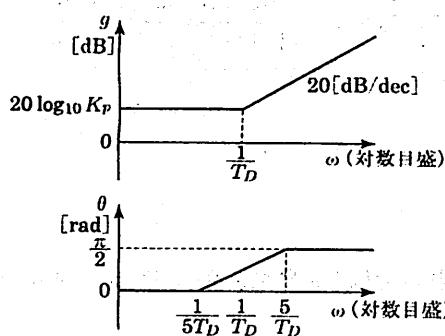
$$\approx -10 - 20 \log \omega + 20 \log(1) \Big|_{\omega < 1} + 20 \log \omega \Big|_{\omega > 1} = -10 \Big|_{\omega < 1} - 20 \log(\omega) \Big|_{\omega > 1} \quad [\text{dB}]$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \infty + \tan^{-1} \omega T_s = -\pi/2 + \tan^{-1} \omega T_s \approx -90 \Big|_{\omega < 0.2} + 64.3 \log \omega \Big|_{0.2 < \omega < 5} + 0 \Big|_{\omega > 5} \quad [^\circ]$$



PD制御装置のボード線図

- 微分要素により、位相を進ませて位相余裕を改善して安定性を増す。
- 入力の変化(微分)に速やかに反応することで速応性が向上する。
- 外乱などの高い周波数に必要以上に反応することが好ましくない場合もある。



SETSUDAI

PID制御器のボード線図

- 比例ゲインに積分要素、微分要素を加えた制御器を考える
PID制御器は偏差の過去・未来データから制御を考える手法

$$\text{伝達関数は } G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_p \frac{T_I T_D (\omega)^2 + T_I \omega + 1}{T_I \omega}$$

$$\cong K_p \frac{(T_I \omega + 1)(T_D \omega + 1)}{T_I \omega}, \quad T_D < T_I \text{ として近似している}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K_p - 20 \log \omega T_I + 20 \log \sqrt{1 + (\omega T_I)^2} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T_D)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega + \tan^{-1} \omega T_I + \tan^{-1} \omega T_D = -\pi/4 + \tan^{-1} \omega T_I + \tan^{-1} \omega T_D$$

折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は積分によって -20dB/dec で減少して T_I^{-1} から20 log K_p で一定となり、 T_D^{-1} から 20dB/dec で増加する。位相特性は $\omega \ll T^{-1}$ では -90° であり $\omega = 5T_D^{-1}$ では 90° に進む。

12

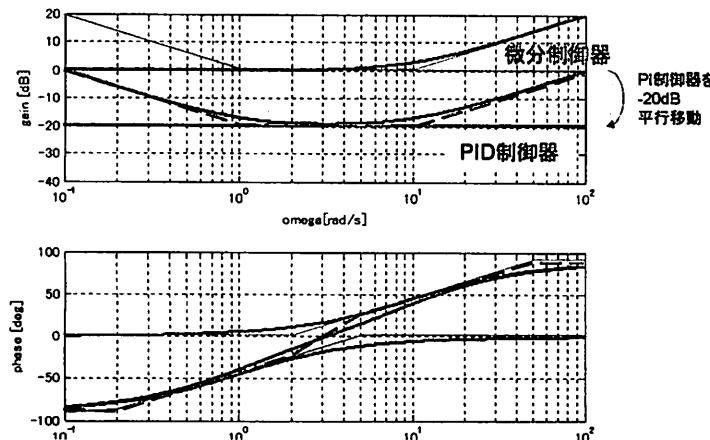
SETSUDAI

PID制御器のボード線図

- 時定数 $T_D=0.1, T_I=1, K_p=0.1$ の PID 制御器

SETSUDAI

$$\text{伝達関数は } G(j\omega) \cong \frac{K_p (1+j\omega T_I)(1+j\omega T_D)}{j\omega T_I} = \frac{0.1(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}{j\omega}$$



PID制御器のボード線図(まとめ)

SETSUDAI

PI制御器では

- 高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
- 積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
- 位相遅れが安定性を損なう恐れもある。

PD制御器では

- 微分要素により、位相を進ませて位相余裕を改善して安定性を増す。
- 入力の変化(微分)に速やかに反応することで速応性が向上する。
- 外乱などの高い周波数に必要以上に反応することが好ましくない場合もある。

PID制御器はこれらを合わせた特徴を持つことができる

開ループ伝達関数のボード線図

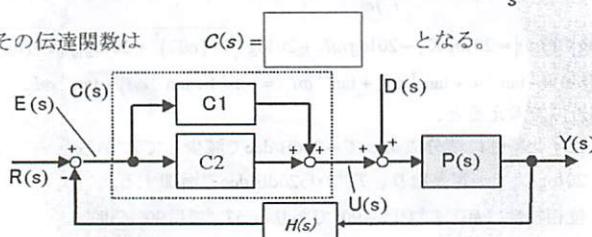


システムPの伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{1}{0.1s+1} = \frac{1}{0.1j\omega + 1}$$

の一次遅れ特性で与えられるとする。下図のように制御ループを構成し、制御器C(s)はPI制御器で比例C1=3、積分C2= $\frac{1}{s}$ とすると、

その伝達関数は $C(s) = \boxed{\quad}$ となる。



Vibration Control Laboratory

開ループ伝達関数のボード線図



さらに測定装置の伝達関数を $H(s) = 0.2$ としたときの

一巡(開ループ)伝達関数 $L(s)$ は

$$L(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)} = \frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$

となり、ループのゲイン特性と位相特性は次のようになる。

$$\begin{aligned} 20\log|L(j\omega)| &= 20\log|C(j\omega)| + 20\log|P(j\omega)| + 20\log|H(j\omega)| \\ &= -20\log\omega + 20\log\sqrt{9\omega^2+1} - 20\log(0.1\omega+1) - 14 \quad [\text{dB}] \\ \angle L(j\omega) &= -\pi/2 + \tan^{-1} 3\omega - \tan^{-1} 0.1\omega \quad [\text{rad}] \end{aligned}$$

これをボード線図で示してみよう。

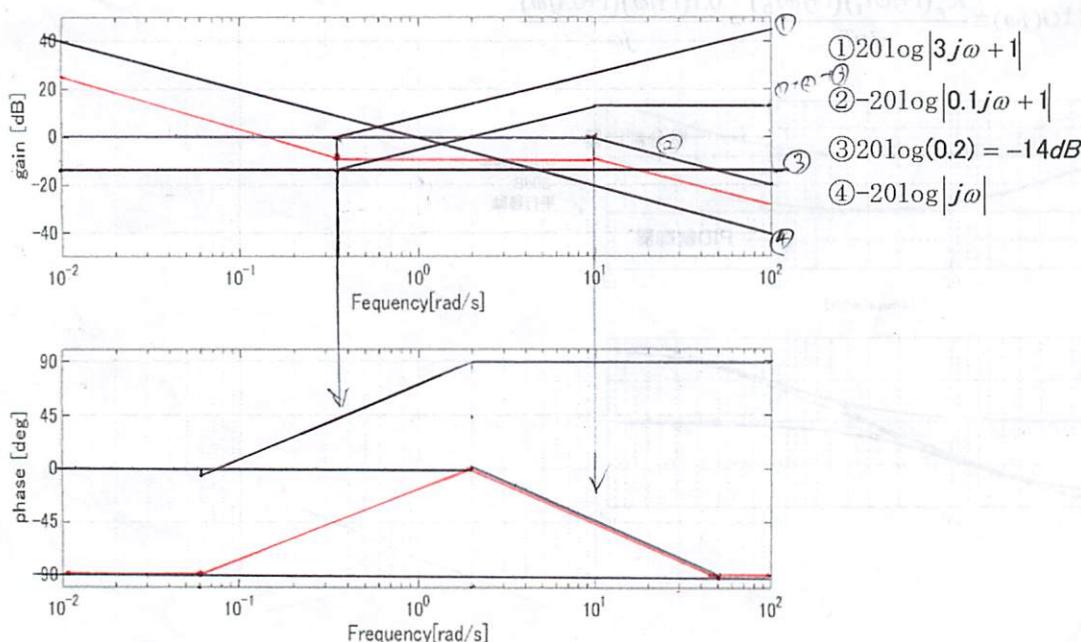
■ 演習: 折れ線近似で各要素を示し、合成して開ループ特性を求めよ

演習) 開ループ伝達関数のボード線図



■ 開ループ伝達関数

$$L(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)} = \frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$



まとめ

- 代表的な制御器であるPID制御器について復習してその近似を折れ線でボード線図に示し、PID制御器の周波数特性について学んだ。
- PI制御器を含むシステムの開ループ特性をボード線図で表した。

来週からの予定



1. 線形システムの時間応答 ラプラス変換、ステップ応答、インパルス応答
2. 周波数応答(1) ゲイン、位相特性、ボード線図の読み方
3. 周波数応答(2) 基本要素とボード線図演習
4. 周波数応答(3) ボード線図の合成、折れ線近似
5. 周波数応答(4) PID制御のボード線図
6. 周波数応答(5) 閉ループと開ループの周波数特性、ベクトル軌跡
7. 制御系の安定判別(1) ナイキストの簡易判別法
8. 制御系の安定判別(2) 位相余裕とゲイン余裕
9. 総合演習 前半のまとめと総合演習
10. フィードバック制御系の設計(1) 望ましい制御系の構成と特徴
11. フィードバック制御系の設計(2) ループ整形法
12. フィードバック制御系の設計例(1) モデル化と設計仕様
13. フィードバック制御系の設計例(2) 設計仕様を満たす設計
14. フィードバック制御系の設計例(3) ロバスト安定性、感度関数
15. まとめ

第7回 安定判別1: フィードバック系の安定性

制御工学II

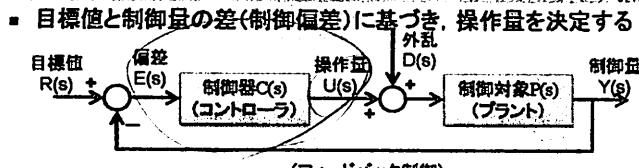


今回7: 安定判別(1) フィードバック系の安定性

- 開ループ特性と応答
- 制御特性
- 開ループと内部安定
- ナイキストの安定判別法

前回6: ベクトル軌跡

フィードバック制御の構成



この制御系の伝達関数は、

$$\begin{aligned} G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1+P(s)C(s)} & G_{ud}(s) &= -\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \\ G_{yr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} & G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \end{aligned} \quad (8.1)$$

いずれも $C(s)$ を含んでいるので、制御対象 $P(s)$ が不安定であっても、制御器 $C(s)$ によって安定化できる。分母が同じに注目

開ループ特性

- フィードバックループを切断して得られる伝達関数 $L(s)=C(s)P(s)$ を開ループ伝達関数(Open-loop Transfer Function)という。
- 前ページの伝達関数はいずれも閉ループ伝達関数(Closed-loop Transfer Function)であるが、その分母は $1+C(s)P(s)=1+L(s)$ となり、この分母多項式の極の 任意 が負であれば安定であることはすでに学んだ。

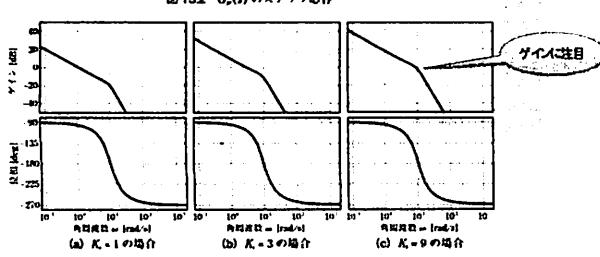
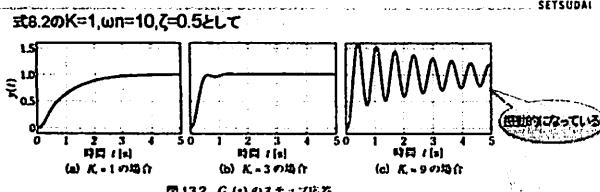
では、開ループ特性を見ることで安定を判別することはできないか、学ぶこととする。

まず2次遅れ要素のプラントに1制御を加えたループを見てみよう。

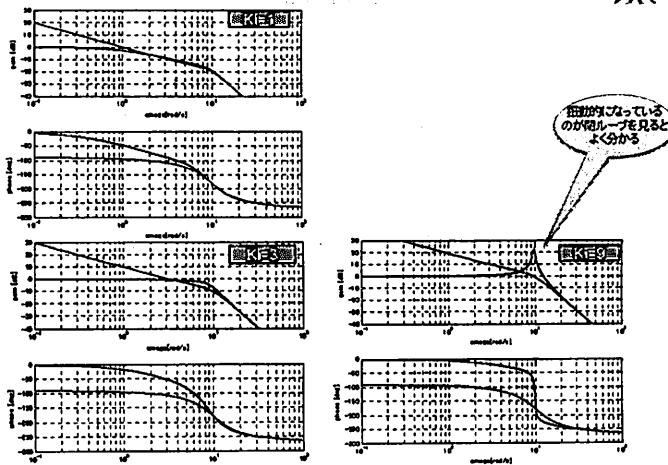
$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad C(s) = \frac{K_i}{s} \quad \text{とすると}$$

$$G_y(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{K_i K \omega_n^2}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n s + K_i K \omega_n^2}, \quad (7.2) \quad \text{となる。}$$

開ループ伝達関数と安定性



開ループと閉ループ特性



閉ループ極と内部安定



還送差は閉ループ極／開ループ極



開ループ伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ のそれぞれの項を

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (7.3), \quad C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (7.4)$$

とすると開ループの特性方程式は $D_p(s)D_c(s)=0$ であり、その極は $\boxed{\text{ }}\text{極}$ と呼ばれる。式7.3, 7.4を7.1式の4つの閉ループ伝達関数に適用すると

$$\left. \begin{aligned} G_{ux}(s) &= \frac{D_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}, \quad G_{ud}(s) = \frac{N_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)} \\ G_{yr}(s) &= \frac{N_p(s)N_c(s)}{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)}, \quad G_{yd}(s) = \frac{N_p(s)D_c(s)}{N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s)} \end{aligned} \right\} (7.5)$$

