

第13回 フィードバック制御系の設計例(1)

制御工学Ⅱ



設計例(1) モータを動かしてみる

- ループ整形法の復習
- モータのモデル化
- 設計仕様の設定
- 一巡伝達関数とコントローラの設計
- 設計の評価

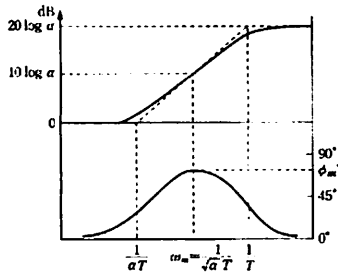
小テスト・中間テストで点数の低かった回、あるいは欠席して未提出の回を教材ホルダー小テスト用紙を用いて再解答して14回(1/6)もしくは1/14(火)までに提出BOXに提出してください。減点分の70%を上限(欠席分は50%が上限)として加点評価します。返却は15回(1/20)になります。

再) 位相進み補償

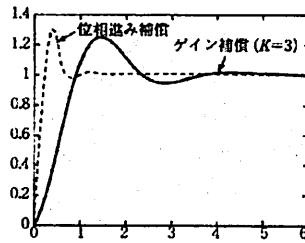


位相を ω_m 周辺で進ませる。高周波領域でゲインを増大させる。
位相を進ませることで位相余裕を改善し、減衰性を確保しつつ、速応性を改善することができる。

$$C(s) = \frac{K(1 + \alpha Ts)}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$



位相進み補償器のボード線図



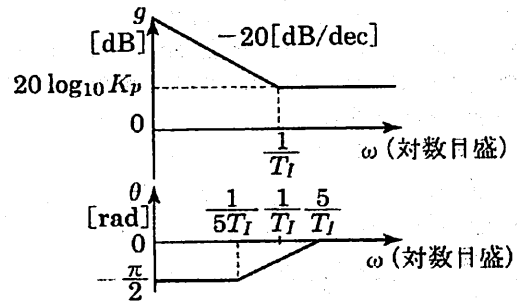
ステップ応答の比較

再) PI補償



高周波領域では変化が少ないが、低周波領域でゲイン特性を大きくしている。
積分要素により、ステップ入力に対する定常偏差を0にすることができる。
位相遅れが安定性を損なう恐れもある。

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$



再) ループ整形演習1



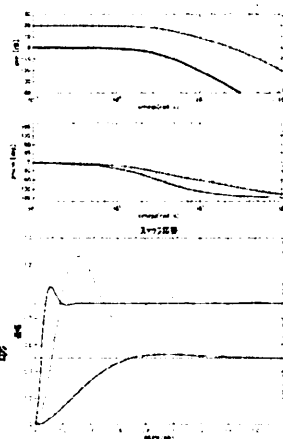
制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して
あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い
緑線の結果を得た。

さらに振動性状を改善するためにゲイン
交差周波数付近にある補償を行った。

最初は ①ゲイン補償
次は ②位相進み補償、
パラメータは

$$C(s) = \frac{10}{(0.03s + 1)} \left(\frac{0.3s + 1}{s + 1} \right)$$

ゲイン補償を行った時の交差周波数と位相余裕
 $\omega_{gc} = 9.58 \text{ rad/s}$ $\text{Pm} = 35.1^\circ$
が、位相進み補償によって
 $\omega_{gc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $\text{Pm} = 60.4^\circ$



再) ループ整形演習2



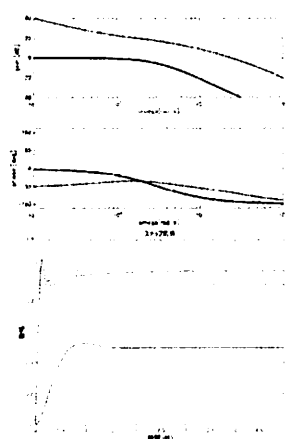
制御対象 $P(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 10}$ に対して
あるゲイン補償 $C(s) = K$ を行い
さらに振動性状を改善するためにゲイン
交差周波数付近に位相進み補償を行い

$C(s) = K \frac{0.3s + 1}{0.03s + 1}$ 破線の結果を得た。
それでも定常偏差が残るために、交差
周波数付近に影響を与えない範囲:

