$\boxed{1}$

1. 非負整数m,nに対して，$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$とおく。次の問に答えよ。

(1) $I_{m,n}=I_{n,m}$が成立することを示せ。

(2) $I_{m,n}=\dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$が成立することを示せ。ただし，$m\geq 2$とする。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$を求めよ。

2. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1+\cos^2 x}{x^4}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}$　　ただし，$a_k\geq 0$とする。

3. $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{2y}{x}\,dxdy$を求めよ。ただし，$D$は$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$で表される領域とし，$\arctan\dfrac{2y}{x}$は主値をとり，$-\dfrac{\pi}{2}\sim\dfrac{\pi}{2}$の値とする。

$\boxed{2}$

平面上に n 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられており，$i \neq j$ のとき $x_i \neq x_j$ が成り立つとする。このとき，

命題　これら n 個の点を通る $n-1$ 次関数 $y = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ がただ1つ存在する。

が成り立つ。この命題について，次の問に答えよ。

(1) 関数 $y = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ を通るという条件を，$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ に関する連立一次方程式として表せ。

(2) $n = 2$ の場合に問(1)の連立一次方程式を解け。

以下では，$n \times n$ 行列 V_n を

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

と定義する。

(3) $\det V_3$ を求めよ。

(4) 問(3)の結果を使い，$n = 3$ の場合に命題が成り立つことを証明せよ。

(5) $\det V_4$ を求め，それを用いて $n = 4$ の場合に命題が成り立つことを証明せよ。
（ヒント：$\det V_4$ において第 i 列から第 $i-1$ 列の x_1 倍を引くという操作を $i = 4, 3, 2$ の順に施せ。）

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が一つだけ存在する

$\iff \det A \neq 0$

$\boxed{3}$

1. 次の１階線形常微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx}=ay$　　　ただし，a は実定数とする。

(2) $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$

2. 次の２階線形常微分方程式について，以下の間に答えよ。ただし，a, b は実定数とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=u(x) \qquad (1)$$

(1) 次の空欄 A, B に当てはまる数式を示せ。

$u(x)=0$ のとき，$y=e^{\lambda x}$ とおき，式(1)に代入すると，$(\ \boxed{\text{A}}\ )e^{\lambda x}=0$ が得られる。ここで $\boxed{\text{A}}=0$ の方程式を特性方程式という。この方程式の解を λ_1，$\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ とする場合，$y_1=e^{\lambda_1 x}$，$y_2=e^{\lambda_2 x}$ は一次独立であり，基底と呼ばれる。これより一般解は任意の定数 C_1，C_2 を用いて $y=\boxed{\text{B}}$ と書き表せる。

(2) $u(x)=0$ のとき，特性方程式の解が複素共役根として得られる場合に，a, b の満たす条件を示せ。

(3) $u(x)=0$ のとき，特性方程式の複素共役根を $\lambda_1=p+iq$，$\lambda_2=p-iq$（p, q は 0 でない実数）とした場合，式(1)の実数解の基底と一般解を p, q を用いて導出せよ。なお，必要ならば，オイラーの公式 $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ を用いよ。

(4) $u(x)=0$ のとき，特性方程式が実重根を持つ場合，式(1)の基底と一般解を求めよ。

(5) $u(x)=e^{kx}$（k は実定数）のとき，式(1)の一般解を求めよ。なお，$u(x)=0$ のときの特性根を相異なる２実根 λ_1，$\lambda_2(\lambda_1\neq k,\ \lambda_2\neq k)$ とする。

4

真空の誘電率をε_0とし，以下の問に答えよ．ただし，各導体球殻の厚さは無視でき，各導体球殻において電荷はその面内で一様に分布するものとする．

1）図１に示すように，真空中において半径 a の導体球殻 A を半径 b の同心導体球殻 B で包み，AB 間には誘電率εの誘電体をつめた．図１において，球殻 A に Q の電荷を与え，球殻 B を接地した場合，半径 r（$a<r<\infty$）の同心球面上における電界の大きさを求めよ．

2）１）の状態において，AB 間の電位差を求めよ．

3）図２に示すように，真空中において半径 a の導体球殻 A を半径 b の同心導体球殻 B で包み，AB 間には誘電率εの誘電体をつめ，さらに，球殻 B の外側を半径 c の同心導体球殻 C で包み，BC 間は真空とし，球殻 C を接地した．このとき，AC 間の静電容量を求めよ．