となる。これらに共通する特性方程式

$$N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = 0 \quad (7.6)$$

の極を $\boxed{\text{ }}\text{極}$ といい、このすべての極の実部が負なら式7.5の4つの伝達関数がすべて安定=内部安定となる。

この時、制御対象 $P(s)$ は厳密にプロバーであり、コントローラ $C(s)$ はプロバーであるとする。

$\boxed{\text{ }}\text{極} / \text{開ループ極}$

開ループ伝達関数 $L(s)$ の分母・分子表現からえられる

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{N_p(s)N_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \quad (7.7)$$

を、閉ループの特性方程式の左辺 $1+L(s)$ に代入すると $\boxed{\text{ }}$ といわれる

$$\begin{aligned} 1+L(s) &= \frac{D_p(s)D_c(s)+N_p(s)N_c(s)}{D_p(s)D_c(s)} \\ &= \frac{s(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \end{aligned} \quad (7.8)$$

となる。この時 p_1, p_2, \dots, p_n は式7.7の極と同じであり、分母は開ループ極を与える。

また、分子の z_1, z_2, \dots, z_n は前ページの閉ループ極と同じであり、還送差の分母分子はともに既知の $\boxed{\text{ }}\text{極}$ と $\boxed{\text{ }}\text{極}$ から構成されていることが分かる。

$\boxed{\text{ }}\text{開ループ極} / \boxed{\text{ }}\text{閉ループ極}$

ナイキスト線図(開ループ伝達関数のベクトル軌跡)



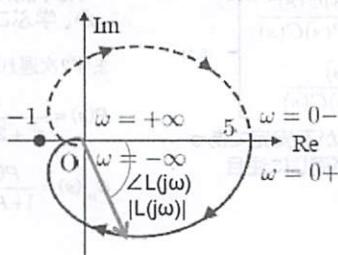
開ループ伝達関数 $P(j\omega)C(j\omega)$ は複素関数であり、ある任意の $\omega [\text{rad/s}]$

に対して複素平面 ($P(j\omega)C(j\omega)$ 平面と呼ぶこともある) 上の一つのベクトルを表す。

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= P(j\omega)C(j\omega) = \operatorname{Re}\{L(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{L(j\omega)\} \quad (\text{直交座標表示}) \\ &= |L(j\omega)| \exp\{j\angle L(j\omega)\} \quad (\text{極座標表示}) \end{aligned}$$

$\omega [\text{rad/s}]$ を 0 から ∞ まで変化させた

ときの複素ベクトル $L(j\omega)$ の先端が複素平面上に描くのがベクトル軌跡であったが、さらに実数軸に対して上下対称に描いたものをナイキスト線図という。



ナイキストの安定判別法



[ステップ1]

開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)C(j\omega)$ を、周波数 $\omega=0 \sim \infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。

[ステップ2]

ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1, 0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。(反時計方向に1回の場合 $N=-1$)

[ステップ3]

開ループ伝達関数 $P(s)C(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。

[ステップ4]

閉ループ系の不安定な極の数は $Z=N+\Pi$ となる。したがって、 $Z=0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

ナイキスト安定判別法の利点



$$\text{安定} \Leftrightarrow Z=0 \Leftrightarrow -N=\Pi$$

- ナイキスト軌跡が点(-1,0)のまわりを反時計方向にまわる回数が、開ループ伝達関数の不安定極の個数に等しいならば、制御系は安定である。

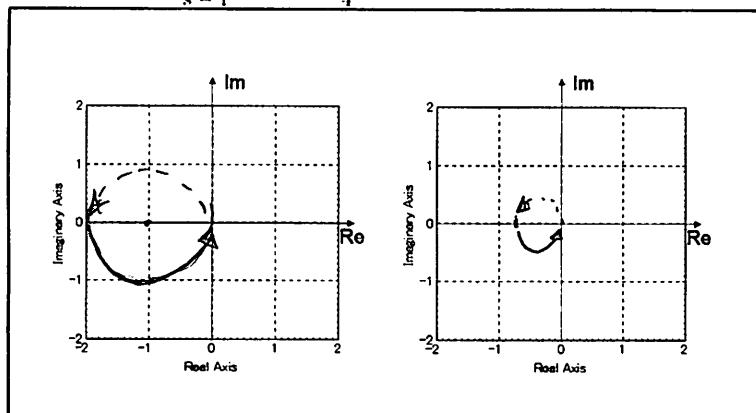
ナイキスト安定判別法の利点

- ▶ ループを閉じる前の開ループ伝達関数の周波数応答によって図的に制御系(閉ループ系)の安定性を判別できる
- ▶ 計算の必要がなく、次数の高い系やむだ時間系にも容易に適用できる
- ▶ 実測データに基づいて判定できる
- ▶ 直感的に分かりやすく、さらに安定余裕も調べられる

演習1

- 閉ループ伝達関数のゲインを変えた時にナイキスト線図がどのように変化するかを示し、安定を判別せよ

$$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K = 2, \frac{3}{4}$$



$$L(j\omega) = \dots, |L(j\omega)| = \dots, \angle L = \dots$$

ω	$L(j\omega)$	$ L(j\omega) $	$\angle L(j\omega)$
0	$-2-j0$	2	-180
$1/T$	$-1-j1$	$\sqrt{2}$	-135
∞	$0-j0$	0	-90

$$L(j\omega) = \frac{-2-j\omega}{\omega^2+1}, |L(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\angle L(j\omega) = \tan^{-1}(\omega)$$

簡単化されたナイキストの安定判別法



開ループ伝達関数が安定な場合 $\Pi=0$ より

閉ループ不安定極 $Z=0$

となるためには $N=0$ でなければならない ($Z=N+\Pi$) ことから

簡単化されたナイキストの安定判別法

[ステップ1] 閉ループ伝達関数の極の中に、その実部が正となるものがないことを確認する。

[ステップ2] 閉ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)C(j\omega)$ を角周波数 $\omega=0 \sim +\infty$ の範囲で描く。

[ステップ3] ω を 0 から ∞ へ変化させたとき、この閉ループ伝達関数のベクトル軌跡が点(-1,0)をつねに左に見るようになれば、系は安定である。また、右に見れば系は不安定となる。

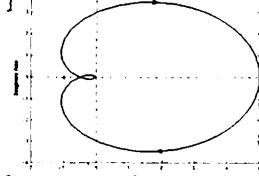
ナイキスト線図の使用例



- 下記の開ループ伝達関数からナイキスト線図を描き安定を判別せよ

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

[ステップ1]



[ステップ2] $N = 0$

[ステップ3] $\Pi = 0$

[ステップ4] $Z = N + \Pi = 0$ 制御系は安定



$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega-1} = \frac{\frac{3}{4}}{j\omega-1} = \frac{\frac{3}{4}}{j\omega-1}$$

極 = +1 (不安定な点)

$$L(0) = \frac{2}{0-1}, \frac{\frac{3}{4}}{0-1} = -2, -\frac{3}{4}$$

$$|L(j\omega)| = \sqrt{\omega^2+1}$$

$K = \frac{3}{4}$

$$L(j\omega) = \dots, |L(j\omega)| = \dots, \angle L = \dots$$

ω	$L(j\omega)$	$ L(j\omega) $	$\angle L(j\omega)$
0	$-3/4-j0$	$3/4$	-180
$1/T$	$-3/8-j3/8$	$3\sqrt{2}/8$	-135
∞	$0-j0$	0	-90

極 $s = 1$

$N = 0$

$\Pi = 1$

$Z = 1$

(不安定)

簡易判別法



- 閉ループ特性が安定であるとして簡易判別法を適用する

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad K = 3, 6, 12$$

$K = 3$ のとき

点(-1,0)を常に左に見る

⇒ 安定

$K = 6$ のとき

ちょうど点(-1,0)を通過する

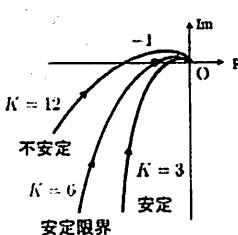
⇒ 安定限界

$K = 12$ のとき

点(-1,0)を右にみるようになる

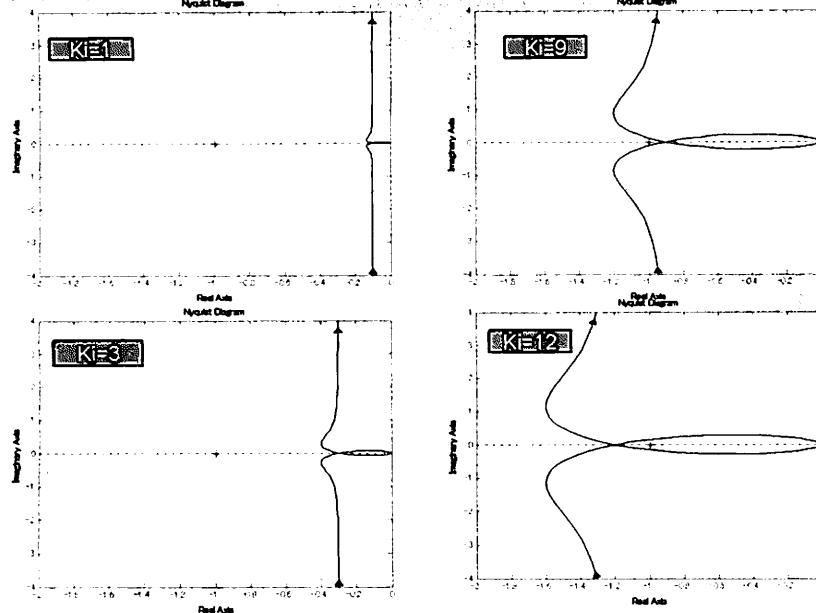
⇒ 不安定

安定限界

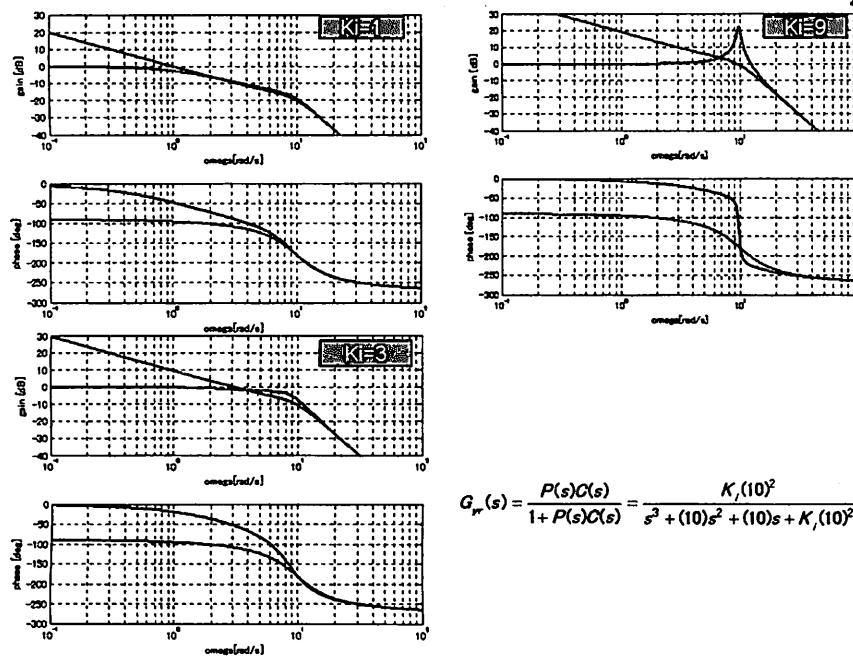


ナイキスト線図の例

式8.2の $K=1, \omega_n=10, \zeta=0.5$ として



再度ボード線図と比較しておこう



$$G_{pr}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{K_f(10)^2}{s^3 + (10)s^2 + (10)s + K_f(10)^2}, \quad (8.2)$$



まとめ



- フィードバック系の安定性について考察し、
- 内部安定性について学習した。
- 開ループ伝達関数が与えるベクトル軌跡が安定性の判別に便利であり、これを拡張したナイキスト線図による安定判別を学んだ。
- さらにシステムの安定性を仮定するともっと簡単に安定判別が可能となり、ベクトル軌跡が $(-1, j0)$ の点を右に見るか左に見るかで判別が可能である。

第8回 安定判別2 ゲイン余裕・位相余裕

制御工学II



ナイキスト簡易安定判別法の復習
位相交差周波数、ゲイン交差周波数
ゲイン余裕、位相余裕
ボード線図を用いたゲイン余裕、位相余裕

- 前回7: 安定判別(1) フィードバック系の安定性
 - 開ループ特性と応答
 - 制御特性
 - 開ループと内部安定
 - ナイキストの安定判別法

簡単化されたナイキストの安定判別法



開ループ伝達関数が安定な場合 $\pi = 0$ より

閉ループ不安定極 $Z = 0$

となるためには $N = 0$ でなければならない ($Z = N + \pi$) ことから

簡単化されたナイキストの安定判別法

[ステップ1] 閉ループ伝達関数の極の中に、その実部が正となるものがないことを確認する。

[ステップ2] 閉ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)C(j\omega)$ を角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く。

[ステップ3] ω を 0 から ∞ へ変化させたとき、この閉ループ伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ をつねに左に見るよう動くならば、系は 安定 である。また、右に見れば系は 不安定 となる。