折れ点周波数 $\frac{1}{T} < \frac{\omega_{gc}}{5}$ となる
積分器を含むPI補償を行った。
追加した補償器は

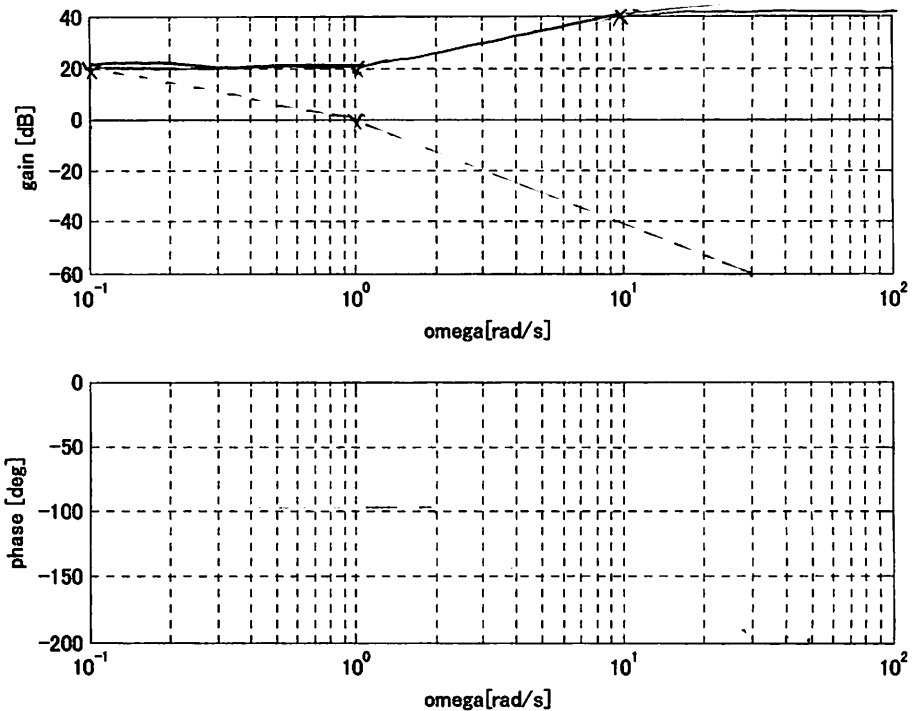
$$C2(s) = C(s) \frac{1}{s}$$

位相進み補償 $\omega_{gc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $\text{Pm} = 60.4^\circ$
PI 補償 $\omega_{gc} = 24.2 \text{ rad/s}$ $\text{Pm} = 58.0^\circ$



プラントが $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 、制御器が $C(s) = \frac{10(s+1)}{0.1s+1}$ のとき、それぞれをボード線図で示し
 開ループ $L(s)=C(s)P(s)$ を図に示せ

補償に関する演習



13.3-1 DCモータのモデル化



電源電圧 v [V], 抵抗 R [Ω], インダクタンス L [H]

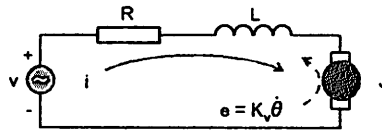
ロータ慣性モーメント J [Nm·s²/rad], 粘性抵抗 b [Nm·s/rad], トルク定数 K_T [Nm/A]

電圧定数 K_v [V·s/rad], 発生トルク T [Nm], 逆起電力 e [V], コイル電流 i [A],

モータ回転角 θ [rad] とすると

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + b \frac{d \theta(t)}{dt} = K_T i(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) - K_v \frac{d \theta(t)}{dt}$$



ラプラス変換を行い伝達関数を求めると

$$(Js + b)\Theta s = K_T I, \quad (Ls + R)I = V - K_v \Theta s \quad \text{から } I \text{ を消して}$$

$$(Js + b)(Ls + R)\Theta s + K_T K_v \Theta s = K_T V \quad \text{を得る.}$$

よって $G(s) = \frac{\Theta s}{V} =$

13.3-2 モデルの同定 Identification



電圧を入力として角速度を出力とする伝達関数は二次遅れ系であった。

これを周波数伝達関数に直し、ボード線図に描いてみる。

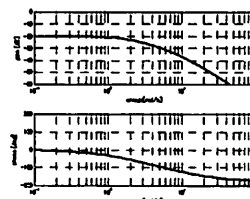
係数は設計図書から

$J = 0.01, b = 0.1, L = 0.5, R = 1, K_T = K_v = 0.01$ とすると

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

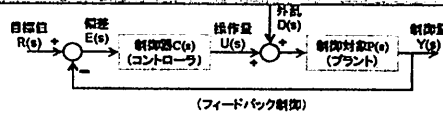
から $\omega_n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, K = 0.1, \zeta = 1.34$ となるからゲインは -20dB

