ロボットの運動（同次変換）

ロボット概論 8

8

第7回（2019/11/18）

担当：山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - ベクトルの基礎
  - 内積と外積
  - トルクと角速度のベクトル表現
  - 行列の基礎
- 今回の内容
  - 行列と三角関数の復習
  - 並進と回転
  - 同次変換（平面の場合）

⇨ ロボットアームの手先位置や姿勢を計算できるようになろう

行列の基礎（復習）

- 要素を四角に並べることで行列（matrix）が作られる

例） 2行3列（2×3）の行列

列（column）

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ 行（row）

2次正方行列（縦横のサイズが同じ）

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 単位行列（I, E, I_n）
  対角成分が1，他は0

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 転置行列（T）
  行と列が入れ替わる

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

行列の計算（復習）

- 足し算，引き算は成分同士で加減

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

- 行列の掛け算　（$\ell \times m$行列 と $m \times n$行列 の掛け算 ⇒ $\ell \times n$行列）

2×2行列 と 2×1行列（列ベクトル） ⇒ 2×1行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}$$

2×2行列 と 2×2行列 ⇒ 2×2行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$ ⇐結合法則

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A+B)C = A(B+C)$$ ⇐分配法則

逆行列（inverse matrix）（復習）

- 掛けると単位行列になる

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- 行列式（determinant） $|A|$ あるいは $\det A$
  $|A|=0$ のとき逆行列は存在しない

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ad - bc$$

※3次の場合はサラスの展開
一般には余因子展開等で計算

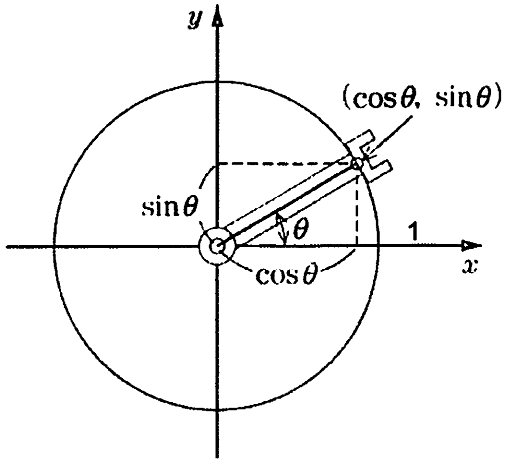
- 2次正方行列の逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

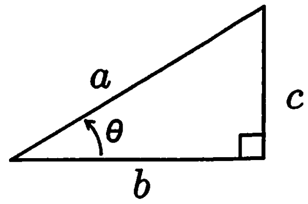
※一般には余因子行列や掃き出し法で計算

三角関数

- 単位円上（a=1のとき）の点の座標が，三角関数（sinとcos）の値になっている



図出典：川嶋，只野，絵ときでわかるロボット工学第2版



$$\sin\theta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

三角関数の定理

- 基本相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

- 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

- 余角公式

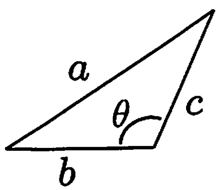
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$$

- 負角公式

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

- 余弦定理

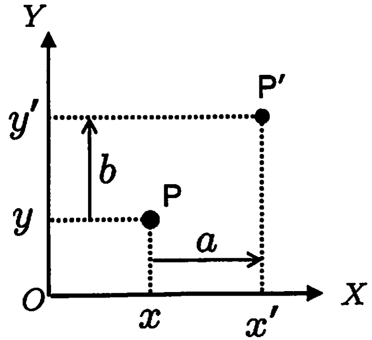
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



