第4回 ボード線図2折れ線近似
制御工学Ⅱ

SETSUDAI

基本要素のボード線図(復習)
基本要素のボード線図上の加算
折れ線近似による表現法
位相遅れ、位相進みのボード線図

- 前回:ボード線図1
  - 対数に強くなる
  - 周波数応答とボード線図
  - 基本要素のボード線図

1次系 $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$

ゲイン(デシベル値)

$$20\log|G(j\omega)|=20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

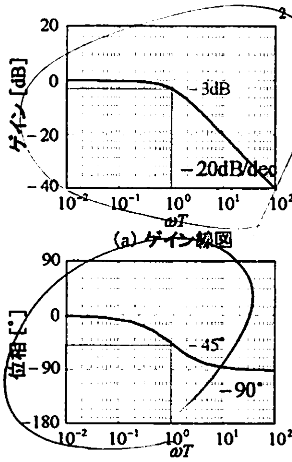
$$\angle G(j\omega)=-\angle(1+j\omega T)=-\tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega T \ll 1 \quad G(j\omega)\approx 1$

$\omega T \gg 1 \quad G(j\omega)\approx \dfrac{1}{j\omega T}$

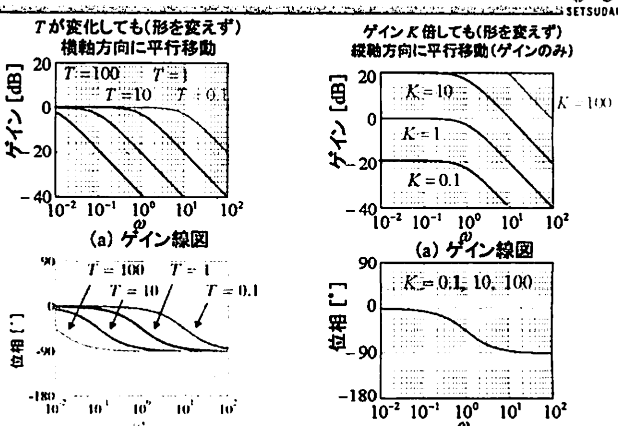
$$\begin{cases} \omega T \ll 1 & 20\log|G|\approx 20\log 1 = 0\ \text{dB} \\ & \angle G = 0^\circ \\ \omega T = 1 & 20\log|G| = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \text{dB} \\ & \angle G = -45^\circ \\ \omega T \gg 1 & 20\log|G|\approx -20\log|\omega T|\ \text{dB} \\ & \angle G \approx -90^\circ \end{cases}$$

└→ $1+(\omega T)^2$ を、$(\omega T)^2$とみなす。
(近似)



(a) ゲイン線図
(b) 位相線図
図 1次系のボード線図

種々の時定数・ゲインに対する1次系のボード線図



(a) ゲイン線図　(b) 位相線図
(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

伝達関数の逆と合成

■ゲインや位相の性質を用いると、一般的な伝達関数のボード線図も一次遅れ要素や二次遅れ要素といった典型的な伝達関数のボード線図をグラフ上で反転させたり、加え合わせたりすることによって容易に得ることができる。

性質(1):$H(s)=1/G(s)$のときに次の式が成り立つ

$\boxed{20\log_{10}|H(j\omega)| = -20\log_{10}|G(j\omega)|}$　$\angle H(j\omega) = -\angle G(j\omega)$

性質(2):$H(s)=G_1(s)G_2(s)$のときに次の式が成り立つ

$$\boxed{\begin{array}{l} 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}|G_1(j\omega)| + 20\log_{10}|G_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{array}}$$

性質(1)は微分要素と積分要素の関係と同じく、ゲイン線図では0[dB]で上下を反転させ、位相線図では0[deg]で上下を反転させることによって得られる。性質(2)ではそれぞれ加算すればよい。

2重積分系

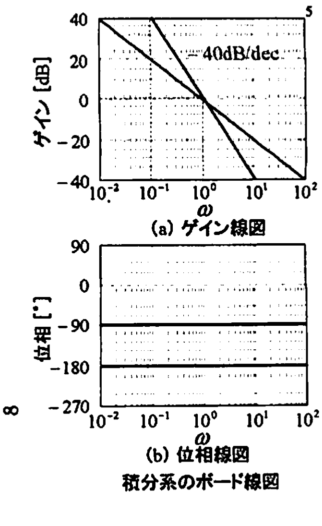
$$G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}$$

