２００９年８月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig.1 の様に，真空中に，y 軸と平行な半径 a の無限長円柱導体(導体１)が接地された無限平板導体から距離 h ($a << h$)の位置に存在する．以下の問に答えよ．ただし，真空の透磁率と誘電率をそれぞれ μ_0，ε_0 とする．

(1) 導体１に，単位長さあたり λ の電荷が一様に分布するとき，導体１に働く単位長さあたりの力 F の大きさと向きを求めよ．

(2) 導体１と無限平板導体間の単位長さあたりの静電容量 C を求めよ．

(3) 外部電流が導体１の表面のみを流れるとき，導体１の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ．

(4) $-y$ 方向の直流電流を導体１に通電する．以下の場合における $z>0$ の磁力線を図示せよ．

(a) 無限平板導体の導電率が無限大 ($\sigma=\infty$) の場合

(b) 無限平板導体を，透磁率が無限大 ($\mu=\infty$) の無限平板状媒体に置き換えた場合

(5) y 軸と平行な別の半径 a の無限長円柱導体(導体２)が $x=d$ ($a << d$)，$z=h$ に設置されている．導体１に電圧 V_1 を印加したとき，導体２に誘導される電圧 V_2 を求めよ．

As shown in Fig.1, in a vacuum space an infinitely long conducting cylinder (conductor 1) of radius a parallel to the y-axis is located at a distance h ($a << h$) from a grounded infinite conducting plate. Answer the following questions. The permeability and permittivity of the vacuum space are μ_0 and ε_0, respectively.

(1) Find the magnitude and the direction of the force per unit length F applied to conductor 1 when conductor 1 is uniformly charged with a charge density per unit length λ.

(2) Find the capacitance per unit length C between conductor 1 and the grounded infinite conducting plate.

(3) Find the self-inductance per unit length L of conductor 1 when an externally imposed current flows only along the surface of conductor 1.

(4) A DC current in the $-y$ direction is imposed on conductor 1. Draw the magnetic field lines in the region $z>0$ when:

(a) the conductivity of the grounded infinite conducting plate is infinite ($\sigma=\infty$);

(b) the grounded infinite conducting plate is replaced by an infinite plate medium with infinite permeability ($\mu=\infty$).

(5) Another infinitely long conducting cylinder (conductor 2) of radius a parallel to the y-axis is located at $x = d$ ($a << d$) and $z = h$. Find the voltage induced in conductor 2 V_2 when a voltage V_1 is applied to conductor 1.

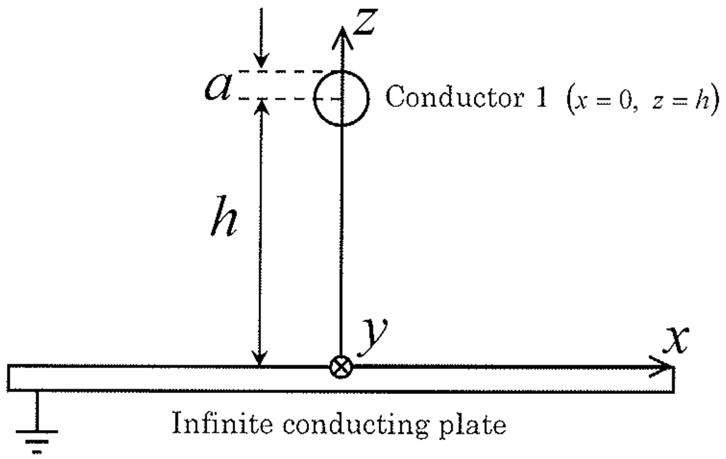

Fig.1

２００９年８月実施
問題２　電気回路
（１頁目／１頁中）

(1) Fig. 2 (a)の回路において，時刻 $t=0$ で２つのスイッチを同時に閉じるものとする．次の問に答えよ．なお，スイッチが閉じられる前にコンデンサ C_1 に蓄えられていた電荷を q_0 とする．

(a) 電流 $i\,(t)$ を求めよ．

(b) $q_0=0$ の場合，電流 $i\,(t)$が $t>0$ において一定となるための条件を求めよ．

(2) Fig. 2(b)の回路について次の問に答えよ．なお電圧源 E_2 の角周波数はωとする．

(a) 端子 a-a'から右側を見たインピーダンスを求めよ．

(b) $R_3 >> \omega L_3$のときの共振回路の Q を求めよ．

(1) Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2(a). Here the two switches are simultaneously turned on at $t = 0$ and assume that an electric charge q_0 is stored in the capacitor C_1 before the switches are turned on.

