

2010 年 3 月実施  
問題 1 電気工学  
(1 頁目 / 2 頁中)

以下の問に答えよ.

- (1) 次式の伝達関数  $G_1(s)$  で表されるシステムのゲイン特性が, Fig. 1(a) のように角周波数  $\omega_p$  で極大値を示すとき,  $G_1(s)$  の極が  $s$  平面内で取り得る領域を求め, 図示せよ. ただし,  $\zeta > 0$ ,  $\omega_n > 0$ ,  $\omega_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \omega_n$  である.

$$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- (2) Fig. 1(b) の閉ループ制御系について次の問に答えよ. ただし,  $K > 0$  とする.
- (a)  $L = 0$ ,  $T = 0$  のとき, 閉ループ制御系のステップ応答  $y(t)$  を求め, 図示せよ. また, このときの閉ループ制御系の極の位置を  $s$  平面上に示せ.
- (b)  $L > 0$ ,  $T > 0$  のとき, Fig. 1(b) の閉ループ制御系が安定な場合, 開ループ伝達関数のナイキスト線図の概形を描け.
- (c)  $L > 0$ ,  $K = 2\sqrt{3}$ ,  $T = 1$  のとき, 閉ループ制御系が安定限界になる  $L$  を求めよ.

Answer the following questions.

- (1) When the gain characteristic of the system with the transfer function  $G_1(s)$  given by the equation below has the maximum value at angular frequency  $\omega_p$ , as shown in Fig.1(a), find and sketch the allowable regions in the  $s$ -plane for the poles of  $G_1(s)$ . Here,  $\zeta > 0$ ,  $\omega_n > 0$ , and  $\omega_p = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \omega_n$ .
- $$G_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
- (2) Consider the closed-loop control system shown in Fig.1(b), where  $K > 0$ . Answer the following questions.
- (a) Let  $L = 0$  and  $T = 0$ . Calculate the step response  $y(t)$  of the closed-loop control system, and sketch the waveform of  $y(t)$ . Then, sketch the  $s$ -plane showing the poles of the closed-loop control system.
- (b) Let  $L > 0$  and  $T > 0$ . When the closed-loop control system is stable, sketch the Nyquist diagram of the open-loop transfer function.
- (c) Let  $L > 0$ ,  $K = 2\sqrt{3}$  and  $T = 1$ . Find the value  $L$  of the closed-loop control system at the limit of stability.

2010 年 3 月実施  
問題 1 電気工学  
( 2 頁目 / 2 頁中 )

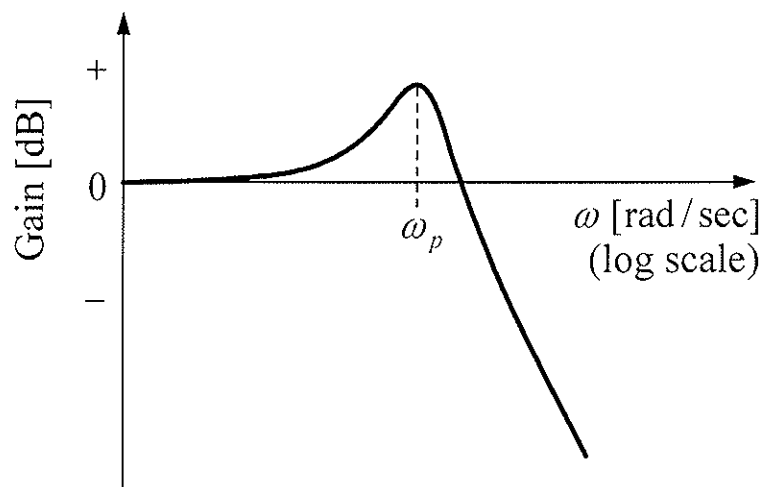


Fig.1(a)

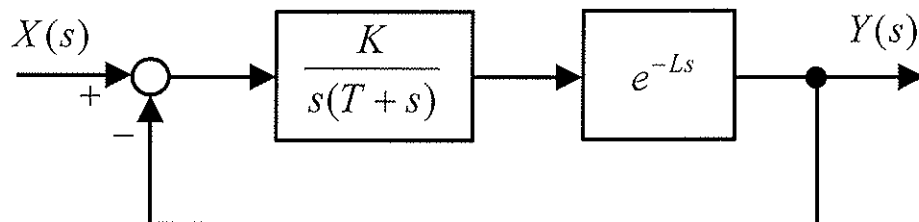


Fig.1(b)

