平成１６年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
情報システム学専攻
入学試験問題

専門

平成１５年８月１１日（月）
１２：３０〜１５：３０

注意事項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2. 試験終了まで退出できない。

3. 外国人留学生は、日本語から母国語への辞書１冊に限り使用してよい。
   電子辞書の持ち込みは認めない。

4. 問題冊子、解答用紙４枚、草稿用紙４枚が配布されていることを確認せよ。

5. 問題は、A、Bの各科目群について下記のように解答せよ（合計４科目を選択して解答せよ）。
   A群：次の３科目から２科目を選択して解答せよ。
   (1) 解析・線形代数　(2) 確率・統計　(3) プログラミング
   B群：次の３科目から２科目を選択して解答せよ。
   (1) 計算機理論　(2) ハードウェア　(3) ソフトウェア
   なお、選択した科目名を解答用紙の指定欄に記入せよ。

6. 解答用紙は、指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7. 解答用紙は、試験終了後に４枚とも提出せよ。

8. 問題冊子、草稿用紙は、試験終了後に持ち帰ってよい。

解析・線形代数

[1]微分方程式について以下の問いに答えよ。ただし、$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す。

(1) $y''-3y'+2y=0$ の一般解 y を求めよ。

(2) 初期条件として

$$y(0)=3$$
$$y'(0)=4$$

が与えられた場合、解 y を求めよ。

(3) $y''-3y'+2y=e^{3x}$ の一般解 y を求めよ。

注）微分方程式 : Differential equation　　初期条件 : Initial Condition
　　一般解 : General solution

[2] p 行 q 列の行列 $\mathbf{U}$ を考える。q 次元実数ベクトル $\mathbf{x}$ （$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_q)^T$）について、$\|\mathbf{x}\|^2=1$ の条件下で、$\|\mathbf{Ux}\|^2$ の最大値、最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。なお、A^T は行列 A の転置を表す。

(1) $\|\mathbf{Ux}\|^2=\mathbf{x}^T\mathbf{U}^T\mathbf{Ux}$ と書けることを示せ。

(2) $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ であるとき、$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{UP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$ となる行列 $\mathbf{B}$ ならびに直交行列 $\mathbf{P}$ を求めよ。ただし、$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\lambda_3$ とする。

(3) $\mathbf{x}=\mathbf{Py}$ と変換する場合、$\|\mathbf{Ux}\|^2=\mathbf{x}^T\mathbf{U}^T\mathbf{Ux}$ はどのように記述されるか。

(4) (2)の場合、$\|\mathbf{Ux}\|^2$ の最大値と最小値、およびその時の $\mathbf{x}$ を求めよ。

注）転置 : Transpose　　直交行列: Orthogonal matrix

確率・統計

［1］ ある商品の１日の販売個数 X が次のポアソン分布に従うとする．

$$\Pr\{X=k\}=e^{-2}\frac{2^k}{k!} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

(1) １日の販売個数が２個以上（$X\geq 2$）になる確率を計算せよ．

（但し，$e^{-1}=0.367$，$e^{-2}=0.135$ で近似し，近似誤差は無視せよ．）

(2) １日の平均販売個数 $E[X]$ を，平均の定義から計算せよ．

［2］ 確率変数 X,Y が独立で，それぞれが正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．

(1) $W=(X-Y)/2$ としたとき，分散 $Var[W]$ と共分散 $Cov[W,Y]$ を求めよ．

(2) X と Y の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を求めよ．

(3) $U=X/Y$，$V=Y$ （$\Pr\{Y\neq 0\}=1$）としたとき，U,V の同時確率密度関数 $h_{U,V}(u,v)$ を求めよ．

(4) U の確率密度関数 $g_U(u)$ を求めよ．

【参考】１，２を解く際に，次の公式等を利用してもよい．

(a) 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数は，$b(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(z-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

(b) $\lim_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k=e$　　　(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}=e^a$

【専門用語の英訳】

分布: distribution, 平均: mean, 独立: independence,

正規分布: normal distribution, 分散: variance, 共分散: covariance,

同時確率密度関数: joint probability density function, 確率変数: random variable

プログラミング

［1］　以下に示すプログラムは，素数（prime number）を小さい順に求める C 言語によるプログラムである．このプログラムに関する以下の問いに答えよ．なお，プログラムの左側の数字は，行の番号を示すもので，プログラムの一部ではない．また，プログラム中の % は，剰余演算（remainder operation）を行う演算子である．

```
 1:    #include <stdio.h>
 2:
 3:    #define M 5
 4:
 5:    int n;
 6:    int table[M];
 7:
 8:    int check(int k)
 9:    {
10:        int j;
11:
12:        j = 0;
13:        while (j < n) {
14:            if (k % table[j] == 0) {
15:                return 0;
16:            }
17:            j = j + 1;
18:        }
19:        return 1;
20:    }
21:
22:    main()
23:    {
24:        int i;
25:
26:        n = 0;
27:        i = 2;
28:        while (n < M) {
29:            if (check(i) != 0) {
30:                printf("%d\n", i);
31:                table[n] = i;
32:                n = n + 1;
33:            }
34:            i = i + 1;
35:        }
36:    }
```

