Smart and Human

常翔学園

摂南大学

計算機援用設計

学科の学習・教育目標との対応：[C2]
機械工学の基礎に関する知識を持ち，それらを工学的問題の解決に応用できる．

8回目(予定)からCAD室

計算機援用設計の学習到達目標

SETSUDAI

- 製品開発におけるＣＡＤ／ＣＡＥの役割が説明できる．
- 連続体力学および数値解析法の基本的な考え方が説明できる．
- 構造・伝熱に関する基本的な問題を数値解析し，評価できる．

計算機援用設計の授業テーマと内容

SETSUDAI

回数	授業テーマ	内容
1	CAD/CAM/CAE	CAD/CAM/CAEの定義およびCAD/CAM/CAEシステムについて概説する。
2	CAEの概要	CAEのねらい，CAEにおける仕事の流れおよびCAEシステムについて概説する。
3	形状モデリング	３次元幾何モデリングとCAD，解析プリプロセッサについて解説する。
4	連続体の力学	CAEの基礎となる連続体の概念を解説するとともに弾性体の変形と応力，流体の運動，熱伝導に関する基礎式について説明する。
5	差分法概説	差分法の基本的考え方を解説し，簡単な微分方程式を解く演習を行う。
6	有限要素法概説	有限要素法の基本的考え方を解説し，簡単な微分方程式を解く演習を行う。
7	有限要素法の定式化	重み付き残差法による有限要素式の導出を概説する。

1237室

CAD室

計算機援用設計の授業テーマと内容

SETSUDAI

回数	授業テーマ	内容
6	有限要素法概説	有限要素法の基本的考え方を解説し，簡単な微分方程式を解く演習を行う。
7	有限要素法の定式化	重み付き残差法による有限要素式の導出を概説する。
8	３次元CAD演習	Pro Engineerを用いて基本的な立体形状を作成する。
9	構造解析演習（１）	基本的な立体形状の応力解析を行う。
10	構造解析演習（２）	基本的な立体形状の応力解析結果の評価を行う。
11	構造解析演習（３）	現実的な部品の応力解析を行う。
12	構造解析演習（４）	現実的な部品の応力解析結果の評価を行う。
13	伝熱解析演習（１）	基本的な立体形状の伝熱解析を行う。
14	伝熱解析演習（２）	基本的な立体形状の伝熱解析結果の評価を行う。
15	総合演習	現実的な部品の構造解析または応力解析を行う。

授業の進め方

SETSUDAI

1. 座席指定制（２回以降）
2. 講義＋演習課題レポート
3. プリント＋パワーポイントによる説明
4. 成績評価

演習課題レポート　５０％
期末試験　５０％

- ◆ 出席率８０％以上を成績評価の対象とする
- ◆ 演習のときアカウントとパスワード 必要

Smart and Human

常翔学園

摂南大学

計算機援用設計
CAD/CAM/CAE

CAD/CAM/CAE

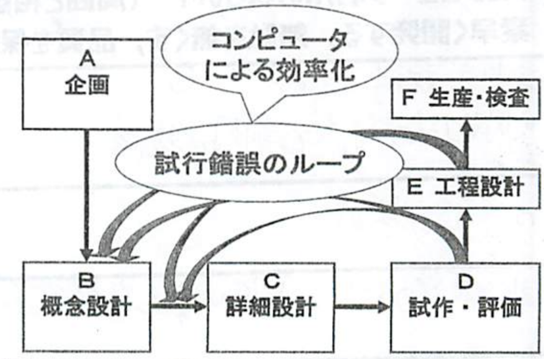
SETSUDAI

- ＣＡＤ／ＣＡＭ／ＣＡＥが製品開発のどの段階で使われるか説明できる
- ＣＡＤ／ＣＡＭ／ＣＡＥのねらいが説明できる

キャド／キャム／シーエーイー
(キャエ，キャイー)

製品開発の流れ

SETSUDAI



製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：企画でのコンピュータの利用？

市場調査データ，過去の製品のデータ，・・・

→エンジニアリング・データベース

A
企画

製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：概念設計でのコンピュータの利用？

概念図の作成，形状作成，性能予測，・・・

→３次元モデル，ＣＡＤ，ＣＡＥ

CAD → (Computer Aided Design)：計算機援用設計

CAE → (Computer Aided Engineering)

└ 計算機援用解析

B
概念設計

製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：詳細設計でのコンピュータの利用？

部品図・組立図の作成，強度計算，・・・

→ＣＡＤ，ＣＡＥ

C
詳細設計

製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：試作・評価でのコンピュータの利用？

部品製作，計測，・・・

→ＣＡＭ，計測システム

ＣＡＭ（C. A. Manufacturing）：計算機援用生産

D
試作・評価

製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：工程設計でのコンピュータの利用？

金型製作，生産ライン設計，・・・

→ＣＡＭ，ＣＡＰＰ

CAPP (C.A. Process Planning)

計算機援用設計

E
工程設計

製品開発の流れにおけるコンピュータの利用

SETSUDAI

Q：生産・検査でのコンピュータの利用？

ＮＣ加工，生産管理，品質管理，・・・

→ＣＡＭ，ＣＡＰＣ，ＣＡＴ

CAPC (C.A. Process Control)：計算機援用工程管理

CAT (C.A. Testing)：計算機援用検査

F
生産・検査

ＣＡＤ／ＣＡＭ／ＣＡＥのねらい

SETSUDAI

Q：コンピュータ利用のねらい？（周囲と相談）

素早く開発する，無駄を無くす，品質を保つ，・・

製品開発・設計・生産の高効率化

→開発コストの削減と期間の短縮

人の負担の軽減

設計信頼性の向上，より良い製品性能の追求

本日のポイント

SETSUDAI

- **製品開発の流れ**
  - 企画→概念設計→詳細設計→試作・評価→工程設計→生産・検査
    上流→→→→→→→→→→→→→→→→→→下流
    ↑ ↓ ↓ ↓
    ←←←←←←←←
  - 試行錯誤のループ
- **コンピュータの活用**
  - 企画→概念設計→詳細設計→試作・評価→工程設計→生産・検査
    CAD・CAE　CAD・CAE　CAM　CAM・CAPP　CAM・CAPC・CAT
- **ＣＡＤ／ＣＡＭ／ＣＡＥのねらい**
  - 製品開発・設計・生産の高効率化
  - 開発コストの削減と期間の短縮
  - 設計信頼性の向上，より良い製品性能の追求

