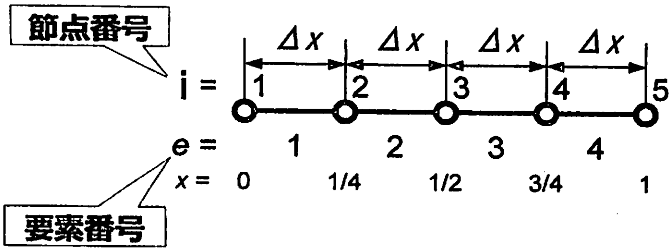
1

微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 解析領域を要素(Element)に分割



微分方程式の有限要素解法(例題１)

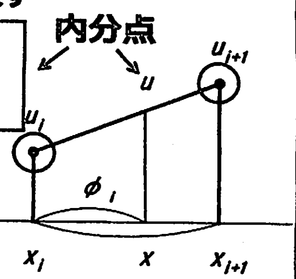
SETSUDAI

■ 要素内のuを近似式で表す

$$u=(1-\phi_i)u_i+\phi_i u_{i+1}$$

$$\phi_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

基底関数または形状関数



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

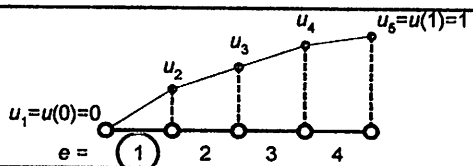
■ 要素内のuを近似式で表す

e=1: $\phi_1=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{x-0}{(1/4)}=4x$

$\Phi_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$u=(1-\Phi_i)u_i+\Phi_i u_{i+1}$

$$u=(1-\phi_1)u_1+\phi_1u_2=(1-4x)0+4xu_2=4xu_2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

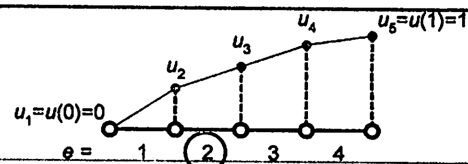
■ 要素内のuを近似式で表す

e=2: $\phi_2=\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{x-(1/4)}{(1/4)}=4x-1$

$\Phi_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$u=(1-\Phi_i)u_i+\Phi_i u_{i+1}$

$$u=(1-\phi_2)u_2+\phi_2u_3=(2-4x)u_2+(4x-1)u_3$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

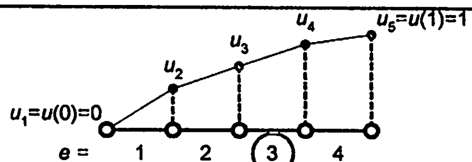
■ 要素内のuを近似式で表す

e=3: $\phi_3=\frac{x-x_3}{x_4-x_3}=\frac{x-(1/2)}{(1/4)}=4x-2$

$\Phi_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$u=(1-\Phi_i)u_i+\Phi_i u_{i+1}$

$$u=(1-\phi_3)u_3+\phi_3u_4=(3-4x)u_3+(4x-2)u_4$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

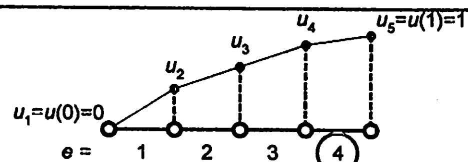
■ 要素内のuを近似式で表す

e=4: $\phi_4=\frac{x-x_4}{x_5-x_4}=\frac{x-(3/4)}{(1/4)}=4x-3$

$\Phi_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$u=(1-\Phi_i)u_i+\Phi_i u_{i+1}$

$$u=(1-\phi_4)u_4+\phi_4\cdot u_5=(4-4x)u_4+(4x-3)u_5$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 要素ごとに$\Pi(u)$を計算する

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

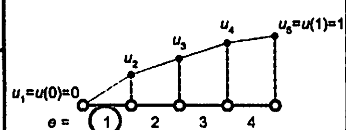
e=1: $u=4xu_2 \Longrightarrow \frac{du}{dx}=?$

$$\frac{du}{dx}=4u_2$$

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\int_0^{1/4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/4}4^2(u_2)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[u_2^2x\right]_0^{1/4}=2u_2^2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

