

専 門 科 目
(午前：数学（必須）)

30 大修
時間 9:30～10:30

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題1と問題2の両方に解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1

(1) θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を媒介変数として $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ で xy 平面上に描画される曲線の長さを求めよ。

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} = a \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (a \text{ は定数}, a \neq 0)$$

(3) 複素関数 $f(z) = \frac{1}{z(z-2i)}$ を $z=0$ を中心として $0 < |z| < 2$ の円環領域でローラン級数に展開せよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

(4) 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$, ($0 < a < 1$) において、固有値を求めて対角化し、 A^n ならびに

$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ を求めよ。

(問題 1 終わり)

問題 2

3次元直交座標系 $O-xyz$ において、曲面上の点の位置ベクトルがパラメタ u, v を用いて $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2 - u^2)$ で与えられるとき、次の問いに答えよ。ただし、 $u > 0$ である。

- (1) 曲面上の点 $(u, v) = (1, \pi)$ における単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ と、接平面の

方程式を求めよ。ただし、単位法線ベクトルの z 成分は 0 以上とする。

- (2) 曲面のうち $z \geq 0$ を満たす部分を S とするとき、その表面積を求めよ。曲面上の面素は

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \text{ で与えられる。}$$

(問題 2 終わり)

専 門 科 目
(午前：物理 (必須))

30 大修
時間 11:00～12:00

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題1と問題2の両方に解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1

図 1 に示すように、ピンジョイントにより吊り下げられた一様で細い剛体棒に、ボールが速度 v_0 で垂直に衝突する。以下の問いに答えよ。なお、ピンジョイントから棒の重心 G までの距離を L_1 、衝突位置までの距離を L_2 ($L_2 > 0$) とする。また、棒の質量と重心周りの慣性モーメントを、それぞれ M 、 I とし、ボールの質量は m とする。棒とボール間の反発係数を e とし、重力加速度を g とする。

- (1) ボールと棒が衝突した直後のボールの速度を v_B 、棒の角速度を ω とし、衝突前後の角運動量保存式を書け。
- (2) 衝突後のボールの速度 v_B 、棒の角速度 ω を求めよ。
- (3) 衝突後、棒は角度 θ まではねあがった。はねあがる角度 θ には以下の関係が成立する。空欄 (ア) を埋めよ。なお、 ω を用いても良い。

$$\cos\theta = 1 - \boxed{\text{(ア)}}$$
- (4) 棒ははねあがった後、振り子運動を示した。振動周期 T を求めよ。なお、 θ は十分に小さいものとする。
- (5) 衝突後、ボールと棒が離れずに一体となって運動した場合、その振動周期 T' を求めよ。なお、 θ は十分に小さいものとする。
- (6) (5) の場合に T' が最小となる L_2 を求めよ。

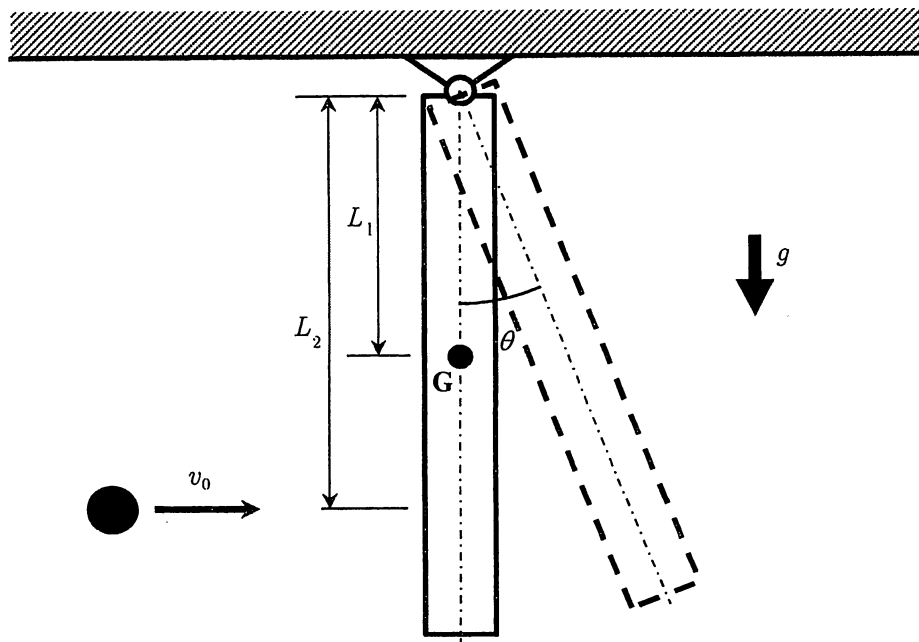


図 1

(問題 1 終わり)

問題 2

図 2 に示すように、質点 A に十分細く軽い剛体棒が放射状に等角度で取り付けられている。このような物体はリムレスホイールと呼ばれる。剛体棒の長さを L 、隣り合う 2 つの剛体棒のなす角度を α 、質点 A の質量を M 、重力加速度を g とする。リムレスホイールが傾斜角 ϕ の斜面を滑らずに転がる運動について考える。リムレスホイールの中心は、剛体棒と斜面の接地点周りに回転運動するものとし、接地点は剛体棒と斜面の衝突の前後で瞬時に入れ替わるものとする。図 3 は剛体棒と斜面が衝突する直前、図 4 は衝突した直後を表し、斜面と接地している剛体棒を太線で表している。リムレスホイール中心の回転運動を破線矢印で表している。リムレスホイールの衝突前後の角速度をそれぞれ $\dot{\theta}^-$ 、 $\dot{\theta}^+$ とし、中心速度の剛体棒長手方向成分は 0 であると仮定する。以下の問いに答えよ。

- (1) 剛体棒が斜面と衝突する直前、直後の角速度には、 $\dot{\theta}^+ = f(\alpha) \dot{\theta}^-$ の関係がある。
 $f(\alpha)$ を求めよ。
- 以降、(2)(3)は $f(\alpha)$ を用いて解答してもよい。
- (2) 剛体棒が斜面と衝突する直前、直後の運動エネルギーをそれぞれ K^- 、 K^+ と表すときこれらを $\dot{\theta}^-$ を用いて表せ。
- (3) 衝突前後のエネルギー残存率を $\varepsilon = K^+/K^-$ と定義するとき、 ε を求めよ。
- (4) ある剛体棒が斜面と衝突する直前から、次の剛体棒が斜面と衝突する直前までにリムレスホイールが失う位置エネルギー ΔE を求めよ。
- (5) 衝突の回数を i 、衝突直前の運動エネルギーを K_i^- と表すとき、 K_{i+1}^- を K_i^- 、 ε 、 ΔE を用いて表せ。
- (6) 最初の衝突直前の運動エネルギーを K_1^- とするとき、 K_i^- を K_1^- 、 ε 、 ΔE 、 i を用いて表せ。
- (7) 無限に長い斜面を転がるとき、剛体棒が斜面に衝突する直前のリムレスホイールの角速度は $\dot{\theta}_\infty^-$ に収束する。 $\dot{\theta}_\infty^-$ を α 、 ϕ 、 g 、 L を用いて表せ。
- (8) 剛体棒の数を無限に増やすと $\dot{\theta}_\infty^-$ はどのように変化するか、 ε を用いて説明せよ。

