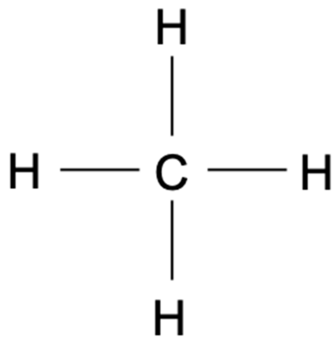
2020

問題 9

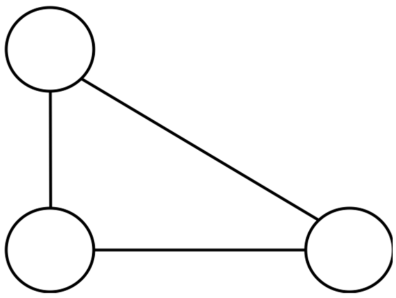
無向グラフに関する以下の設問に答えよ。

(1) 無向グラフにおいて、次数の総和は必ず偶数であることを示せ。

(2) 化学式 C_5H_{12} で表される分子には、いくつかの構造異性体が存在する。これらの異性体を全て挙げ、それぞれに対応するグラフを描け。図は、CH_4 を表すグラフである。



(3) サーバが 3 台あり、それらが、下図のように接続されているとする。ネットワークに対応するグラフが連結グラフである場合に限り、このネットワークは正常である。このネットワークの各辺が独立に確率pで断線するとき、ネットワークが正常である確率を p の関数として求めよ。



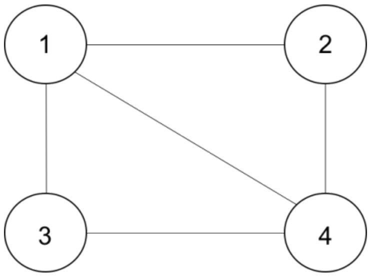
2019

問題１０

無向グラフに関する以下の設問に答えよ。単純グラフとは、多重辺や自己ループを含まないグラフを指す。また、連結された辺の列を歩道と呼ぶ。

(1) 任意のグラフ G において、次数が奇数である点の個数は必ず偶数個あることを示せ。

(2) 次のグラフの隣接行列Aを求めよ。また、点１と点４を結ぶ長さ２の歩道の数はA^2の第(1,4)成分と等しいことを示せ。



(3) ある隣接行列Aを持つ任意の単純グラフ G の２点i, jを結ぶ長さkの歩道の数はA^kの第(i, j)成分と等しいことを示せ。

(4) 単純グラフ G が連結グラフであり、点の個数が２以上ならば、G には必ず同じ次数を持つ２つの点が存在することを示せ。

2018

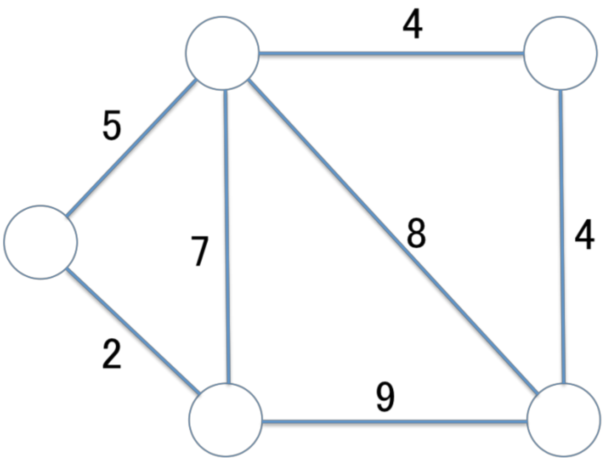
問題１０

グラフに関する以下の設問に答えよ。

(1)無向グラフにおいて、各頂点の次数の和は、辺の数の二倍に等しいことを示せ。

(2)頂点集合V、辺集合Eを持つグラフ$G(V,E)$が木であるとき、$|E| = |V| - 1$であることを証明せよ。

(3)無向グラフ$G(V,E)$ において、$T \subseteq E$である辺集合に関して、グラフ$S(V,T)$が木であるならば、SをGの全域木と呼ぶ。また、重みつきグラフの全域木のうち、辺の重みの総和が最小のものを最小全域木と呼ぶ。次のグラフの最小全域木を求めよ。