で折れ点は そこから dB / dec で減少する。



求めた伝達関数は実験によって比較的簡単に計測できる。計測によって検証し、数式モデルを認証、確定する作業を同定という。

13.4-1 DCモータのフィードバック制御

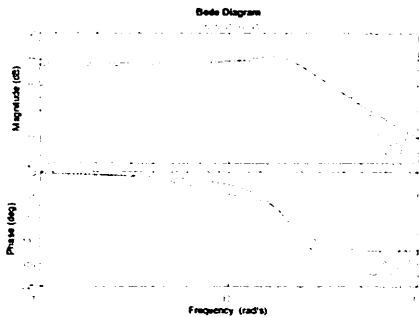


求めたDCモータを上記のようなフィードバック制御で速度応答を高めることを考える。

【ステップ1】モデル誤差、目標値、外乱などの性質を見積もって設計仕様を設定する。モデル誤差としては高次のシャフトモードなどが存在する。

- ① に関して、位相余裕が 40° 以上であること
- ② に関しては、 0.05rad/s 以下の低周波で正弦波信号に対する追従誤差を1%以内とする
- ③ について 0.1rad/s 以下の正弦波外乱の出力への影響を1%以下に抑えること
- ④ に関して、 100rad/s 以上の高周波においてモデル誤差 $|\delta(j\omega)| < 10$ において安定であること

モデル誤差



13.4-2 【ステップ2】設計仕様の数値表現

- ①位相余裕が 40° 以上であるためには $|P(j\omega)C(j\omega)|=1$ となる周波数において $180^\circ + \angle P(j\omega)C(j\omega) > 40^\circ$ が成り立てばよい。
- ②目標追従性能は 0.05rad/s 以下の周波数領域で $\left| \frac{E(s)}{R(s)} \right| = \frac{1}{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|} < 0.01$ であればよい。
- ③外乱除去は 0.1rad/s 以下の周波数領域で $\left| \frac{Y(s)}{D(s)} \right| = \frac{P(j\omega)}{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|} < 0.01$ であればよい。
- ④モデル誤差 $\delta(j\omega)$ に対する安定性は 100rad/s 以上の高周波数において $\left| \delta(j\omega) \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < 1$ であればスモールゲイン定理から安定。
よって $|\delta(j\omega)| < \frac{|1 + P(j\omega)C(j\omega)|}{|P(j\omega)C(j\omega)|}$ から開ループ であればよい。

スモールゲイン定理

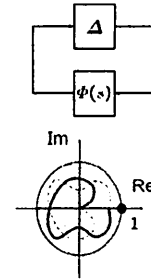
開ループ系がロバスト安定となるための必要十分条件は

- $\Phi(s)$ は安定
- $\|\Phi\|_\infty < 1$

(十分性) $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ より

$$|\Phi(j\omega)\Delta(j\omega)| = |\Phi(j\omega)| \cdot |\Delta(j\omega)| \leq |\Phi(j\omega)| < 1$$

