$\boxed{1}$

$r=f(\theta)$ で表される x-y 平面上の曲線 $P(r,\theta)$ がある。ただし r，θ は２次元極座標（$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$）である。

問１

１）この曲線の $\alpha \leq \theta \leq \beta$ における長さが

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f(\theta)\}^2+\left\{\frac{df(\theta)}{d\theta}\right\}^2}\,d\theta$$

であり，

２）$r=f(\theta)$ が $\alpha \leq \theta \leq \beta$ で掃く面積が

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

であることを，図１のように，微小な角 $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ を持つ三角形 P_iOP_{i-1} を考えることによって示せ。ただし，曲線 P は区間 $[\alpha,\beta]$ でなめらか（C^1 級）な単純曲線であるとする。

問２　曲線 P: $r=a(1+\sin\theta)$, $(a>0)$ の概形を x-y 平面上に描け。

問３　問２の曲線の $0 \leq \theta < 2\pi$ における長さを求めよ。

問４　問２の曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。

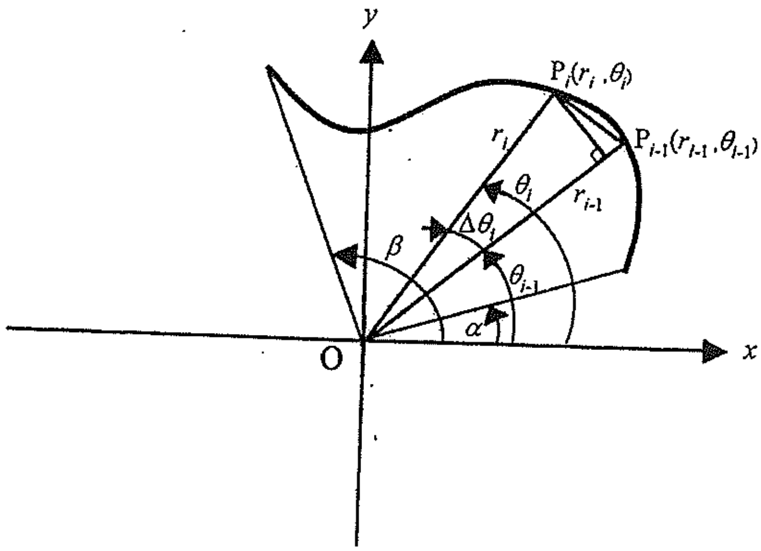


図１

$\boxed{2}$

1）対称行列　$A=\begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} c & q \\ q & d \end{pmatrix}$　について　$AB=BA$　が成り立つための条件を行列要素の関係式で表せ。

2）$A=\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$　について以下の問いに答えよ。

a）A，B の行列要素が１）で求めた関係式を満たすことを示せ。

b）A の固有値と固有ベクトルをすべて求め，固有ベクトルが互いに直交することを示せ。

c）A の固有ベクトルはすべて B の固有ベクトルになることを示し，各固有ベクトルに対応する B の固有値を求めよ。

3）一般に，二つの n 次行列 A，B が $AB=BA$ を満たし，A の n 個の固有値はすべて異なるものと仮定する。このとき，A の固有ベクトルはすべて B の固有ベクトルになることを示せ。（ヒント：A の一つの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，$B\boldsymbol{x}=0$ でない限り，$B\boldsymbol{x}$ も A の固有ベクトルになることを示し，これを利用する。なお，A の一つの固有値に対応する固有ベクトルは，ある定ベクトルの定数倍の形に限られる。すなわち，A の一つの固有値に対応する固有ベクトル空間は１次元であるが，この事実は証明無しに用いてよい。）

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ。なお、温度勾配や重力の影響は無視する。

試験管に水を満たし，その底に食塩の塊を沈めたとき，食塩が溶けだし食塩濃度が試験管全体に広がる。溶媒は静止しているが，溶質である食塩は下から上に移動している。これを濃度拡散という。濃度拡散を表した偏微分方程式を拡散方程式と呼ぶ。溶質の流れ(J)* は溶質の濃度(C)の勾配に比例する。