ゲイン(デシベル値)

$$20\log\frac{1}{|(j\omega)^2|}=20\log\frac{1}{\omega^2}$$
$$=-40\log|\omega|$$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j\omega}+\angle\frac{1}{j\omega}=-\tan\infty-\tan\infty$$
$$=-180^\circ$$



(a) ゲイン線図
(b) 位相線図
積分系のボード線図

1次遅れ伝達関数を直線で近似する

6 安田1

1次遅れの伝達関数は$G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$となるから

$|G(j\omega)|_{dB}=20\log 1-20\log|1+j\omega T|=-20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$

これを$\omega=T^{-1}$(折れ点周波数という)の前後で分けて直線で近似すると

$\approx -20\log 1|_{\omega\le T^{-1}}-20\log\omega T|_{\omega\ge T^{-1}}$

のように描ける。 ≒ ω<<1　≒ ω>>1

位相は$\angle G(j\omega)=-\angle(1+j\omega T)=-\tan\omega T$となるから

これを$\omega=T^{-1}$のとき-45°を通り、傾き$-64.3\mathrm{deg}/\omega$の傾斜を取る。

一方ω□ T^{-1}で0°であり,ω□ T^{-1}で-90°は明らかであるから

各々を通る3本の直線で近似する。

このときの直線の交点は$\omega=0.2T^{-1}$と$\omega=5T^{-1}$である。

$\angle G(j\omega)\approx 0|_{\omega\le 0.2T^{-1}}-64.3\log\omega|_{0.2T^{-1}<\omega<5T^{-1}}-90|_{\omega\ge 5T^{-1}}$

のように描ける。

付録:1次遅れ・進み位相線図の傾き計算

7

$\varphi=-\tan^{-1}\omega$を微分して傾きを求める。

$\dfrac{d\varphi}{d\omega}=-\left(\tan^{-1}\omega\right)'=-\dfrac{1}{1+\omega^2}$であるが

ωは対数スケールなので$\omega=10^x$から真数xに置き換えて

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{d\omega}{dx}=\frac{-1}{1+\omega^2}\frac{d\omega}{dx}=\frac{-1}{1+\left(10^x\right)^2}\frac{d10^x}{dx}=\frac{-1}{1+10^{2x}}\ln 10\cdot 10^x=-2.3\frac{10^x}{1+10^{2x}}$$

これにω=1すなわち$x=0$を代入して

$\dfrac{d\varphi}{dx}=-\dfrac{2.3}{2}=-1.15[\mathrm{rad/x}]=-65.9[\mathrm{deg/x}]$となる。$\varphi$が90度になるスパンxは

$\mathrm{x}=\dfrac{-90}{-65.9}=1.366$となり、近似的に$\mathrm{x}\approx\log 5-\log 0.2=1.4$として用いる。

$\mathrm{x}=1.4$とすると$\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{-90}{1.4}=-64.3[\mathrm{deg/x}]$となる。

$\varphi=\tan^{-1}\omega$とφがプラスであれば$\dfrac{d\varphi}{dx}=64.3[\mathrm{deg/x}]$と傾斜もプラスになる。

