

システム情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 システム情報学

平成20年8月26日（火） 10:00～13:00

出題される8問のうち、4問のみを選択して解答せよ

注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
- (2) 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。ただし試験問題の内容に関する質問に対しては、原則として答えない。
- (3) 答案用紙4枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
- (4) 各答案用紙の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。氏名は書いてはならない。
- (5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
- (6) 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
- (7) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は、適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい。
- (8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

選択問題番号	
--------	--

上欄に選択した4つの問題番号を記入すること。

第1問

以下の問いでは，虚数単位を $j = \sqrt{-1}$ とし，一般に連続時間 $-\infty < t < \infty$ の信号 $a(t)$ のフーリエ変換を，角周波数 $-\infty < \omega < \infty$ に関して

$$A(\omega) = \mathcal{F}[a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt$$

と定義する．

(1) 信号

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{\sin t}, & 0 < t < \pi \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

のフーリエ変換を $X(\omega)$ とする．このとき， $X(\omega)$ の実数部 $\operatorname{Re} X(\omega)$ のみのフーリエ逆変換，すなわち $\mathcal{F}^{-1}[\operatorname{Re} X(\omega)]$ を求めよ．

(2) 問い(1)の $X(\omega)$ を実数部 $\operatorname{Re} X(\omega)$ と虚数部 $\operatorname{Im} X(\omega)$ により $X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + j \operatorname{Im} X(\omega)$ と表すとき，

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{Re} X(\omega) - \operatorname{Im} X(\omega)|^2 d\omega$$

を求めよ．

(3) ω が半整数値 $k/2$ (k は整数) であるときの問い(1)の $X(\omega)$ の値を $Y_k = X(k/2)$ とするとき， Y_k を係数とする複素フーリエ級数を $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jkt}$ とする． $y(t)$ を求めよ．(4) 問い(3)の系列 Y_k の自己相関を

$$Z_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k Y_{k+m}^*$$

とする．ただし， m は任意の整数， $*$ は複素共役を表すものとする． Z_m を求めよ．

草稿用紙
(切り離さないこと)

第 2 問

図 1, 図 2 に示す電子回路に関する以下の問いに答えよ. なお, 図中の OP1, OP2, OP3 は演算増幅器 (オペアンプ) である. 演算増幅器の特性は理想的であるとする.

- (1) 図 1 に示す回路において, 出力電圧 V_{OUT} を入力電圧 V_1, V_2 で表せ.
- (2) 図 1 に示す回路において, V_1 と V_2 の同相成分 ($V_1 + V_2$) の利得 (同相利得) と差動成分 ($V_2 - V_1$) の利得 (差動利得) をそれぞれ求めよ. また, 同相利得が 0 になる条件を示せ.
- (3) 図 1 に示す回路において, ある R_1, R_2, R_3, R_4 の組み合わせを用いたとき, 同相利得が α , 差動利得が β であつた ($0 < \alpha \ll \beta$). 同じ R_1, R_2, R_3, R_4 を図 2 の回路で用いたときの図 2 の回路の同相利得と差動利得をそれぞれ求めよ. また, 図 2 の回路が図 1 の回路に比べて CMRR (同相信号除去比 = | 差動利得 / 同相利得 |) を高くできる理由を説明せよ.
- (4) 図 2 に示す回路において, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$ とする. 図中の可変抵抗 R_A に直列に容量 C のコンデンサを接続したとき, $(V_2 - V_1)$ に対する V_{OUT} の伝達関数を求め, その周波数特性を Bode 線図で示せ. ただし, $R_A \ll R$ とする.