## 2010年3月実施 問題2 通信工学 (1頁目／3頁中)

Fig. 2 は微分回路(Differentiator), 包絡線検波器(Envelope Detector)ならびに低域通過フィルタ(Low-pass Filter)で構成される FM 検波器の一例である. FM 信号は, 搬送波  $A_c \cos 2\pi f_c t$  が変調信号  $m(t) = \cos 2\pi f_m t$  (但し  $f_c \gg f_m$ ) により周波数変調され,

$$g_{\text{FM}}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \alpha(t)), \quad \alpha(t) = 2\pi \Delta f \int_{-\infty}^t m(t') dt'$$

と表されとする.  $g_{\text{FM}}(t)$  に加算される雑音は, 搬送波周波数  $f_c$  のまわりに,  $g_{\text{FM}}(t)$  の信号帯域幅  $B = 2(\Delta f + f_m)$  と同じ帯域幅で帯域制限され,

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \alpha(t)) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t + \alpha(t))$$

の形で表されとする. ここで  $n_c(t), n_s(t)$  は電力スペクトル密度

$$P_n(f) = \begin{cases} N_0 / B, & |f| \leq B/2 \\ 0, & |f| > B/2 \end{cases}$$

を有する互いに独立な雑音である. また, 低域通過フィルタの帯域は  $|f| \leq f_m$  で与えられるとする. 次の問に答えよ.

- (1) Fig. 2 の構成で FM 信号  $g_{\text{FM}}(t)$  が復調できることを示し, 復調した信号の平均電力を求めよ.
- (2)  $n(t)$  が加算された FM 信号  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  の位相雑音は  $n_s(t)$  に比例することを示せ. ここで信号振幅が十分大きいとして  $A_c \gg n_c(t), n_s(t)$  とし, 必要ならば  $\tan^{-1} x \approx x$  ( $x \ll 1$ ) を用いよ.
- (3)  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  を微分回路および包絡線検波器により復調した信号に含まれている雑音の電力スペクトル密度を求めよ. 但し  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  の振幅雑音は無視してよい. さらに, 低域通過フィルタの出力における雑音電力を求めよ.
- (4) 以上の結果から復調前と復調後の信号対雑音比  $(S/N)_{\text{in}}, (S/N)_{\text{out}}$  を求めよ. さらに, 変調指数  $\beta \equiv \Delta f / f_m$  が十分大きいとき, FM 復調利得 ( $(S/N)_{\text{out}}$  と  $(S/N)_{\text{in}}$  の比) は  $\beta^3$  に比例することを示せ.

2010年3月実施  
問題2 通信工学  
(2頁目／3頁中)

Fig. 2 is an example of an FM detector composed of a differentiator, an envelope detector, and a low-pass filter. Consider an FM signal in which a carrier  $A_c \cos 2\pi f_c t$  is frequency-modulated with a modulation signal  $m(t) = \cos 2\pi f_m t$  (where  $f_c \gg f_m$ ) and is represented as

$$g_{\text{FM}}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \alpha(t)), \quad \alpha(t) = 2\pi \Delta f \int_{-\infty}^t m(t') dt'.$$

Noise added to the FM signal is bandwidth-limited to the same bandwidth as that of  $g_{\text{FM}}(t)$ ,  $B = 2(\Delta f + f_m)$ , around the carrier frequency  $f_c$ , and written in the form

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \alpha(t)) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t + \alpha(t)).$$

Here,  $n_c(t)$  and  $n_s(t)$  are mutually independent noise whose power spectral density is given by

$$P_n(f) = \begin{cases} N_0 / B, & |f| \leq B/2 \\ 0, & |f| > B/2 \end{cases}.$$

The transmission band of the low-pass filter is given by  $|f| \leq f_m$ . Answer the following questions.