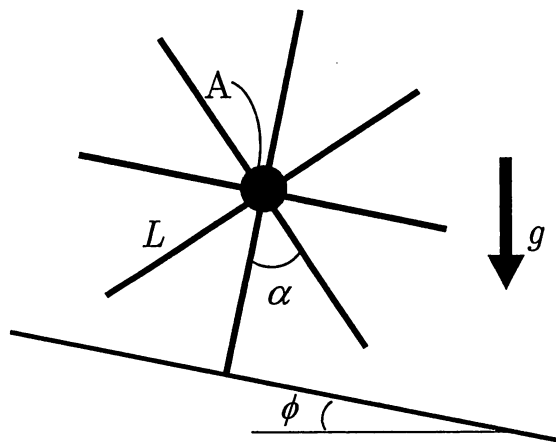


図 2

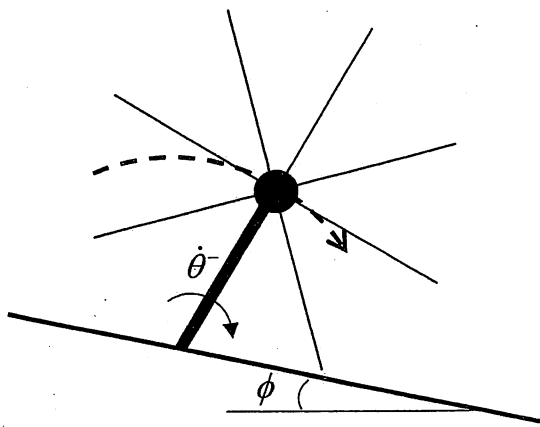


図 3

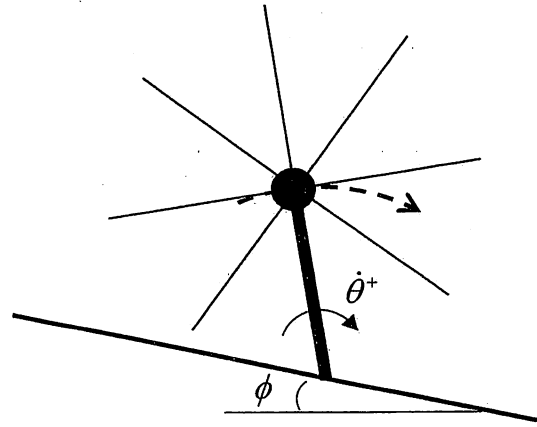


図 4

(問題 2 終わり)

専 門 科 目
(午後：選択)

3 0 大 修
時間 13:30～16:30

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題 1 から問題 8 より 4 問を選択して解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1 枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1 (材料・加工)

問 1 図 1 に示す Al-Cu 系合金の 2 元合金状態図に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) 40 mass% Cu の融液が 700°C から徐冷されて固相を生じ始めるのは約何°C か。
- (2) この Al-Cu 系合金での α 相と θ 相の共晶点における温度と Cu の組成を答えよ。
- (3) 組成 3 mass% Cu を含んだ合金を 550°C まで加熱後に急冷し、過飽和固溶体を得た。この固溶体の相を 1 字で答えよ。
- (4) (3)で作製した合金を、約 150°C で 1 週間、熱処理をしたところ組織内に小さい結晶核が発生して硬化した。この硬化の名称を答えよ。

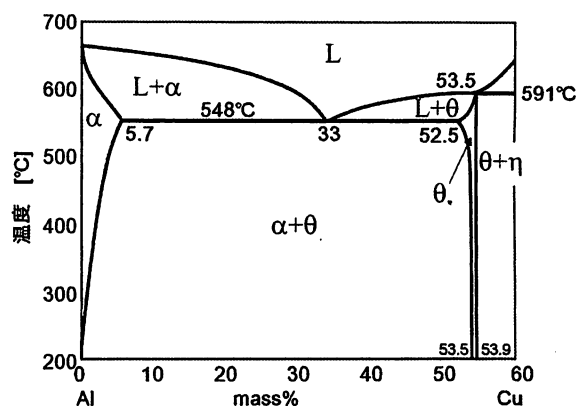


図 1

問 2 除去加工による穴あけに関する以下の問いに答えよ。ただし、図に書かれた寸法以外の精度については考えなくてよい。また、必要に応じて表 1 を参照すること。

- (1) 図 2 に示すように、直径 10.00mm のピンを通して位置決めするための板を機械加工で普通寸法公差の中級を指定して 1 枚ずつ複数製作するとき、以下の(i), (ii)に答えよ。
 - (i) 各板の穴の中心間距離の最大値と最小値はいくらか。
 - (ii) 製作した板の任意の 2 枚を用いるとき、必ずピンが通るためには穴の直径をいくらにすればよいか。
- (2) 図 3 に示す板を、図中の寸法に普通公差の精級を適用して 1 枚ずつ複数製作するとき、以下の(i), (ii)に答えよ。
 - (i) 任意の 2 枚を取り出して板の左面 A と下面 B をそろえて重ね、板にあけた穴に直径 10.00mm のピンを通すとき、ピンが必ず通るためには穴の直径を何 mm 以上に指定する必要があるか。
 - (ii) (i)でそろえる面が上面 C と右面 D の場合にはどうか。

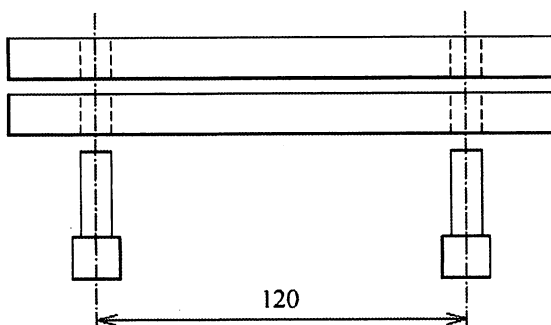


図 2

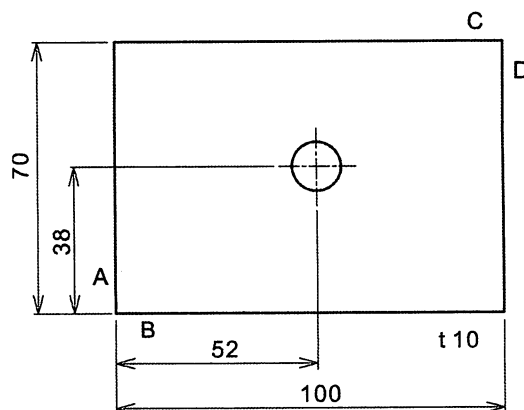


図 3

(次ページに続く)

表1 長さ寸法の普通公差

公差等級	基準寸法の区分 mm			
	3を超え 6以下	6を超え 30以下	30を超え 120以下	120を超え 400以下
	許容差 mm			
精級	±0.05	±0.1	±0.15	±0.2
中級	±0.1	±0.2	±0.3	±0.5

問3 以下の (①) ～ (⑤) にあてはまる数式または数値を答えよ。ただしべき乗根は展開しなくてよい。

2原子間の全ポテンシャルは原子間距離を r として引力に関する項と斥力に関する項の和 $\phi(r)$ で表され、図4に示すように ε を原子間相互作用による結合エネルギーとして、

$$\phi(r) = 4\varepsilon\{(D_0/r)^{12} - (D_0/r)^6\}$$

となる。 D_0 は $\phi(r) = 0$ となるときの r である。平衡原子間距離 r_0 は (①) D_0 と求められ、原子を引き離す際の力はポテンシャルを距離で微分したものであるから、