(1) 今，試験管の底を 0 とする高さ方向の座標を x ，比例定数を $D(>0)$としたとき，溶質の流れ J と溶質の濃度 C との関係式を表せ。

(2) 溶質の流れ J と濃度 C の間には，時間に関して次の関係が成り立つ。時間Δt の間に高さ x~$x+\Delta x$ の領域に流入する溶質量は $J(x)\Delta t$ - $J(x+\Delta x)\Delta t$ であり，これがその間の溶質濃度の増加ΔC となる。この関係式を表し，C と J に関する偏微分方程式を導出せよ。

(3) (1) と (2) で導出した式より J を消去し，溶質の拡散(溶質濃度)を表す偏微分（拡散）方程式を求めよ。

(4) 定常状態において，試験管の上端($x = x_a$)で $C = 0$ となる条件が成立するとき，試験管内の食塩水の濃度分布を求め，グラフに示せ。なお，食塩水の飽和濃度を C_s とする。（食塩は溶けきらないものとする。例えば，この条件は試験管の上端を十分大きな水槽の底に取り付け，その底部分の水を入れ替わるようにすれば実現できる。）

(5) (3) で導出した偏微分方程式において、$C(x, t) = f(x)g(t)$とおき，$f(x)$と $g(t)$ それぞれの一般解を求めよ。

*：溶質の流れ(J)とは，単位面積を単位時間に通る溶質の量である。

4

図1に示すように，半径 a の円筒導体 (以下内部導体と呼ぶ) と，内半径 b，外半径 c の円筒中空導体 (以下外部導体と呼ぶ) が同軸状に置かれており，導体の長さはともに L であるとする。中空部分および外部導体の外側は空気で満たされているものとし，その誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えよ。ただし，$L \gg a, b, c$ であり，両端の電界の乱れは無視できるとする。

(1) まず，内部導体に電荷 $+Q$ を与えた。円筒軸に垂直な断面における電気力線の様子を電荷分布とともに模式的に図示せよ。ただし，以下での解答図は次の指示に従って描け。参考図に示すように，$+Q$ の電荷量を8個の $+$ 記号であらわすものとする。また，1本の電気力線は1個の $+$ 記号から発生し1個の $-$ 記号で消滅するものとする。

(2) 外部導体の内側表面および外側表面に誘起される電荷の面密度をそれぞれ求めよ。

(3) 電界の大きさの分布を円筒中心からの距離 r の関数として求めよ。また，外部導体と内部導体の間の電位差 V_0 を求めよ。

(4) この状態で，外部導体を接地した。接地に用いた導線を通じて流れる電荷量を求めよ。

次に，外部導体を接地した状態で，図2に示すように，中空部分に内半径 a，外半径 $(a+b)/2$，長さ L，比誘電率 ε_{r} の誘電体を挿入した。

(5) $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$ と仮定したとき，円筒軸に垂直な断面における電気力線の様子を電荷とともに模式的に図示せよ。

(6) この状態で，内部導体と外部導体との間に直流電源を接続し (内部導体側を正とする)，その電圧を (3) における内部導体と外部導体との間の電位差と同じ V_0 に設定した。直流電源から内部導体に流れ込む電荷量を求めよ。

