ロボットの運動(姿勢の表現)

ロボット概論 10

第10回(2019/12/2)
担当:山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - 3次元空間での同次変換行列
  - 同次変換行列の意味
- 今回の内容
  - オイラー角
  - ロール・ピッチ・ヨー角
  - 順運動学計算
  - DHパラメータ
  - 偏微分とヤコビ行列(次回のための準備)

⇨ ロボットの姿勢を表現する方法を知ろう

(復習)同次変換行列

- 座標系Σ_Aで見た座標からΣ_0で見た座標を計算する同次変換行列${}^0\boldsymbol{T}_A$
  (4×4行列になる)

回転成分
(各列ベクトルが，座標系Σ_0からみた，Σ_Aのx, y, z方向の単位ベクトル)

並進成分
(座標系Σ_0からみたΣ_Aの原点)

$$
{}^0\boldsymbol{T}_A = \left[\begin{array}{c|c} {}^0\boldsymbol{R}_A & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \\ \hline 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{array}\right]
$$

常に0　　常に1

座標系Σ_0での位置ベクトル　　座標系Σ_Aでの位置ベクトル

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}
$$

ここは常に1

回転行列の冗長性

- Z軸まわりの回転行列

$$
{}^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Y軸まわりの回転行列

$$
{}^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}
$$

- X軸まわりの回転行列

$$
{}^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}
$$

パラメータは9つあるが，各列ベクトルの大きさは1であり
($\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)
内積が0だから互いに直交している

⇩

パラメータは3つあれば足りる

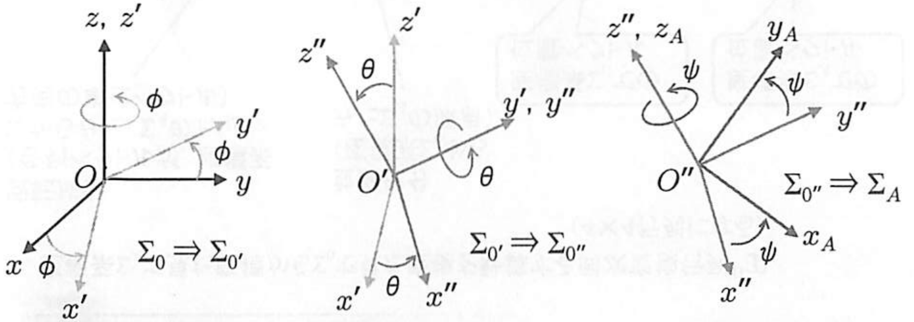
⇩

3つのパラメータで回転を表現しよう

オイラー角（Euler angles）

ϕ：ファイ
θ：シータ
ψ：プサイ

- ロボットの姿勢（向き）を3つの角度（ϕ, θ, ψ）で表現する
- 回転させる軸の順番（$z \to y' \to z''$）が重要（z-y-z オイラー角とも呼ばれる）
- 回転の正方向は回転軸の正を奥方向に見たとき時計回り（右ネジの向き）



(1)z軸回りにϕ回転　(2)y'軸回りにθ回転　(3)z''軸回りにψ回転

オイラー角（Euler angles）

- オイラー角から回転行列 ${}^0R_A$ を求めよう

$$
{}^0\boldsymbol{R}_{0'} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{0'}\boldsymbol{R}_{0''} = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}
\quad
{}^{0''}\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

z軸回りにϕ回転　y'軸回りにθ回転　z''軸回りにψ回転

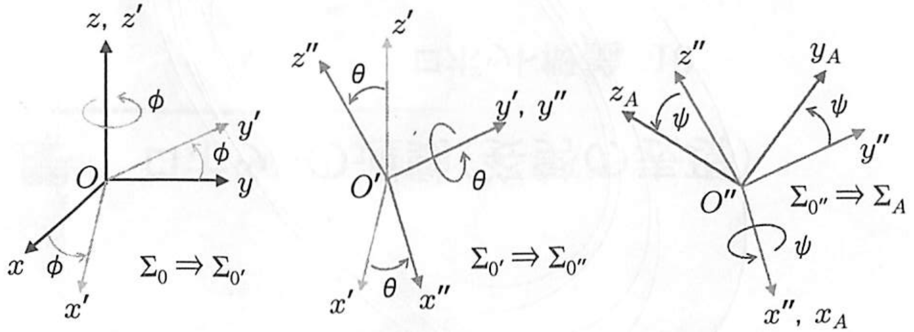
より

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{R}_A &= {}^0\boldsymbol{R}_{0'}\,{}^{0'}\boldsymbol{R}_{0''}\,{}^{0''}\boldsymbol{R}_A \\
&= \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\psi - S\phi S\psi & -C\phi C\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta \\ S\phi C\theta C\psi + C\phi S\psi & -S\phi C\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