$r_{\max} =$ (②) D_0 のとき最大の力 $F_{\max} =$ (③) となる。

いま、希ガス元素の気体が冷却されて面心立方構造の結晶となったとき、第一近接原子間距離は格子定数を a として $r =$ (④) a であり、1原子あたりの第一近接原子数は (⑤) 個があるので、1モルあたりの全エネルギー U_{total} を求めると、

$$U_{\text{total}} = 1/2 \cdot N \cdot 4\varepsilon\{(⑤) (D_0/r)^{12} - (⑤) (D_0/r)^6\}$$

となる。ただし、 N はアボガドロ数で、第一近接原子のみの相互作用を考慮した。

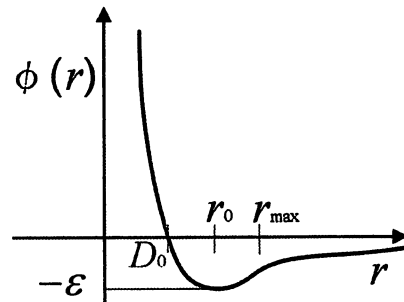


図4

問4 以下の (①) ～ (⑪) にあてはまる語句を答えよ。

- (1) 圧延では、工作物に接触するワークロールの (①) を小さくすると圧延荷重を小さくできる。しかし、その場合ワークロールの (②) が問題となり精度が低下するため、(③) を用いる。
- (2) 加工物の寸法計測には、要求される精度に応じて、(④) とよばれる副尺をもつノギスや、高精度計測には測定対象と目盛が同一軸上に配置される必要があるという (⑤) を満たす (⑥) などが利用される。
- (3) 板の曲げ加工を行うと、中立面の内側には (⑦) 応力が、一方、外側には (⑧) 応力が生じ、加工終了後に外力が除かれると与えられた変形の一部が弾性的に回復する現象を (⑨) という。
- (4) 歯車は摩耗抑制を目的に表面の (⑩) を増加させる必要があり、加熱後に急冷する熱処理である (⑪) を行う。

(問題1 終わり)

問題 2 (材料力学)

下記の番号(1)～(20)のそれぞれについて、番号とその解答を答案用紙に併記し、それぞれの番号とその解答をまとめて線で囲んで明示せよ。

問 1 図 1 に示すように、固定された剛体壁の間に棒 AB (断面積 A 、長さ L 、縦弾性係数 E 、線膨張係数 α) がある。左端 A は壁に接合され、右端 B と壁との間には微小な隙間 d ($d \ll L$) が存在する。中央の点 C に荷重 F を右向きに負荷する問題を考える。

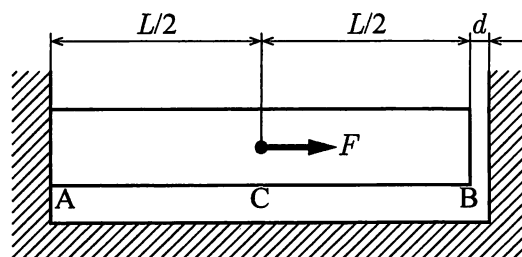


図 1

まず、点 B が壁に接触するとき (壁からの反力はゼロ) の荷重 F_1 は (1) である。

次に、 F_1 を超えて F_2 ($F_2 > F_1$) まで負荷する。このとき、点 A での壁からの反力は方向が (2) で、大きさが (3) であり、点 B での壁からの反力は方向が (4) で、大きさが (5) である。

さらに、 F_2 を負荷したままで、棒 AB の温度を ΔT だけ低下させる。点 B での壁からの反力がゼロ (壁との隙間もゼロ) になるときの温度変化量は、 F_1 と F_2 を用いて表すと (6) である。

問 2 図 2 に示すように、左端 A が剛体壁に固定され、右端 B が単純支持されたはり AB (長さ L 、曲げ剛性 EI) があり、その中央の点 C に下向きに荷重 F を負荷する問題を考える。点 B に作用する上向きの未知反力を R として、重ね合わせの原理を用いてこの問題を解く。

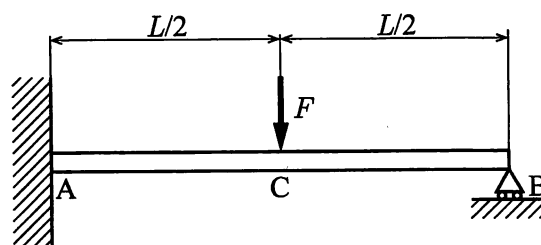


図 2

まず、 R のみが作用する場合を考えると、点 B のたわみは上向きに (7) である。また、 F のみが作用する場合を考えると、点 B のたわみは下向きに (8) である。重ね合わせの原理を用いて点 B での境界条件を考えると、 R は F を用いて (9) と表され、点 B のたわみ角の大きさは R を用いずに (10) と表される。

(次ページに続く)

問 3 図 3 に示すように、両端の開いている薄肉円筒（長さ L ，外径 d ，肉厚 t ，縦弾性係数 E ，横弾性係数 G ，ポアソン比 ν ， $t \ll d \ll L$ ）の外側面に圧力 p （ $p > 0$ ）を一様に負荷する問題を考える。

円筒の中心軸を z 座標とする円柱座標 (r, θ, z) を設定すると、円筒に生じる z 方向の垂直応力は ， θ 方向の垂直応力は である。また、 z 方向の垂直ひずみは ， θ 方向の垂直ひずみは であり、直径 d の減少量 Δd は である。このときの円筒の応力状態をモールの応力円で表すと、中心座標は ，半径は である。

さらに、図 4 に示すように、外圧 p に加えて両端にねじりモーメント T を負荷する。このとき円筒の横断面に生じるせん断応力は であり、円筒の応力状態を表すモールの応力円の半径は である。そして、円筒両端の相対ねじれ角は である。

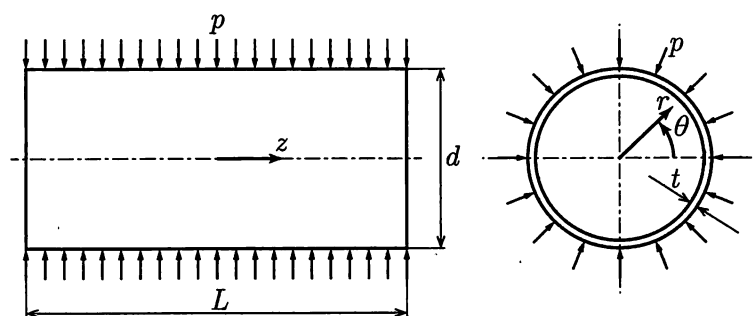


図 3

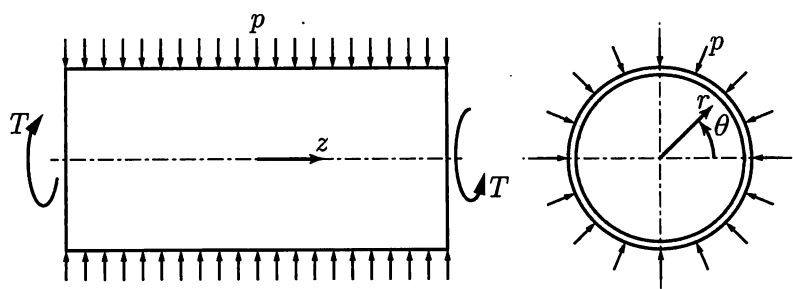


図 4

（問題 2 終わり）

問題 3 (機構運動・機械力学)

