

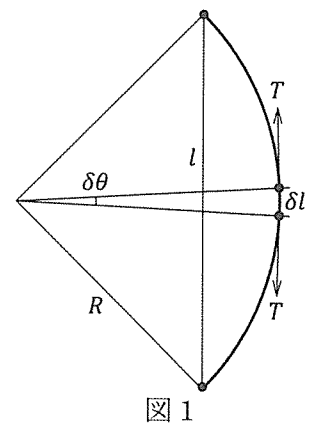
問題 1 1 材料物理 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

- (1) 常温常圧下で体心立方 (BCC) 構造を安定構造とする純金属の例として、鉄がある。その他の純金属の例を 2 つ挙げよ。
- (2) BCC 結晶の充填率を有効数字 2 桁で答えよ。計算手順も示すこと。
- (3) BCC 結晶のすべり変形では、すべり面は 3 種類ある。3 種類のすべり面のミラー指数と、各すべり面ごとにすべり系の数を答えよ。
- (4) BCC 結晶の低温における塑性変形でもっとも活性なすべり面は、3 種類のすべり面のうちのどれか答えよ。また、そのすべり面が活性となる理由を簡潔に説明せよ。

II 転位の増殖機構の 1 つにフランク・リード (F・R) 源がある。F・R 源を活動させるために必要な外部応力を求める。

F・R 源の固定点間の距離を  $l$  とする。はじめに直線だった転位が外部応力  $\tau$  の作用により張り出して半径  $R$  の円弧になったとする (図 1)。転位の中央部の線要素 (微小区間) の長さを  $\delta l$  とし、転位のバーガース・ベクトルを  $b$  とする。次の (1) ~ (7) の問いに答えよ。



- (1) 外部応力によって線要素に生じる力  $F_{\text{ext}}$  を、 $\tau$ 、 $b$ 、 $\delta l$  を用いて表せ。
- (2) 転位線が半径  $R$  の円弧になったとき、線要素  $\delta l$  の中心角  $\delta\theta$  を、 $R$  を用いて表せ。ここで  $\delta l$  は十分に小さいとする。
- (3) 線要素の両端には転位の線張力  $T$  がはたらく。F・R 源の固定点間の方向と線張力の方向のなす角を、 $\delta\theta$  を用いて表せ。
- (4) 線要素には、線張力  $T$  により円の中心方向へ戻ろうとする力 (転位を直線に戻そうとする力)  $F_{\text{back}}$  がはたらく。線要素の両端に張力  $T$  が作用することに注意して  $F_{\text{back}}$  を求めよ。
- (5) 転位を半径  $R$  の円弧の形に張り出ださせるのに必要な外部応力  $\tau$  を求めよ。
- (6) はじめに直線だった転位は、外部応力が増加するにつれて張り出し量が大きくなるが、張り出し量が一定値を超えると、さらに張り出させるのに必要な外部応力は減少する。すなわち、転位を張り出させるために必要な外部応力には最大値  $\tau_{\text{max}}$  が存在し、その値が F・R 源を活動させるのに必要な応力となる。 $R$  の変化に注意し、 $\tau_{\text{max}}$  を求めよ。
- (7) 転位の線張力  $T$  は単位長さあたりの転位のエネルギーであり、剛性率  $\mu$  を用いて近似的に  $T \simeq \mu b^2/2$  で表される。 $\tau_{\text{max}}$  を  $\mu$  を用いて表せ。

III 高純度、低転位密度の体心立方金属単結晶は、定歪速度で引張試験を行うと降伏後に変形応力の低下がみられることがある。変形応力が低下する理由を簡潔に説明せよ。

**問題 1 2 材料プロセス工学** 設問すべてについて解答すること。

I 材料製造プロセスにおいてはガスー固体間反応が主要な役割を占めることが多い。次の (1) ～ (3) の問いについて答えよ。

- (1) ガスー固体間反応は大きく分けて 2 つの反応様式がある。全域反応モデルと未反応核モデルについて説明せよ。
- (2) 空気気流中での黒鉛粒子の燃焼反応は未反応核モデルで表される。ガス境膜内拡散と化学反応のそれぞれの速度式が以下で与えられるとき、これらの式から混合律速の場合の速度式を導出せよ。

$$\text{ガス境膜内拡散: } -\frac{1}{S} \frac{dN_c}{dt} = k_g (C_{O_{2,g}} - C_{O_{2,s}}) \quad \text{化学反応: } -\frac{1}{S} \frac{dN_c}{dt} = k_c C_{O_{2,s}}$$

ここで、 $S$  は固体表面積、 $N_c$  は黒鉛粒子の炭素モル数、 $k_g$  は物質移動係数、 $k_c$  は化学反応速度定数、 $C_{O_{2,g}}$ 、 $C_{O_{2,s}}$  はそれぞれガス本体および固体表面の酸素モル濃度である。

- (3) 1000K で  $k_g = 8.0 \text{ cm/s}$ 、 $k_c = 0.5 \text{ cm/s}$ 、1050K で  $k_g = 8.8 \text{ cm/s}$ 、 $k_c = 2.0 \text{ cm/s}$  であった場合、反応の律速段階を答えよ。また、その場合の活性化エネルギーを求めよ。ただし、気体定数  $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ 、 $\ln 2 = 0.693$  とする。

II ある物質が初期量の 50% にまで減少するのに要する時間を半減期  $t_{1/2}$  という。また、初期量の 25% にまで減少する (75% が反応する) のに要する時間を  $t_{1/4}$  と定義する。 $(t_{1/4} - t_{1/2}) / t_{1/2} = 4$  の場合の反応次数を推定せよ。

III ごく一部の貴金属を除いて、ほとんどすべての金属および合金は大気中で、表面は薄い酸化皮膜に覆われている。温度を高くすると、酸化皮膜の厚さ  $x$  は増すが、酸化皮膜が緻密か否かで酸化進行の様子が異なり、温度一定では以下に示すような速度式にしたがって増加する。

直線則	$x = kt$
放物線則	$x^2 = kt$
3 乗則	$x^3 = kt$

ここで、 $k$  は速度定数、 $t$  は時間を表す。

等温下の Ni の酸化について得られたデータが、直線、放物線あるいは 3 乗の速度則のどれに適合するかを調べ、酸化皮膜 NiO の成長速度定数  $k$  を求めよ。ただし、NiO の密度は  $7 \text{ g/cm}^3$  であるとする。

時間(s)	酸化増量(mg/cm <sup>2</sup> )
$3.6 \times 10^3$	0.62
$7.2 \times 10^3$	0.89
$1.08 \times 10^4$	1.09
$1.44 \times 10^4$	1.26

**問題 13 量子力学** 設問すべてについて解答すること。

I 以下の (1)~(7) の問いに答えよ。

1 次元ポテンシャル  $V(x)$  中の質量  $m$  の粒子の運動を考える。座標を  $x$ , 時間を  $t$  とする。粒子の波動関数を  $\psi(x, t)$  とするとき, 粒子の存在確率密度は  $\rho(x, t) = \psi^* \psi = |\psi|^2$ , 確率密度の流れは  $j(x, t) = \frac{-i\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right)$  で与えられる。ここで,  $*$  は複素共役を表す。 $i$  は虚数単位,  $\hbar$  はプランク定数とする。また  $\hbar = h / (2\pi)$  である。