- (1) Show that the FM signal  $g_{\text{FM}}(t)$  can be demodulated by the configuration shown in Fig. 2, and derive the average power of the demodulated signal.
- (2) Show that the phase noise of the noise-added FM signal  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  is proportional to  $n_s(t)$ . Here the signal amplitude is assumed to be sufficiently large and therefore  $A_c \gg n_c(t), n_s(t)$ . Use  $\tan^{-1} x \approx x$  ( $x \ll 1$ ) if necessary.
- (3) Derive the power spectral density of the noise included in the signal demodulated from  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  by the differentiator and the envelope detector. Here, the amplitude noise of  $g_{\text{FM}}(t) + n(t)$  is assumed to be negligible. Then, derive the noise power at the output from the low-pass filter.
- (4) Using the results above, derive the signal-to-noise ratio before and after demodulation,  $(S/N)_{\text{in}}$  and  $(S/N)_{\text{out}}$ , respectively. Then, under a sufficiently large modulation index  $\beta \equiv \Delta f / f_m$ , show that the FM demodulation gain (the ratio of  $(S/N)_{\text{out}}$  and  $(S/N)_{\text{in}}$ ) is proportional to  $\beta^3$ .

2010年3月実施  
問題2 通信工学  
(3頁目／3頁中)

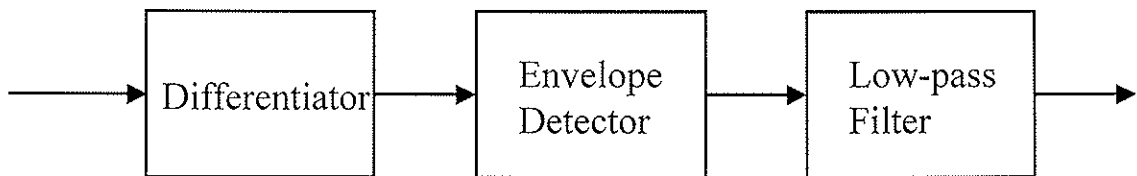


Fig. 2

2010年3月実施  
問題3 電子工学  
(1 頁目/2 頁中)

nnp バイポーラトランジスタ, および Fig. 3(a)に示す増幅回路について, 以下の問に答えよ.  
なお, バイポーラトランジスタは活性領域で動作しており, その微小信号モデルは Fig. 3 (b)  
に示されているものとする.

- (1) Fig. 3(c)は npn バイポーラトランジスタのベース中の電子濃度分布を示している. 活性  
状態で動作している npn バイポーラトランジスタのベース中の電子濃度分布として最も  
適切なものは Fig. 3(c)の中の曲線(A)~(C)のいずれであるか, 理由とともに答えよ. なお,  
 $n_{B0}$  は熱平衡状態でのベース中の電子濃度であり,  $W_B$  はベース幅である.
- (2) バイポーラトランジスタの電流増幅率を大きくするためには, バイポーラトランジスタの  
構造や不純物プロファイルをどのようにすれば良いか述べよ.
- (3) 本増幅回路において, コレクタ直流バイアス電流  $I_C$  を求めよ. ただし, バイポーラトラ  
ンジスタのベース・エミッタ間電圧は一定で  $V_{BE}$  とし, エミッタ接地電流増幅率を  $\beta$  とす  
る.
- (4) 本増幅回路において, 動作点がエミッタ抵抗  $R_E$  によって安定化するメカニズムを定性的  
に説明せよ.
- (5) 本増幅回路の微小信号等価回路を示すとともに, 電圧利得  $K_V$  を求めよ. ただし, 結合容  
量  $C_C$  のインピーダンスは十分小さくゼロとみなせるものとする.
- (6) エミッタ抵抗  $R_E$  と並列にバイパス容量  $C_E$  を接続した場合において, そのバイパス容量  
 $C_E$  のインピーダンスが十分小さくゼロとみなせる場合の電圧利得  $K_V$  を求めよ. ただし,  
結合容量  $C_C$  のインピーダンスは十分小さくゼロとみなせるものとする.

Answer the following questions regarding an npn bipolar transistor and the amplifier  
circuit shown in Fig. 3(a). Suppose that the bipolar transistor is operating in the  
active region and the small-signal model of the bipolar transistor is given by Fig. 3(b).

