2009 年３月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

真空中に置かれた点電荷に関する以下の問に答えよ．

（１） Fig. 1(a)に示すように，原点 O からの距離が d, $2d$, $3d$ である x 軸上の点 A, B, C に，それぞれ点電荷 Q_A, Q_B, Q_C が固定して置かれている．なお，点電荷は $Q_A > Q_B > Q_C > 0$ を満たしているものとする．

(a) 原点 O での電界と電位を求めよ．

(b) 点電荷 Q_A 及び Q_B に働くクーロン力の方向と大きさを求めよ．

(c) 点電荷 Q_A 及び Q_C を固定したまま，点電荷 Q_B を x 軸上で $d < x < 3d$ の範囲で自由に動けるようにしたとき，Q_B に働くクーロン力が釣り合ってゼロになる位置 x を求めよ．

（２） Fig. 1(b)に示すように，原点 O から距離 d, $2d$ の位置 A, B に，それぞれ点電荷 Q_A, Q_B が固定して置かれており，さらに原点 O から距離 $3d$ の位置 C に，無限に広く無視できるほど薄い接地された導体平面板が x 軸に対して垂直に置かれている．なお，点電荷は$Q_A > Q_B > 0$を満たしているものとする．

(a) 導体平面上の点 $P(3d, y, z)$ における電界及び面電荷密度を求めよ．

(b) 点電荷 Q_A 及び Q_B に働くクーロン力の方向と大きさを求めよ．

Answer the following questions on point charges placed in vacuum.

（１） The point charges Q_A, Q_B, and Q_C are fixed at the positions A, B, and C on the x-axis, whose distances from the origin O are d, $2d$, and $3d$, respectively, as shown in Fig. 1(a). The point charges satisfy the condition of $Q_A > Q_B > Q_C > 0$.

(a) Calculate the electric field and potential at the origin O.

(b) Calculate the direction and the magnitude of the Coulomb force acting on the point charges Q_A and Q_B.

(c) When the point charge Q_B can freely move along the x-axis in the range $d < x < 3d$, keeping the point charges Q_A and Q_C fixed, calculate the position x at which the Coulomb force acting on Q_B is in equilibrium and becomes zero.

（２） The point charges Q_A and Q_B are fixed at the positions A and B whose distances from the origin O are d and $2d$, respectively, and the infinitely-large and negligibly-thin grounded conducting plate is placed perpendicular to the x-axis at the position C whose distance from the origin O is $3d$ as shown in Fig. 1(b). The point charges satisfy the condition of $Q_A > Q_B > 0$.

(a) Calculate the electric field and the surface charge density at the position $P(3d, y, z)$ on the conducting plate.

(b) Calculate the direction and the magnitude of the Coulomb force acting on the point charges Q_A and Q_B.

2009 年３月実施
問題１　電磁気学
（２頁目／２頁中）

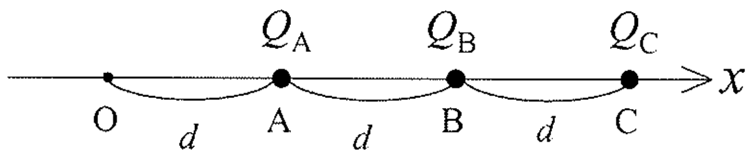

Fig. 1(a)

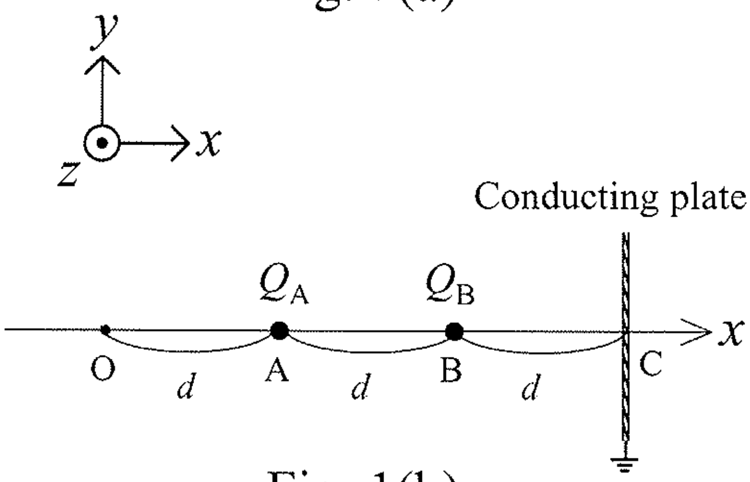

Fig. 1(b)

2009年3月実施
問題2　電気回路
（1頁目／1頁中）

Fig. 2 (a) ~ (c) に示す回路について次の問に答えよ.

