1

第11回フィードバック制御系の設計（1）
制御系の設計指標

制御工学Ⅱ

SETSUDAI

- 制御特性
- 時間応答の設計指標
- 周波数応答の設計指標

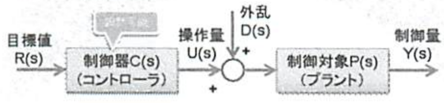
■前回10：総合演習答合わせ

3

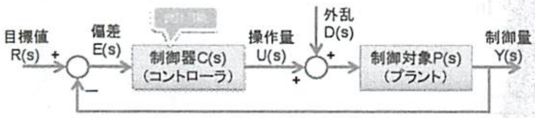
制御系の設計

SETSUDAI

■制御系にはフィードフォワード制御系とフィードバック制御系がある（講義01）



（フィードフォワード制御）



（フィードバック制御）

■制御目的に合うようにコントローラを設計する
→制御仕様を満足するように
コントローラ$C(s)$の入出力を決定する

4

制御対象による制御系の分類

SETSUDAI

■サーボ系
- ■例）ハードディスクのヘッド，ロボットアーム，航空機の自動操縦
- ■合わせる制御。物体の位置や姿勢を，目標とする位置や姿勢の変化に追従させる。追値制御。
- ■目標値の変化にすばやく追従できることが望ましい。
- ■語源：ラテン語の召使い"Servus"より

■プロセス制御系
- ■例）化学プラント，製鉄所，電力プラント
- ■プロセスの状態を保つ制御。温度や圧力，水位，濃度などを一定に保つ。定値制御。
- ■外乱があっても制御量を保てることが重要。
- ■一般に，サーボ系に比べると応答が遅いが大規模。

5

制御特性

SETSUDAI

■まずは［安定］であること

■［速応性］
- ■目標値が変化したときに制御量がすばやく目標値の変化に追従すること

■［減衰性］
- ■目標値が変化してから，十分時間が経過して定常状態に達したときの制御量（定常値）に，すばやく収束すること

■［定常特性］
- ■定常値と目標値との差である制御偏差が小さいこと

通常、安定性と速応性は相反する

これらを定量的に評価するものとして，いくつかの数値指標が用いられる。

制御特性の設計指標（1）

■時間応答の指標

① 行き過ぎ量(Overshoot)　O_s
② 行き過ぎ時間(Peak Time)　T_p
③ 遅れ時間(Delay Time)　T_d
④ 立上り時間(Rise Time)　T_r
⑤ 整定時間(Settling Time)　T_s
⑥ 振幅減衰比(Amplitude Damping Ratio　$A_r = \dfrac{O_1}{O_s}$
⑦ 定常偏差(Steady-state Error)　e_s
・定常位置偏差、定常速度偏差、定常加速度偏差
⑧ 制御面積(Integral of Absolute Error)
$= \int_0^\infty |y(t) - y(\infty)| dt$

