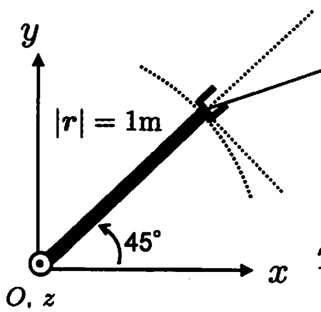
演習2

下図のように，x-y平面上を動くロボットアームの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の先端に，力$\boldsymbol{F}$ [N] が作用している。このときのロボットアームのトルク$\boldsymbol{T}$を求めよ。



$$\boldsymbol{F} = [2\ \ 1\ \ -1]^T$$

位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\right]^T$

よって

$$\boldsymbol{T} = |r \times F| = |r||F| \sin\theta$$

$$= |r||F| \sin 45^\circ$$

$$= 1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

行列の基礎

- 要素を四角に並べることで行列 (matrix) が作られる

例） 2行3列 (2×3) の行列

列 (column)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

行 (row)

2次正方行列
（縦横のサイズが同じ）

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 単位行列 ($I,\ E,\ I_n$)
  対角成分が1，他は0

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 転置行列 (T)
  行と列が入れ替わる

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

行列の計算

- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

- 行列の掛け算　($\ell \times m$行列 と $m \times n$行列 の掛け算 ⇒ $\ell \times n$行列)

  2×2行列 と 2×1行列（列ベクトル） ⇒ 2×1行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$$

  2×2行列 と 2×2行列 ⇒ 2×2行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$　　　$(AB)C = A(BC)$ ⇐結合法則

$(AB)^T = B^T A^T$　　　$(A+B)C = A(B+C)$ ⇐分配法則

逆行列 (inverse matrix)

- 掛けると単位行列になる

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- 行列式 (determinant)　$|A|$　あるいは　$\det A$
  $|A| = 0$ のとき逆行列は存在しない

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad - bc$$

※3次の場合はサラスの展開
一般には余因子展開等で計算

- 2次正方行列の逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

※一般には余因子行列や掃き出し法で計算

演習3

- 次の行列計算をせよ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T B = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}}$

$\det A = \boxed{-7}$

$A^{-1} = \boxed{\frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}$

$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3$
$= 1 - 6$
$= -5$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 1 + 3 \times (-2) & 1 \times (-1) + 3 \times 3 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 1 & 2 \times 1 + (-1) \times (-2) & 2 \times (-1) + (-1) \times 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$