平成 16 年 8 月 24 日（火）
10:00 ～ 12:00

平成 17 年度大学院博士前期課程
電気工学専攻
通信工学専攻
電子工学専攻
電子情報エネルギー工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。解答は

問題 1　を　1 枚目（白色）の解答用紙
問題 2　を　2 枚目（赤色）の解答用紙
問題 3　を　3 枚目（青色）の解答用紙
問題 4　を　4 枚目（黄色）の解答用紙
問題 5　を　5 枚目（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 20 点であり、合計 100 点である。

●問題紙は表紙を含めて 6 枚である。

問題 1 （20 点）

（a） 次の連立方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$$

（b） 次の n 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

M-05-院-2

問題 2 ［２０点］

つぎの連立微分方程式を(a)～(d)の手順に従って解き、$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$を求めよ。

$$dx/dt + dy/dt = 2z \qquad (1)$$
$$dy/dt + dz/dt = 2x \qquad (2)$$
$$dz/dt + dx/dt = 2y \qquad (3)$$

ただし、$x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$, $z(0) = \gamma$ とする。

(a) $x + y + z = w$ とおき、$w(t)$ に関する微分方程式に書き換えよ。

(b) (a)で求めた微分方程式の解 $w(t)$ を求めよ。

(c) 式(1), (2), (3) および $w(t)$ より、$z(t)$ を求めよ。

(d) 同様に、$x(t)$ および $y(t)$ を求めよ。

問題３（20 点）

以下の設問に答えよ。ただし、留数定理は用いないこと。

(a) 図１に示すように、$z=x+iy$ の複素平面上に、中心が α、半径 r の円を描く。その円周上を正の向きに１周する積分経路 C_1 をとり、次の積分の値を求めよ。

$$\int_{C_1}\frac{dz}{z-\alpha}$$

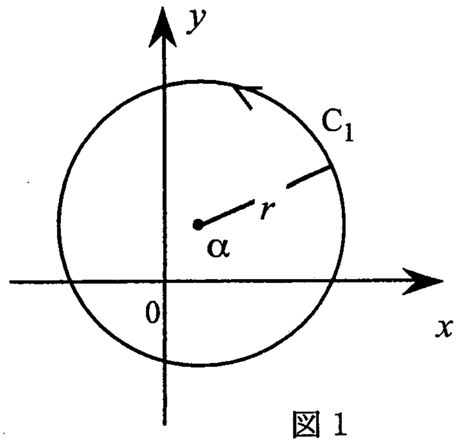

図１

(b) 図２に示すように、原点を中心とする半径 2 の円周上を正の向きに１周する積分経路を C_2 とし、問 (a) の結果を用いて、次の積分の値を求めよ。

$$\int_{C_2}\frac{z-2}{z^2-z}dz$$

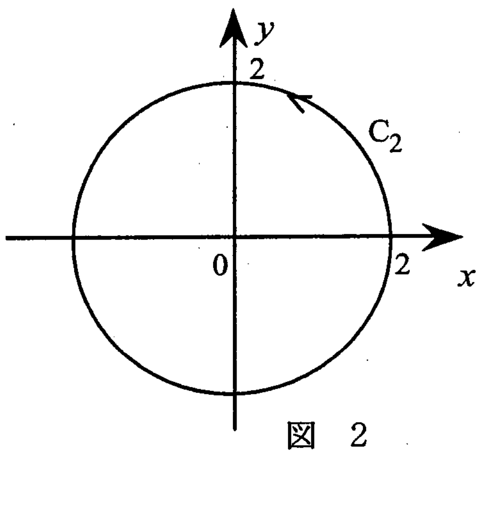

図 2

4

問題 4 (20 点)

つぎの和 S を以下の手順で求める.

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+(2\pi n)^2}$$

(a) つぎの関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

$$f(t) = \exp(-|t|)$$

ただし, 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ をつぎの式で定義する.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt$$

(b) $\delta(t)$ をディラックの δ-関数として, つぎの式で定義される t 軸上で周期的なインパルス列 $g(t)$ を考える.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ は ω 軸上の周期的なインパルス列となることを示せ. その際, δ-関数に関する公式

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-in\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$$

を用いてもよい.

(c) つぎの式で定義される f と g の合成積 $(f*g)$ を考える.

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

このとき, 合成積 $(f*g)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[(f*g)](\omega)$ はつぎの式で与えられる.

$$\mathcal{F}[(f*g)](\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega)$$

この $\mathcal{F}[(f*g)](\omega)$ をさらに逆フーリエ変換することにより, 和 S が $S = (f*g)(0)$ と表せることを示せ. さらに, 和 S の値を求めよ.

問題５（２０点)

(a) $0<t\leq 2\pi$ で定義された関数 $f(t)$, $g(t)$ と次の関係にある関数 $x(t)$ がある。

$$x(t)=f(+0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(1) $G(s)=L[g](s)=\dfrac{1}{s(s-3)}$ を逆ラプラス変換することによって、$g(t)$ を求めよ。
ここで、L はラプラス変換を意味している。

(2) $f(t)=1-\cos 3t$ である時の $x(t)$ を求めよ。ここで、$f'(t)$ は関数 $f(t)$ の一階微分を示す。

(b) 関数 $f(t)$ を $[0,+\infty]$ で定義された周期 ω の鋸型の周期関数とするとき、このラプラス変換は、

$$L[f](s)=\frac{1}{1-e^{-\omega s}}\int_0^{\omega} e^{-st}f(t)dt$$

と与えられる。ここで、L はラプラス変換を意味している。これを利用して、下図に示したように、$f(t)=t-na\left(na\leq t<(n+1)a; n=0,1,2,\cdots\cdots\right)$ で与えられる周期関数のラプラス変換を示せ。