1次遅れ要素の時間応答指標

1次遅れ要素の伝達関数　$G(s) = \dfrac{K}{1+Ts}$

単位ステップ応答　$y(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$

■行き過ぎ量O_sおよび行き過ぎ時間T_pは生じない

定常値のX%までに至る時間をt_xとすると $1 - e^{-\frac{1}{T}t_x} = \dfrac{X}{100}$ から

$t_x = -T \ln \dfrac{100-X}{100}$　であるから

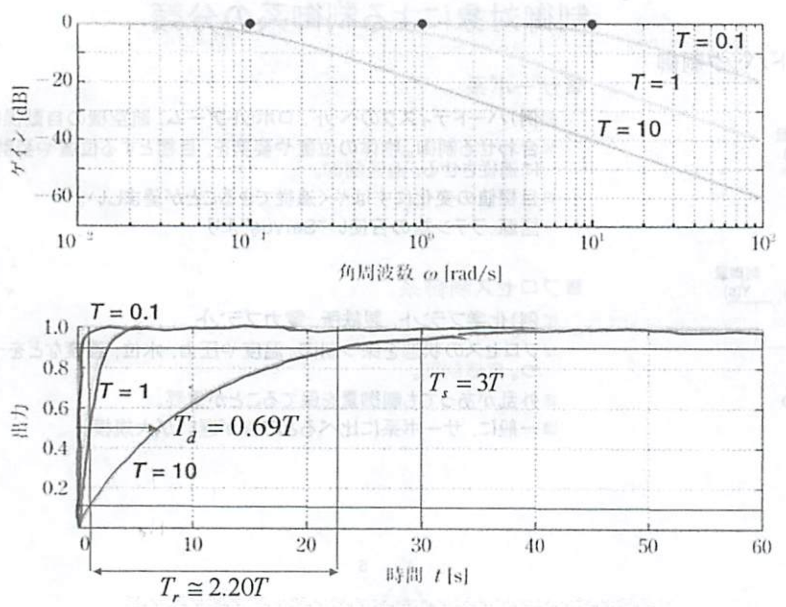
立上り時間T_r，及び遅れ時間T_d，整定時間T_s は

$$T_r = T_{90} - T_{10} = -T\left(\ln \frac{100-90}{100} - \ln \frac{100-10}{100}\right) = 2T \ln 3 \cong 2.20T$$

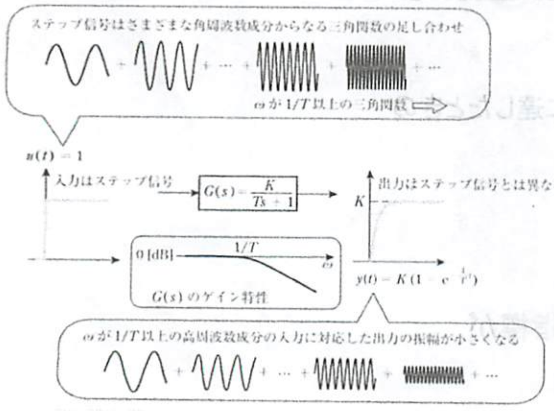
$$T_d = T_{50} = -T \ln \frac{100-50}{100} = T \ln 2 = 0.69T$$

$$T_s = -T \ln \frac{5}{100} = 3T$$

1次遅れ要素の時間応答指標



1次遅れ要素の時間応答指標



ステップ入力に対する定常偏差

フィードバック系の一巡伝達関数を

$L(s) = \dfrac{K}{1+Ts}$　の1次遅れとすると

フィードバック系の定常偏差は

$$e_s = \lim_{t\to\infty}\{r(t) - y(t)\} = \lim_{s\to 0} s\{r(s) - y(s)\}$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left\{r(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)}r(s)\right\} = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{1+L(s)}\right\}r(s)$$

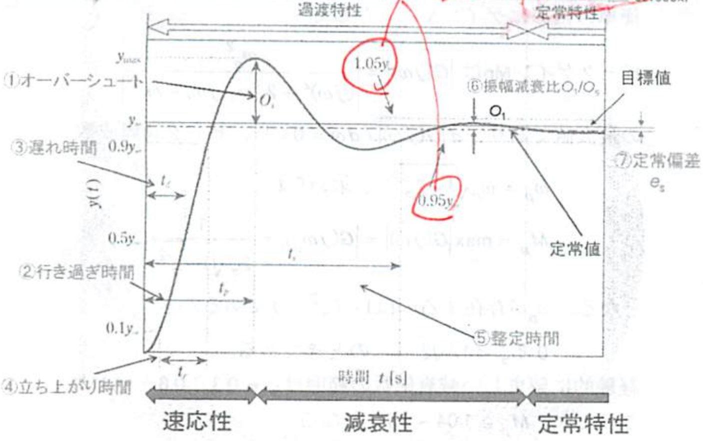
今、単位ステップが目標値とすると定常位置偏差は

$$e_p = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{1+L(s)}\right\}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+L(0)}$$　最終値の定理