（逆に，回転行列からオイラー角を求めることもできる（逆三角関数を用いる）。ここでは割愛。）

ロール・ピッチ・ヨー角（roll-pitch-yaw angle）

- ロボットの姿勢（向き）を3つの角度（ロール角ϕ，ピッチ角θ，ヨー角ψ）で表現
- 回転させる軸の順番（$z \to y' \to x''$）に注意（z-y-x オイラー角とも呼ばれる）
- 各軸それぞれが1回回転している



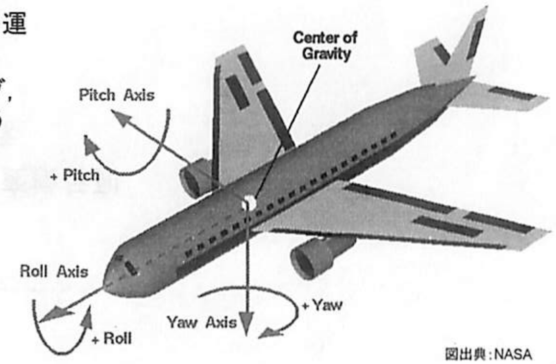
(1)z軸回りにϕ回転（ロール）　(2)y'軸回りにθ回転（ピッチ）　(3)x''軸回りにψ回転（ヨー）

ロール・ピッチ・ヨー角（roll-pitch-yaw angle）

- 回転行列は以下のようになる

$$
{}^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}
$$

- 飛行機，自動車など移動体の運動の表現にも用いられている
- それぞれの動きを，ローリング，ピッチング，ヨーイングともいう



図出典：NASA

順運動学の計算

$$\sigma_n = \frac{P}{2(w-a)h}$$

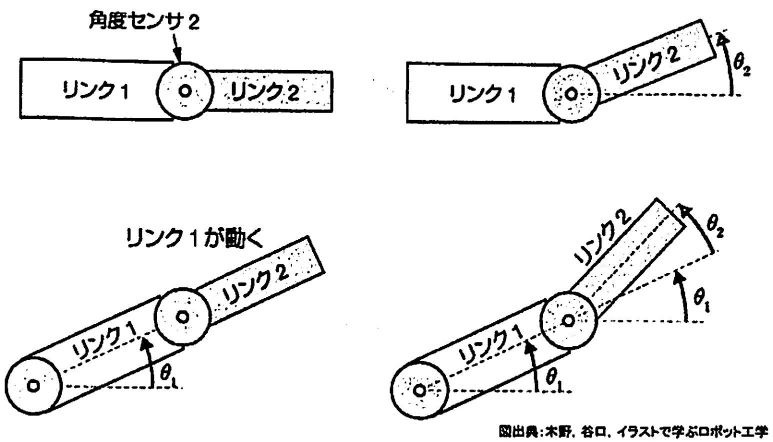
- 同次変換行列があれば順運動学は解ける
- 一般に，各リンクの角度は，センサによりそれぞれの基準状態からの角度として計測される

$$= \frac{P}{(2w-2a)h}$$

$$\frac{200 \times 33}{2(20-10)5}$$

センサ２がリンク１に固定

リンク１から角度 θ_2 を計測



$$= \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

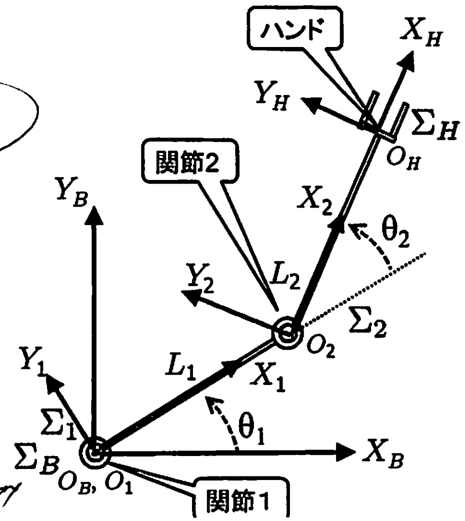
$$= \frac{(60-10)5 \times \sigma_{max}}{200 \times 33}$$