SETSUDAI

■ 要素ごとに$\Pi(u)$を計算する

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

e=2: $u=(2-4x)u_2+(4x-1)u_3$

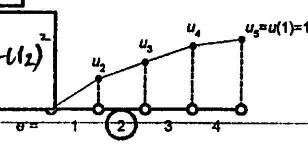
$\Longrightarrow \frac{du}{dx}=?$

$$\frac{du}{dx}=4(u_3-u_2)$$

$$\Pi_2=\frac{1}{2}\int_{1/4}^{1/2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/4}^{1/2}4^2(u_3-u_2)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[(u_3-u_2)^2x\right]_{1/4}^{1/2}=2(u_3-u_2)^2$$



オモテ

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 要素ごとに $\Pi(u)$を計算する　$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$

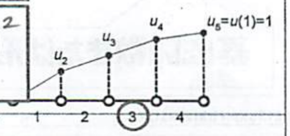
e=3: $u=(3-4x)u_3+(4x-2)u_4$

$\frac{du}{dx}=?$

$$\Pi_3=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx \leftarrow \frac{du}{dx}=4(u_4-u_3)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/4}4^2(u_4-u_3)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[(u_4-u_3)^2x\right]_{1/2}^{3/4}=2(u_4-u_3)^2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 要素ごとに $\Pi(u)$を計算する　$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$

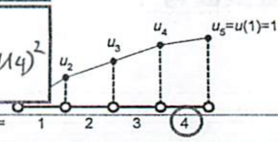
e=4: $u=(4-4x)u_4+(4x-3)u_5$

$\frac{du}{dx}=?$

$$\Pi_4=\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx \leftarrow \frac{du}{dx}=4(u_5-u_4)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}4^2(u_5-u_4)^2dx$$

$$=\frac{16}{2}\left[(u_5-u_4)^2x\right]_{3/4}^{1}=2(u_5-u_4)^2$$



微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 全領域の $\Pi(u)$ が求まる

$$\Pi(u)=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$$

$$=2u_2^2+2(u_3-u_2)^2+2(u_4-u_3)^2+2(u_5-u_4)^2$$

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_2,u_3,u_4 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_2}=\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_3}=\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_4}=0$$

となる u_2,u_3,u_4 を求める

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_2 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_2}=\frac{\partial}{\partial u_2}\left[2u_2^2+2(u_3-u_2)^2+\cdots\right]$$

$$=4(2u_2-u_3)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_3 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_3}=\frac{\partial}{\partial u_3}\left[\cdots+2(u_3-u_2)^2+2(u_4-u_3)^2+\cdots\right]$$

$$=4(-u_2+2u_3-u_4)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ $\Pi(u)$ が最小となる u_4 を求める

$$\frac{\partial\Pi(u)}{\partial u_4}=\frac{\partial}{\partial u_4}\left[\cdots+2(u_4-u_3)^2+2(u_5-u_4)^2\right]$$

$$=4(-u_3+2u_4-u_5)=0$$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 連立方程式を解く

$$\begin{cases}u_2=\frac{1}{4}\\ u_3=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\ u_4=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$u_3-2u_2=0$$

$$u_4-2u_3+u_2=0$$

$$1-2u_4+u_3=0$$

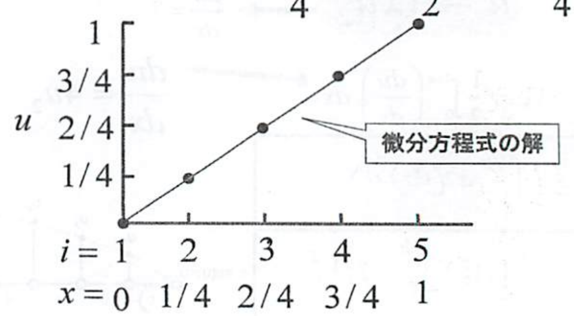
$u_2=???$

$u_3=???$

$u_4=???$

微分方程式の有限要素解法(例題１)

■ 連立方程式の解　$u_2=\frac{1}{4}$　$u_3=\frac{1}{2}$　$u_4=\frac{3}{4}$



オイテ