(1)  $\psi(x, t)$  の満たす時間に依存するシュレーディンガーの波動方程式, 及びその両辺の複素共役をとった方程式を, それぞれ書け。ここで, ポテンシャル  $V(x)$  は実関数であるとする。

(2)  $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$  を  $\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$  を用いて表せ。

(3) 上の (1) の波動方程式を用いて, (2)で求めた  $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$  から  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  と  $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$  を消去せよ。

(4) 上で与えられた確率密度の流れ  $j(x, t)$  を用いて,  $\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$  を計算せよ。

(5)  $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$  を計算せよ。

次に, 波動関数  $\psi(x, t)$  が与えられたときの確率密度の流れ  $j(x, t)$  を計算しよう。

(6) 質量  $m$  の粒子の波動関数  $\psi(x, t)$  が,  $V(x) = 0$  の領域で,

$$\psi(x, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})$$

と書くことができるとする。ここで,  $A$  と  $B$  は複素数の定数,  $E$  と  $k$  は, 粒子のエネルギーと波数である。この関数が時間に依存するシュレーディンガーの波動方程式の解となっていることを示し, 実数  $E$  の値を求めよ。

(7) 上の (6) の波動関数  $\psi(x, t)$  に対する確率密度の流れ  $j(x, t)$  を計算せよ。

II 以下の (1)～(6) の問いに答えよ。

1 次元調和振動子のポテンシャル  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  中の粒子の量子力学を考える。ここで  $x$  は 1 次元座標,  $m$  は粒子の質量,  $\omega$  は正の定数である。以下では,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  はプランク定数とする。

(1) エネルギー固有値が  $E$  であるエネルギー固有関数  $\psi(x)$  が満たす時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 関数  $\psi(x) = A \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right)$  が上で求めたシュレーディンガー方程式の解となるように, 正の定数  $\alpha$  とエネルギー固有値  $E$  を求めよ。ただし,  $A$  は正の定数とする。

(3) 上の (2) で求めたエネルギー固有関数  $\psi(x)$  を規格化して正の定数  $A$  を求めよ。

ここで, 必要ならば公式  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ,  $a > 0$  を用いよ。

以下では, 解答に  $A, \alpha, E$  を用いてはいけない。

(4) 粒子の存在確率密度  $|\psi(x)|^2$  を  $x$  の関数と考えて,  $|\psi(x)|^2$  の変曲点を求め,  $|\psi(x)|^2$  のグラフの概形を図示せよ。図には変曲点も示せ。ここで, 変曲点とは関数が上に凸から下に凸に変わる点, あるいはその逆の点のことである。

(5) この量子状態で位置の測定を行ったときの位置の期待値  $\langle x \rangle$  と  $x^2$  の期待値  $\langle x^2 \rangle$  を求めよ。

ここで, 必要ならば公式  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{a\sqrt{a}}$ ,  $a > 0$  を用いよ。

(6) 位置の不確定さ  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  を求めよ。

問題 1 4 電気回路・電子回路 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 は、2 つの電源から線路を介して負荷に電力を供給する回路であり、 $E_1$ 、 $E_2$  は交流電圧源の電圧、 $I_S$  は交流電流源の電流、 $R$  と  $X$  は、それぞれ線路の抵抗とリアクタンス、 $R_L$  と  $X_L$  は、それぞれ負荷の抵抗とリアクタンスである。 $E_1=30+j0$  [V]、 $E_2=10+j20$  [V]、 $R=8$  [ $\Omega$ ]、 $X=6$  [ $\Omega$ ]、 $X_L=2$  [ $\Omega$ ] であるとき、次の (1)、(2) の問いについて答えよ。

(1) 最初に、スイッチ  $S_2$  は a 側に接続されて交流電圧源が接続されている。

- ① スイッチ  $S_1$  が開かれているときの端子 1-1' 間の電圧  $V$  を求めよ。
- ② スイッチ  $S_1$  を閉じて負荷を接続した。 $R_L=6$  [ $\Omega$ ] であるときの負荷電流  $I_L$  と端子 1-1' 間の電圧  $V$  を求めよ。
- ③ 負荷の消費電力が最大になるように  $R_L$  を調整した。このときの  $R_L$  を求めよ。

(2) 次に、スイッチ  $S_2$  を b 側に接続して電源 2 として交流電流源を接続した。

- ① 端子 1-1' から左側を見たときのインピーダンス  $Z_{11'}$  を求めよ。
- ② スイッチ  $S_1$  を閉じて負荷を接続した。 $I_S=-j5$  [A]、 $R_L=6$  [ $\Omega$ ] であるときの負荷電流  $I_L$  と端子 1-1' 間の電圧  $V$  を求めよ。

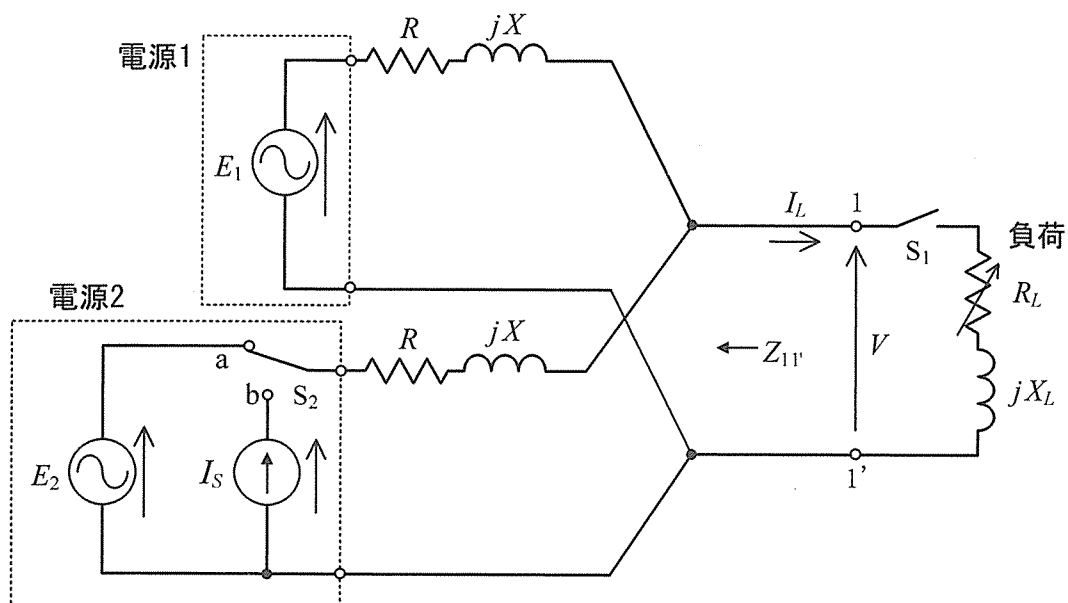


図 1

II 図2および図3はオペアンプを用いた正相増幅回路である。次の(1)～(4)の問いについて答えよ。なお、導出過程も示すこと。ただし、オペアンプの特性は、利得を  $\mu$  とし、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロとする。