4）３）の状態において，球殻 A に電荷 Q を与えたときの静電エネルギーを求めよ．

5）図１において，球殻 A を接地し，外球 B の接地をはずして正の電荷 Q を与えた．電気力線の分布の概略を向きを含めて図示せよ．また，電位分布を計算し，概略を図示せよ．

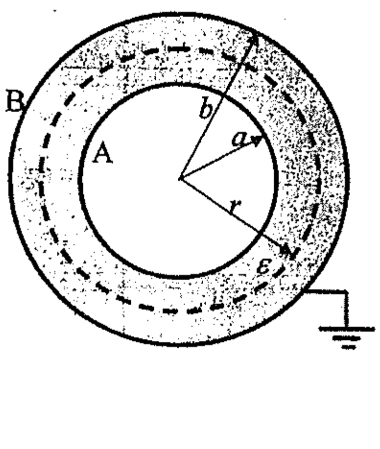


図１

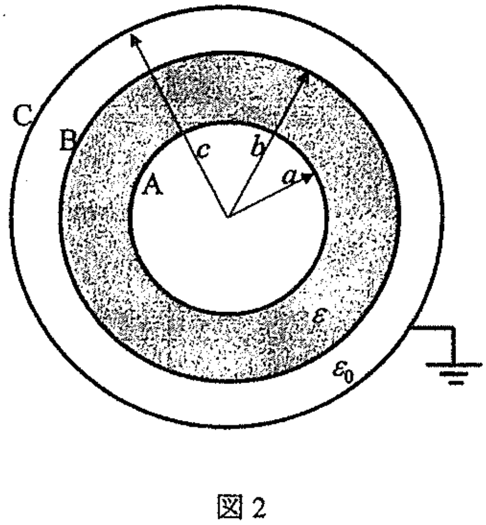


図２

5

1) 図 1 に示すように，z 軸に沿う半径 a の無限に長い円柱状の導体に，電流密度 J の一様電流が z の正の方向に流れている．導体の中心軸からの距離 r の点 P における磁界の強さ H を r の関数として求めよ．また，磁界の強さ H と r との関係を図示せよ．

2) 1)で求めた点 P(x, y)での磁界の x および y 成分(H_x, H_y)を示せ．

3) 図 2 に示すように，y 方向に中心軸が d だけずれた半径 b の z 軸に沿う円柱状の空洞を作る．1)のときと同様に，電流密度 J の一様電流を流す．このとき，空洞内の磁界は x 方向を向き，その強さは一定値となることを示し，その値 H_0 を求めよ．ただし，$d+b<a$ とする．

4) この空洞内に，一辺の長さが c $(c<b)$ の正方形回路を図 3(a), (b)に示すように置き，電流 I を ABCD の方向に流す．このとき，各辺が受ける力の大きさ F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} および F_{DA} を，3)の H_0 を使って表せ．ただし，面 ABCD と yz 面とのなす角をθとし，空洞内の透磁率をμ_0とする．

