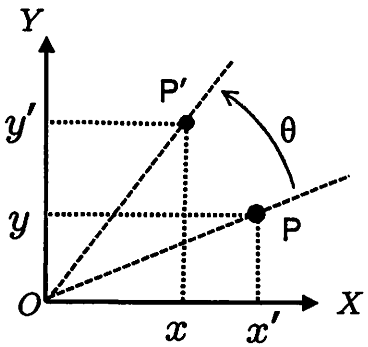
点の回転移動

- 点Pの位置ベクトル$P=[x \ \ y]^T$ を$P'=[x' \ \ y']^T$ まで，θだけ回転させる

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



回転変換を以下で書く（回転行列）

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

逆方向への回転は

$$\boldsymbol{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} C(-\theta) & -S(-\theta) \\ S(-\theta) & C(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta \\ -S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

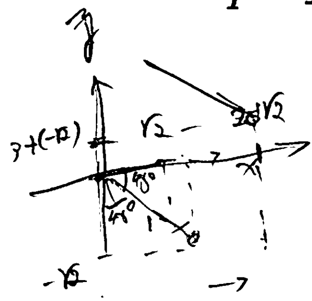
逆回転は，元の回転行列の転置であることが分かる

$$\boldsymbol{R}(-\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1} = \boldsymbol{R}(\theta)^T$$

演習1

$\theta = 45°$

- 位置ベクトル$P=[1 \ 0]^T$を時計方向に45° 回転させた後，x軸方向に2，y軸方向に3だけ並進移動させた位置ベクトルP'は？



$$P' = R(-\theta)P + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta) & S(\theta) \\ -S(\theta) & C(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \end{bmatrix}$$

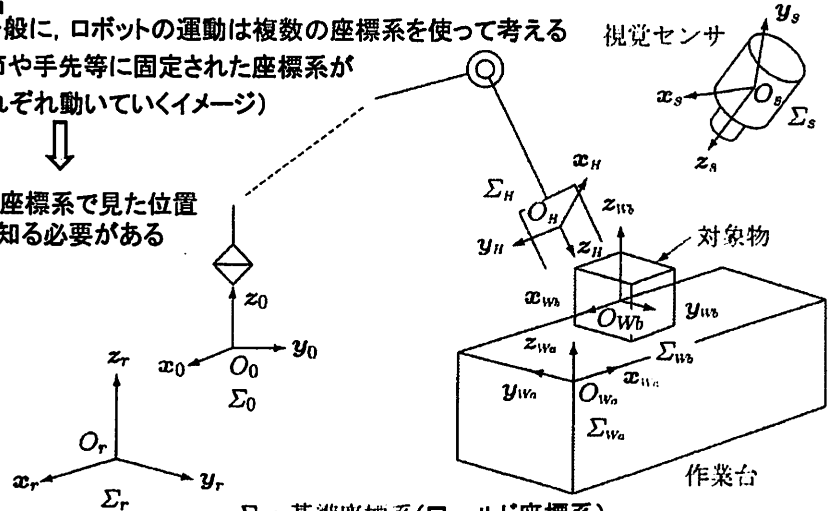
座標系

図出典：川崎，ロボット工学の基礎第2版

- 一般に，ロボットの運動は複数の座標系を使って考える（関節や手先等に固定された座標系がそれぞれ動いていくイメージ）

⇩

- 各座標系で見た位置を知る必要がある



Σ_r：基準座標系（ワールド座標系）
Σ_0：ベース座標系　　Σ_s：センサ座標系
Σ_H：手先（ハンド）座標系　　Σ_{Wi}：対象物iの作業座標系

座標系の並進移動

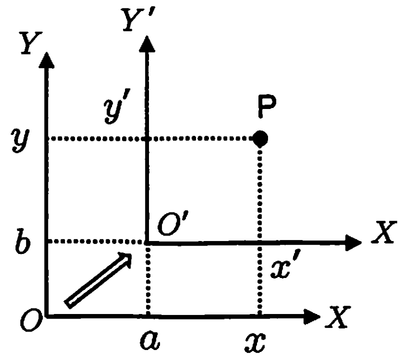
- 点Pを2つの座標系で見てみた

座標系X'-Y'で見た座標　座標系X-Yで見た座標　座標系X-Yの原点から座標系X'-Y'の原点への並進

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

座標系X-Yで見た座標　座標系X'-Y'で見た座標



※点の並進移動と逆の関係

座標系の回転移動

- 点Pを2つの座標系で見てみた

同じ点

座標系X'-Y'で見た座標

座標系X'-Y'からは，-θ回転して見える

座標系X-Yで見た座標

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta \\ -S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

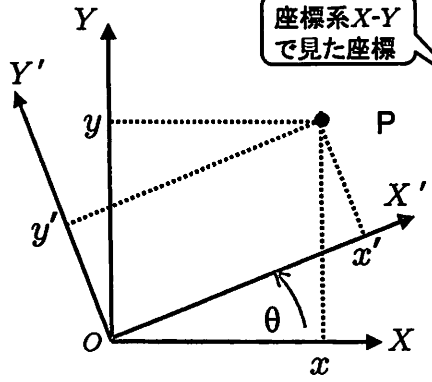
$\Downarrow$ 逆行列

座標系X-Yで見た座標

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

座標系X-Yからは，θ回転して見える

座標系X'-Y'で見た座標



※点の回転移動と逆の関係

同次変換(homogeneous transform)

- 座標系の並進と回転を一つの行列で表したい
- 位置ベクトルの次元を1つ拡大

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここは常に1

- 同次変換行列
  - 並進a,b⇒回転θを表す

$$\left[\begin{array}{cc|c} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

回転成分

並進成分

常に0

常に1

並進，回転する前の座標系で見た位置

座標系の並進⇒回転

並進，回転した後の座標系で見た位置

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

並進変換・回転変換

- 並進と回転の同次変換行列を記号で表すこととする
- (a, b)だけ移動する並進変換(Translation transform)

$$\mathbf{Trans}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回転成分は単位行列
(回転しない)

- 角度θだけ回転する回転変換(Rotation transform)

$$\mathbf{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

並進成分は0
(並進しない)

同次変換行列

- 座標系X-Yと，(a, b)だけ並進した座標系X'-Y'の変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 座標系X'-Y'と，θだけ回転した座標系X''-Y''の変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Rot}(\theta) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次変換行列を並べることで，複数回の座標系の変換が計算できる

左から右に座標系の動きを示す

右から左に各座標系で見た位置ベクトルを示す

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Trans}(a,b)\mathbf{Rot}(\theta) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & a \\ S\theta & C\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$