ナイキスト軌跡は常に単位円内に存在する

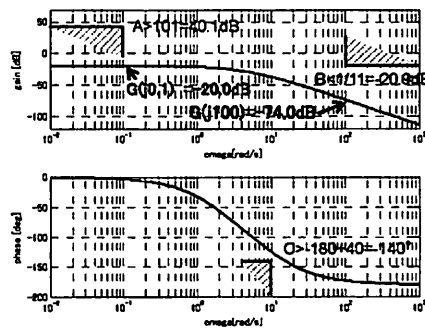


13.4-3 【ステップ3】設計仕様の開ループ表現

すべてを一巡伝達関数の条件に直す

- ①位相余裕が 40° 以上であるためには $|P(j\omega)C(j\omega)|=1$ となる周波数において $\angle P(j\omega)C(j\omega) > -140^\circ$ が成り立てばよい。
- ②目標追従性能は 0.05rad/s 以下の周波数領域で $|1 + P(j\omega)C(j\omega)| > 100$ から $|P(j\omega)C(j\omega)| > \text{}$ であればよい。
- ③外乱除去は 0.1rad/s 以下の周波数領域で $|P(j\omega)| < 1$ だから②が成立すればよい。
- ④モデル誤差 $\delta(j\omega) \geq 10$ に対する安定性は 100rad/s 以上の高周波数において $\left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{10}$ から開ループ $|P(j\omega)C(j\omega)| < \text{}$ であればよい。

13.4-4 【ステップ4】コントローラの設計



A-B間でゲインの差は61dB必要だが、プラント特性は54dBしかない。よって比例補償だけでは要求を満たすことはできない。

プラントゲインを45dBアップして、 $0.01\text{--}1\text{rad/s}$ の間で40dBの位相遅れ補償を導入する

13.4-5 コントローラの設計

ゲインは45dBと40dBから低周波 0.01rad/s 以下で85dBの増加
 $K=1.78E4$ として位相遅れは

$$T=1, \alpha = \exp\left(\frac{40}{20}\right) = 100 \text{ から}$$

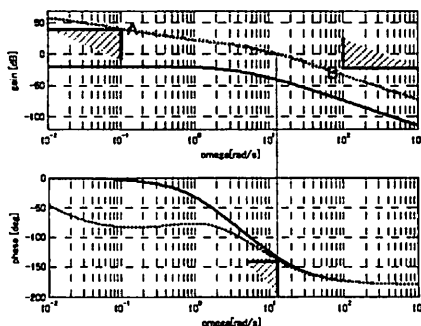
$$\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1+s}{1+100s}$$

$$C(s) = 1.78E4 \frac{1+s}{1+100s}$$

として特性を求める
しかし位相余裕が厳しいので
ゲインを81dBに下げて

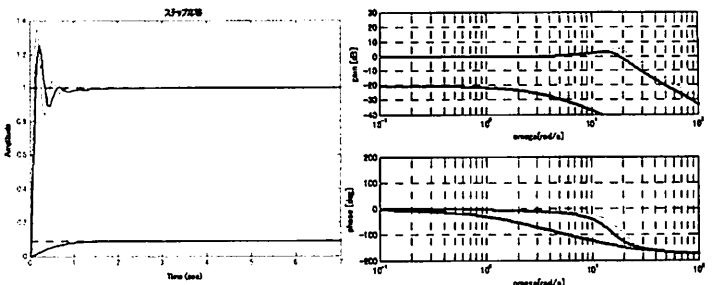
$$C(s) = 1.122E4 \frac{1+s}{1+100s}$$

とした。



13.4-6 【ステップ5】結果の確認

ステップ応答の偏差は0.001と目標をクリアして
位相余裕も $P_m = 41.1^\circ$ 交差周波数 $\omega_c = 13.3\text{rad/s}$ であった。



13.4-7 演習(PI制御器の設計1)



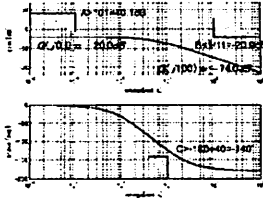
DCモータモデル

$$J = 0.01, \quad b = 0.1, \quad L = 0.5, \quad R = 1, \quad K_T = K_v = 0.01$$

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

$$\omega_n = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad K = 0.1, \quad \zeta = 1.34$$

に対してPI制御を用いてA,Bの禁止条件を満たす制御器を求めよ。


 Aは40dB at $\omega < 0.1\text{rad/s}$
 Bは-20dB at $\omega > 100\text{rad/s}$

13.4-7 演習(PI制御器の設計2)



A-B間でゲインの差は61dB必要だが、プラント特性は55dBしかない。よって比例補償だけでは要求を満たすことはできない。

プラントゲインを45dBアップして、1rad/sに折れ点を持つPI補償を導入する

DCモータモデル

$$G(s) = \frac{0.01}{0.005s^2 + 0.06s + 0.1001} \approx \frac{0.1 \cdot 20}{s^2 + 12s + 20}$$

