平成 24 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

専門科目試験問題
（先進電磁エネルギー工学コース）

（実施時間　１４：００ ～ １６：００）

【注　意　事　項】

１．問題用紙は，この表紙を除いて 21 ページある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，「熱・統計力学」，「電磁気工学 1」，「電磁気工学 2」，「量子電子物性 1」，「量子電子物性 2」，「量子電子物性 3」，「量子電子物性 4」，「制御工学１」，「制御工学 2」の全部で９題あり，この順番に綴じられている．このうち，３題を選択し解答すること．

３．解答用紙は，試験問題毎に指定されている．解答は必ず指定された解答用紙に記入すること．解答用紙を間違えると，採点できない場合がある．

４．選択した試験問題の解答に際しては，指定されている解答用紙の上部に試験問題名、志望コースおよび受験番号を記入した後，解答の記入を開始すること．

５．解答が解答用紙の表面に書ききれない場合は，その用紙の裏面を使用してよい．ただし，その場合，裏面に記入がある旨を表面に記載すること．

６．試験終了時までに，選択した３題の試験問題名を別紙「専門科目試験問題選択票」の該当箇所へ記入すること．

７．“選択しなかった”試験問題の解答用紙は，下書きや計算用紙として使用しても差し支えないが，配布された９枚の解答用紙は全て回収されるので，持ち帰ってはいけない．

８．試験が終了したら，(1)「専門科目試験問題選択票」に記入した試験問題の解答用紙３枚を番号の若い順に揃え，(2)選択しなかった試験問題の解答用紙を一つに重ね二つ折にした上，(3)「専門科目試験問題選択票」，番号順に揃えた３枚の解答用紙，及び，２つ折にした残りの解答用紙をこの順番に重ねて，監督者の指示を待つこと．

９．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【熱・統計力学】 解答は，青色（1 番）の解答用紙に記入すること.

問 1〜問 3 に答えなさい.

問 1　以下の文章を読んで，（ア）〜（カ）に適当な文字式を入れなさい.

n モルの理想気体が体積 V の容器(1 辺が L の立方体)に閉じ込められている．いま，容器の壁は絶対温度 T に保たれているとする時，気体の圧力と分子の速さの関係について考える．なお，分子同士の衝突は無視できるとし，壁との弾性衝突だけを考えることとする．また，分子 1 個の質量を m，速度を $\boldsymbol{v}$ とする．ここで，$\boldsymbol{v}$ はベクトルで，$\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ と表され，$v = |\boldsymbol{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{0.5}$ である．

x軸に垂直な容器を構成する 2 つの面（x=0 とx=L）を考える．x=L の面に衝突する分子に着目すると，壁に与える運動量は 1 回の衝突あたり，$\boxed{\text{（ア）}}$ となる．つまりこの粒子は単位時間当たり，$\boxed{\text{（イ）}}$ の運動量をこの壁に与えることになる.

ニュートンの第二法則によると，壁に与えられる運動量の時間変化率は壁に与えられる力に等しい．このことから，この粒子が壁に与える圧力は，$\boxed{\text{（ウ）}}$ となる.

しかし，実際には様々な速度を持つ粒子が容器内に存在している．多数の粒子の平均的挙動を考え，容器に閉じ込められている N 個の粒子の速さ（v，v_x，v_y 及びv_z ）の二乗平均を，それぞれ$\overline{v^2}$，$\overline{v_x^2}$，$\overline{v_y^2}$及び $\overline{v_z^2}$とするとき，これらの量の間には以下の重要な関係を仮定することができる.

$\overline{v^2}$＝ $\boxed{\text{（エ）}}$

この結果から N 個の粒子が平均的に壁に及ぼす圧力 p は，$\overline{v^2}$を使って，

p＝ $\boxed{\text{（オ）}}$

と求められる.

次に，平方 2 乗平均速度($v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$)を求める．$V = L^3$ であることに注意しながら，理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ を使用すると，v_{rms} は，この気体の 1 モルの質量 M，気体定数 R 及び T を用いて，

v_{rms}＝ $\boxed{\text{（カ）}}$

と表される.

次に，分子の速度分布について考える.

問 2　以下の文章を読んで，（キ）〜（シ）に適当な文字式を入れなさい．なお，必要なら以下の積分公式を使用しなさい.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ここで，aは正の定数，n は正の整数である.

気体分子運動論によると，エネルギー ε $(= \frac{1}{2} m v^2)$の分子の存在確率は，$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$に比例することが知られ

ている．ここで，k_Bはボルツマン定数である．分子のx成分の運動のみを考えた場合，同様の考え方が導入できるとすると，x成分の速度分布関数 $f(v_x)$は，規格化定数をCとすると次式のように表される．

$f(v_x) =$ $\boxed{\text{（キ）}}$

速度分布関数は規格化されており，次式を満たす．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = 1$$

この時，Cは，

$C =$ $\boxed{\text{（ク）}}$

となる．

$f(v_y)$と$f(v_z)$も同様に求められ，結局，分子のエネルギー分布関数$f(\varepsilon)$はそれらの関数の積として表され，

$f(\varepsilon) =$ $\boxed{\text{（ケ）}}$

となる．

更にvが$v\sim v + dv$に入る分子の数を求めてみる．

v_x，v_y，v_z空間を考えた時，vが$v\sim v + dv$に入る粒子の数は，この座標空間の$v\sim v + dv$の球殻の体積，$\boxed{\text{（コ）}}$ に比例する．今，規格化定数をBとすると，同様に因子$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$を用いることで速度分布関数$f(v)$は，

