(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$ を利用して偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x \cdot F_z - F_x \cdot \frac{\partial}{\partial x}F_z}{F_z^2} = -\frac{\left\{F_{xx} + F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\right\}F_z - F_x\left\{F_{zx} + F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{F_z^2} \\
&= -\frac{F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2}{F_z^3} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_x \cdot F_z - F_x \cdot \frac{\partial}{\partial y}F_z}{F_z^2} \\
&= -\frac{F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + F_{zz}F_xF_y}{F_z^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_y \cdot F_z - F_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}F_z}{F_z^2} = -\frac{F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2}{F_z^3}
\end{aligned}$$

となる。ここで (1) により停留点 (x_0, y_0) においては $z_0 = f(x_0, z_0)$ とすると $F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F_{xy}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -\frac{F_{yy}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}
\end{aligned}$$

となり

$$H(x_0, y_0) = \frac{1}{F_z(x_0, y_0, z_0)^2}\begin{vmatrix} F_{xx}(x_0, y_0, z_0) & F_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ F_{yx}(x_0, y_0, z_0) & F_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

である。

(4) 2次偏導関数を計算すると

$$F_{xx} = 24x^2 + 8z^2,\ F_{xy} = 0,\ F_{yy} = -30y + 30z$$

であるから

$$F_z(1, 0, 1)^2 H(1, 0) = 32 \times 30 > 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -32/(-40) > 0$$

より $(1, 0)$ において極小値 1 をとる。また

$$F_z(2, 4, 2)^2 H(2, 4) = 128 \times (-60) < 0$$

であるから，ここでは鞍点になる。

問題２　電磁気学　Ｉ

＜解答＞

（1）　$D=\dfrac{Q}{a^2}$

$E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 e^{\frac{z}{d}} a^2}$

（2）　$V=\int_0^d E\,dz=\int_0^d \dfrac{Q}{\varepsilon_0 e^{\frac{z}{d}} a^2}dz=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 a^2}\int_0^d e^{-\frac{z}{d}}dz=-\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 a^2}\left[e^{-\frac{z}{d}}\right]_0^d=\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 a^2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

（3）　$C=\dfrac{Q}{V}=\varepsilon_0\dfrac{a^2}{d\left(1-\dfrac{1}{e}\right)}$

（4）　$\varDelta C=\varepsilon\dfrac{a\varDelta y}{d}=\varepsilon_0 e^{\frac{y}{a}}\dfrac{a\varDelta y}{d}$

（5）　$C=\int_0^a \varepsilon_0 e^{\frac{y}{a}}\dfrac{a}{d}dy=\varepsilon_0\dfrac{a}{d}\int_0^a e^{\frac{y}{a}}dy=\varepsilon_0\dfrac{a^2}{d}\left[e^{\frac{y}{a}}\right]_0^a=\varepsilon_0\dfrac{a^2}{d}(e-1)$

解答例

（1） 媒質１と媒質２の境界面にまたがった微小な長方形（長辺：ℓ，短辺：$\Delta\delta$）の閉ループC をとる。このとき，$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$ から，$\Delta\delta\to 0$ として

$$\int_{Surface}\mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s}=\left(E_1\sin\theta_1-E_2\sin\theta_2\right)\cdot l=0$$

$$\therefore E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2$$

（2） 媒質１と媒質２の境界面を含む円柱体（上下面積：S，高さ：$\Delta\delta$）の微小な閉領域Vをとる。このとき，$\mathrm{div}\,\vec{J}=0$ から，$\Delta\delta\to 0$ として

$$\int_V div\,\vec{J}\,dv=\int_{Surface}\vec{J}\cdot d\vec{S}=\left(-J_1\cos\theta_1+J_2\cos\theta_2\right)\cdot S=0$$

$$\therefore J_1\cos\theta_1=J_2\cos\theta_2$$

（3）（1）（2）と $J_1=\sigma_1E_1, J_2=\sigma_2E_2$ から，

$$\frac{E_1\sin\theta_1}{\sigma_1E_1\cos\theta_1}=\frac{E_2\sin\theta_2}{\sigma_2E_2\cos\theta_2}\quad\therefore\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

別解：両媒質の定常電流の法線成分と静電界の接線成分はそれぞれ相等しいので，$J_1\cos\theta_1=J_2\cos\theta_2$，$E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2$。これらと $J_1=\sigma_1E_1, J_2=\sigma_2E_2$ から（3）を得る。

（4）（1）と同じ閉領域Vで $\Delta\delta\to 0$ のとき，単位面積あたりに蓄積される電荷密度を ρ_s として，

$$\int_V div\,\vec{D}\,dv=S\cdot\rho_s=\int_{Surface}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\left(-\varepsilon_1E_1\cos\theta_1+\varepsilon_2E_2\cos\theta_2\right)\cdot S$$

$$\therefore \rho_s=-\varepsilon_1E_1\cos\theta_1+\varepsilon_2E_2\cos\theta_2=0$$

$$\therefore \varepsilon_1E_1\cos\theta_1=\varepsilon_2E_2\cos\theta_2$$

（1）から，

$$\frac{\varepsilon_1E_1\cos\theta_1}{J_1\cos\theta_1}=\frac{\varepsilon_2E_2\cos\theta_2}{J_2\cos\theta_2}\quad\therefore\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$$

別解：静電界の接線成分は相等しく，境界面に真電荷がないときは電束密度の法線成分も相等しいので，$E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2$，$D_1\cos\theta_1=D_2\cos\theta_2$　よって，$D_1=\varepsilon_1E_1, D_2=\varepsilon_2E_2$ から

$$\frac{E_1\sin\theta_1}{\varepsilon_1E_1\cos\theta_1}=\frac{E_2\sin\theta_2}{\varepsilon_2E_2\cos\theta_2}\quad\therefore\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

（3）から $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$　$\therefore\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1}=\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$