(1) Fig. 2 (a)と Fig. 2 (b)の回路が等価となるようにインピーダンス Z_1, Z_2, および Z_3を定めよ.

(2) Fig. 2 (c)のブリッジ回路において，電圧源 E の角周波数をωとする．この回路において検流計 G に電流が流れなくなる平衡条件を求め，それがωに依らないことを示せ.

Answer the following questions about the circuits shown in Figs. 2 (a)~(c).

(1) Determine the impedances Z_1, Z_2, and Z_3 so that the circuits in Figs. 2 (a) and (b) are equivalent.

(2) In the bridge circuit shown in Fig. 2(c), the angular frequency of the voltage source E is ω. Obtain the condition for balance when no current flows through the galvanometer G and show that the condition is independent of ω.

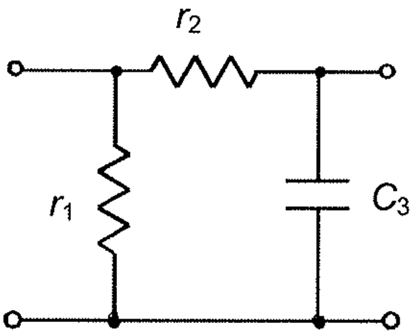

Fig. 2 (a)

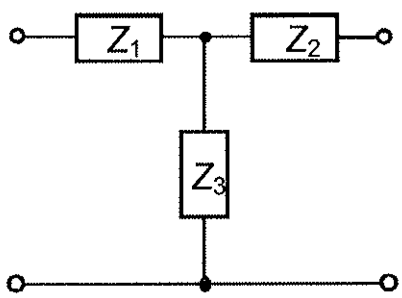

Fig. 2 (b)

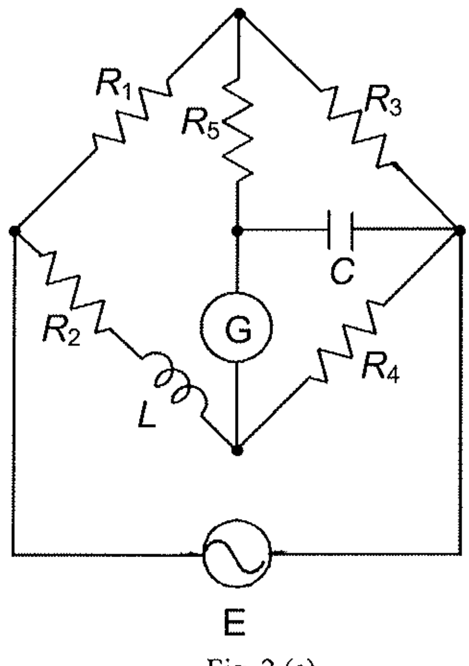

Fig. 2 (c)

2009年3月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／2頁中)

n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，n 個の整数 $w_1, w_2, \ldots, w_n$ と整数 t を用いて

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & (w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq t \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}), \end{cases} \tag{3A}$$

と表現できるとき，閾値関数(しきい値関数)と呼ばれる．

n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，任意の $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ に対して

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

を満たすとき，x_i において単調であると呼ばれる．ただし，不等号 $\leq$ は $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1$ と定義する．とくに，すべての変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ において単調である関数は，単調関数と呼ばれる．

(1) 以下のように与えられる3変数閾値関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ について考える．

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

この論理関数 f の論理和標準形(積和標準形，あるいは極小項展開)を書け．

(2) n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は式(3A)の形で与えられる閾値関数とする．各整数 w_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が非負ならば f は単調関数であることを証明せよ．

(3) n 変数閾値関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，n 変数論理関数 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

により定義する．ここで，$\overline{}$ は否定演算子を表す．このとき，g は閾値関数であることを証明せよ．

2009年3月実施
問題3 情報基礎1
(2頁目／2頁中)

An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is said to be a threshold function if it can be represented as

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & (\text{if } w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \geq t), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{3A}$$

by using n integers $w_1, w_2, \ldots, w_n$ and an integer t.