Smart and Human

常翔学園 摂南大学

計算機援用設計 第2回

CAEの概要

M科 川野

CAD/CAE

CADとは

○ Computer Aided Design の略
↳ コンピュータ援用設計 とも訳される。

○ 製品や建築物などの設計において、コンピュータ上で製図を行うためのシステム

○ 2次元CADと3次元CADがある。

CAD/CAE

CAEとは

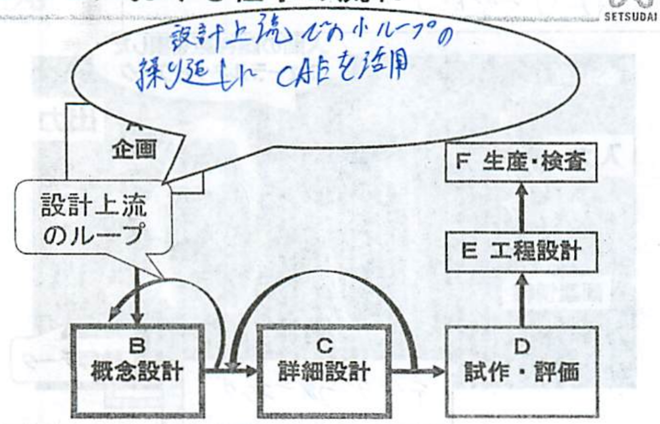
○ Computer Aided Engineering の略
↳ コンピュータ援用解析, または コンピュータ援用工学とも訳される。

○ CADによる初期段階の形状モデルに対して、コンピュータを用いて応力、変形、伝熱、振動などの性能評価を行うためのシステム

CAMとは

○ Computer Aided Manufacturing
↳ コンピュータ援用製造とも訳され
CADで作成された形状データを入力データとして、加工用のNCプログラム作成などの生産準備全般をコンピュータ上で行うためのシステム

CAEにおける仕事の流れ



CAEのねらい

- 試作段階での試行錯誤の繰り返し低減 →
  開発コストの削減と期間の短縮
- 情報の一元化, 集中管理化 →
  作業効率の向上
- 解析技術の高度化 →
  より良い製品性能の追求

F1レギュレーションの変遷

- 1966年
  - エンジン:排気量3,000cc NAまたは1,500cc ターボエンジン
- 1987年
  - エンジン:排気量3,500cc NA
- 1989年
  - 過給器付きエンジンの禁止
- 1995年
  - エンジン排気量を3,500ccから3,000ccに制限
- 2000年
  - エンジン形式をV10に統一

NA:ナチュラル・アスピレーション = 自然吸気エンジン

ターボエンジン(過給器付きエンジン)=エンジンの排気ガスを利用して燃焼室の空気を余計に送り込もうとする

V10=V字に配置されたV型10気筒

F1用エンジン性能の推移

約10年で比出力が 50kW/L 増加

約10年で回転数が 5000 rpm 増加

約10年で重量が 50kg 低減

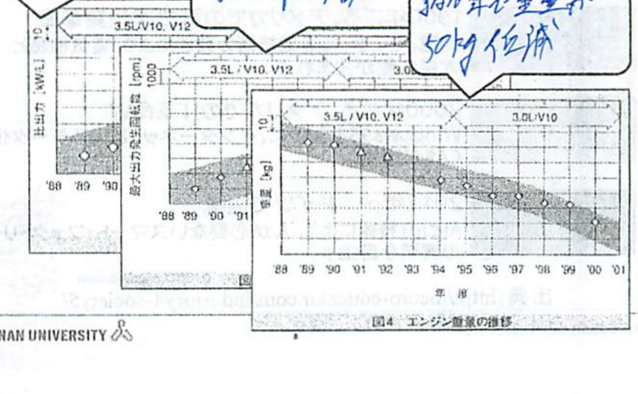
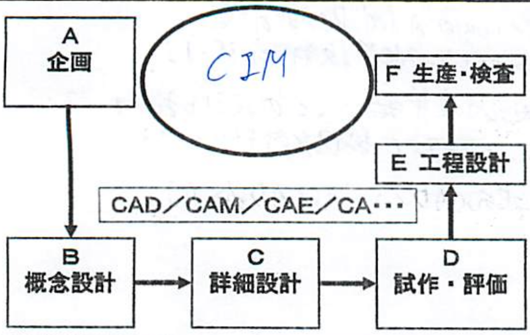


図4 エンジン重量の推移

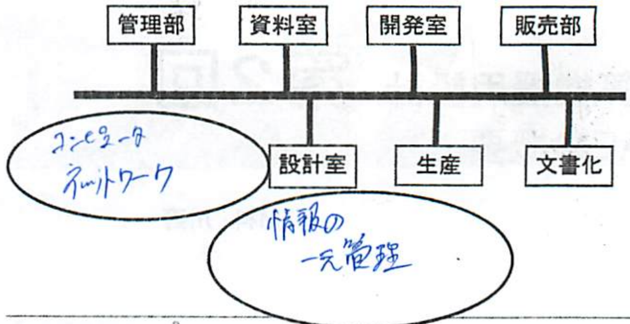
コンピュータによる統合

Computer Integrated Manufacturing



統合生産システム（ＣＩＭ）

Computer Integrated Manufacturing



コンピュータによる統合

■CIM

Computer **I**ntegrated **M**anufacturing
コンピュータ統合生産 のことで，製品の生産にかかわる各部門の**コンピュータ**を**ネットワーク**（**LAN**：**L**ocal **A**rea **N**etwork）で結び、様々な情報をサーバーで**一元管理**（統括）して生産性を向上させるシステムのことである.

Industory4.0 や Industrial Internet

現在のトレンドは「IoT」と「AI（人工知能）」を利用したIndustry4.0やIndustrial Internet

Internet of Things

「第4次産業革命」

IoTの発達により、設備や工作機械はもちろんのこと、工具、計測器、搬送機、自動倉庫、現場の要員が保持するモバイルデバイスなどがインターネットにつながり，クラウド上でデータのリアルタイム総合管理