に対してPI制御を用いてA,Bの禁止条件を満たす制御器を求めよ。

$$C(s) = K(1 + \frac{1}{T_s}) \text{ として}$$

ゲインは積分20dB+K=85dBからK=45dBとなり

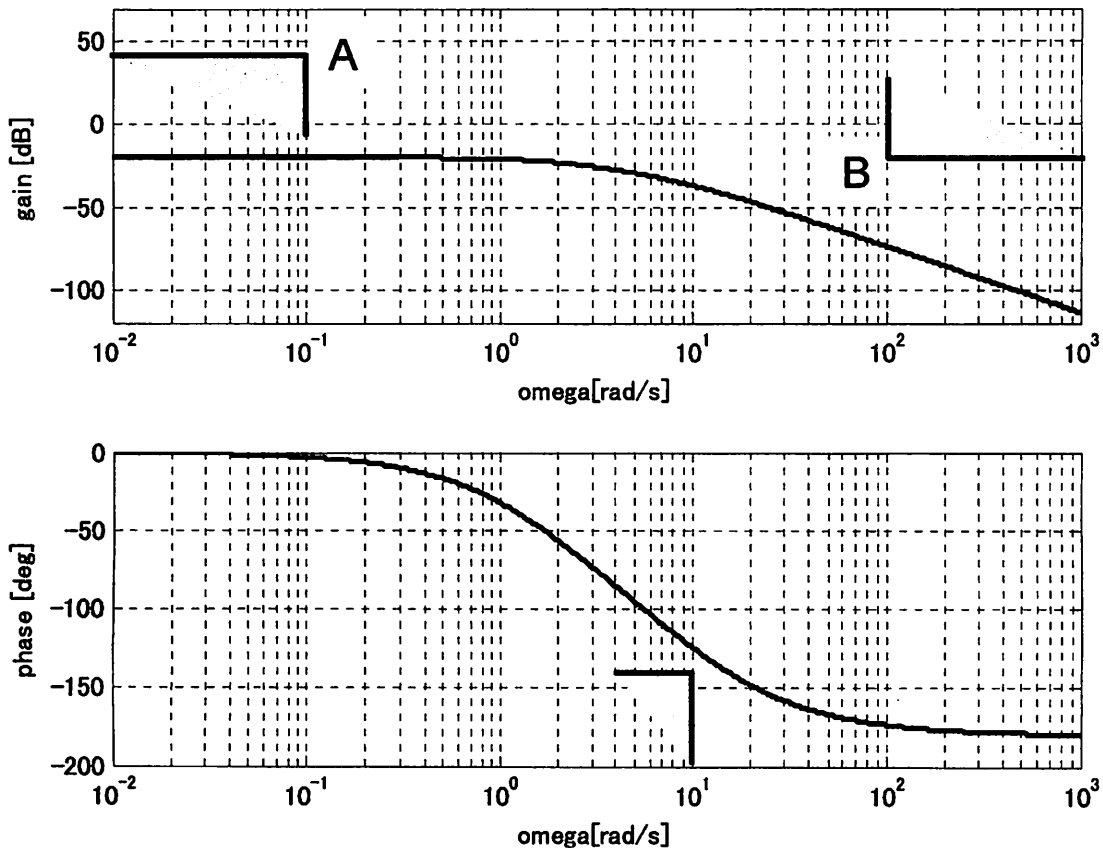
$$\text{真数に直して } K=178 \text{ とし, } T_s=1 \text{ を選択すると } C(s) = \frac{178(s+1)}{s}$$

これから開ループのボード線図を求める。この時の位相余裕が少ないためにゲインを4dB下げてK=112.2として再度、ボード線図を求める

13.4-7 演習(PI制御器の設計3)



- Aはゲイン40dB at $\omega < 0.1\text{rad/s}$
- Bはゲイン-20dB at $\omega > 100\text{rad/s}$



まとめ

- 補償要素とその使い方、ならびにループ整形法について復習した。
- DCモータのモデルを生成して、その制御器を、
 - ① 設計仕様
 - ② 制御仕様の数値表現
 - ③ 開ループ表現
 - ④ コントローラの設計
 - ⑤ 結果の確認
 の手順を経て求めた。
- モデル誤差については次回改めて議論する。