簡易判別法



■開ループ特性が安定であるとして簡易判別法を適用する

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad K = 3, 6, 12$$

$K = 3$ のとき

点 $(-1, 0)$ を常に左に見る

\Rightarrow 安定

$K = 6$ のとき

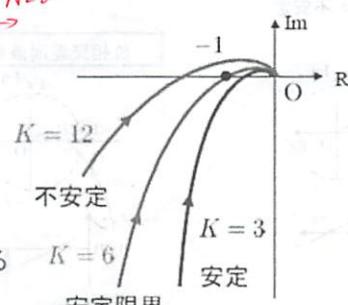
ちょうど点 $(-1, 0)$ を通過する

\Rightarrow 安定限界

$K = 12$ のとき

点 $(-1, 0)$ を右にみるようになる

\Rightarrow 不安定



$$\text{N} = 1 \rightarrow \Sigma = \pi + \pi = 1 + 0 = 1$$

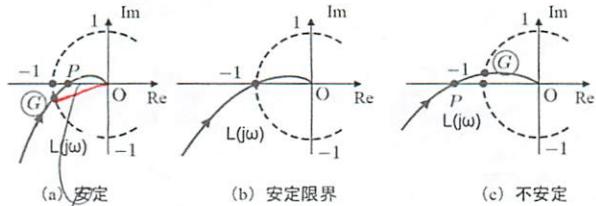
差周波数

は高かったゲインが周波数が上がるにつれて小さくなり
ようど1になる点、すなわち単位円を横切る周波数を
ゲイン交差周波数 ω_{gc} と呼び $|L(j\omega_{gc})| = 1$ である。

この時 $\angle L(j\omega_{gc}) > -180^\circ$, $|\angle L(j\omega_{gc})| < 180^\circ$ 安定

$\angle L(j\omega_{gc}) = -180^\circ$ 安定限界

$\angle L(j\omega_{gc}) < -180^\circ$ 不安定 である。



これが

位相交差周波数

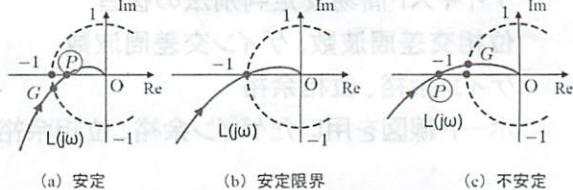
低周波から位相が遅れ、位相の遅れがちょうど -180° になる点、すなわちベクトル軌跡が実軸を横切る周波数を位相交差周波数 ω_{pc} と呼び $\angle L(j\omega_{pc}) = -180^\circ$ である。

この時 $|\angle L(j\omega_{pc})| < 1$ 安定

$|\angle L(j\omega_{pc})| = 1$ 安定限界

$|\angle L(j\omega_{pc})| > 1$ 不安定

である。



ナイキスト線図で見たゲイン余裕と位相余裕

■ベクトル軌跡が点 $(-1, j0)$ から離れていれば安定であり、不安定になるまでの余裕を安定余裕という

ベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ からある程度離れて
いるならば、安定余裕がある。

ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと
制御系が不安定になるか。

$$GM = \frac{1}{OP} (\text{dB})$$

$$= 0 \text{dB} - 20 \log_{10} |L(j\omega_{pc})|$$

位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れると
制御系が不安定になるか。

$$PM = \angle GOP (\text{°})$$

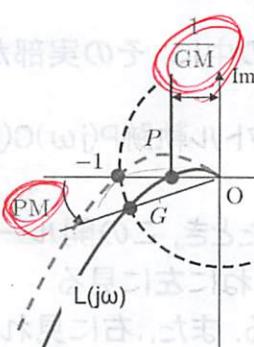
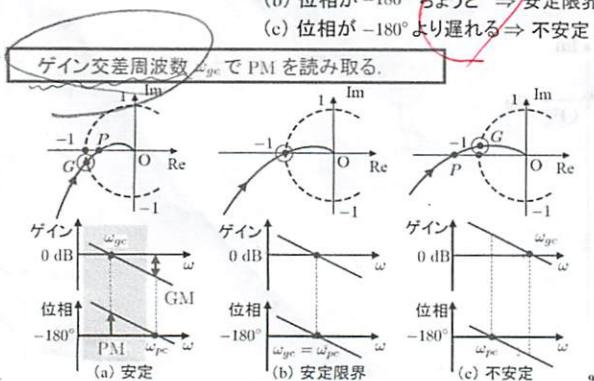


図 ゲイン余裕、位相余裕

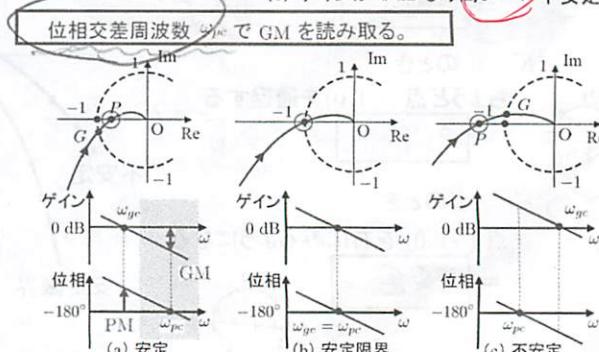
ボード線図と対比1

- ボード線図での読み取り (a) 位相が -180° より進む \Rightarrow 安定
(b) 位相が -180° ちょうど \Rightarrow 安定限界
(c) 位相が -180° より遅れる \Rightarrow 不安定



ボード線図と対比2

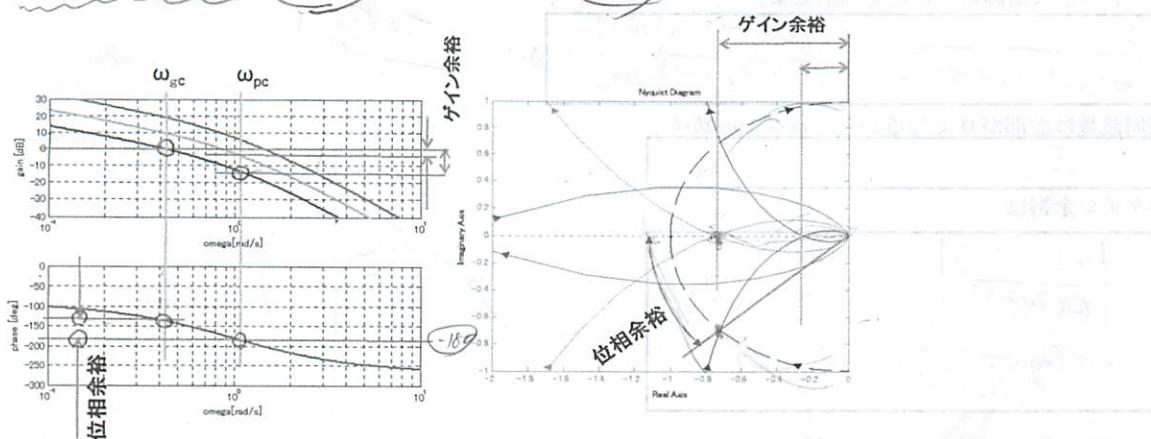
- $G = 20 \log_{10} |L(j\omega_{pc})|$
- (a) ゲインが 0 dB より低い \Rightarrow 安定
(b) ゲインが 0 dB ちょうど \Rightarrow 安定限界
(c) ゲインが 0 dB より高い \Rightarrow 不安定



ボード線図とナイキスト線図の比較



- ゲイン交差周波数で -180° までの位相角=位相余裕を見る
- 位相交差周波数で0dBまでのゲイン=ゲイン余裕を見る



ボード線図の事例



- 虚軸に極を持つ安定な事例
(虚軸上に極がある場合)

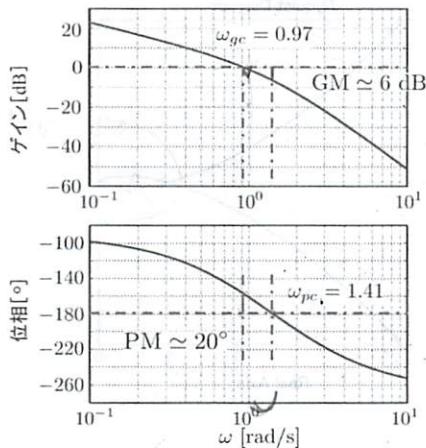
$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (K=3)$$

ゲイン交差周波数
 $\omega_{gc} \approx 0.97$

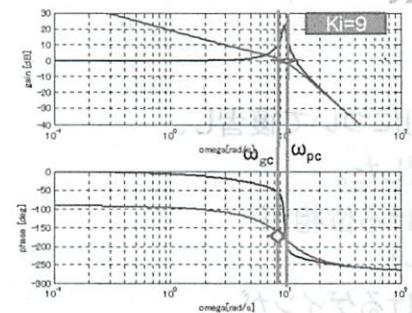
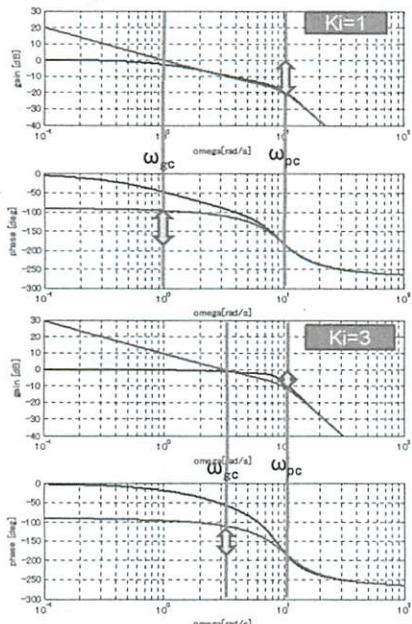
位相余裕
 $PM \approx 20^\circ$

位相交差周波数
 $\omega_{pc} \approx 1.41$

ゲイン余裕
 $GM \approx 6 \text{ dB}$



ボード線図で見たゲイン余裕と位相余裕



$$G_{yy}(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} = \frac{K_i(10)^2}{s^3 + (10)s^2 + (10)s + K_i(10)^2}, \quad (8.2)$$

演習1



開ループ伝達関数を $L(s) = \frac{20}{s(s^2 + 5s + 2)}$ とした場合、ゲイン余裕を求め、

さらにフィードバック制御系の安定を判別せよ。

$$1) L(j\omega) = \frac{20}{j\omega((j\omega)^2 + 5j\omega + 2)} = \frac{20[-5\omega^2 + j(\omega^3 - 2\omega)]}{(-5\omega^2)^2 + (\omega^3 - 2\omega)^2}$$

2) 位相交差周波数は虚部が0であるから、 $\omega^3 - 2\omega = 0$ から

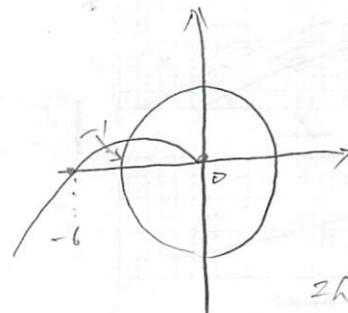
$$\omega_{pc} = \sqrt[3]{2}$$

3) この時のゲイン余裕は

$$|L(j\omega_{pc})| = \left| \frac{20[-5\omega_{pc}^2]}{(-5\omega_{pc}^2)^2} \right| = \left| \frac{20}{-5 \cdot 2} \right| = 2$$

$$GM = 20 \log_{10} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -6 \text{ [dB]}$$

$$\begin{aligned} s = \frac{-5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 2}}{2 \cdot 1} &= \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} \\ H &= \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} \\ &= -\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \text{ LO}, \quad \frac{-5 + \sqrt{17}}{2} \text{ HI} \end{aligned}$$

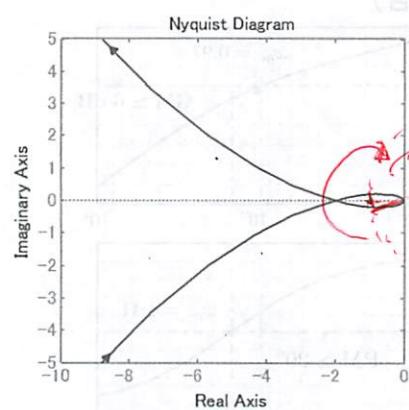
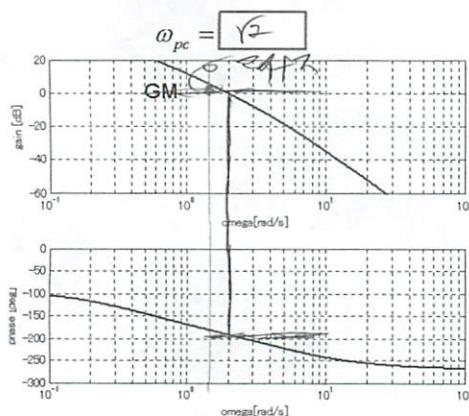


不安定
(?)