- (1) 図2の回路において理想的な状態であるオペアンプの利得  $\mu$  が無限大のときの電圧増幅率  $V_2/V_1$  を求めよ。
- (2) 図2の回路においてオペアンプの利得  $\mu$  が有限である場合の電圧増幅率  $V_2/V_1$  をオペアンプの利得  $\mu$  を用いて求めよ。
- (3) (1)で求めた理想的な電圧増幅率を  $A_0$  とした時、(2)のオペアンプの利得  $\mu$  が有限である場合の電圧増幅率  $V_2/V_1$  を  $A_0$  およびオペアンプの利得  $\mu$  のみを用いて表せ。
- (4) オペアンプの入力インピーダンス  $R_i$  による影響を考えるために、オペアンプの入力端子間に抵抗  $R_i$  を挿入した図3の回路を考える。図3の回路において、オペアンプの利得  $\mu$  が有限である場合の電圧増幅率  $V_2/V_1$  をオペアンプの利得  $\mu$  を用いて

$$\frac{V_2}{V_1} = A_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu} \cdot A_2}$$

と表すことができる。このときの  $A_2$  をオペアンプの利得  $\mu$  を用いない式で求めよ。

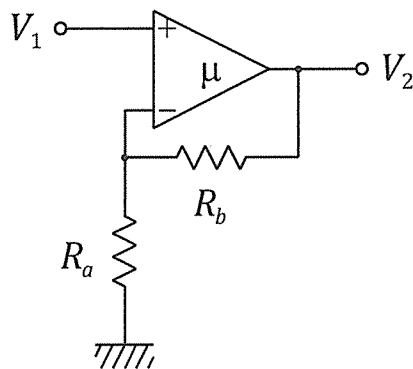


図2

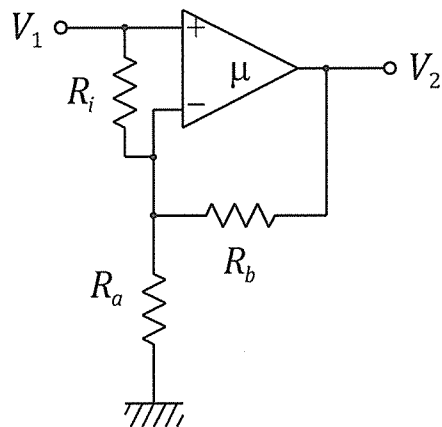


図3

問題 1 5 電磁気学 設問すべてについて解答すること。

- I 図 1 に示すように誘電率  $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  の 2 種類の誘電体が垂直平面を境にして接していて、その中に半径  $a$  の導体球が中心をこの境界面上に位置するように配置されている。導体球に電荷  $Q$  を与えたとき、電気力線は中心から放射線状に出ていて、両誘電体内に等方的な電界が生じているとする。
- (1) 両誘電体内の電界の大きさをそれぞれ  $E_1(r)$  及び  $E_2(r)$  としたとき、 $E_1(r) = E_2(r)$  が成り立ち、両誘電体間の境界条件及び導体面上での電位一定の条件を満たしていることを説明せよ。なお、 $r$  は導体球の中心からの距離であり、 $r \geq a$  である。
  - (2) ガウスの法則を利用して、 $r$  における電界の大きさを求めよ。
  - (3) 導体球の表面電位  $V$  及び静電容量  $C$  を求めよ。なお、無限遠の電位を 0 とする。
  - (4) 導体球の両半球面上の電荷密度  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  を求めよ。

導体球を取り除き、図 2(a) に示すように、電荷  $Q$  の点電荷を両誘電体の境界面から距離  $x$  の点 A に配置する。このとき、誘電体 1 中の電界は、図 2(b) のように全空間が誘電率  $\epsilon_1$  の誘電体であり、点 A に点電荷  $Q$ 、境界面に対して点 A と対称な点 B に点電荷  $Q'$  を置いた場合の電界と等しい。一方、誘電体 2 中の電界は、図 2(c) のように全空間が誘電率  $\epsilon_2$  の誘電体であり、点 A に  $Q''$  の点電荷を置いた場合の電界に等しい。

- (5) 図 2(b) の境界面上任意の点 P ( $\angle PAO = \theta$ ) において、電界の接線成分と電束密度の法線成分を求めよ。
- (6) 図 2(c) の境界面上任意の点 P ( $\angle PAO = \theta$ ) において、電界の接線成分と電束密度の法線成分を求めよ。
- (7)  $Q'$  と  $Q''$  を求めよ。

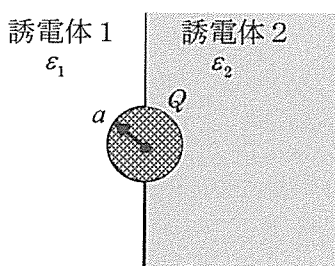


図 1

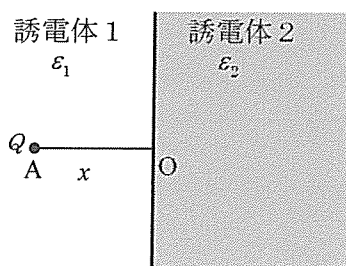


図 2 (a)

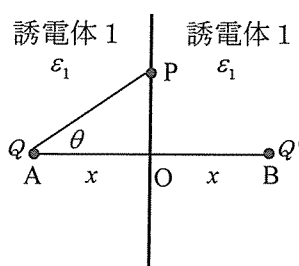


図 2 (b)

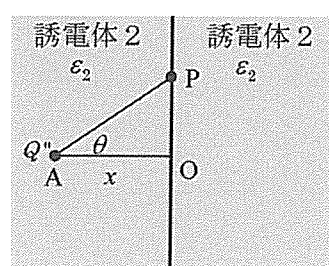


図 2 (c)

II 以下の設問 (1)～(6) に答えよ。ただし空間は真空とみなせるものとし、真空の透磁率を  $\mu_0$  とする。

電流分布のつくる磁場は一般にビオ・サバールの法則により導かれる。電流分布を電流素片の集合と考えると、電流分布が位置  $\mathbf{r}$  につくる磁束密度は、位置  $\mathbf{r}'$  にある電流素片  $I d\mathbf{s}$  が位置  $\mathbf{r}$  につくる磁束密度

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

の重ね合せで表される。ここで  $I$  は導線を通る電流、 $d\mathbf{s}$  は導線の微小要素、 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  は電流素片からの相対位置ベクトルを表す。この法則を用いて円電流が作る磁束密度を導く。

(1) 原点  $O$  を中心として  $(x, y)$  面上に置かれた半径  $a$  の円形導線に図 3 に示す向きの電流  $I$  を流す。この円電流により、原点  $O$  に生じる磁束密度を求めよ。