$f(v) =$ $\boxed{\text{（サ）}}$

と表される．次式の規格化がなされているとすると，

$$\int_{0}^{\infty} f(v) dv = 1$$

規格化定数Bは，

$B =$ $\boxed{\text{（シ）}}$

と求められる．そして，$Nf(v)dv$が個数分布になる．

問 3　問 2 で求めた$f(v)$が最大になる速さを最確速度v_{mp}という．v_{mp}を，この気体の 1 モルの質量M，気体定数R及びTを用いて表しなさい．

専門用語の英訳

理想気体	ideal gas
弾性衝突	elastic collision
平方 2 乗平均速度	root mean square speed
状態方程式	equation of state
気体定数	gas constant
気体分子運動論	kinetic theory of gases
ボルツマン定数	Boltzmann constant
速度分布関数	speed distribution function
規格化	normalization
最確速度	most probable speed

【電磁気工学1】 解答は，黄色の解答用紙に記入すること.

以下の文章の(ア)ー（カ）について選択肢の中から正しい語句を選択し，また（a）ー（n）にあてはまる適当な文字式を入れよ.

プラズマ中の $\boxed{\text{（ア）　電子，イオン}}$ が変位した場合,一様に分布する $\boxed{\text{（イ）　電子，イオン}}$ との間で $\boxed{\text{（ア）}}$ を引き戻してプラズマの電気的中性を保とうとする．$\boxed{\text{（ア）}}$ はその慣性のため,ある平衡位置を中心とする振動を行う．この振動が速いため，$\boxed{\text{（イ）}}$ はその運動についていけず動かないと考えられる．簡単のために,熱運動や磁場はなく,無限に大きなプラズマを仮定したとき，$\boxed{\text{（ア）}}$ の運動方程式は速度 $\boldsymbol{v}_e$, 質量 m, 数密度 n_e, 素電荷 e, 電場 $\boldsymbol{E}$ として,

$$mn_e\left[\boxed{\text{(a)}}+\boxed{\text{(b)}}\right] = -en_e\boldsymbol{E} \qquad (1)$$

となる．また,連続方程式およびポアソン方程式はそれぞれ,

$$\boxed{\text{(c)}}+\boxed{\text{(d)}} = 0 \qquad (2)$$

$$\varepsilon_0\boxed{\text{(e)}} = e(n_i-n_e) \qquad (3)$$

で表される．ここで，ε_0は真空中の誘電率，n_i は $\boxed{\text{（イ）}}$ の数密度である．この(1)ー(3)式を用いてプラズマの角周波数 ω_p を求めることができる.

まず，$\boxed{\text{（ア）}}$ の数密度と速度,電場をそれぞれ平衡項と摂動項の足し合わせと考え， $n_e=n_{e0}+n_{e1}$, $\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{e0}+\boldsymbol{v}_{e1}$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1$ を(1)ー(3)式に代入する．添字の 0，1 はそれぞれ平衡項，摂動項を示す．平衡項の条件（ここでは変位前の静止状態プラズマの条件） $\nabla n_{e0}=0$, $\boldsymbol{v}_{e0}=\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}$ および $\dfrac{\partial n_{e0}}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_{e0}}{\partial t}=\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial t}=\boldsymbol{0}$ を考慮すると，(1)ー(3)式は次式のように簡略化できる. ただし, (3)式における $\boxed{\text{（イ）}}$ 数密度 n_i については $\boxed{\text{（ア）}}$ と同様に平衡項 n_{i0} と摂動項 n_{i1} を考えたとき, 仮定より $\boxed{\text{（ウ）} \; n_{i0}-n_{e0}=0, \quad n_{i1}-n_{e1}=0}$，$\boxed{\text{（エ）} \; n_{i1}=0, \quad n_{e1}=0}$ である.

$$m\left[\boxed{\text{(f)}}\right] = -e\boldsymbol{E}_1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t}+\boxed{\text{(g)}} = 0 \qquad (5)$$

$$\boxed{\text{(h)}} = -en_{e1} \qquad (6)$$

さらに，摂動量（摂動項）は x 方向にのみ正弦的に振動すると仮定して $\mathbf{v}_{e1}$，n_{e1}，$\boldsymbol{E}_1$ をそれぞれ

$v_{e1}e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{x}$，$n_{e1}e^{i(kx-\omega t)}$，$E_1e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{x}$（$\mathbf{x}$ は単位ベクトル）とすると, これらの式は，$\dfrac{\partial}{\partial t}$ を $-i\omega$（ω は角周波数），

∇ を $ik\mathbf{x}$（k は波数）とおいて書き換えることができる.

このとき, $|v_{e1}|$ は小さく, 振幅に関する２次の項は無視できるものとすると, (4)式は,

$$\boxed{\text{(i)}} = -eE_1 \tag{7}$$

と簡略化でき, 同様に(5)式についても簡略化して(8)式を得る.

$$-i\omega n_{e1} = \boxed{\text{(j)}} \tag{8}$$

(6)式は(9)式に書き換えられる.

$$\boxed{\text{(k)}} = -en_{e1} \tag{9}$$

(8)，(9)式より n_{e1} を消去して得られた E_1 を(7)式に代入することで ω_p が得られる.

$$\omega_p = \boxed{\text{(l)}} \tag{10}$$

このようなプラズマ中を, 角周波数 ω_L のレーザー光が $\boxed{\text{（ア）}}$ を振動させながら伝搬する場合を考える．このとき, ω_L と ω_p との間には, 光の速度を c として,

$$\omega_L^2 = \boxed{\text{(m)}} \tag{11}$$

で表される分散関係があるので，レーザー光のプラズマ中での屈折率 N は ω_p，ω_L を用いて,

$$N = \boxed{\text{(n)}} \tag{12}$$

で表すことができる. $\omega_p < \omega_L$ である場合，この値は 1 より小さくなる. このことは, プラズマ中の電磁波（レーザー光）の $\boxed{\text{（オ）　群速度，位相速度}}$ が光速よりも $\boxed{\text{（カ）　遅い，速い}}$ ことを意味している.