点の並進移動

- 点Pの位置ベクトルP=[x y]^T をP′=[x' y']^T に並進移動

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ x+b \end{bmatrix}$$



次スライド以降，
表記の簡単化のため，

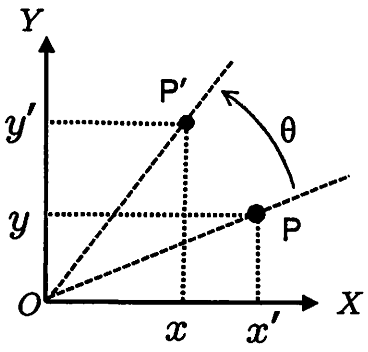
$$\begin{cases} S\theta = \sin\theta \\ C\theta = \cos\theta \end{cases}$$

と記述する

点の回転移動

- 点Pの位置ベクトルP=[x y]^T をP′=[x' y']^T まで，θだけ回転させる

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



回転変換を以下で書く(回転行列)

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

逆方向への回転は

$$\boldsymbol{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} C(-\theta) & -S(-\theta) \\ S(-\theta) & C(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta \\ -S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

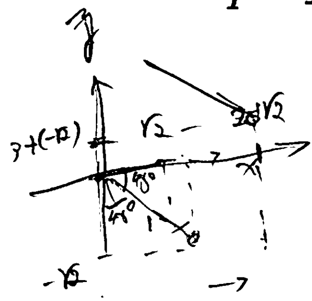
逆回転は，元の回転行列の転置であることが分かる

$$\boldsymbol{R}(-\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{R}(\theta)^T$$

演習1

$\theta = 45°$

- 位置ベクトルP=[1 0]^{T}を時計方向に45° 回転させた後，x軸方向に2，y軸方向に3だけ並進移動させた位置ベクトルP'は？



$$P' = R(-\theta)P + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta) & S(\theta) \\ -S(\theta) & C(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \end{bmatrix}$$

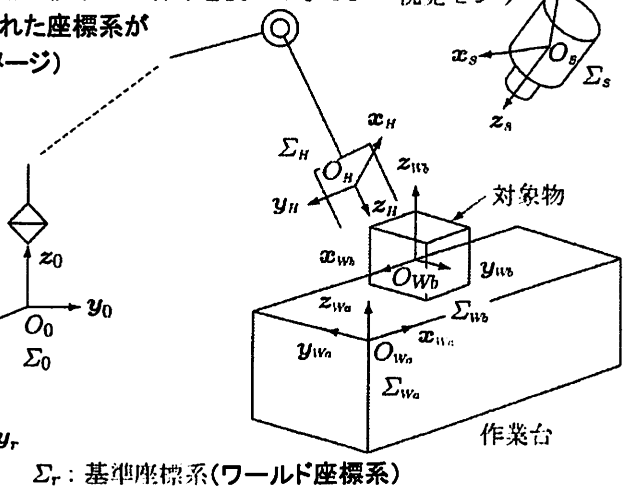
座標系

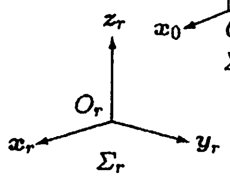
図出典：川崎，ロボット工学の基礎第2版

- 一般に，ロボットの運動は複数の座標系を使って考える
(関節や手先等に固定された座標系が
それぞれ動いていくイメージ)

⇩

- 各座標系で見た位置を知る必要がある





Σ_r：基準座標系(ワールド座標系)
Σ_0：ベース座標系　　Σ_s：センサ座標系
Σ_H：手先(ハンド)座標系　　Σ_{W_i}：対象物iの作業座標系

座標系の並進移動

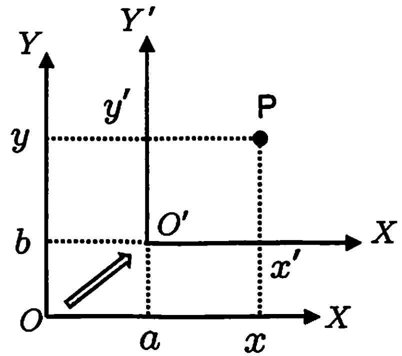
- 点Pを2つの座標系で見てみた

座標系X'-Y'で見た座標　座標系X-Yで見た座標　座標系X-Yの原点から座標系X'-Y'の原点への並進

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

座標系X-Yで見た座標　座標系X'-Y'で見た座標



※点の並進移動と逆の関係

座標系の回転移動

- 点Pを2つの座標系で見てみた

同じ点

座標系X'-Y'で見た座標

座標系X'-Y'からは，-θ回転して見える

座標系X-Yで見た座標

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta \\ -S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