問 1 図 1 のように、アクチュエータで駆動される回転対偶と直動対偶からなる 2 自由度機構によって、質量 m の質点を時間 $t(0 \leq t \leq 1)$ で $O-xy$ 座標系の点 $(1, 0)$ から $(1, 1)$ へ運ぶ。ただし、機構の質量は無視し、重力の影響はないものとする。機構の x 軸となす角を θ 、長さを r として以下の問いに答えよ。

- (1) 質点の位置ベクトル $\mathbf{p}_m = [p_x \ p_y]^T$ を r と θ で表せ。また、 $\dot{\mathbf{p}}_m$ が以下の式で表されるようなヤコビ行列 \mathbf{J} を求めよ。

$$\dot{\mathbf{p}}_m = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

- (2) 回転対偶が発生するトルクを τ 、直動対偶が発生する力を f とする。このとき τ 、 f と機構が質点に与える力 $\mathbf{F} = [F_x \ F_y]^T$ との間には、

$$\begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}$$

の関係が成り立つことを示せ。

- (3) \mathbf{p}_m を以下の時間 t の関数で表す。

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ at^3 + bt^2 + ct + d \end{bmatrix}$$

時刻 $t = 0, 1$ における位置の条件に加え、 $t = 0, 1$ における速度を零にすることを拘束条件として a, b, c, d を求めよ。

- (4) 質点が加速度をもって移動することを考慮し、質点に関する力のつり合い式を求めよ。
- (5) $m = 1$ のとき、 τ を t の関数として求めよ。
- (6) 時刻 $t = 0, 1$ において、速度および加速度が零になるようにしたい。このためには(3)で定めた \mathbf{p}_m をどのような関数に変更すれば良いか。その具体例まで示せ。

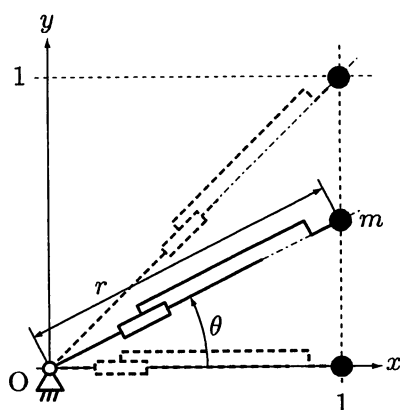


図 1

(次ページに続く)

問2 図2に示すように、構造物の最上端に水平方向へ静的外力 f を作用させて、最上端の水平方向変位 x を計測した結果、図3に示すように $x = af$ なる比例関係が得られた。また、この構造物の自由振動の周期を計測した結果、 T であった。次に、図4に示すように地面が振動する場合について、図5に示す1自由度の等価モデルを作成して考える。このモデルでは、構造物の曲げ変形の弾性をばね定数 k のばねで表し、構造物の慣性を質量 m の質点で表す。質点の変位を x 、地面の変位を u とする。ただし、地面が振動していないときの静的つり合い位置を $x = 0$ 、 $u = 0$ とし、いずれも慣性座標系で定義する。なお、 x は構造物の高さに対して十分小さい。また、重力の影響は無視できる。

- (1) ばね定数 k を、計測で得られたパラメータで表せ。また、等価モデルの質点の変位 x について自由振動の運動方程式を表せ。ただし、 $u = 0$ とする。
- (2) 構造物の振動の減衰は十分小さく、計測された振動周期は不減衰自由振動の周期と見なしてよいとする。このとき、等価モデルの質量 m を、計測で得られたパラメータで表せ。
- (3) 図5の等価モデルにおいて、 $u = u_0 \sin \omega t$ の変位加振に対する x の定常応答を、縦軸を振幅、横軸を ω のグラフで図示せよ。
- (4) 以下の3つの記述の下線部について、それぞれ誤りがあれば、その部分を適切に正せ。誤りがない場合は、誤りはないと回答せよ。
 - (i) 図2の構造物が、長方形断面の様な片持ち梁であるとする。構造物の高さと材料を変えずに、断面の寸法を2倍に相似拡大した構造物について、自由振動の周期を計測すると $T/2$ であった。この相似拡大構造物の最上端の変位 x に対する等価モデルのばね定数 k は、梁の断面2次モーメントに比例する。このとき、質量 m を設問(2)の答えの2倍とすると、等価モデルの自由振動の周期が計測結果に一致する。
 - (ii) 図2の構造物の振動の減衰を考慮する。図4の等価モデルに減衰比 ζ を与え、粘性減衰振動系とする。このとき、 ζ が大きくなると、等価モデルにおいて振幅が最大となる周波数は高くなる。
 - (iii) 図2の構造物の、曲げ振動の2次の固有モード形において、構造物の最上端は節となる。

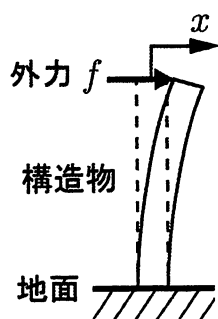


図2

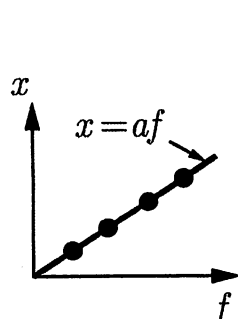


図3

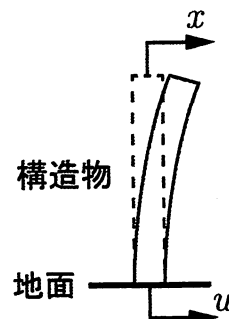


図4

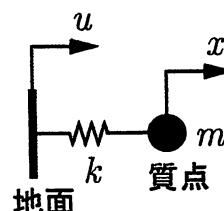


図5

(問題3 終わり)

問題 4 (流体力学)

問 1 円筒座標系 (r, θ) において、流れ関数が次式で与えられる密度 ρ 一定の二次元定常非粘性流れを考える。

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega r^2 + \omega R^2 \left(\ln(R) - \frac{1}{2} \right), & 0 \leq r \leq R \\ \omega R^2 \ln(r), & r > R \end{cases} \quad (i)$$

ここで、 ω は定数とする。この流れは半径 R を境に、内域 ($0 \leq r \leq R$) と外域 ($r > R$) に分けられる。

以下の文章において、【 】については以下の選択肢から適切な語句を、() については適切な数式を解答せよ。ただし、 $\ln 2 = 0.693$ 、 $\ln 3 = 1.10$ としてよい。

選択肢：収縮運動，流れ関数，コリオリ力，向心力，剛体回転運動，直線運動，渦無し運動，速度ポテンシャル，膨張運動，最小，界面張力，速度ベクトル，最大，圧力勾配，無限大，ローレンツ力

なお、必要であれば、円筒座標系におけるスカラー関数 $a(r, \theta)$ に対する次の演算子を用いてもよい。

$$\text{勾配: } \nabla a = \frac{\partial a}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \quad \text{ラプラシアン: } \nabla^2 a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}$$