【次のページへ続く】

【第2問の続き】

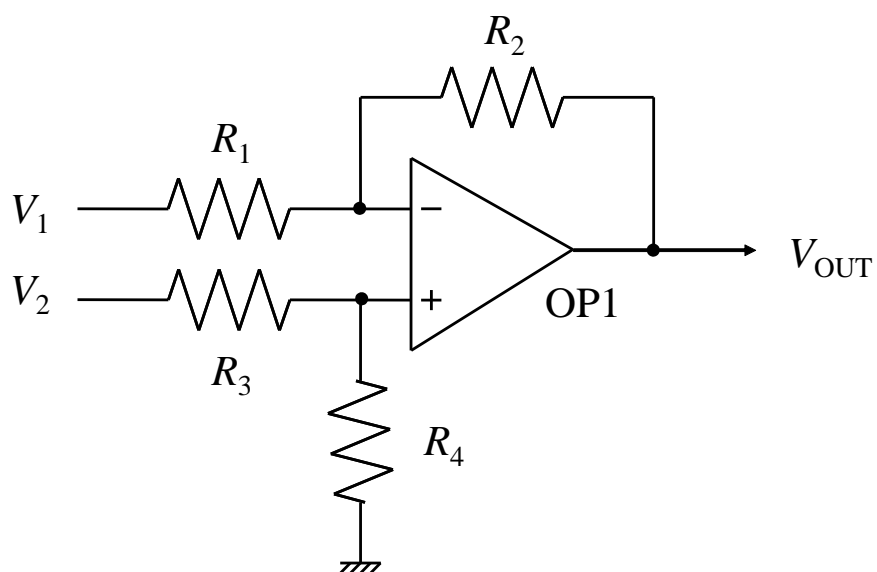


図 1

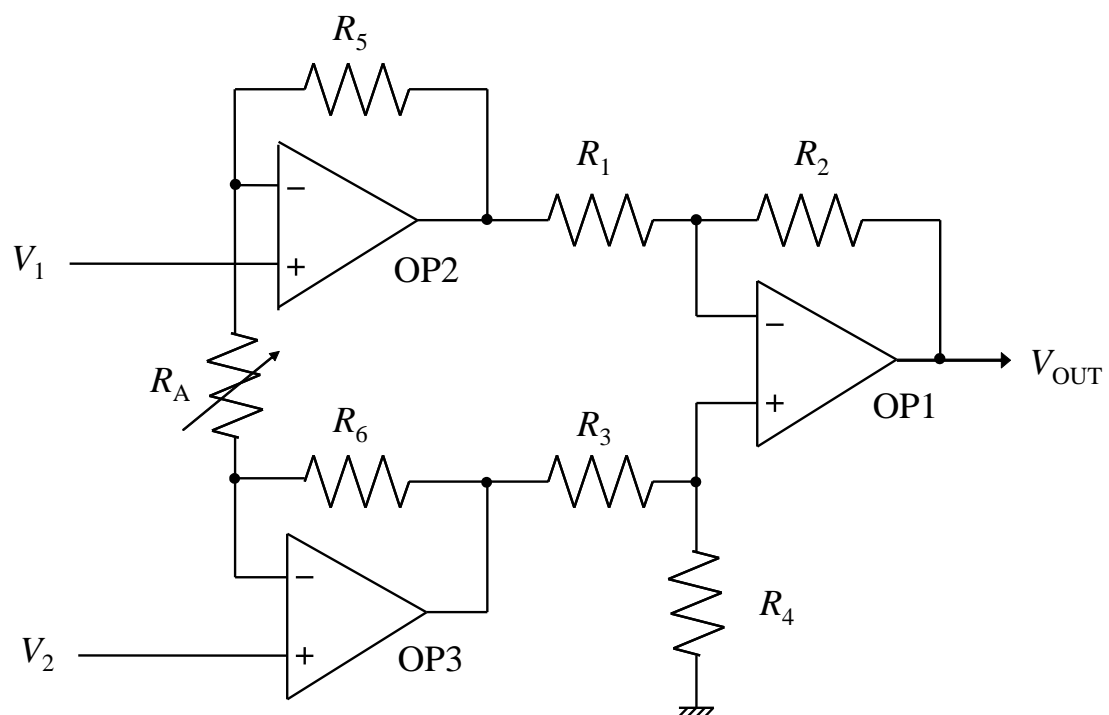


図 2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第3問

図1に示す制御系を考える．ただし1入力線形時不変系である制御対象 G の状態空間表現および入出力関係は次に与えられる．

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = -v, \quad v = fx$$

ここで f は定数状態フィードバックゲインである．また u から x への伝達関数を $\Gamma(s) = (sI - A)^{-1}b$ とする．ただし s はラプラス作用素， I は単位行列を表す．以下では O は零行列， j は虚数単位， ω は角周波数を表す．正方対称行列 M に対し“ $M > O$ ” および “ $M < O$ ” はそれぞれ M が正定行列および負定行列であることを表す．ベクトルあるいは行列に対して記号 “ T ” および “ $*$ ” は，それぞれ転置および複素共役転置を表す．以下の問いに答えよ．

- (1) $f = f_1$ により閉ループ系の極を -1 と -4 に配置したい． f_1 を求めよ．またこのとき u から v への一巡伝達関数 $L_1(s) = f_1\Gamma(s)$ を求めよ．