演習1…続き



■ 安定判別はゲイン余裕がマイナスとなって 不安定



$$\begin{aligned} N &= -1 \\ \pi &= 10 \\ N &= 0 \\ \pi &= 1 = 2 = 2 \end{aligned}$$

まとめ



- 簡略化されたナイキストの安定判別について復習し、
- 位相余裕・ゲイン余裕について学習した。
- 位相余裕はゲイン交差周波数における位相が -180° に至るまでの遅れ角をいい、
- ゲイン余裕は位相交差周波数におけるゲインが 0dB を越さない大きさをいう。
- これらをボードで線図で見て、安定を判別することを学習した。

第11回 フィードバック制御系の設計(1) 制御系の設計指標

制御工学 II



制御特性

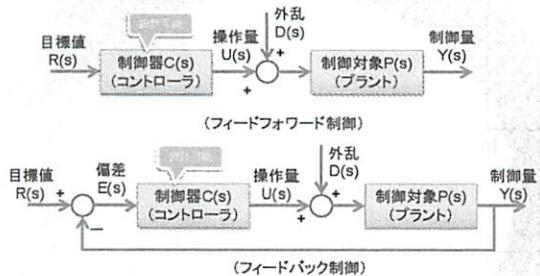
時間応答の設計指標

周波数応答の設計指標

■前回10: 総合演習答合わせ

制御系の設計

- 制御系にはフィードフォワード制御系とフィードバック制御系がある(講義01)



- 制御目的に合うようにコントローラを設計する
→制御仕様を満足するように
コントローラ $C(s)$ の入出力を決定する

制御対象による制御系の分類

■サーボ系

- 例) ハードディスクのヘッド、ロボットアーム、航空機の自動操縦
- 合わせる制御。物体の位置や姿勢を、目標とする位置や姿勢の変化に追従させる。追従制御。
- 目標値の変化にすばやく追従できることが望ましい。
- 語源: ラテン語の召使い "Servus" より

■プロセス制御系

- 例) 化学プラント、製鉄所、電力プラント
- プロセスの状態を保つ制御。温度や圧力、水位、濃度などを一定に保つ。定值制御。
- 外乱があっても制御量を保てることが重要。
- 一般に、サーボ系に比べると応答が遅いが大規模。

制御特性

- まずは **安定** であること

■速応性

- 目標値が変化したときに制御量がすばやく目標値の変化に追従すること

■減衰性

- 目標値が変化してから、十分時間が経過して定常状態に達したときの制御量(定常値)に、すばやく収束すること

■定常特性

- 定常値と目標値との差である制御偏差が小さいこと

通常、安定性と速応性は相反する

これらを定量的に評価するものとして、いくつかの数値指標が用いられる。

制御特性の設計指標(1)



■時間応答の指標

- ① 行き過ぎ量(Overshoot) O_s
- ② 行き過ぎ時間(Peak Time) T_p
- ③ 遅れ時間(Delay Time) T_d
- ④ 立上り時間(Rise Time) T_r
- ⑤ 整定時間(Settling Time) T_s
- ⑥ 振幅減衰比(Amplitude Damping Ratio) $A_r = \frac{O_1}{O_s}$
- ⑦ 定常偏差(Steady-state Error) e_s
・定常位置偏差、定常速度偏差、定常加速度偏差
- ⑧ 制御面積(Integral of Absolute Error)

$$= \int_0^\infty |y(t) - y(\infty)| dt$$

1次遅れ要素の時間応答指標



1次遅れ要素の伝達関数 $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$

単位ステップ応答 $y(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$

■行き過ぎ量 O_s および行き過ぎ時間 T_p は生じない

定常値の $X\%$ までに至る時間を t_s とすると $1 - e^{-\frac{1}{T}t_s} = \frac{X}{100}$ から

$$t_s = -T \ln \frac{100-X}{100}$$

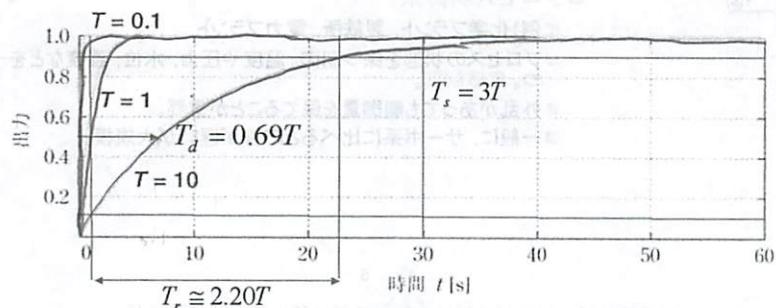
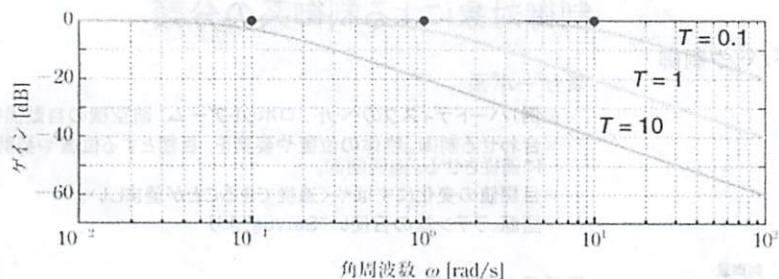
立上り時間 T_r 及び遅れ時間 T_d 、整定時間 T_s は

$$T_r = T_{90} = T \left(\ln \frac{100-90}{100} - \ln \frac{100-10}{100} \right) = 2T \ln 3 \approx 2.20T$$

$$T_d = T_{50} = -T \ln \frac{100-50}{100} = T \ln 2 = 0.69T$$

$$T_s = -T \ln \frac{5}{100} = 3T$$

1次遅れ要素の時間応答指標



1次遅れ要素の時間応答指標



ステップ入力に対する定常偏差



フィードバック系の一巡伝達関数を

$$L(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

の1次遅れとすると

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t) - y(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \{r(s) - y(s)\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ r(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)} r(s) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{1+L(s)} \right\} r(s)$$

今、単位ステップが目標値とすると定常位置偏差は

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{1+L(s)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+L(0)}$$

最終値の定理

$L(0) = K$ であり、ゲイン K を十分大きくすれば定常位置偏差はゼロに近づく。またこの時の K を位置偏差定数 K_p という。

1次遅れ要素の周波数応答指標



2次遅れ要素の周波数応答指標



1次遅れ要素の周波数応答は $G(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega}$ であるから

$|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K$ である。このとき、帯域幅 ω_b は

$|G(j\omega_b)| = K/\sqrt{2}$ から

$$\omega_b = \frac{1}{T} \text{ となり、折れ点周波数を与える。}$$

よって時定数で与えられる時間領域の指標は帯域幅で置き換えることができる。

$$T_r \approx 2.20T = \frac{2.20}{\omega_b}, T_d \approx 0.69T = \frac{0.69}{\omega_b}, T_s \approx 3T = \frac{3}{\omega_b}$$

簡単のためにゲイン K は 1 として

$$\text{ピークゲイン } M_p \text{ は } |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{(\omega\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(\omega\omega_n) + \omega_n^2}$$

の最大値であり、 $d|G(j\omega)|/d\omega = 0$ より、ピーク角周波数

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

と求められ

$$M_p = \max_{\omega} |G(j\omega)| = |G(j\omega_p)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

となる。 ω_p が存在するのは $1 - 2\zeta^2 > 0$ であるから

$$0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$$

経験的に望ましい減衰係数の範囲は $\zeta = 0.3 \sim 0.6$ といわれ
このとき、 $M_p \approx 1.04 \sim 1.75$ となる。

ステップ応答から伝達関数の推定



2次遅れ要素 $G(s) = \frac{K w_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2}$ を仮定してパラメータを求める。

ステップ応答が与えられているとすると

O_s, O_1 を求めて、振幅減衰比 $A_r = e^{-\frac{2\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$ から

$$z = \sqrt{\frac{(\ln A_r)^2}{4p^2 + (\ln A_r)^2}} \quad \text{から } z \text{ をもとめ}$$

行き過ぎ時間 $T_p = \frac{p}{w_n \sqrt{1-z^2}}$ から角固有振動数は

$$w_n = \frac{p}{T_p \sqrt{1-z^2}}$$

で得られる。

まとめ



■位相余裕・ゲイン余裕について復習した。

■フィードバック系の設計について復習し、

■設計の指標を学んだ。

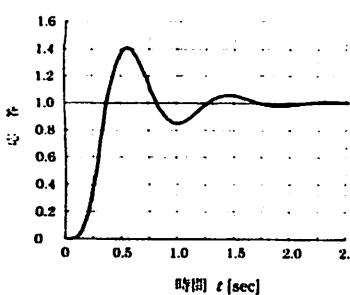
■時間応答の指標では、1次遅れ要素、2次遅れ要素を考え、そのステップ応答を用いて設計指標を求めた。

■周波数応答の指標では、1次遅れ要素、2次遅れ要素についてその周波数での指標と時間応答の指標を結びつけて考察した

伝達関数の推定演習



■以下のステップ応答は2次遅れ系と推定されるが、その伝達関数を推定せよ



2次遅れ要素 $G(s) = \frac{K w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$

ステップ応答から O_s, O_1 を求めて、

$O_s = 0.48, O_1 = 0.05$ から $A_r = \frac{0.05}{0.48} = \frac{1}{9.6}$

ζ, ω_n , $\zeta = \sqrt{\frac{(\ln A_r)^2}{4\pi^2 + (\ln A_r)^2}} = \sqrt{\frac{(-\ln 8)^2}{4\pi^2 + (-\ln 8)^2}}$

→ 3行目で $\zeta = 0.3$

$w_n = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.6 \sqrt{1-0.098^2}} = 5.5 \text{ [rad/sec]}$

得られた。

$$G(s) = \frac{1 - (5.5)^2}{s^2 + 2 \cdot (6.31)(5.5)s + (5.5)^2}$$

$$= \frac{30.25}{s^2 + 3.4s + 30.25}$$

第12回 フィードバック制御系の設計(2) ループ整形法

制御工学 II

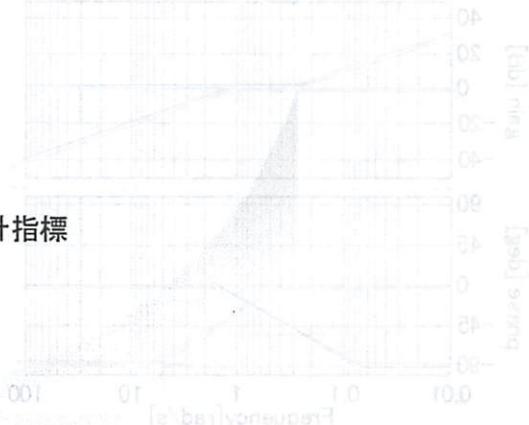


ループ整形法

- PI制御について復習
- 望ましい開ループ周波数特性
- 補償要素とループ整形

■ 前回11:フィードバック系の設計(1)設計指標

- ・ボード線図を用いたゲイン余裕、位相余裕の復習
- ・制御特性
- ・時間応答の設計指標
- ・周波数応答の設計指標



1-1 比例制御を基準としたPID制御



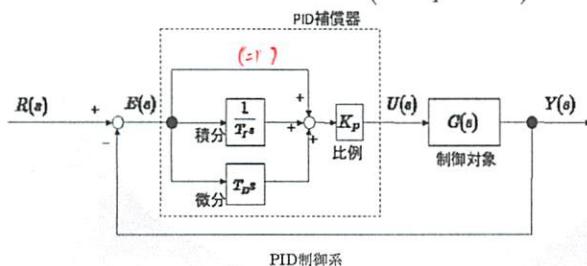
PID制御は比例、積分、微分制御の長所を組み合わせたもの。その操作量は

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad \text{であるが、} K_p, K_I, K_D \text{を、} K_p \text{を基準として}$$

$$K_I = \frac{K_p}{T_I}, K_D = K_p T_D \quad (T_I: \text{積分時間}, T_D: \text{微分時間}) \text{と表すことが多い。}$$

この形式に改めると $u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$ となり、

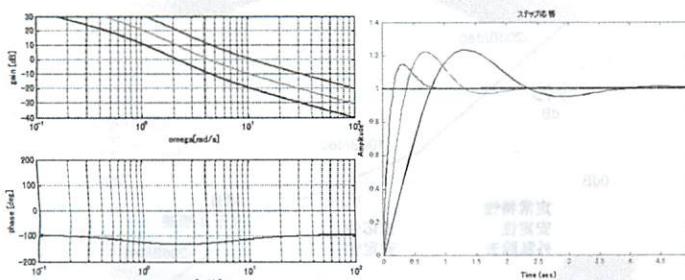
更にラプラス変換を行って $U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s)$ が得られる。



操作	初期値	目標値	最終値
操作量	0.0	0.0	0.0
位置	0.0	0.0	0.0
速度	0.0	0.0	0.0
加速度	0.0	0.0	0.0

1-2 PI制御のゲインと応答特性

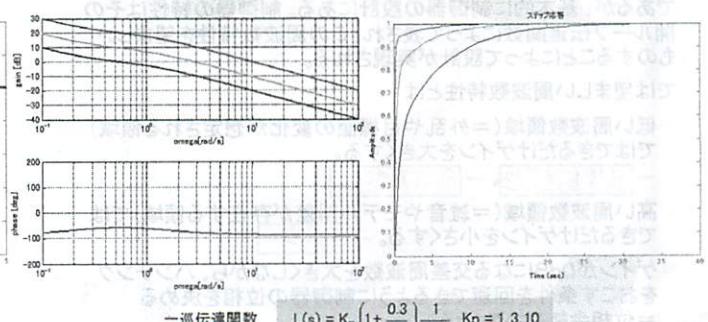
- 1次遅れのシステムに対して積分ゲインを5で固定したPI制御の特性



$$\text{一巡伝達関数} \quad L(s) = K_p \left(1 + \frac{5}{s} \right) \frac{1}{s+1}, \quad K_p = 1, 10, 100$$

1-3 PI制御のゲインと応答特性

- 1次遅れのシステムに対して積分ゲインを0.3で固定したPI制御の特性

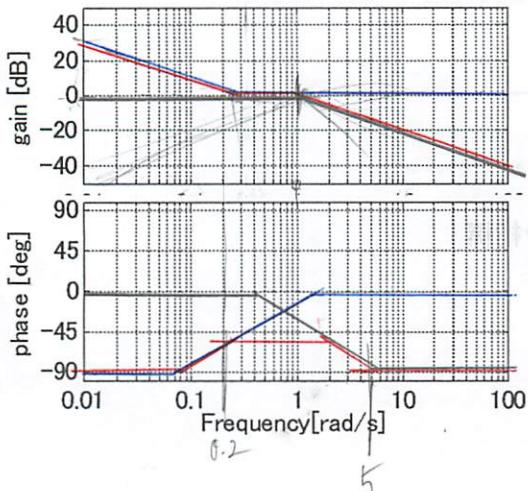


$$\text{一巡伝達関数} \quad L(s) = K_p \left(1 + \frac{0.3}{s} \right) \frac{1}{s+1}, \quad K_p = 1, 3, 10$$

PI制御器の演習

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{0.3}{s} \right), P(s) = \frac{1}{s+1}$$