(2) この円電流により、 $(x, y)$  面上の遠方の点に生じる磁場を考える。円電流上の点  $\mathbf{r}' = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$  近傍の電流素片  $I d\mathbf{s} = I (-a \sin \phi d\phi, a \cos \phi d\phi, 0)$  が位置  $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$  につくる磁束密度  $d\mathbf{B}$  を求めよ。ただし  $r \gg a$  とし、1 に対して  $(a/r)^2$  を無視する近似を用いよ。

(3) この円電流全体によって  $(x, y)$  面上の原点  $O$  から距離  $r$  ( $r \gg a$ ) の位置に生じる磁束密度が、

$z$  軸の負の向きに大きさ  $\frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}$  となることを示せ。

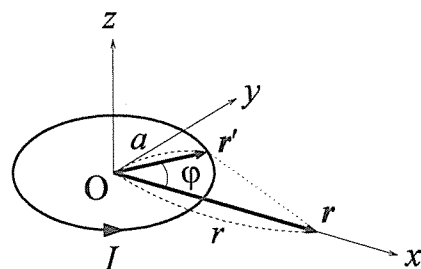


図 3

次に、図 4 の様に水平面上に中心を一致させて置いた半径  $a$  および  $b$  の二つの 1 巻き円形コイル A, B の間の相互誘導を考える。ここで  $a \ll b$  とし、各コイルを通る電流は図 4 の各コイル上に記した矢印の向きを正とする。

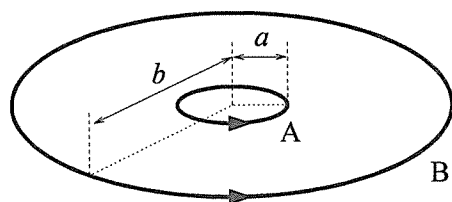


図 4

(4) コイル B を流れる振動電流  $I_B(t) = I_0 \cos \omega t$  ( $I_0$ ,  $\omega$  は定数) によって、時刻  $t$  にコイル A に生じる誘導起電力を求めよ。ただし各時刻においてコイル A のコイル面上に生じる磁束密度は一樣とみなせ、その大きさはコイルの中心に生じる値に等しいとする。

(5) 次にコイル A のみに電流  $I_A$  が流れているとき、コイル B を上向きに貫く正味の磁束  $\Phi_B$  を考える。このとき  $\Phi_B$  が、コイル B の外側の水平面全体を下向きに貫く磁束に等しいことを、磁場の基本法則を用いて説明せよ。また、このことと上問(3)の磁束密度を用いて  $\Phi_B$  を求めよ。

(6) コイル B の電流変化がコイル A に誘導する起電力に関する相互インダクタンス  $M_{AB}$  と、コイル A の電流変化がコイル B に誘導する起電力に関する相互インダクタンス  $M_{BA}$  とをそれぞれ求め、それらが等しいこと、すなわち相反定理が成り立っていることを示せ。



**問題 16 電子物性** 設問すべてについて解答すること。

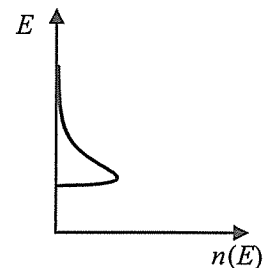
I 真性半導体に関する以下の問いに答えよ。ただし、バンドギャップの温度変化を無視する。

(1) 空欄 [①] ～ [⑦] を埋めよ。

フェルミ・ディラック分布関数および状態密度はエネルギー  $E$  (電子のエネルギー) の関数である。フェルミ・ディラック分布関数が  $f(E)$  で与えられるとき、エネルギー  $E$  の状態を電子が占める確率は [①]、正孔が占める確率は [②] である。したがって、伝導帯の状態密度が  $D_C(E)$ 、価電子帯の状態密度が  $D_V(E)$  であるとき、エネルギーが  $E$  と  $E+\Delta E$  の間の状態を占める伝導帯の電子の密度は  $n(E)\Delta E =$  [③]、エネルギーが  $E$  と  $E+\Delta E$  の間の状態を占める価電子帯の正孔の密度は  $p(E)\Delta E =$  [④] と表される。

したがって、伝導帯の下端のエネルギーを  $E_C$ 、伝導帯の上端のエネルギーを  $E_{CT}$ 、価電子帯の下端のエネルギーを  $E_{VB}$ 、価電子帯の上端のエネルギーを  $E_V$  とすると、伝導帯の電子密度は  $n =$  [⑤]、価電子帯の正孔密度は  $p =$  [⑥] で表される。ここで、真性半導体であることを考慮すると、 $n$  と  $p$  の間には [⑦] の関係式が成り立つ。

(2) 右図は、ある温度での  $n(E)$  と  $E$  の関係を表したグラフである。解答用紙に、このグラフを描き写し、グラフのデータよりも温度が高いときの  $n(E)$  を破線 (----) で追記せよ。また、温度を上げることにより、 $n(E)$  がそのように変化した理由を簡潔に説明せよ。



実効状態密度を用いると、電子密度  $n$  および正孔密度  $p$  は次の式で表される。

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right) \quad p = N_V \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right)$$

ここで、 $N_C$ 、 $N_V$  は伝導帯および価電子帯の実効状態密度、 $E_F$  はフェルミ準位、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T$  は温度である。また、素電荷を  $q$ 、電子の移動度を  $\mu_e$ 、正孔の移動度を  $\mu_h$  とし、実効状態密度の温度変化を無視する。

(3) フェルミ準位  $E_F$  を求めよ。ただし、 $E_C$ 、 $E_V$ 、 $N_C$ 、 $N_V$ 、 $k_B$ 、 $T$ 、 $q$ 、 $\mu_e$ 、 $\mu_h$  から必要なものを用いて解答すること。

(4) 抵抗率  $\rho$  を求めよ。ただし、 $E_C$ 、 $E_V$ 、 $N_C$ 、 $N_V$ 、 $k_B$ 、 $T$ 、 $q$ 、 $\mu_e$ 、 $\mu_h$  から必要なものを用いて解答すること。

(5) 横軸を  $1/T$ 、縦軸を  $\ln n$  として表すと、グラフは直線になった。直線の傾きが  $S$  のとき、この半導体のバンドギャップ  $E_g$  を求めよ。ただし、 $S$ 、 $n$ 、 $N_C$ 、 $N_V$ 、 $k_B$ 、 $T$ 、 $q$ 、 $\mu_e$ 、 $\mu_h$  から必要なものを用いて解答すること。