専門用語の英訳

慣性	inertia
運動方程式	equation of motion
素電荷	elementary electric charge
連続方程式	equation of continuity
ポアソン方程式	Poisson equation
平衡項	equilibrium part
摂動項	perturbation part
正弦的	sinusoidal
プラズマの角周波数	plasma angular frequency
分散	dispersion
屈折率	refractive index
群速度	group velocity
位相速度	phase velocity

【電磁気工学2】 解答は，水色（3 番）の解答用紙に記入すること.

問１～問３に答えなさい.

問１　以下の文章中の空欄(ア)～(ウ)に適切な語句を記入せよ．また，(a) ～ (e) に適切な文字式を記入せよ.

プラズマ中での荷電粒子は電磁場によって加速されるが，他の粒子との衝突により運動量を失うので，平均的に見てある一定の速さで流れていく．一方，圧力勾配があると，圧力の高い方から低い方へプラズマは流れる．一様電磁場 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 中の定常状態での粒子の運動方程式は，以下の様に表される.

$$q_s n_s(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}_s\times\boldsymbol{B})-\nabla p_s-m_s n_s \nu_s \boldsymbol{V}_s=0 \tag{1}$$

ここで，n は数密度，q は粒子の電荷，m は質量，$\boldsymbol{V}$ は速度，ν は衝突周波数，p は圧力である．s は粒子を区別する指標である．圧力に対しては，絶対温度 T とボルツマン定数 k_B を用いて $p_s=n_s k_B T_s$ 　が成り立つとする.

磁場に平行な成分に対しては,

$$q_s n_s E_{//}-(\nabla p_s)_{//}-m_s n_s \nu_s \boldsymbol{V}_{s,//}=0 \tag{2}$$

より,

$$\boldsymbol{V}_{s,//}=\pm\mu_s E_{//}-D_s\frac{(\nabla n_s)_{//}}{n_s} \tag{3}$$

（以下，複号は粒子の電荷が正の場合は上の符号を，負の場合は下の符号を取るものとする.）

$$\mu_s=\boxed{\quad(\mathrm{a})\quad} \tag{4}$$

$$D_s=\boxed{\quad(\mathrm{b})\quad} \tag{5}$$

となる．ここで，μ_s は $\boxed{（ア）}$ と呼ばれ，D_s は拡散係数と呼ばれる.

磁場に垂直な成分に対しては,

$$q_s n_s(\boldsymbol{E}_\perp+\boldsymbol{V}_{s,\perp}\times\boldsymbol{B})-(\nabla p_s)_\perp-m_s n_s \nu_s \boldsymbol{V}_{s,\perp}=0 \tag{6}$$

となる.

磁場に垂直な面を x,y 平面とすると,

$$q_s n_s (E_x + V_{s,y} B) - k_B T_s \left(\nabla n_s\right)_x - m_s n_s \nu_s V_{s,x} = 0$$

$$q_s n_s (E_y - V_{s,x} B) - k_B T_s \left(\nabla n_s\right)_y - m_s n_s \nu_s V_{s,y} = 0 \tag{7}$$

となり，μ_s 並びに D_s を用いて書き直すと，

$$\boldsymbol{V}_{s,x} = \pm\mu_s (E_x + \boldsymbol{V}_{s,y} B) - \frac{D_s}{n_s}\frac{\partial n_s}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{V}_{s,y} = \pm\mu_s (E_y - \boldsymbol{V}_{s,x} B) - \frac{D_s}{n_s}\frac{\partial n_s}{\partial y} \tag{8}$$

となる．これを解いて，

$$\boldsymbol{V}_{s,x}(1+\mu_s{}^2 B^2) = \pm\mu_s E_x - \frac{D_s}{n_s}\frac{\partial n_s}{\partial x} + \mu_s{}^2 E_y B \mp \frac{D_s \mu_s}{n_s}\frac{\partial n_s}{\partial y} B$$

$$\boldsymbol{V}_{s,y}(1+\mu_s{}^2 B^2) = \boxed{\quad\text{(c)}\quad} \tag{9}$$

が得られる．これを，

$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度：　$\boldsymbol{V}_{s,E} = \boxed{\text{(d)}}$ ，　(10)

$\boxed{\text{(イ)}}$ ドリフト速度：　$\boldsymbol{V}_{s,D} = -\dfrac{\nabla p_s \times \boldsymbol{B}}{q_s n_s B^2} = -\dfrac{k_B T \nabla n_s \times \boldsymbol{B}}{q_s n_s B^2}$ ，　(11)

$\boxed{\quad\text{(ウ)}\quad}$ ：　$\omega_{s,c} = \dfrac{|q_s| B}{m_s}$　(12)

並びに，$\tau_s = 1/\nu_s$　を用いて整理すると，

$$\boldsymbol{V}_{s,\perp} = \frac{\pm\mu_s}{1+\omega_{s,c}^2 \tau_s{}^2}\boldsymbol{E}_\perp - \frac{D_s}{1+\omega_{s,c}^2 \tau_s{}^2}\frac{\left(\nabla n_s\right)_\perp}{n_s} + \boxed{\quad\text{(e)}\quad} \tag{13}$$

