問題２　電磁気学　解答

問Ｉ

（１）ガウスの定理により，$a<r<c$ のとき，

$$\varepsilon_1 E \cdot 2\pi r = Q \quad \therefore E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r}$$

同様に，$c<r<b$ のとき，

$$\varepsilon_2 E \cdot 2\pi r = Q \quad \therefore E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

（２）$$V = -\int_b^c E dr - \int_c^a E dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_2}\int_b^c \frac{1}{r} dr - \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1}\int_c^a \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right)}$$

（３）内円筒導体の外側表面の電界 $E_a = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1 a}$.

$\because \ V = 1$

$$\therefore \ Q = C = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right)} \qquad E_a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 a} = \frac{1}{\varepsilon_1 a\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\log\frac{c}{a} + \frac{1}{\varepsilon_2}\log\frac{b}{c}\right)}$$

（４）内外円筒導体上の電位はそれぞれ一定であるため，電界は両誘電体中で同等である．
よって，ガウスの定理により，

$$\varepsilon_1 E\pi r + \varepsilon_2 E\pi r = Q \qquad \therefore \ E = \frac{Q}{\pi r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

（５）ε_1 の誘電体表面に接する同軸円筒導体の内側表面（$r=a$）に分布する単位長さの電荷は，$Q_1 = \varepsilon_1 E_a \cdot \pi a$.　同様に，$\varepsilon_2$ の誘電体表面に接する同軸円筒導体の内側表面（$r=a$）に分布する単位長さの電荷は，$Q_2 = \varepsilon_2 E_a \cdot \pi a$.

$$\because \ E_a = \frac{Q}{\pi a(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\therefore \ \sigma_1 = \frac{Q_1}{\pi a \times 1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{Q}{\pi a}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{\pi a \times 1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{Q}{\pi a}$$

II

【解答】

（1）　円筒導体の任意の垂直断面に面積 S_1 と S_2 をとり、その面積を底辺とし、長さが同じ ℓ の円筒導体に沿った導体柱を考える。次に、それぞれの導体柱には、電流密度 J_1、J_2 の電流が流れているとする。先ず、各導体柱の抵抗を計算する。

導体柱１：$R_1 = \rho \dfrac{\ell}{S_1}$ 、　導体柱２：$R_2 = \rho \dfrac{\ell}{S_2}$

ここで ρ は、導体の抵抗率である。この抵抗による電圧降下は次式で与えられる。

導体柱１：$V_1 = R_1 J_1 S_1$ 、　導体柱２：$V_2 = R_2 J_2 S_2$

題意からどの垂直断面内でも等電位であるから、長さが等しい２つの導体柱における電圧降下は等しくなければならない。従って、

$$V_1 = V_2$$

となる。この関係から、

$$R_1 J_1 S_1 = R_2 J_2 S_2 \quad \rightarrow \quad \rho \frac{\ell}{S_1} J_1 S_1 = \rho \frac{\ell}{S_2} J_2 S_2$$

結局

$$J_1 = J_2$$

この結果から、任意の異なる位置における２つの導体中を流れる電流密度が等しいことが分かる。S_1、S_2 の取り方は任意であるから、円筒導体のどの場所でも同じ電流密度で電流が流れることを示している。つまり、電流は導体中を一様に流れる。

（2）

①$0 < r < a$ の領域　　$B = 0$ [T]

②$a \leq r < b$ の領域　　$B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \dfrac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$ [T]

③$b \leq r < \infty$ の領域　　$B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ [T]

（3）　$F = \mu_0 \dfrac{I_1 I_2}{2\pi L} \ln\left(1 + \dfrac{L}{r_0}\right)$　　力の向きは円筒導体と引き合う方向

（4）　$\Phi = \dfrac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln\left(1 + \dfrac{L}{r_0}\right)$

（5）　$I = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \dfrac{L^2 v}{(r_0 + vt)(r_0 + L + vt)}$