折れ線近似

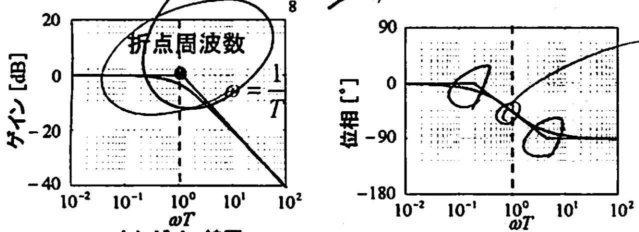
(ゲイン) 0 dB と -20 dB/dec の 2 本の直線

(位相) $\omega\le\dfrac{0.2}{T}$ で 0°

$\omega\ge\dfrac{5}{T}$ で -90°

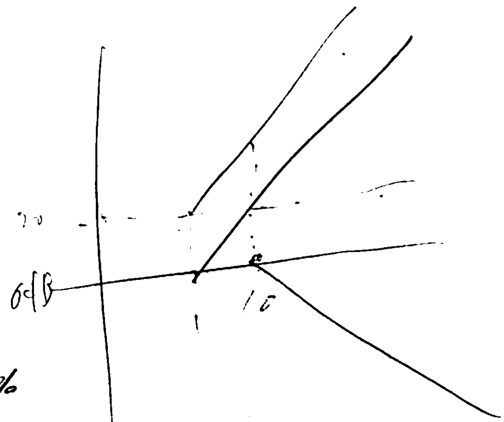
重要

8



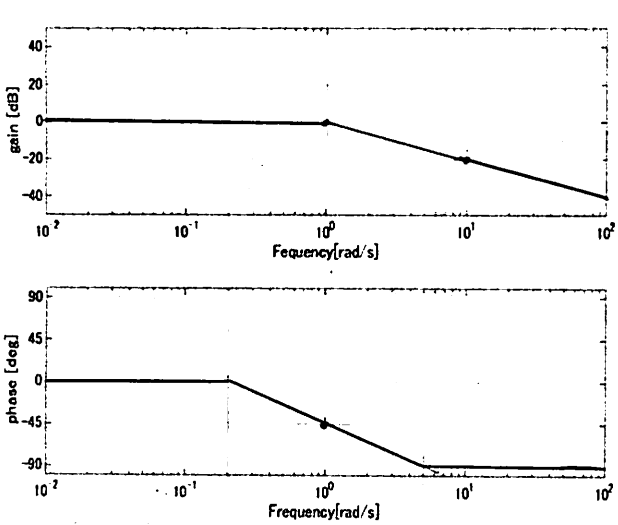
(a) ゲイン線図　(b) 位相線図

1 次系のボード線図



T=1と10の一次遅れ要素を直線で

9



折れ線近似の描き方

① ゲイン線図の折れ点(T^{-1},0)にマークし、位相線図の(T^{-1},-45)にマークする。

② (0,0)折れ点(T^{-1},0)をむすび、(T^{-1},0)と($10T^{-1}$,-20), ($100T^{-1}$,-40)結ぶ。ゲイン線図ができる。

③ 位相線図に折れ点($0.2T^{-1}$,0) ($5T^{-1}$,-90)を追加して傾斜角を結ぶ。$0.2T^{-1}$より低周波は0、$5T^{-1}$より大きい周波数は-90の一定値をとる

④ 折れ点の周波数を書いて出来上がり。

1.0

($10T^{-1}$, -20) :($\frac{10}{T}$, -20) (10, -20)

$100T^{-1}$, -40

$\frac{100}{T}$, -40

= 100, -40

$\frac{0.2}{1}$, 0

(.2

$\frac{0.2}{T}$ = 0.2

1次進み伝達関数を直線で近似する

1次進みの伝達関数は$G(j\omega)=1+j\omega T$となるから

$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}}=20\log 1+20\log|1+j\omega T|=20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

これを$\omega=T^{-1}$（折れ点周波数という）の前後で分けて直線で近似すると

$$\approx 20\log 1\big|_{\omega\le T^{-1}}+20\log \omega T\big|_{\omega\ge T^{-1}}$$

のように描ける。

位相は$\angle G(j\omega)=\angle(1+j\omega T)=\tan\omega T$となるから

これを$\omega=T^{-1}$のとき45°を通り、傾き64.3deg/$\log\omega$の傾斜を取る。

一方ω□ T^{-1}で0°であり,ω□ T^{-1}で90°は明らかであるから

各々を通る3本の直線で近似する。

このときの直線の交点は$\omega=0.2T^{-1}$と$\omega=5T^{-1}$である。

$$\angle G(j\omega)\approx 0\big|_{\omega\le 0.2T^{-1}}+64.3\log\omega\big|_{0.2T^{-1}<\omega<5T^{-1}}+90\big|_{\omega\ge 5T^{-1}}$$