(a) Find the current $i\,(t)$.

(b) When $q_0 = 0$, find the condition where the current $i\,(t)$ is constant at $t > 0$.

(2) Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2(b). Here the angular frequency of the voltage source E_2 is ω.

(a) Find the impedance of the circuit to the right of the terminals a and a'.

(b) When $R_3 >> \omega L_3$, find the Q of the resonance circuit.

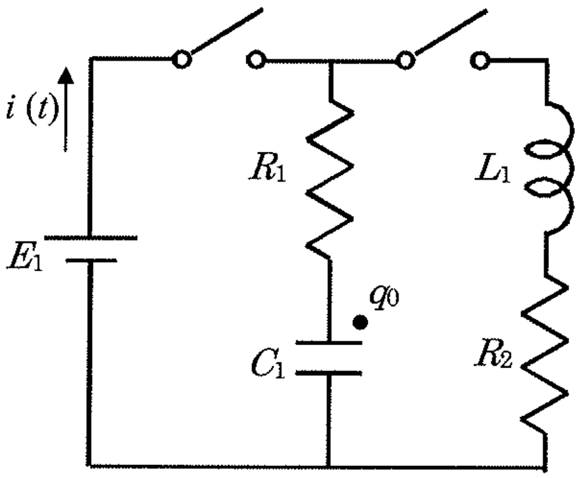

Fig. 2 (a)

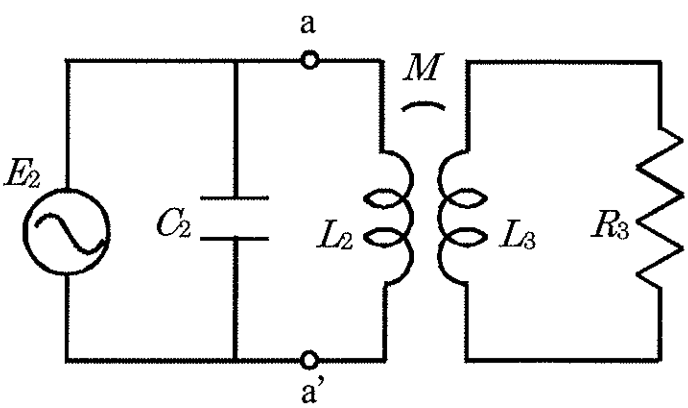

Fig. 2 (b)

２００９年８月実施
問題３　情報基礎１
（１頁目／１頁中）

集合 $S \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$ に対して，論理演算 $\circ^S$ を

$$x_1 \circ^S x_2 = \begin{cases} 1 & (x_1, x_2) \in S \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義する．例えば，論理和 $\vee$ は $\circ^{\{(0,1),(1,0),(1,1)\}}$ と表すことができる．以下の問に答えよ．

(1) 論理積 $\wedge$ と排他的論理和 $\oplus$ を $\circ^S$ の形で表せ．

(2) 変数 x_1 と x_2 に対して $x_1 \circ^S x_2 = x_2 \circ^S x_1$ を満足する論理演算 $\circ^S$ は可換であるという．論理演算 $\circ^S$ が可換であるための必要十分条件は，$0 \circ^S 1 = 1 \circ^S 0$ であることを証明せよ．また，可換である論理演算 $\circ^S$ をすべて列挙せよ．

(3) $\circ^S$ を論理演算とし，x_1 と x_2 を変数とし，$\overline{}$ は否定を表すとする．次のそれぞれの式について，集合 S を用いて集合 T を表せ．また，理由を説明せよ．

(a) $x_1 \circ^T x_2 = \overline{x_1 \circ^S x_2}$.

