ロボットの運動(同次変換 その2)

ロボット概論 9

第9回(2019/11/25)

担当:山﨑

はじめに

- 前回の内容
  - 行列と三角関数の復習
  - 並進と回転
  - 同次変換(平面の場合)
- 今回の内容
  - 3次元空間での同次変換行列
  - 同次変換行列の意味

⇨ 3次元空間でも，ロボットアームの手先位置や姿勢を計算できるようになろう

(復習)同次変換(homogeneous transform)(平面の場合)

- 並進と回転を一つの行列で表現する
- 位置ベクトルの次元を1つ拡大

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 同次変換行列 ${}^{B}T_{E}$　※座標系Σ_Eで見た座標をΣ_Bで見た座標に変換

回転成分

$${}^{B}T_{E} = \left[\begin{array}{cc|c} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

座標系の並進⇒回転を表す

並進成分

常に0

常に1

同次変換行列

座標系Σ_Bでの座標

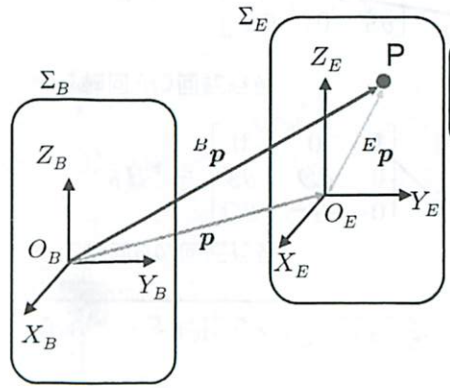
座標系Σ_Eでの座標値

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

座標系の並進移動(3次元の場合)

- 2つの座標系Σ_B, Σ_E
- $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$:Σ_Bの原点からΣ_Eの原点への位置ベクトル
- ${}^{E}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_E & y_E & z_E \end{bmatrix}^T$:Σ_Eの原点から点Pへの位置ベクトル
- ${}^{B}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}^T$:Σ_Bの原点から点Pへの位置ベクトル

$${}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{E}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}$$



座標系Σ_Bでの位置ベクトル

座標系Σ_Eでの位置ベクトル

座標系Σ_BからΣ_Eへの並進

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

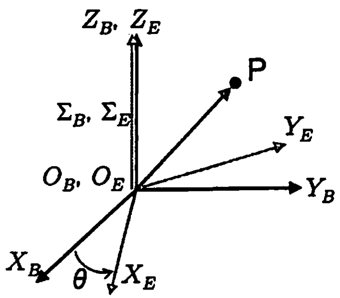
座標系の回転移動（Z軸まわりの場合）

- Σ_Bからθだけz軸回りに回転した座標系をΣ_Eとする

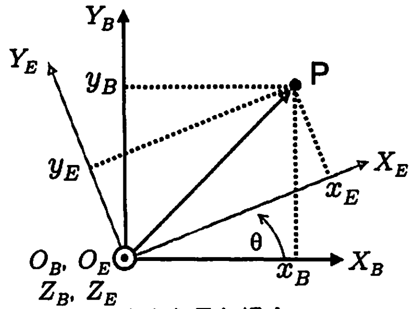
座標系Σ_Bでの位置ベクトル

座標系Σ_Eでの位置ベクトル

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E C\theta - y_E S\theta \\ x_E S\theta + y_E C\theta \\ z_E \end{bmatrix}$$



座標系の回転



上から見た場合

各軸回りの座標系の回転移動

- Z軸回りの回転行列

$$^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3行3列目が1（Z）

- Y軸回りの回転行列

2行2列目が1（Y）

$$^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix}$$

- X軸回りの回転行列

1行1列目が1（X）

$$^0\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

同次変換行列

- 平面の場合と同様に，同次変換行列を導入する。
- 位置ベクトルの次元を一つ拡大

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 座標系Σ_Aの座標を座標系Σ_0の座標へ変換する同次変換行列
（4×4行列になる）

回転成分　並進成分

$$^0\boldsymbol{T}_A = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{^0\boldsymbol{R}_A} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \\ \hline \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} & \boxed{1} \end{array}\right]$$