An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is said to be monotone in x_i if it satisfies

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

for any $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$, where the inequality $\leq$ is defined as $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1$. In particular, f is called a monotone function if it is monotone in each variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(1) Consider the 3-variable Boolean function $f(x_1, x_2, x_3)$ given by

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & (\text{if } 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 4), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Write the canonical disjunctive form (the canonical sum-of-products form, or the minterm expression) of the Boolean function f.

(2) Assume that the n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a threshold function of the form Eq. (3A). Prove that f is a monotone function if each integer w_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ is nonnegative.

(3) Given an n-variable threshold function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, define an n-variable Boolean function $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ by

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Here, $\overline{}$ denotes the NOT operator. Prove that g is a threshold function.

２００９年３月実施

問題４　情報基礎２
（１頁目／１頁中）

(1) 1 から $10n$ の範囲にある n 個の整数を昇順にソートする $O(n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．また，その計算時間は $O(n)$ であることを示せ．

(2) 1 から $10n^3$ の範囲にある n 個の整数を昇順にソートする $O(n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．また，その計算時間は $O(n)$ であることを示せ．（ヒント：整数の n 進数表現を考えよ．）

(1) Give an $O(n)$-time algorithm to sort, in non-decreasing order, n integers in the range of 1 to $10n$, and prove that its time-complexity is $O(n)$.

(2) Give an $O(n)$-time algorithm to sort, in non-decreasing order, n integers in the range of 1 to $10n^3$, and prove that its time-complexity is $O(n)$. (Hint: consider an n-ary representation of an integer.)

２００９年３月実施
問題５　物理基礎１

Fig.5 に示すように 2 つの座標系 z と z' を考える．z 系は静止系であり，z' 系は箱に固定され，z 系に対して相対運動する．z 軸，および z' 軸をそれぞれ図に示すように下向きにとる．z' 軸の原点は箱の天井にあり，z 系からみた箱の天井の座標は時刻 t に $z = z_0(t)$ にあるものとする．箱の天井から真下につるされたバネの下端に，質量 m の質点が付けられている．バネの自然長を ℓ，バネ定数を k，重力加速度を g とする．$\Omega \equiv \sqrt{k/m}$ とする．バネの質量は無視できるものとする．

$t \le 0$ のとき $z_0(t) = 0$ であり，質点は静止していた．箱の天井を小振幅 a，角周波数 ω で $z_0(t) = a(1-\cos\omega t)$ のように 1 周期 $0 \le t \le T$ $(\equiv 2\pi/\omega)$ の間，鉛直方向に運動させたところ，質点は上下振動を始め，$z_0(t) = 0$ とした $t \ge T$ においても振動は続いた．以下の問に答えよ．

(1) 静止時のバネの長さ L を求めよ．

(2) $0 \le t \le T$ において，z 系からみた質点の運動方程式を求めよ．

(3) $0 \le t \le T$ において，z' 系からみた質点の運動方程式を求めよ．

(4) $\omega \ne \Omega$ のとき，$0 \le t \le T$ における z' 系からみた質点の位置 $z'(t)$ を求めよ．

(5) $\omega \to \Omega$ の極限をとり，$\omega = \Omega$ のときの $0 \le t \le T$ における z' 系からみた質点の位置 $z'(t)$ を求めよ．

(6) $\omega = \Omega$ のとき，$t = T$ における質点の運動エネルギー W とバネのポテンシャルエネルギー U を求めよ．ただし，$t = 0$ のとき $U = 0$ とする．

(7) $\omega = \Omega$ のとき，$t \ge T$ における質点の振動の振幅 A を求め，z' 系からみた質点の位置 $z'(t)$ の時間変化を $t \ge 0$ に対して図示せよ．

必要があれば以下の近似を用いよ．

$$\cos(\theta + \varepsilon) \approx \cos\theta - \varepsilon \sin\theta \quad (\varepsilon \to 0),$$
$$\sin(\theta + \varepsilon) \approx \sin\theta + \varepsilon \cos\theta \quad (\varepsilon \to 0).$$

Consider a pair of frames of reference z and z' shown in Fig. 5. The frame z is at rest, and the frame z', tied to a box, moves relatively with respect to the frame z. The coordinate axes z and z' point downward as shown in the figure. The origin of the z' axis is at the ceiling of the box, and the position of the ceiling of the box is at $z = z_0(t)$ at time t in the frame z. A particle with mass m is attached to the lower end of a spring, hanging down from the ceiling of the box. The natural length of the spring is ℓ, the spring constant is k, and the acceleration of gravity is g. We define $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$. Neglect the weight of the spring.