$L(0) = K$であり、ゲインKを十分大きくすれば定常位置偏差はゼロに近づく。またこの時のKを位置偏差定数K_pという。

時間応答の指標

1.05 つまり5%
±5%
工業では ±2%



2次遅れ要素の時間応答指標

フィードバック系の伝達関数を $G(s)=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ $(0<\zeta<1)$

の2次遅れとするとそのステップ応答は

$$y(t)=K\left\{1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi\right)\right\}$$

となり、行き過ぎ時間はこの時間微分が0となることから

$T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ と求まる。振動の周期 $\tau=\dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ として、

行き過ぎ量, $O_s=y(T_p)-y(\infty)=Ke^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

振幅減衰比は, $A_r=\dfrac{O_1}{O_s}=\dfrac{y(T_p+\tau)-y(\infty)}{y(T_p)-y(\infty)}=e^{-\zeta\omega_n\tau}=e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

2次遅れ要素の時間応答指標

$$y(t)=K\left\{1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi\right)\right\},\ \varphi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=L^{-1}\left[sY(s)\right]=L^{-1}\left[s\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}\right]=\frac{K}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

これから正弦波の引数が $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t=0,\pm n\pi$ のときに微分は0になるから

$T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ と求まる。振動の周期 $\tau=\dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ として、

行き過ぎ量, $O_s=y(T_p)-y(\infty)=Ke^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=Ke^{-\zeta\omega_n T_p}$

振幅減衰比は, $A_r=\dfrac{O_1}{O_s}=\dfrac{y(T_p+\tau)-y(\infty)}{y(T_p)-y(\infty)}=\dfrac{Ke^{-\zeta\omega_n(T_p+\tau)}}{Ke^{-\zeta\omega_n T_p}}=e^{-\zeta\omega_n\tau}=e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

「最終値の定理」

2次遅れ要素の時間応答指標

ラプラス変換の $\boxed{\quad}$ から

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}sY(s)=\lim_{s\to 0}s\left(\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}\right)=K$$

となり、その他

整定時間 T_s は $e^{-3}\cong 0.05(5\%)$ から許容差5%の時は $\zeta\omega_n T_s=-3$ から $T_s\cong\dfrac{3}{\zeta\omega_n}$,

定常偏差 $e_p=\lim_{s\to 0}s\left(1-\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right)\dfrac{1}{s}=1-K$,

立上り時間は近似として $T_r\cong\dfrac{1}{\omega_n}(1+1.15\zeta+1.4\zeta^2)$

などが与えられる。

制御特性の設計指標(2)

■ 周波数応答の指標

① ピークゲイン(Peak Gain) : 共振値 $M_p=\max_\omega|G(j\omega)|$

② ピーク周波数(Peak Frequency) : 共振角周波数 ω_p

③ 帯域幅(Bandwidth) ω_b

$20\log|G(j\omega)|_{\omega\to 0}$ よりも3dBゲインが低くなる角周波数をいう.

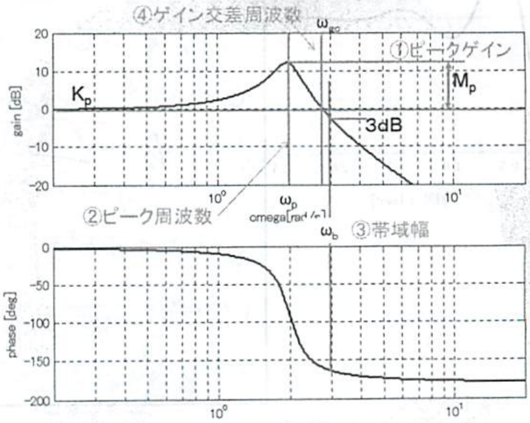
④ ゲイン交差周波数　ゲイン $|G(j\omega)|=1$ となる周波数 ω_{gc}