さらに以下の問い(2)～(4)は次の条件1の成否に関する問題である．それぞれ答えよ．

条件1:「与えられた一巡伝達関数のナイキスト線図と複素平面上の点 $(-1 + j \cdot 0)$ との距離が，全ての ω において1以上であること」

- (2) 問い(1)の一巡伝達関数のナイキスト線図が，点 $(-1 + j \cdot 0)$ を何回どちら向きにまわるのかを説明せよ．またこの場合における条件1の成否について答えよ．
- (3) $f = f_2$ とする．ただし $f_2 = b^T P$ ， P は 2×2 次元の正定対称行列 ($P = P^T > O$) で

$$PA + A^T P - Pbb^T P < O$$

を満たすものとする．このとき閉ループ系が安定であることを示せ．

- (4) 問い(3)の場合の u から v への一巡伝達関数 $L_2(s) = f_2\Gamma(s)$ について，次が成り立つことを示せ．

$$|1 + L_2(j\omega)|^2 = 1 + \Gamma^*(j\omega)(-PA - A^T P + Pbb^T P)\Gamma(j\omega), \quad \forall \omega$$

またこの場合における条件1の成否について答えよ．

【次のページへ続く】

【第3問の続き】

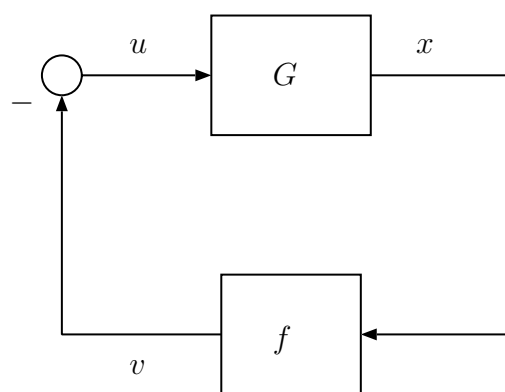


図 1

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第4問

図1, 図2に示すように XY 平面を水平面, Z 軸を鉛直軸とする座標系をとり, 各リンクの長さが L である3自由度アームを用いて, 図2に示すように45度の斜面 $Z = X - L$ 上の点 $(L, L, 0)$ に, ペグ (小さな杭) を斜面に垂直に差し込みたい.

ペグの差し込みには斜面に垂直な方向に力 F が必要であると仮定する. 各関節のトルク T_1, T_2, T_3 および F を変化させないように各関節に微小変位 $\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3$ を与えたときのペグの微小変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ を考え, 以下の問いに答えよ. ただし以下において, アーム, ペグ, ねじに加わる重力は無いものと仮定する.

- (1) 各関節角が ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の時, アームの先端位置 (x, y, z) を求めよ.
- (2) 仮想仕事の原理を考慮し, ペグを差し込む瞬間の $T_1, T_2, T_3, \delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3, \delta x, \delta y, \delta z$ の関係を式に示せ.
- (3) ペグを差し込む瞬間の各関節のトルク T_1, T_2, T_3 を求めよ.
- (4) 図3に示すように $(\frac{\sqrt{2}}{2}L, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}L - L)$ の位置に XY 平面に対して垂直なねじがあり, これを垂直に締めたい. このアームにトルク M でねじを締め付けるユニットを取り付けたとする. 締め付けの際の各関節のトルク T_1, T_2, T_3 を仮想仕事の原理に基づいて求めよ.