IoTにより、現場から収集されるデータ量は膨大

ビッグデータ

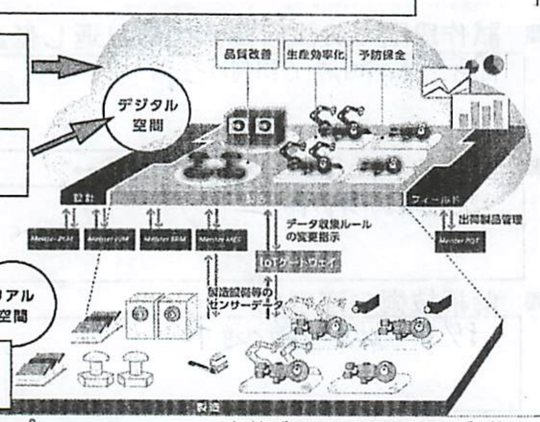
データサイエンティスト　　**AI（人工知能）**

IoTを活用した生産工場

クラウド

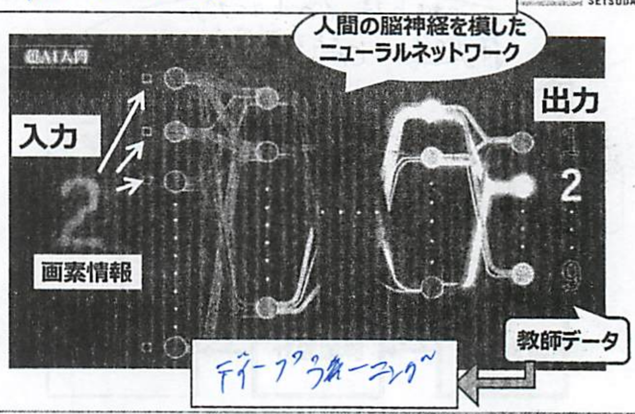
サイバー

フィジカル



 東芝デジタルソリューションズ（株）

AI（人工知能）



ディープラーニング

 NHK　人間ってナンだ？ 超AI入門

インダストリー4.0 ←ドイツで提唱

インダストリー 1.0	1800年ごろ、イギリスでの産業革命 蒸気機関の開発により、機械産業が生まれる
2.0	1900年ごろ、アメリカでの第二次産業革命 発電、モーター、送電技術の発達により、電気機械と大量生産が生まれる
3.0	2000年ごろ、アメリカでのIT革命W Windows95を契機に、インターネットと電子データ化、CAEが誕生
4.0	2011年～　ドイツで提唱 AIとIoT技術により、人が必要ないスマート・ファクトリーの実現を目指す

出典：http://neuro-educator.com/industory4-society5/

ソサエティ 5.0 ←日本で提唱

ソサエティ1.0	狩猟社会 縄文時代
2.0	農耕社会 弥生時代～江戸時代：農業が発達し、村社会、武家社会が誕生
3.0	工業社会 明治時代～昭和：文明開化に伴い、機械産業が発達
4.0	情報社会 ＝ インダストリー 3.0 平成：IT革命にともない、インターネットや携帯電話が普及
5.0	超スマート社会 これから?：AIとIoT技術によるスマートシステムにより生活を支援する

