(H16)

平成１６年度大学院工学研究科（博士前期課程）専門試験問題　回答例

問題 11　　静電磁界・定常電流

解答は SI 単位系を用い、真空中の誘電率と透磁率を、それぞれ ϵ_0、μ_0 とする。

問 1　解答

（1）球殻は接地されているため、球殻の電位は0であり、球殻の外側には電界は存在しない。また、導体の内部では電界及び電束密度は0となるため、電界と電束密度は $a < r < b$ の範囲にのみ存在する。導体と球殻の配置の対称性から、電界と電束密度は原点 o を中心とした球面上で一定であり、それらの方向は球面の法線と平行となる。また、半径 r が $a < r < b$ である球面を通過する電束線の総数は、この球面上の電束密度の強さを D として、$D(r)4\pi r^2$ であり、この値は球面の内部にある実電荷 Q と等しい。従って、$a < r < b$ の範囲で、$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ となる。誘電率が ϵ の物質中では、電界の強さ E は $D = \epsilon E$ の関係より求まる。

$r < a$ は導体の中なので、$E = 0$、また $D = 0$ となる。

$a < r < t$ では、電束線は上で述べたように、$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ である。$D = \epsilon_1 E$ より、電界は $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}$ となる。

$t < r < b$ では、$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ であり、電界は $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2}$ となる。

電位 V は、電界の対称性より r のみに依存するので、半径 r の球面上の電位 $V(r)$ は, 次式で与えられる。

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E dr \tag{1}$$

式 (1) に上で求めた $E(r)$ を代入し、電位を計算する。

$b < r$ では $V = 0$ である。

$t < r < b$ では、

$$V(r) = -\int_{b}^{r} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \tag{2}$$

$a < r < t$ では、

$$V(r) = -\int_{t}^{r} E dr - \int_{b}^{t} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{b}\right) \tag{3}$$

となる。

$r < a$ では、電界は0であり、電位は一定となる。これを V_0 とおくと、V_0 は (3) 式に $r = a$ を代した値となる。

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

H14

電束密度と電界、および電位の r 依存の概略を図１に与える。

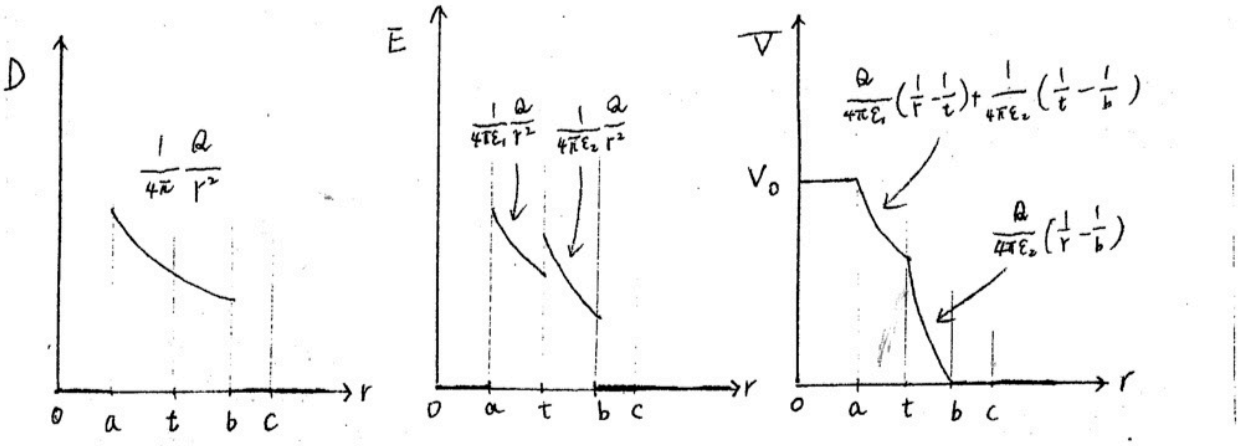


図１：電束密度の強さ D、電界電界の強さ E および電位 V の r 依存の概略

（２）導体球と導体球殻との電位差は式(4) で表される、この二つの導体間の静電容量 C は、$V_0 = Q/C$ より次式で与えられる。

$$C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{t}) + \frac{1}{\epsilon_2}(\frac{1}{t} - \frac{1}{b})} \tag{5}$$