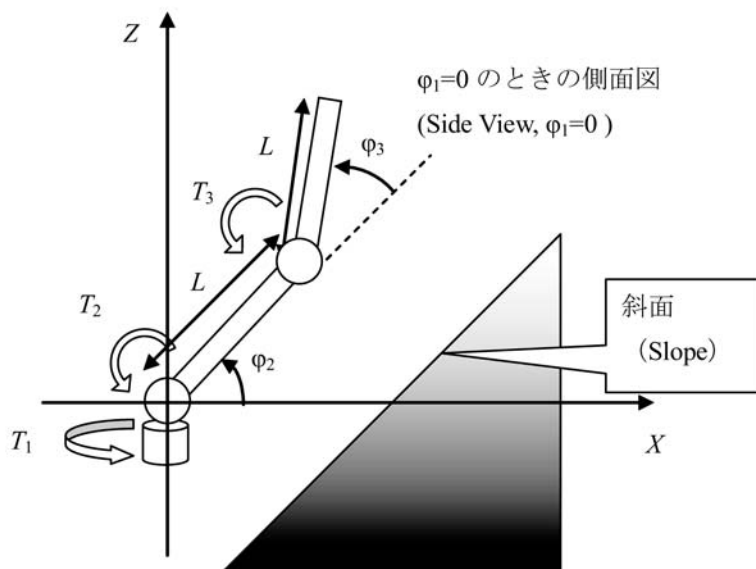


図1

【次のページへ続く】

【第4問の続き】

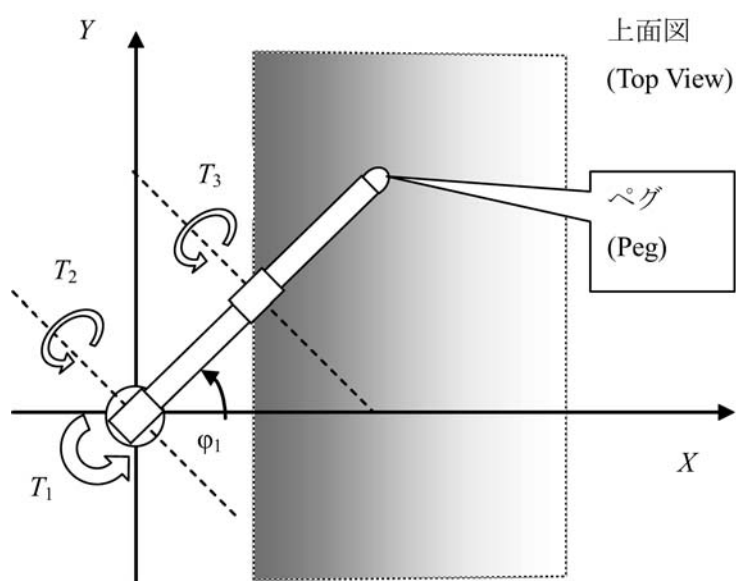


図 2

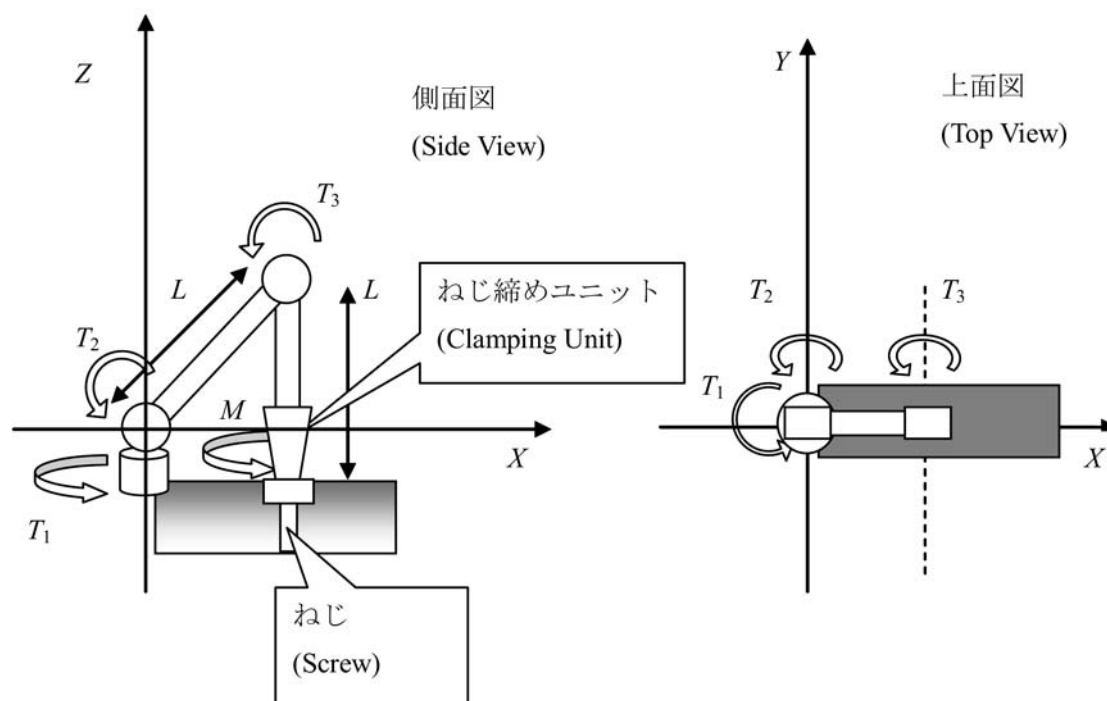


図 3

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第5問

論理関数の集合 S を考える. S の要素だけを用いて (その複合関数として) 任意の論理関数が合成可能であるとき, S は万能であるという. 万能な集合 S からどの要素を取り除いても万能ではなくなるとき, S は極小であるという. 以下の問いに答えよ.

(1) 論理関数集合 {2 入力 AND 関数, 2 入力 OR 関数, 1 入力 NOT 関数} は万能であること, かつ極小ではないことを示せ.

(2) 次の 5 種類の論理関数集合を考える. 考察の対象は任意個の入力変数に対する任意の論理関数であり, それらを代表的に $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ で表す.

M_1 : 入力値がすべて 1 のときの関数値は 1 である論理関数全体の集合 (すなわち, $F(1,1,\dots,1)=1$ を満たす論理関数 F の集合).

M_2 : 入力値がすべて 0 のときの関数値は 0 である論理関数全体の集合 (すなわち, $F(0,0,\dots,0)=0$ を満たす論理関数 F の集合).