- (1) Fig. 3(c) shows the possible electron density distributions in the base region of the  
nnp bipolar transistor. Choose the most appropriate curve among (A), (B) and (C)  
for the electron density distribution in the base region of the bipolar transistor  
operating in the active region, and explain the reason. Here,  $n_{B0}$  is the electron  
density in the base region under the thermal equilibrium condition and  $W_B$  is the  
base width.
- (2) Describe how we should design the bipolar transistor structure, and doping profile  
to increase the current gain of the bipolar transistor.

2010年3月実施  
問題3 電子工学  
(2頁目/2頁中)

- (3) Derive the collector dc bias current  $I_C$  in the amplifier circuit. Here, the base-emitter voltage of the bipolar transistor is constant and denoted by  $V_{BE}$ , and the emitter-common current gain is denoted by  $\beta$ .
- (4) Explain qualitatively the mechanism of the operating point stabilization by the emitter resistance  $R_E$ .
- (5) Show the small-signal equivalent circuit of the amplifier circuit and derive the voltage gain  $K_V$ . Here, the impedance of the coupling capacitor  $C_C$  is small and can be regarded as zero.
- (6) Derive the voltage gain  $K_V$  when a bypass capacitor  $C_E$  is attached in parallel to the emitter resistance  $R_E$ . Here, the impedance of the bypass capacitor  $C_E$  is small and can be regarded as zero. The impedance of the coupling capacitor  $C_C$  is also small and can be regarded as zero.

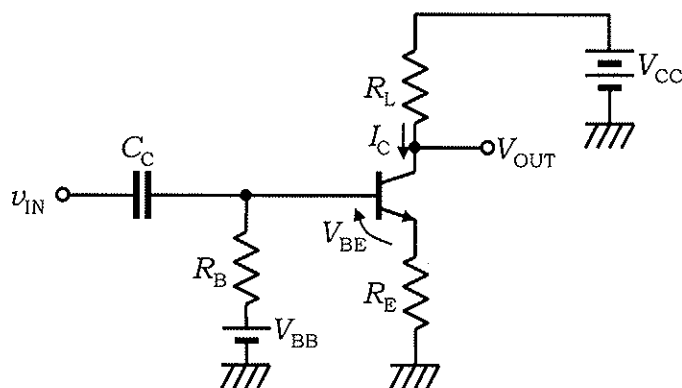


Fig. 3(a) Amplifier circuit.

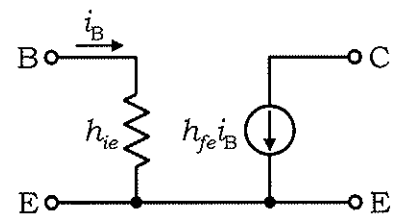


Fig. 3(b) Small-signal model of a bipolar transistor.

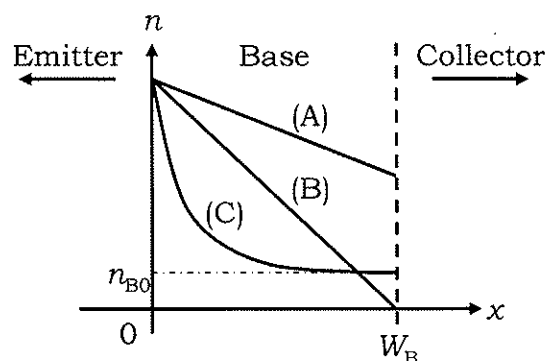


Fig. 3(c) Electron density distributions in the base region.

2010年3月実施  
問題4 計算機1  
(1 頁目 / 3 頁中)

相異なる3つの整数  $A, B, C$  が入力として与えられたとき, 最大値  $D$ , 中間値  $E$ , 最小値  $F$  を出力する論理回路を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 2つの整数  $U$  と  $V$  の大きさを比較するデジタル比較器の出力を  $w \in \{0, 1\}$  とすると,  $w$  は関数  $\text{comp}$  によって以下のように定義される.

$$w = \text{comp}(U, V) = \begin{cases} 1 & \text{if } U \geq V \\ 0 & \text{if } U < V \end{cases}$$

$A$  と  $B$  を比較する比較器の出力を  $x (= \text{comp}(A, B))$ ,  $B$  と  $C$  を比較する比較器の出力を  $y (= \text{comp}(B, C))$ ,  $C$  と  $A$  を比較する比較器の出力を  $z (= \text{comp}(C, A))$  とする.  $x = 0, y = 1, z = 1$  の時,  $D, E, F$  をそれぞれ  $A, B, C$  で表せ.

