2. 電磁気

図 2.1 のような電気双極子の作る電界を求める。電荷量 Q を持つ正負の点電荷$+Q$ と$-Q$ が微小な距離 l を離して置かれている。両点電荷間の中点 O からの距離 r ($r>>l$)、角度θの点 P での電界を求める。空気中の誘電率をε_0 とする。次の各問いに答えよ。

1) 点 P と$+Q$ 及び$-Q$ との間の距離をそれぞれ r_1 および r_2 とする。$r>>l$ であることを利用して、r_1 および r_2 を r、l、θを用いて近似せよ。

2) r_1 および r_2 を用いて点 P での電位 U を表せ。

3) 1)で求めた近似式を 2)の電位の表現式に代入し整理することで、r を用いて電位 U を表せ。ただし、l^2 を含む項は r^2 よりも極めて小さいことを利用して無視せよ。

4) 点 P での電界の r 成分 E_r および θ成分 E_θ を求めよ。

図 2.2 のように原点 O を中心とした半径 a の球を考える。z 軸からの角度θの円すいとこの球が交わる円周を C とする。点 P は C 上の点である。C によって切り取られる球の表面の一部を S とする。正負の点電荷$+Q$ と$-Q$ の位置はそれぞれ$(0,0,+\frac{l}{2})$ および$(0,0,-\frac{l}{2})$ である。次の各問いに答えよ。

5) S を横切るすべての電束を求めよ。

6) 電荷量 Q の時間変化が$\frac{dQ}{dt}=\beta$(定数)と成立しているとき、点 P に作られる磁界を求めよ。ただし、電荷量 Q の時間変化が点 P に影響を与えるまでの時間遅れは十分小さいとして無視せよ。

7) 原点の位置にある z 軸方向に向いた微小電流素 Il (I は電流、l は微小距離を表す) が点 P に作る磁界を求め、6)の答えとの関連を述べよ。

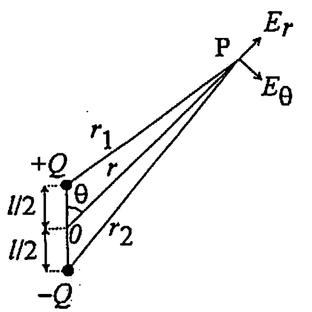

図 2.1

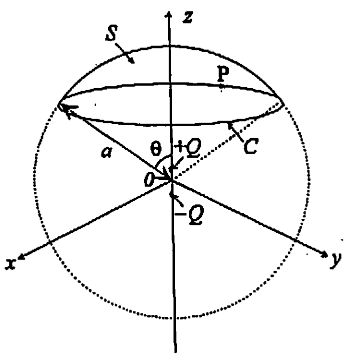

図 2.2

3. 周期が T である周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\frac{2\pi}{T}x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\frac{2\pi}{T}x)$$

によって与えられる。
以下の問に答えよ。

1) 区間 $-\pi\le x\le\pi$ で定義される次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。ただし、$0\le a<1$ とする。

$$f(x)=\cos ax$$

2) 1) の結果を用いて次の級数和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2-a^2}$$

3) 2) の結果を用いて次式を証明せよ。ただし、$0<\tau<1$ とする。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\tau^2}{n^2}=\frac{1-\tau^2}{1}\cdot\frac{2^2-\tau^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-\tau^2}{3^2}\cdots=\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}$$

4) 3) の関係式を用いて次の値 V を求めよ。

$$V=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}$$