（1）このプログラムで，変数 n と配列 table は何を保持するためのものであるか説明せよ．

（2）このプログラムを実行する場合を考える．

(ア) このプログラムが出力する文字列を答えよ．

(イ) 14 行めの剰余演算が実行される回数は何回か．

(ウ) 14 行めの if 文を最後に実行する時の j，k，n の値はそれぞれいくらか．

(3) ある数が素数であるかを調べるためには，その数の平方根 (square root) 以下の数で割り切れないことを確認すればよいが，このプログラムはこの性質を活用していない.

(ア) この性質を活用して実行効率を改善したプログラムを示せ．ただし，平方根を求める関数を用いてはならず，乗算 (multiplication operation) の実行回数ができる限り少なくなるようにすること．プログラムの修正箇所が少ない場合には，元のプログラムとの差分のみを示してもよい.

(イ) 改良後のプログラムを実行した場合に，剰余演算と乗算が実行される回数はそれぞれ何回か.

計算機理論

[1] 本問では，次のような論理結合子および等号を用いることとする．

連言	選言	否定	含意
(conjunction)	(disjunction)	(negation)	(implication)
$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$

全称限量子	存在限量子	等号
(universal quantifier)	(existential quantifier)	(equality symbol)
$\forall x$	$\exists x$	$=$

結合の強さは，限量子，否定，連言，選言，含意の順とする．

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする．すなわち，$\mathcal{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ とする．自然数の有限系列の集合を $\mathcal{N}^*$ で表す．

頂点 (vertex) が自然数であるような無向グラフ (undirected graph) G が与えられたとき，2引数関数記号 $\circ$，1引数述語記号 V,P，2引数述語記号 E の $\mathcal{N}^*$ 上での解釈 $G[\![\circ]\!]$，$G[\![V]\!]$ $G[\![E]\!]$，$G[\![P]\!]$ を，G に基づいて次のように定める．任意の自然数 $i_1,\ldots,i_m \in \mathcal{N}$ に対して，

- $G[\![\circ]\!](i_1\cdots i_l,\ i_{l+1}\cdots i_m)=i_1\cdots i_l i_{l+1}\cdots i_m$ とする．ただし，$0\le l\le m$ とする．
- $G[\![V]\!](i_1)=\textbf{true}$ のときかつそのときに限り，i_1 は G の頂点である．
- $G[\![E]\!](i_1,i_2)=\textbf{true}$ のときかつそのときに限り，G において頂点 i_1 と頂点 i_2 を結ぶ辺 (edge) がある．
- $G[\![P]\!](i_1 i_2\cdots i_m)=\textbf{true}$ のときかつそのときに限り，$m>1$ かつ各々の $1\le k<m$ に対して G に頂点 i_k と頂点 i_{k+1} を結ぶ辺があり，かつ，$i_1,i_2,\ldots,i_m$ はすべて異なる．

関数記号 $\circ$，述語記号 V,E,P から構成される一階述語論理式 (first order predicate formula)（以下では単に論理式という）に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の論理式を冠頭標準形 (prenex normal form) に変換せよ．

(a) $\forall i\forall j(V(i)\wedge V(j)\wedge\neg(i=j)\rightarrow\exists xP((i\circ x)\circ j))$

(b) $\forall i(V(i)\rightarrow\forall j(V(j)\rightarrow(E(i,j)\rightarrow E(j,i))))$

(c) $\forall i\forall j(V(i)\wedge V(j)\wedge\neg(i=j)\wedge\forall x\forall y(P((i\circ x)\circ j)\wedge P((i\circ y)\circ j)\rightarrow x=y))$

(2) (1) の各々の論理式が図 1 の無向グラフ G_1 に対する解釈の下で成り立つか否かを答えよ．

(3) (1) の各々の論理式が図 1 の無向グラフ G_2 に対する解釈の下で成り立つか否かを答えよ．

(4) G_1 に対する解釈の下で，次の論理式が成り立つような G_1 の頂点 a を列挙せよ．

$$V(a)\wedge\exists i\exists j(V(i)\wedge V(j)\wedge\neg(a=i)\wedge\neg(a=j)\wedge\neg(i=j)\wedge$$
$$(\forall x(P((i\circ x)\circ j)\rightarrow\exists x_1\exists x_2(x=(x_1\circ a)\circ x_2))))$$

