問題１３　制御工学　の解答例

I　$$\mathcal{L}[y(t)]=\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4}=\frac{2\{s^2+7s+8\}}{s(s+2)(s+4)},\quad \mathcal{L}[u_s(t)]=\frac{1}{s}$$

であるため，システムの伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u_s(t)]}=\frac{2(s^2+7s+8)}{s^2+6s+8}=2+\frac{2s}{s^2+6s+8}$$

II　回路に流れる電流を $i(t)$ とおくと

$$v_i(t)=L\tfrac{d}{dt}i(t)+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau,$$
$$v_o(t)=L\tfrac{d}{dt}i(t)$$

となる。$v_i(t), v_o(t), i(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $V_i(s), V_o(s), I(s)$ とおき，初期値を零として上式をラプラス変換をすると

$$V_i(s)=LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s),$$
$$V_o(s)=LsI(s)$$

となる。整理すると回路の伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{CLs^2}{CLs^2+RCs+1}$$

III　角周波数 $\omega=4[\mathrm{rad/sec}]$ における周波数伝達関数の値は

$$G(j\omega)=\frac{10}{1+j}=5(1-j)$$

であるため，ゲインは$5\sqrt{2}$，位相は$-\pi/4[\mathrm{rad}]$である。したがって

$$A=5\sqrt{2},\quad \varphi=-\frac{\pi}{4}$$

IV (1) $$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}=\frac{\dfrac{1}{s^2+3s}}{1+\dfrac{s+a}{s^2+3s}}=\frac{1}{s^2+4s+a}$$

このとき減衰係数をζ，自然（固有）角周波数をω_nとおくと，$2\zeta\omega_n=4$，$\omega_n^2=a$であるため，減衰係数ζはaを用いてつぎのように表せる。

$$\zeta=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

ステップ応答が減衰振動し最終的に一定値に収束するための条件は $0<\zeta<1$ である。したがって題意を満たす範囲は，$a>4$ である。

(2) 目標値が大きさ 6 のステップ関数のとき，ラプラス変換は $6/s$ または $-6/s$ である。$R(s)=6/s$ のとき

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}\times\frac{6}{s}=\frac{2}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{s+3}$$

であるため，制御量の時間応答はつぎのようになる。$u_s(t)$は単位ステップ関数を表す。

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=2u_s(t)-3e^{-t}+e^{-3t},\ (t\geq 0)$$

一方，$R(s)=-6/s$ のとき，制御量の時間応答はつぎのようになる。

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=-\{\,2u_s(t)-3e^{-t}+e^{-3t}\,\},\ (t\geq 0)$$ （どちらか一方のみでも正解）

(3) 題意より $b>0$ であるため，図 2 のフィードバック制御系の特性方程式とそのラウス表はそれぞれ以下のようになる。

$$bs^3+(3b+1)s^2+3s+10=0\ ,\qquad \begin{array}{c|cc} s^3 & b & 3 \\ s^2 & 3b+1 & 10 \\ s^1 & \alpha & \\ s^0 & 10 & \end{array}\qquad \alpha=\frac{1}{3b+1}(-b+3)$$

ラウス表の第一列要素が全て同符号であるための条件は

$$b>0,\ 3b+1>0,\ -b+3>0$$

であるが，$b>0$ならば$3b+1>0$であるため，図 2 の制御系が安定であるための b の範囲はつぎのようになる。

$$0<b<3$$

(4)　外乱を零とすると，図２より制御量のラプラス変換は，

$$Y(s)=\frac{10(bs+1)}{bs^3+(3b+1)s^2+3s+10}\times R(s)$$

である。制御系が安定であれば，最終値の定理より，単位ランプ関数の目標値に対する定常偏差はつぎのようになる。

$$e_s=\lim_{s\to 0}s\{R(s)-Y(s)\}=\lim_{s\to 0}s\times\left\{\frac{bs^3+(3b+1)s^2+(3-10b)s}{bs^3+(3b+1)s^2+3s+10}\times\frac{1}{s^2}\right\}=\frac{3-10b}{10}$$

よって，定常偏差e_sの絶対値が0.1以下となる b の範囲はつぎのようになる。

$$0.2\leq b\leq 0.4$$

(5)　目標値を零とすると，図２より制御量のラプラス変換は，

$$Y(s)=\frac{10s(bs+1)}{bs^3+(3b+1)s^2+3s+10}\times D(s)$$

である。b=1 より制御系は安定であるため，最終値の定理より，単位ランプ関数の外乱に対する定常偏差はつぎのようになる。

$$e_s=\lim_{s\to 0}s\{-Y(s)\}=\lim_{s\to 0}s\times\left\{-\frac{10s(bs+1)}{bs^3+(3b+1)s^2+3s+10}\times\frac{1}{s^2}\right\}=-1$$

（解答例おわり）