M_3 : 自己双対論理関数全体の集合 (すなわち, $F(/x_1, /x_2, \dots, /x_k) = /F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ を満たす論理関数 F の集合. ただし, $/x$ は x の否定を表す).

M_4 : 単調増大論理関数全体の集合 (すなわち, $(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq (b_1, b_2, \dots, b_k)$ が成り立つならば必ず $F(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq F(b_1, b_2, \dots, b_k)$ が成り立つ論理関数 F の集合).

M_5 : 線形論理関数全体の集合 (すなわち, $F(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_0 \diamond (a_1 \cdot x_1) \diamond (a_2 \cdot x_2) \diamond \dots \diamond (a_k \cdot x_k)$ と表現される論理関数 F の集合. ただし, $a_i (i=0, 1, 2, \dots, k)$ は 0 または 1 である. また $x \diamond y$ は x と y の排他的論理和を表し, $x \cdot y$ は x と y の論理積を表す).

論理関数集合 M_1, M_2, M_3 はいずれも万能ではないことが知られている. 論理関数集合 M_4, M_5 も万能ではないことを示せ.

(3) 論理関数集合 S が M_1 に含まれないならば, S は 1 入力 NOT 関数, または常に 0 を出力する関数 (0 関数と呼ぶ) を合成することを証明せよ.

【次のページへ続く】

【第5問の続き】

- (4) 論理関数集合 S が 1 入力 NOT 関数を合成し, M_3 に含まれないならば, S は 0 関数および 1 関数 (常に 1 を出力する関数) を合成することを証明せよ.
- (5) 論理関数集合 S が万能であるための必要十分条件は, S が論理関数集合 $M_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ のいずれにも含まれないことである. これを証明せよ.

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第 6 問

表と裏の出る確率が等しい公平な硬貨 3 枚と、表の出る確率が 60%である不公平な硬貨を 2 枚、合計で 5 枚を用意する。まずこの中から無作為に 1 枚選ぶ。その後、選んだ硬貨を投げ、次に投げる硬貨を残りの硬貨から無作為に選び、今投げた硬貨を戻す。これを繰り返しながら硬貨を N 回投げる。

観察列 O_1, O_2, \dots, O_N が得られた場合における、 N 回目に投げた硬貨が公平であった条件付確率を求めたい。ここで O_k ($1 \leq k \leq N$) は head (表) または tail (裏) である。

k 回目に投げる硬貨の公平性をその時の状態と考え、 S_k で表す。 S_k のとる値は fair (公平) または unfair (不公平) である。 $E(S, O)$ を、状態 S において観察 O が見られる確率とする。例えば $E(\text{fair}, \text{head})=0.5$, $E(\text{unfair}, \text{head})=0.6$ である。また、状態 m の次に状態 n となる確率を $T_{m,n}$ ($m, n = \text{fair or unfair}$) で表す。 $P(k, S)$ を、 k ($1 \leq k \leq N$) 番目までの観察列 O_1, O_2, \dots, O_k が観察され、かつ k 番目の硬貨の状態が S ($S = \text{fair or unfair}$) である確率とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 観察列 O_1, O_2, \dots, O_N が得られた場合における、 N 回目に投げた硬貨が公平であった条件付確率を、 $P(N, \text{fair})$ と $P(N, \text{unfair})$ を用いて表せ。
- (2) $P(k, S)$ ($2 \leq k \leq N, S = \text{fair or unfair}$) を、 $P(k-1, \text{fair})$ と $P(k-1, \text{unfair})$ を用いて表せ。必要ならば $E(S, O_k)$, $T_{m,n}$ などを用いてよい。
- (3) $P(k, S)$ を再帰的に求める手続き ***P-recursive***(k, S) を図 1 に作成した。空欄 1, 空欄 2 を完成せよ。記述形式は自由である。また、 $P(N, S)$ を求めるためにこの手続き ***P-recursive***(k, S) が呼び出される回数を求めよ。

【次のページへ続く】

【第6問の続き】

Procedure: $P\text{-recursive}(k, S)$ // $1 \leq k \leq N, S = \text{fair or unfair}$

if ($k = 1$) **then**

if ($S = \text{fair}$) **then** $r \leftarrow E(\text{fair}, O_1) \times 0.6$

elseif ($S = \text{unfair}$) **then** $r \leftarrow$ 空欄 1

endif

elseif ($k \geq 2$) **then** $r \leftarrow$ 空欄 2

endif

return (r)

end Procedure

図 1

- (4) あらかじめ 2 次元配列 $result$ を用意し, $P(k, S)$ の値を $k=1$ から順に求めて $result[k][S]$ に格納する手続き **$P\text{-modified}(k, S)$** を図 2 に作成した. 空欄 3 を完成せよ. 記述形式は自由である. また, $P(N, S)$ を求めるのに必要な計算量を, **$P\text{-modified}$** を用いる場合と問い(3)の **$P\text{-recursive}$** を用いる場合で, 定量的に比較せよ.

