専門科目 (午前)　　27　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

n 次実対称行列 A の最大（実数）固有値を λ_1 とよぶ．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$|\boldsymbol{x}| \in \mathbb{R}^n$ は要素ごとの絶対値からなるベクトルとする．つまり，$|\boldsymbol{x}| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)^\top$ であり，$\top$ はベクトルの転置を表す．また，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の全ての要素が正であることを意味し，同様に，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ は全ての要素が非負であることを意味する．

(1) n 次実対称行列 A が与えられたとき，

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{y}^\top A \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{y}}$$

となることを示せ．

(2) 次の対称行列 A の最大固有値 λ_1 とその固有ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 全ての要素が正の実数である n 次対称行列の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，

$$A|\boldsymbol{x}| - |\lambda||\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{0}$$

となることを示せ．

(4) 全ての要素が正の実数である n 次対称行列の最大固有値 λ_1 に対する固有ベクトルを $\bar{\boldsymbol{x}}$ とすると，

$$A|\bar{\boldsymbol{x}}| = |\lambda_1||\bar{\boldsymbol{x}}| \quad \text{および} \quad |\bar{\boldsymbol{x}}| > \boldsymbol{0}$$

となることを示せ（$|\lambda_1| > 0$ に注意せよ）．

問 2 (基礎問題)

自然数 n に対し，

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

とおく． $x > 0$ に対し $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ であることを用いて，以下を示せ．

(1) 任意の $n \geq 1$ について，

$$0 < a_n - a_{n+1} < \frac{1}{2n(n+1)}$$

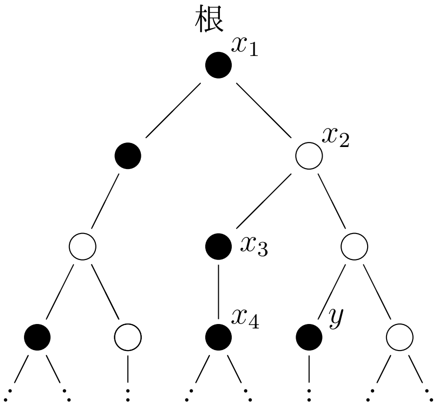
が成り立つ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束する．

(3) $\lim_{n \to \infty} a_n > \frac{1}{2}$

問 3 (基礎問題)

可算無限個の頂点を持つ根付き木で，各頂点が必ず１個または２個の子を持ち（したがって葉は存在しない），頂点がそれぞれ白色か黒色になっている木を**色付無限２分木**と呼ぶ．根から出発してその子，そのまた子，... とたどっていく頂点の無限列を**パス**と呼ぶ．頂点 x, y が同一のパス上にあり y の方が根から遠いとき，y は x の**子孫**であると言う．下図は色付無限２分木の例である．この図で $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ はひとつのパスであり，x_1, x_3, x_4 は黒色，x_2 は白色であり，y は x_1 と x_2 の子孫であるが x_3 や x_4 の子孫ではない．以下では n, m 等は自然数を表す変数，x, y 等は頂点を表す変数とする．



(1) 色付無限２分木に関する下記の３条件 A,B,C の相互の強弱関係を完全に決定せよ．すなわち次の６個の命題

「A ならば B」「B ならば A」「A ならば C」「C ならば A」「B ならば C」「C ならば B」

がそれぞれが正しいか正しくないかを述べよ（注１）．そして正しくない場合は反例となる色付無限２分木を提示せよ．正しい場合にそのことを証明する必要はない．

【A】あるパスが存在して，そのパス上に黒色の頂点が無限個存在する．

【B】あるパス $x_1, x_2, \ldots$ が存在して次が成り立つ．

$\exists m(x_m$ は黒色$)$ かつ $\forall n(x_n$ が黒色ならば x_{n+1} も黒色$)$.

【C】黒色の頂点が無限個存在する．

(2) 次の条件 D が上記の条件 C と同値であることを証明せよ（注２）.

【D】あるパス $x_1, x_2, \ldots$ が存在して次が成り立つ．

$\forall n \exists y(y$ は x_n の子孫であり y は黒色$)$.