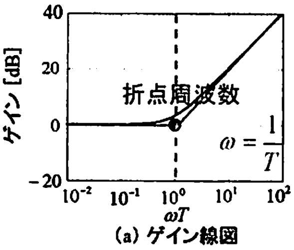
のように描ける。

1次進み系の折れ線近似

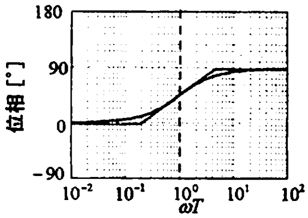
（ゲイン）0 dB と 20 dB/dec の 2 本の直線

（位相）$\omega\le\frac{0.2}{T}$ で 0°

$\omega\ge\frac{5}{T}$ で 90°



(a) ゲイン線図



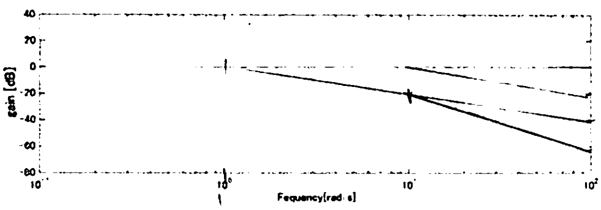
(b) 位相線図

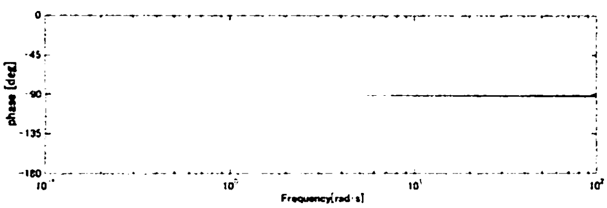
1 次系のボード線図

演習　関数の合成

■時定数T=1とT=0.1の一次遅れ要素の重ね合わせをボード線図の折れ線近似で描け

$$伝達関数は G(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}=\frac{1}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$$





位相遅れ要素

■一次遅れの極T_1^{-1}が低周波になるように一次進み要素（極が遅れ要素より高い周波数T_2^{-1}）を重ね合わせると、$\omega_1=T_1^{-1}$と$\omega_2=T_2^{-1}$の間の位相が遅れる

■$\omega_2>\omega_1$の条件で0~90° の位相遅れ特性が得られる

$$伝達関数は G(j\omega)=\frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)}$$

$$20\log_{10}|G(j\omega)|=-20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T_1)^2}+20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T_2)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T_1+\tan^{-1}\omega T_2$$

$T_1=\alpha T_2$（ただし$\alpha>1$）として、折れ線近似で考えると、

ゲイン特性はT_1^{-1}から-20dB/decで減少して$-20\log_{10}\alpha$で一定となる。

位相特性は$\omega=0,\omega=\infty$では0°であり$\omega=T_2^{-1}(\alpha^{-1}+1)/2$で最大遅れとなる。

位相進み要素

■一次進み要素の極T_2^{-1}が代表極（低い側）に来るように一次遅れ要素を重ね合わせると、$\omega_1=T_1^{-1}$と$\omega_2=T_2^{-1}$の間の位相が進む

■$\omega_1>\omega_2$の条件で0~90° の位相進み特性が得られる

$$伝達関数は G(j\omega)=\frac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)}$$

$$20\log_{10}|G(j\omega)|=-20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T_1)^2}+20\log_{10}\sqrt{1+(\omega T_2)^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T_1+\tan^{-1}\omega T_2$$

$T_1=\alpha T_2$（ただし$0<\alpha<1$）として、折れ線近似で考えると、

ゲイン特性はT_1^{-1}から20dB/decで増大して$20\log_{10}\alpha$で一定となる。

位相特性は$\omega=0,\omega=\infty$では0°であり$\omega=T_2^{-1}(\alpha^{-1}+1)/2$で最大進みとなる。

位相遅れと進み要素のまとめ

15 SETSUDAI

- 一次遅れと一次進み要素を重ね合わせると、$\omega_1 = T_1^{-1}$と$\omega_2 = T_2^{-1}$の間の位相が進むあるいは遅れる
- $\omega_2 > \omega_1$の条件で0~90° の位相遅れ特性が得られ、$\omega_2 < \omega_1$の条件で0~90° の位相進み特性が得られる

伝達関数は$G(j\omega) = (1+j\omega T_2)/(1+j\omega T_1)$

$$g = 20\log|G(j\omega)| = -20\log\sqrt{1+(\omega T_1)^2} + 20\log\sqrt{1+(\omega T_2)^2}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2$$