（３）$Q > 0$ の場合には、電界が最大となるところは、$a < r < t$ の範囲では $r = a$ にあり、$t < r < b$ では $r = t$ にある。従って、各々の範囲における電界の最大値が一致する条件は、$\epsilon_1 a^2 = \epsilon_2 t^2$ となる。$Q < 0$ の場合は、$\epsilon_1 t^2 = \epsilon_2 b^2$ となる。

問２　解答

磁界と磁束密度は、導体及び電流の幾何学的な対称性から z に依らず、xy 面内においては、原点を中心とする円上で一定の大きさを持ち、それらの方向は、その円の接線方向と平行であることがわかる。磁界と磁束密度のベクトルの向は、電流の向きが $+z$ であれば、円を上方から見て反時計方向となる。

磁界と磁束密度の強さを、それぞれ H と B で表す。

$r > R$ の領域では、定常電流に対するアンペールの法則より、半径 r の円に沿って磁界を線積分した $2\pi rH$ は円内を $+z$ 方向に流れる電流 J に等しい。　従って、$H = \frac{J}{2\pi r}$ となる。また、$B = \mu_0 H$ より、磁束密度は $B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}$ となる。

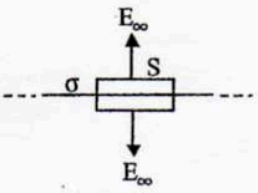
$r < R$ では、半径 r の円に沿って磁界 H を線積分した $2\pi rH$ は円の内部を z 方向に流れる電流 $\frac{Jr^2}{R^2}$ に等しい。　従って、$H = \frac{Jr}{2\pi R^2}$ となり、磁束密度は $B = \frac{\mu_0 Jr}{2\pi R^2}$ となる。

問題２２　電磁気・電磁波

１．解答

（1）平板が無限大なので，空間電界は平板からの距離に無関係で一様であり，平板に垂直する方向である．図のように平板をまたぐ長方体（上下面の表面積がそれぞれ S [m^2]）の表面上で積分型のガウスの定理 $\int_S E\cdot\hat{n}dS=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ （$\hat{n}$:法線単位ベクトル，Q：電荷量[C]）を適用すると，

$$E_\infty S+E_\infty S=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$



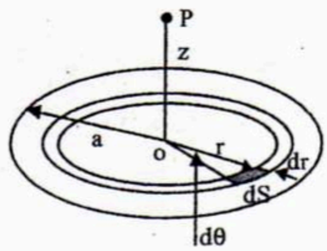
を得る．これより，

$$E_\infty=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\quad [\mathrm{V/m}]$$

である．

（2）O を原点とした円柱座標で考えれば，円板平面の微小積分面積 dS は $dS=rd\theta dr$, 点 P までの距離 d は $d=\sqrt{z^2+r^2}$ である．従って，dS 上の電荷による点 P での電位は，

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{d}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\theta}{\sqrt{z^2+r^2}}.$$



dV を全円板平面にわたって積分すると，

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\sigma rdrd\theta}{\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{z^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2}-z\right)\quad [\mathrm{V}]$$

それ故に，点 P での電界 E_a は

$$E_a=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\quad [\mathrm{V/m}]$$

である．

（3）$E_a=E_\infty/2$ から，

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

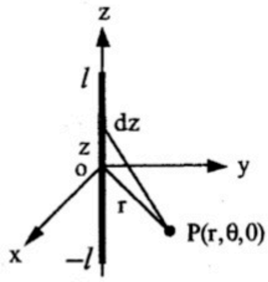
$$\sqrt{z^2+a^2}=2z$$
$$a^2=3z^2.$$

A16

2．解答

（1） ベクトルポテンシャルは，線要素 dz が z 方向しかないので z 成分だけをもつ．すなわち，$A_r = A_\theta = 0$ である．

線要素 dz によるベクトルポテンシャルは



$$dA_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz}{\sqrt{z^2+r^2}}.$$

これを z に沿って，$-l$ から l まで積分すると，

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dz}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\log\left|\sqrt{z^2+r^2}+z\right|\Big|_{z=-l}^{z=l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\log\left(\frac{\sqrt{r^2+l^2}+l}{\sqrt{r^2+l^2}-l}\right)$$

を得る．

（2） 円柱座標を用いると，$A_r = A_\theta = 0$ で，A_z は θ を含まないから，

$$H_\theta = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times A)_\theta = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$= -\frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\log\sqrt{r^2+l^2}+l\right)-\left(\log\sqrt{r^2+l^2}-l\right)\right]$$

$$= \frac{I}{2\pi r}\frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}} \quad [\text{A/m}]$$

$$H_r = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times A)_r = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) = 0$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times A)_z = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) = 0$$