（つまりこのパス上のどんな頂点も黒色の子孫を持つ．ただしその子孫がこのパス上にある必要はない.）

（注１）たとえば「A ならば B」が正しいとは，任意の色付無限２分木 T に対して次が成り立つことである．

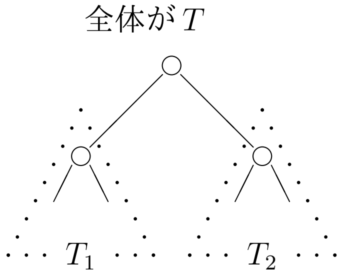
もしも T が条件 A を満たすならば，T は条件 B も満たす．

（次ページに続く）

（注２）証明の際に次の事実を使用してもよい．

事実１： 色付無限２分木 T 中に頂点 y があるとき，T の頂点のうち y を子孫とするものの個数は有限である．

事実２： 色付無限２分木 T が下図のように部分木 T_1 と T_2 を持つとする．もしも T に黒い頂点が無限個存在するならば，T_1 と T_2 の少なくとも一方には黒い頂点が無限個存在する．



問 4 (一般問題)

位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，その乗法群，すなわち積に関して逆元のある要素からなる群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ で表す．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元および $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元は，整数が同値類を表すこととすれば，たとえば $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，また $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = \{1, 2, 3, 4\}$ である．このとき以下に答えよ．

(1) 乗法群 $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ について，元 $x = 7$ の逆元 y を求めよ．

(2) 乗法群 $(\mathbb{Z}/40841\mathbb{Z})^\times$ について，元 $x = 20100$ の逆元 y を求めよ．

問 5 (一般問題)

X, Y を位相空間とし，f と g を共に X から Y への連続写像とするとき，以下に答えよ．

(1) X から $Y \times Y$ への写像

$$\Phi : X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in Y \times Y$$

は連続写像になることを示せ．

(2) $Y = \mathbb{R}$ のとき，2 つの関数の和と積 $f + g$ と fg は，共に連続関数になることを示せ．

(3) Y がハウスドルフ空間のとき，集合

$$A = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$$

は，閉集合であることを示せ．

問 6 (一般問題)

$[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $u(t,x)$ が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,x)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)$$

を満たしているとする．ここで，$f(x)$，$g(x)$ は，$|x|\geq 1$ で

$$f(x)=0,\quad g(x)=0$$

を満たす関数とする．

(1) $\xi=x+t$，$\eta=x-t$ に対して，$v(\xi,\eta)=u(t,x)$ とおくとき，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial\xi}=0$$

であることを示せ．

(2) $u(t,x)$ を $f(x)$，$g(x)$ を用いて表せ．

(3) $t=1$，$|x|\geq 2$ のとき，

$$u(1,x)=0$$

であることを示せ．

(4) すべての $t>0$ に対して，$|x|\geq M(t)$ のとき，

$$u(t,x)=0$$

となる関数 $M(t)$ の例を一つ挙げよ．

問 7 (一般問題)

図 1 のネットワークを考える．ここで，各枝についている数字はその枝の矢印の向きに流すことができる容量である．例えば，枝 $(3, 4)$，つまり頂点 3 から頂点 4 への矢印は，頂点 3 から頂点 4 の方向に最大 7 の流量を流せることを示している．

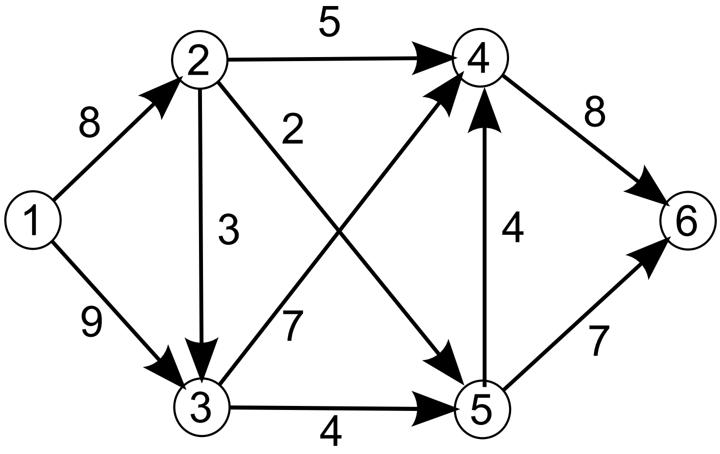


図 1: ネットワーク

図 1 のネットワークについて，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量を求める最大流問題を考えるとして，以下に答えよ．

