1

第2回：周波数応答とボード線図

制御工学Ⅱ

SETSUDAI

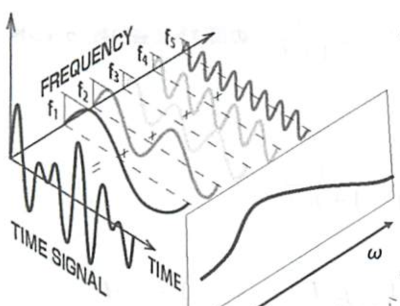
制御工学Ⅰの復習を中心に
- 周波数応答
- 正弦波入力に対する時間応答
- 主な要素の周波数応答とボード線図

古典制御は図形的理解が基本
ブロック線図
ボード線図
ベクトル軌跡
ナイキスト線図

振動波形（時間）と周波数（振動数）

2 SETSUDAI

周波数スペクトル

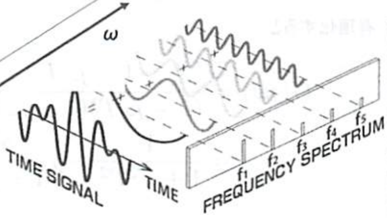


伝達関数

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\rightarrow G(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

G(s) に対し s=jω と代入した G(jω) を計算する。

G(jω)を周波数伝達関数あるいは周波数応答関数と呼ぶ



伝達先の伝達関数で大きさと位相が変化して出力される。

ノート
ラプラス変換とフーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt$$

t<0でf(t)が0であればs=jωと置くとおなじになる。

フーリエ変換 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

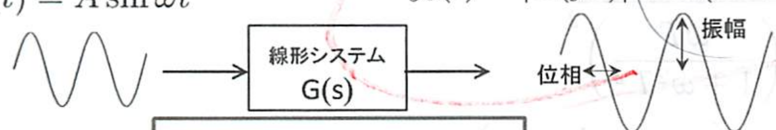
周波数応答　波形は振幅と位相と周波数で決まる

3 SETSUDAI

- システムに正弦波信号を入力したときの出力信号（応答）。
- 正弦波信号を入力すると，定常状態においては，出力も正弦波となる。ただし，入力信号の角周波数ωに応じて出力の $\boxed{\text{振幅と位相}}$ が変化する。

$$u(t)=A\sin\omega t$$

$$y_s(t)=|G(j\omega)|A\sin(\omega t+\theta)$$



s=jω　と代入した　G(jω)

- 振幅の変化
  - 振幅は|G(jω)|倍される。これを，$\boxed{\text{ゲイン}}$ または利得と呼ぶ。
- 位相の変化
  - 位相は入力信号から，　θ=∠G(jω)　(またはarg G(jω))だけずれる。

正弦波入力に対する時間応答y(t)

SETSUDAI 4

改めて定常応答を $y_s(t)=B\sin(\omega t+\varphi)$ のように表すと

ゲイン* $\frac{B}{A}=\boxed{|G(j\omega)|=\sqrt{(Re[G(j\omega)])^2+(Im[G(j\omega)])^2}}$

位相 $\varphi=\boxed{\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{Im[G(j\omega)]}{Re[G(j\omega)]}}$

∴このように周波数応答は動的システムの入出力に着目して、一次から高次まで、周波数領域において統一的に扱うことができる→システムの次数を問題としない

∴実在の動的システムがあれば実験によって周波数応答を求めることができて、周波数応答が分かれば、時間応答の算出が可能である

※ $20\log_{10}\frac{B}{A}$ をゲインと呼ぶ場合も多い(単位はdB, デシベル)

積分要素の周波数応答

SETSUDAI 6

- 積分要素の伝達関数 $G(s)=\frac{K}{s}$ の周波数応答関数, ゲイン特性, 位相特性を求めよ。
- 周波数応答関数 $G(j\omega)=\frac{K}{j\omega}=\frac{Kj}{j^2\omega}=\boxed{-\frac{K}{\omega}j}$
- ゲイン特性 $|G(j\omega)|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{K}{\omega}\right)^2}=\boxed{\frac{K}{\omega}}$
- 位相特性 $\angle G(j\omega)=\boxed{}$

