5

Smart and Human
常翔学園
摂南大学

計算機援用設計
差分法概説

復習

方程式を解く

$$2x-1=0$$

⇩

値を求める

$$x=\frac{1}{2}$$

微分方程式を解く

$$\frac{dy}{dx}+ay=0$$

⇩

元の式を求める

$$y=f(x)$$

微分方程式の解(例2)

次の微分方程式を解け

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

微分方程式の解析的解法(例2)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

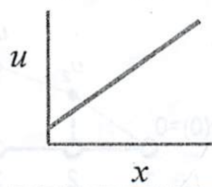
⇩ 両辺を x で積分

$$\int \frac{d^2u}{dx^2}dx=\int 0\,dx$$

$$\frac{du}{dx}=C$$

$$\int \frac{du}{dx}dx=\int C\,dx$$

$$u=Cx+D$$



コンピュータによる数値解析

実際の工学的諸問題について微分方程式を解くことは容易でない

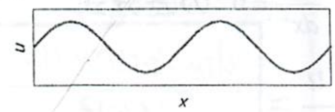
⇩

コンピュータを使って微分方程式の近似解を得る

・・・FEM

微分方程式を解く

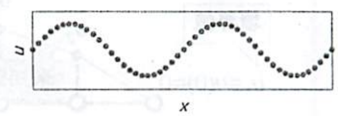
■ 微分方程式 → 積分 → 解（連続関数）



↓離散化

■ 離散式 → 数値積分 → 近似解（離散値）

コンピュータで計算できる

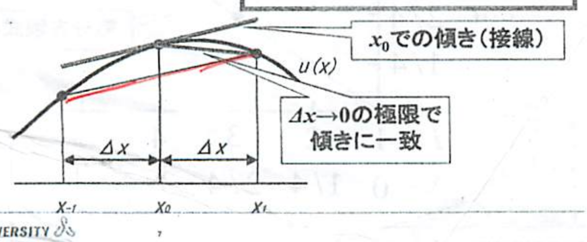


微分と差分

■ 微分法(Differentiation)：
連続関数の変化を表す演算法

＜連続関数の導関数＞

$$u'(x_0)=\frac{du}{dx}\Big|_{x_0}=u'_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

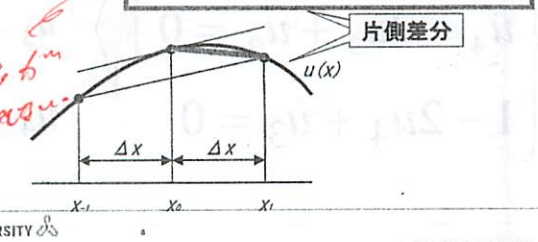


微分と差分

■ 差分法(Finite Difference Method)：
離散値の変化を表す演算法

＜差分近似式＞

$$u'_0\cong\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$



微分方程式の差分解法（例題１）

■ ２階の微分方程式を差分法で解け

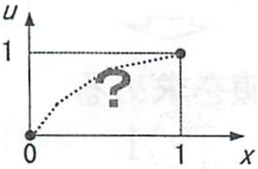
$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

■ 解析領域（ $0\le x\le 1$ ）

■ 境界条件

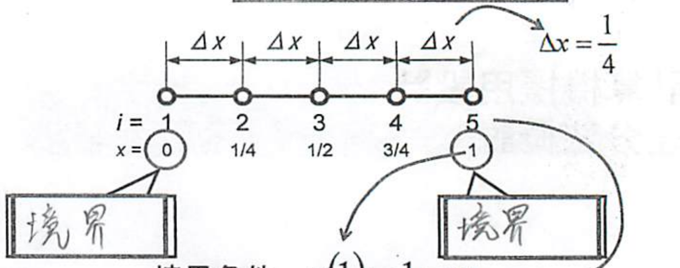
$x=0$ で $u(0)=0$

$x=1$ で $u(1)=1$



微分方程式の差分解法（例題１）

■ 解析領域を 格子(grid, Mesh) に分割

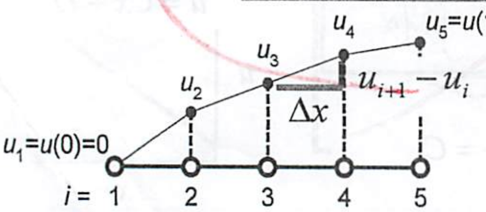


境界条件 $u(1)=1=u_5$

微分方程式の差分解法（例題１）

■ まず $\frac{du}{dx}=0$ の差分式

$$\frac{du}{dx}\cong \boxed{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}=0}$$



テストに出る！

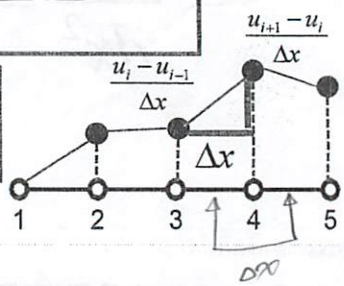
微分方程式の差分解法（例題１）

■ 次に $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ の差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cong \boxed{\frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}-\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}}$$

$$=\boxed{\frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i}{(\Delta x)^2}}$$

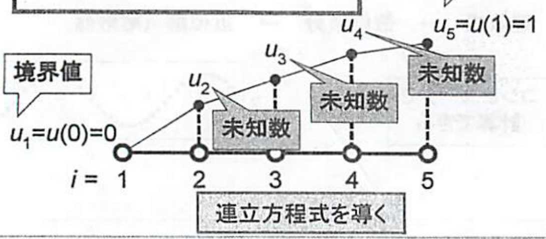
$=0$



微分方程式の差分解法（例題１）

■ $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ の差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cong \boxed{\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}}=0$$

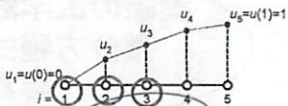


微分方程式の差分解法（例題１）

■ 差分式

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cong\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}=0$$

$$u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}=0$$



境界値 $u_1=0$

$i=2$ ⇨ $u_3-2u_2+u_1=0$

$i=3$ ⇨ $u_4-2u_3+u_2=0$

$i=4$ ⇨ $u_5-2u_4+u_3=0$

境界値 $u_5=1$

微分方程式の差分解法（例題１）

■ 結局，連立方程式を解けば解が得られる

$$\begin{cases} u_3-2u_2=0 \\ u_4-2u_3+u_2=0 \\ 1-2u_4+u_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_2=??? \\ u_3=??? \\ u_4=??? \end{array}$$

微分方程式の差分解法（例題１）

■ 連立方程式の解 $u_2=\frac{1}{4}$ $u_3=\frac{1}{2}$ $u_4=\frac{3}{4}$