専門科目（午前）　　　　　　　　　　28 大修

数学　　　　　　　　　　時間 9:30 ～ 11:00

注 意 事 項

1. 大問１の解答は答案用紙綴りの１枚目，大問２の解答は答案用紙綴りの２枚目，大問３の解答は答案用紙綴りの３枚目に記入せよ。
2. すべての答案用紙に受験番号を記入せよ。
3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。
4. なお虚数単位を j と表し，$\mathrm{j}^2 = -1$ である。

問 題 分 野
数学

1. x の関数 y に関する 2 階斉次微分方程式について，以下の問に答えよ。ただし，解答は導出過程も含めて答えること。

1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0$（$a$，$b$ は実定数）の一般解は，特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ を解くことにより求めることができる。特性方程式が，異なる 2 つの複素解 $h\pm k\mathrm{j}$（h，k は実定数）をもつとき，a，b の満たすべき条件を求めよ。

2) 問 1)で求めた条件が成り立つ場合，微分方程式の一般解を，h，k，j を含む関数で表せ。

3) 問 2)で求めた微分方程式の一般解を，j を含まない関数で表せ。

4) 問 3)の結果を用いて，微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ の一般解を求めよ。

2. 周期関数 $f(t)$ の複素フーリエ級数展開は次式で与えられる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\mathrm{j}n\omega_0 t),\ c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\exp(-\mathrm{j}n\omega_0 t)\,dt$$

ただし，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$，$T$ は $f(t)$ の周期とする。これを用いて，以下の問に答えよ。ただし，解答は導出過程も含めて答えること。

1) $f(t)$ が実数値関数であるとき，c_n と c_{-n} の関係を表す式を導出せよ。

2) $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ の複素フーリエ係数を d_n とする。$f(t)$ の複素フーリエ級数展開が項別微分可能であるとして，d_n を c_n で表せ。

3) $f(t)$ の 1 周期分が次式で与えられるとき，$f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n を求めよ。

$$f(t) = |t|,\ -\frac{T}{2} \le t < \frac{T}{2}$$

4) 問 3)で与えられた周期関数 $f(t)$ およびその導関数 $f'(t)$ を，t を横軸にして $-T \le t < T$ の範囲で別々にグラフ化せよ。ただし，微分不可能な点はグラフから除外してよい。

3. 確率モデル $X=\theta+\varepsilon$ において，誤差 ε の分布が，確率密度関数 $f(\varepsilon)=\frac{1}{2}\exp(-|\varepsilon|)$ で表される両側指数分布に従うとする。n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ が得られるとき，以下の手順で母数 θ の最尤推定量を求めよ。ただし，$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ はすべてお互い重複しない値とする。なお最尤推定とは，確率分布が既知であるが母数が未知であるとき，尤度関数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i-\theta)$ を最大にする母数を求める手法である。解答は導出過程も含めて答えること。

1) θ の対数尤度関数を求めよ。

2) n が偶数のとき，θ の最尤推定量の範囲を求めよ。

3) n が奇数のとき，θ の最尤推定量を求めよ。