図出典：木野，谷口，イラストで学ぶロボット工学

$$= \frac{\cancel{50 \cdot 5} \times \sigma_{max}}{\cancel{200} \times 33}$$
4

順運動学の計算

- 平面上を動く，関節が2つのロボットアームの姿勢を考えよう



- 4つの座標系をとる

Σ_B：ベース座標系（動かない）

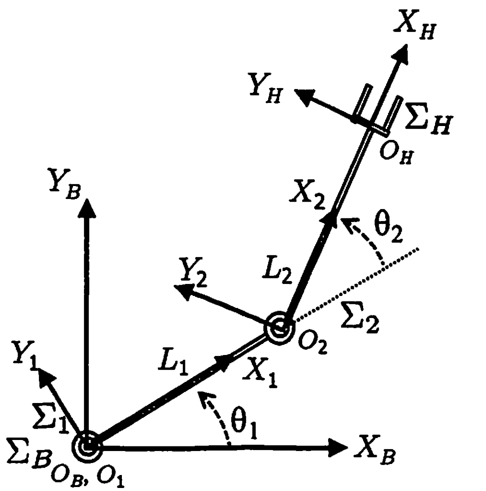
Σ_1：ベース座標系からθ_1回転した座標系（関節1に固定の座標系）

Σ_2：Σ_1からX_1軸方向にL_1並進の後，θ_2回転した座標系（関節２に固定の座標系）

Σ_H：Σ_2からX_2軸方向にL_2並進した座標系（ハンドに固定の座標系）

順運動学の計算

- 各座標系間の同次変換行列を求める



1）θ_1回転

$$^{B}\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{285.182}{4 \times 33}$$

2）L_1並進 ⇒ $\cancel{\theta_1}$ θ_2回転

$$= 2.1604$$

$$^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3）L_2並進

$$^{2}\boldsymbol{T}_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

順運動学の計算

- 隣接する同次変換行列を掛けることで，離れた座標系間の同次変換行列が求まる

$$^{B}\boldsymbol{T}_H = {}^{B}\boldsymbol{T}_1{}^{1}\boldsymbol{T}_2{}^{2}\boldsymbol{T}_H = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_1 C\theta_2 - S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 C\theta_2 & L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 C\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 & L_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & L_1 C\theta_1 \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & L_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

加法定理でまとめる

$$\frac{285.18}{132} =$$

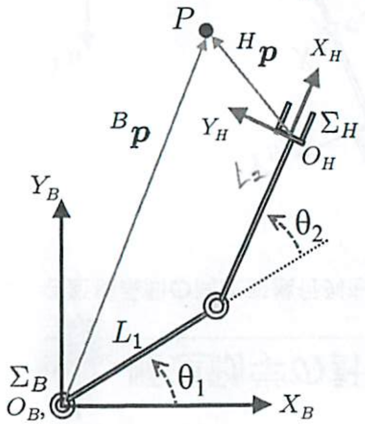
$$= \begin{bmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & L_1 C\theta_1 + L_2 C(\theta_1+\theta_2) \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & L_1 S\theta_1 + L_2 S(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

順運動学の計算

- θ_1, θ_2が分かれば，同次変換行列から各関節・先端の向き・位置が分かる

$$
{}^{B}\boldsymbol{T}_{H} = \begin{bmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & L_1C\theta_1 + L_2C(\theta_1+\theta_2) \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & L_1S\theta_1 + L_2S(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ハンドの向き（X_H軸の向き）　ハンドの向き（Y_H軸の向き）　ハンドの位置（ハンド座標系の原点）



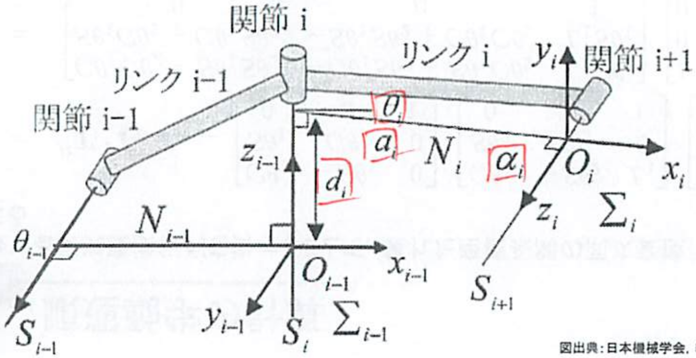
※ハンド座標系で見た位置ベクトルについては，次式でベース座標系に変換できる

$$
\begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{B}\boldsymbol{T}_{H} \begin{bmatrix} {}^{H}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

D-H法（Denavit-Hartenberg method）

- よく知られた座標系の取り方として，4つのパラメータを用いるD-H法がある
- 関節軸iを含む直線をS_iとし，S_{i-1}とS_iの共通法線をN_{i-1}とする
- S_iの向きを座標系Σ_{i-1}のz_{i-1}軸とし，N_{i-1}とS_iの交点を原点O_{i-1}とする
- N_{i-1}の方向をx_{i-1}とし，右手系でy_{i-1}軸を決める