(2) Fig. 4(a) に示す 3 入力 1 出力マルチプレクサ MUX は, セレクタ入力  $S = 2s_1 + s_0$  ( $s_1, s_0 \in \{0, 1\}$ ) に従い, 入力データ  $I_1, I_2, I_3$  のうちの 1 つを  $O$  として出力する. 出力  $O$  は以下のように与えられる.

$$O = \begin{cases} I_1 & \text{if } S = 0 \\ I_2 & \text{if } S = 1 \\ I_3 & \text{if } S = 2 \end{cases}$$

この回路に  $A(= I_1), B(= I_2), C(= I_3)$  を入力したとき,  $D(= O)$  を出力させるために必要な  $s_1$  と  $s_0$  の論理式をそれぞれ問(1)の  $x (= \text{comp}(A, B))$ ,  $y (= \text{comp}(B, C))$ ,  $z (= \text{comp}(C, A))$  を使って表し, また  $s_1$  と  $s_0$  を生成する組み合わせ論理回路を示せ.

(3) Fig. 4(b) の論理回路を使い, クロックに同期して, MUX2 より  $D, E, F$  を順に出力することを考える. このために必要な MUX1 のセレクタ入力  $R(t)$  ( $t = 1, 2, 3$ ) を生成する順序回路を, 1つ以上の D フリップフロップ, 及び基本論理ゲート NOT, AND, OR を使って設計せよ. ただし, MUX1, MUX2 は Fig. 4(a) の MUX と同じ動作をすること, また MUX2 はセレクタ入力が  $S_D, S_E, S_F$  のとき, それぞれ  $D, E, F$  を出力することを仮定せよ.



2010年3月実施  
問題4 計算機1  
(2頁目／3頁中)

Consider a logic circuit which outputs the maximum value  $D$ , the middle value  $E$ , and the minimum value  $F$  when pairwise distinct 3 integers  $A, B, C$  are given as its inputs. Answer the following questions.

(1) Let  $w \in \{0, 1\}$  be the output of a digital comparator which compares the magnitude of 2 integers  $U$  and  $V$ . Then,  $w$  is defined by a function 'comp' as follows:

$$w = \text{comp}(U, V) = \begin{cases} 1 & \text{if } U \geq V \\ 0 & \text{if } U < V \end{cases}$$

Let  $x (= \text{comp}(A, B))$  be the output of a comparator which compares  $A$  and  $B$ ,  $y (= \text{comp}(B, C))$  be the output of a comparator which compares  $B$  and  $C$ , and  $z (= \text{comp}(C, A))$  be the output of a comparator which compares  $C$  and  $A$ . Express each of  $D, E, F$  by  $A, B, C$  when we have  $x = 0, y = 1, z = 1$ .

(2) Consider the 3-input 1-output multiplexer MUX shown in Fig. 4(a) which outputs one of its input data  $I_1, I_2, I_3$  as  $O$  according to its selector input  $S = 2s_1 + s_0$  ( $s_1, s_0 \in \{0, 1\}$ ). The output  $O$  is given as follows:

$$O = \begin{cases} I_1 & \text{if } S = 0 \\ I_2 & \text{if } S = 1 \\ I_3 & \text{if } S = 2 \end{cases}$$

Express each of the logical expressions of  $s_1$  and  $s_0$  using  $x (= \text{comp}(A, B))$ ,  $y (= \text{comp}(B, C))$ , and  $z (= \text{comp}(C, A))$  from question (1) in order to output  $D (= O)$  when we have  $A (= I_1), B (= I_2), C (= I_3)$  as the inputs of this circuit, and also design a combinational logic circuit which generates  $s_1$  and  $s_0$ .

(3) Consider a sequential output  $D, E, F$  from MUX2 in synchronization with a clock using the logic circuit shown in Fig. 4(b). For this purpose, design a sequential logic circuit which generates a selector input sequence  $R(t)$  ( $t = 1, 2, 3$ ) of MUX1 using one or more D flip flops, and the basic logic gates NOT, AND, and OR. Suppose that MUX1 and MUX2 operate in the same way as MUX in Fig. 4(a), and MUX2 outputs  $D, E, F$  for its selector inputs  $S_D, S_E, S_F$ , respectively.