と書ける．この式をみると，$\omega_{s,c}^2 \tau^2 >> 1$ の時，磁場に垂直な拡散が大きく妨げられることが分かる．

問 2　上記 式(5) 並びに(13)より，通常拡散係数は衝突周波数 ν_s に反比例するが，強い磁場のある場合（$\omega_{s,c}^2 \tau_s{}^2 >> 1$）には，磁場を横切る方向の拡散係数が ν_s に比例することを示し，その物理的理由を説明せよ．

問 3　上記 式(3) を参考にし，電子（$s=\mathrm{e}$, $q_\mathrm{e} = -e$（e は素電荷））と一種類のイオン（$s=\mathrm{i}$, $q_\mathrm{i} = ze$）が存在する場合の両極性拡散係数の式を $en_\mathrm{e}\boldsymbol{V}_\mathrm{e} = zen_\mathrm{i}\boldsymbol{V}_\mathrm{i}$ を用いて導出せよ．但し，z はイオンの価数で，$n_\mathrm{e} = zn_\mathrm{i}$　である．磁場はないものとする．

専門用語の英訳

荷電粒子	charged particle
運動量	momentum
圧力勾配	pressure gradient
定常状態	steady state
運動方程式	equation of motion
衝突周波数	collision frequency
ボルツマン定数	Boltzmann constant
複号	double sign / plus or minus
ドリフト速度	drift velocity
素電荷	elementary charge
両極性拡散係数	ambipolar diffusion coefficient

【量子電子物性1】 解答は，桃色（4 番）の解答用紙に記入すること.

金属中の自由電子に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，電子の静止質量 m，プランク定数 h または $\hbar$ とする．解答には，導出過程も示せ.

［Ⅰ］ 一辺の長さが L の立方体に閉じ込められた自由電子について考える．立方体の外側は無限大のポテンシャル障壁があるものとする．立方体の中には N 個（偶数）の電子が閉じ込められているが，相互作用は無視して良い.

問 1 シュレーディンガー方程式を解いて，(a) 自由電子の波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$，(b) エネルギー ε，(c) 規格化した波動関数 $\varphi(x, y, z)$ と (d) ド・ブロイ波長 λ_{D} をそれぞれ求めよ.

問 2 パウリの排他律とスピンの縮退を考慮して，低いエネルギー準位から順に 2 個ずつ電子を詰めたときに，N 個（偶数）の電子が全て詰まったときの波数（フェルミ波数）k_{F} と，そのときのフェルミエネルギー ε_{F} を，電子密度 $n_0 = N/L^3$ を用いて求めよ．ただし，立方体の一辺の長さ L は，フェルミ波長よりも十分長いとする．また，$k_{\mathrm{F}} = |\mathbf{k}_{\mathrm{F}}|$ である.

［Ⅱ］ 金属結晶中の自由電子は任意のエネルギーをとることができず，許されたエネルギー領域と禁じられたエネルギー領域がエネルギーバンド構造をつくる.

問 3 結晶中を伝搬する自由電子は，結晶格子面によりブラッグ反射を受ける．それが，エネルギー禁止帯（エネルギーギャップ）の原因となる．電子が結晶中でブラッグ反射されて，その波数ベクトルが逆格子ベクトル $\mathbf{G}$ だけ変化し，電子の波数ベクトル $\mathbf{k}$ が $\mathbf{k}'$ に変わったとする．このとき，$(\mathbf{k}+\mathbf{G})^2 = k^2$ の関係を満たすことを示せ．ただし，$k = |\mathbf{k}|$ である．なお，逆格子ベクトルは，ブラッグ反射により結晶から自由電子がもらう波数ベクトルである.

問 4 図 1-1 のように，波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持つ電子が外部から角度 θ で結晶に入射するとして，問 3 の結果から，ブラッグの回折条件が導かれることを示せ．ただし，逆格子ベクトル $\mathbf{G}$ は結晶面と垂直なので，結晶面の面間隔 d は，$G = |\mathbf{G}|$ とおくと，$G = 2\pi n/d$（n は正の整数）の関係にある.

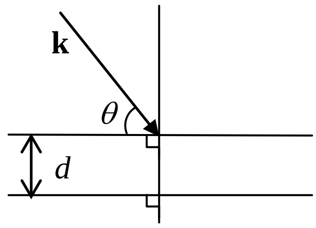

図 1-1 角度 θ の入射電子

問 5 問 3 で格子定数 a の一次元結晶中を x 方向に伝搬する自由電子について以下の問いに答えよ.

(1) $(\mathbf{k}+\mathbf{G})^2 = k^2$ の関係より，$k = \pm n\pi/a$（n は正の整数）となることを示せ.

(2) このとき，ブラッグ反射を受けた互いに逆方向に進行する二つの波は干渉して，二種類の定在波を形成する．n を 1 として，長さ a で規格化した定在波の波動関数 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ を求めよ.

(3) ブラッグの回折条件を満たす波は電子の確率密度に一様でない空間分布があり，二種類の定在波はその周期は同じだが電子が集まる場所が互いに異なる．他方，金属原子は自由電子を放出して正に帯電しているので，二種類の定在波の安定性に差ができる．このことを，ポテンシャルの空間分布と電子の確率密度の空間分布の図を描いて説明せよ.

【量子電子物性2】 解答は，緑色（5 番）の解答用紙に記入すること.