出典：http://neuro-educator.com/industory4-society5/

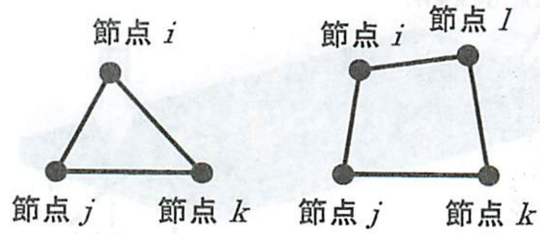
7-2

Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
CAEの手順

有限要素の例

■ 2次元

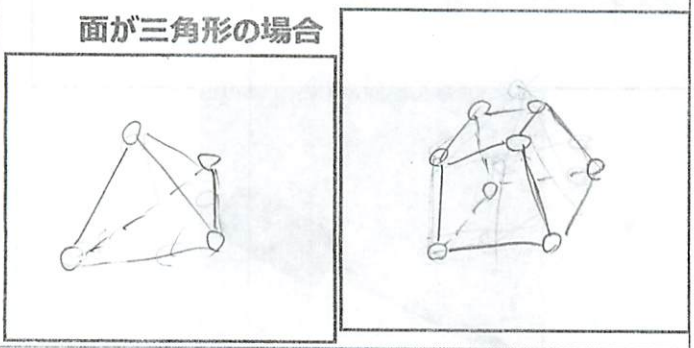


有限要素の例

■ 3次元

面が三角形の場合

面が四角形の場合



CAEの手順

① 形状モデリング

解析用モデルを作る（プリプロセッサ）
Preprocessor

② 解析

解析計算を行う（ソルバー）
Solver

③ 結果表示

解析結果を可視化する（ポストプロセッサ）
Postprocessor

形状モデリング

■ 高精度汎用解析プログラム

有限要素法・境界要素法・差分法

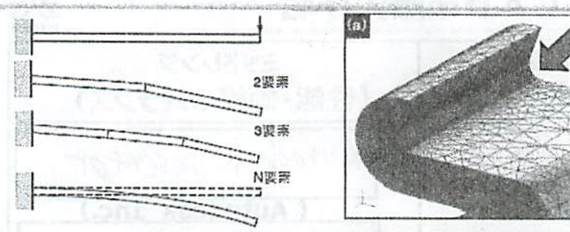
↓

解析対象の形状
メッシュ（要素）に分割

課題：メッシュデータをたやすく作成できるツールの開発

CADデータ → メッシュデータ

メッシュと精度



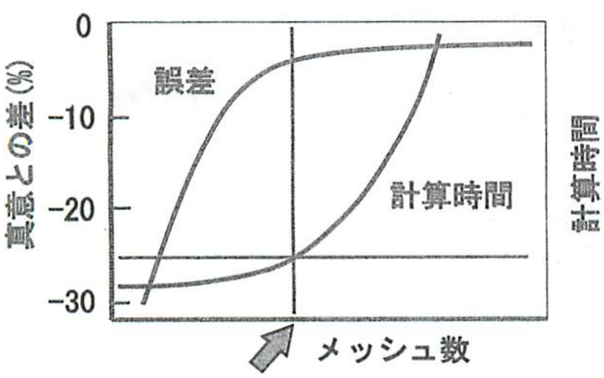
フィレット部や曲率半径の小さな湾曲部など，

応力が集中しそうな個所 には局所的に

細かなメッシュ を設けるのが望ましい

日経テクノロジー

最適メッシュ数



CADJapan.com

解析用プリプロセッサの機能

■ 形状モデルの作成

専用の形状モデラーで形を作る
CAD形状データを取り込む

■ 解析領域の分割

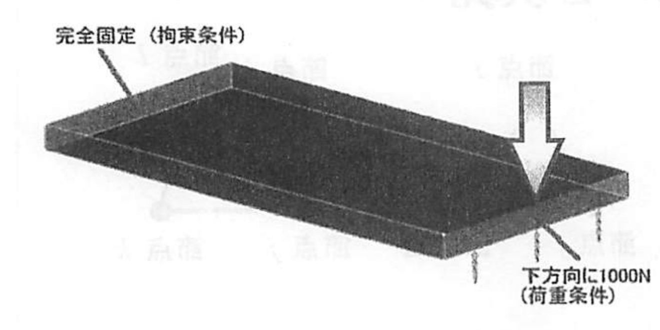
2次元　三角形要素，四角形要素
3次元　四面体要素，六面体要素

■ 境界条件の設定

境界の物理量（応力，圧力，速度など）を指定
拘束条件（固定，滑り，回転など）を指定

メッシュ数が増えるにしたがって，…
誤差は増加（逓減）
計算時間は増加（逓増）

境界条件



CAE技術者のための情報サイト

解析用プリプロセッサの機能

- 初期条件の設定

  計算開始時の物理量を指定
  （非定常現象の解析の場合）
- 物性パラメータの設定

  解析対象の材料物性値（ヤング率，ポアソン比，密度，比熱，熱伝導率など）を指定
- 解析パラメータの設定

  数値解析固有のパラメータ（収束条件，サブモデル，解析時間など）を指定

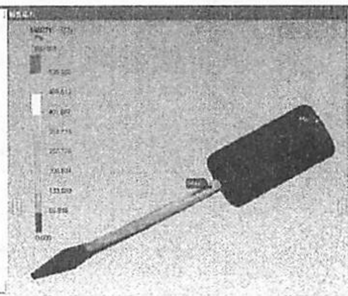
ソルバーの役割

有限要素法により，解を求める。

	離散化（分割）	特徴
差分法		・離散化が容易 ・適用性が広い
PC 有限要素法		・任意形状の扱いが容易 ・適用性が広い

ポストプロセッサの役割

解析結果を可視化する。



３D-ＣＡＤ市販ソフト名

ハイエンド（高性能・高精細）	ミッドレンジ（性能・価格のバランス）
① Creo parametric (PTC Inc.)	① Autodesk Inventor (Autodesk Inc.)
② CATIA (Dassault Systèmes)	② Solid Works (Dassault Systèmes SolidWorks Corporation)
	③ Solid Edge (Siemens PLM Software Inc.)

数百万

~~3000万~~
約3000万

450万

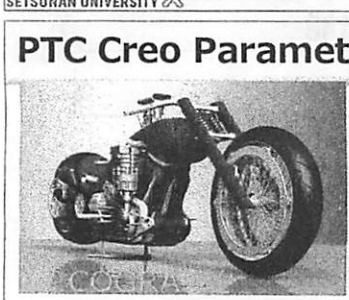
PTC Creo Parametricによる演習

- PTC Creo Parametric ：

  市販の３次元ＣＡＤソフトウェア
  開発・販売　PTC社
  Parametric Technology Corporation
- ３次元ＣＡＤ＋ Creo Simulate

  （簡易有限要素法解析ツール）
  構造解析，伝熱解析など

PTC Creo Parametricの例



NICON METROLOGY社

NASTRAN.JP

デジタルソリューション社

スワ，カワノ
↳ Autodesks Inventor

外から流れて，求められてるおなか？

CMAB

Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
形状モデリング

M科

ＣＡＥのハードウェア構成

大型計算機（スーパーコンピュータ）
中型計算機　今はあまり使われない
エンジニアリングワークステーション
パーソナルコンピュータ

http://www.asahi.com/science/update/0618/OSK201206180087.html

解析負荷（計算時間，メモリ容量）の大小で使い分ける

ＣＡＥのソフトウェア構成

コア（中核）
　システム管理ルーチン
　データーベース管理システム

アプリケーションソフトウェア
　解析目的に応じたソフトウェア

①流れ・性能
遠心応力・固有振動数の解析
②流れ・応力・変形の解析
③軸受け・軸系振動，軸系強度の解析

Q：アプリケーションの対象？

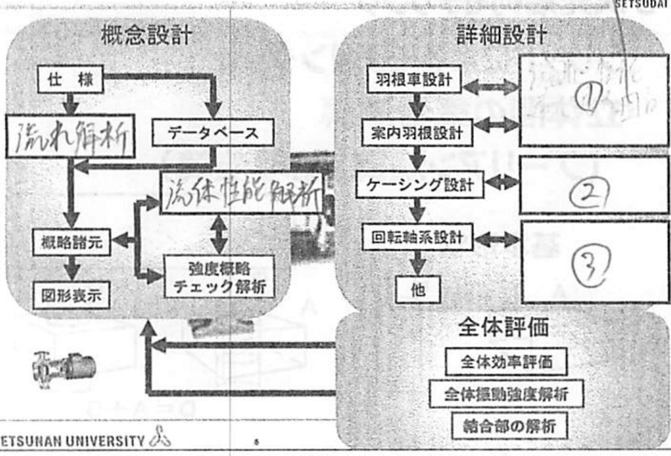
機構，応力・変形，熱，振動，…

解析シミュレーション技術

■ 性能解析
　Q：性能解析の例？
　流れ，熱，騒音 など
　→ 専用システム

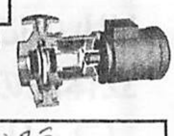
■ 強度信頼性解析
　Q：強度信頼性解析の例？
　応力，振動　など
　→ 汎用総合ＣＡＥシステム

例：ポンプの設計手順



例：ポンプの解析シミュレーション

■ 性能解析　専用システム
- 流れ解析・流体性能解析（概念設計）
- 羽根車の流れ・性能解析（詳細設計）
- ケーシングの流れ解析（詳細設計）



■ 強度信頼性解析　汎用総合CAEシステム
- 強度概略チェック解析（概念設計）
- 羽根車・案内羽根の遠心応力・固有振動解析（詳細設計）
- ケーシングの応力・変形解析（詳細設計）
- 回転系の軸受け・軸系振動・軸系強度解析（詳細設計）
- 全体振動強度解析・結合部の解析（全体評価）

