1

第3回 ボード線図（基本要素とその合成）

制御工学Ⅱ

SETSUDAI

- ボード線図
- 一次進み、二次遅れ要素
- 一般的な要素
- 関数の合成

2

対数演算に強くなる　その1

- ボード線図は対数で表示される。対数の演算則を思い出しておこう

対数の定義

任意の正の実数xに対して　$x = a^p$

を満たす実数 pが唯一定まる。このpを　$p = \log_a x$

と表し、pをxの**対数**、aを**底**、xは**真数**と呼ぶ。

対数の性質

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = \log_{1/a} x$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

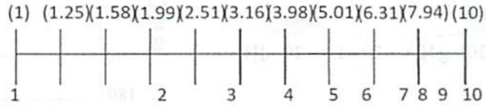
$$\log_a 1 = 0$$

3

対数表現

- 横軸が対数圧縮されているため、同じ比率はおなじ間隔で与えられる 1：2と2：4，4：8はおなじ間隔
- 周波数aとbの中間（対数尺での真ん中）は$\sqrt{a \cdot b}$である。例えば1と10の中間は$\sqrt{1 \cdot 10} = 3.16$となる。また1と2では1.4である
- 1/3Octaveは $\sqrt[3]{A}$ であり、2の1/3Octaveは $\sqrt[3]{2} = 1.2599$ であるが実用では1.25が使われている。これはまた$\sqrt[10]{10} = 1.2589$ でもある
- 傾きを示すとき等間隔を与える比率で表現するが、代表的なのが10倍のデカード[dec]と2倍のオクターブ[Oct]で比率あたりの表現でパー・デカードとかパー・オクターブとか表現される

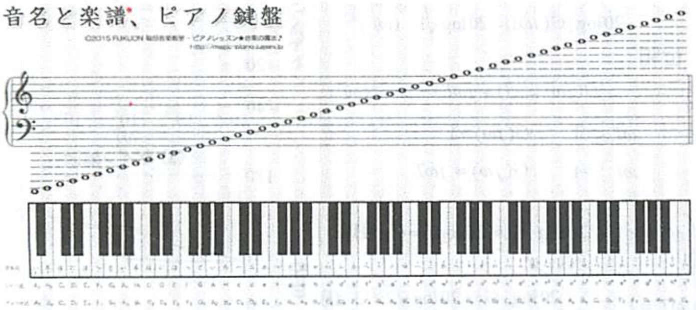
$p=\log_{10}x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.8	0.9	1
$X=10^p$	10^0	$10^{0.1}$	$10^{0.2}$	$10^{0.3}$	$10^{0.4}$	$10^{0.5}$	$10^{0.6}$	$10^{0.7}$	$10^{0.8}$	$10^{0.9}$	10^1
	(1)	(1.25)	(1.58)	(1.99)	(2.51)	(3.16)	(3.98)	(5.01)	(6.31)	(7.94)	(10)



4

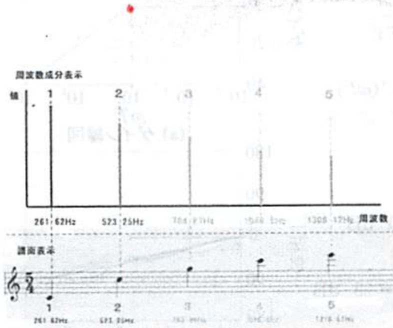
オクターブとは

音名と楽譜、ピアノ鍵盤



5

周波数で見ると



「楽器の音の周波数範囲（スノー）」

対数演算に強くなる　その2

■ ボード線図では常用対数を使用し、単位はデシベルdBである。

常用対数：10を底とする対数

$$p = \log_{10} x \Leftrightarrow 10^p = x$$

ですが、デシベルはこれを２０倍して用いる。
対数pはもともとベル、その１０倍でデシベル。力のレベルはこれでよいがパワーはx^2となるため慣習として

$$p = 10\log_{10} x^2 = 20\log_{10} x$$

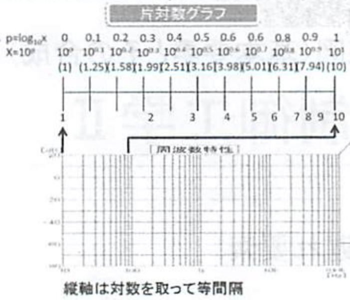
を用いることになっている。よってボード線図は

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \ [dB]$$

である。

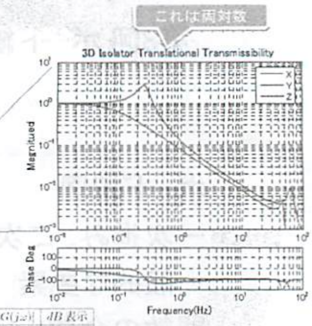
ボード線図の読み方

片対数グラフ



縦軸は対数を取って等間隔

これは両対数



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \ [dB]$$

これは常用対数×２０倍 dB⇒20log

パワーの比を$L = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$ $[dB]$と定義するので

大きさの比は$L = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2}{V_1^2} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$