(実部が常に0で, 虚部が負のため)

- ωが大きくなると出力の振幅は小さくなり, 位相は常に90° 遅れることが分かる

$\tan^{-1}$

1次遅れ要素のゲイン・位相特性

SETSUDAI 7

- ゲイン特性

$\left(\text{複素数の大きさ}=\sqrt{(\text{実部})^2+(\text{虚部})^2}\right)$

$$|G(j\omega)|=\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|=\frac{|1|}{|1+j\omega T|}=\boxed{\frac{1}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}}}$$

- 位相特性

$\left(\text{偏角}=\tan^{-1}\frac{(\text{虚部})}{(\text{実部})}\right)$

$$\angle G(j\omega)=\angle\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right)=\angle 1-\angle(1+j\omega T)$$
$$=\tan^{-1}\frac{0}{1}-\tan^{-1}\frac{\omega T}{1}=\boxed{-\tan^{-1}\omega T}$$

例題:一次遅れ要素(1)

SETSUDAI 8

- 一次遅れ要素の伝達関数 $G(s)=\frac{1}{1+Ts}$ の周波数応答関数, ゲイン特性, 位相特性を求めよ。
  - 周波数応答関数
    s=jωとして計算すればよい

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+T(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega T}$$

有理化すると,

$$G(j\omega)=\frac{1-j\omega T}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)}=\frac{1-j\omega T}{1+\omega^2T^2}$$
$$=\frac{1}{1+\omega^2T^2}-j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

例題:一次遅れ要素(2)

SETSUDAI 9

- ゲイン
  複素数の大きさの求め方を用いればよい

$\left(\text{複素数の大きさ}=\sqrt{(\text{実部})^2+(\text{虚部})^2}\right)$

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2T^2}\right)^2+\left(\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{1+\omega^2T^2}\sqrt{1+\omega^2T^2}\ \left(=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\right)$$

すなわち, 入力信号に対し, 振幅が $\boxed{\frac{1}{(1+\omega^2T^2)^{1/2}}}$ 倍される

ボード線図（Bode Diagram）

周波数応答について学んできたが、
入力振幅をA、角周波数をωとした時の応答振幅をBとすると
その振幅比(**ゲイン**)は

$$g = 20\log_{10}\frac{B}{A} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \qquad デシベル[dB]$$