(1) 図 1 の最大流問題の最大流量を求めよ．

(2) 図 1 のネットワークにおいて頂点 1 と頂点 6 を分割するカットのうち，容量が最小となる最小カットとその容量を答えよ．

(3) 枝 $(3, 5)$ の最大容量を 4 から 3 に図 1 から変更したとき，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量が (1) で求めた最大流量と同じであるかどうかを，理由をつけて述べよ．

(4) 枝 $(5, 4)$ の最大容量を 4 から 3 に図 1 から変更したとき，頂点 1 から頂点 6 に流すことのできる最大流量が (1) で求めた最大流量と同じであるかどうかを，理由をつけて述べよ．

問 8 (一般問題)

P，E，Var はそれぞれ確率，期待値，分散を表すものとする．また，事象の列 $B_1, B_2, \ldots$ が単調増加列 ($B_n \subset B_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$)，$C_1, C_2, \ldots$ が単調減少列 ($C_n \supset C_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$) であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(C_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\Big)$$

が成り立つことは証明なしで用いて構わない．

(1) 非負実数値をとる確率変数 X と任意の $a > 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\mathsf{P}(X > a) \leq \frac{\mathsf{E}(X)}{a}$$

(2) $A_1, A_2, \ldots$ を事象の列とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) < \infty$ であれば，

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $X_1, X_2, \ldots$ を実数値確率変数列とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Var}(X_n) < \infty$ であれば，

$$\mathsf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} |X_n - \mathsf{E}(X_n)| = 0\Big) = 1$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 任意の $\epsilon > 0$ に対して $A_n = \{|X_n - \mathsf{E}(X_n)| > \epsilon\}$ とおいて，(1), (2) を用いる)．

問 9 (一般問題)

$N(\mu, \sigma^2)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布とする．次のモデルにしたがって確率変数 (X_1, X_2) が生成されているとする:

$$\begin{aligned} X_1 &\sim N(0, \sigma^2), \\ X_2 &= \beta X_1 + U. \end{aligned}$$

ただし，U は $N(0, 1)$ に従う X_1 とは独立な確率変数であり，$\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ は未知パラメータで，$\sigma^2 > 0$, $|\beta| < 1$ を満たすものである．なお，$X_1 \sim N(0, \sigma^2)$ は X_1 が $N(0, \sigma^2)$ から生成されているという意味である．今，観測値 (X_1, X_2) から β, σ^2 を推定したい．次の問に答えよ．

なお，平均 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, 分散共分散 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の d 次元多変量正規分布の確率密度関数が次式で与えられることは用いて良い:

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

ここで，$\top$ はベクトルの転置を表す．

(1) X_1 と X_2 の周辺分布が等しいためには，σ^2 と β は $\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の関係を満たさなくてはいけないことを示せ．

(2) (X_1, X_2) の同時分布を求めよ．ただし，$\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の条件は満たされているとし，未知パラメータは β のみを用いて記述せよ．

(3) 観測値 (X_1, X_2) にもとづいて，β の最尤推定量を求めよ．なお，$\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の条件は満たされているものとする．

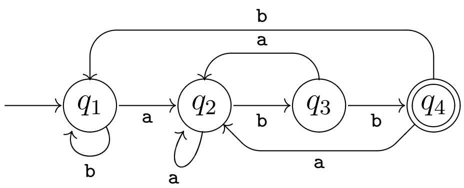
問 10 (一般問題)

アルファベット $\Sigma = \{\texttt{00}, \texttt{01}, \texttt{10}, \texttt{11}\}$ 上の言語 A, B, C を以下のように定義する．