⑤ 位置偏差定数 K_p

⑥ 速度偏差定数 K_v

⑦ 加速度偏差定数 K_a

周波数応答の指標



1次遅れ要素の周波数応答指標

17

1 次遅れ要素の周波数応答は $G(j\omega)=\dfrac{K}{1+jT\omega}$ であるから

$\left|G(j\omega)\right|_{\omega\to 0}=K$ である。このとき、帯域幅 ω_b は

$\left|G(j\omega_b)\right|=K/\sqrt{2}$ から

$\omega_b=\dfrac{1}{T}$ となり、$\boxed{\text{折れ点周波数}}$ を与える。

よって時定数で与えられる時間領域の指標は帯域幅で置き換えることができる。

$$T_r\cong 2.20T=\frac{2.20}{\omega_b},\ T_d\cong 0.69T=\frac{0.69}{\omega_b},\ T_s\cong 3T=\frac{3}{\omega_b}$$

2次遅れ要素の周波数応答指標

18

簡単のためにゲイン K は 1 として

ピークゲインMpは $\left|G(j\omega)\right|=\left|\dfrac{\omega_n^{\,2}}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^{\,2}}\right|$

の最大値であり、$d\left|G(j\omega)\right|/d\omega=0$ より、ピーク角周波数

$\omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$　と求められ

$$M_p=\max_{\omega}\left|G(j\omega)\right|=\left|G(j\omega_p)\right|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

となる。ω_p が存在するのは $1-2\zeta^2>0$ であるから

$0<\zeta<1/\sqrt{2}$　　のときである。

経験的に望ましい減衰係数の範囲は $\zeta=0.3$ □ 0.6 といわれ

このとき、$M_p\cong 1.04\sim 1.75$ となる。

ステップ応答から伝達関数の推定

19

2次遅れ要素 $G(s)=\dfrac{Kw_n^{\,2}}{s^2+2zw_ns+w_n^{\,2}}$ を仮定してパラメータを求める。

ステップ応答が与えられているとすると

O_s, O_1 を求めて，振幅減衰比 $A_r=e^{-\frac{2pz}{\sqrt{1-z^2}}}$ から

$z=\sqrt{\dfrac{(\ln A_r)^2}{4p^2+(\ln A_r)^2}}$　　から z をもとめ

行き過ぎ時間　$T_p=\dfrac{p}{w_n\sqrt{1-z^2}}$ から角固有振動数は

$$w_n=\frac{p}{T_p\sqrt{1-z^2}}$$

で得られる。

まとめ

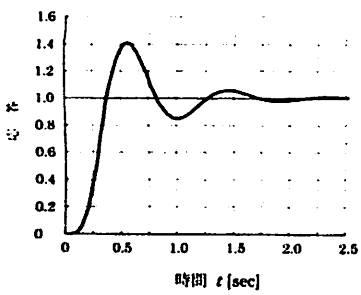
21

- 位相余裕・ゲイン余裕について復習した。
- フィードバック系の設計について復習し、
- 設計の指標を学んだ。
- 時間応答の指標では、1次遅れ要素、2次遅れ要素を考え、そのステップ応答を用いて設計指標を求めた。
- 周波数応答の指標では、1次遅れ要素、2次遅れ要素についてその周波数での指標と時間応答の指標を結びつけて考察した

伝達関数の推定演習

20

- 以下のステップ応答は2次遅れ系と推定されるが、その伝達関数を推定せよ



2次遅れ要素 $G(s)=\dfrac{Kw_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$ と仮定

ステップ応答から O_s, O_1 を求めて，

$O_s=0.40,\ O_1=0.05$ から $A_r=\dfrac{0.05}{0.40}=\dfrac{1}{8}$

よって，$\zeta=\sqrt{\dfrac{(\ln A_r)^2}{4\pi^2+(\ln A_r)^2}}=\sqrt{\dfrac{(-\ln 8)^2}{4\pi^2+(-\ln 8)^2}}=0.31$

これから行き過ぎ時間 $T_p=0.6$ から角固有振動数は

$w_n=\dfrac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi}{0.6\sqrt{1-0.0987}}=5.5$ [rad/s]

と得られる。

$$G(s)=\frac{1\cdot(5.5)^2}{s^2+2\cdot(0.31)(5.5)s+(5.5)^2}$$

$$=\frac{30.25}{s^2+3.41s+30.25}$$