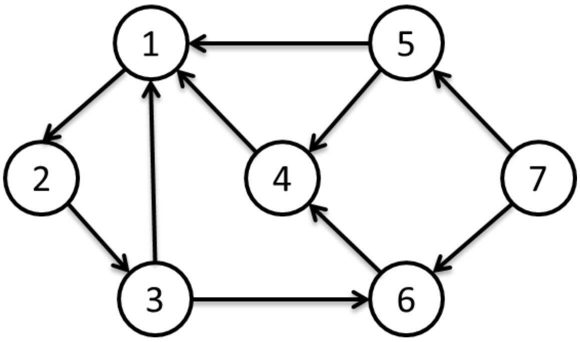
(4)$S(V,T)$ と$S'(V,T')$を、グラフGにおける任意の二つの異なる全域木とする。ある辺$e' \in T' - T$に対して、$(T - \{e\}) \cup \{e'\}$ が全域木となるような辺$e \in T - T'$が存在することを証明せよ。

2017

問題１０

グラフ上の頂点 i から頂点 j への最短距離は、i から j への経路のうち辺の数が最小となる経路の辺の数で定義する。ただし、そのような経路が存在しない場合には最短距離は $+\infty$ 、i と j が同じ場合には最短距離は 0 とせよ。

(1) 以下の有向グラフについて考える。



(A) このグラフの隣接行列を示せ。

(B) 頂点 i から頂点 j への最短距離を行列の要素 $s_{i,j}$ とする行列 S をこのグラフについて示せ。

(2) 頂点集合 $V=\{1,2,\ldots,n\}$、辺集合 E からなる単純な有向グラフ $G=(V,E)$ が与えられている。また、E は行列 $D^{(0)}=\left(d_{i,j}^{(0)}\right)$, $d_{i,j}^{(0)}=\begin{cases}0 & (i=j\text{ のとき}) \\ 1 & (\text{辺}i\rightarrow j\text{が存在するとき}) \\ +\infty & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$ の形で与えられているものとする。

(A) 頂点集合 $V_{i,j}^{(k)}=\{1,2,\ldots,k\}\cup\{i,j\}$ とする。また、E の辺で始点と終点が両方とも $V_{i,j}^{(k)}$ に含まれる辺の集合を $E_{i,j}^{(k)}$ とする。有向グラフ $G_{i,j}^{(k)}=(V_{i,j}^{(k)},E_{i,j}^{(k)})$ 上で頂点 i から頂点 j までの最短距離を $d_{i,j}^{(k)}$ とし、行列 $D^{(k)}=\left(d_{i,j}^{(k)}\right)$ と定義する。$D^{(1)}$ を $D^{(0)}$ を用いてあらわせ。

(B) 以下の式を用いて $D^{(k)}$ から $D^{(k+1)}$ を計算することができる。下記の空欄に当てはまる式を答えよ。

$$d_{i,j}^{(k+1)}=\min\left(d_{i,j}^{(k)},\ \boxed{}+\boxed{}\ \right)$$

(C) G が与えられたとき全頂点対間の最短距離を計算するアルゴリズムと、その n に対する時間計算量を示せ。

2016

問題１０

有向グラフにおいて、ある点から有向辺を辿りある点に到達する過程で辿った有向辺の列をパスと呼ぶ。開始点と終了点が同一のパスを閉路と呼ぶ。各有向辺をただ 1 度だけ辿るパスをオイラーパス、オイラーパスが閉路のときオイラー閉路と呼ぶ。

次に文字列 $L = c_1 c_2 \dots c_n (n \geq 2)$ から有向グラフを構成する。L の i 番目の文字から始まる長さ $k\ (\geq 1)$ の連続部分文字列 $c_i \dots c_{i+k-1}$ を $s_{i,k}$ と記述する。頂点集合が $\{ s_{i,k} \mid i = 1, \dots, n-k+1 \}$、ラベル付き有向辺集合が

$$\{ (s_{i,k},\ s_{i+1,k},\ i) \mid i = 1, \dots, n-k, \text{第三引数}\ i\ \text{はラベル} \}$$

である有向グラフを $G_{L,k}$ と記述する。以下の問に答えよ。

(1) L = ACACA のとき、$G_{L,2}$ の頂点集合は {AC, CA}、ラベル付き有向辺集合は { (AC,CA,1), (CA,AC,2), (AC,CA,3) } である。$G_{L,2}$ のオイラーパスとオイラー閉路を列挙せよ。

(2) L = GCGCGCAGCG のとき、 $G_{L,3}$ と $G_{L,4}$ のオイラーパスとオイラー閉路を列挙せよ。

(3) 点 v が平衡とは、点 v に入る有向辺の数と点 v から出る有向辺の数が等しい状態と定義する。すべての点が平衡である有向グラフを平衡と呼ぶ。任意の点から任意の点へのパスが存在するとき、有向グラフは連結と呼ぶ。有向グラフがオイラー閉路をもつならば、連結かつ平衡であることを示せ。