2010年3月実施  
問題4 計算機1  
(3頁目／3頁中)

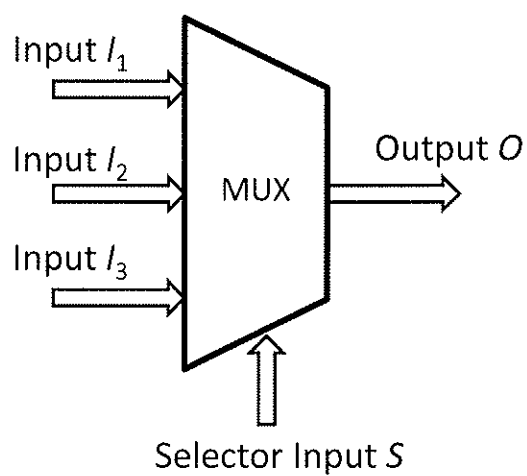


Fig. 4(a)

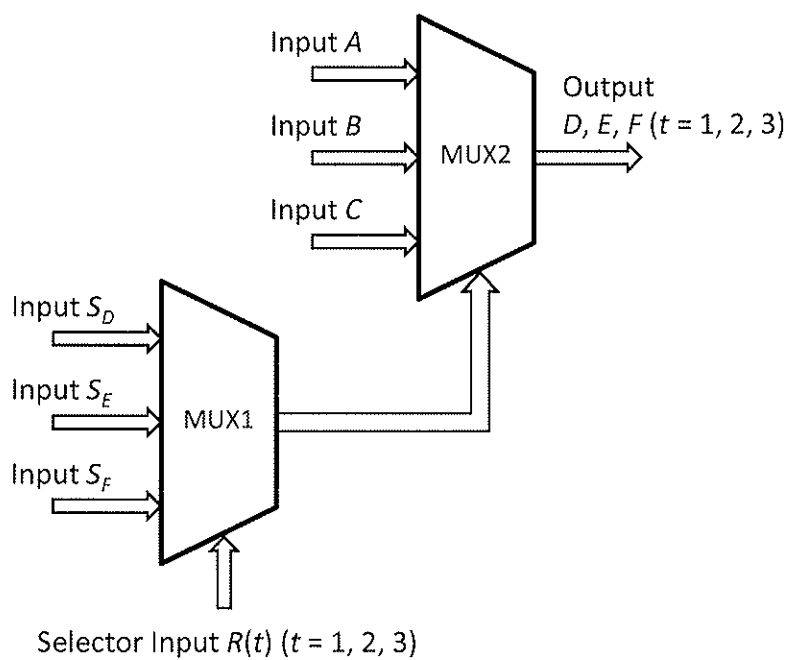


Fig. 4(b)

2010年3月実施  
問題5 計算機2  
(1 頁目 / 2 頁中)

次の二つの再帰関数  $f$  と  $g$  を考える. ただし,  $*$  は整数乗算,  $\text{DIV}$  は整数除算の商,  $\text{MOD}$  は整数除算の余りをそれぞれ表す. また,  $\text{IF } e_1 \text{ THEN } e_2 \text{ ELSE } e_3$  は, 等式  $e_1$  が成り立てば  $e_2$  に, 成り立たなければ  $e_3$  に等しい式である.

```
f(x, y) =  
  IF y = 0 THEN 1 ELSE (x * f(x, y - 1))  
  
g(x, y, a) =  
  IF y = 0 THEN a ELSE  
    IF (y MOD 2) = 0 THEN g(x * x, y DIV 2, a) ELSE  
      g(x, y - 1, x * a)
```

下の問に答えよ.