ここで、 \bar{e}_r と \bar{e}_θ はそれぞれ r 方向と θ 方向の単位ベクトルである。

(1) θ が一定で r が $0 \leq r \leq 3R$ の線分を通過する流量は (①) である。

(2) r 方向の速度成分 u_r と θ 方向の速度成分 u_θ は、それぞれ

$$u_r = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R \\ \text{(②)}, & r > R \end{cases} \quad u_\theta = \begin{cases} \omega r, & 0 \leq r \leq R \\ \text{(③)}, & r > R \end{cases}$$

である。

(3) 二次元非圧縮性流れにおける渦度は【 ④ 】のラプラシアンで表されることから、内域の渦度は (⑤)，外域の渦度は (⑥) となる。このことから、内域は【 ⑦ 】，外域は【 ⑧ 】であることがわかる。

(4) 外力無しの場合、 r 方向の運動方程式は

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (ii)$$

で表される。 p は圧力である。式(i)で表される流れ場において式(ii)を考えると、

【 ⑨ 】と【 ⑩ 】が釣り合っていることがわかる。

(5) $r=0$ における圧力を p_0 としたとき、内域における圧力の r 方向分布は (⑪)，外域における圧力の r 方向分布は (⑫) で表される。 $r=0$ において圧力は【 ⑬ 】になる。

(次ページに続く)

問 2 一様流中に置かれた表面が滑らかな半径 a の球の周りの流れを考える。以下の文章において、【 】については該当する選択肢を、() については該当する語句あるいは数式を答案用紙に記せ。なお、 t は時間、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 ν は動粘性係数を表し、 ρ 、 μ 、 ν は一定とする。また、デカルト座標系 (x, y, z) および極座標系 (r, θ, φ) における i 方向の速度成分を v_i とする。一様流は x 軸の正方向に速度 V で流れる。

この球は、表面に働く応力の接線方向成分から定まる (①) 抵抗と法線方向成分から定まる (②) 抵抗を受ける。これらの和を (③ : 数式で答えよ) で除したものを抵抗係数と呼ぶ。

粘性流体の運動量保存式である (④) 方程式において、【⑤ A: 粘性, B: 慣性】項を無視する Stokes 近似の下で、球が受ける抵抗を考える。球を過ぎる流れの速度と圧力は、

$$v_r = V \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -V \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta, \quad v_\varphi = 0, \quad p = -\frac{3\mu V a}{2r^2} \cos \theta$$

で与えられる。ここで球表面 $r = a$ における速度から、応力の接線方向成分は (⑥), 法線方向成分は (⑦) と得られる。なお、必要ならば極座標系において軸対称を仮定した場合の変形速度テンソル e_{ik} が次式で与えられることを用いても良い。

$$e_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \quad e_{\varphi\varphi} = 2 \left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right),$$

$$e_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad e_{r\varphi} = e_{\theta\varphi} = 0$$

これらの応力を球表面全体に渡って積分することで (①) 抵抗は (⑧), (②) 抵抗は (⑨) と得られ、抵抗係数はレイノルズ数 Re を用いて (⑩) と表せる。但し、この Re は一様流の流速と球の直径に基づくものとする。Stokes 近似の下では、球前後での流線パターンは対称となる。

Oseen 近似では、球が存在することにより物体近傍で速度変動が生じることを考え、【 ⑤ 】項の一部を考慮する。この際、速度変動が十分小さいと仮定し、その高次の項を無視することで運動量保存式として、

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\text{⑪}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

を得る。この方程式の両辺の回転をとり、定常を仮定すると、渦度 ω_i の方程式として、

$$(\text{⑫}) = 0$$

が得られる。この方程式の基本解の一つは、 $\omega = r^{-1} \exp\{-k(r-x)\}$ (但し $k = V/2\nu$) と表すことができ、 $k(r-x) = c$ (c : 定数) となる曲面の形状は $x = (\text{⑬})$ で与えられる。 c が比較的小さい領域では渦度が有意な値を持ち、このような領域は物体が存在することで生じる伴流域に対応すると考えることもできる。

(問題 4 終わり)

問2 タービンなどの作動流体を用いた動力発生機械を考える際、エンタルピーという状態量が重要な役割を果たす。以下、作動流体の比エンタルピーに h の記号を用い以下の問いに答えよ。

- (1) h の定義を、作動流体の圧力 p 、密度 ρ 、および比内部エネルギー u を用いて表わせ。
- (2) 定常状態で作動するタービンに質量流量 (G) 5.0 kg/s の作動流体が流入している。タービン入口において比エンタルピー (h_{in}) が 2600 kJ/kg 、流速 (w_{in}) が 40 m/s であり、出口において比エンタルピー (h_{out}) が 2100 kJ/kg 、流速 (w_{out}) が 200 m/s であった。タービンの出力仕事 (L) が 2310 kW のときタービンからの熱損失 Q_{loss} [kW] を求めよ。ここで与えた変数を用いて導出過程も示すこと。

問3 図1に示すような、耐火レンガ、断熱レンガ、赤レンガの3層の平板からなる炉壁における一次元定常熱伝導を考える。炉内部における燃焼のため、炉内壁温度 $T_1 = 1100^\circ\text{C}$ であり、外気温度 $T_5 = 20^\circ\text{C}$ である。外気への熱損失を $q = 1000 \text{ W/m}^2$ とするとき、以下の設問に答えよ。ただし、レンガの厚さおよび各部の温度は図1に示すとおりである。耐火レンガ、断熱レンガ、赤レンガの熱伝導率はそれぞれ $k_1 = 1.5$ 、 $k_2 = 0.20$ 、 $k_3 = 0.60 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ であり、炉の外壁面から外気への熱伝達率は $h = 20 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$ とする。また、ふく射による伝熱は無視できるものとする。

- (1) T_4 を求めよ。
- (2) k_1 および d_1 を用いて T_2 を表せ。
- (3) 断熱レンガの安全使用温度が 1000°C のとき、 d_1 に求められる最小厚さはいくらか。
- (4) T_1 から T_5 の間の熱抵抗 R を k_1 、 k_2 、 k_3 、 h 、 d_1 、 d_2 、 d_3 を用いて表せ。
- (5) $d_3 = 0.20 \text{ m}$ としたとき、(3)で与えた断熱レンガの安全使用温度を維持して炉壁全体の厚さを最小とする d_2 を求めよ。