$\|G(j\omega)\|$	dB表示
0.1	-20
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
10	20
100	40

片対数、両対数ともに用いられるが、広い領域を表す必要があり、対数尺を用いる

積分系 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right|$$
$$= 20\log\frac{1}{|\omega|} = -20\log|\omega|$$

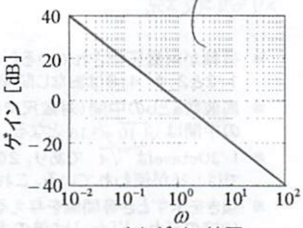
$\omega = 0.1$
$-20\log 0.1 = -20\times(-1) = 20$ dB
$\omega = 1$
$-20\log 1 = -20\times 0 = 0$ dB
$\omega = 10$
$-20\log 10 = -20\times 1 = -20$ dB

位相

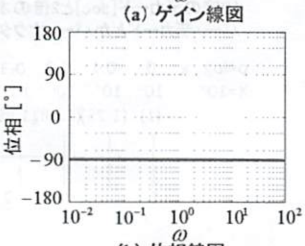
$$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = -\angle j\omega = -\tan^{-1}\frac{\omega}{0} = -90^\circ$$

8

-20dB/dec



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

微分要素 $G(j\omega) = j\omega$

ゲインのdB表現

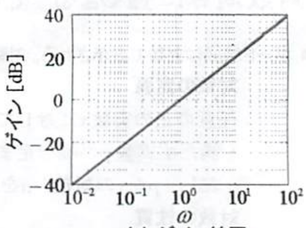
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log|j\omega|$$
$$= 20\log\sqrt{j\omega\cdot(-j\omega)} = 20\log|\omega|$$

$\omega = 0.1$
$20\log 0.1 = 20\times(-1) = -20$ dB
$\omega = 1$
$20\log 1 = 20\times 0 = 0$ dB
$\omega = 10$
$20\log 10 = 20\times 1 = 20$ dB

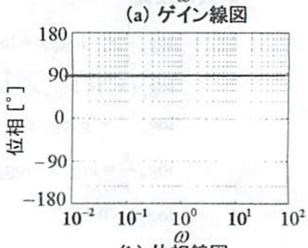
位相

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = \angle\frac{\omega}{0} = \tan^{-1}\infty = 90^\circ$$

9



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

１次遅れ $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

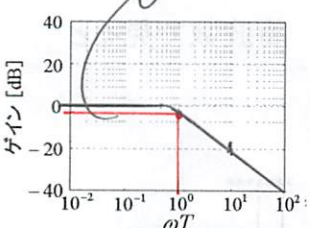
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\omega T) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega T << 1$　$G(j\omega) \approx 1$

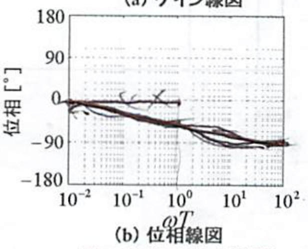
$\omega T >> 1$　$G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T}$

$\omega T << 1$　$20\log|G| \approx 20\log 1 = 0$ dB
$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$　$20\log|G| = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ dB
$\angle G = -45^\circ$
$\omega T >> 1$　$20\log|G| \approx -20\log|\omega T|$ dB
$\angle G \approx -90^\circ$

-3dB



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

図　1 次系のボード線図

１次進み　$G(j\omega) = 1 + j\omega T$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$$

位相

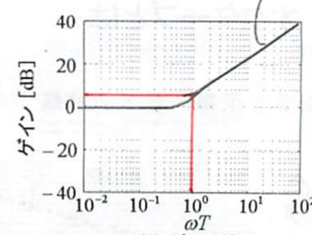
$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega T) = \tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega T << 1$　$G(j\omega) \approx 1$