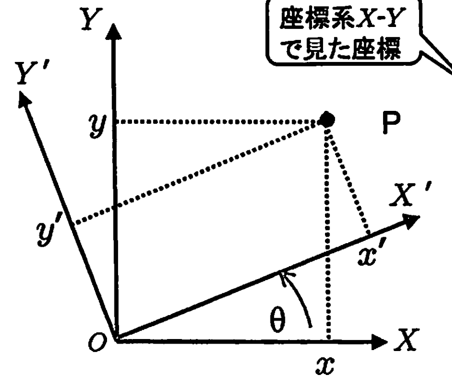
逆行列

座標系X-Yで見た座標

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

座標系X-Yからは，θ回転して見える

座標系X'-Y'で見た座標



※点の回転移動と逆の関係

同次変換（homogeneous transform）

- 座標系の並進と回転を一つの行列で表したい
- 位置ベクトルの次元を1つ拡大

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 同次変換行列
  - 並進a,b⇒回転θを表す

回転成分　並進成分　常に0　常に1

$$\left[\begin{array}{cc:c} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

並進，回転する前の座標系で見た位置

座標系の並進⇒回転

並進，回転した後の座標系で見た位置

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

並進変換・回転変換

- 並進と回転の同次変換行列を記号で表すこととする
- (a, b)だけ移動する並進変換（Translation transform）

$$\mathbf{Trans}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回転成分は単位行列（回転しない）

- 角度θだけ回転する回転変換（Rotation transform）

$$\mathbf{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

並進成分は0（並進しない）

同次変換行列

- 座標系X-Yと，(a, b)だけ並進した座標系X'-Y'の変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 座標系X'-Y'と，θだけ回転した座標系X''-Y''の変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\theta) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次変換行列を並べることで，複数回の座標系の変換が計算できる

左から右に座標系の動きを示す

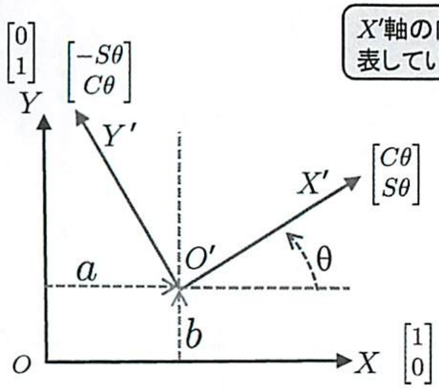
右から左に各座標系で見た位置ベクトルを示す

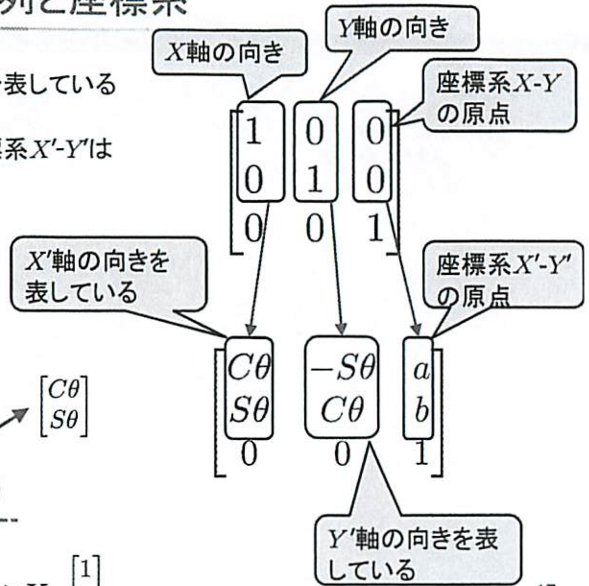
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b)\mathbf{Rot}(\theta) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次変換行列と座標系