(b) $x_1 \circ^T x_2 = \overline{x_2} \circ^S x_1$.

For a set $S \subseteq \{0,1\} \times \{0,1\}$, let $\circ^S$ be a Boolean operation defined as follows:

$$x_1 \circ^S x_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } (x_1, x_2) \in S; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For example, the OR operator $\vee$ can be expressed as $\circ^{\{(0,1),(1,0),(1,1)\}}$. Answer the following questions.

(1) Express the AND operator $\wedge$ and the exclusive-OR operator $\oplus$ in the form $\circ^S$.

(2) A Boolean operation $\circ^S$ is said to be commutative if $x_1 \circ^S x_2 = x_2 \circ^S x_1$ for variables x_1 and x_2. Prove that a Boolean operation $\circ^S$ is commutative if and only if $0 \circ^S 1 = 1 \circ^S 0$. Furthermore, write down all the commutative Boolean operations $\circ^S$.

(3) Let $\circ^S$ be a Boolean operation, let x_1 and x_2 be variables, and let $\overline{}$ denote the NOT operator. For each of the following equations, express the set T in terms of the set S, and justify your answer.

(a) $x_1 \circ^T x_2 = \overline{x_1 \circ^S x_2}$.

(b) $x_1 \circ^T x_2 = \overline{x_2} \circ^S x_1$.

２００９年８月実施
問題４　情報基礎２

以下では自然数というときに，0 も含め，非負整数を意味するものとする．四則演算，剰余演算，メモリアクセスは 1 ステップで行われるとする．

(1) n 個の自然数の集合 S を考える．自然数上の関数 MEMBER を，自然数 x が S に含まれれば $\mathrm{MEMBER}(x) = 1$, 含まれなければ $\mathrm{MEMBER}(x) = 0$ として定義する．$2n > p > n$ である自然数 p を与え，自然数 y に対して

$$h(y) = \ y \bmod p$$

で関数 h を定義する．ここで $y \bmod p$ は y を p で割ったときの剰余である．

関数 h を利用し，MEMBER の値を効率よく計算するためのデータ構造を構築せよ．データ構造のサイズは $O(n)$ ワードであり，ランダムな x に対しての $\mathrm{MEMBER}(x)$ の計算時間の期待値が $O(1)$ であることを要請する．ただし，1 ワードには S に属する各々の自然数及びメモリアドレスが格納できるとする．データ構造の具体的な構成および MEMBER のアルゴリズムを記述すること．

(2) 8×8 の正方行列で，行列要素が 12 以下の自然数であるものをチェス行列と呼ぼう．チェス行列を全て区別できるような二進コード化（二進数による表現）を一つ与えよ．また，そのコードで必要なビット数を答えよ．もし必要なら $\log_2 13 = 3.7$ として計算してよい．

(3) X を $10,000,000 = 10^7$ 個のチェス行列からなる集合とする．4 ギガバイト以下のメモリ領域を利用し，チェス行列 A がランダムに与えられたとき，A が X に属するかどうかを判定する効率の良いシステム構築法を与えよ．

In the following, a natural number means an integer greater than or equal to zero. We assume that each arithmetic operation, residue computation, and memory access can be done in one computation step.

(1) Let S be a set of n natural numbers. Given a natural number x, the function MEMBER is defined by MEMBER(x) = 1 if x belongs to S, and MEMBER(x) = 0 otherwise. We give a natural number p satisfying that $2n > p > n$, and define a function h on natural numbers by

$$h(y) = y \bmod p,$$

where y mod p means the residue of y divided by p.

Design a data structure using the function h so that we can compute the function MEMBER efficiently. The size of the data structure must be $O(n)$ words, and the computation time of MEMBER(x) must be $O(1)$ expected time for a randomly chosen natural number x. We assume that each natural number in S and a memory address can be stored in one word unit. You should explicitly give the construction of the data structure and an algorithm for MEMBER.

(2) An 8×8 square matrix each of whose elements is a natural number less than or equal to 12 is called a *chess matrix*. Give a binary coding (i.e. representation by using binary numbers) of chess matrices such that we can distinguish them from each other. Also, answer the number of required bits for the code. You may approximate $\log_2 13 = 3.7$ if necessary.

