H19

問題１１　Ａ[静電界・定常電流]

I

(1)　金属棒を含む同心円の円筒形 (半径 r, 長さ 1) の部分にガウスの法則を適用する。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

ここで, $\boldsymbol{n}$ は微小面積 dS の法線ベクトルである。この円筒形の上面と下面では, 電界 $\boldsymbol{E}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は直交するので積分はゼロになる. 従って,

$$E(r)\cdot 2\pi r=\frac{\lambda}{\varepsilon_0} \qquad \therefore\ E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad (r>R).$$

(2)　設問(1)の結果を用いると,

$$E(x)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}\right).$$

(3)　A, B 間の電位差 ϕ は,

$$\phi=\int_R^{a-R}E(x)\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{a-R}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{a-R}{R}-\ln\frac{R}{a-R}\right)=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a-R}{R}.$$

単位長さあたりの静電容量 C は,

$$C=\frac{\lambda}{\phi}=\pi\varepsilon_0\left(\ln\frac{a-R}{R}\right)^{-1}$$ または, $a>>R$ を考慮して, $$C=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(a/R)}.$$

II

(1)　$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}+\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right\}.$$

(2)　$r>>d$ より, 電位 $\phi(x,y,z)$ の中括弧の中の式は以下のように近似できる。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z\mp d)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2\mp 2dz}}=r^{-1}\left(1\mp\frac{2dz}{r^2}\right)^{-1/2}$$

一方, $2dz/r^2<<1$ なので, 近似式として, $\left(1\mp\frac{2dz}{r^2}\right)^{-1/2}\cong 1\pm\frac{dz}{r^2}$ が成り立つ。したがって,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z\mp d)^2}}=r^{-1}\left(1\pm\frac{dz}{r^2}\right)$$

$$\therefore\ \phi(x,y,z)=\frac{2qdz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{qdz}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

平成１９年度大学院工学研究科博士前期課程試験問題　解答

問題１１　B［電磁誘導・電磁波］

問 I. 解答

（１）　コイル面が磁界 H の方向と角度 θ をなすとき，コイルの鎖交磁束は

$$\Phi = \int_S B \cdot dS = \int_S \mu_0 H \cdot dS = \mu_0 H S_0 \cos\theta$$

$\because\quad \theta = \omega t$

$\therefore\quad \Phi = \mu_0 H S_0 \cos(\omega t)$

（２）　(a) コイルに生じる起電力が微小ギャップ AB 間の電圧になる．$H = H_0$ のとき，

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 H_0 S_0 \omega \sin(\omega t)$$

(b) $H = H_0 \sin(\omega t)$ のとき，

$$\Phi = \mu_0 H_0 S_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\mu_0 H_0 S_0 \sin(2\omega t)$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 H_0 S_0 \omega \cos(2\omega t)$$

H19

問題11B

2/2

問 II. 解答

（1） 入射波の電界ベクトルは,

$$\mathbf{E}_{i1} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \exp\{-jk_0(-x\cos\theta_{i1} + z\sin\theta_{i1})\}$$

（2） 入射波の磁界ベクトルは，平面波であることから,

$$\mathbf{H}_{i1} = \frac{1}{\eta_1}\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_{i1} \quad \text{ただし,} \quad \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_{i1} + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_{i1}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1\mu_0}{\varepsilon_1\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

よって,

$$\mathbf{H}_{i1} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(-\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\cos\theta_{i1} + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}\sin\theta_{i1})\exp\{-jk_0(-x\cos\theta_{i1} + z\sin\theta_{i1})\}$$

$$\therefore \mathbf{H}_{i1} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(-\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_{i1} - \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_{i1})\exp\{-jk_0(-x\cos\theta_{i1} + z\sin\theta_{i1})\}$$

（3） 境界において，電界，磁界とも，接線成分が連続なので,

電界の境界条件：$\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{E}_{i1} + \mathbf{E}_{r1} - \mathbf{E}_{t1}) = \mathbf{0}$

磁界の境界条件：$\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{r1} - \mathbf{H}_{t1}) = \mathbf{0}$

（4）

スネルの法則より,

面①において，$k_0 \sin\theta_{i1} = k_1 \sin\theta_{t1}$

面②において，$k_1 \sin\theta_{i2} = k_0 \sin\theta_{t2}$

$\theta_{t1} = \theta_{i2}$ なので,

$k_0 \sin\theta_{i1} = k_0 \sin\theta_{t2}$

$\therefore \theta_{i1} = \theta_{t2}$