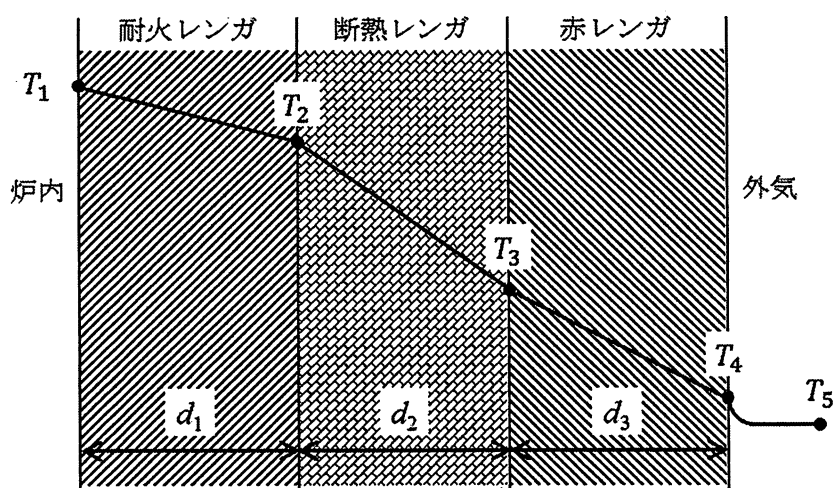


図1

問題5（熱力学・伝熱工学）

問1 以下の(1)～(3)の（ ）にあてはまるものとして、最も適切なものを選択肢より選び記号で答えよ。ただし、同じ選択肢を複数回使用してもよい。

- (1) 円柱および球の内部に、半径方向のみに熱伝導がある定常な系を考える。温度を T 、熱伝導率を k 、半径方向座標を r と表すとき、これらの系の熱伝導方程式として最も適切なものは、円柱の場合（ ① ）であり、球の場合（ ② ）となる。

$$(a) \frac{d}{dr} \left(kr^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (b) \frac{d}{dr} \left(k r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (c) \frac{d}{dr} \left(k \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$(d) \frac{d}{dr} \left(k \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (e) \frac{d}{dr} \left(k \frac{1}{r^2} \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

- (2) 理想気体の状態方程式は（ ③ ）のとき成立する。理想気体の状態方程式が適用できないとき、以下に示すファン・デル・ワールスの状態方程式を使うことがある。

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

式中の p , v , T , R はそれぞれ、圧力、比体積、温度、気体定数を意味している。また、 a , b は物質によって決まる定数であり、前者は気体分子の（ ④ ）の影響を、後者は気体分子の（ ⑤ ）の影響を表している。一般に、気体の膨張係数は（ ⑥ ）を計算することで求められ、理想気体の場合は（ ⑦ ）になる。

- (a) 温度も圧力も高い (b) 温度も圧力も低い
(c) 温度が高く圧力が低い (d) 温度が低く圧力が高い
(e) 体積 (f) 熱振動 (g) 並進運動 (h) 回転運動 (i) 分子間力
(j) $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)$ (k) $\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)$ (l) $\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)$ (m) $\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)$
(n) $1/T$ (o) $1/p$ (p) $1/R$ (q) $1/v$

- (3) 温度制御される伝熱面から強制対流が行われていない水への沸騰伝熱を考える。このような様式における沸騰現象を（ ⑧ ）沸騰と呼ぶ。伝熱面の温度を室温から徐々に上げていくと、温度上昇開始後しばらくは沸騰気泡の発生が認められず、この領域は（ ⑨ ）による伝熱である。温度上昇を続けるとやがて沸騰気泡の発生が観察されるようになり、この様式を（ ⑩ ）沸騰とよぶ。引き続き徐々に温度上昇を続け限界熱流束点を過ぎると伝熱面から水への熱流束は（ ⑪ ）。さらに温度上昇を続けると、伝熱面の全域が蒸気で覆われた（ ⑫ ）沸騰に遷移する。以上のような沸騰伝熱における熱流束 [（ ⑬ ）] と（ ⑭ ）度 [K] の関係を沸騰曲線とよぶ。

- (a) 飽和 (b) 膜 (c) 超 (d) 垂 (e) 臨界 (f) プール (g) 加熱
(h) 核 (i) 遷移 (j) 自然対流 (k) マランゴニ対流 (l) 過熱
(m) 減少する (n) 一定値になる (o) 増加する
(p) W (q) J (r) W/m² (s) J/m² (t) W/m³ (u) J/m³

（次ページに続く）

問 2 状態方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m \\ y &= Cx, & y \in R^p\end{aligned}$$

で表される制御対象について以下の問いに答えよ。

- (1) オブザーバは制御対象の入力 u と出力 y から状態 x を推定するために用いられる。ここでは、以下の式で与えられるオブザーバ (\hat{x} は状態 x の推定値) を考える。

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu - K(y - C\hat{x})$$

このとき推定誤差 $e = x - \hat{x}$ に対して、 $y = Cx$ であることに注意して $\frac{de}{dt}$ を求め、推定誤差 e が 0 に収束するための条件を求めよ。

- (2) 状態 $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$ として、制御系全体 (制御対象 + オブザーバ) を $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$ の形に整理せよ。

- (3) (2) の状態方程式の可制御性を判定せよ。

- (4) 制御対象を安定化する状態フィードバック $u = Fx$ を設計したと仮定する。しかし、このフィードバックは状態 x の情報が必要なため、通常は実現することはできない。そこで、状態 x を利用可能な推定値 \hat{x} に置き換えたフィードバック $u = F\hat{x}$ を用いることを考える。このときの制御系全体の状態方程式を $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}_F\bar{x}$ の形に整理せよ。

- (5) 制御系全体の状態方程式の状態 $\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$ を新たな状態 $\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{pmatrix}$ に変換する座標変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

である。ただし、 I は $n \times n$ の単位行列である。(4) で求めた制御系全体の状態方程式を、状態 $\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ の状態方程式で表せ。

- (6) (5) の状態方程式を用いて制御系全体の安定性と状態フィードバック系およびオブザーバの安定性の関係について説明せよ。

(問題 6 終わり)

問題 6 (制御理論)

問 1 図 1 に示すフィードバック系を考える。図において、 $P(s)$ を制御対象、 $M(s)$ と $C(s)$ を制御器の一部、 u を入力、 z を出力、 r を目標値、 d を外乱とする。また、目標値 r から出力 z までの閉ループ伝達関数を

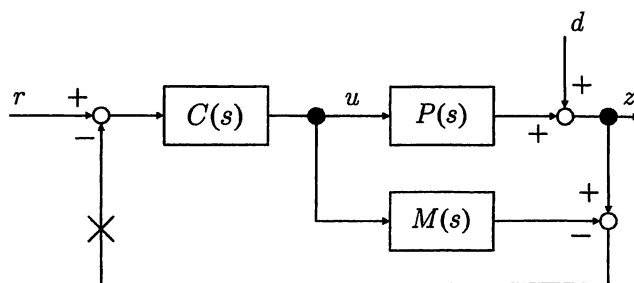


図 1

$T_{xr}(s)$ 、外乱 d から出力 z までの閉ループ伝達関数を $T_{zd}(s)$ と表す。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 図 1 の制御方式は内部モデル制御と呼ばれ、

$$M(s) = P(s), \quad C(s) = \frac{1}{M(s)}$$

であるとき、理想的な制御が達成されることが知られている。これらの条件が成り立つときの $T_{xr}(s)$ および $T_{zd}(s)$ を求めよ。

(2) $P(s)$ 、 $M(s)$ 、 $C(s)$ がそれぞれ

$$P(s) = \frac{s+c}{s^2+as+b}, \quad M(s) = \frac{1}{s+b}, \quad C(s) = k \frac{s+b}{s+1}$$

で与えられるとする。ただし、 a 、 b 、 c 、 k は定数とする。

(i) 図 1 の×印の位置でループを切るときの一巡伝達関数を $L(s)$ とする。このとき、次式の空欄(ア)～(オ)を a 、 b 、 c を用いて埋めよ。ただし、 $r=0$ とする。

$$L(s) = \frac{k(\text{ア}) s + \text{イ})}{(s + \text{ウ}) (s^2 + \text{エ} s + \text{オ})}$$