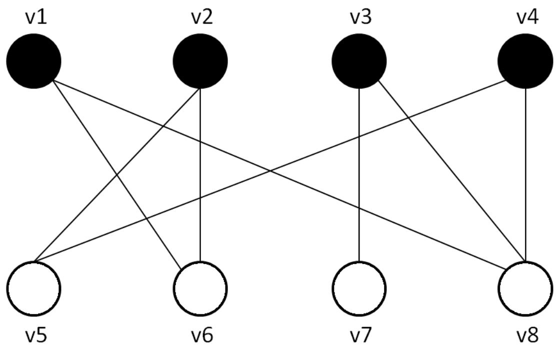
(4) 逆に、有向グラフが連結かつ平衡ならば、オイラー閉路をもつことを示せ。

2015

問題 10

二部グラフとは、点集合を二つの部分集合（グループ）に分割して各グループ内の点同士の間には辺が無いようにできる無向グラフのことである。二部グラフに関する以下の設問に答えよ。

(1) 以下のグラフGの接続行列を書け。



(2) マッチングとは、端点を共有しない枝集合のことを言う。完全マッチングとは、グラフ上の全ての点が、マッチング中のいずれかの枝の端点になっているものである。グラフGの完全マッチングを全列挙せよ。

(3) 木は必ず二部グラフであることを証明せよ。

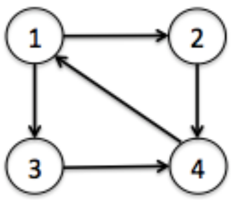
(4) 二部グラフは、奇数本からなる閉路を含まないことを証明せよ。

2014

問題４

グラフに関して、以下の設問に答えよ。

(1) 以下の有向グラフの行列表現とリスト表現をそれぞれ書け。

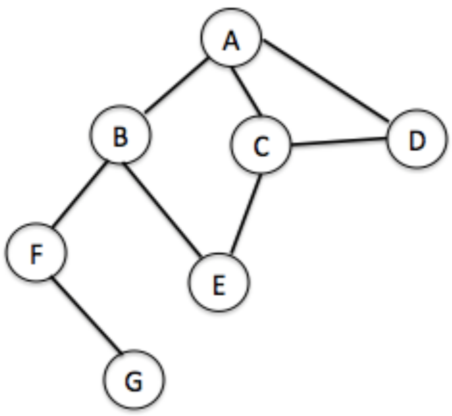


(2) 頂点数をn、辺の数をmとするとき、行列表現とリスト表現に必要な記憶容量を表すのにもっとも適切なものをそれぞれ以下から選べ。

1. $\Theta(n^2)$ 2. $O(n^2)$ 3. $\Theta(n \log n)$ 4. $O(n \log n)$
5. $\Theta(m+n)$ 6. $O(n+m)$ 7. $\Theta(mn)$ 8. $O(mn)$

(3) 行列表現とリスト表現の優劣を３行ほどで述べよ。

(4) 以下の無向グラフを深さ優先探索した場合と幅優先探索した場合に、どのような順序で頂点がたどられるか、それぞれについて、すべて列挙せよ。ただし、どの場合も頂点 A を出発点とするものとする。答えは、たどる頂点のリストで表現せよ。例：ACDBEGF



(5) 幅優先探索を用いて、無向グラフのある頂点から到達可能な頂点までの距離（その二つの頂点間の辺の数の最小値）が求められることを示せ。

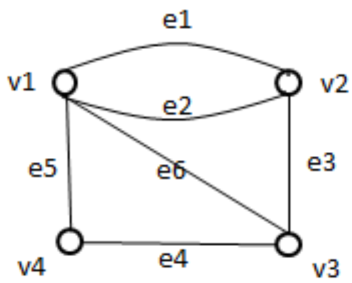
(6) 深さ優先探索で簡単に求められる無向グラフの性質を一つあげよ。そして、その理由を２行ほどで述べよ。

