偏微分

- 多変数関数を，ある1変数に関して微分することを偏微分という
- 注目する変数以外は定数として，（従来の）微分の操作をすれば良い
- 注目する変数方向の変化率を表している

- 例として，以下のようなxとyの2つの変数から値が決まる関数fを考える

$$f(x,y)=x^2+xy+y^3$$

- 関数fのxによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+0$$

x^2の微分　xyの微分　y^3の微分(=0)

，$\boxed{y\text{ を定数として}x\text{を微分}}$

- 関数fのyによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0+x+3y^2$$

，$\boxed{x\text{ を定数として}y\text{を微分}}$

$\boxed{\partial\text{ はラウンドと読む}}$

演習1

- 以下の偏微分を計算せよ

$$g(\theta_1,\theta_2)=2\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin(\theta_1+3\theta_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial\theta_1}= 2\sin\theta_2\cdot(-\sin\theta_1)+\cos(\theta_1+3\theta_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial\theta_2}= 2\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

ヤコビ行列(Jacobian matrix)

手先位置x，yが関節角度θ_1，θ_2の関数f_1，f_2から決まるとしよう

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\theta_1,\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)\end{bmatrix}$$

例）$f_1(\theta_1,\theta_2)=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
$f_2(\theta_1,\theta_2)=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

両辺を微分すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

全微分といわれる

行列として整理すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

この行列をヤコビ行列という。
また，その行列式をヤコビアンという

演習2

- 以下の関数f_1，f_2が与えられたとき，ヤコビ行列Jを求めよ。

$$\begin{aligned}f_1(\theta_1,\theta_2)&=3\cos\theta_1+2\cos(\theta_1+\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)&=3\sin\theta_1+2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3\sin\theta_1-2\sin(\theta_1+\theta_2)&-2\sin(\theta_1+\theta_2)\\3\cos\theta_1+2\cos(\theta_1+\theta_2)&2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$