常に0　常に1

座標系Σ_0での位置ベクトル　座標系Σ_Aでの位置ベクトル

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次変換行列

- 並進変換

$$\mathbf{Trans}(a,\ b,\ c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- y軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(\boldsymbol{y}, \theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- z軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(\boldsymbol{z}, \theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- x軸回りの回転変換

$$\mathbf{Rot}(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同次変換行列

- 任意の同次変換行列はTrans(・)とRot(・)で表される。
- 複数の変換をつなげることで，複雑な座標系の変換も扱える

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_C = {}^{0}\boldsymbol{T}_A {}^{A}\boldsymbol{T}_B {}^{B}\boldsymbol{T}_C $$

- 逆変換は，逆行列を考えれば良いので，次式で与えられる

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_0 = {}^{0}\boldsymbol{T}_A^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} {}^{0}\boldsymbol{R}_A^{T} & -{}^{0}\boldsymbol{R}_A^{T}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] $$

演習1-1

- ハンド座標系Σ_Hの座標をベース座標系Σ_Bの座標へ変換する同次変換行列が以下で与えられている。${}^{B}T_H$を計算せよ。

$$ {}^{B}T_H = \mathbf{Rot}\left(y, \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{Trans}(0,0,2)\mathbf{Rot}\left(x, \frac{\pi}{2}\right) $$

$$ \begin{bmatrix} C\frac{\pi}{2} & 0 & S\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\frac{\pi}{2} & 0 & C\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\frac{\pi}{2} & -S\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & S\frac{\pi}{2} & C\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

演習1-2

- 座標系Σ_Hで見た位置ベクトル ${}^{H}\boldsymbol{p} = [2\ \ 1\ \ 1]^T$ を，${}^{B}T_H$ を用いて座標系Σ_Bで見た位置ベクトル ${}^{B}\boldsymbol{p}$ に変換せよ。

$$ \begin{bmatrix} {}^{B}p \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{B}T_H \begin{bmatrix} {}^{H}p \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} $$

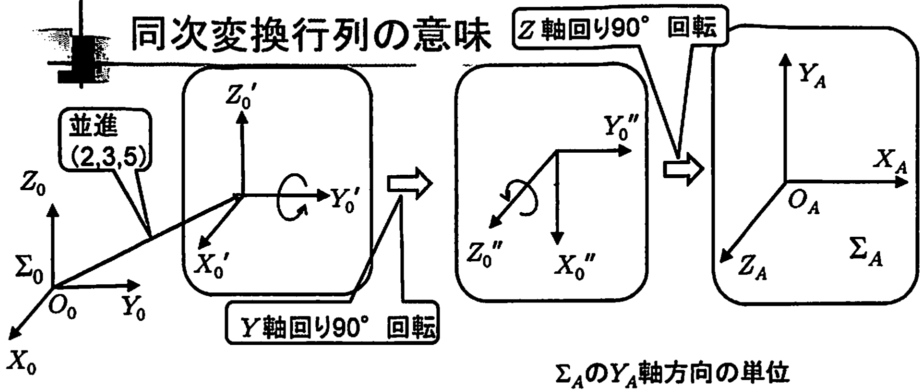
同次変換行列の意味

- 座標系Σ_0から並進(2, 3, 5)の後，Y軸回りに90° 回転し，次にZ軸回りに90° 回転した座標系Σ_Aを考える
- このときΣ_AからΣ_Aへの同次変換行列は

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{T}_A &= \mathbf{Trans}(2,\ 3,\ 5)\mathbf{Rot}(y, \tfrac{\pi}{2})\mathbf{Rot}(z, \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} $$

同次変換行列は，Σ_AからΣ_Aへどのように座標系が移動したかを表している

同次変換行列の意味



Σ_AのY_A軸方向の単位ベクトル

Σ_AのX_A軸方向の単位ベクトル
（Σ_0のX_0軸方向の単位ベクトル
$[1\ 0\ 0]^T$が$[0\ 1\ 0]^T$に移った）

Σ_AのZ_A軸方向の単位ベクトル

$${}^0\boldsymbol{T}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

座標系Σ_0で見たΣ_Aの原点O_Aの位置

Σ_OからΣ_Aへの座標軸の動きが分かる