1

x-y 平面内にある曲線上の点(x,y)が，２次元極座標表示で$r=4+4\cos\theta$　$(0\leq\theta\leq\pi)$によって与えられる．ただし$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$である．以下の問いに答えよ．

（１） x，yそれぞれの最大値，最小値を求めよ．さらに，それらを与えるθを示せ．

（２） この曲線をx-y平面内に図示せよ．

（３） この曲線およびx軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

（４）上の問（３）の図形をx軸の周りに回転させたときに得られる立体の体積を求めよ．

$\boxed{2}$

３次元実線形空間 W のベクトル列$\{\mathbf{x}_k\}(k=0,1,2,\cdots)$は，$\mathbf{x}_0$が与えられたとき$k\geq 1$に対して，

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$$

によって定まるものとする．ただし，a, b は定数$(a>0,\ b>0)$である．以下の問いに答えよ．

（１）行列$\mathbf{A}$の固有値を求めよ．

（２）上の問（１）で求めたそれぞれの固有値に対して，大きさが１である固有ベクトルを求めよ．

（３）任意の$\mathbf{x}_0 \in \mathrm{W}$に対して$k\to\infty$のとき$\mathbf{x}_k$が零ベクトルに収束するために$a, b$が満たすべき条件を求め，$a, b$のとり得る値の範囲を$a$-$b$平面上に図示せよ．

3

水平面上にある質量m（mは定数，$m>0$）の質点が，ばねに取り付けられている．質点の位置xは，時間tの関数として表すことができる．質点には，ばねによる弾性力$-kx$（kは定数，$k>0$）と速度に比例する減衰力$-D\dfrac{dx}{dt}$（Dは定数，$D>0$）がはたらくものとする． 以下の問いに答えよ．

（1）このときの質点の運動は，次の常微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+kx=0$$

に従うものとする．

1）この常微分方程式の特性方程式の２つの解λ_1，λ_2（$\lambda_1>\lambda_2$）を求めよ．ただし，$D^2>4km$とする．

2）$t=0$において$x=x_0$（$x_0>0$），$\dfrac{dx}{dt}=0$ のとき，この常微分方程式の解を求めよ．ただし，$D^2>4km$とし，λ_1，λ_2を用いて表せ．

3）$D^2=4km$のとき，この常微分方程式の一般解を求めよ．

4）上の問３）で$t=0$において$x=x_1$（$x_1>0$），$\dfrac{dx}{dt}=z_1$ のとき，$t>0$でこの質点が$x=0$を通過するために必要なx_1とz_1の関係式を求めよ．さらに，$x=0$を通過するときのtの値を求めよ．

（2）上の問（1）の質点に，さらに外力$F\cos\omega t$（F，ωは定数）を加えた場合の運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{dx}{dt}+kx=F\cos\omega t$$

で与えられる．この常微分方程式の特解を求めよ．

$\boxed{4}$

確率変数 $\boldsymbol{x}$ と関数 $g(x)=x^2$ が与えられている．このとき，$\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})$ は新たな確率変数となる．

（1）$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を離散値を取る確率変数とする．以下の問に答えよ．

1) $\boldsymbol{x}=\{-3,-1,0,1,2,3\}$ かつ $P(\boldsymbol{x}=x_k)=1/6$ の時，$P(\boldsymbol{y}=y_k)$の値を求めよ．
ただし，$P(\boldsymbol{x}=x_k)$は確率変数 $\boldsymbol{x}$ が x_k の値をとる確率を表すものとする．

2) このときの $\boldsymbol{y}$ の分散を求めよ．

（2）$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を連続値を取る確率変数とする．以下の問に答えよ．

1) 確率変数 $\boldsymbol{y}$ の累積分布関数 $F_y(y)=P(\boldsymbol{y}<y)$が次式で与えられることを示せ．

$$F_y(y)=\begin{cases} F_x(\sqrt{y})-F_x(-\sqrt{y}) & y\geq 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$$

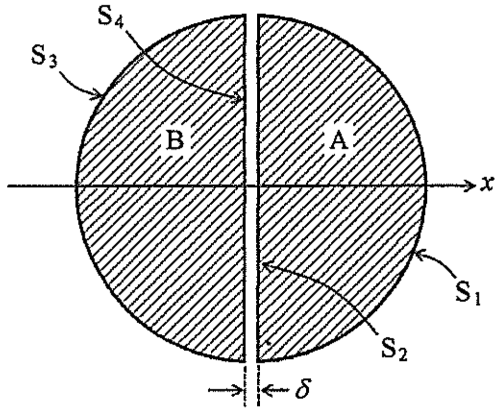
ただし，$F_x(x)=P(\boldsymbol{x}<x)$は確率変数 $\boldsymbol{x}$ の累積分布関数を表すものとする．

2) （2）1) の結果を利用して，確率変数 $\boldsymbol{y}$ の確率密度関数 $f_y(y)$を，確率変数 $\boldsymbol{x}$ の確率密度関数 $f_x(x)$を用いて表せ．

3) 確率変数 $\boldsymbol{x}$ の確率密度関数 $f_x(x)$が，標準正規分布 $N(0,1)$であるとき，確率変数 $\boldsymbol{y}$ の確率密度関数 $f_y(y)$ を求めよ．

5

図において，A，B は半球に近い同一形状の導体であり，半径 R の球形の導体から，球の中心を含む厚さ δ の円板を取り除いてできるものである．導体 A の球面状の表面を S_1，平面状の表面を S_2 とし，導体 B の球面状の表面を S_3，平面状の表面を S_4 とする．δ は R に比べて十分小さいものとし，各面の面積が必要ならば，S_1，S_3 については $2\pi R^2$，S_2，S_4 については πR^2 と近似せよ．座標系として，球の中心を原点とし，x 軸が S_2, S_4 と垂直で導体 A が $x>0$ の側となるものをとる．無限遠方の電位を 0 として，以下の問いに答えよ．なお導体部以外の空間は真空（誘電率 ε_0）とする．結果を導出する過程を記述し，値は R，δ，ε_0 および導体 A，B が持つ電荷を用いて表すこと．