次の文章を読み，下記の問いに答えよ．

［Ｉ］　物質に外部から静電界を印加すると，物質を構成する正電荷の原子核と負電荷の電子が電界の力を受けてごくわずかだが変位して止まる．このようにして分極が起こる．物質を構成する原子は，正電荷 $+Ze$ の原子核とそれを雲のように取り巻く負電荷 $-Ze$ の電子雲から成っている（e は素電荷）．電子雲が変位することによって起こる分極を電子分極という．簡単のために，電子雲は半径 r_0 の球内に一様に分布しているとする．静電界を印加すると，電子雲が中心 O から O’ へ x だけ変位する．ガウスの法則から，半径 x の球内の電子雲は原子核に力を及ぼすが，その外側の電子分布は打ち消し合って，結局，原子核に力を及ぼさない．したがって，このときのクーロン力は，真空中の誘電率を ε_0 として，

$$F = [\quad (a) \quad]\ x \tag{1}$$

となり，変位 x に比例する．この力は，静電界による原子付近の局所電界を E_{loc} とすると，

$$F = -Ze\ E_{\mathrm{loc}} \tag{2}$$

に等しい．１個の原子に付随した双極子モーメント μ は

$$\mu = [\quad (b) \quad]\ x \tag{3}$$

であり，これらより，電子雲の変位による電子分極率 α_{e} は，

$$\alpha_{\mathrm{e}} = \frac{\mu}{E_{\mathrm{loc}}} = [\quad (c) \quad] \tag{4}$$

となり，原子半径が大きくなるにつれて大きくなることを示している．

この分極の交流電界に対する応答を考える．以下では，簡単のために $Z=1$ とし，質量 m，電荷 $-e$ をもった電子が，x 方向に角周波数 ω の交流電界 $E_1\exp(-i\omega t)$ を受け，同時に速度に比例する制動力 $-m\Gamma\dfrac{dx}{dt}$ と復元力 $-k_{\mathrm{e}}x$ が働いている場合を考える（Γ，k_{e} は定数）．

このとき，この電子の運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = [\quad (d) \quad] \tag{5}$$

で与えられる．ここで，質量 m，固有角周波数（共鳴角周波数）ω_0 を用いると，$k_{\mathrm{e}} = m\omega_0^2$ である．ここでの固有角周波数 ω_0 は，光の波長の［　①　］線領域にある．

$$\frac{d}{dt}\exp(-i\omega t) = -i\omega\ \exp(-i\omega t)$$

となることを考慮すると，(5)式の解は，

$$x = [\quad (e) \quad] \tag{6}$$

となる．この変位による双極子モーメント μ は，

$$\mu = \alpha_{\mathrm{e}}E_1\exp(-i\omega t) \tag{7}$$

で与えられ，この μ は (3)式と等しい．これらの式から，α_e は，

$$\alpha_e = [\quad (f) \quad] \qquad (8)$$

と求められる．

ここで，単位体積あたり N_j 個の原子による分極率を α_j とすると，クラウジウス・モゾッチの式は，比誘電率を κ として，

$$\frac{\kappa-1}{\kappa+2} = [\quad (g) \quad] \qquad (9)$$

である．ここで，N_e 個の電子が存在し，そのうちの $f_0 N_e$ 個だけが ω_0 の固有角周波数と制動力係数 Γ をもっているものとし，かつ，この分極はきわめて小さい（$\kappa-1 << 1$）とすると，

$$\kappa = 1+\alpha_e [\quad (h) \quad] \qquad (10)$$

となる．さらに，(8)式の α_e を代入すると，

$$\kappa = 1+ [\quad (i) \quad] \qquad (11)$$

となる．これより，この分極の交流電界に対する応答は，複素比誘電率 $\kappa = \kappa' + i\kappa''$ で表わされ，周波数依存性をもつ．このことを誘電［　②　］が存在するという．複素比誘電率の実部 κ'，虚部 κ'' の周波数依存性を，交流電界の角周波数 ω を横軸として固有角周波数 ω_0 の近傍について概略図を描くと，図 2-1 のようになる．

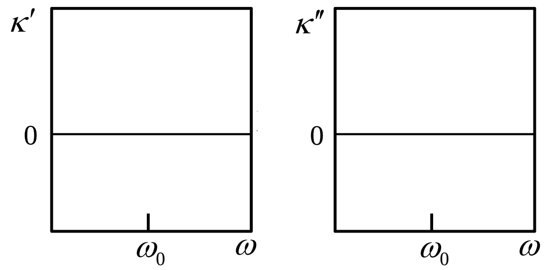

図 2-1 複素比誘電率の実部 κ'，虚部 κ'' の周波数依存性

［Ⅱ］ 異なる原子が結合して分子をつくるとき，分子内の電荷分布が非対称となることがあり，このとき双極子モーメントが生じる場合がある．この双極子モーメントは，電界がなくとも存在するので，［　③　］双極子と呼ばれ，これをもつ分子を［　④　］分子と呼び，水(H_2O)がその例である．［　③　］双極子をもたない分子を［　⑤　］分子と呼び，その例は CO_2 である．［　③　］双極子をもつ分子が回転することによって起こる分極を［　⑥　］分極という．

いま，簡単のために，外部電界に対して平行または反平行の２つの方向しか許されない相互作用のない双極子の系を考える．双極子モーメントの大きさが μ で，外部電界により誘起される局所電界を E_{loc} とすると，電界方向および反対方向を向いている双極子のポテンシャルエネルギーは，それぞれ，

$$W_p = [\quad (j) \quad] \qquad (12)$$

$$W_{ap} = [\quad (k) \quad] \qquad (13)$$

となる．それぞれの双極子の数を N_{p}，N_{ap} とし，全体の数を $N = N_{\mathrm{p}} + N_{\mathrm{ap}}$ とする．ボルツマンの分布則を考えると（ここで，絶対温度を T，ボルツマン定数を k_{B} とする），

$$\frac{N_{\mathrm{p}}}{N} = [\quad (\mathrm{l}) \quad] \tag{14}$$

$$\frac{N_{\mathrm{ap}}}{N} = [\quad (\mathrm{m}) \quad] \tag{15}$$

である．これより，電界方向の平均双極子モーメント $\langle \mu \rangle$ は，

$$\langle \mu \rangle = [\quad (\mathrm{n}) \quad] \frac{\mu}{N} \tag{16}$$

$$= [\quad (\mathrm{o}) \quad] \tag{17}$$

となる．特に，$\dfrac{\mu E_{\mathrm{loc}}}{k_{\mathrm{B}} T} << 1$ のときには，

$$\langle \mu \rangle = \frac{\mu^2 E_{\mathrm{loc}}}{k_{\mathrm{B}} T} \tag{18}$$