(ii) $a > 0$ 、 $b = 4a$ 、 $c = 2$ とする。このとき、図 1 のフィードバック系が安定であるための k の範囲を a を用いて表せ。

(iii) $a = 2$ 、 $b = 8$ 、 $c = 2$ 、 $k = \sqrt{2}$ のとき、(i)で求めた一巡伝達関数 $L(s)$ に対するゲイン交差周波数は 4 rad/s であった。このとき、位相余裕を求めよ。

(3) 図 1 のフィードバック系に対して、 $P(s)$ 、 $M(s)$ 、 $C(s)$ がそれぞれ次式で与えられるとする。

$$P(s) = M(s) \times \frac{s+9}{s+10}, \quad M(s) = \frac{1}{s+b}, \quad C(s) = \frac{s+b}{s+1}$$

このとき、周波数伝達関数 $T_{xr}(j\omega)$ 、 $T_{zd}(j\omega)$ のゲイン $|T_{xr}(j\omega)|$ 、 $|T_{zd}(j\omega)|$ の角周波数 $\omega = 0$ および $\omega \rightarrow \infty$ に対する値をそれぞれ求めよ。また、以上の結果を踏まえて、出力 z の目標値 r への追従特性および外乱 d の除去特性について、低周波域と高周波域における(1)の結果との違いに焦点を当てて説明せよ。

(次ページに続く)

問3 製鉄などの圧延工程では、相互相関関数や自己相関関数を用いた信号処理がおこなわれる。図2はその装置構成を模式的に示したものである。圧延ローラから出てくる鋼板上に間隔 L で二組の光源と光センサを配置し、鋼板表面からの不規則な反射むらを観測して、得られた時系列信号を $x(t)$ 、 $y(t)$ とする。これらの信号を用いて移動速度 v を求めることができる。ただし、 v は一定であるとする。

ここで、時系列信号 $x(t)$ 、 $y(t)$ の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は、

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt$$

で定義される。上式において $y(t)$ を $x(t)$ に置き換えた $R_{xx}(\tau)$ は $x(t)$ の自己相関関数となる。

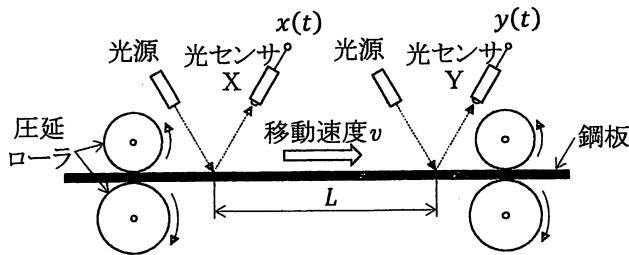


図2

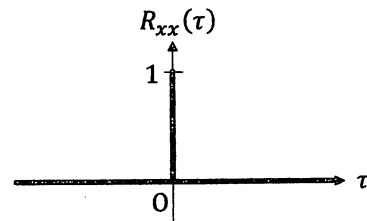


図3

以下の問いに答えよ。

- (1) 自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ は偶関数になることを証明せよ。
- (2) 信号 $y(t)$ は信号 $x(t)$ の時間をずらした関数と考えてよい。 $y(t)$ を関数 $x(t)$ 、および L 、 v を用いて表せ。さらに相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ を関数 $R_{xx}(\tau)$ を用いて表せ。
- (3) $x(t)$ の自己相関関数 $R_{xx}(\tau)$ が、図3のように表せるとする。このとき、相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ の概形を示し、これを用いて鋼板の移動速度 v を求める方法を説明せよ。
- (4) 圧延ローラの偏心などの影響で鋼板の厚さが周期的に変化することがある。この周期を W としたとき、光センサXで得られる信号が $z(t) = a \sin\left(\frac{2\pi t}{W}\right) + x(t)$ で表せるものとする。ただし、 $x(t)$ は(3)のものと同一の信号であり、 $x(t)$ と $a \sin\left(\frac{2\pi t}{W}\right)$ の相互相関関数は0であるとする。 $z(t)$ の自己相関関数 $R_{zz}(\tau)$ を計算せよ。その際、次式の関係を用いてよい。

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{W}\right) \sin\left\{\frac{2\pi(t+\tau)}{W}\right\} dt = \frac{T}{2} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{W}\right) - \frac{W}{4\pi} \cos\left(\frac{2\pi\tau}{W}\right) \sin\left(\frac{2\pi T}{W}\right)$$

- (5) (4)で求めた $R_{zz}(\tau)$ の概形を描いて、周期 W を推定する方法を説明せよ。

(問題7 終わり)

問題 7 (信号処理)

問 1 時系列信号 $x(t)$ と単一周波数の正弦波 $m(t)$ との積信号 $y(t) = x(t) \cdot m(t)$ について考える。
 $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

(1) 信号 $m(t)$ のフーリエ変換 $M(f)$ を以下の手順に従って求めるとき、①～⑥を適切な式で埋めよ。

オイラーの公式より、 $m(t) = \cos(2\pi f_m t) = \boxed{\text{①}}$ と表せ、

これをフーリエ変換の定義式に代入すれば、

$$M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (\boxed{\text{①}}) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\text{②}} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\text{③}} dt \right) \\ = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi(\boxed{\text{④}})t\} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi(\boxed{\text{⑤}})t\} dt \right]$$

となる。ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) dt = \delta(f)$ ($\delta(f)$ はディラックのデルタ関数)

の関係を用いれば、 $M(f) = \boxed{\text{⑥}}$ となる。

(2) $|M(f)|$ のグラフを図示せよ。

(3) 信号 $x(t)$ 、 $y(t)$ のフーリエ変換を、それぞれ、 $X(f)$ 、 $Y(f)$ とするとき、 $Y(f)$ を $X(f)$ と $M(f)$ を用いて表せ。

(4) $|X(f)|$ のグラフが図 1 のとき、 $|Y(f)|$ のグラフを図示せよ。ただし、 $f_0 < f_m$ とする。

(5) 信号 $y(t)$ を直接 A/D 変換して、そのデータを計算機で信号処理することとする。 $f_0 = 5\text{kHz}$ 、 $f_m = 20\text{kHz}$ のとき、信号 $y(t)$ をサンプリングするために必要な周波数を求めよ。

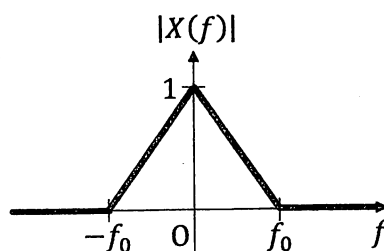


図 1

問 2 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ はそれぞれ平均 (期待値) が μ_1, μ_2 、分散が σ_1^2, σ_2^2 の不規則変数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ の平均 (期待値) を、 μ_1, μ_2 を用いて表せ。

(2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が互いに独立であるとき、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の共分散を求めよ。また、その導出過程を、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の共分散が、以下の式で表されることを利用して示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

ここで、 $p(x_1, x_2)$ は、 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の結合確率密度関数である。

(3) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が互いに独立であるとき、 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ の分散を求めよ。また、その導出過程を示せ。