図

(1) 導体 A，B に共に電荷 Q を与えた場合の，各導体の電位を求めよ．ただし，各導体に与えた電荷は面 S_1，S_3 上に一様に分布し，空間 $r>R$（r は原点からの距離）における電界は半径 R の導体球に電荷 $2Q$ を与えた場合に等しいものとする．

(2) 導体 A に電荷 Q，導体 B に電荷 $-Q$ を与えた場合の，各導体の電位を求めよ．ただし，各導体に与えた電荷は面 S_2，S_4 上に一様に分布し，導体間の間隙内に一様な電界が生じるものとする．

(3) 導体 A に電荷 Q_1，導体 B に電荷 Q_2 を与えたとき，導体 A，B の電位をそれぞれ $V_1(Q_1,Q_2)$，$V_2(Q_1,Q_2)$ とすると，a，b を導体の形と相互の位置関係のみによって定まる定数として

$$V_1(Q_1,Q_2)=aQ_1+bQ_2 \quad \cdots ①$$
$$V_2(Q_1,Q_2)=bQ_1+aQ_2 \quad \cdots ②$$

が成り立つ．(1)，(2)の結果を用いて a，b を求めよ．ただし，(1)，(2)の結果から a，b を導出する過程では新たな近似を追加しないこと．

(4) 導体 A に電荷 $2Q$ を与え，導体 B の電荷を 0 とする場合を考える．このとき，面 S_1，S_2，S_3，S_4，それぞれの上の全表面電荷はいくらか．ただし，どの面についても，その面上の電荷の分布は一様であるものとする．

(5) (4)で $Q>0$ とする．このとき，x 軸上における電位分布の概略を $-2R \leq x \leq 2R$ の範囲で図示せよ．グラフには $x=R$ および $x=-R$ における電位の値を書き込むこと．また $|x|>R$ ではグラフは定性的な形を示せばよく，$x=\pm 2R$ における電位の値は求めなくてよい．

$\boxed{6}$

(1) 厚さ $2d$ の無限に広い導体板に対し，図 1 のように座標軸をとる．導体板内に，x 軸の正の方向へ電流密度 J の一様な直流電流が流れているとき，導体の内部（$|z|<d$）および外部（$|z|>d$）における磁界(H_x, H_y, H_z)を求めよ．

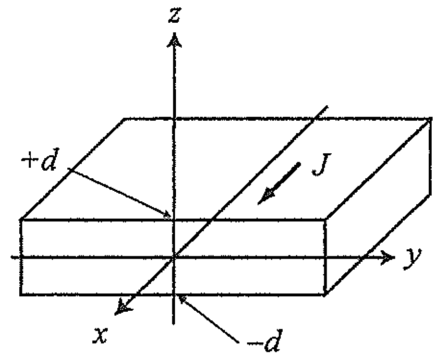


図 1

(2) 図 2 に示すように，(1)の導体板が金属イオンと自由電子で構成されているものと考える．金属イオンは静止しており，その電荷密度 ρ_i（$\rho_i>0$）は一様とする．電流密度 J の一様な直流電流が，一様な電荷密度 $-\rho_e$（$\rho_e>0$）の自由電子（電荷 $-e$，$e>0$）が x 軸の負の方向へ速さ v_e（$v_e>0$）で移動することにより生じるとする．このように自由電子が一様な密度を保って流れるためには，比 ρ_e/ρ_i がある特定の値を持つことが必要である．このことを以下にしたがって示し，その比の値を求めよ．ただし導体内の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする．

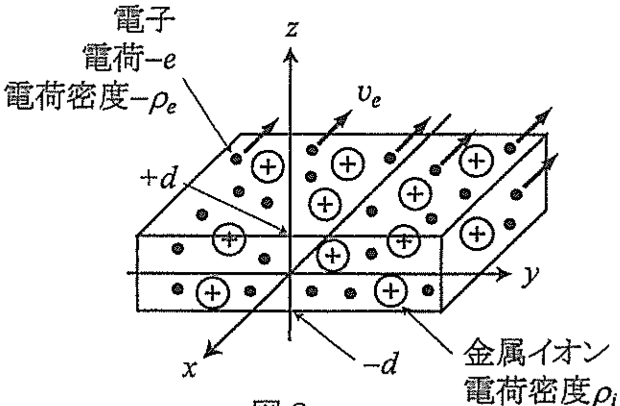


図 2

1) 一様な正味の電荷密度 $\rho_i-\rho_e$ により導体内に生じる電界(E_x, E_y, E_z)を求めよ．

2) (1)の結果を利用して，導体内の磁束密度(B_x, B_y, B_z)を ρ_e，v_e，z，μ_0 を用いて表せ．

3) 速さ v_e で移動する自由電子が，2)で求めた磁束密度から受ける力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$ $(F_{\mathrm{B}x}, F_{\mathrm{B}y}, F_{\mathrm{B}z})$ を求めよ．

4) 自由電子が一様な電荷密度 $-\rho_e$ で存在するためには，自由電子が 1)の電界から受ける力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{E}$ と 3)の $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$ が任意の位置で釣り合う必要がある．この条件が，比 ρ_e/ρ_i がある値を持つときに成り立つことを示し，その比の値を v_e，ε_0，μ_0 を用いて表せ．