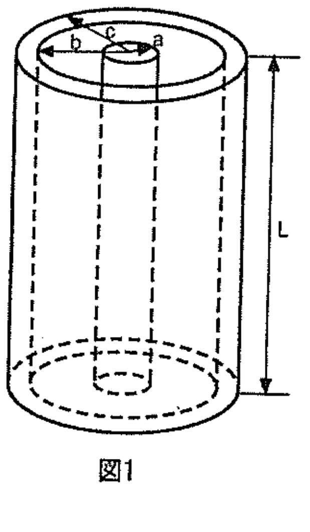


図1

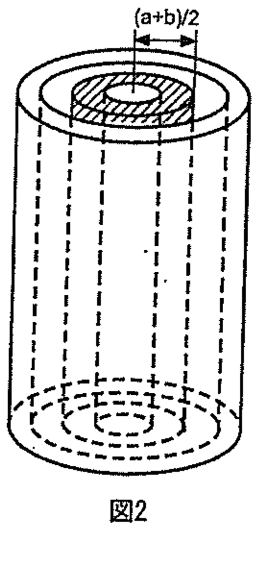
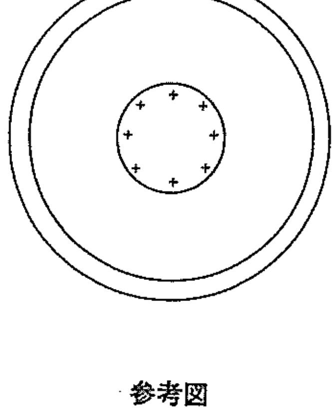


図2



参考図

5

(1) 図1 (a) に示すように，真空中に太さが無視できる細い導線を巻いて作製した有限長ソレノイドがある。図に示すようにソレノイドの巻き線は密に巻いていない。図1 (b) にその断面を示す。ソレノイドに電流 I を流したとき，ソレノイドの内部および外部に発生する磁力線をソレノイドの断面図内に描け。電流は，コイルの断面図の記号 ⊙ (紙面の裏から表の方向)，⊗ (紙面の表から裏の方向) の向きに流した。磁力線の描写は，模式図でよいが磁力線の方向を示すこと。

(2) 同様に，半径 a，長さ d，巻き数 N_1 のソレノイドの断面を図2に示す。巻き線は密に巻いてある。長さ d は，半径 a に対して十分長いものとする。ソレノイドに電流 I を流したとき，ソレノイドの端部を除く中央部分においてソレノイド内部に生じる磁界の大きさが $H = N_1 I/d$，外部に生じる磁界の大きさが $H = 0$ である理由を説明せよ。

(3) 図2に示したソレノイドを磁束密度 B の外部磁場に沿って置き，ソレノイドに電流は流さない。時刻 $t \geqq 0$ で $B = \alpha t$ (αは正の定数) のように外部磁場の大きさを変化させたとき，ソレノイドの両端に発生する電圧を求めよ。また，同時にソレノイドに，ある電流 I を流したとき，ソレノイド内の磁束密度の時間変化として図3に示すように $B = B_0$ (一定) の領域が時刻 ($T/2 < t < 3T/2$) において観測された。このとき流した電流 I の時間変化を図に示せ。真空の透磁率は μ_0 とする。

(4) 図2で外部磁界はないとして，ソレノイドに電流 $I = I_0 \cos\omega t$ を流す。ここで，I_0 は最大電流であり，ωは電流源の角振動数である。ソレノイドの端部を除く中央部分において，軸線からの距離 r の位置に生じる電界の向きと大きさ E を求めよ。

(5) 図2のソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。また，ソレノイドに電流 I を流したとき，ソレノイドの軸方向，半径方向に働く力について各々の大きさと向きを求めよ。

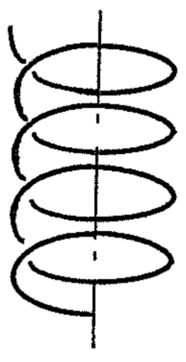


図1 (a)

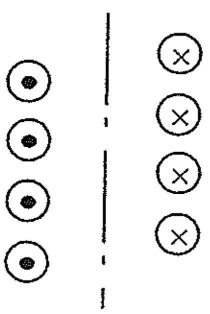


図1 (b)