## II 不純物半導体と光の相互作用について考える。

- (1) 半導体シリコン (Si) に不純物としてヒ素 (As) を添加する。Si のエネルギーバンド図を、価電子帯、伝導帯、不純物準位、真性フェルミ準位の関係がわかるよう解答用紙に描け。Si のバンドギャップエネルギー  $E_g$  を 1.1eV, As のイオン化エネルギーを 0.05eV とする。
- (2) 光子のエネルギー  $E$  (eV) をその波長  $\lambda$  ( $\mu\text{m}$ ) から求める関係式を導け。真空の光速, プランク定数, 素電荷を, それぞれ  $3.00 \times 10^8 \text{m/s}$ ,  $6.63 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$ ,  $1.60 \times 10^{-19} \text{C}$  とする。
- (3) Si に  $1 \times 10^{22} \text{m}^{-3}$  の As を添加したときの温度に対する電子密度  $n_c$  ( $\text{m}^{-3}$ ) のおよそその変化を解答用紙に実線で描け。ただし, 横軸は試料温度  $T$  (K) の逆数の 1000 倍 ( $1000/T$  (1/K)) とし, 20 (1/K) 以下とする。さらに, この Si 試料に波長  $10 \mu\text{m}$  の単一光を照射しながら測定した  $n_c$  ( $\text{m}^{-3}$ ) を破線で描け。またその違いを説明せよ。照射した光子のエネルギーはすべて電子の励起に使われ, キャリア寿命の温度依存性は無視できるものとする。
- (4) 一般に, バンドギャップエネルギー  $E_g$  以上の光子エネルギーを持つ光を半導体に照射すると,  $E_g$  相当の波長を持つ光が放出される。この Si 試料に波長  $0.5 \mu\text{m}$  の単一光を照射したとき, 試料からは極めて微弱な発光しか観測されなかった。考えられるその理由を述べよ。エネルギーバンド図を用いてもよい。

問題 17 制御工学 設問すべてについて解答すること。

I つぎの伝達関数  $G(s)$  で表されるシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4}$$

このシステムにつぎの入力  $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < 1) \\ 0 & (t \geq 1) \end{cases}$$

を加えた時の出力応答  $y(t)$  ( $t \geq 1$ ) は以下であった。

$$y(t) = \alpha + \beta \times e^{-t} + \gamma \times e^{-4t} \quad (t \geq 1)$$

ただし、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  は定数である。出力応答  $y(t)$  ( $t \geq 1$ ) 中の  $(\alpha, \beta, \gamma)$  の値を求めよ。

II 図 1 に示す RC 回路において、電圧  $v_i(t)$  を入力信号、電圧  $v_o(t)$  を出力信号とする。ただし  $R$  は抵抗値、 $C$  は静電容量を表わし、 $R = 1[\Omega]$ ,  $C = 1[F]$  とする。

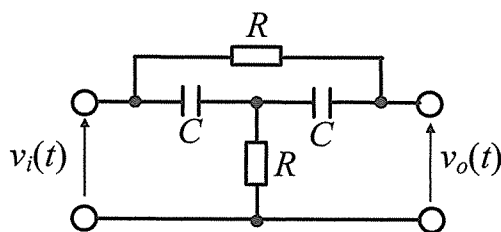


図 1 RC 回路

このとき、回路の伝達関数は  $G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + ds + e}$  であった。ただし、 $a, b, c, d, e$  は定数である。伝達関数  $G(s)$  中の  $(a, b, c, d, e)$  の値を求めよ。

Ⅲ 伝達関数  $G(s) = \frac{a(T_2s+1)}{T_1s+1}$  で表されるシステムの周波数応答について考える。ただし、 $a$ 、 $T_1$ 、 $T_2$

は正の定数である。このシステムに、入力として角周波数  $\omega$  の正弦波信号を加えた。 $\omega \rightarrow 0$  とすると、ゲインは 10 [dB] に漸近し、 $\omega \rightarrow \infty$  とするとゲインは -10 [dB] に漸近した。つぎの (1) から (3) の問いに答えよ。

(1)  $a$  の値を求めよ。

(2)  $T_2/T_1$  の値を求めよ。

(3) 任意の角周波数  $\omega$  における入力に対する出力の位相差は  $\tan^{-1}(\square) - \tan^{-1}(\omega T_1)$  と表すことができる。式中の  $\square$  に入る数式を答えよ。

Ⅳ 図 2 に示すシステムを考える。ただし、 $a$  は定数である。つぎの (1) ～ (5) の問いに答えよ。

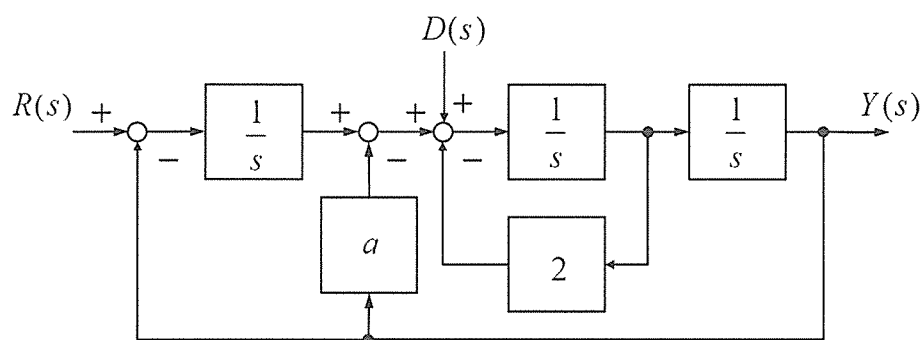


図 2 システム

(1)  $R(s)$  から  $Y(s)$  への伝達関数を求めよ。

(2)  $D(s)$  から  $Y(s)$  への伝達関数を求めよ。

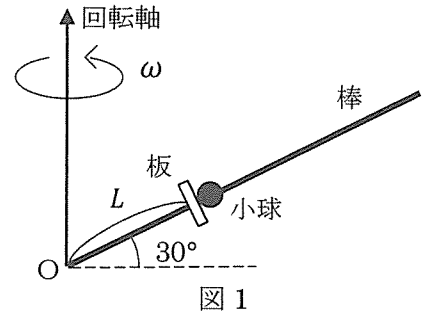
(3) このシステムが安定となる  $a$  の範囲を求めよ。

(4) 以下、 $R(s)$  を目標値、 $Y(s)$  を制御量とし、 $a > 1$  とする。 $D(s) = 0$  とし  $R(s)$  として単位ラング信号を入力した際の定常偏差を求めよ。

(5)  $R(s) = 0$  とし  $D(s)$  として単位ステップ信号を入力した際の定常偏差を求めよ。

問題 18 力学・材料力学 設問すべてについて解答すること。

I 細い剛体棒を水平から  $30^\circ$  傾け、棒の下端  $O$  を中心に鉛直な回転軸まわりに回転するように設置する。棒には、下端  $O$  から  $L$  の位置に固定された棒に垂直な薄い板と、棒に沿って摩擦なく動く質量  $m$  の穴あき小球が取り付けられている。重力加速度を  $g$  とし、摩擦や空気抵抗は考えなくてよいとして、次の (1) ~ (3) の問いに答えよ。棒の太さ、板の厚さ、小球の大きさは無視する。