$K_p = 1$ としてそれぞれのボード線図を折れ線近似で示せ



$$C(s) = 1 + \frac{0.3}{s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$L(s) = CP = \left(1 + \frac{0.3}{s} \right) \left(\frac{1}{s+1} \right)$$

$$\frac{1}{s+1} f = \frac{0.3}{s+1}$$

$$K_I = \frac{K_p}{T_L} = \frac{1}{T_L} = 0.3$$

PI制御器の演習

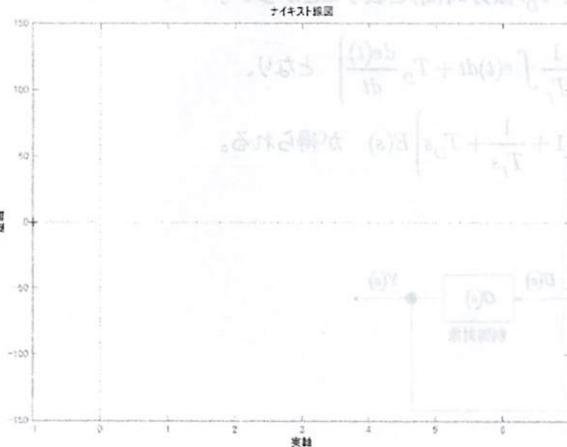
$$\text{一巡伝達関数が } L(j\omega) = K_p \frac{0.7 - j(\omega + 0.3\omega^{-1})}{\omega^2 + 1}$$

$\omega = 0.4\pi rad/s \rightarrow$

$K_p=1,10$ とするナイキスト線図を描け

ω	$G(j\omega)$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0			
$1/T$			
∞			

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$



2-1 開ループ伝達関数の理想

制御系の設計はセンサやアクチュエータに依存するのは明らかであるが、基本的に制御器の設計にある。制御器の特性はその開ループ伝達関数によって表され、この周波数特性を望ましいものすることによって設計が実現される。

では望ましい周波数特性とは

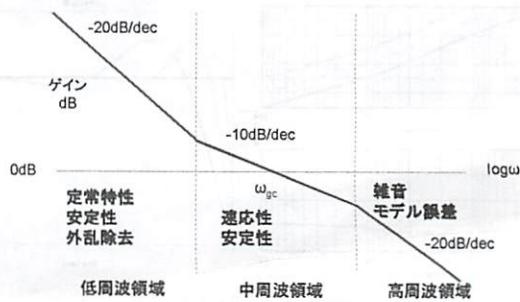
■ 低い周波数領域(=外乱や目標値の変化が想定される領域)ではできるだけゲインを大きくする。
→ 目標値追従性 → 外乱遮断

■ 高い周波数領域(=雑音やモデル誤差が存在する領域)ではできるだけゲインを小さくする。→ 素性

■ ゲインが0dBになる交差周波数を大きくしながら、ハンティングをおこす条件を回避できるように制御器の位相を決める
=位相余裕を大きくとる。→ 安定性

2-2 望ましい周波数特性

■ 開ループ伝達関数



3-1 代表的な補償要素



- 望ましい周波数特性を得るためにのツール=補償要素
- これらをループに適用した時の特徴を知ることが必要

ゲイン 補償

$$G_c(s) = K$$

■ 位相進み 補償

$$G_c(s) = \frac{K(1 + \alpha Ts)}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$

$$\frac{1}{T} = 0.3$$

■ 位相遅れ 補償

$$G_c(s) = \frac{K(1 + \beta Ts)}{1 + Ts}, \quad 0 < \beta < 1$$

$$\frac{1}{T} = -0.3$$

PID 補償

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

$$2 \frac{10}{3} \quad \frac{1}{T_I s} = \frac{0.1}{3}$$

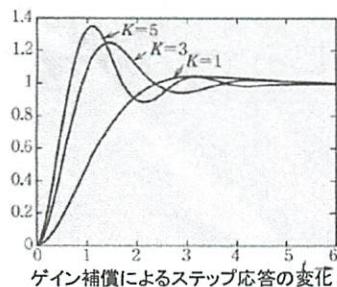
+ 0.34 ...

3-2 ゲイン補償



■ ゲインを上げると速応性が良くなるが、減衰性が悪くなる。逆に、ゲインを下げる減衰性は良くなるが、速応性が悪くなる。

■ ゲインを下げることで、システムの安定度を高めることができる。

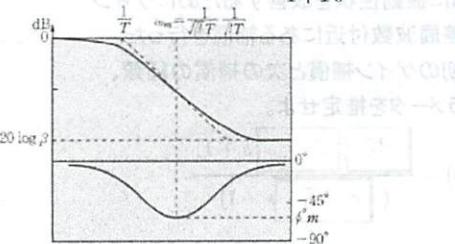


$$G_c(s) = K$$

3-3 位相遅れ補償

- 低周波領域でゲインを大きくする。また、位相が ω_m 周辺で遅れる。
- 低周波領域でのみゲインを大きくすることで、減衰性を犠牲にせずに定常特性を改善する。

$$G_c(s) = \frac{K(1 + \beta Ts)}{1 + Ts}, \quad 0 < \beta < 1$$



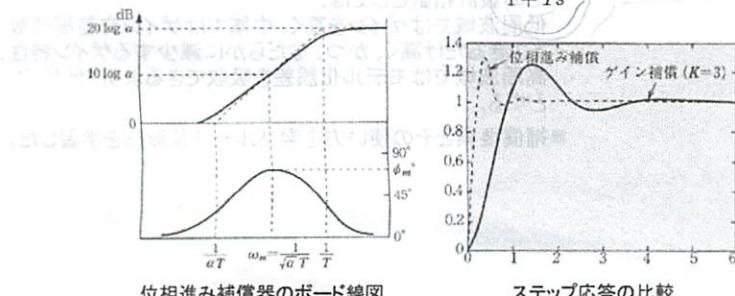
位相遅れ補償器のボード線図

3-4 位相進み補償



■ 位相を ω_m 周辺で進ませる。高周波領域でゲインを増大させる。
■ 位相を進ませることで位相余裕を改善し、減衰性を確保しつつ、速応性を改善することができる。

$$C(s) = \frac{K(1 + \alpha Ts)}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$



位相進み補償器のボード線図

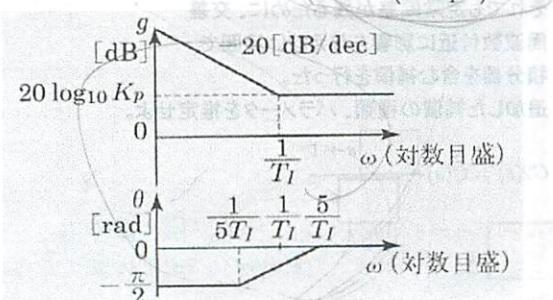
ステップ応答の比較

3-5 PI補償



- 高周波領域では変化がないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
- 積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
- 位相遅れが安定性を損なう恐れもある。

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$



4-1 ゲイン補償の適用例

制御対象 $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ に対して

ゲイン補償 $C(s) = K$ を $K = 1, 3, 10$

に対して行った。

結果、速応性は上がったが
が減少して、振動的になった。

ゲイン交差周波数 位相裕度

$$\omega_{gc} = 0.99 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{gc} = 1.59 \text{ rad/s}$$

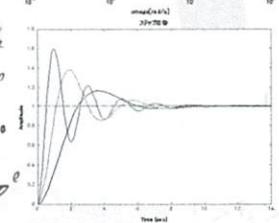
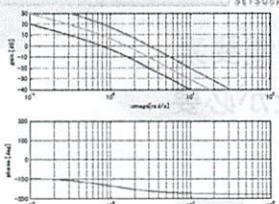
$$\omega_{gc} = 3.08 \text{ rad/s}$$

位相裕度

$$P_m = 51.8^\circ$$

$$P_m = 32.1^\circ$$

$$P_m = 18.0^\circ$$



4-2 位相進み補償の適応例

制御対象 $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ に対して

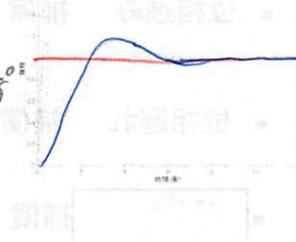
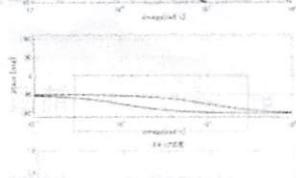
ゲイン補償 $C(s) = 10$ を行った制御系

について、付近の位相を進め、交差周波数を高くする位相進み補償を行った。

この時の制御器は $C(s) = \frac{10(s+1)}{0.1s+1}$

である。これによって振動的な応答

が消え、速応性も良好になった。



位相進み補償

第13回 フィードバック制御系の設計例(1)

制御工学 II



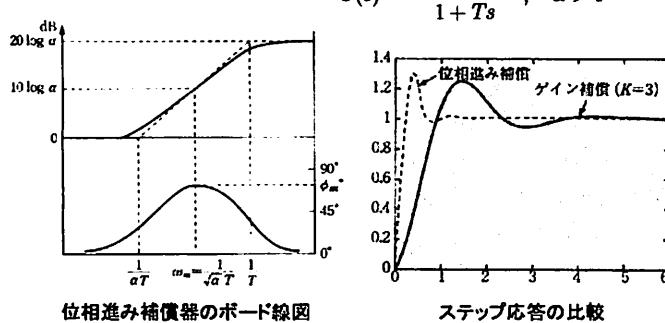
設計例(1) モータを動かしてみる

- ループ整形法の復習
- モータのモデル化
- 設計仕様の設定
- 一巡伝達関数とコントローラの設計
- 設計の評価

小テスト・中間テストで点数の低かった回、あるいは欠席して未提出の回を教材ホルダー小テスト用紙を用いて再解答して14回(1/6)もしくは1/14(火)までに提出BOXに提出してください。減点分の70%を上限(欠席分は50%が上限)として加点評価します。返却は15回(1/20)になります。

再) 位相進み補償

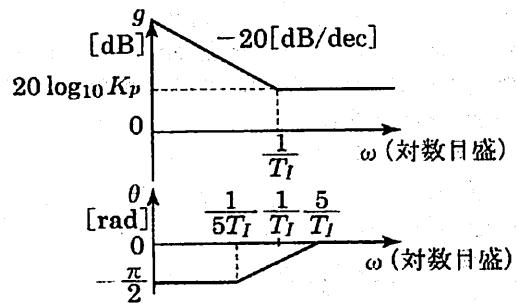
位相を ω_n 周辺で進ませる。高周波領域でゲインを増大させる。
位相を進ませることで位相余裕を改善し、減衰性を確保つつ、
速応性を改善することができる。



再) PI補償

高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
位相遅れが安定性を損なう恐れもある。

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$



再) ループ整形演習1

制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して

あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い

線線の結果を得た。

さらに振動性状を改善するためにゲイン交差周波数付近にある補償を行った。

最初は ①ゲイン補償

次は ②位相進み補償、

パラメータは

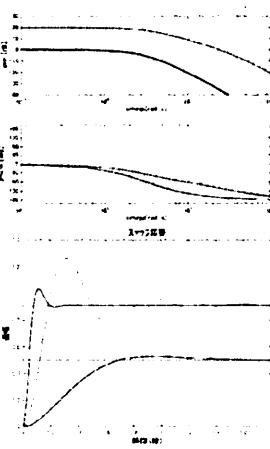
$$C(s) = \frac{10}{(0.03s + 1)(0.3s + 1)}$$

ゲイン補償を行った時の交差周波数と位相余裕

$$w_{gc} = 9.58 \text{ rad/s} \quad P_m = 35.1^\circ$$

が、位相進み補償によって

$$w_{gc} = 24.2 \text{ rad/s} \quad P_m = 60.4^\circ$$



再) ループ整形演習2

制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して

あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い

さらに振動性状を改善するためにゲイン交差周波数付近に位相進み補償を行い

$$C(s) = K \frac{0.3s + 1}{0.03s + 1}$$

それでも定常偏差が残るために、交差周波数付近に影響を与えない範囲:

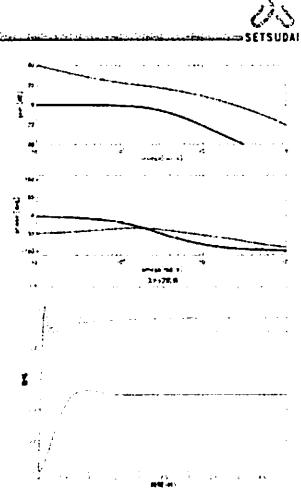
$$\frac{1}{T_I} < \frac{W_{gc}}{5} \text{ となる}$$

積分器を含むPI補償を行った。

追加した補償器は

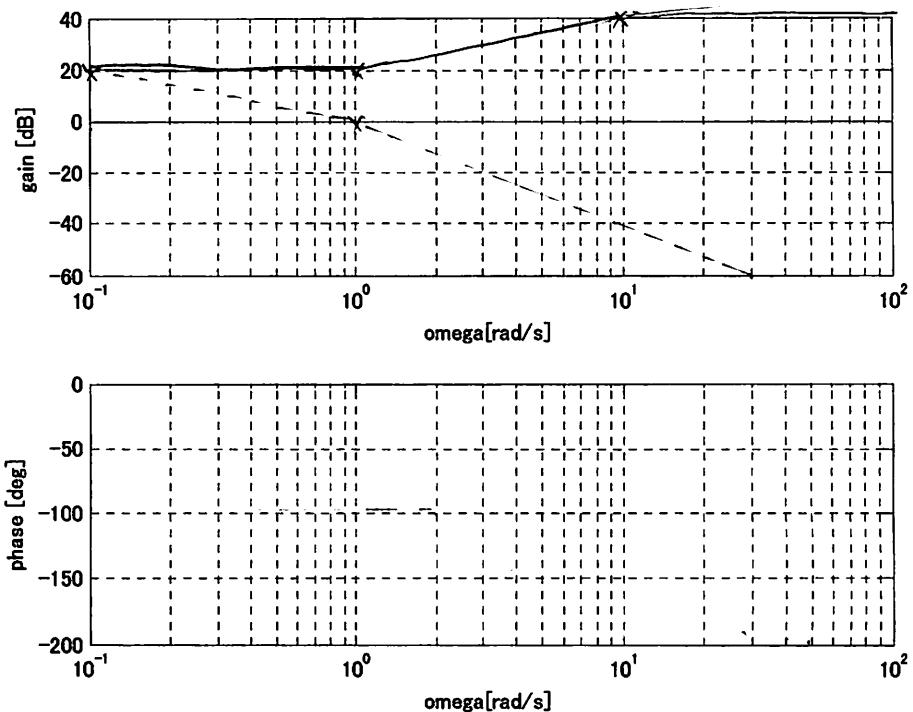
$$C_2(s) = C(s) \frac{\frac{1}{T_I} s + 1}{1 s}$$

位相進み補償 $w_{gc} = 24.2 \text{ rad/s} \quad P_m = 60.4^\circ$
PI 補償 $w_{gc} = 24.2 \text{ rad/s} \quad P_m = 58.0^\circ$



プラントが $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 、制御器が $C(s) = \frac{10(s+1)}{0.1s+1}$ のとき、それぞれをボード線図で示し
開ループ $L(s) = C(s)P(s)$ を図に示せ

補償に関する演習



13.3-1 DCモータのモデル化



電源電圧 v [V], 抵抗 R [Ω], インダクタンス L [H]

ロータ慣性モーメント J [$Nm \cdot s^2/rad$], 粘性抵抗 b [$Nm \cdot s/rad$], トルク定数 K_T [Nm/A]

電圧定数 K_V [$V \cdot s/rad$], 発生トルク T [Nm], 逆起電力 e [V], コイル電流 i [A].