(4) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が互いに独立であるとき、 $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ の平均 (期待値) と分散を求めよ。

(5) 一般に何らかの測定を行う際、測定を何回か繰り返し、各測定値の平均値を算出することで、精度の向上が期待できる。(4)の結果を利用あるいは拡張しながら、その理由を説明せよ。

(次ページに続く)

問題 8 (電気回路)

問 1 交流電圧源を用いた回路を考える。以下の設問に答えよ。

- (1) 図 1 の回路において V , I , Z は電圧, 電流, インピーダンスの複素表示である。

複素電力 P_c を

$$P_c = \bar{V}I$$

で定義する。ただし, \bar{V} は V の複素共役を表す。 P_c を虚数単位 j を用いて

$$P_c = P + jP_r$$

と表現したとき, P と P_r を V , I , \bar{V} , \bar{I} を用いた数式で表せ。

- (2) 理想変成器を用いた図 2 (a), 図 2 (b) の回路について考える。

(i) 図 2 (a) の回路において, I_1 を I_2 , n を用いて表せ。ただし, n は巻数比を表す。

(ii) 図 2 (b) の回路において, I_1 を I_2 , I_3 , n_2 , n_3 を用いて表せ。

- (3) 図 3 の 1-1' 間のインピーダンスを求めよ。

- (4) 図 4 の回路を考える。ただし, $n_2 = n_3 = 1$ で, V は角周波数 ω の交流電圧源である。
 Z_2 と Z_3 で消費される実効電力が等しくなる条件を容量 C , インダクタンス L , ω を用いて表せ。

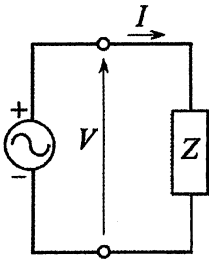


図 1

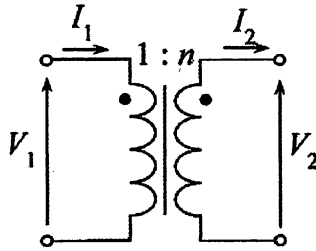


図 2 (a)

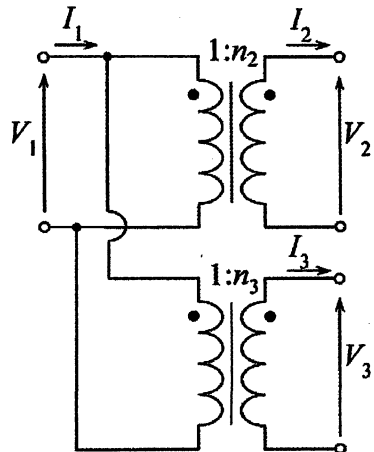


図 2 (b)

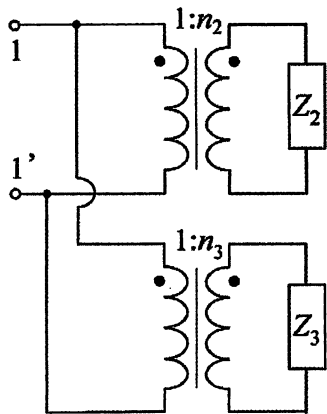


図 3

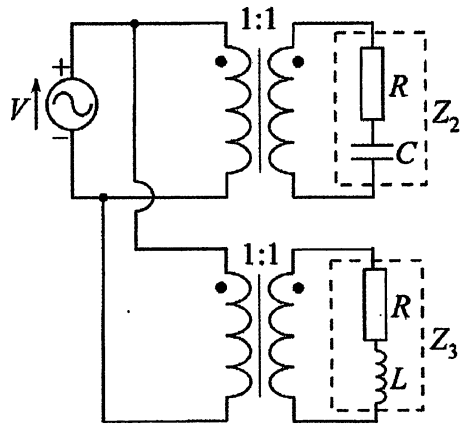


図 4

(次ページに続く)

問2 図5に示すように角周波数 ω の正弦波交流電源で駆動する回路を考える。ここで、 V_0 は交流電圧源の電圧の大きさを示す。 N は回路網を表す二端子対回路である。また、 V_1 、 V_2 および I_1 、 I_2 は各接続端子間の電圧および電流を表すものとする。以下の問いに答えよ。ただし、答えは V_1 、 V_2 、 I_1 、 I_2 を用いずに表すこと。

- (1) 図5の N に、抵抗 R 、インダクタンス L 、容量 C から成る図6の回路を用いた場合を考える。端子2-2'を短絡したとき、端子1-1'から N を右側にみたときのインピーダンス Z_{in} を次式で表す。

$$Z_{in} = \boxed{\text{ア}} + j \boxed{\text{イ}}$$

$\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる式を求めよ。

- (2) (1)において、伝達インピーダンス $Z_t = V_1 / (-I_2)$ を次式で表す。

$$Z_t = \boxed{\text{ウ}} + j \boxed{\text{エ}}$$

$\boxed{\text{ウ}}$ 、 $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる式を求めよ。

- (3) 図5の N に、インピーダンス Z から成る図7の回路を用いたとき、端子1-1'から

端子2-2'までの $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_a \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ を満たすアドミタンス行列 \mathbf{Y}_a を求めよ。

- (4) 図5の N に、インピーダンス Z から成る図8の回路を用いたとき、端子1-1'から端子2-2'までのアドミタンス行列 \mathbf{Y}_b を求めよ。

- (5) 図5の N に、インピーダンス Z から成る図9の回路を用いたとき、端子1-1'から端子2-2'までのアドミタンス行列 \mathbf{Y}_c を求めよ。

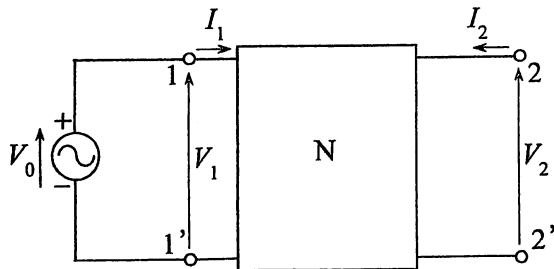


図5

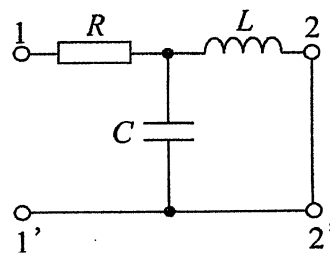


図6

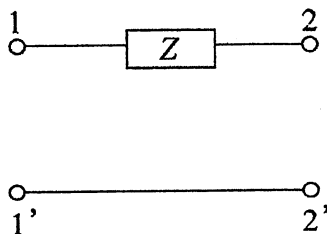


図7

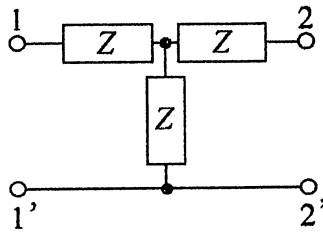


図8

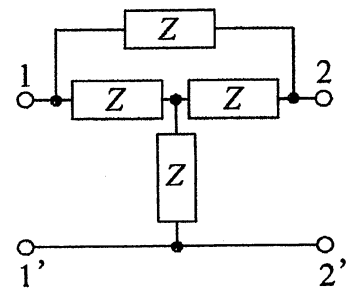


図9

(問題8 終わり)