$A = \{w \mid w$ は 0 を偶数個含む $\}$
$B = \{w \mid w$ は 00 を偶数個含む $\}$
$C = \{w \mid w$ は 001 と 110 を同じ個数含む $\}$

例えば，文字列 $w_1 = \texttt{0001}$ は 0 を 3 つ含むため言語 A に含まれないが，00 を 2 つ含むため言語 B に含まれる．また，001 を 1 つ含むが 110 を 1 つも含まないため言語 C に含まれない．
また例えば，文字列 $w_2 = \texttt{001000}$ は 0 を 5 つ含むため言語 A に含まれず，00 を 3 つ含むため言語 B にも含まれない．また，001 を 1 つ含み 110 を 1 つも含まないため言語 C に含まれない．
さらに例えば，文字列 $w_3 = \texttt{001}$ は Σ 上の文字列ではないため，言語 A, B, C のどの言語にも含まれない．
これら言語 A, B, C の各々に対して，正規であるならば決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与え，正規でないならばポンピング補題 (注 2) を用いて証明せよ．

注 1: 決定性有限オートマトン　以下は，アルファベットが $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w$ は abb で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) である．

問 11 (一般問題)

以下は $n \times n$ 行列の積を求める再帰的なアルゴリズムの枠組みである（ただし，非負整数 k に対して $n = 2^k$ とする）．パラメータ a ならびに関数 $f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ を定めると 1 つのアルゴリズムが定まる．ただし，関数 $f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ では，引数として与えられる部分行列同士の加減算しか行わないものとする．

```
mult(n, A, B)
// n は 2^k（ただし k は非負整数）とする.
// A, B には n × n 行列が与えられる. 行列の要素は整数とする.
    if n = 1 then return A * B;
    // 以下は n ≥ 2 の場合
```

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} \mathtt{A}_{11} & \mathtt{A}_{12} \\ \mathtt{A}_{21} & \mathtt{A}_{22} \end{pmatrix},\ \mathtt{B} = \begin{pmatrix} \mathtt{B}_{11} & \mathtt{B}_{12} \\ \mathtt{B}_{21} & \mathtt{B}_{22} \end{pmatrix} \text{ とする}$$

$\mathtt{U}_1 \leftarrow f_1(\mathtt{A}_{11}, \mathtt{A}_{12}, \mathtt{A}_{21}, \mathtt{A}_{22}, \mathtt{B}_{11}, \mathtt{B}_{12}, \mathtt{B}_{21}, \mathtt{B}_{22})$;
$\mathtt{V}_1 \leftarrow g_1(\mathtt{A}_{11}, \mathtt{A}_{12}, \mathtt{A}_{21}, \mathtt{A}_{22}, \mathtt{B}_{11}, \mathtt{B}_{12}, \mathtt{B}_{21}, \mathtt{B}_{22})$;
$\mathtt{M}_1 \leftarrow$ mult(n/2, $\mathtt{U}_1$, $\mathtt{V}_1$);
$\vdots$ （$\mathtt{M}_2 \sim \mathtt{M}_{a-1}$ を同様に計算）
$\mathtt{U}_a \leftarrow f_a(\mathtt{A}_{11}, \mathtt{A}_{12}, \mathtt{A}_{21}, \mathtt{A}_{22}, \mathtt{B}_{11}, \mathtt{B}_{12}, \mathtt{B}_{21}, \mathtt{B}_{22})$;
$\mathtt{V}_a \leftarrow g_a(\mathtt{A}_{11}, \mathtt{A}_{12}, \mathtt{A}_{21}, \mathtt{A}_{22}, \mathtt{B}_{11}, \mathtt{B}_{12}, \mathtt{B}_{21}, \mathtt{B}_{22})$;
$\mathtt{M}_a \leftarrow$ mult(n/2, $\mathtt{U}_a$, $\mathtt{V}_a$);