■遅れる場合

$$g\Big|_{T_1^{-1} \le T_2^{-1}} \approx 0\Big|_{\omega \le T_1^{-1}} - 20\log\omega T_1\Big|_{T_1^{-1} \le \omega \le T_2^{-1}} - 20\log T_2^{-1}T_1\Big|_{T_2^{-1} \le \omega}$$

$$\varphi\Big|_{T_1^{-1} \le T_2^{-1}} \approx 0\Big|_{\omega \le 0.2T_1^{-1}} - 64.3\log\omega\Big|_{0.2T_1^{-1} \le \omega \le 5T_1^{-1}} - 90\Big|_{5T_1^{-1} \le \omega \le 5T_2^{-1}} + 64.3\log\omega\Big|_{0.2T_2^{-1} \le \omega \le 5T_2^{-1}} + 0\Big|_{5T_2^{-1} \le \omega}$$

■進む場合

$$g\Big|_{T_2^{-1} \le T_1^{-1}} \approx 0\Big|_{\omega \le T_2^{-1}} + 20\log\omega T_2\Big|_{T_2^{-1} \le \omega \le T_1^{-1}} + 20\log T_1^{-1}T_2\Big|_{T_1^{-1} \le \omega}$$

$$\varphi\Big|_{T_2^{-1} \le T_1^{-1}} \approx 0\Big|_{\omega \le 0.2T_2^{-1}} + 64.3\log\omega\Big|_{0.2T_2^{-1} \le \omega \le 5T_2^{-1}} + 90\Big|_{5T_2^{-1} \le \omega \le 5T_1^{-1}} - 64.3\log\omega\Big|_{0.2T_1^{-1} \le \omega \le 5T_1^{-1}} + 0\Big|_{5T_1^{-1} \le \omega}$$

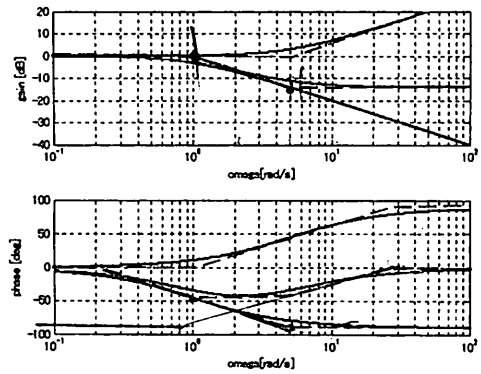
~0.02 , 0.02~0.5 , 0.5~50　2~50 ; 50~

位相遅れ要素

16 SETSUDAI

■時定数T_1=1とT_2=0.2の位相遅れ要素をボード線図で描け、折れ線近似で良い

伝達関数は$G(j\omega) = \dfrac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)} = \dfrac{(1+0.2j\omega)}{(1+j\omega)}$

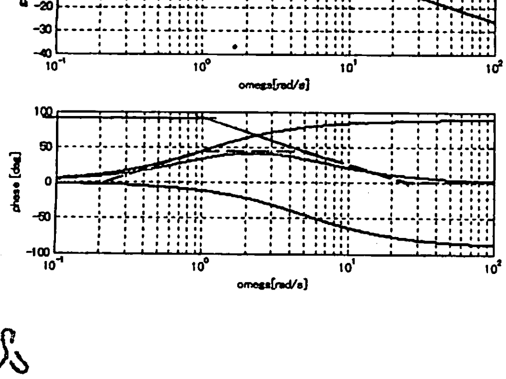


位相進み要素

17 SETSUDAI

■時定数T_1=0.2とT_2=1の位相進み要素をボード線図で描け
折れ線近似で良い

伝達関数は$G(j\omega) = \dfrac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)} = \dfrac{(1+j\omega)}{(1+0.2j\omega)}$



まとめ

18 SETSUDAI

- 基本要素のボード線図について復習して、その折れ線表示について学んだ。
- 折れ線表示を用いて、関数の加算をボード線図上で行った。
- 1次遅れ、1次進み要素を合成すると、位相進み、位相遅れ要素と呼ばれる関数が構成されることを学習した。
- 位相を遅らせたり、進めたりすることは制御にとって特性を高める重要な操作。