Procedure: $P\text{-modified}(k, S)$ // $1 \leq k \leq N, S = \text{fair or unfair}$

$result[1][\text{fair}] \leftarrow E(\text{fair}, O_1) \times 0.6$

$result[1][\text{unfair}] \leftarrow$ 問い(3)の空欄 1 と同じ

if ($k \geq 2$) **then**

for $i \leftarrow 2$ to k

空欄 3

endfor

endif

end Procedure

図 2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第7問

図1に示すように、水平面上に、エア・ホッケー台のように外側が枠（クッション）で囲われた長方形の台 ABCD が置かれており、台の表面は完全に滑らかで摩擦力は生じないものとする（図1は台を上から見たもの）

いま、半径 r 、質量 m で、厚みを持つ円板の形状をした円柱1が、辺 AD 上に設置した発射装置で打ち出され、1) AB に平行な直線 L 上を無回転で滑って行き、図1のように、この直線 L から r だけ離れた位置に中心があり、同じ半径 r と、同じ厚みを持ち、質量が $m/2$ の静止していた円柱2に衝突して方向を変え、2) さらにその後で、台の周囲の外枠と衝突してはねかえる、という運動を考える（円柱1、円柱2の質量分布は一樣とし、円柱2は円柱1との衝突後は円柱1には干渉しないものとする。）このとき、円柱2は完全に滑らかで、円柱1は、最初の円柱2との衝突では、摩擦の無い、反発係数1の完全弾性衝突となるが、次の外枠との衝突では、逆に完全に粗ですべりを生じない衝突の形をとるものとする。また、このときの反発係数を e とする。

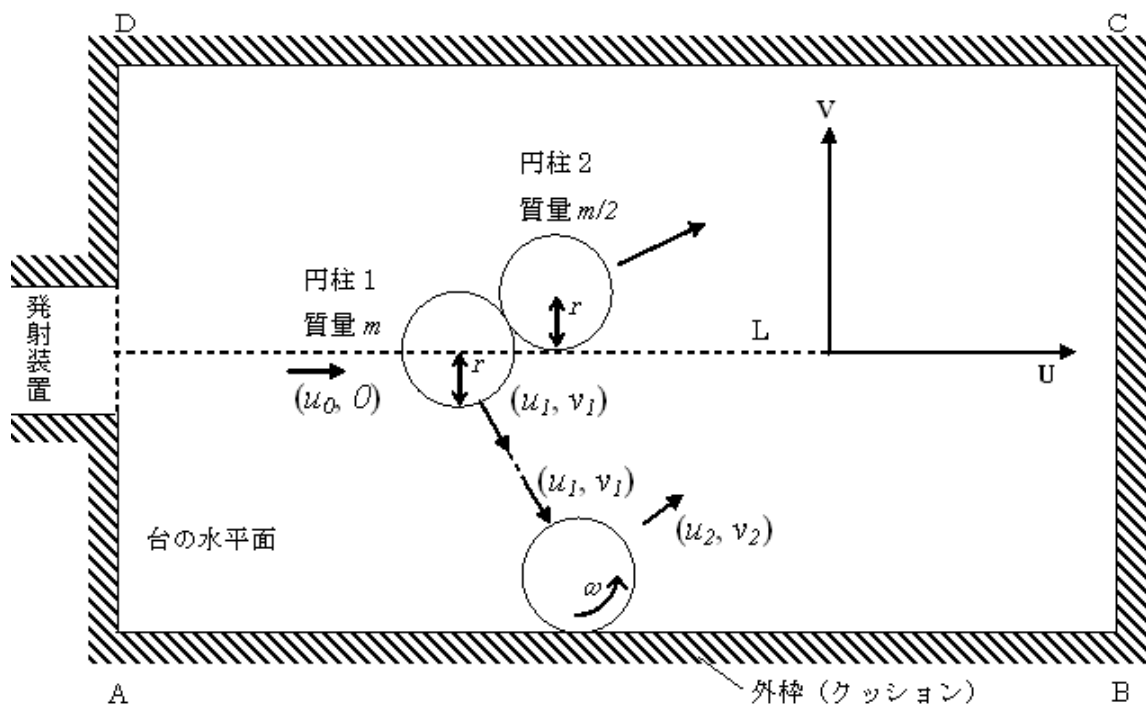


図1

【次のページへ続く】

【第7問の続き】

- (1) 図1のように座標軸 UV をとったとき，円柱1が円柱2に衝突する前の速度を $(u_0, 0)$ とすると，円柱1が，円柱2に衝突した直後の速度の U 軸方向成分 u_1 と V 軸方向成分 v_1 を u_0 を用いて表せ．
- (2) その後，外枠と最初に衝突してはね返った後での，円柱1の持つ並進運動による運動エネルギーと回転運動による運動エネルギーをそれぞれ e を用いて表せ．
 (半径 a ，質量 M の円柱の，円の中心を通り円面に垂直な軸回りの慣性モーメントは， $\frac{1}{2}a^2M$ で与えられる．また，図2では反時計回りを角速度の正方向としている．)