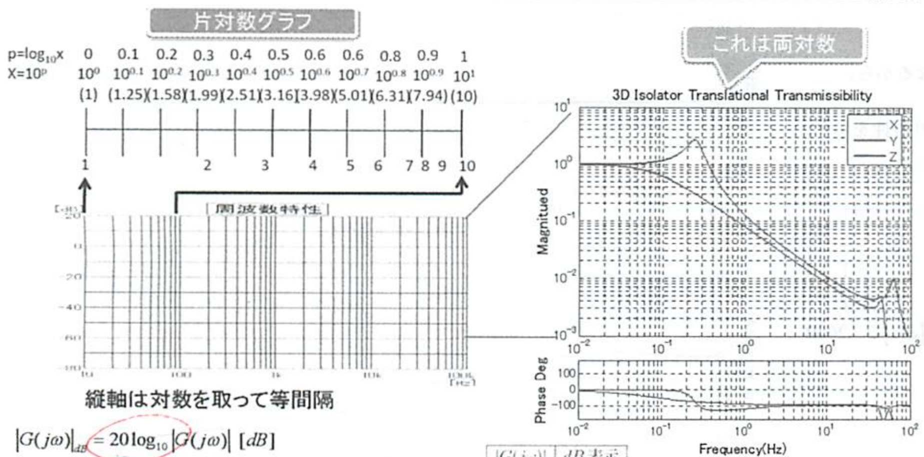
と与えられる。また**位相**の遅れ・進みは

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]} \qquad °[\mathrm{deg}]$$

と表され、これらを 対数表示した横軸に周波数ω[rad/s, Hz]とって
プロットしたゲイン線図、位相線図を合わせて**ボード線図**と呼ぶ。

横軸の周波数ω に対し $\begin{cases} |G(j\omega)| \text{ の変化を表すゲイン線図} \\ \angle G(j\omega) \text{ の変化を表す位相線図} \end{cases}$

ボード線図の読み方



縦軸は対数を取って等間隔

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$ [dB]

これは常用対数×20倍：dB⇒20log

パワーの比を$L = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$ [dB]と定義するので

大きさの比は$L = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2}{V_1^2} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$

$\lvert G(j\omega)\rvert$	dB表示
0.1	-20
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
10	20
100	40

片対数、両対数ともに用いられるが、広い領域を表す必要があり、対数尺を用いる

基本要素のボード線図(1)

■比例要素

比例要素は一定ゲインのみを有するから、
ゲイン特性は周波数に寄らず一定量を示す。

$$G(j\omega) = K$$
$$g = |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|K| \ [dB]$$
$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{0}{K} = 0°$$

[illegible]

仮に$K = 2$を与えると$g = \boxed{}$ 6.020…≒6
ゲインは比例定数によって上下するが、位相は0°で変化しない。

20 log10 |2|

基本要素のボード線図(2)

■積分要素

積分のゲインを$\frac{1}{T}$として$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$となるから、
ゲイン特性は右下がりの特性を示す。

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$
$$g = |G(j\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\omega T \ [dB]$$
$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega T}{0} = -90°$$

ゲイン特性はωが10倍(1decade)になると-20dB小さくなる。
また$-20\log_{10}\omega T$=0 から$\omega T = 1$であるから、$\omega = \frac{1}{T}$のとき
$\boxed{}$を横切ることになる。位相は常に90度$\boxed{}$。

0dB　　　おくれる

基本要素のボード線図(3)

■微分要素

微分のゲインをTとして$G(j\omega)=j\omega T$となるから、
ゲイン特性は右上がりの特性を示す。

$$G(j\omega)=j\omega T$$
$$g=|G(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}\omega T\ [dB]$$
$$\varphi=\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{\omega T}{0}=90^\circ$$

ゲイン特性はωが10倍(1decade)になると+20dB大きくなる。

また$20\log_{10}\omega T=0$から$\omega T=1$であるから、$\omega=\frac{1}{T}$のとき

$\boxed{\quad}$を横切ることになる。位相は常に90度$\boxed{\quad}$。
積分とは伝達関数が逆関数になっていてその特性はゲイン
位相ともに軸対象となる。

進む

0dB

基本要素のボード線図

■ 比例要素：位相には何もしない

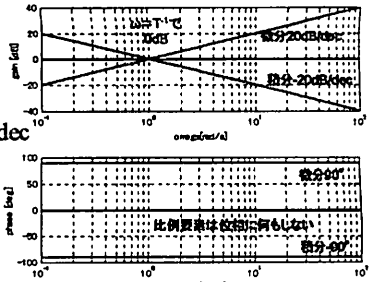
$$G(j\omega)=K$$
$$g=|G(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}|K|\ [dB]$$
$$\varphi=\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{0}{K}=0^\circ$$

■ 積分要素：T^{-1}で0dB, -20dB/dec

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega T}$$
$$g=|G(j\omega)|_{dB}=-20\log_{10}\omega T\ [dB]$$
$$\varphi=\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\frac{\omega T}{0}=-90^\circ$$

■ 微分要素：積分の逆特性

$$G(j\omega)=j\omega T$$
$$g=|G(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}\omega T\ [dB]$$
$$\varphi=\angle G(j\omega)=\tan^{-1}\frac{\omega T}{0}=90^\circ$$