- (1)  $f(2, 7)$  と  $g(2, 5, 4)$  の値をそれぞれ計算せよ. 計算過程も示すこと.
- (2) 任意の非負整数  $x, y, a$  について,  $a * f(x, y)$  の値と  $g(x, y, a)$  の値が等しいことを証明せよ.
- (3) C 言語または同様の手続き型言語において, 再帰ではなく繰り返し (ループ) を用いて,  $g(x, y, 1)$  と同等な関数  $h(x, y)$  を記述せよ. ここで「同等」とは「任意の非負整数  $x, y$  について,  $h(x, y)$  の値は  $g(x, y, 1)$  の値に等しく, かつ, 整数演算の回数のオーダーも等しい」という意味である. 関数は値呼び (関数の呼び出し時に引数の値が計算される) とし, 整数の大きさに制限はないとする.

2010年3月実施  
問題5 計算機2  
(2頁目／2頁中)

Consider the following two recursive functions  $f$  and  $g$ , where  $*$  denotes integer multiplication,  $\text{DIV}$  the quotient of integer division, and  $\text{MOD}$  the remainder of integer division, respectively. In addition,  $\text{IF } e_1 \text{ THEN } e_2 \text{ ELSE } e_3$  is an expression that equals  $e_2$  if the equation  $e_1$  holds and equals  $e_3$  otherwise.

```
f(x, y) =  
  IF y = 0 THEN 1 ELSE (x * f(x, y - 1))  
  
g(x, y, a) =  
  IF y = 0 THEN a ELSE  
  IF (y MOD 2) = 0 THEN g(x * x, y DIV 2, a) ELSE  
  g(x, y - 1, x * a)
```

Answer the questions below.

- (1) Calculate the values of  $f(2, 7)$  and  $g(2, 5, 4)$ , respectively. Show your working.
- (2) Prove that, for any non-negative integers  $x$ ,  $y$ , and  $a$ , the value of  $a * f(x, y)$  equals that of  $g(x, y, a)$ .
- (3) Using the C language or a similar procedural language, write a function  $h(x, y)$  that is equivalent to  $g(x, y, 1)$  by means of iteration (loop) instead of recursion. Here, "equivalent" means that "for any non-negative integers  $x$  and  $y$ , the value of  $h(x, y)$  equals that of  $g(x, y, 1)$ , and also the orders of the numbers of the integer operations are equal." Assume that functions are call-by-value (the values of arguments are calculated when the functions are called), and that the size of the integers is unlimited.

2010年 3 月実施  
問題 6 物理専門 1  
( 1 頁目 / 3 頁中 )

変位座標  $x$ , 角振動数  $\omega$  を持つ質量  $m$  の 1 次元調和振動子の波動関数  $\varphi(x)$  は, シューレーディンガー方程式

$$\left( \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (6A)$$

で決定される. ここで  $\hat{p}$  は  $-i\hbar \frac{d}{dx}$  で定義され,  $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割った数,  $i$  は虚数単位,  $E$  はエネルギーである. 演算子  $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  をつぎのように定義する:

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \hat{p} - i\sqrt{\frac{m}{2}} \omega x, \quad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \hat{p} + i\sqrt{\frac{m}{2}} \omega x.$$

以下の問に答えよ.

- (1) 関係  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\hbar}{2} \omega$  を導出し, 式(6A)が  $\left( \hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{\hbar}{2} \omega \right) \varphi(x) = E \varphi(x)$  と表されることを示せ.
- (2)  $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  は交換関係  $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hbar \omega$  を満たすことを示せ.
- (3) 微分方程式  $\hat{a}\Phi(x) = 0$  を  $\Phi(x)$  に対して解け.
- (4) 問(3)の  $\Phi(x)$  が式(6A)の解になること, およびそのエネルギーが  $\frac{\hbar}{2} \omega$  となることを示せ.
- (5) 式(6A)の任意の解に対して以下の関係式が成り立つ:

$$\int |\hat{a}\varphi(x)|^2 dx + \frac{\hbar}{2} \omega = E.$$

この式を用いて,  $\Phi(x)$  が基底状態を表すことを説明せよ.

- (6)  $\varphi(x)$  はエネルギー  $E$  に対する式(6A)の解であるとする. このとき,  $\hat{a}^\dagger \varphi(x)$  も式(6A)の解であること, および対応するエネルギーが  $E + \hbar \omega$  で与えられることを示せ.