ＣＡＥシステム構成例

■ 形状モデリングシステム
図形処理，幾何モデリング，解析モデリング
↓
３Ｄ－ＣＡＤ

■ 解析シミュレーションシステム
構造，伝熱，流れ，振動，…

ＣＡＥの手順

■ 形状モデリング
解析用モデルを作る⇒ プリプロセッサ

■ 解析
解析計算を行う⇒ ソルバー

■ 結果表示
解析結果を可視化する⇒ ポストプロセッサ

形状モデリング

高精度汎用解析プログラム

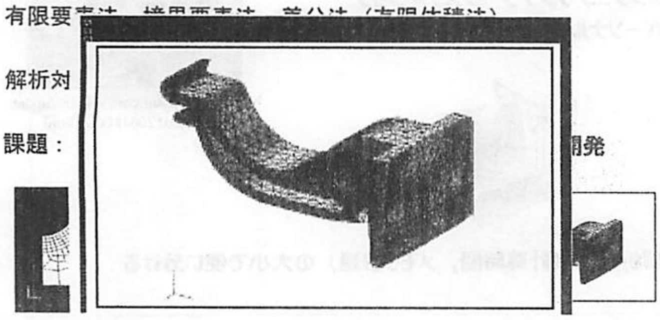
↓

有限要素法、境界要素法、差分法（有限体積法）

解析対

課題：

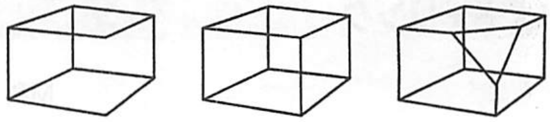
開発



3次元幾何モデリング

ワイヤーフレームモデル

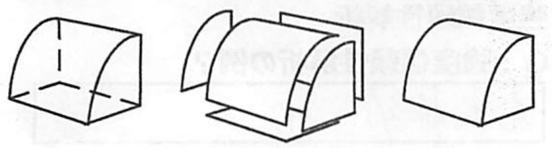
基本線素で立体をつくる



3次元幾何モデリング

サーフェースモデル

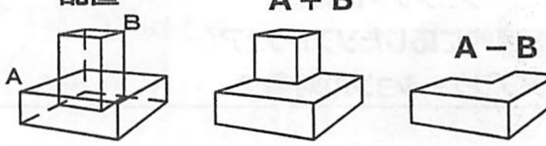
基本面素の接続で立体を張る



3次元幾何モデリング

ソリッドモデル

基本立体の組合せで立体をつくる



3次元幾何モデリング

ソリッドによるモデリング

立体間の集合演算

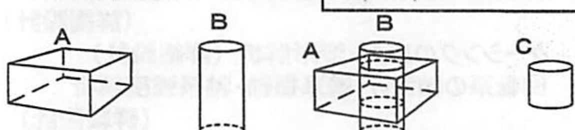
（ブーリアン演算・論理演算）

boolean

ど人名

基本形状

積集合



3次元幾何モデリング

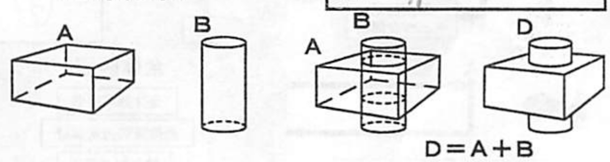
ソリッドによるモデリング

立体間の集合演算

（ブーリアン演算・論理演算）

基本形状

和集合



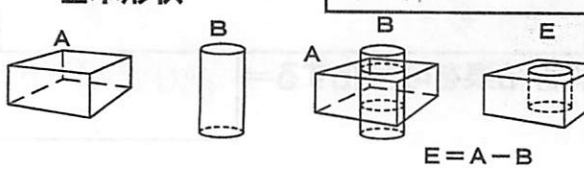
3次元幾何モデリング

ソリッドによるモデリング

立体間の集合演算（ブーリアン演算・論理演算）

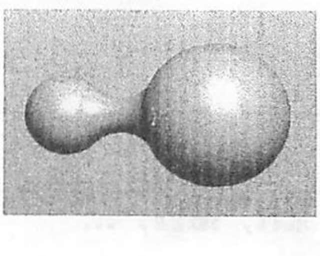
基本形状

差集合



PTC Creo Parametricによるモデル形状の作成

■ソリッドモデル



Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
連続体の力学　M科

解析技術の中心になるもの

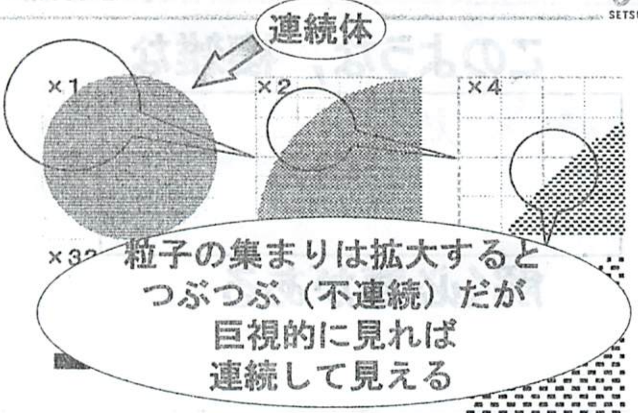
- 有限要素法

(Finite Element Method) FEM

解析的 に解くことが難しい
微分方程式 の近似解を
数値的 に得る方法の一つ

工学の諸事象は
微分方程式で表せるものが多い

連続体とは



気体（水蒸気）

- 分子の数　アボガドロ数＝ 6.02×10^{23}

例）水1モル＝18 g 中の分子の数
（H_2O：2×1＋16グラム分子）

- 平均分子間隔（気体）

球とみなす

100 ℃, 1 気圧の水蒸気 18 g の体積
$V = 22.4\times10^3\times(100+273)/273\ \mathrm{cm}^3$
分子１個あたりの体積 $v = V / 6.02\times10^{23}\ \mathrm{cm}^3$
球の半径を r とすれば
$(4\pi/3)r^3 = v$ より
$r = \sqrt[3]{3v/(4\pi)}$

水分子の間隔(2r)≒ 46 Å
(1 Å＝10^{-8} cm)

解析技術の中心になるもの

- 有限要素法

Finite Element Method (FEM)

- １９５０年代
- 航空機の強度解析
- 要素分割の自由度が高い
- 構造の応力・変形・振動解析, 流体・熱・電磁界

連続体とは

- 粉や砂などは粒子（つぶつぶ）の集まりで，塊ではないものは，連続体ではない。

液体(流体)，固体などの連続して一つの塊としてとらえられる物質を連続体である。

- 液体や固体も粒子（分子）の集まりだが，巨視的に見ると塊であるように見えるものは連続体

固体（氷）

- 分子の数　アボガドロ数＝ 6.02×10^{23}

例）水1モル＝18 g 中の分子の数
（H_2O：2×1＋16グラム分子）

mol→g　1×16＝16 g

- 平均分子間隔（固体）

氷 18 g の体積 ＝ 18 cm³
分子１個あたりの体積 v＝18/ 6.02×10^{23} cm³
立方体の一辺の長さを a とすれば
$a^3 = v$ より
$a = \sqrt[3]{v}$

水分子の間隔 ≒ 3 Å
(1 Å＝10^{-8} cm)

オングストローム

$V = 18\ \mathrm{cm}^3$
$V = 18/6.02\times10^{23}\ \mathrm{cm}^3$
$a^3 = V$
$a = \sqrt[3]{V}$