一次遅れ要素

一次遅れ要素の周波数伝達関数は$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$となるから、

ゲイン特性は$\omega\geq\frac{1}{T}$において積分要素と同じ右下がり特性を示す。

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

$g=$

$\varphi=$

ゲイン特性は$\omega\leq\frac{1}{T}$において$0[dB]$、$\omega\geq\frac{1}{T}$において$1[\mathrm{dec}]$で-20dB
で小さくなる。

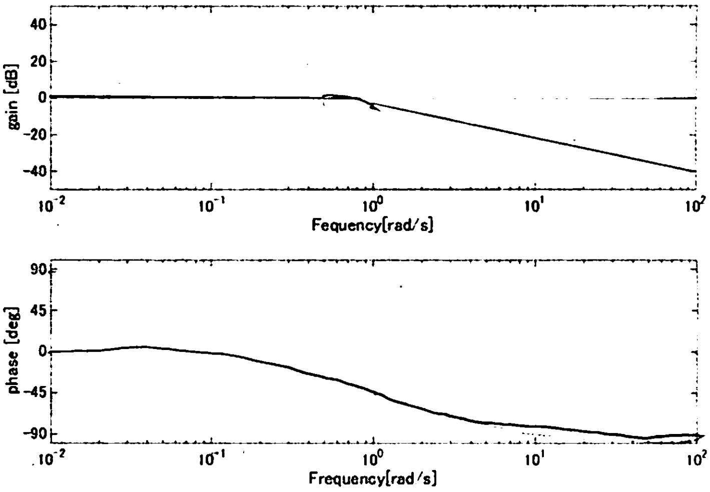
また$\omega=\frac{1}{T}$のとき$g=-3[dB]$である。

1に何とき $\omega=1,\ g=-3$

$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$

一次遅れ要素のボード線図

■時定数T=1として1次遅れ系のボード線図を書いてみよう



二次遅れ要素

二次遅れ要素の伝達関数は$\frac{\omega}{\omega_n}=u$とおいて$G(j\omega)=\frac{1}{1-u^2+j2\zeta u}$となる。

$$G(j\omega)=\frac{1}{1-u^2+j2\zeta u}$$

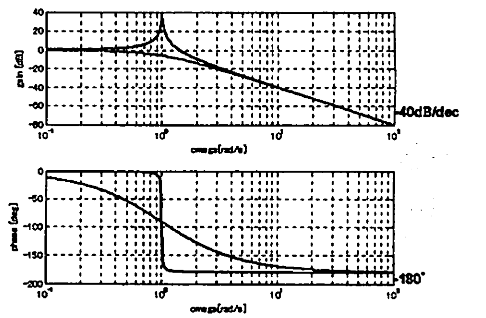
$g=$ $|G(j\omega)|_{dB}=-20\log_{10}((1-u^2)^2+(2\zeta u)^2)^{1/2}$ $[dB]$

$\varphi=$ $\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\{(2\zeta u)/(1-u^2)\}$ $[°]$

ゲイン特性はu□ 1において$0[dB]$、u□ 1において$1[\mathrm{dec}]$で-40dB
で小さくなる。u=1の近傍は共振領域である。
同様に位相はu□ 1において0°であり、$u=1$において−90°、さらにu□ 1
においてさらに遅れて−180°となる。

二次遅れ要素のボード線図

■不足減衰ζ=0.01：—、臨界減衰ζ=1：—



まとめ

- ■周波数応答について、またそのゲイン、位相の求め方を得た。
- ■システムの伝達関数を部分分数に展開し、それに正弦波入力を加えたときの応答について詳細に見た。
- ■正弦波入力に対する時間応答について、ゲインと位相との関係を導いた。
- ■主な要素の周波数応答を求め、ボード線図で表現した。