(1) 棒が回転していないとき、小球は板に接して静止する。

この状態で小球が棒と板から受けている力を答えよ。

棒を一定の角速度  $\omega$  で図 1 の矢印の向きに回転させ、棒とともに回転しながら小球を観察する。

(2) 小球が板に接したまま動かないとき、小球に働く遠心力を求めよ。また、この状態で板から小球に働く力が 0 のときの角速度を求めよ。

(3) 板の位置から小球を棒に沿う速さ  $v_0$  で打ち出す。打ち出した瞬間に小球に働くコリオリの力の大きさと方向を答えよ。また、棒上を運動している小球について、棒に沿う方向の運動方程式を書け。棒の下端  $O$  から小球までの距離を  $x$  とする。

II 半径  $2R$  の円板と半径  $R$  の円板を中心軸が同じになるように貼り付けた二重滑車（慣性モーメント  $I_G$ ）が鉛直面内に取り付けられている。下図のように、半径  $2R$  の円板に糸を巻きつけ、右側に糸をたらし、おもり A（質量  $M$ ）を取り付けた。半径  $R$  の円板に糸を巻きつけ、左側に糸をたらし、おもり B（質量  $M$ ）を取り付けた。糸は軽く質量を無視できる。重力加速度を  $g$  とし、以下の問いに答えよ。

(1) はじめ、図 2-1 のように、おもり B に糸 CD を取り付けることで、二重滑車、おもり A、B は静止している。糸 CD の張力を示せ。

(2) 図 2-2 のように糸 CD を取り除いた。取り除いた直後における、二重滑車の回転に関する運動方程式を示せ。ここで、二重滑車の角加速度を  $\alpha$ 、おもり A の糸の張力を  $T_A$ 、おもり B の糸の張力を  $T_B$  とする。

(3) 糸 CD を取り除くと、図 2-3 のように二重滑車が回転をはじめた。おもり A がはじめの位置から  $H$  だけ下がったときの、おもり B のポテンシャルエネルギーの変化量を示せ。

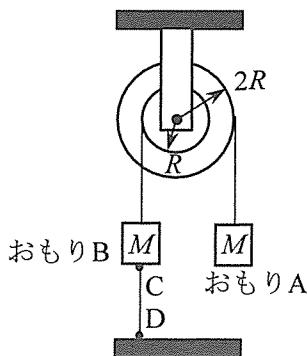


図 2-1

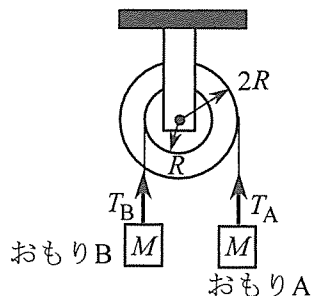


図 2-2

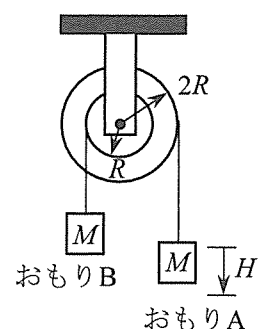


図 2-3

III 図3のように、面 A で固定された長さ  $3L$  の真直で一様な棒がある。面 A から  $L$ ,  $2L$ ,  $3L$  の位置にある面 B, C, D において、右向きに  $2\text{ kN}$ , 左向きに  $6\text{ kN}$ , 右向きに  $4\text{ kN}$  の外力がそれぞれ軸方向に作用している。棒の断面積を  $S=1\text{ [cm}^2\text{]}$ , 各区間の長さを  $L=5\text{ [m]}$  とする時、以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 AB, BC, CD に作用する軸荷重  $P_{AB}$ ,  $P_{BC}$ ,  $P_{CD}$  を求めよ。ただし、引張を正とする。
- (2) 棒全体の伸びが  $1\text{ mm}$  であるとき、棒材のヤング率  $E$  を求めよ。

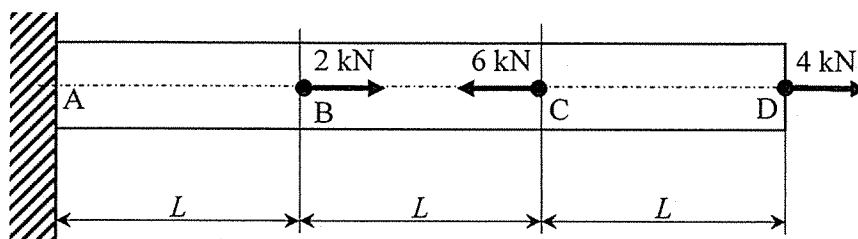


図 3

IV 図4-1のように、長さが  $L$ , ヤング率が  $E$  の真直で一様な単純支持はり AB がある。左支点 A 上のはりの断面の図心を原点とし、無荷重時において水平に置かれたはりの軸方向右向きに  $x$  軸を、鉛直下向きに  $y$  軸を、両軸と直交する方向に  $z$  軸を定義する。図4-2に示されるように、はりの  $yz$  断面は、高さ  $h$ , 幅  $b$  の長方形から、高さ  $h/2$ , 幅  $b/4$  の長方形が欠けた  $z$  軸対称の形になっている。今、原点から距離  $a$  となる横断面 C に集中加重  $P$  を鉛直下向きに作用させる。横断面に作用するせん断力  $F$  および曲げモーメント  $M$  の正方向を図4-3のように定める。はりの変形は、はりの長さに比べて十分に小さいとして、以下の問いに答えよ。

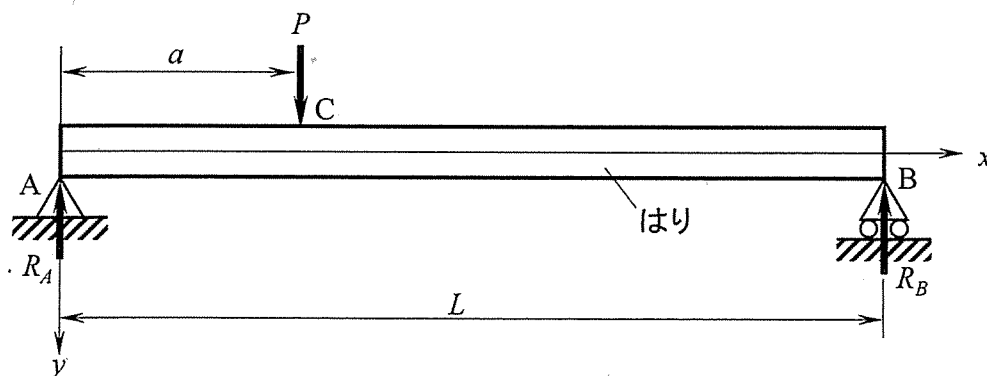


図 4-1

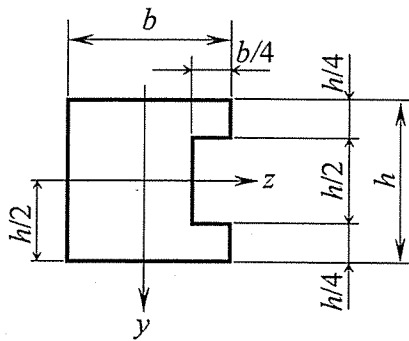


図 4-2

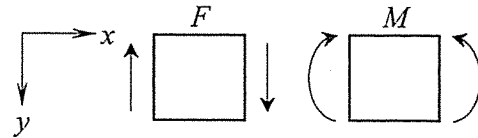


図 4-3

- (1) 左支点 A での反力  $R_A$  および右支点 B での反力  $R_B$  を求めよ。
- (2) AC 間 ( $0 < x < a$ ) でのせん断力  $F$  と曲げモーメント  $M$  を求めよ。
- (3) CB 間 ( $a < x < L$ ) でのせん断力  $F$  と曲げモーメント  $M$  を求めよ。
- (4) せん断力図 (SFD) および曲げモーメント図 (BMD) を描け。
- (5) 中立軸まわりのはりの断面二次モーメント  $I$  を求めよ。