(3) Let X be a set of $10,000,000 = 10^7$ chess matrices. Show how to design a system so that we can decide efficiently if a randomly chosen chess matrix A is in the set X or not using a memory space of at most 4 Gigabytes.

２００９年８月実施
問題５　物理基礎１

バネ定数k，自然長ℓのバネでつながれた二つの粒子の水平な平面上での運動を考える．粒子の質量は各々Mおよびmである．バネは曲がらないものと仮定する．バネの質量，平面との摩擦，空気抵抗は無視する．以下の問に答えよ．

(1) 二つの粒子が重心のまわりに回転せず，バネが振幅Aで振動している場合を考える．

(a) 二つの粒子の相対運動に対する換算質量μを求めよ．

(b) バネの振動の周期Tを求めよ．

(c) 時刻tにおけるバネの伸びをuとし，バネの弾性エネルギーUならびに二つの粒子の運動エネルギーの和Kを求めよ．

(d) UとKの１周期Tにわたる平均値を，kとAを用いて各々求めよ．

(2) 二つの粒子が重心のまわりに回転する場合を考える．時刻tにおける二つの粒子間の距離をr，回転の角速度をωとする．

(a) 二つの粒子を結ぶ方向の相対運動に対する運動方程式を求めよ．

(b) 二つの粒子の重心のまわりの回転運動に対する角運動量$\boldsymbol{L}$が保存することを示せ．また，その角運動量の大きさを求めよ．

(c) 二つの粒子が重心のまわりをある一定の角速度ω_0で回転しているとき，バネの伸びを求めよ．ただし，$\omega_0 < \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$とする．

２００９年８月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／２頁中）

Consider the motion of two particles connected by a spring with elastic constant k and natural length ℓ on a horizontal plane. The masses of the particles are M and m, respectively. Assume no bending of the spring. The mass of the spring, the friction against the plane, and the air resistance can be neglected. Answer the following questions.

(1) Consider the case where the two particles do not rotate around the center of gravity and the spring shows vibration with amplitude A.

(a) Find the reduced mass μ for the relative motion of the two particles.

(b) Find the period T of the vibration of the spring.

(c) Given the extension u of the spring at time t, find the elastic energy U of the spring and the sum K of the kinetic energies for the two particles.

(d) Using k and A, find the averaged values of U and K for one period T, respectively.

(2) Consider the case where the two particles rotate around the center of gravity. Let the angular velocity of the rotation be ω and the distance r between the two particles at time t.

(a) Derive the equation of motion for the relative motion along the direction connecting the two particles.

(b) Show that the angular momentum $\boldsymbol{L}$ around the center of gravity is conserved for the rotational motion of the two particles. Then, find the magnitude of the angular momentum.

(c) When the two particles rotate around the center of gravity with a constant angular velocity ω_0, find the extension of the spring. Assume that $\omega_0 < \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$.

２００９年８月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

(1) 4 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(a) これらのベクトルは $\boldsymbol{R}^4$ に対して基底をなしていることを示せ．

(b) 互いに直交しているものを求めよ．

(c) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ．

(d) これらのベクトルを正規直交基底に変換せよ．ただし，(b)で求めたベクトルを新しい基底の一部として利用すること．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

で与えられている．

(a) 行列 $\boldsymbol{A}$ をジョルダン標準形に変換せよ．

(b) $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は正の整数とする．

２００９年８月実施
問題６　物理基礎２
（２頁目／２頁中）

(1) We consider the following members of the four-dimensional real vector space $\boldsymbol{R}^4$:

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(a) Show that these vectors form a basis of $\boldsymbol{R}^4$.

(b) Find the vectors that are mutually orthogonal.

(c) Find the angle between $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.

(d) Convert these vectors to an orthonormal basis. Use the vectors obtained in (b) as a part of the new basis.

(2) A matrix A is given by

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}.$$

(a) Convert the matrix A to a Jordan normal form.

(b) Obtain A^n. Here, n is a positive integer.