連続体と見なしうる条件

分子の大きさや，分子の間隔にくらべて十分大きな物体は連続体とみなす

＜固体＞
全体の
代表長さ ＞＞ 平均分子間距離

＜液体・気体＞
衝突なしに進む距離
分子サイズの1000倍程度
代表長さ ＞＞ 平均自由行程　かつ
代表時間 ＞＞ 平均衝突時間

10^{-9}秒

物質の変形・運動の数式表現

SETSUDAI

■分子の動き：個々の分子の運動を表現

↓

粒子の運動方程式 $m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\vec{F}$ を解く

解くべき支配方程式は比較的簡単であり，解き方は単純であるが，膨大な数の粒子の計算が必要

物質の変形・運動の数式表現

SETSUDAI

■連続体の動き：かたまりとしての物質の運動を表現

↓

質量・運動量・エネルギー保存式などを解く

解くべき支配方程式およびその解き方は複雑であるが，膨大な数の粒子の計算は必要としない

弾性体の変形と応力（材料力学）

SETSUDAI

■ つり合い方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0$$

σ :垂直応力
τ :せん断応力
F :物体力

■ ひずみと変位の関係式

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

ε :垂直ひずみ
u :変位

■ 応力とひずみの関係

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$$

E :ヤング率
ν :ポアソン比

熱伝導（伝熱工学）

SETSUDAI

■ エネルギーの保存式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=a\nabla^2 T$$

T :温度
a :熱拡散率

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ナブラ

流体の運動（流体力学）

SETSUDAI

■ 質量の保存式（連続の式）

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

u,v :速度

■ 運動量の保存式（運動方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v$$

ρ :密度
p :圧力
ν :動粘性係数

実在の物質は分子の集まり → 連続体として扱う

それでも複雑な偏微分方程式を連立して解く必要がある

連続体の解析

SETSUDAI

このような，複雑な

偏微分方程式

を

解く必要がある

コンピュータによる数値解析

SETSUDAI

実際の工学的諸問題について微分方程式を解くことは容易でない

コンピュータを使って

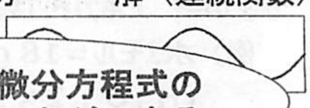
微分方程式の近似解 を得る

. . . FEM

コンピュータで微分方程式を解く

SETSUDAI

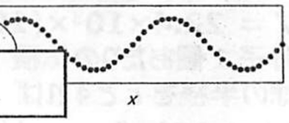
■ 微分方程式 → 積分 → 解（連続関数）



離散化により微分方程式の 近似解 を得ることができる

■ 離散式 → 数値積分 → 近似解（離散値）

離散点の数を増やすことにより 精度向上



5

Smart and Human

常翔学園

摂南大学

計算機援用設計
差分法概説

復習

方程式を解く	微分方程式を解く
$2x-1=0$	$\dfrac{dy}{dx}+ay=0$
⇩	⇩
値を求める	元の式を求める
$x=\dfrac{1}{2}$	$y=f(x)$

微分方程式の解(例2)

次の微分方程式を解け

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

微分方程式の解析的解法(例2)

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}=0}$$

⇩ 両辺を x で積分

$$\int \frac{d^2u}{dx^2}dx=\int 0\,dx$$

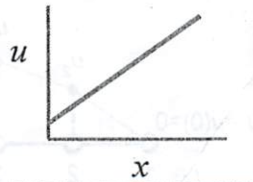
⇩

$$\frac{du}{dx}=C$$

$$\int \frac{du}{dx}dx=\int C\,dx$$

⇩

$$u=Cx+D$$



コンピュータによる数値解析

実際の工学的諸問題について微分方程式を解くことは容易でない

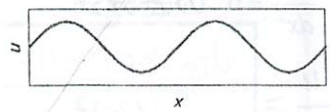
⇩

コンピュータを使って微分方程式の近似解を得る

・・・FEM

微分方程式を解く

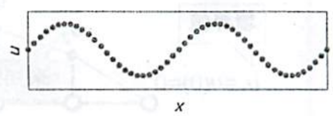
■ 微分方程式 → 積分 → 解(連続関数)



↓離散化

■ 離散式 → 数値積分 → 近似解(離散値)

コンピュータで計算できる

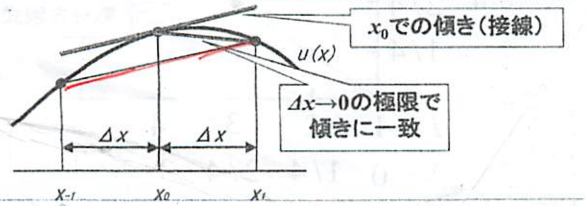


微分と差分

■ 微分法(Differentiation):
連続関数の変化を表す演算法

<連続関数の導関数>

$$u'(x_0)=\frac{du}{dx}\Big|_{x_0}=u'_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

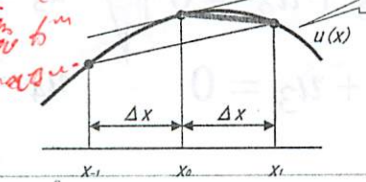


微分と差分

■ 差分法(Finite Difference Method):
離散値の変化を表す演算法

<差分近似式>

$$u'_0\cong\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$



微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ ２階の微分方程式を差分法で解け

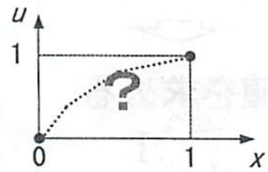
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

■ 解析領域（ $0 \le x \le 1$ ）

■ 境界条件

$x = 0$ で $u(0) = 0$

$x = 1$ で $u(1) = 1$

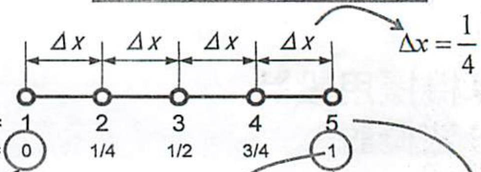


微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ 解析領域を 格子(grid, Mesh) に分割

$\Delta x = \frac{1}{4}$



境界　　境界

境界条件　$u(1) = 1 = u_5$

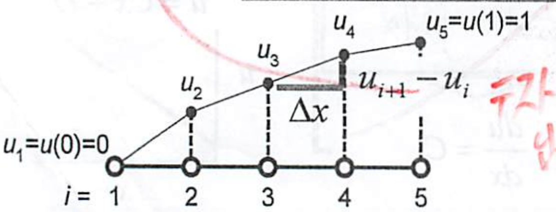
微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ まず $\frac{du}{dx} = 0$ の差分式

$$\frac{du}{dx} \cong \boxed{\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = 0}$$

テストに出る！



微分方程式の差分解法（例題１）

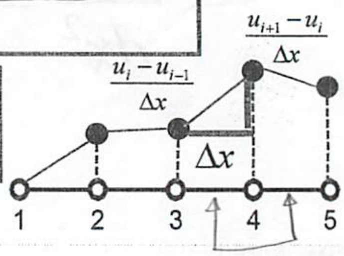
SETSUDAI

■ 次に $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ の差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cong \boxed{\frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}}$$

$$= \boxed{\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{(\Delta x)^2}}$$

$= 0$



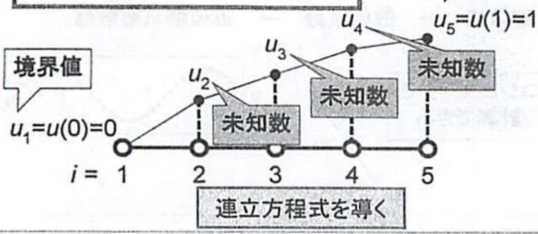
微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ の差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cong \boxed{\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}} = 0$$

境界値



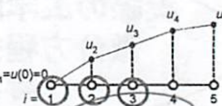
微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ 差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cong \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 0$$