2010年 3 月実施  
問題 6 物理専門 1  
( 2 頁目 / 3 頁中 )

- (7) 問(6)から,  $\Phi(x)$  に  $\hat{a}^\dagger$  を作用させると調和振動子の第一励起状態 (すなわち, 基底状態の上の次の励起状態) の波動関数が得られることがわかる.  $n$  番目 ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) の励起状態のエネルギーを求めよ. ただし,  $n=0$  を基底状態とせよ.
- (8) 調和振動子のポテンシャル曲線を描き, その中に  $n=0, 1, 2$  に対するエネルギー準位および対応する波動関数の概略を示せ.

Wavefunctions  $\varphi(x)$  of a one-dimensional harmonic oscillator of mass  $m$ , with a displacement coordinate  $x$  and an angular frequency  $\omega$  are determined by the Schrödinger equation

$$\left( \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \varphi(x) = E \varphi(x). \quad (6A)$$

Here,  $\hat{p}$  is defined by  $-i\hbar \frac{d}{dx}$ ,  $\hbar$  is the Planck constant divided by  $2\pi$ ,  $i$  the imaginary unit,

and  $E$  the energy. Let us define the following operators  $\hat{a}$  and  $\hat{a}^\dagger$ :

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \hat{p} - i \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x, \quad \hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \hat{p} + i \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x.$$

Answer the following questions.

- (1) Derive the relation  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\hbar}{2} \omega$ , and show that the equation (6A) can be expressed as  $\left( \hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{\hbar}{2} \omega \right) \varphi(x) = E \varphi(x)$ .
- (2) Show that the operators  $\hat{a}$  and  $\hat{a}^\dagger$  satisfy the commutation relation  $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \hbar\omega$ .

2010年3月実施  
問題6 物理専門1  
(3頁目／3頁中)

- (3) Solve the differential equation  $\hat{a}\Phi(x)=0$  for  $\Phi(x)$ .
- (4) Show that  $\Phi(x)$  in question (3) is a solution of eq. (6A) and that its energy is given by

$$\frac{\hbar}{2}\omega.$$

- (5) For a given solution of eq. (6A), the following relation holds:

$$\int |\hat{a}\varphi(x)|^2 dx + \frac{\hbar}{2}\omega = E.$$

Using this equation, explain why  $\Phi(x)$  represents the ground state.

- (6) Assume that  $\varphi(x)$  is a solution of eq. (6A) for an energy  $E$ . Show that  $\hat{a}^\dagger\varphi(x)$  is also a solution of eq. (6A) and that its corresponding energy is given by  $E + \hbar\omega$ .
- (7) Question (6) indicates that operation of  $\hat{a}^\dagger$  to  $\Phi(x)$  gives the wavefunction of the first excited state (i.e., the next excited state above the ground state) of the harmonic oscillator. Obtain the energy of the  $n$ -th ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) excited state. Let  $n=0$  denote the ground state.
- (8) Draw a potential curve of a harmonic oscillator. Sketch the energy levels for  $n=0,1,2$  and the corresponding wavefunctions.

2010年3月実施  
問題7 物理専門2  
(1頁目／1頁中)

複素変数  $z$  の関数

$$f(z) = z^{-3}e^z$$

を考える.  $C$  は  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) により表される円周上を正の向きに回る積分路である.  $i$  は虚数単位である. 以下の問に答えよ.

- (1) 関数  $f(z)$  の  $z = 0$  のまわりのローラン級数を求めよ.
- (2) 複素積分  $\int_C f(z)dz$  を求めよ.
- (3) 複素積分  $\int_C f(z^{-1})dz$  を求めよ.
- (4) 実定積分  $\int_0^{2\pi} \exp(\cos(x))\cos(2x - \sin(x))dx$  を求めよ.

Consider a function

$$f(z) = z^{-3}e^z$$

of a complex variable  $z$ .  $C$  is a positively oriented contour  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Let  $i$  denote the imaginary unit. Answer the following questions.

- (1) Find the Laurent expansion of the function  $f(z)$  about  $z = 0$ .
- (2) Find the value of the complex integral  $\int_C f(z)dz$ .
- (3) Find the value of the complex integral  $\int_C f(z^{-1})dz$ .
- (4) Find the value of the real definite integral  $\int_0^{2\pi} \exp(\cos(x))\cos(2x - \sin(x))dx$ .