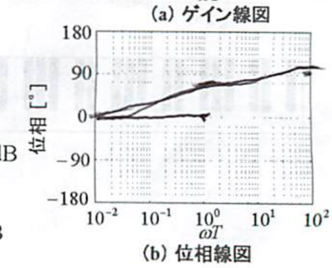
$\omega T >> 1$　$G(j\omega) \approx j\omega T$

$\omega T << 1$　$20\log|G| \approx 20\log 1 = 0$ dB
$\angle G = 0^\circ$
$\omega T = 1$　$20\log|G| = 20\log\sqrt{2} = 3$ dB
$\angle G = 45^\circ$
$\omega T >> 1$　$20\log|G| \approx 20\log|\omega T|$ dB
$\angle G \approx 90^\circ$

20dB/dec



(a) ゲイン線図

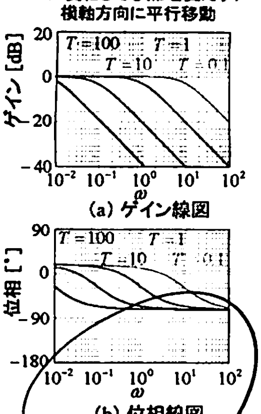


(b) 位相線図

種々の時定数・ゲインに対する１次系のボード線図

11

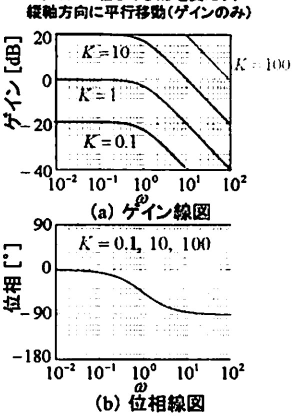
Tが変化しても(形を変えず)横軸方向に平行移動



(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

ゲインK倍しても(形を変えず)縦軸方向に平行移動(ゲインのみ)



(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

何かがまちがっている(らしい)

12

2次系 $G(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$

$$=\frac{1}{(1-\Omega^2)+2\zeta\Omega j}\quad\left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン(デシベル値)

$$20\log|G(j\omega)|=20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle((1-\Omega^2)+j(2\zeta\Omega))$$

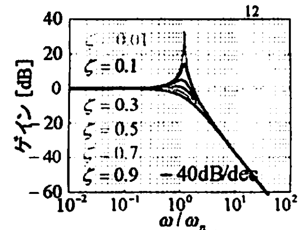
$\Omega<<1$　$G(j\omega)\approx 1$

$\Omega>>1$　$G(j\omega)\approx\dfrac{1}{-\Omega^2}$

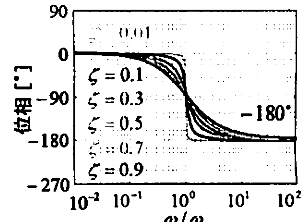
$\Omega<<1$　$20\log|G|=20\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0$ dB　$\angle G\approx 0^\circ$

$\Omega=1$　$20\log|G|=20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right|$ dB　$\angle G=-90^\circ$

$\Omega>>1$　$20\log|G|\approx -40\log|\Omega|$ dB　$\angle G\approx -180^\circ$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

基本要素のボード線図

13

SETSUDAI

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K	dB, $20\log\lvert K\rvert$, 0, ω	0°, ω
s	dB, 1, 0, ω, 20dB/dec	90°, 0°, ω
$\dfrac{1}{s}$	dB, 1, 0, ω, −20dB/dec	0°, −90°, ω
$Ts+1$	dB, 20dB/dec, 0, $1/T$, ω	90°, 0°, $0.2/T$, $5/T$, ω
$\dfrac{1}{Ts+1}$	dB, $1/T$, 0, ω, −20dB/dec	$0.2/T$, $5/T$, 0°, −90°, ω
$\dfrac{\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	dB, 0, ω_n, ω	0°, ω_n, −180°, ω

伝達関数の合成

14

SETSUDAI

■ゲインや位相の性質を用いると、一般的な伝達関数のボード線図も一次遅れ要素や二次遅れ要素といった典型的な伝達関数のボード線図をグラフ上で反転させたり、加え合わせたりすることによって容易に得ることができる。

性質(1)：$H(s)=1/G(s)$のときに次の式が成り立つ

$$20\log_{10}|H(j\omega)|=-20\log_{10}|G(j\omega)|$$
$$\angle H(j\omega)=\angle G(j\omega)$$