次に，この台の上に作られた円柱の発射装置を用いて円柱1を打ち出すことを考える．

図2，および図3は図1と同様，発射装置を上から見た図である．図2に示すように，発射装置は2本のバネと2個の質量体からなり，バネ1は一端が壁に固定され，もう一端は質量体1と接続されており，更にこの質量体1は，バネ2を介して質量体2と接続されている．発射装置の表面や2つの質量体，および，質量体をスライドさせる周りの壁は完全に滑らかで，円柱1を含むこれらの各要素の間では摩擦力は働かないものとし，また，質量体1，質量体2の質量，および，バネ1，バネ2のバネ定数をそれぞれ M_1, M_2, k_1, k_2 とする．図3に示すように，何も力を加えない状態を中立状態とし，質量体1および質量体2の，中立状態の位置からの変位（図3の右方向への変位を正とする）をそれぞれ， x, y とする．中立状態から d だけバネ1を押し縮める方向に質量体1を変位させ，質量体2には力を加えない状態（即ち $x = -d, y = -d$ ，かつ， $dx/dt = 0, dy/dt = 0$ ）を初期状態とし，この状態で円柱1を質量体2に接触させて置いた後，質量体1を離して円柱1を打ち出した．

【次のページへ続く】

【第7問の続き】

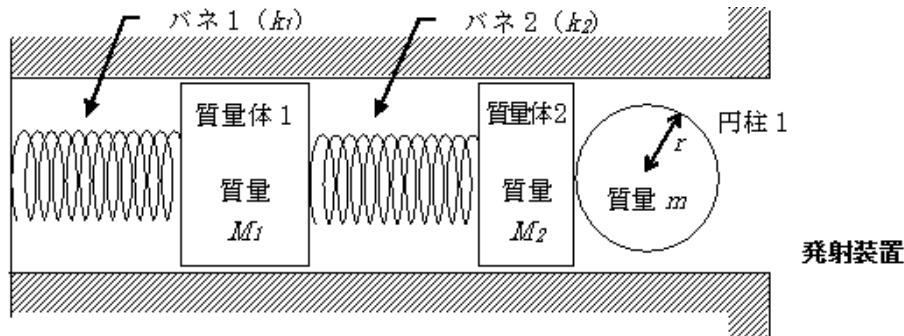


図 2

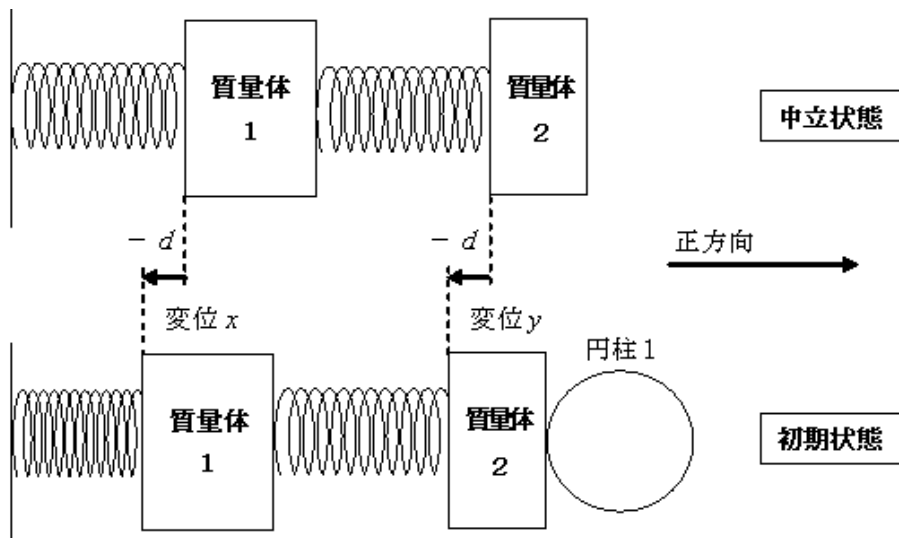


図 3

- (3) $M_1 = 0.2[\text{kg}]$, $M_2 = 0.1[\text{kg}]$, $m = 0.1[\text{kg}]$, $k_1 = 0.6[\text{N/m}]$, $k_2 = 0.4[\text{N/m}]$ としたとき、質量体 1 を離してから、円柱 1 が質量体 2 と離れて独自に右方に移動するようになるまでの時間を求めよ。また、その際の打ち出された円柱 1 の速度はいくらか。