図 4-1 の系において, AC 間でのはりのたわみ  $y$  は

$$y = -\frac{P(L-a)}{6EI}x^3 + \frac{Pa(L-a)(2L-a)}{6EI}x$$

として表せる。

- (6)  $a \geq L/2$  のとき, たわみが最大となる位置は AC 間に存在する。このとき, たわみが最大となる位置  $x_1$  を求めよ。

問題 19 流体力学 設問すべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙について，設問 I の解答を表面，設問 II の解答を裏面に記入すること。また，各設問の小問について，たとえば (1)x=y+z のように，最終的な解答に小問の番号を付して下線で明記すること。

I 図 1 のように， $x$  軸の正の方向に向いた直円管（直径  $D$ ）の先に，曲管（直径  $D$ ）とノズル（噴出孔直径  $D/2$ ）が，それぞれ Flange A（フランジは，管と管を結合する部品）と Flange B によって取り付けられている。曲管の角度は図 1 のように  $x$  軸方向の正の向きから  $\theta$  である。これらの中を密度  $\rho$  の空気が，直円管内と曲管では流速  $V_1$  で通過し，ノズル先端から流速  $V_2$  で噴出している。このとき，直円管に取り付けられた U 字管マノメータには密度  $\rho_w$  の水が入れられており，その液面差は  $h$  であった。直円管内の静圧を  $p_1$ ，大気圧を  $p_a$  として，次の (1) ～ (6) の問いについて答えよ。ただし，直円管，曲管，ノズルにおいて，速度分布は一樣な一次元的な流れとなり，粘性による損失は無視できるものとする。

(1) 直円管内の静圧  $p_1$ （絶対圧）を  $p_a, \rho_w,$

$g, h$  を用いて示せ。

(2)  $V_1$  と  $V_2$  の関係を示せ。

(3)  $V_1$  を  $\rho, \rho_w, g, h$  を用いて示せ。

(4) Flange A にかかる力の  $x$  軸方向成分

$F_x$  を  $p_1, p_a, \rho, V_1, D, \theta$  を用いて示せ。

(5) Flange A にかかる力の  $y$  軸（鉛直）方向成分  $F_y$  を  $\rho, V_1, D, \theta$  を用いて示

せ。ただし，Flange，ノズル，曲管，および，それらの中に含まれる流体の重量は無視できるものとする。

(6) Flange B にかかる力の大きさ  $|F_{\text{Nozzle}}|$

を  $p_1, p_a, \rho, V_1, D$  を用いて示せ。ただし，ノズル内の流体とノズルおよび Flange の重量は無視できるものとする。

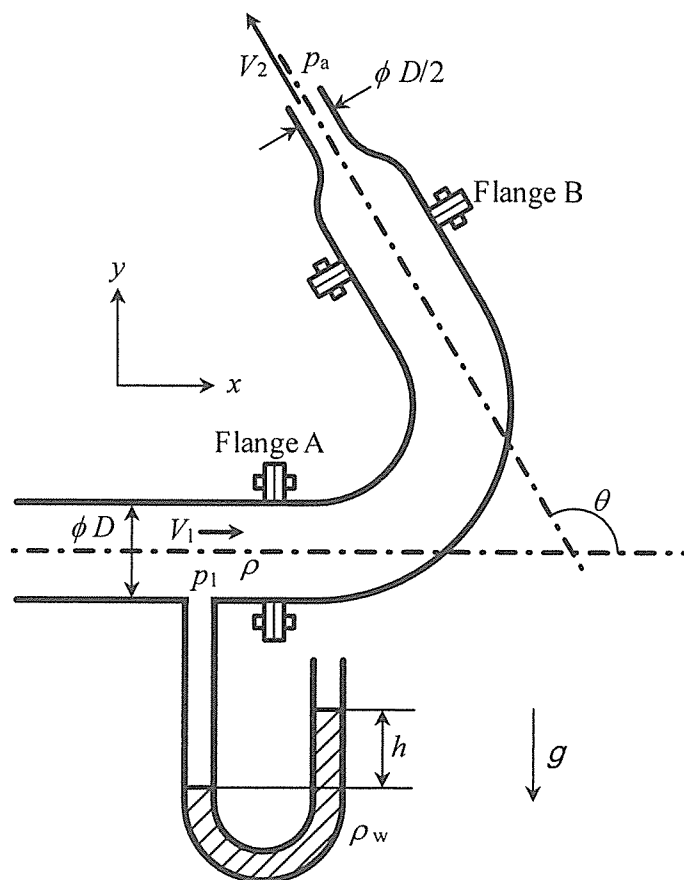


図 1



II デカルト座標系  $(x, y)$  において,  $x$  と  $y$  方向それぞれの速度成分  $u$  と  $v$  が,  $x, y$  および  $t$  の関数として,

$$u(x, y, t) = -\cos x \sin y \exp\left(-\frac{2\mu}{\rho}t\right),$$

$$v(x, y, t) = +\sin x \cos y \exp\left(-\frac{2\mu}{\rho}t\right),$$

で与えられる 2 次元流れ場を考える。ここで,  $t$  は時間であり, また粘度  $\mu$  と密度  $\rho$  は定数とする。このとき, 以下の (1) ~ (5) の設問に答えよ。

(1)  $z$  軸 ( $x, y$  に直交し右手系を構成する軸) まわりの渦度  $\zeta$  を,  $x, y$  および  $t$  の関数として示せ。

(2)  $x$  と  $y$  方向それぞれの加速度の成分  $a_x$  と  $a_y$  を,  $x, y$  および  $t$  の関数として示せ。

(3) 2 次元非圧縮性流れに対するナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 式の  $x$  と  $y$  方向成分の式を書け。ただし, 圧力を  $p$  とし, 独立変数  $x, y, t$  による偏微分, 速度成分  $u, v$ , および物性値  $\mu, \rho$  を使用し, また外力は無視できるものとする。

(4) この流れ場に対して, 上記 (3) のナビエ・ストークス式を満足する圧力  $p$  は,  $x, y$  および  $t$  の関数として,

$$p(x, y, t) = C (\cos 2x + \cos 2y) \exp\left(-\frac{4\mu}{\rho}t\right),$$

の形で与えられる事が知られている。係数  $C$  を定めよ。

(5) 時間  $t$  において  $d\mathbf{r} = (dx, 0)$  であった流体要素がこの流れに乗って移動し, 微小時間  $dt$  後に  $d\mathbf{r}' = (dx', dy')$  へと変形した。  $dx'$  と  $dy'$  を,  $x, y$  および  $t$  の関数として示せ。

