7

電磁気学解答

問 1 (1) 点 x での電界の強さ E は $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ となり、x での電位は $V(x) = Q/4\pi\epsilon_0 x$ となる。従って、導体の電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{1}$$

と求まる。

問 1 (2) 電位係数の対称性より求める 導体球に帯電した電荷を Q_1、この導体球の電位を V_1 とする。また、ℓ 点にある点電荷の電荷を Q_2、電位を V_2 とする。(V_1, V_2) と (Q_1, Q_2) は、電位係数を p_{ij} として、つぎの一次結合で表される。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$Q_1 = 1$[c]、$Q_2 = 0$ とおくと、$V_1 = 1/4\pi\epsilon_0 a$、$V_2 = 1/4\pi\epsilon_0 \ell$ を得る。従って電位係数は $p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$、$p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \ell}$ となる。ℓ

電位係数の対称性より $p_{12} = p_{21}$ となる。従って、$Q_1 = Q$、$Q_2 = q$ とするときの導体球の電位 V は

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell}\right) \tag{3}$$

となる。

問 1 (2) 電気映像法より求める 帯電導体球と点電荷の系の境界条件は、（1）導体球の外部に電荷 q がある、（2）半径 a の球面上で電位は一定である、（3）半径 a の球面を通る電束線数は Q 等となる。導体球を取り去り、この条件を満たすためには、x 軸上の a^2/ℓ の位置に映像電荷 $-aq/\ell$ を置き、x 軸の原点に $+aq/\ell$ と Q の電荷を置けばよい。この時の、球面上の電位 V は

$$V = \frac{1}{e\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{1}{a}\frac{aq}{\ell} + \frac{\frac{-aq}{\ell}}{a - \frac{a^2}{\ell}} + \frac{q}{\ell - a}\right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{e\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell}\right) \tag{5}$$

となる。

問2 (1) ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \alpha\frac{\hat{z}\times\mathbf{r}}{r^3} = \alpha[\frac{-y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0] \tag{6}$$

と表される。磁束密度 $\mathbf{B}$ は、$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ より

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\alpha\frac{3zx}{r^5} \tag{7}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \alpha\frac{3yz}{r^5} \tag{8}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \alpha\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5} \tag{9}$$

となる。従って、$x = 0$ の面内では

$$\mathbf{B} = [o, \alpha\frac{3yz}{r^5}, \alpha\frac{2z^2 - y^2}{r^5}] \tag{10}$$

となる。

問2 (2) $y = rsin\theta$ と $z = rcos\theta$ を (10) 式に代入し、以下により B_r と B_θ を求める。

$$B_r = B_z cos\theta + B_y sin\theta = \alpha\frac{2cos\theta}{r^3} \tag{11}$$

$$B_\theta = -B_z sin\theta + B_y cos\theta = \alpha\frac{sin\theta}{r^3} \tag{12}$$

問2 (3) 磁力線の接線が磁界の方向なので、磁力線の方程式は、極座標を用いて

$$\frac{dr}{\frac{B_r}{\mu_0}} = \frac{rd\theta}{\frac{B_\theta}{\mu_0}} \tag{13}$$

と表される。ここに、(11)、(12) 式を代入して

$$\frac{dr}{2cos\theta} = \frac{rd\theta}{sin\theta} \tag{14}$$

を得る。

この方程式を解いて

$$r = Csin^2\theta \tag{15}$$

なる磁力線群の式を得る。C は定数である。

磁力線の概略を求めるため、$C = 1$ と取り、r と θ の関係を調べる。

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	0	1/4	1/2	3/4	1

これらの値を極座標にプロットして、磁力線を得る。磁力線の概略を下図に示す。