モータ回転角 θ [rad] とすると

$$\begin{aligned} J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} &= K_T i(t) \\ L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) - v(t) - K_V \frac{d\theta(t)}{dt} &= e = K_V \dot{\theta} \end{aligned}$$

ラプラス変換を行い伝達関数を求めると

$$(Js+b)\Theta s = K_T I, \quad (Ls+R)I = V - K_V \Theta s \quad \text{から } I \text{を消して}$$

$$(Js+b)(Ls+R)\Theta s + K_T K_V \Theta s = K_T V \quad \text{を得る.}$$

よって $G(s) = \frac{\Theta s}{V} =$

13.3-2 モデルの同定 Identification



電圧を入力として角速度を出力とする伝達関数は二次遅れ系であった。

これを周波数伝達関数に直し、ボード線図に描いてみる。

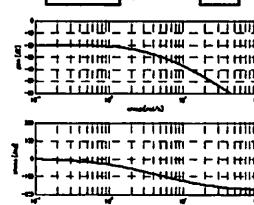
係数は設計図書から

$J = 0.01, b = 0.1, L = 0.5, R = 1, K_T = K_V = 0.01$ とすると

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.08s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

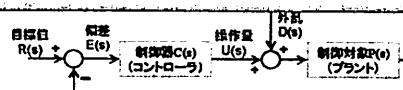
から $\omega_n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, K = 0.1, \zeta = 1.34$ となるからゲインは-20dB

で折れ点は そこから dB / dec で減少する。



求めた伝達関数は実験によつて比較的簡単に計測できる。
計測によって検証し、数式モデルを認証、確定する作業を同定という。

13.4-1 DCモータのフィードバック制御

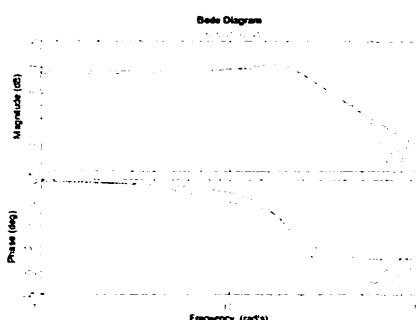


(フィードバック制御)
求めたDCモータを上記のようなフィードバック制御で速度応答を高めることを考える。

【ステップ1】モデル誤差、目標値、外乱などの性質を見積もって設計仕様を設定する。モデル誤差としては高次のシャフトモードなどが存在する。

- ① []に関して、位相余裕が40°以上であること
- ② []に関しては、0.05rad/s以下の低周波で正弦波信号に対する追従誤差を1%以内とする
- ③ []について0.1rad/s以下の正弦波外乱の出力への影響を1%以下に抑えること
- ④ []に関して、100rad/s以上の高周波においてモデル誤差 $|P(j\omega)| < 10$ において安定であること

モデル誤差



13.4-2 【ステップ2】設計仕様の数値表現

①位相余裕が40°以上であるためには $|P(j\omega)C(j\omega)| = 1$ となる周波数において $\angle P(j\omega)C(j\omega) > 40^\circ$ が成り立つべき。

②目標追従性能は0.05rad/s以下の周波数領域で

$$\left| \frac{E(s)}{R(s)} \right| = \frac{1}{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|} < 0.01 \text{ であればよい。}$$

③外乱除去は0.1rad/s以下の周波数領域で

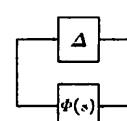
$$\left| \frac{Y(s)}{D(s)} \right| = \frac{|P(j\omega)|}{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|} < 0.01 \text{ であればよい。}$$

④モデル誤差 $\delta(j\omega)$ に対する安定性は100rad/s以上の高周波数において

$$\left| \delta(j\omega) \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < 1 \text{ であればスモールゲイン定理から安定。}$$

よって $|\delta(j\omega)| < \frac{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|}{|P(j\omega)C(j\omega)|}$ から開ループ [] であればよい。

スモールゲイン定理



閉ループ系がロバスト安定となるための必要十分条件は

- $\Phi(s)$ は安定

- $\|\Phi\|_\infty < 1$

(十分性) $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ より

$$|\phi(j\omega)\Delta(j\omega)| = |\phi(j\omega)| \cdot |\Delta(j\omega)| \leq |\phi(j\omega)| < 1$$

ナイキスト軌跡は常に単位円内に存在する

13.4-3 【ステップ3】設計仕様の開ループ表現

すべてを一巡伝達関数の条件に直す

①位相余裕が40°以上であるためには $|P(j\omega)C(j\omega)| = 1$ となる周波数において $\angle P(j\omega)C(j\omega) > -140^\circ$ が成り立つべき。

②目標追従性能は0.05rad/s以下の周波数領域で

$$|1 + P(j\omega)C(j\omega)| > 100 \text{ から } |P(j\omega)C(j\omega)| > [] \text{ であればよい。}$$

③外乱除去は0.1rad/s以下の周波数領域で

$$|P(j\omega)| < 1 \text{ だから②が成立すればよい。}$$

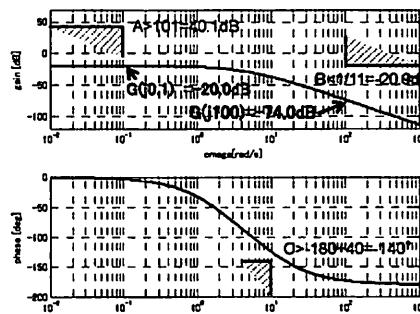
④モデル誤差 $\delta(j\omega) \approx 10$ に対する安定性は100rad/s以上の高周波数において

$$\left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{10} \text{ から開ループ}$$

$$|P(j\omega)C(j\omega)| < [] \text{ であればよい。}$$

13.4-4 【ステップ4】コントローラの設計

A-B間でゲインの差は61dB必要だが、
プラント特性は54dBしかない。よって比例補償だけでは要求を満たすことはできない。



プラントゲインを45dBアップして、
0.01-1rad/sの間で40dBの位相遅れ補償を導入する

13.4-5 コントローラの設計

ゲインは45dBと40dBから低周波0.01rad/s以下で85dBの増加
 $K=1.78E4$ として位相遅れは

$$T=1, \alpha=\exp\left(\frac{40}{20}\right)=100 \text{ から}$$

$$\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1+s}{1+100s}$$

よって制御器を

$$C(s) = 1.78E4 \frac{1+s}{1+100s}$$

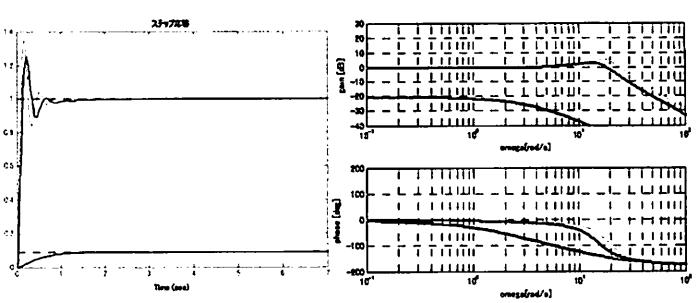
として特性を求める
しかし位相余裕が厳しいので

$$C(s) = 1.122E4 \frac{1+s}{1+100s}$$

とした。

13.4-6 【ステップ5】結果の確認

ステップ応答の偏差は0.001と目標をクリアーして
位相余裕も $P_m = 41.1^\circ$ 交差周波数 $w_c = 13.3\text{rad/s}$ であった。



13.4-7 演習(PI制御器の設計1)



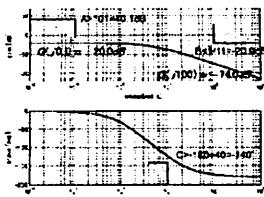
DCモータモデル

$$J = 0.01, b = 0.1, L = 0.5, R = 1, K_r = K_v = 0.01$$

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.08s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

$$\omega_n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, K = 0.1, \zeta = 1.34$$

に対してPI制御を用いてA,Bの禁止条件を満たす制御器を求める。



Aは40dB at $\omega < 0.1\text{rad/s}$
Bは-20dB at $\omega > 100\text{rad/s}$

13.4-7 演習(PI制御器の設計3)

13.4-7 演習(PI制御器の設計2)



A-B間でゲインの差は61dB必要だが、プラント特性は55dBしかない。よって比例補償だけでは要求を満たすことはできない。

プラントゲインを45dBアップして、1rad/sに折れ点を持つPI補償を導入する

DCモータモデル

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.08s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

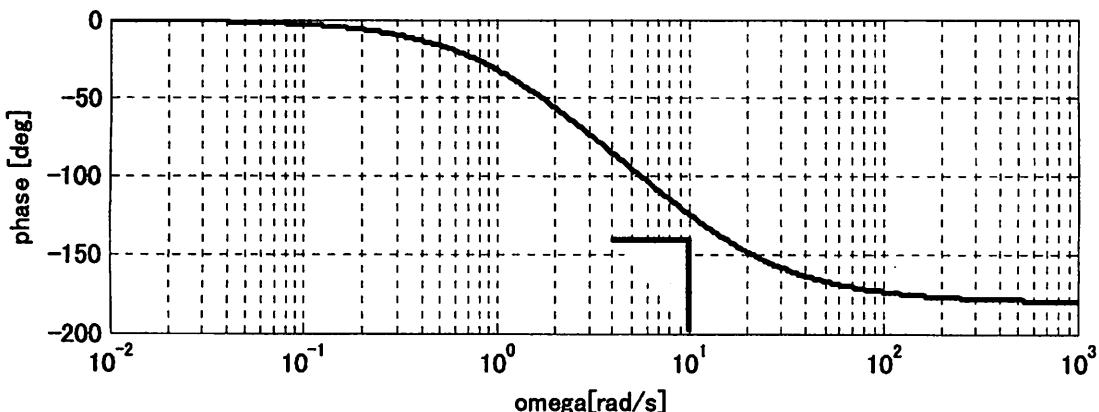
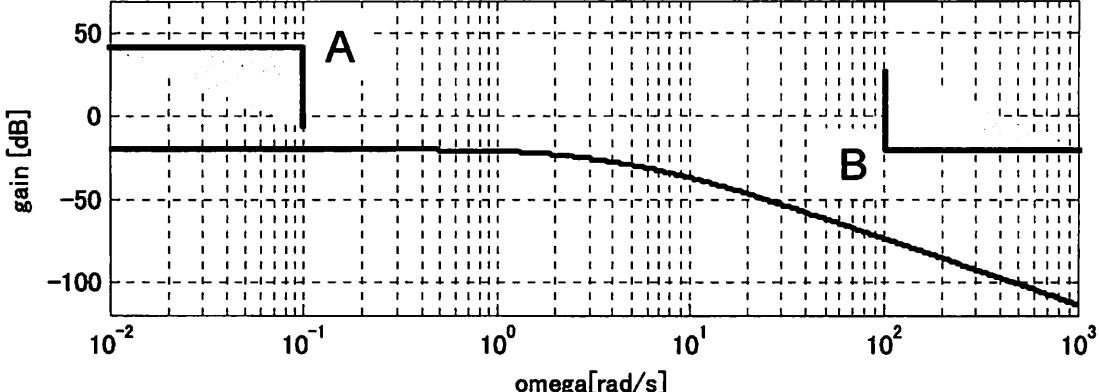
に対してPI制御を用いてA,Bの禁止条件を満たす制御器を求める。

$$C(s) = K(1 + \frac{1}{Ts}) \text{ として}$$

ゲインは積分20dB+K=65dBからK=45dBとなり

$$\text{真数に直して } K = 178 \text{ とし, } T = 1 \text{ を選択すると } C(s) = \frac{178(s+1)}{s}$$

これから開ループのボード線図を求める。この時の位相余裕が少ないためにゲインを4dB下げてK=112.2として再度、ボード線図を求める



まとめ



■補償要素とその使い方、ならびにループ整形法について復習した。

■DCモータのモデルを生成して、その制御器を、

- ①設計仕様
 - ②制御仕様の数値表現
 - ③開ループ表現
 - ④コントローラの設計
 - ⑤結果の確認
- の手順を経て求めた。

■モデル誤差については次回改めて議論する。

制御工学 II



シラバス

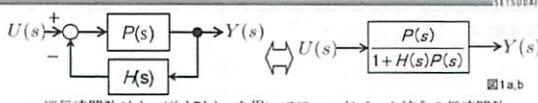
■ 本講では、まず周波数応答について説明し、ベクトル軌跡とボード線図による周波数特性の表現方法について述べる。続いて、フィードバック制御系の特性評価、ナイキストの安定判別法、さらにゲイン余裕と位相余裕について説明する。最後に、制御系の補償法について述べる。