$\mathtt{C}_{11} \leftarrow h_{11}(\mathtt{M}_1, \ldots, \mathtt{M}_a)$; $\mathtt{C}_{12} \leftarrow h_{12}(\mathtt{M}_1, \ldots, \mathtt{M}_a)$;
$\mathtt{C}_{21} \leftarrow h_{21}(\mathtt{M}_1, \ldots, \mathtt{M}_a)$; $\mathtt{C}_{22} \leftarrow h_{22}(\mathtt{M}_1, \ldots, \mathtt{M}_a)$;

return $\begin{pmatrix} \mathtt{C}_{11} & \mathtt{C}_{12} \\ \mathtt{C}_{21} & \mathtt{C}_{22} \end{pmatrix}$;

```
// 関数 mult の定義終了
```

たとえば，$a = 8$ として，

$$\begin{aligned}
f_1(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{11}, & g_1(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{11}, \\
f_2(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{12}, & g_2(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{21}, \\
f_3(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{11}, & g_3(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{12}, \\
f_4(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{12}, & g_4(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{22}, \\
f_5(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{21}, & g_5(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{11}, \\
f_6(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{22}, & g_6(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{21}, \\
f_7(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{21}, & g_7(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{12}, \\
f_8(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= A_{22}, & g_8(A_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots) &= B_{22}, \\
h_{11}(M_1, M_2, \ldots) &= M_1 + M_2, & h_{12}(M_1, M_2, \ldots) &= M_3 + M_4, \\
h_{21}(M_1, M_2, \ldots) &= M_5 + M_6, & h_{22}(M_1, M_2, \ldots) &= M_7 + M_8,
\end{aligned}$$

とすれば，標準的な行列積のアルゴリズムが得られる．

（次ページに続く）

この枠組みで定義されるアルゴリズムの計算量として，そのアルゴリズムで $n \times n$ 行列の積を計算するときの行列の要素間の乗算の回数に基づく計算量を $t(n)$，行列の要素間の加減算の回数に基づく計算量を $s(n)$ とする．また，パラメータ b を，$n \times n$ 行列の積を計算する際の，$f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ における部分行列同士の加減算の合計回数とする．すると，$s(n)$ は

$$s(n) \;=\; \begin{cases} 0 & n = 1 \text{ の場合} \\ as\left(\dfrac{n}{2}\right) + b\left(\dfrac{n}{2}\right)^2, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定義される．この計算量 $t(n)$, $s(n)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) 計算量 $t(n)$ を上記の $s(n)$ のように定義せよ．

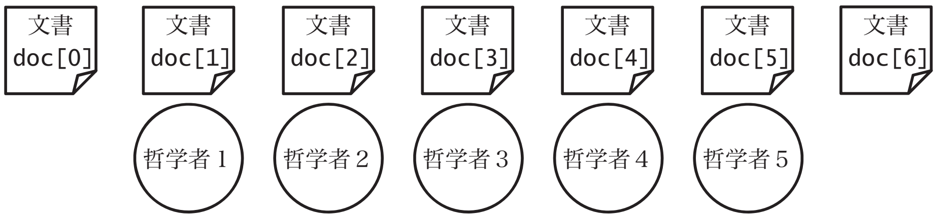
(2) この枠組みに沿って，パラメータ a と関数 $f_1, \ldots, f_a$, $g_1, \ldots, g_a$, $h_{11}, \ldots, h_{22}$ を上手く定義し，ある定数 α（ただし，$0 < \alpha < 3$）に対し，$t(n) = O(n^\alpha)$ を実現するアルゴリズムを得ることができた．その時の a と α の関係について述べよ．

(3) 例に挙げた $a = 8$ の場合には，部分行列同士の加減算は $h_{11}, \ldots, h_{22}$ でしか行われず，$n \times n$ 行列同士の積を計算する際の，$f_1, \ldots, f_a, g_1, \ldots, g_a, h_{11}, \ldots, h_{22}$ における部分行列同士の加減算の合計回数は 4 回である．つまり，$b = 4$ である．この事実を用い，この場合の計算量 $s(n)$ が，$O(n^3)$ であることを示せ．

問 12 (一般問題)