- 同次変換行列は座標系を表しているともいえる
(座標系X-Yから見て，座標系X'-Y'はどう見えるか？)



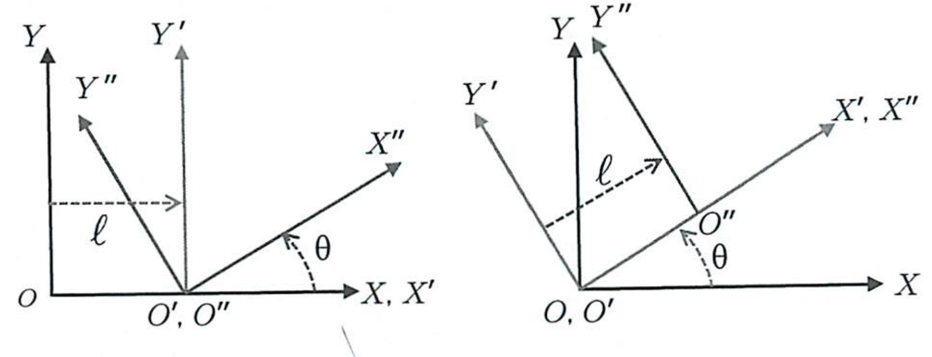


同次変換の順番

- 変換の順番が違うと結果は異なるので注意（左から右に考える）

$$\mathbf{Trans}(\ell,0)\mathbf{Rot}(\theta)\neq\mathbf{Rot}(\theta)\mathbf{Trans}(\ell,0)$$

$$\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&\ell\\S\theta&C\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&\ell C\theta\\S\theta&C\theta&\ell S\theta\\0&0&1\end{bmatrix}$$



演習2-1

手先　根本

- エンドエフェクタ座標系Σ_Eからベース座標系Σ_Bへの座標変換を行う同次変換行列${}^BT_E$が以下で与えられている。${}^BT_E$を計算せよ。

$${}^BT_E \quad = \quad \mathbf{Trans}(3,0)\mathbf{Rot}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{Trans}(1,0)$$

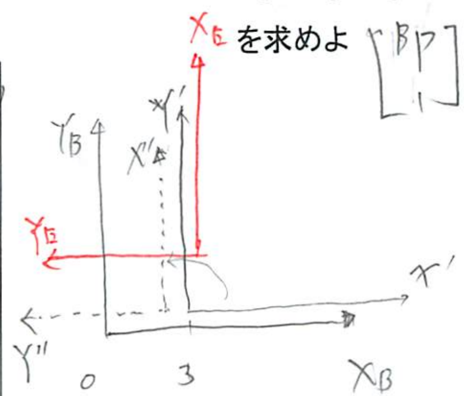
$\mathrm{Trans}(3,0)=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\mathrm{Rot}(\frac{\pi}{2})=\begin{bmatrix}C\frac{\pi}{2}&-S\frac{\pi}{2}&0\\S\frac{\pi}{2}&C\frac{\pi}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\mathrm{Trans}(1,0)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\mathrm{Trans}(3,0)\,\mathrm{Rot}(\frac{\pi}{2})\,\mathrm{Trans}(1,0)$

$=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$



演習2-2

- ${}^BT_E$ を用いて，座標系Σ_Eで点Pを見た位置ベクトル ${}^E\boldsymbol{p}=[3\quad 1]^T$ から，点Pを座標系Σ_Bで見た位置ベクトル ${}^B\boldsymbol{p}$ を求めよ

$\begin{bmatrix}{}^Bp\\1\end{bmatrix}={}^BT_E\begin{bmatrix}{}^Ep\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$

${}^Bp=[2\quad 4]^T$

※同次変換行列を表すとき，下記のようなルールで書かれることが多い

②この座標系で見た位置ベクトルに変換する

①この座標系で見た位置ベクトルを

$${}^{B}T_{E}$$