到達目標:

- 1) 周波数応答法の理解。
- 2) フィードバック制御系の安定判別ができる。
- 3) フィードバック補償により制御系の設計ができる

- 1) 線形システムの時間応答 ラプラス変換、ステップ応答、インパルス応答
- 2) 周波数応答(1) ゲイン、位相特性、ボード線図の読み方
- 3) 周波数応答(2) ボード線図演習
- 4) 周波数応答(3) ボード線図の合成、折れ線近似
- 5) 周波数応答(4) PID制御とボード線図
- 6) 周波数応答(5) ベクトル軌跡とボード線図
- 7) 制御系の安定判別(1) ナイキストの簡易判別法
- 8) 制御系の安定判別(2) 位相余裕とゲイン余裕
- 9) 総合演習 前半のまとめと総合演習
- 10) 演習答合わせ
- 11) フィードバック制御
- 12) フィードバック制御系の設計(2) ループ整形法
- 13) フィードバック制御系の設計例(1) 設計仕様を満たす設計
- 14) フィードバック制御系の設計例(2) 制御目的と設計要件
- 15) まとめ

閉ループ系=フィードバック結合



一連伝達関数 $L(s) = H(s)P(s)$ を用いてフィードバック結合の伝達関数

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + H(s)P(s)} = \frac{P(s)}{1 + L(s)} \quad (2.1)$$

が得られる。伝達関数は分母・分子の s の多項式で与えられる。

伝達関数の特性は分母・分子が 0 となる極・零点で決定される。

安定、不安定を決定するのは分母多項式を 0 とする特性方程式

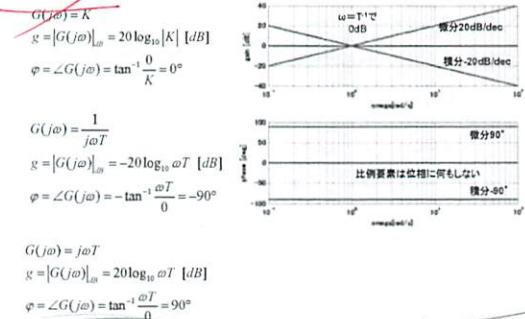
$$1 + L(s) = 0 \quad (2.2)$$

の解(=根)であり、これが極である。

いま極を p_1, \dots, p_n 、零点を z_1, \dots, z_m をすると以下のように表される。

$$\frac{P(s)}{1 + L(s)} = \frac{b(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (2.3)$$

基本要素のボード線図



一般的な伝達関数の性質

■ ゲインや位相の性質を用いると、一般的な伝達関数のボード線図も一次遅れ要素や二次遅れ要素といった典型的な伝達関数のボード線図をグラフ上で反転させたり、加え合わせたりすることによって容易に得ることができる。

性質(1) : $H(s) = 1/G(s)$ のときに次の式が成り立つ

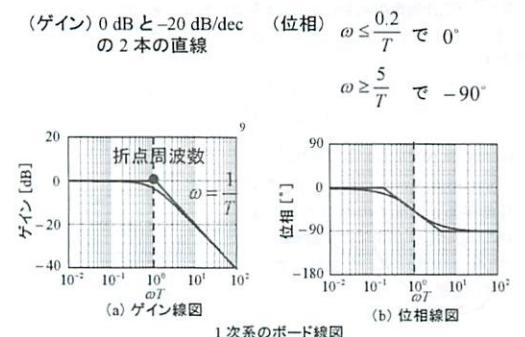
$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= -20 \log_{10} |G(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= -\angle G(j\omega) \end{aligned}$$

性質(2) : $H(s) = G_1(s)G_2(s)$ のときに次の式が成り立つ

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{aligned}$$

性質(1)は微分要素と積分要素の関係と同じく、ゲイン線図では 0[dB] で上下を反転させ、位相線図では 0[deg] で上下を反転させることによって得られる。性質(2)ではそれぞれ加算すればよい。

折れ線近似



ボード線図(Bode Diagram)

周波数応答について学んできたが、入力振幅を A 、角周波数を ω とした時の応答振幅を B とするとその振幅比(ゲイン)は

$$g = 20 \log_{10} \frac{B}{A} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad \text{デシベル [dB]}$$

と与えられる。また位相の遅れ・進みは

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \quad [^\circ \text{deg}]$$

と表され、これらを対数表示した横軸に周波数 ω [rad/s, Hz] をとってプロットしたゲイン線図、位相線図を合わせてボード線図と呼ぶ。

横軸の周波数 ω $\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| \\ \angle G(j\omega) \text{ の変化を} \end{array} \right.$

基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K	$dB \uparrow 20 \log K $	$0^\circ \rightarrow \omega$
s	$dB \uparrow 1$	$90^\circ \rightarrow \omega$
$\frac{1}{s}$	$dB \uparrow 1$	$0^\circ \rightarrow \omega$
$Ts + 1$	$dB \uparrow 20 \text{dB/dec}$	$90^\circ \rightarrow 0.2/T \text{ } 5/T \rightarrow \omega$
$\frac{1}{Ts + 1}$	$dB \uparrow 1/T$	$0^\circ \rightarrow 0.2/T \text{ } 5/T \rightarrow \omega$
$\frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$dB \uparrow$	$0^\circ \rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$

一次遅れ要素と折れ線近似

一次遅れ要素の伝達関数は $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ となるから、

$$g = |G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \approx -20 \log |_{\omega \ll T} - 20 \log \omega T |_{\omega \gg T} [dB]$$

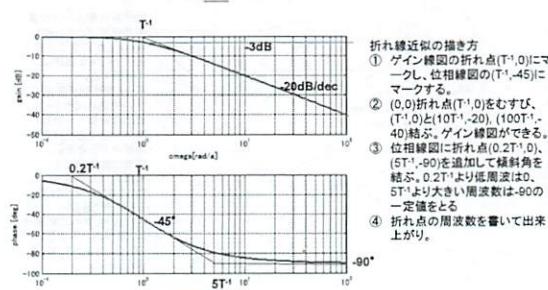
$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{1} \approx |_{\omega \ll T} - 64.3 \log \omega |_{\omega \ll T} - 90^\circ |_{\omega \gg T} [^\circ]$$

ゲイン特性は $\omega \leq T^{-1}$ において $0 [dB]$ 、 $\omega \geq T^{-1}$ において $10\omega = 1 [\text{dec}]$ で -20dB 、すなわち $\omega = T^{-1}$ を折れ点周波数としてそれ以下のゲイン特性は 0dB、それ以上は -20dB/dec の右下がり直線で近似できる。このとき $\omega = T^{-1}$ での誤差は $\sim -3 [dB]$ である。

また位相は $\omega = T^{-1}$ で $\varphi = -45^\circ$ であり、この傾斜を直線近似して傾き $\varphi' = -64.3 \log \omega |_{\omega \ll T} - 90^\circ$ となる。

$$\varphi = 0^\circ \text{ } \omega = 0.2T^{-1}, \varphi = -90^\circ \text{ } \omega = 5T^{-1}$$

一次遅れ要素のボード線図



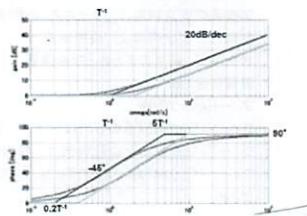
一次進み要素のボード線図

一次遅れ要素の伝達関数は $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ となるから、

$$g = |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T)^2} \approx 20 \log_{10} 1|_{\omega=0} + 20 \log_{10} \omega T|_{\omega \ll T^{-1}} [dB]$$

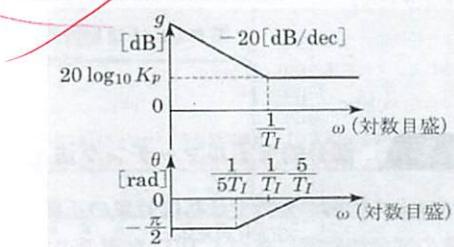
$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega T}{1} = \tan^{-1} \omega T \approx 0|_{\omega \ll T^{-1}} + 64.3 \log \omega|_{\omega \gg T^{-1}} + 90|_{\omega \gg T^{-1}} [^\circ]$$

$\omega = T^{-1}$ を折れ点周波数として位相遅れの逆特性



PI制御装置のボード線図

- 高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
- 積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
- 位相遅れが安定性を損なう恐れもある。



ベクトル軌跡

周波数ごとに周波数応答のゲイン・位相を求め、それらをつなげることで制御対象の分析が可能となる。

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は複素関数であり、ある任意の $\omega [rad/s]$ に対して複素平面上の一つのベクトルを表すこととなる。

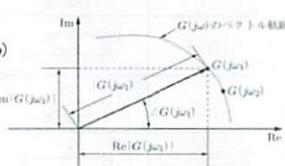
$$G(j\omega) = \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

$$= |G(j\omega)| \exp\{j\angle G(j\omega)\}$$

$\omega [rad/s]$ を0からのまで変化

させたときの複素ベクトル $G(j\omega)$

の先端が複素平面上に描く軌跡をベクトル軌跡という。



1次遅れ要素

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

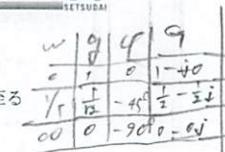
となる。ベクトル軌跡は複素平面の代象限を1から0に至る半径1/2の円を描く。

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle(1 + j\omega T)$$

$$= \tan^{-1} \frac{0}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

$$= -\tan^{-1} \omega T$$



ボード線図との特徴比較

システムの構成	$\omega \rightarrow \infty [rad/s]$	ボード線図の構成	ベクトル軌跡の形	制御系の開ループは高周波領域で小さな値を取ることが定常上必須であり、ベクトル軌跡は0°に近接する。
1次遅れ系(単体)	K $T_s + 1$	大きさ → 0 ゲイン → -20 dB/dec 位相 → -90°		
1次遅れ系(積分)	K $(T_s + 1)(T_f + 1)$	大きさ → 0 ゲイン → -40 dB/dec 位相 → -180°		
1次遅れ系+積分要素	K $K(T_s + 1)$	大きさ → 0 ゲイン → -40 dB/dec 位相 → -180°		
2次遅れ系+積分要素	K $K(T_s + 1)(T_f + 1)$	大きさ → 0 ゲイン → -60 dB/dec 位相 → -270°		

PI制御器のボード線図

- 比例ゲインに積分要素を加えた制御器を考える
PI制御器は偏差の過去データから制御を考える手法

$$\text{伝達関数は } G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{Ts s} \right) = K_p \frac{T_s + 1}{Ts} = K_p \frac{T_s \omega + 1}{T_s \omega}$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} K_p - 20 \log_{10} \omega T + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega + \tan^{-1} \omega T = -\pi/2 + \tan^{-1} \omega T$$

折れ線近似で考えると、

ゲイン特性は積分によって-20dB/decで減少して T^1 から

$$20 \log_{10} K_p$$

で一定となる。

位相特性は $\omega \ll T^1$ では-90°であり $\omega = 5T^1$ で0°に戻る。

PI制御器のボード線図

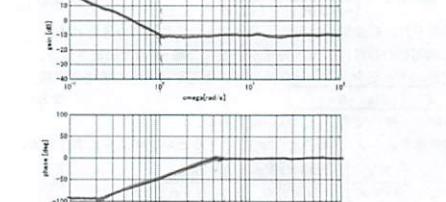
$$\text{伝達関数は } G(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{Ts s} \right) = 0.316 \frac{1 + j\omega}{\omega T}$$

$$K_p = 0.316, T_s = 1 \text{ として}$$

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} K_p - 20 \log_{10} \omega T + 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

$$\equiv -10 - 20 \log \omega + 20 \log 1|_{\omega=0} + 20 \log \omega|_{\omega \gg 1} (= -10|_{\omega=0} - 20 \log(\omega)|_{\omega \gg 1}) [dB]$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega + \tan^{-1} \omega T = -\pi/2 + \tan^{-1} \omega T (\equiv -90|_{\omega=0} + 64.3 \log \omega|_{\omega \gg 1} + 0|_{\omega \gg 1}) [^\circ]$$



積分要素

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$$

となる。ベクトル軌跡は虚軸上を-∞から0に至る半直線。

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega|} = \frac{1}{\omega}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle -1 - \angle j\omega$$

$$= \tan^{-1} \frac{0}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = 0^\circ - 90^\circ$$

PI制御器のベクトル軌跡

周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = K \left(1 + \frac{1}{j\omega T} \right) = K - j \frac{K}{\omega T}$$

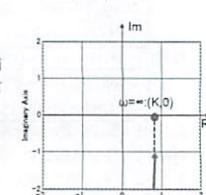
$$|G(j\omega)| = K \left| 1 + \frac{1}{j\omega T} \right| = K \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(K - j \frac{K}{\omega T} \right) = -\tan^{-1} \frac{1}{\omega T}$$

となる。 $\omega = 0$ のとき虚数が $G(j\omega) = -\infty$, $\omega = \infty$ では $G(j\omega) = K$ だからベクトル軌跡は複素平面の第4象限の実軸上の K を通る直線を-∞から K に至る。積分の軌跡の終点を K にしたるもの。

ω	$G(j\omega)$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	$K - j\infty$	∞	-90°
$1/T$	$K - jK$	$K\sqrt{2}$	-45°
∞	$K - j0$	K	-0°

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$



ナイキスト線図(開ループ伝達関数のベクトル軌跡)