境界値 $u_1 = 0$

$i = 2$ ⇨ $u_3 - 2u_2 + u_1 = 0$

$i = 3$ ⇨ $u_4 - 2u_3 + u_2 = 0$

$i = 4$ ⇨ $u_5 - 2u_4 + u_3 = 0$

境界値 $u_5 = 1$

微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

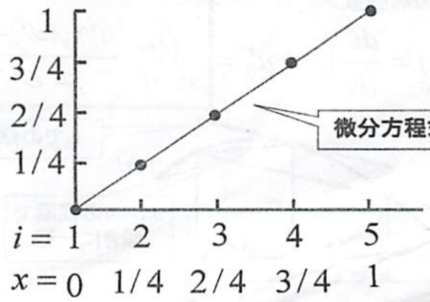
■ 結局，連立方程式を解けば解が得られる

$$\begin{cases} u_3 - 2u_2 = 0 \\ u_4 - 2u_3 + u_2 = 0 \\ 1 - 2u_4 + u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_2 = ??? \\ u_3 = ??? \\ u_4 = ??? \end{array}$$

微分方程式の差分解法（例題１）

SETSUDAI

■ 連立方程式の解　$u_2 = \frac{1}{4}$　$u_3 = \frac{1}{2}$　$u_4 = \frac{3}{4}$



6

Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
有限要素法概説

有限要素法とは

英語では，

Finite Element Method

（FEM）といい，解析的に

解くことが難しい 微分方程式

の近似解を 数値的に得る方法

の一つである。

有限要素法とは

方程式が定義された領域を

小領域(要素)　に分割し，

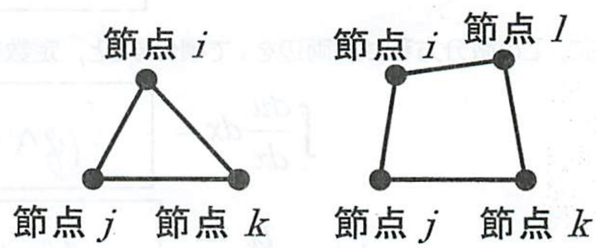
各小領域における方程式を比較的

単純で共通な 補間関数

で近似する。

有限要素（小領域）の例

■ 2次元



境界条件の物理的意味

●境界上の物理量

外力，圧力，速度，温度など

有限要素法の考え方

■ 有限要素法：等価な最小値問題に置き換えて解く

<微分方程式>

$\dfrac{d^2u}{dx^2}=0$ を満たす u を求める

<最小値問題>

$\Pi(u)=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2dx$ を最小にする u を求める

汎関数

関数と汎関数

■関数 $u(x)$ ： u は自然数 x の関数

■汎関数 $\Pi(u)$ ：Π は「関数 $u(x)$ 」の関数

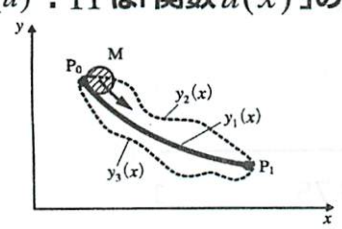


図2・2　質点Mが重力のもとで点 P_0 から点 P_1 に移動するときの経路

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 2階の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

$\pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$

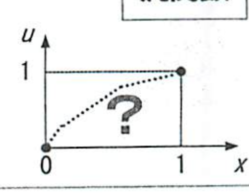
汎関数

■ 解析領域（ $0\le x\le 1$ ）

■ 境界条件

$x=0$ で $u(0)=0$

$x=1$ で $u(1)=1$



2019年11月1日

計算機援用設計　　学籍番号【 15 40 33 】　名前【 小川夏輝 】

次の要領で，微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2}=q$ （領域 0≦x≦1 ）を，解析的に解け。

ただし，境界条件 $u(0)=0$， $u(1)=4$ とする。 q は， q=学籍番号下１桁×0.4+6 とする。

$3\times0.4+6$

$q=1.2+6=7.2$

【解】 微分方程式の両辺を x で積分すると，定数を C_1 として

$$\int\frac{d^2u}{dx^2}dx=\int q\,dx$$

$$\frac{du}{dx}=\boxed{qx+C_1}$$

$\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

さらに，この微分方程式の両辺を x で積分すると，定数を C_2 として

$$\int\frac{du}{dx}dx=\boxed{\int(qx+C_1)\,dx}$$

$$\therefore\quad u=\boxed{\frac{1}{2}qx^2+C_1x+C_2}$$

$x=0$ のとき， $u=0$ を代入して， $C_2=\boxed{0}$

$0=\frac{1}{2}q\cdot0^2+C_1\cdot0+C_2$

$x=1$ のとき， $u=4$ を代入して， $C_1=\boxed{4-\frac{1}{2}q}$

$4=\frac{1}{2}q\cdot1^2+C_1\cdot1+0$

$C_1=4-\frac{1}{2}q$

$$\therefore\quad u=\boxed{\frac{1}{2}qx^2+\left(4-\frac{1}{2}q\right)x}$$

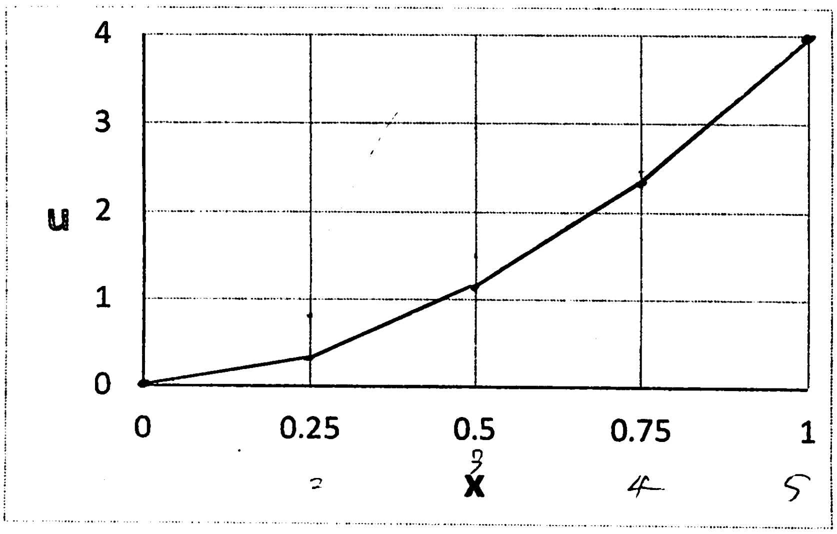
$u=\frac{1}{2}\cdot q\cdot x^2+\left(4-\frac{1}{2}q\right)x+0$

$=\cancel{\frac{1}{2}qx^2+(4-\frac{1}{2}q)}$

$x=0,\quad 0.25,\quad 0.5,\quad 0.75,\quad 1$ のとき，下図にプロットせよ。

$u_2=u(0.25)=0.325$

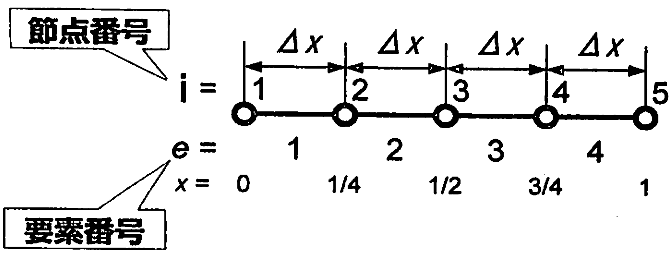
$u_3=u(0.5)=1.1$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 解析領域を要素(Element)に分割