性質(2)：$H(s)=G_1(s)G_2(s)$のときに次の式が成り立つ

$$20\log_{10}|H(j\omega)|=20\log_{10}|G_1(j\omega)|+20\log_{10}|G_2(j\omega)|$$
$$\angle H(j\omega)=\angle G_1(j\omega)+\angle G_2(j\omega)$$

性質(1)は微分要素と積分要素の関係と同じく、ゲイン線図では0[dB]で上下を反転させ、位相線図では0[deg]で上下を反転させることによって得られる。性質(2)ではそれぞれ加算すればよい。

2重積分系

15

$$G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}$$

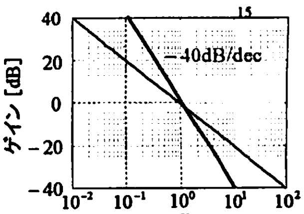
ゲイン(デシベル値)

$$20\log\frac{1}{|(j\omega)^2|}=20\log\frac{1}{\omega^2}$$
$$=-40\log|\omega|$$

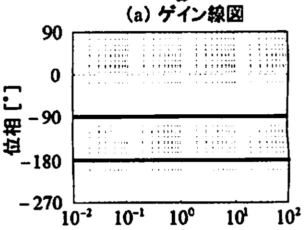
位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j\omega}+\angle\frac{1}{j\omega}=-\tan\infty-\tan\infty$$
$$=-180^\circ$$

Vibration Control Laborato



(a) ゲイン線図

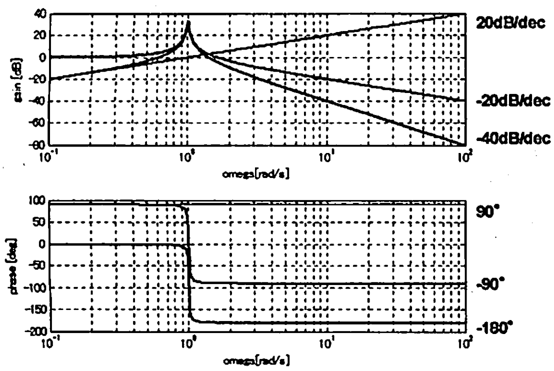


(b) 位相線図

積分系のボード線図

要素の加算

■二次遅れ一と微分要素一の加算

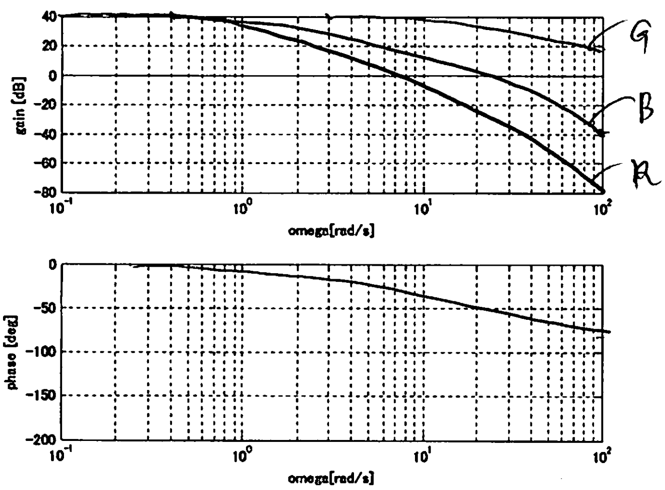


まとめ

- ■対数スケールによる表現の優位さ。
- ■ボード線図の表し方：ゲイン線図と位相線図について学んだ。
- ■基本要素のボード線図について、ゲイン特性、位相特性の特徴、特にlogスケール表現で新たに得られる情報を学習。
- ■一般的な伝達要素も基本要素の加算で求められる。

演習

■時定数T=1とT=0.1の一次遅れ要素の重ね合わせをボード線図で描け



$$G(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

$$=\frac{1}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$$

[illegible]

演習

■時定数T_1=1とT_2=0.1の一次遅れ、進み要素の重ね合わせをボード線図で描け

周波数伝達関数は$G(j\omega)=\dfrac{(1+j\omega T_2)}{(1+j\omega T_1)}=\dfrac{(1+0.1j\omega)}{(1+j\omega)}$

$$=\frac{(1+0.1j\omega)(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$

$$=\frac{1-j\omega+0.1j\omega+0.1\omega^2}{1+\omega^2}$$

$$=\frac{1-0.9j\omega+0.1\omega^2}{1+\omega^2}$$