となる．このように，電界方向の平均双極子モーメントは温度 T に逆比例する．このため，誘電率は，温度に対して［　⑦　］比例することになる．

［Ⅲ］　強誘電体は，電界を印加しなくとも分極，つまり［　⑧　］を有している．物質が強誘電体の状態にあるときを［　⑨　］相にあるという．［　⑧　］を有さない通常の状態にあるときを［　⑩　］相にあるといい，このとき，帯電率（比電気感受率）χ の温度変化は［　⑪　］の法則に従う．式で示すと，

$$\chi = [\quad (\mathrm{p}) \quad] \tag{19}$$

である．

問 1　［ ① ］～［ ⑪ ］に語句，［ (a) ］～［ (o) ］に数式を入れて文章を完成させよ．

問 2　(p)の式を完成させよ．用いた定数には名前を付して定義せよ．

問 3　図 2-1 の概略図を交流電界の角周波数 ω を横軸として固有角周波数 ω_0 の近傍について描け．ただし，横軸には固有角周波数 ω_0 の位置を明記すること．

【量子電子物性3】 解答は，灰色（6 番）の解答用紙に記入すること．

次の文章を読み，下記の問いに答えよ．なお，必要ならば，素電荷を $e = 1.6\times10^{-19}$ C，電子の静止質量を $m = 9.1\times10^{-31}$ kg，ボルツマン定数を $k_B = 1.4\times10^{-23}$ J/K として，解答は，端数を四捨五入し有効数字 2 桁まで求めよ．得られた数値には単位を示せ．

［Ｉ］ 固体中のキャリアに密度勾配があると，密度の高いところから低いところへ，キャリアはブラウン運動をしながら流れる．これをキャリアの［ ① ］といい，このキャリアの動きによって生じる電流は［ ② ］と呼ばれる．キャリアとしての電子の密度 n に x 方向の勾配 $\dfrac{\partial n}{\partial x}$ があるとき，x 方向に垂直な単位面積を通って単位時間当たりに流れる電子の数は，密度勾配に比例する．そのときの比例係数を D_e とすると，流れる電子の数は［ ③ ］となる．この比例係数 D_e は［ ④ ］と呼ばれ，キャリアの密度勾配により流れる電流密度 J_{ed} は，

$$J_{ed} = [\quad ⑤ \quad] \tag{1}$$

で与えられる．

上記の状態に加えて同時に x 方向に電界 E_x を印加した場合には, 電子の密度, 移動度をそれぞれ n，μ_e とすると，単位時間当たりの x 方向の電子の流れによる電流密度 J_e は,

$$J_e = [\quad ⑥ \quad] \tag{2}$$

と表わされる．

キャリアとしての正孔に対しても同様に，x 方向に密度勾配があり，かつ，x 方向に電界 E_x が印加されている場合，正孔の密度と移動度をそれぞれ p，μ_h とし，正孔の流れによる電流密度を J_h とすると，比例係数 D_h を用いて正孔電流に対する関係式

$$J_h = [\quad ⑦ \quad] \tag{3}$$

が得られる．

［Ⅱ］ 一方，x 方向に電子の密度勾配があり，外部から電界を印加しない状態を考えると，電子は移動して平衡状態に達すると電流は流れなくなる．このとき，電子の流れに抗するような電界 E_x が生じ，(2)式で与えられる関係式は $J_e = 0$ となる．

このとき，誘起された電界に付随する位置 x でのポテンシャルを $\phi(x)$ とすると，電界 E_x と $\phi(x)$ のあいだには,

$$E_x = [\quad ⑧ \quad] \tag{4}$$

の関係が存在する．電子のポテンシャルエネルギーは $-e\phi(x)$ と表わすことができるので，$\phi(x) = 0$ における電子の密度を n_0 とすると，絶対温度 T における電子の密度 n は,

$$n \ = \ n_0 \exp\left(\frac{e\phi(x)}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \tag{5}$$

で与えられる．この両辺を x で微分すると，

$$\frac{\partial n}{\partial x} \ = \ [\qquad ⑨ \qquad] \tag{6}$$

が得られる．これらから，比例係数 D_{e} と電子の移動度 μ_{e} のあいだには，

$$\frac{D_{\mathrm{e}}}{\mu_{\mathrm{e}}} \ = \ [\qquad ⑩ \qquad] \tag{7}$$

の関係式が得られる．これは［　　　⑪　　　］の関係式と呼ばれる．

［Ⅲ］　n 型半導体において，光照射によって，単位時間に単位体積あたり G 個の電子－正孔対がつくられるものとする．光照射によりつくられた余剰の電子密度 Δn は，多数キャリアとして存在する電子に比べて小さいので，キャリア密度に及ぼす光照射の影響は少ない．しかしながら，少数キャリアである正孔の密度は光照射により大きな影響を受ける．すなわち，余剰の正孔密度 Δp は，正孔の寿命を τ_{h} とすると，