For $t \leq 0$, $z_0(t) = 0$ and the particle was at rest. When the box was forced to move in the vertical direction as $z_0(t) = a(1-\cos\omega t)$ for one period $0 \leq t \leq T$ $(\equiv 2\pi/\omega)$ with a small amplitude a and an angular frequency ω, the particle started a vertical oscillation, which continued even when $z_0(t) = 0$ for $t \geq T$. Answer the following questions.

(1) Obtain the length L of the spring at rest.

(2) Obtain the equation of motion of the particle in the frame z for $0 \leq t \leq T$.

(3) Obtain the equation of motion of the particle in the frame z' for $0 \leq t \leq T$.

(4) For $\omega \neq \Omega$, obtain the particle position $z'(t)$ for $0 \leq t \leq T$.

(5) By taking the limit of $\omega \to \Omega$, obtain the particle position $z'(t)$ for $0 \leq t \leq T$ at $\omega = \Omega$.

(6) For $\omega = \Omega$, obtain the kinetic energy W of the particle and the potential energy U of the spring at $t = T$. Here, we define $U = 0$ at $t = 0$.

(7) For $\omega = \Omega$, obtain the amplitude A of the particle oscillation for $t \geq T$, and illustrate the time evolution of the particle position $z'(t)$ for $t \geq 0$.

If necessary, use the following approximations:

$$\cos(\theta+\varepsilon) \approx \cos\theta - \varepsilon\sin\theta \quad (\varepsilon \to 0),$$
$$\sin(\theta+\varepsilon) \approx \sin\theta + \varepsilon\cos\theta \quad (\varepsilon \to 0).$$

２００９年３月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

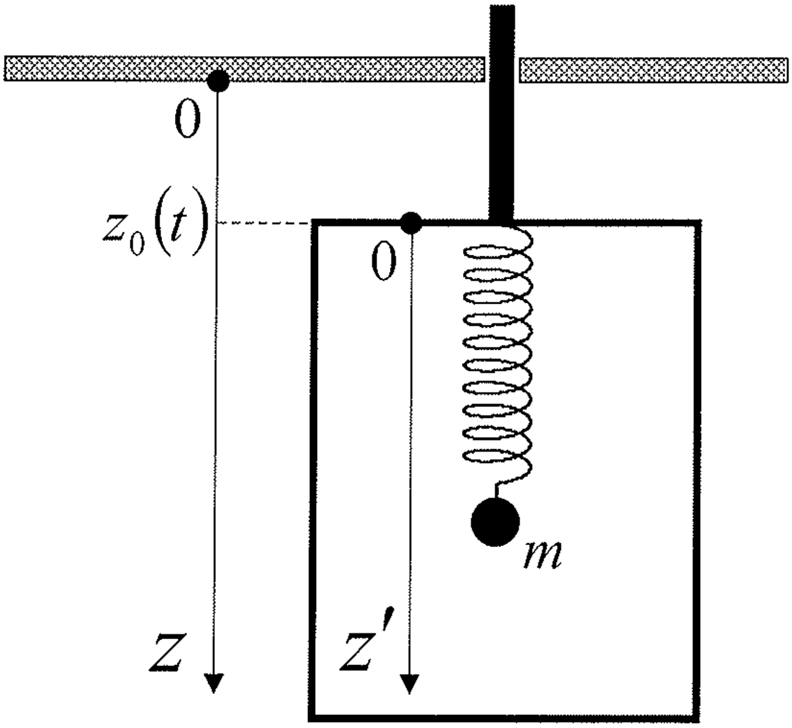

Fig. 5

２００９年３月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，$0<p<1$ とする．

(a) A の全ての固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(b) 任意の自然数 n に対して A^n を求めよ．

(c) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(a) B の全ての固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(b) B^5+B^4+B を計算せよ．

２００９年３月実施
問題６　物理基礎２

(1) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, where $0 < p < 1$. Answer the following questions.

(a) Find all the eigenvalues of A and their corresponding eigenvectors.

(b) Obtain A^n for any positive integer n.

(c) Obtain $\lim_{n \to \infty} A^n$.

(2) Consider the matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Answer the following questions.

(a) Find all the eigenvalues of B and their corresponding eigenvectors.

(b) Calculate B^5+B^4+B.