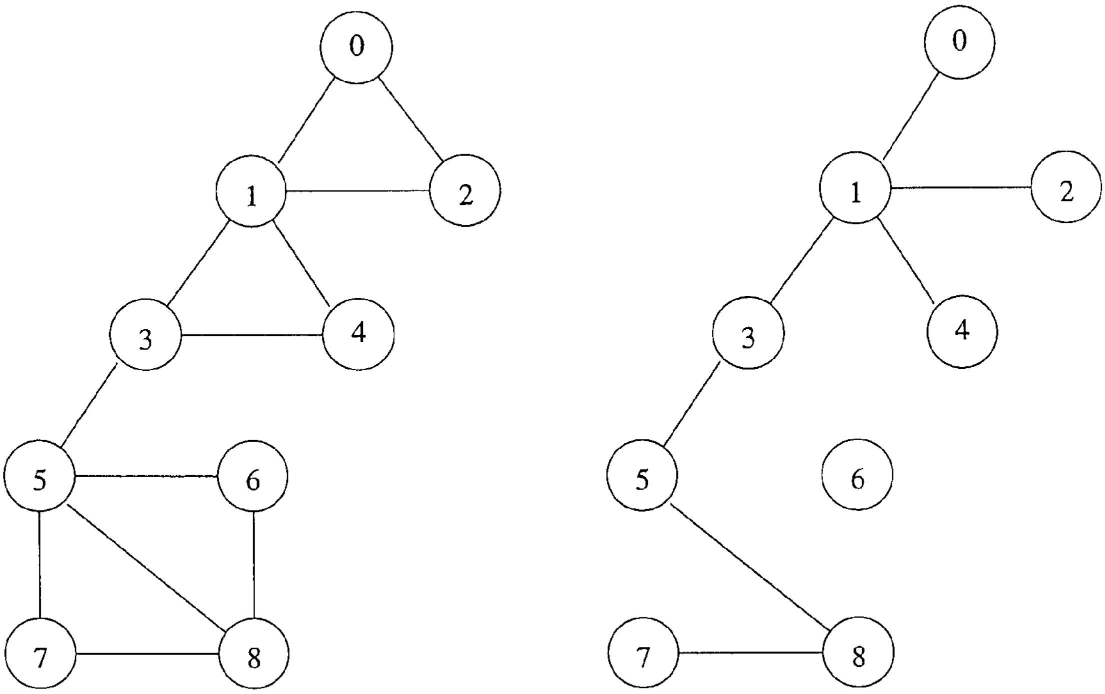
(5) G_2 に対する解釈の下で，次の論理式が成り立つような G_2 の頂点 a を列挙せよ．

$$V(a)\wedge\forall i\forall j(E(a,i)\wedge E(a,j)\rightarrow i=j)$$

(6) 次のことを表す論理式を書け．

(a) G は木である．すなわち，G は連結 (connected) であり，かつ，閉路 (loop) をもたない．

(b) G は 2 連結 (biconnected) である．すなわち，互いに異なるすべての頂点 i,j,a に対して，a を通らないような i から j への経路 (path) がある．



G_1　　　　　　　　G_2

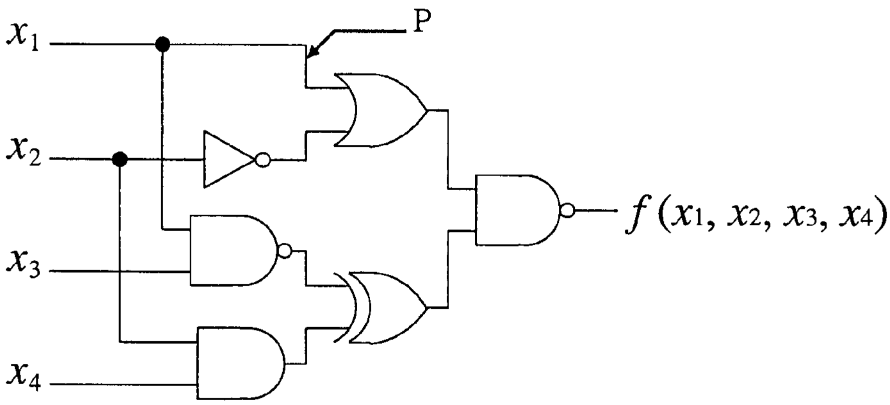
図 1 無向グラフ G_1, G_2

[2] アルファベットを $\{a,b\}$ とする言語を考える．言語 L を aaa または aba を含む全ての文字列の集合とするとき，以下の問に答えよ．

(1) L を受理する非決定性オートマトンのうち，状態数が 4 以下のものを一つ図示せよ．
(2) L を受理する決定性オートマトンのうち，状態数が 5 以下のものを一つ図示せよ．