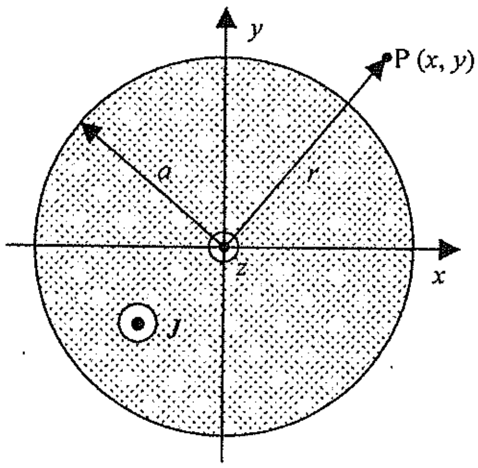


図 1

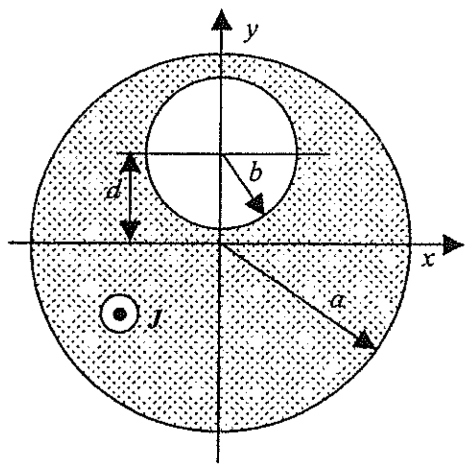
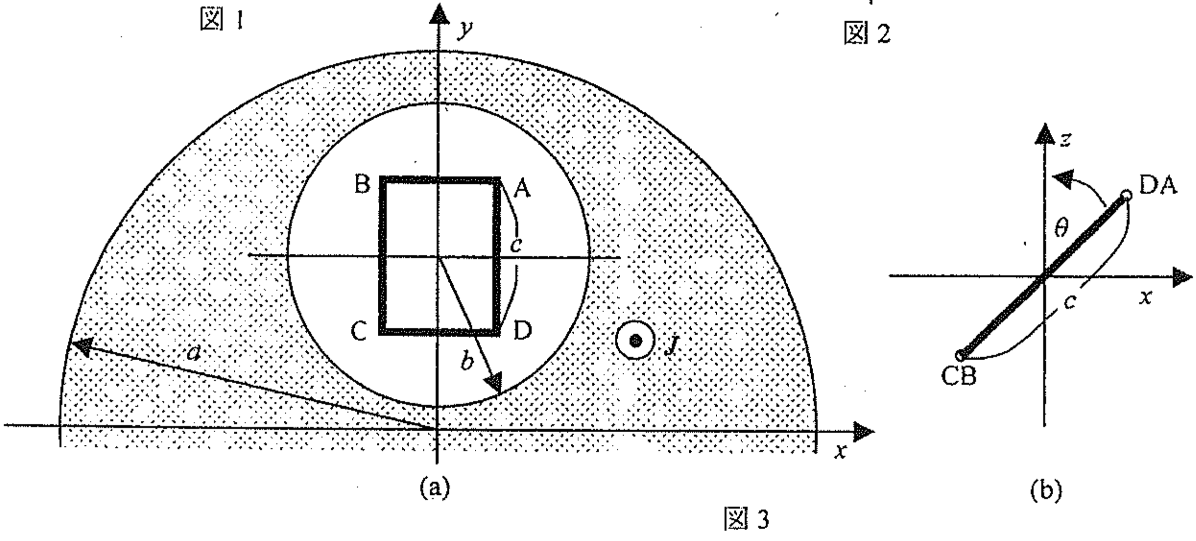


図 2



(a) (b)

図 3

6

質量M，半径aの円柱と水平から30度傾いた斜面がある．重力加速度をgとし，斜面に沿って下向きにx軸をとって以下の問に答えよ．ただし，円柱は一様であり，その中心軸はx軸と垂直であり，中心軸まわりの慣性モーメントは$\frac{1}{2}Ma^2$で与えられる．

まず，図１のように，円柱を斜面に置き，静かに手を離す．

1）斜面に摩擦がなく，円柱が斜面を転がらずに滑り下りるとき，円柱の重心についてx方向の加速度を求めよ．

2）円柱が斜面を滑らずに転がり下りるとき，円柱の重心についてx方向の加速度を求めよ．

3）円柱が斜面を滑らずに転がるための静止摩擦係数μの範囲を求めよ．

次に，図２のように，円柱の中心から糸で質量mの小物体がぶら下がっている仮想的な系を考える．糸が斜面の法線となす角度をβとして円柱と小物体から同時に静かに手を離したとき，円柱は斜面を下り，角度βを一定に保ったまま小物体が動いた．

4）斜面に摩擦がなく，円柱が斜面を転がらずに滑り下りるとき，糸の張力Tと角度βを求めよ．

5）円柱が斜面を滑らずに転がり下りるとき，糸の張力Tと角度βを求めよ．

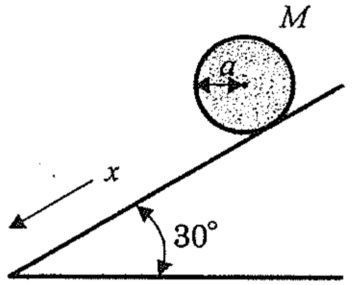


図１

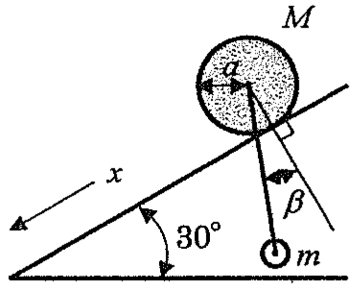


図２