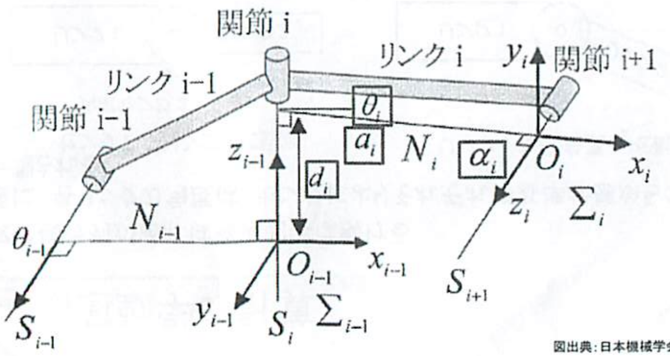
※軸の決め方の異なる修正D-H法もある



図出典：日本機械学会，ロボティクス

D-Hパラメータ（Denavit-Hartenberg method parameters）

- 4つのパラメータで次の座標系の位置・向きが表現される
- a_i ：共通法線N_iの長さ（リンク長さ）
- θ_i ：x_{i-1}軸とx_i軸のなす角（リンク間角度）
- α_i ：z_{i-1}軸とz_i軸のなす角（リンクのねじれ角）
- d_i ：原点O_{i-1}から共通法線N_{i-1}とS_iとの交点までの距離（リンク間距離）



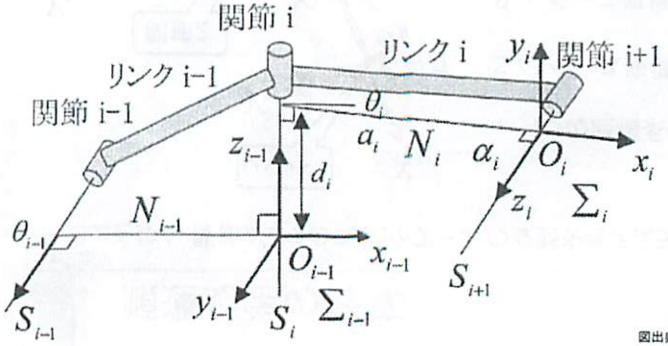
図出典：日本機械学会，ロボティクス

D-Hパラメータ（Denavit-Hartenberg method parameters）

- 同次変換行列を考えると

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_{i} &= \mathbf{Rot}(z,\theta_i)\mathbf{Trans}(0,0,d_i)\mathbf{Trans}(a_i,0,0)\mathbf{Rot}(x,\alpha_i) \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

※関節iが回転関節の場合はθ_iが，直動関節の場合はd_iが変数となる（他は固定）



図出典：日本機械学会，ロボティクス

偏微分

- 多変数関数を，ある1変数に関して微分することを偏微分という
- 注目する変数以外は定数として，（従来の）微分の操作をすれば良い
- 注目する変数方向の変化率を表している

- 例として，以下のようなxとyの2つの変数から値が決まる関数fを考える

$$f(x,y)=x^2+xy+y^3$$

- 関数fのxによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+0$$

x^2の微分　xyの微分　y^3の微分(=0)

，$\boxed{y\text{ を定数として}x\text{を微分}}$

- 関数fのyによる偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0+x+3y^2$$

，$\boxed{x\text{ を定数として}y\text{を微分}}$

$\boxed{\partial\text{ はラウンドと読む}}$

演習1

- 以下の偏微分を計算せよ

$$g(\theta_1,\theta_2)=2\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin(\theta_1+3\theta_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_1}=2\sin\theta_2\cdot(-\sin\theta_1)+\cos(\theta_1+3\theta_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_2}=2\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

ヤコビ行列（Jacobian matrix）

手先位置x，yが関節角度θ_1，θ_2の関数f_1，f_2から決まるとしよう

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\theta_1,\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)\end{bmatrix}$$

例）$f_1(\theta_1,\theta_2)=L_1\cos\theta_1+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)$
　　$f_2(\theta_1,\theta_2)=L_1\sin\theta_1+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)$

両辺を微分すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

全微分といわれる

行列として整理すると

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d\theta_1}{dt}\\\frac{d\theta_2}{dt}\end{bmatrix}$$

この行列をヤコビ行列という。
また，その行列式をヤコビアンという

演習2

- 以下の関数f_1，f_2が与えられたとき，ヤコビ行列Jを求めよ。

$$\begin{aligned}f_1(\theta_1,\theta_2)&=3\cos\theta_1+2\cos(\theta_1+\theta_2)\\f_2(\theta_1,\theta_2)&=3\sin\theta_1+2\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_1}{\partial\theta_2}\\\frac{\partial f_2}{\partial\theta_1}&\frac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3\sin\theta_1-2\sin(\theta_1+\theta_2)&-2\sin(\theta_1+\theta_2)\\3\cos\theta_1+2\cos(\theta_1+\theta_2)&2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$