2013

問題４

自己ループを持たず空でない無向グラフに関する以下の設問に答えよ。

(1) 以下のグラフ G の接続行列 M（頂点 v_i が辺 e_j に接続する数 $m_{ij}\in\{0,1\}$を行列の要素とする）を書け。



(2) M の各行の要素の和は何を表しているか？

(3) 一般にグラフ G の頂点の次数（頂点に接続する辺の個数）の総和は、辺の個数の２倍になることを示せ。

(4) どんなグラフについても、次数が奇数となる頂点の個数は偶数であること示せ。

(5) グラフ G の頂点の次数がすべて２以上の時、G には閉路があることを示せ。

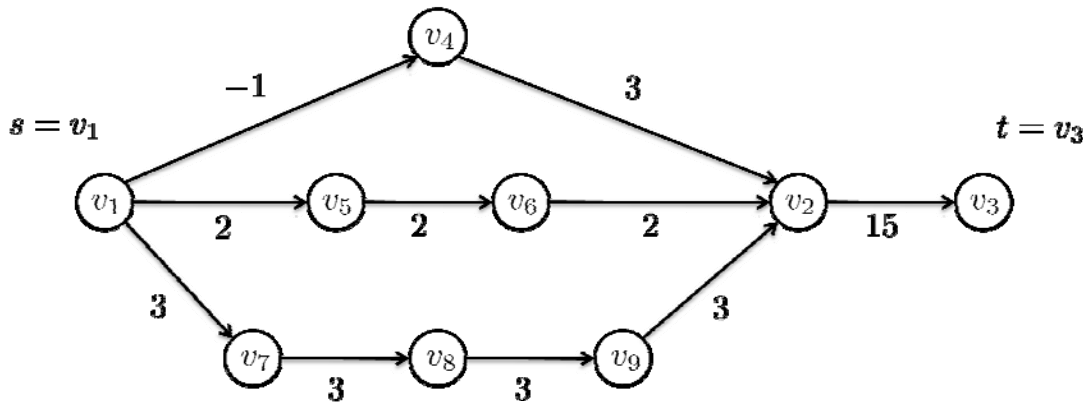
(6) 木（閉路をもたない連結グラフ）の頂点の個数を p、辺の個数を q とするとき p=q+1 が成り立つことを証明せよ。

2011

問題３

頂点集合V、辺集合E及び辺$e \in E$に対する整数の重み関数$w(e)$からなる、閉路を含まない重み付き有向グラフ$G=(V,E,w)$を考える。G上のパスの重みとは、パス上の辺に対する重みの和であると定義する。$s \in V$及び$t \in V$が与えられたとき、sからtまでのパスのうち平均重み（パスの重みをパス上の辺の数で割ったもの）が最小となるようなパスを「平均重み最小パス」と呼ぶこととし、このようなパスを１つ求める。

(1) 以下のグラフにおいて、パス$v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_3$の重みを求めよ。



(2) (1)で示したグラフで、sからtまでの平均重み最小パスを求めよ。

(3)　G上においてsからtまでの平均重み最小パスの重みが定数C以下であると仮定する。以下の命題が成り立つことを証明せよ。
「G'は重み付きグラフ(V,E,w')であり、重み$w'(e)=w(e)-C$とする。このときG'においてsからtまでの重み最小パスの重みが零以下である。」
ただし、重み最小パスとは最小の重みを与えるパスである。

(4)　sからtまでの重み最小パスをEやVのサイズに対して多項式時間で求めるアルゴリズムを設計せよ。

(5) 平均重み最小パスを $\log(\max_{e\in E}|w(e)|)$ 及びEやVのサイズに対して多項式時間で一つ出力するアルゴリズムを設計せよ。

2010

問題2

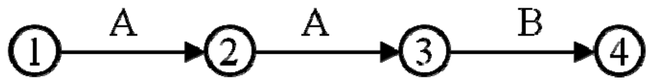
次の条件を満たす有向グラフを考える。

- 頂点数は有限で、閉路（ループ）を含まない。
- 各頂点 v を始点とする辺 (v, w) は高々 1 個しか存在せず、辺が存在しない場合は v を出口と呼ぶ。出口は唯一つ存在すると仮定する。
- 各辺には文字 A もしくは B がラベルされている。

このとき以下の各問に答えよ。

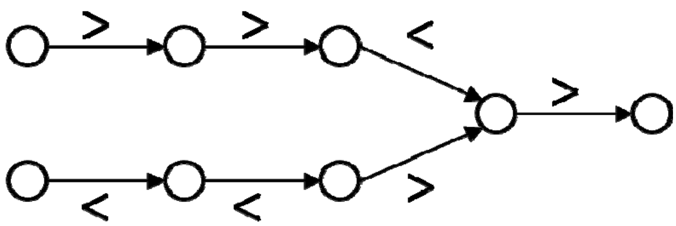
(1) 各頂点から有向辺に沿って頂点を訪問してゆくと、いつかは唯一の出口に到達することを証明せよ。