- (4) 問い (2) における円柱 1 と外枠の衝突の反発係数 e の大きさが衝突前の円柱 1 の速度の V 軸方向成分の大きさ（絶対値） v_1 に依存し、 $(1 - 5^{-\frac{v_1}{c}})/(1 + 5^{-\frac{v_1}{c}})$ の値をとるものとする。いま、 c の値を $0.1[\text{m/s}]$ とすると、問い (3) で打ち出された円柱 1 が円柱 2 と衝突し、引き続いて外枠と最初に衝突してはね返った後の回転の運動エネルギーと並進の運動エネルギーの大きさの比を $3 : 8$ とするためには、最初の変位 $x (= -d)$ をいくらにとればよいか。

草稿用紙
(切り離さないこと)

第8問

図1(a)に示すように、波長 λ の単色で干渉性の良い光源から2本の光ビームを作り、これを2個のピンホールが間隔が d であけられた遮蔽板に入射したとする。遮蔽板から十分遠い距離 L には、遮蔽板と平行にスクリーンが置かれ、生じる干渉パターンを観察できるようになっている。2個のピンホールに到達する前の、ビーム2のビーム1に対する光路長差は、 d によらず l とする。また、2個のピンホールの直径は等しく、それらは λ より十分小さいため、ピンホールの背後には振幅の等しい2個の球面波が生じると考えてかまわない。以下の問いに答えよ。

- (1) この状態で、スクリーンに発生する干渉縞のパターンを求めよ。
- (2) この状態から、図1(b)で示す2枚のくさび形の透明ガラスで作られた可変位相シフタを、ビームがその中央部を通過するように、ビーム2だけに垂直に挿入した。可変位相シフタのこのときの厚さは w 、屈折率は n で、その振幅透過率は1とする。干渉縞の問い(1)の状態からの変化量を示せ。
- (3) 上記の可変位相シフタの上側のくさび型ガラスを、速度 v で、重なり厚さが最も増加する向きに移動させた。干渉縞はどのように変化するか。ただし、くさびの角度は θ で、2枚のくさび型ガラスは常に面接触の状態を保ち、また速度 v は光の速度に比べてはるかに遅いものとする。
- (4) 上側くさび型ガラスの移動量に対する干渉縞の変化量を大きくするためには、 d, θ, L をどのように選べばよいか考察せよ。またその際の変化比を適切に定義して、 $d, \theta, L, \lambda, l, n$ の関数として表せ。

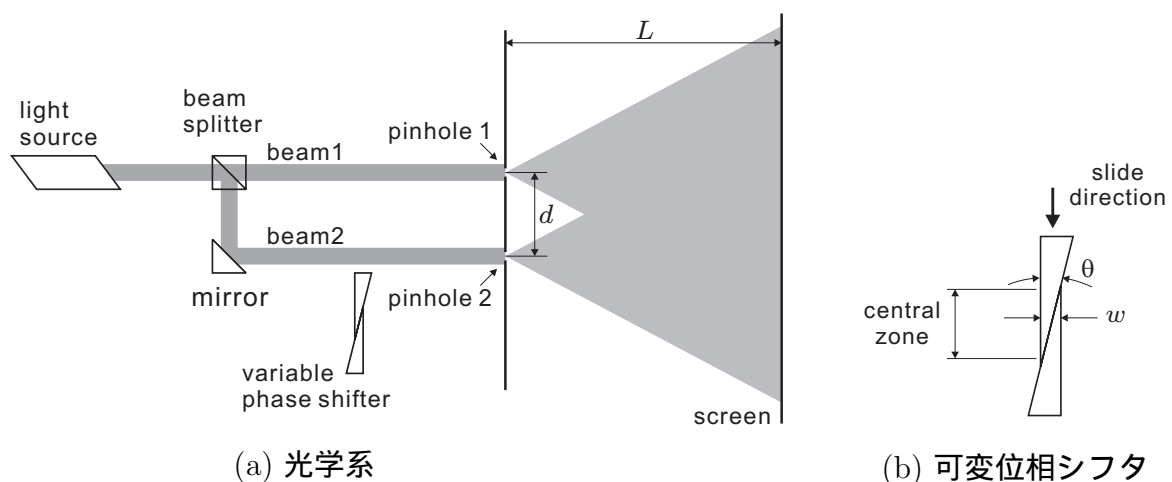


図1

草稿用紙
(切り離さないこと)