内積を使った計算

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

- ベクトル$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{i}$方向成分a_xを取り出したい

$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ の$\boldsymbol{i}$方向の単位ベクトルとの内積をとる

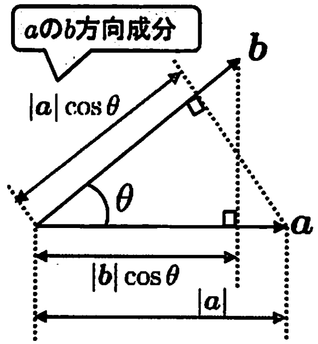
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_x\underbrace{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}}_{1}+a_y\underbrace{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}}_{0}+a_z\underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}}_{0}=\underline{\underline{a_x}}$$

- ベクトルの，ある方向の成分を求めたい
  ⇒ その方向の単位ベクトルとの内積をとればよい

ベクトル$\boldsymbol{b}$と同じ向きの単位ベクトル $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\left|\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|\cos\theta$$
$$=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$$

ベクトル$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{b}$方向成分（スカラー）



演習1

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$ のとき，以下を計算せよ

$\boldsymbol{a}^T=$ $[2\ \ 3\ \ -1]$

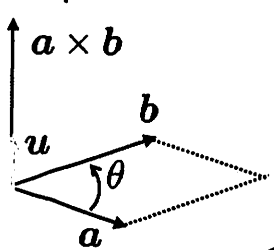
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $[2\ 3\ -1]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$
$=-5$

$|\boldsymbol{a}|=$ $(2^2+3^2+(-1)^2)^{1/2}$
$=\sqrt{14}$

ベクトル$\boldsymbol{b}$の$\boldsymbol{a}$方向成分

$b\cdot\frac{a}{|a|}=|b|\cdot\left|\frac{b}{|b|}\right|\cos\theta$
$=|b|\cdot\cos\theta$

ベクトルの外積（×, vector product, ベクトル積）



$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)\,\boldsymbol{u}$$

※ $\boldsymbol{u}$は$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$を含む平面に垂直で，その向きを$\boldsymbol{a}$→$\boldsymbol{b}$の方向に$\theta(\leq\pi)$だけ回転させたとき右ねじが進む方向の単位ベクトル

工学では，2つのベクトルに垂直なベクトルが欲しいときがある

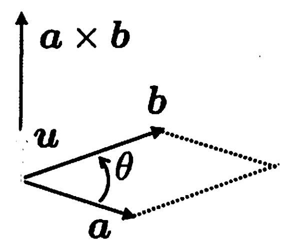
内積と異なり，計算結果はベクトルである

右ねじ・・・時計方向に回すと奥に進む
（先端を手前に見たとき，反時計回りになるように）

外積の大きさ $$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$を2辺とする平行四辺形の大きさ

外積の計算



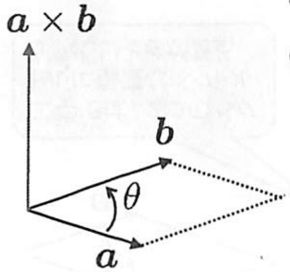
$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$
$$=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix}$$

よく使われる覚え方（たすきがけの形）

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

外積の公式



$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ （交換法則は成り立たない）

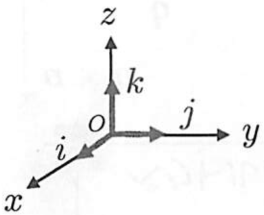
$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ （結合法則は成り立たない）

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ （分配法則）

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

（ベクトル3重積）



直交単位ベクトルの外積

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

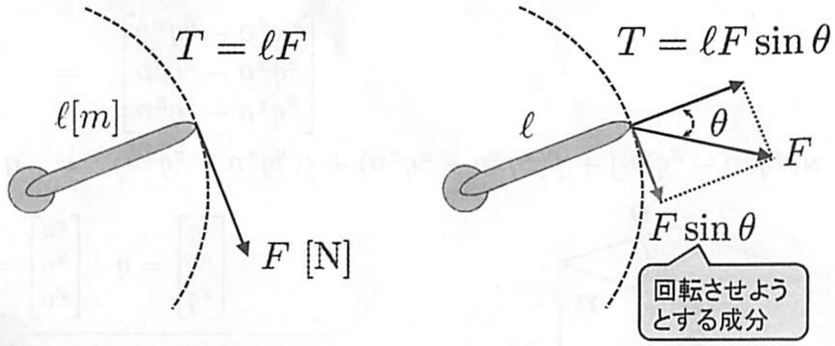
$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

a, bの向きが同一線上のとき

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

（復習）トルク（力のモーメント）

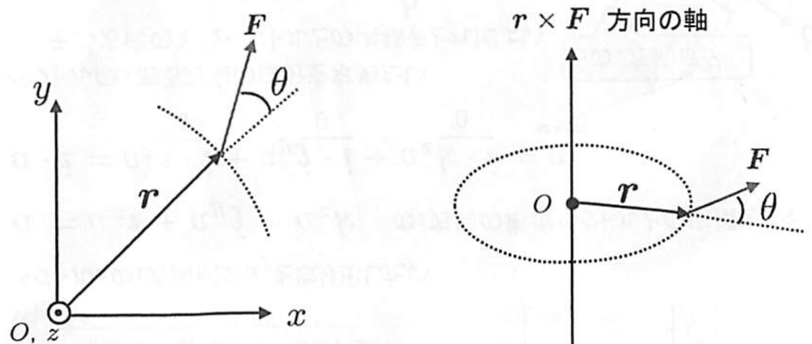
- 物体を回転させようとする能力を表す物理量（単位 Nm）
- （回転軸までの距離） × （（接線方向の）力の大きさ）
- 先端にかかる力が同じでも，腕が長いほど，トルクは大きい。また，同じトルクで回転させても，腕の先ほど力は小さくなる。



- 正しくはベクトル量であり，位置ベクトルと力ベクトルの外積 $\ell \times F$

トルク（力のモーメント）のベクトル表現

- 位置ベクトルrの先端にFの力が作用するとき，外積 $r \times F$ の向きが回転軸，大きさが$|r \times F|$ のトルクが発生する
- rとFがともにx-y平面上ならば，トルクのベクトルの向きは，平面に垂直になる
- トルクの大きさは $|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$



※ ⊙ は画面の奥から手前に向けてz軸があることを示す

角速度のベクトル表現

- 角速度もベクトルで表現される
- 角速度ベクトルωは，ωの向きが回転軸，|ω|が角速度の大きさを示す。（回転の向きは右ネジの向き）
- 点Pの位置ベクトルがrのとき，速度ベクトルvは，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

加速度ベクトルaは

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

- また，角運動量をベクトルで表すと，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = J\boldsymbol{\omega}$$

ただし，Jは慣性モーメント

- 剛体の回転運動を表すオイラーの運動方程式は $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{T}$