ハードウェア

[1] 下図に示す組合せ論理回路 (combinational circuit) について，以下の問に答えよ。



1) 回路が計算する４変数論理関数 (4-variable logic function) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を表すカルノー図 (Karnaugh map) を示せ。
2) f の主項 (prime implicant) をすべて求めよ。
3) f の特異最小項 (distinguished minterm) とそれを包含する必須主項 (essential prime implicant) の組をすべて求めよ。
4) f の最小積和形表現 (minimum sum-of-products form) を求めよ。
5) f が完全対称関数 (totally symmetric function) であるかどうかを，理由を示して判定せよ。
6) 回路のＰ点（OR ゲートの入力線）に１縮退故障 (stuck-at-1 fault) が生じた場合に回路が計算する関数（故障関数）を積和形表現 (sum-of-products form) で示せ。

[2] キャッシュ(cache) 内でのメモリブロックの配置方式について論ぜよ。

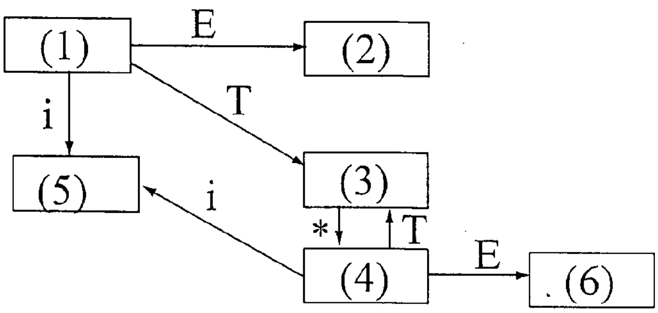
ソフトウェア

文脈自由文法 (Context-Free grammar) G=(T,N,P,S) について以下の問いに答えよ．終端記号集合 (Terminal symbols)$T = \{*, i\}$, 非終端記号集合 (Non-terminal symbols)$N = \{S, E, T\}$ とし，生成規則集合 (Production rules)P は以下の 4 つの規則からなるとする．$ を入力の最後を示す特別な終端記号とする．(“:” の前の数字は生成規則につけられた番号である．)

1:	$S \to E$	2:	$E \to T$
3:	$E \to T * E$	4:	$T \to i$

[1] この文法の LR(0) 項 (LR(0) term) をすべて列挙（れっきょ）せよ．

[2] 下図の (1)〜(6) に LR(0) 項を入れて LR(0) 項状態遷移図 (LR(0) state diagram) を完成せよ．



[3] 各非終端記号について FOLLOW 集合を求めよ．

[4] 以下の (1)〜(18) を埋めて SLR(1) 構文解析表 (SLR(1) Parsing table) を完成せよ．ここで状態の番号は上記の LR(0) 項状態遷移図につけられた番号とする．

	i	*	$	E	T
1	(1)	(2)	(3)	g2	g3
2	(4)	(5)	(6)		
3	(7)	(8)	(9)		
4	(10)	(11)	(12)	g6	g3
5	(13)	(14)	(15)		
6	(16)	(17)	(18)		

シフト動作 (shift) をして状態 i に移動することを s_i，ルール j で還元動作 (reduce) をすることを r_j，受理する (accept) ことを a と記述せよ．右半分の goto 表では g_k によって状態 k へ遷移(せんい)することを表している．(1)〜(18) のうち，シフト動作，還元動作を記入する番号に対して s_i または r_j をあげよ．(空欄(くうらん)となる場所については答えなくてよい．)

[5] 上で得られる SLR(1) 構文解析表を用いて次の入力文字列を構文解析 (parse) する．

$$i * i$$

(1) この入力の LR 解析過程 (LR shift-reduce parse) を示せ．スタックと \$ で終る未処理の入力文字列の対である計算状態 (configuration)

$$(N_0X_1N_1X_2N_2 \ldots N_{n-1}X_nN_n, w\$)$$

の遷移 (transition) で表せ．ここで，N_i は状態の番号，$X_j \in N \cup T$ とする．例えば，$(0T1, *i\$)$ はスタックに状態 0，記号 T，状態 1 が積まれていて，未処理の入力文字列が $*i$ である計算状態を示す．受理状態 (Acceptance configuration) は $(a, \$)$ とせよ．

(2) 得られる構文木 (Parse tree) を示せ．