(2) 各頂点 v から有向辺を沿って頂点を訪問し、唯一の出口に到達するまでに辺にラベルされた文字を連結した文字列を $S(v)$ と置く。v が出口の場合 $S(v)$ は空の文字列と定義する。以下のグラフでは $S(4)$ は空の文字列、$S(3) = \mathrm{B}$、$S(2)=\mathrm{AB}$、$S(1)=\mathrm{AAB}$ である。



任意の辺 (v, w) について記号列 $S(v)$ と $S(w)$ は等しくないことを示せ。

(3) 辞書式順序で文字列を比較する。たとえば $\mathrm{AAB} < \mathrm{AB} < \mathrm{B}$。なお、空の文字列を最小と定義する。辺 (v, w) について $S(v) > S(w)$ のとき辺は > タイプ、そうでないとき < タイプ と呼ぶ。以下のグラフの各辺のタイプを満たすように、各辺に A もしくは B をラベルせよ。



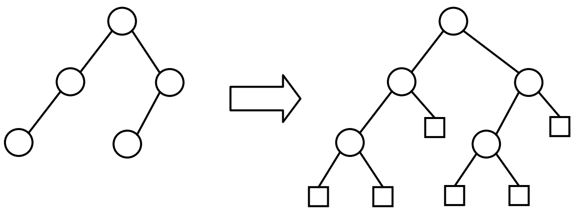
(4) グラフの各辺の文字が決まっていないとする。w が出口のとき辺 (v, w) は > タイプである。それ以外の辺に > もしくは < のどちらのタイプを任意に割り当てても、それを満たす文字を各辺にラベルできることを証明せよ。

(5) 文字がラベルされたグラフについて、辺の全てにタイプを割り当てる作業を考える。この作業を辺の数に線形比例する時間で実行するアルゴリズムを設計せよ。

2008

問題 1

二分木において、子のない節点に特別な節点を以下のように補完した構造を考えよう。
○を「内部節点」、□を「外部節点」、節点から二分木の根までの距離を「深さ」と呼ぶ。
また、内部節点の数を n とする。



（1）内部接点どうしを結ぶ辺の数が n−1 となることを証明せよ。

（2）外部節点数が n+1 であることを証明せよ。

（3）根からの深さが k で外部節点を 2 個持つ内部節点を一つ削除する操作を考える。外部節点の深さの総和の変化量と、内部節点の深さの総和の変化量を、それぞれ k を用いて表せ。

（4）外部節点の深さの総和が、内部節点の深さの総和+ $2n$ になることを証明せよ。

（5）n 個ある内部節点の深さの総和が最小、また最大となる構造はそれぞれどのようなものか、説明せよ。

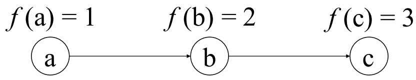
2007

問題4

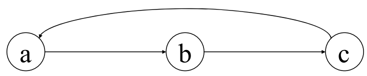
頂点の集合を V、有向辺の集合 $\{(v, w) \mid$ 頂点 v から頂点 w への有向辺が存在$\}$ を E とする有向グラフ (V, E) を考える。V の各頂点 v に自然数 $f(v)$ を割当てる関数 f が E の全ての辺 (v, w) について $f(v) < f(w)$ を満たすとき無矛盾と呼ぶ。また有向辺の列

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k\text{-}1}, v_k) \quad (k \geq 2)$$

が $v_1 = v_k$ を満たすときサイクルと呼ぶ。下図では、上に無矛盾な関数の例を、下にサイクルの例を示す。



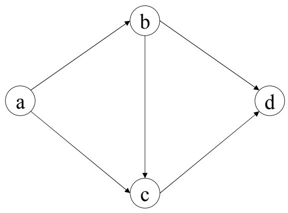
$V = \{$ a, b, c $\}$ $E = \{$ (a,b), (b,c) $\}$



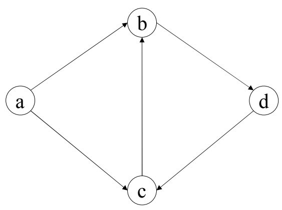
$V = \{$ a, b, c $\}$ $E = \{$ (a,b), (b,c), (c,a) $\}$

(1) 以下の各々の場合について、無矛盾な関数 f が存在する場合には例を示し、存在しない場合には証明せよ。

A) $V = \{$a,b,c,d$\}$ $E = \{$ (a,b), (a,c), (b,d), (c,d), (b,c) $\}$



B) $V = \{$a,b,c,d$\}$ $E = \{$ (a,b), (a,c), (b,d), (d,c), (c,b) $\}$



C) E がサイクルを含むとき

D) E がサイクルを含まないとき

(2) 無矛盾な関数が存在するか否かを判定するアルゴリズムを示せ。