微分方程式の有限要素解法(例題１)

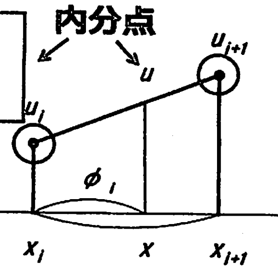
SETSUDAI

■ 要素内のuを近似式で表す

$$u = (1-\phi_i)u_i + \phi_i u_{i+1}$$

$$\phi_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

基底関数または形状関数



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

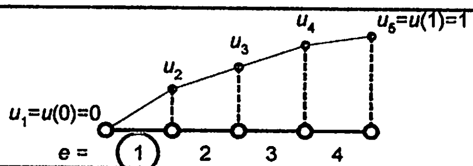
■ 要素内のuを近似式で表す

e=1: $\phi_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-0}{(1/4)} = 4x$

$\Phi_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

$u = (1-\Phi_i)u_i + \Phi_i u_{i+1}$

$u = (1-\phi_1)u_1 + \phi_1 u_2 = (1-4x)0 + 4xu_2 = 4xu_2$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

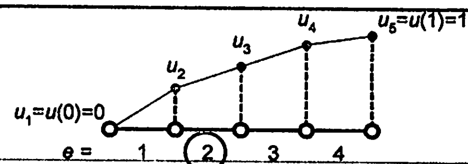
■ 要素内のuを近似式で表す

e=2: $\phi_2 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x-(1/4)}{(1/4)} = 4x-1$

$\Phi_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

$u = (1-\Phi_i)u_i + \Phi_i u_{i+1}$

$u = (1-\phi_2)u_2 + \phi_2 u_3 = (2-4x)u_2 + (4x-1)u_3$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

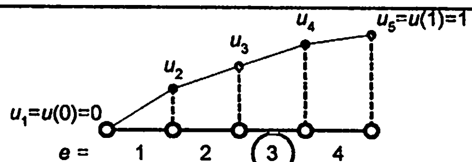
■ 要素内のuを近似式で表す

e=3: $\phi_3 = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{x-(1/2)}{(1/4)} = 4x-2$

$\Phi_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

$u = (1-\Phi_i)u_i + \Phi_i u_{i+1}$

$u = (1-\phi_3)u_3 + \phi_3 u_4 = (3-4x)u_3 + (4x-2)u_4$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

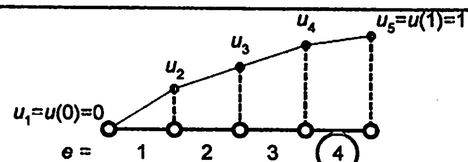
■ 要素内のuを近似式で表す

e=4: $\phi_4 = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} = \frac{x-(3/4)}{(1/4)} = 4x-3$

$\Phi_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

$u = (1-\Phi_i)u_i + \Phi_i u_{i+1}$

$u = (1-\phi_4)u_4 + \phi_4 \cdot u_5 = (4-4x)u_4 + (4x-3)u_5$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 要素ごとに$\Pi(u)$を計算する

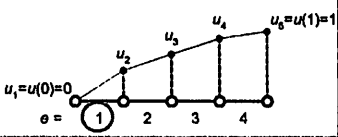
$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$

e=1: $u = 4xu_2 \longrightarrow \frac{du}{dx} = ?$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \longleftarrow \frac{du}{dx} = 4u_2$$

$= \frac{1}{2}\int_0^{1/4} 4^2 (u_2)^2 dx$

$= \frac{16}{2}\left[u_2^2 x\right]_0^{1/4} = 2u_2^2$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 要素ごとに$\Pi(u)$を計算する

$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$

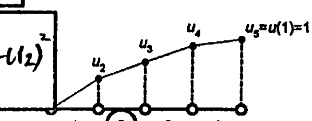
e=2: $u = (2-4x)u_2 + (4x-1)u_3$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = ?$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \longleftarrow \frac{du}{dx} = 4(u_3 - u_2)$$

$= \frac{1}{2}\int_{1/4}^{1/2} 4^2 (u_3 - u_2)^2 dx$

$= \frac{16}{2}\left[(u_3-u_2)^2 x\right]_{1/4}^{1/2} = 2(u_3-u_2)^2$



オモテ

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 要素ごとに $\Pi(u)$を計算する

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

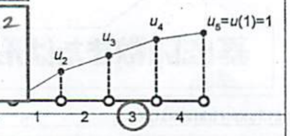
e=3: $u=(3-4x)u_3+(4x-2)u_4$

$\frac{du}{dx}=?$

$$\Pi_3=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx \longleftarrow \frac{du}{dx}=4(u_4-u_3)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/4}4^2(u_4-u_3)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[(u_4-u_3)^2x\right]_{1/2}^{3/4}=2(u_4-u_3)^2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 要素ごとに $\Pi(u)$を計算する

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

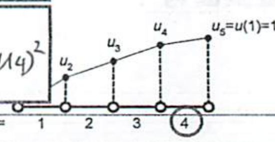
e=4: $u=(4-4x)u_4+(4x-3)u_5$

$\frac{du}{dx}=?$

$$\Pi_4=\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx \longleftarrow \frac{du}{dx}=4(u_5-u_4)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}4^2(u_5-u_4)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[(u_5-u_4)^2x\right]_{3/4}^{1}=2(u_5-u_4)^2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 全領域の $\Pi(u)$ が求まる

$$\Pi(u)=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$$

$$=2u_2^2+2(u_3-u_2)^2+2(u_4-u_3)^2+2(u_5-u_4)^2$$

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_2,u_3,u_4 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_2}=\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_3}=\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_4}=0$$

となる u_2,u_3,u_4 を求める

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_2 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_2}=\frac{\partial}{\partial u_2}\left[2u_2^2+2(u_3-u_2)^2+\cdots\right]$$

$$=4(2u_2-u_3)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_3 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_3}=\frac{\partial}{\partial u_3}\left[\cdots+2(u_3-u_2)^2+2(u_4-u_3)^2+\cdots\right]$$

$$=4(-u_2+2u_3-u_4)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_4 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_4}=\frac{\partial}{\partial u_4}\left[\cdots+2(u_4-u_3)^2+2(u_5-u_4)^2\right]$$

$$=4(-u_3+2u_4-u_5)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 連立方程式を解く

$$u_3-2u_2=0$$

$$u_4-2u_3+u_2=0$$

$$1-2u_4+u_3=0$$

$$\begin{cases}u_2=\frac{1}{4}\\ u_3=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\ u_4=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$u_2=???$

$u_3=???$

$u_4=???$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 連立方程式の解 $u_2=\frac{1}{4}$ $u_3=\frac{1}{2}$ $u_4=\frac{3}{4}$