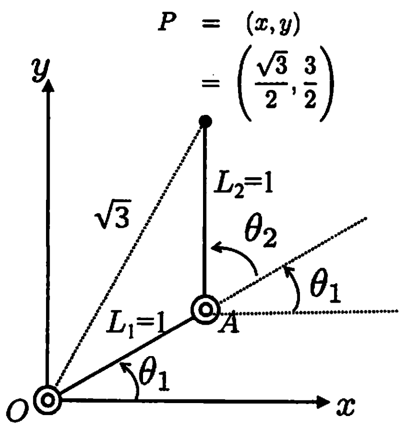
数値例

$L_1 = L_2 = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3}{2}$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{3}$

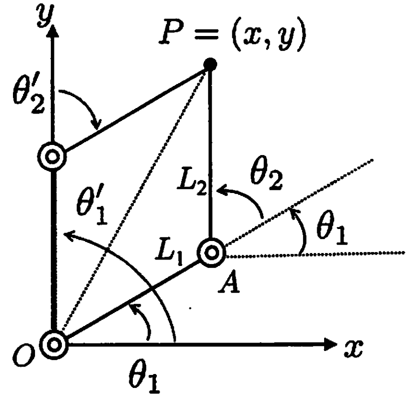


前項までの結果から,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\\ \theta_2 &= \pi - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

複数解の存在

$L_1 = L_2 = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3}{2}$



このとき,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6},\ \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

の他に

$$\theta_1' = \frac{\pi}{2},\ \theta_2' = -\frac{\pi}{3}$$

も解である。

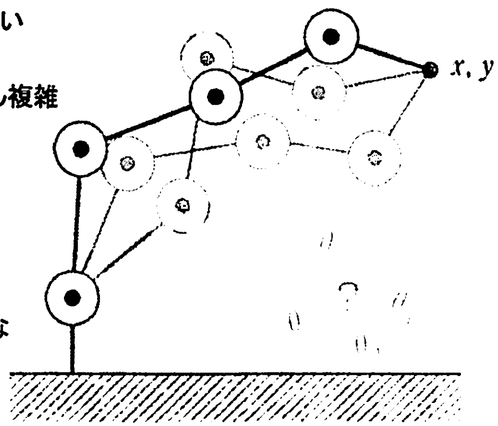
解に(0以上などの)条件をつけることで, 絞り込める

さらに複雑な場合は

- 順運動学計算
  - 自由度が増えても対応しやすい
- 逆運動学計算
  - 自由度が多い場合はどんどん複雑になる
  - 解が一意に決まらない

⇩

- ロボットの構造によらない方法はないか?



図出典:木野・谷口, イラストで学ぶロボット工学

(復習)偏微分

- 多変数関数を, ある1変数に関して微分することを偏微分という
- 注目する変数以外は定数として, (従来の)微分の操作をすれば良い
- 注目する変数方向の変化率を表している

- 例として, 以下のようなxとyの2つの変数から値が決まる関数fを考える

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3$$

- 関数fのxによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 0$$

x^2の微分　xyの微分　y^3の微分(=0)

, yを定数としてxを微分

- 関数fのyによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x + 3y^2$$

, xを定数としてyを微分

∂ はラウンドと読む

（復習）ヤコビ行列（Jacobian matrix）

順運動学の計算により，手先位置x，yと関節角度θ_1，θ_2について

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta_1,\theta_2) \\ f_2(\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix}$$

例）$f_1(\theta_1,\theta_2) = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
$f_2(\theta_1,\theta_2) = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

の関係が得られているとする。両辺を微分すると

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix}$$

全微分といわれる

行列として整理すると

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix}$$

この行列をヤコビ行列という

ヤコビ行列（Jacobian matrix）

ここで，手先位置ベクトル　$\boldsymbol{r} = [x \quad y]^T$　　ヤコビ行列　$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\theta_2} \end{bmatrix}$

関節角度ベクトル　$\boldsymbol{q} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$

とおくと，

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial\theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix}$$

は

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}$$

各関節の速度（$\dot{q}$）に対し，手先の速度（$\dot{r}$）がどう変化するかを表している

さらに，　Jに逆行列があれば，

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$$

手先の速度（$\dot{r}$）に対し，各関節の速度（$\dot{q}$）がどう変わるかを表している

となる

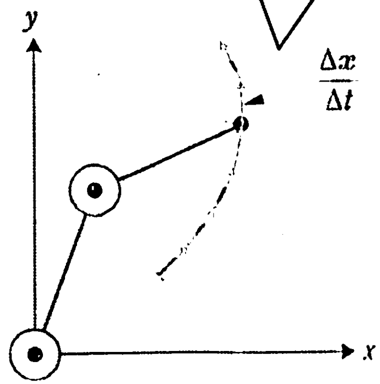
分解速度法による軌道制御

- こう動かしたいという手先位置の目標軌道（各時刻での位置）が与えられている
- これを微分すれば，各時刻での軌道上の目標速度が分かる

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$$

- 上式で，目標速度に必要な各関節の速度を求め，関節を動かす
- ごく短い時間間隔Δtごとに繰り返し計算し，動かしていくことで目標軌道を達成する。

細かい区間ごとに，手先の速度に必要な関節の速度を計算



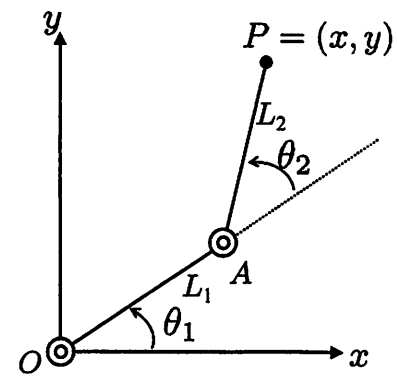
図出典：木野・谷口，イラストで学ぶロボット工学

- 逆運動学計算を直接行わずに，手先の軌道制御を実現できる！

計算例

- 順運動学計算により

$$\begin{cases} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$



- ヤコビ行列Jは

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y}{\partial\theta_2} \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{matrix} -L_1\sin\theta_1 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{matrix}}$$