**問題 20 熱力学** 設問すべてについて解答すること。

I 閉じた系における比熱一定の理想気体（質量  $m$  [kg]，気体定数  $R$  [J/(kg・K)]，比熱比  $\kappa$ ）の状態変化（準静的過程）からなるサイクルを考える。図 1 に示すように，状態 1（圧力  $p_1$  [Pa]，体積  $V_1$  [m<sup>3</sup>]，温度  $T_1$  [K]）から状態 2（圧力  $p_2$  [Pa]，体積  $V_2$  [m<sup>3</sup>]，温度  $T_2$  [K]）まで可逆断熱過程（等エントロピー過程）で圧縮した後に，状態 2 から状態 3（圧力  $p_3$  [Pa]，体積  $V_3$  [m<sup>3</sup>]，温度  $T_3$  [K]）まで等積加熱し，次に状態 3 から状態 4（圧力  $p_4$  [Pa]，体積  $V_4$  [m<sup>3</sup>]，温度  $T_4$  [K]）まで可逆断熱過程（等エントロピー過程）で膨張させ，状態 4 から等積冷却で状態 1 に戻る。ただし， $T_3 > T_2$  とする。ここで，サイクルの特性を示すパラメータとして，圧縮比  $\varepsilon = V_1/V_2$  および温度比  $\tau = T_3/T_1$  を定義する。なお，熱の符号は，熱が系に入る場合を正，系から出る場合を負とする。仕事の符号は，系が仕事をする場合を正，仕事をされる場合を負とする。

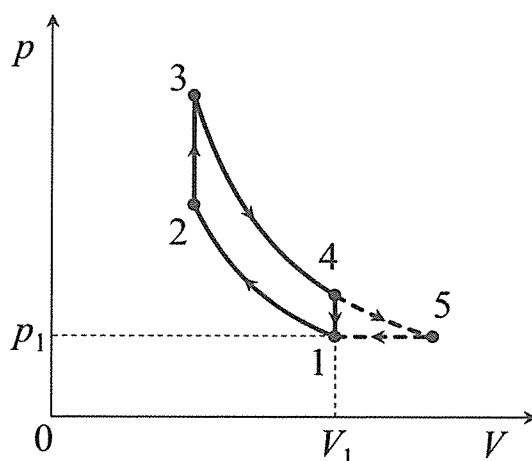


図 1

- (1) 状態 2 での温度  $T_2$  を， $\kappa, \varepsilon, T_1$  のみを用いて示せ。
- (2) 状態 3 での圧力  $p_3$  を， $\varepsilon, \tau, p_1$  のみを用いて示せ。
- (3) 状態 4 での温度  $T_4$  を， $\kappa, \varepsilon, \tau, T_1$  のみを用いて示せ。
- (4) 状態 2 から状態 3，状態 4 から状態 1 の各過程で出入りする熱  $Q_{23}$ ， $Q_{41}$ （単位はすべて[J]）を求めよ。ただし， $\kappa, \varepsilon, \tau, m, R, T_1$  のみを用いて示せ。
- (5) 状態 2 から状態 3，状態 4 から状態 1 の各過程でのエントロピー変化  $\Delta S_{23} (= S_3 - S_2)$ ， $\Delta S_{41} (= S_1 - S_4)$ （単位はすべて[J/K]）を求めよ。ただし， $\kappa, \varepsilon, \tau, m, R$  のみを用いて示せ。
- (6) 状態 1 から始まり，状態 2，状態 3，状態 4 を経て状態 1 へ戻るサイクルの熱効率を求めよ。ただし， $\kappa, \varepsilon$  のみを用いて示せ。

状態 4 は状態 1 に比べて高温であるから，周囲へ捨てる熱を減らすことで熱効率を上げること考える。ここでは，状態 3 から可逆断熱過程（等エントロピー過程）で状態 1 と同じ圧力になるまで膨張させる。図 1 に示すように，この状態を状態 5（圧力  $p_5$  [Pa]，体積  $V_5$  [m<sup>3</sup>]，温度  $T_5$  [K]）とする。ただし， $p_5 = p_1$  である。

- (7) 状態5での温度  $T_5$  を,  $\kappa, \varepsilon, \tau, T_1$  のみを用いて示せ。
- (8) 状態5から状態1の過程で出入りする熱  $Q_{51}$  (単位は[J]) を求めよ。ただし,  $\kappa, \varepsilon, \tau, m, R, T_1$  のみを用いて示せ。
- (9) 状態5から状態1の過程でのエントロピー変化  $\Delta S_{51} (= S_1 - S_5)$  (単位は[J/K]) を求めよ。ただし,  $\kappa, \varepsilon, \tau, m, R$  のみを用いて示せ。
- (10) 状態1から始まり, 状態2, 状態3, 状態5を経て状態1へ戻るサイクルの熱効率を求めよ。ただし,  $\kappa, \varepsilon, \tau$  のみを用いて示せ。
- (11) 状態1, 2, 3, 4, 5を明示した,  $T-S$ 線図(温度-エントロピー線図)を図示せよ。ただし, 各状態における温度( $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ )とエントロピー( $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ )も図中に記せ。

II 管内を流れる実在気体を, オリフィスや多孔質体を通して圧力を低下させると, 気体の温度が変化する。この現象は, ジュール-トムソン効果と呼ばれている。運動エネルギーと位置エネルギーの変化を無視すると, 熱や仕事の出入りも無いので, この状態変化は等エンタルピー変化( $dh = 0$ )とみなせる。この効果を利用して気体を冷却するには, 次式で定義されるジュール-トムソン係数  $\mu$  [K/Pa] が正となる状態で膨張させることが必要である。

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$$

ここで,  $T$  [K],  $p$  [Pa] はそれぞれ, 温度, 圧力である。また, 係数  $\mu$  が零となる温度は, 逆転温度と呼ばれている。比エンタルピー  $h$  [J/kg] の変化に関する次式を用いれば,

$$dh = c_p dT - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right] dp$$

ジュール-トムソン係数  $\mu$  は次のように表される。

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h = \frac{1}{c_p} \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right]$$

ここで,  $c_p$  [J/(kg · K)],  $v$  [m<sup>3</sup>/kg] はそれぞれ, 定圧比熱, 比体積である。

- (1) 理想気体では,  $\mu = 0$  となり, ジュール-トムソン効果が生じないことを示せ。
- (2) ファン・デル・ワールスの状態方程式

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R T$$

を満足する実在気体を考える。ここで,  $a$  [Pa · m<sup>6</sup>/kg<sup>2</sup>],  $b$  [m<sup>3</sup>/kg],  $R$  [J/(kg · K)] は, 気体により異なる定数である。この実在気体の逆転温度を求め,  $p, v, a, b, R$  のみを用いて示せ。