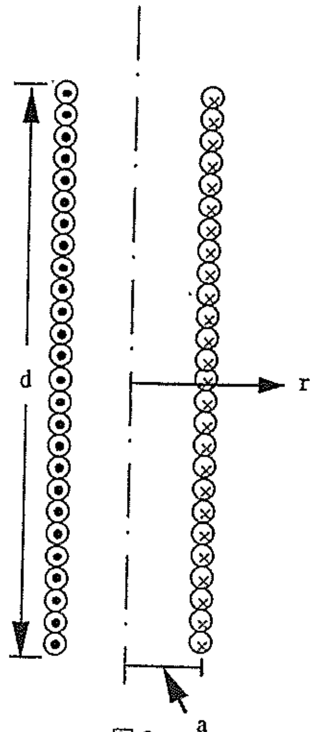


図2

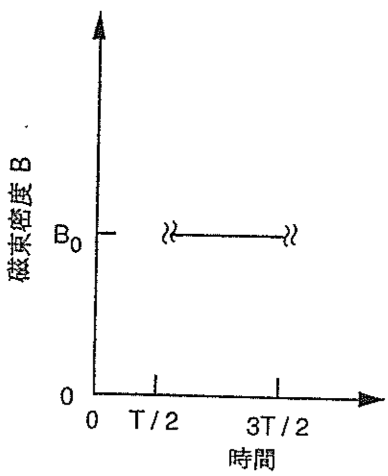


図3

6

図１のように滑らかな平面上に質量 M の大台車があり，平面上を摩擦無しで移動できる。以下の問に答えよ。

(1) 静止している大台車に大きな力 $f(t)$ が極めて短時間（時刻 $t=0$ から Δt の間）のみ働いたとする。

i）時刻 $t=\Delta t$ での運動量 p_0 と速度 V_0 を求めよ。

ii）時刻 $t=\Delta t$ 以降で大台車はどのような運動をするか。

(2) 静止している大台車の上に質量 m の小台車が乗っており，バネ（バネ定数 k）により大台車に結ばれている（図２）。小台車と大台車との間の摩擦は無視できるものとする。大台車に(1)と同じ力が働いたとき，以下の問に答えよ。なお，解答には(1)の V_0 を用いてよい。

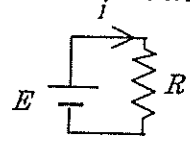
i）大台車の速度 V，小台車の速度 v として，それぞれの台車に関する運動方程式を書け。

ii）運動方程式を解き V，v の時間変化を求めよ。

iii）台車の運動エネルギー K_M，小台車の運動エネルギー K_m，バネのポテンシャルエネルギー U を求めよ。また，これらの合計はいくらか。

iv）このような力学的な系のアナロジー(注)となる電気回路を描け。このとき，どの力学的物理量と電気回路のどの物理量が対応することになるかを示せ。

(注) 現象が同じ形の数学的表記で記述できること。例えば，速度 v に比例する抵抗力 αv を受けながら落下する質量 m の物体の運動は，定常状態では $mg=\alpha v$ で記述される。ここでもし，mg を直流電圧源の電圧 E，α を抵抗 R，v を電流 i で置き換えれば，$E=Ri$ となり，参考図(a)の回路が対応する。また，mg を直流電流源の大きさ I_s，α をコンダクタンス G，速度 v を電圧 V で置き換えれば，参考図(b)が対応する。

参考図(a)


参考図(b)

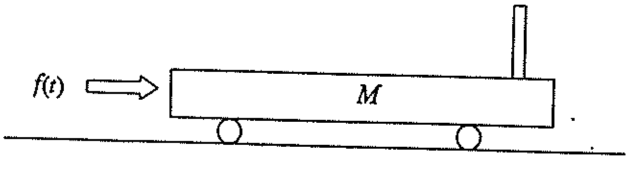



図１

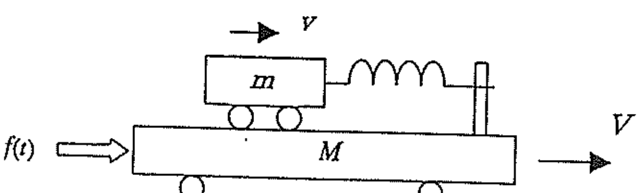


図２