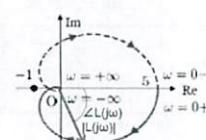
開ループ伝達関数 $P(j\omega)C(j\omega)$ は複素関数であり、ある任意の $\omega [rad/s]$ に対して複素平面 ($P(j\omega)C(j\omega)$ 平面と呼ぶこともある) 上の一つのベクトルを表す。

$$L(j\omega) = P(j\omega)C(j\omega) = \operatorname{Re}\{L(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{L(j\omega)\}$$

$$= |L(j\omega)| \exp\{j\angle L(j\omega)\}$$

$\omega [rad/s]$ を0からのまで変化させた

ときの複素ベクトル $L(j\omega)$ の先端が複素平面上に描くのがベクトル軌跡であったが、さらに実数軸に対して上下対象に描いたものをナイキスト線図といいう。



ナイキストの安定判別法

21
SETSUDAI

[ステップ1]

開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)C(j\omega)$ を、周波数 $\omega=0 \sim \infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 L' を得る。

[ステップ2]

ナイキスト軌跡 L' が点(-1, 0)のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。(反時計方向に1回の場合 $N=1$)

[ステップ3]

開ループ伝達関数 $P(s)C(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを n とする。

[ステップ4]

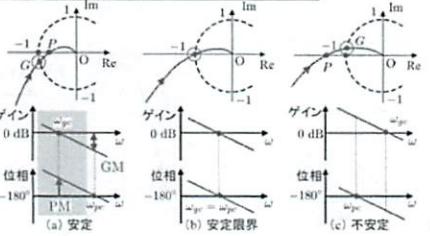
閉ループ系の不安定な極の数は $Z=N+n$ となる。したがって、 $Z=0$ ならばフィードバック制御系は安定。 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

ボード線図と対比1

22
SETSUDAI

ボード線図での読み取り (a) 位相が -180° より進む \Rightarrow 安定
(b) 位相が -180° ちょうど \Rightarrow 安定限界
(c) 位相が -180° より遅れる \Rightarrow 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{pc} で PM を読み取る。



開ループ伝達関数のボード線図

23
SETSUDAI

さらに測定装置の伝達関数を $H(s) = 0.2$ としたときの一巡開ループ伝達関数 $L(s)$ は

$$L(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)} = \frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$

となり、ループのゲイン特性と位相特性は次のようにになる。

$$\begin{aligned} 20\log|L(j\omega)| &= 20\log|C(j\omega)| + 20\log|P(j\omega)| + 20\log|H(j\omega)| \\ &= -20\log\omega + 20\log\sqrt{9\omega^2 + 1} - 20\log\sqrt{(0.1\omega)^2 + 1} - 14 [\text{dB}] \\ \angle L(j\omega) &= -\pi/4 + \tan^{-1}3\omega - \tan^{-1}0.1\omega [\text{rad}] \end{aligned}$$

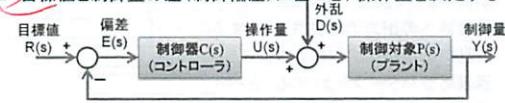
これをボード線図で示してみよう。

■演習: 折れ線近似で各要素を示し、合成して開ループ特性を求めよ

フィードバック制御の構成

27
SETSUDAI

■目標値と制御量の差(制御偏差)に基づき、操作量を決定する



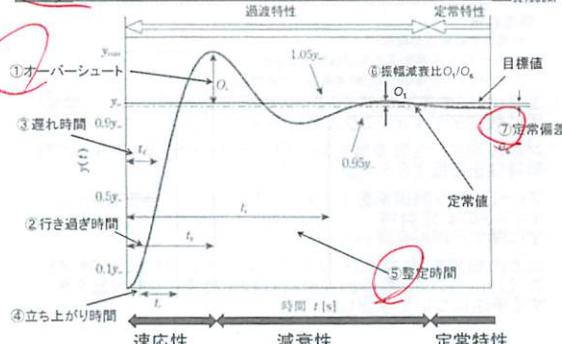
■この制御系の伝達関数は、

$$\begin{aligned} G_{ur}(s) &= \frac{C(s)}{1+P(s)C(s)} & G_{ud}(s) &= -\frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \\ G_{yr}(s) &= \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} & G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \end{aligned} \quad (8.1)$$

いずれも $C(s)$ を含んでいるので、制御対象 $P(s)$ が不安定であっても、制御器 $C(s)$ によって安定化できる。分母が同じに注目

時間応答の指標

29
SETSUDAI



ナイキスト線図で見たゲイン余裕と位相余裕

22
SETSUDAI

■ベクトル軌跡が点(-1,0)から離れていれば安定であり、不安定になるまでの余裕を安定余裕という

ベクトル軌跡が点(-1,0)からある程度離れているならば、安定余裕がある。

ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと制御系が不安定になるか。

$$GM = \frac{1}{|OP|} (\text{dB}) = 0dB - 20\log_{10}|L(j\omega_{pc})|$$

位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れるとき制御系が不安定になるか。



図 ゲイン余裕、位相余裕

$PM = \angle GOP (\text{deg})$

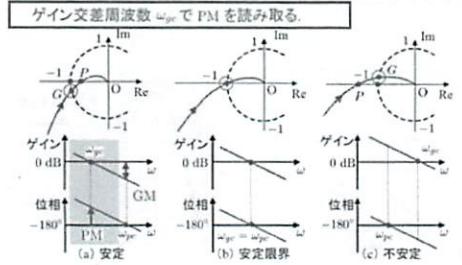
ボード線図と対比2

24
SETSUDAI

$$G = 20\log_{10}|L(j\omega_{pc})|$$

(a) ゲインが 0 dB より低い \Rightarrow 安定
(b) ゲインが 0 dB ちょうど \Rightarrow 安定限界
(c) ゲインが 0 dB より高い \Rightarrow 不安定

位相交差周波数 ω_{pc} で GM を読み取る。

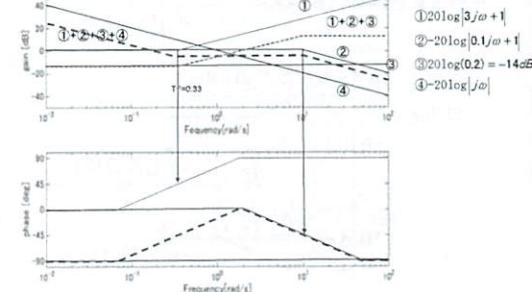


演習) 開ループ伝達関数のボード線図

26
SETSUDAI

■開ループ伝達関数

$$L(s) = C(s)P(s)H(s) = \frac{0.2(3s+1)}{s(0.1s+1)} = \frac{0.2(3j\omega+1)}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$



開ループ伝達関数と安定性

28
SETSUDAI

式 8.2 の $K=1, \omega_n=10, \zeta=0.5$ として

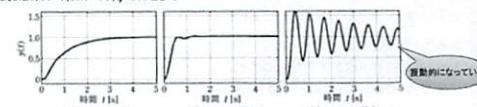


図 13.2 $G_r(t)$ のステップ応答

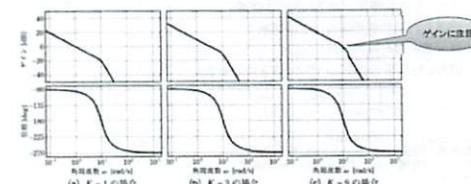


図 13.3 図 8.2 の (注) $L(s) = P(s)C(s)$ のボード線図

ステップ入力に対する定常偏差

29
SETSUDAI

フィードバック系の一巡伝達関数を

$$L(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

の1次遅れとすると

フィードバック系の定常偏差は

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \{r(t) - y(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \{r(s) - y(s)\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ r(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)} r(s) \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{1+L(s)} \right\} r(s)$$

今、単位ステップが目標値とすると定常位置偏差は

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{1+L(s)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+L(0)}$$

最終値の定理

$L(0) = K$ であり、ゲイン K を十分大きくすれば定常位置偏差はゼロに近づく。またこの時の K を位置偏差定数 K_p という。

開ループ伝達関数の理想

制御系の設計はセンサやアクチュエータに依存するのではなく、
あるが、基本的に制御器の設計にある。制御器の特性はその
開ループ伝達関数によって表され、この周波数特性を望ましい
ものすることによって設計が実現される。

では望ましい周波数特性とは **ゲイン** **位相**

■低い周波数領域(=外乱や目標値の変化が想定される領域)
ではできるだけ **ゲイン** を大きくする

=目標値の **位相** や外乱の **位相** を高める **安定性**

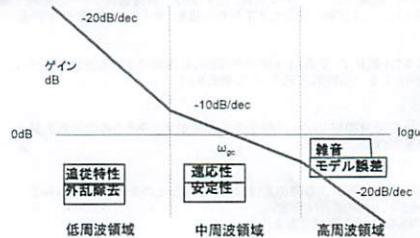
■高い周波数領域(=雜音やモデル誤差が存在する領域)では
できるだけ **ゲイン** を小さくする = **位相** を高める

■ゲインが0dBになる **周波数** を大きくしながら、パン

チングをおこす条件を回避できるように制御器の **ゲイン** を
大きくとる = **位相余裕**

望ましい周波数特性

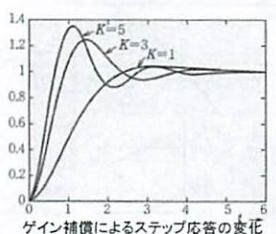
開ループ伝達関数



ゲイン補償

安定性

- ゲインを上げると応答性が良くなるが、減衰性が悪くなる。逆に、ゲインを下げる減衰性は良くなるが、応答性が悪くなる。
- ゲインを下げることで、システムの安定度を高めることができる。

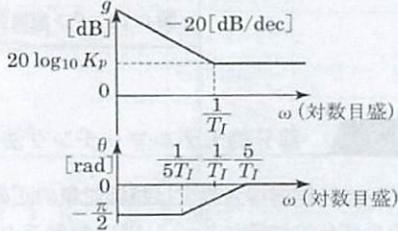


$$G_c(s) = K$$

PI補償

- 高周波領域では変化がないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
- 積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$



ループ整形演習2

制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して

あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い

さらに振動性状を改善するためにゲイン交差周波数付近に位相進み補償を行なう

結果を得た。

それでも定常偏差が残るために、交差周波数付近に影響を与えない範囲で

積分器を含む補償を行なった。

追加した補償の種類、パラメータを推定せよ。

$$C_2(s) = C(s) \cdot \frac{1}{s+1}$$

位相進み補償 $w_{pc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $P_m = 60.4^\circ$
PI 補償 $w_{pc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $P_m = 58.0^\circ$

14.1-5 設計要件のまとめ

① 安定性

開ループ $L(j\omega) = P(j\omega)C(j\omega)$ から位相余裕、ゲイン余裕を評価

② 目標追従特性

$E(s) = S(s)R(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} R(s)$ から感度関数を小さくすればよい。

③ 外乱除去

$Y(s) = S(s)P(s)D(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} D(s)$ から感度関数を小さくすればよい。

④ 過渡応答特性

$Y(s) = T(s)R(s)$ から相補感度関数を希望する特性に近づける。

⑤ ロバスト性

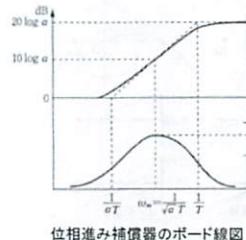
$\delta(j\omega)$ を含む開ループを $|\delta(j\omega)T(j\omega)| < 1$ とする。そのためには相補感度関数 $|T(j\omega)|$ を小さく = 開ループ $|P(j\omega)C(j\omega)|$ を小さく。

位相進み補償

■位相を ω_c 周辺で進ませる。高周波領域でゲインを増大させる。

■位相を進ませることで位相余裕を改善し、減衰性を確保しつつ、速応性を改善することができる。

$$C(s) = \frac{K(1 + \alpha Ts)}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$



位相進み補償器のボード線図

ステップ応答の比較

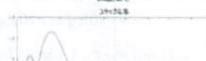
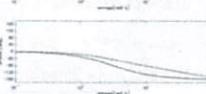
ループ整形演習1

制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して
あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い
緑線の結果を得た。

さらに振動性状を改善するためにゲイン交差周波数付近に補償を行なった。
最初のゲイン補償と次の補償の種類、パラメータを推定せよ。

$$C(s) = \frac{10}{s+0.3} \cdot \frac{s+1}{s+0.03}$$

ゲイン補償 $w_{pc} = 9.58 \text{ rad/s}$ $P_m = 35.1^\circ$
位相進み補償 $w_{pc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $P_m = 60.4^\circ$



制御目的と設計 ~考慮すべき5項目~

- 制御系として安定であること…
- 目標値への出力の追従性をよくすること…
- 外乱の影響が出力に現れないこと…
- 過渡応答パターンをよくすること…
- プラント制御モデルに誤差があっても①～④が保証されること…

安定であるとは



フィードバック制御系の安定性の良し悪しは、一巡周波数伝達関数 $L(j\omega) = P(j\omega)C(j\omega)$ の位相余裕、ゲイン余裕で定量的に評価される。

定性的には、位相余裕に関してはゲイン交差周波数(すなわち $|L(j\omega)| = 1$ となる周波数) w_{pc} において $\angle L(j\omega_{pc}) > -180^\circ$ となること。

ゲイン余裕に関しては位相交差周波数(すなわち $\angle L(j\omega) = -180^\circ$ となる周波数) w_{pc} において $|L(j\omega_{pc})| < 1$ となることである。

制御工学IIのまとめ

到達目標:

- 周波数応答法の理解。
- フィードバック制御系の安定判別ができる。
- フィードバック補償により制御系の設計ができる。
- 工学にとって重要なダイナミクスの周波数表現について学習し、周波数空間でダイナミクスの応答を考えた。
- 対数表現された周波数空間を用いるボード線図を利用して制御特性を把握できるようになった。
- フィードバック制御系をより深く学び、開ループ特性を用いたナイキストの安定判別やボード線図による安定判別を学習し、安定に関する理解を深めた。
- 以上の知識を用いたループ整形法によって、望ましい制御系の設計について、具体的な設計仕様を設定して制御器を実現する手法について学習した。