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} \ = \ [\qquad ⑫ \qquad] \tag{8}$$

の関係を満たす．十分に時間が経過し平衡状態になったあとに光照射を止めると，$G=0$ となるから，光照射を停止した時点（$t=0$）における余剰の正孔密度を Δp_0 とすると，Δp は，

$$\Delta p \ = \ [\qquad ⑬ \qquad] \tag{9}$$

のような時間依存性を示す．

次に，固体中に空間電荷密度 ρ_{S} で表わされる x 方向にのみ勾配がある電荷分布があり，電流密度 J_x の電流が流れるものとする．電荷の蓄積がなければ，電流連続の式から，電流密度 J_x と ρ_{S} のあいだには，

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{S}}}{\partial t} \ = \ [\qquad ⑭ \qquad] \tag{10}$$

の関係が成立する．

ここで，光照射により余剰キャリアがつくられた場合の余剰キャリアの時間変化は，(10)式の電流連続の式を考慮しなければならない．余剰キャリアが正孔の場合について考えると，正孔の密度を p とすると $\rho_{\mathrm{S}}=ep$ であるから，正孔の密度勾配および電界により生じる電流密度 J_{h} と p の関係は，平衡状態における正孔の密度を p_0 として，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [\quad ⑮ \quad] \tag{11}$$

となる．さらに，(3)式を用いると，(11)式は，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = [\quad ⑯ \quad] \tag{12}$$

で表わされる．

いま，(12)式における電界による項の寄与が小さく，キャリアの密度勾配による項が支配的である場合を考えると，定常状態（$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$）における正孔の密度は，

$$p - p_0 = A\ \exp\left(-\frac{x}{L_\mathrm{h}}\right) \tag{13}$$

と求められる．ここで，A は定数であり，L_h は，D_h と τ_h を用いて，

$$L_\mathrm{h} = [\quad ⑰ \quad] \tag{14}$$

と表わされる．L_h は，[　⑱　] と呼ばれるもので，電子に対しても同様に定義される．

問 1　文章中の空欄 [①] ～ [⑱] にあてはまる語句または数式を答えよ．

問 2　キャリアとしての正孔密度に勾配がある半導体において，絶対温度 $T = 300$ K における正孔の移動度，寿命を，それぞれ，$\mu_\mathrm{h} = 0.1\ \mathrm{m^2/(Vs)}$，$\tau_\mathrm{h} = 0.1$ ms とするとき，D_h と L_h を求めよ．

問 3　絶対温度 $T = 300$ K における電気伝導度 $\sigma = 2.0\ /(\Omega\mathrm{m})$ の真性半導体がある．電子と正孔の移動度を測定すると，それぞれ，$\mu_\mathrm{e} = 0.4\ \mathrm{m^2/(Vs)}$，$\mu_\mathrm{h} = 0.2\ \mathrm{m^2/(Vs)}$ であった．この半導体の真性キャリア密度 n_i を求めよ．

【量子電子物性4】 解答は，だいだい色（7 番）の解答用紙に記入すること.

npn 接合トランジスタに関する以下の問いに答えよ.

問 1　図 4-1 の npn 接合トランジスタを活性領域で動作させるように，直流バイアス電圧を印加したベース接地回路を図示せよ（電池の記号を用いること）. なお，図にはベース，エミッタ，コレクタ領域を示し，各接続端子に流れる電流（ベース電流 I_B，エミッタ電流 I_E，コレクタ電流 I_C）の向きも示すこと.

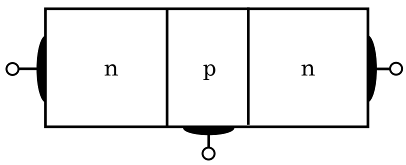

図 4-1　npn 接合トランジスタ

問 2　トランジスタの無バイアス状態（熱平衡状態），および問 1 のバイアス電圧印加状態のエネルギーバンド図を，ベース，エミッタ，コレクタ領域を示して図示せよ．ただし簡単のため，半導体は全てホモ接合とする．なお，無バイアス状態のバンド図には，フェルミ準位も示すこと.

問 3　問 1 のバイアス電圧を加えたときの，各領域および接合界面でのキャリアの振る舞いを述べたうえで，このトランジスタの動作原理を 100 字以上の文章で説明せよ.

問 4　問 1 のバイアス電圧を印加したとき，ベース領域内での電子密度勾配はどのように近似できるか，導出過程とともに示せ．ただし，ベース領域内での電子と正孔の再結合は無視できるとする．また，エミッターベース間のバイアス電圧を V_{EB}，ベース領域の幅を W_B，無バイアス時の熱平衡状態でのベース領域内の電子密度を n_B とし，他に必要な物理定数やパラメータは定義したうえで用いること.

問 5　トランジスタの特性パラメータに関する以下の問いに答えよ.

(1) I_B，I_E，I_C の中から必要なものを用いて，ベース接地電流増幅率 α_0 およびエミッタ接地電流増幅率 γ_0 を式で表わせ.

(2) γ_0 は α_0 を用いてどのように表わされるか示せ．ただし，I_B，I_E，I_C は用いないこと.

(3) 一般的なトランジスタの α_0 の数値はどの程度になるか答えよ.