5 人の哲学者がテーブルに並んで座っており，全員が並行して，各自の前にある文書を更新するという状況を考える．その際，両隣りの文書も更新する必要があるとする．

(1) 哲学者達は，下図の通り，一列に並んでいるとする．文書は 7 つあり，そのうち 5 つは各哲学者の前にある．左端の哲学者の左隣り，および，右端の哲学者の右隣りにも，それぞれ，文書がある．



次のプログラムは，この状況を Java 言語で記述したものである．メソッド `update` は哲学者による更新処理を表す．哲学者 1 番から 5 番はそれぞれ `update(1)`，$\cdots$，`update(5)` を繰り返し呼び出し続ける．

```
int doc[7];

static void update(int index) {
  // 配列 doc の index - 1 番目から index + 1 番目までの 3 要素
  // doc[index - 1], doc[index], doc[index + 1] を更新する
  ...
}
```

哲学者達の文書に対する競争状態（または競合状態，race condition）を避けるため，相互排除を行うことを考える．そのために，次の 2 通りのメソッドを用意し，`update` の代わりに呼び出す．ここでは，ロックを獲得する `acquire` 命令，解放する `release` 命令を使えるとする．`acquire i` は配列 `doc` の `i` 番目要素に対応するロックを獲得する命令である．

方法 A：

```
static void updateA(int index) {
  acquire index;
  acquire index - 1;
  acquire index + 1;

  update(index);

  release index + 1;
  release index - 1;
  release index;
}
```

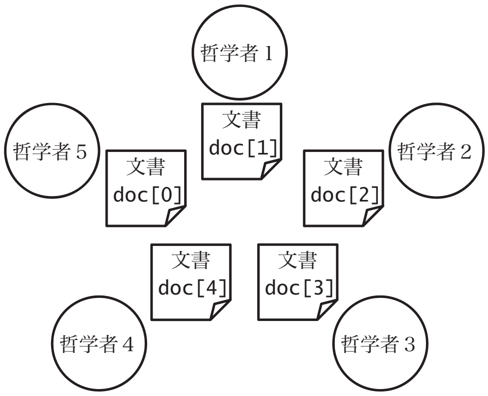
方法 B：

```
static void updateB(int index) {
  acquire index - 1;
  acquire index;
  acquire index + 1;

  update(index);

  release index + 1;
  release index;
  release index - 1;
}
```

（次ページに続く）

方法 A と方法 B のどちらか一方では，哲学者間でデッドロックが発生し得る．どちらで発生し得るか，答えよ．また，デッドロックに至るまでの過程の例を示せ．

(2) 次に，哲学者達は，下図の通り，輪になって並んでいるとする．文書は 5 つあり，各哲学者の前にある．



次のプログラムは，この状況を Java 言語で記述したものである．メソッド `update` は哲学者による更新処理を表す．哲学者 1 番から 5 番はそれぞれ `update(1)`，$\cdots$，`update(5)` を繰り返し呼び出し続ける．哲学者 5 番の前にある文書は `doc[0]` で表されることに注意すること．

```
int doc[5];

static void update(int index) {
  // 配列 doc の 3 要素
  // doc[(index - 1)],
  // doc[(index)     % 5],
  // doc[(index + 1) % 5] を更新する
  ...
}
```

この `update` を対象として，方法 A と方法 B で相互排除を行うことを考える．この際，`acquire` 命令と `release` 命令の引数は，(1) にて `index`，`index + 1` となっているところをそれぞれ `index % 5`，`(index + 1) % 5` に置き換える．

この状況では，方法 A，方法 B，どちらの方法で相互排除を行ってもデッドロックが発生し得る．(1) の一列並びではデッドロックを起こさない方の方法においてデッドロックが発生する過程の例を示せ．

(3) 輪に並んだ (2) の状況でもデッドロックを防ぐ方法を示せ．示す方法は文章でもプログラムでもよい．各哲学者が獲得，解放できるロックは，方法 A，方法 B と同様に，自身の前にある文書および両隣りの文書に対応するものだけとする．