【制御工学１】 解答は，白色 (8 番) の解答用紙に記入すること．

図１のブロック線図で表わされるシステムについて以下の問いに答えよ．ただし，K，a，b はいずれも定数である．なお，$R(s)$, $C(s)$, $X_1(s)$, $X_2(s)$, $X_3(s)$, $X_4(s)$ はそれぞれ時間関数 $r(t)$, $c(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ のラプラス変換を表わす．

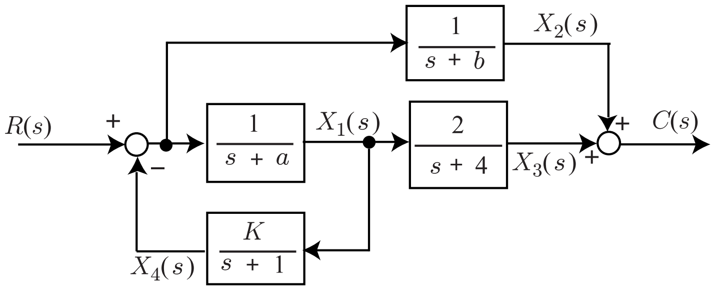

図１

(i) 入力 $R(s)$ から出力 $C(s)$ までの伝達関数を答えよ．

(ii) 単位ステップ入力時の出力の収束値 $\lim_{t\to\infty} c(t)$ を答えよ．なお，システムは安定であるとする．

(iii) $K=1$, $a=1$, $b=2$ のときのインパルス応答 $c(t)$ を求め，その概形を描け．

(iv) ゲイン余裕，位相余裕について説明せよ．

(v) $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ を状態変数，$r(t)$ を入力変数，$c(t)$ を出力変数としたときの状態方程式ならびに出力方程式を答えよ．

(vi) $a=b$ のときのシステムの可制御性を判別せよ．

(vii) システムの極が -10, -4, $-2\pm j3$ であった．K，a，b の値を答えよ．なお，j は虚数単位を表わす．

(viii) $r(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) - k_3x_3(t) - k_4x_4(t)$ とする状態フィードバックシステムの極が指定されたときのフィードバックゲインを求める手順を示せ．なお，図１のシステムは可制御であるとする．

専門用語の英訳

制御工学１

ブロック線図	block diagram
ラプラス変換	Laplace transform
伝達関数	transfer function
単位ステップ入力	unit step input
安定である	stable
インパルス応答	impulse response
ゲイン余裕	gain margin
位相余裕	phase margin
状態変数	state variable
入力変数	input variable
出力変数	output variable
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
可制御	controllable
極	pole
フィードバック	feedback

【制御工学２】 解答は，赤色（９番）の解答用紙に記入すること．

以下の問いに答えよ．

(i) トルク T で駆動される慣性モーメント J，摩擦係数 B の回転体の振る舞いを表す運動方程式は，次式で表わされる．

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+B\frac{d\theta}{dt}=T$$

ただし，θ は回転角である．トルク T を入力，回転角 θ を出力とする伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

(ii) 問 (i) で求めた伝達関数 $G(s)$ のボード線図を描け．ただし，折点周波数等の特徴的な値を明示すること．ゲイン特性は折れ線近似でも良い．

(iii) 図１に示す理想オペアンプを用いた補償器において，入力 e_i，出力 e_o に対する伝達関数 $H(s)$ を求めよ．ただし，ゲイン A のオペアンプが出力する電圧 v_{out} は，$+$,$-$ 端子それぞれに印加された電圧 v_{in+}, v_{in-} に対して $v_{out}=A(v_{in+}-v_{in-})$ のように与えられる．また，理想オペアンプのゲインと入力インピーダンスは無限大であるが，出力は有限である．

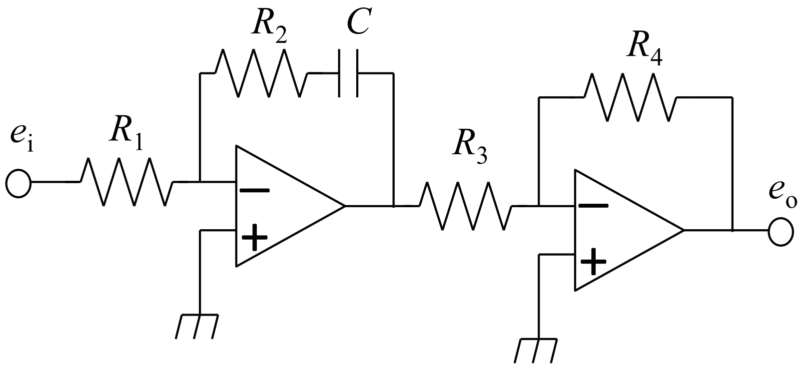

図１

(iv) 問 (i) の回転体と，問 (iii) の補償器を用いた，図２のブロック線図で表されるフィードバックによるサーボシステムを考える．このシステムの一巡伝達関数を求めよ．ただし $G(s)$, $H(s)$ は，それぞれ問 (i)，(iii) で求めたものを用いて示せ．

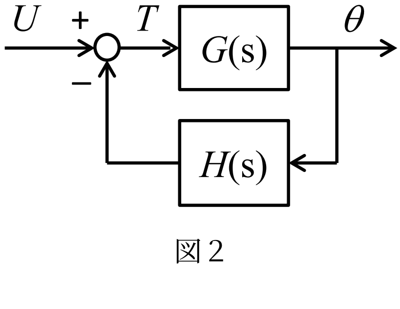

図２

(v) 問 (iv) のサーボシステムにおいて，与えられた回転体の J, B および補償器の R_1, R_3, R_4 の値に対して，システムを安定とする C と R_2 の条件を求めよ．

専門用語の英訳

制御工学２

運動方程式	equation of motion
伝達関数	transfer function
理想オペアンプ	ideal operational amplifier
ボード線図	Bode plot
折点周波数	corner frequency
折れ線近似	piecewise linear approximation
ブロック線図	block diagram
一巡伝達関数	open loop transfer function
安定	stable