問題２　電磁気学 解答例

I

(1) まず，ガウスの定理（法則）により各誘電体内の電界を求める。電束に関するガウスの定理は以下の式で与えられる。

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dS = \iiint_V \rho \, dV$$

ここに，$\boldsymbol{D}$ は電束密度（ベクトル），ρ は電荷密度である。この関係式を半径 r の球に適用すると，$\boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{r}}D$，$\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$（半径方向の単位ベクトル）となり，各誘電体中では以下の通りとなる。

(i) $a < r < b$ における電界の大きさを E_1 と表すと，$D = \varepsilon_1 E_1$ と表され，

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad \text{よって} \quad E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \quad \text{（方向は半径方向）}$$

(ii) $b < r < c$ における電界の大きさを E_2 と表すと，$D = \varepsilon_2 E_2$ と表され，(i) と同様にして，

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \quad \text{（方向は半径方向）}$$

(2) 両導体間の電位差は，

$$\begin{aligned}
V &= -\int_c^b E_2 \, dr - \int_b^a E_1 \, dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\int_c^b \frac{1}{r^2} \, dr - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\int_b^a \frac{1}{r^2} \, dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{c-b}{bc} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{b-a}{ab} \\
&= \frac{Q\{\varepsilon_1 a(c-b) + \varepsilon_2 c(b-a)\}}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 abc}
\end{aligned}$$

(3) 静電容量 C は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{c-b}{bc} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{b-a}{ab}} = \frac{4\pi}{\dfrac{b-a}{\varepsilon_1 ab} + \dfrac{c-b}{\varepsilon_2 bc}} = \frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 abc}{\varepsilon_1 a(c-b) + \varepsilon_2 c(b-a)}$$

(4) 両誘電体に挟まれた境界面における分極電荷密度 σ_p は，分極を P_1，P_2 で表すと，

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= P_1|_{r=b} - P_2|_{r=b} = (D - \varepsilon_0 E_1)|_{r=b} - (D - \varepsilon_0 E_2)|_{r=b} \\
&= \varepsilon_0(E_2|_{r=b} - E_1|_{r=b}) \\
&= \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 b^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 b^2}\right) = \frac{\varepsilon_0 Q}{4\pi b^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 b^2}
\end{aligned}$$

II

(1) 図 A において，アンペアの法則：

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を適用する。ここに，$\boldsymbol{H}$ は磁界（ベクトル），$\boldsymbol{J}$ は電流密度（ベクトル）である。この関係式を，導線 A_1 を中心とする半径 r_1 の円に適用すると，H_1 は

$$H_1\cdot 2\pi r_1 = I$$

を満たす。図 A より，$r_1=\sqrt{(x+d)^2+y^2}$ であるので，求める磁界の大きさ H_1 は

$$H_1=\frac{I}{2\pi r_1}=\frac{I}{2\pi\sqrt{(x+d)^2+y^2}}$$

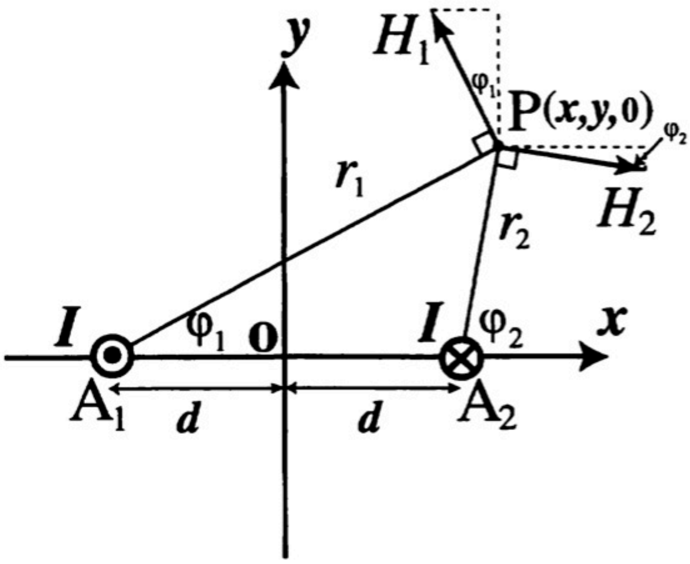

図 A

(2) 同様にアンペアの法則を，導線 A_2 を中心とする半径 r_2 の円に適用すると，

$$H_2=\frac{I}{2\pi r_2}=\frac{I}{2\pi\sqrt{(x-d)^2+y^2}} \qquad \text{ただし}\quad r_2=\sqrt{(x-d)^2+y^2}$$

(3) 角度 φ_1 を図 A のように定義すると，導線 A_1 の電流が点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ につくる磁界の xyz 成分：(H_{1x},H_{1y},H_{1z}) は以下のように表される。

$$\begin{aligned} H_{1x} &= -H_1\sin\varphi_1 \\ H_{1y} &= H_1\cos\varphi_1 \\ H_{1z} &= 0 \end{aligned}$$

ただし，

$$\cos\varphi_1=\frac{x+d}{r_1} \qquad \sin\varphi_1=\frac{y}{r_1}$$

同様に角度 φ_2 を図 A のように定義すると，導線 A_2 の電流が点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ につくる磁界の xyz 成分：(H_{2x}, H_{2y}, H_{2z}) は以下のように表される。

$$\begin{aligned} H_{2x} &= H_2 \sin\varphi_2 \\ H_{2y} &= -H_2 \cos\varphi_2 \\ H_{2z} &= 0 \end{aligned}$$

ただし，

$$\cos\varphi_2 = \frac{x-d}{r_2} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{y}{r_2}$$

よって，合成磁界の xyz 成分：$(H_x,\ H_y,\ H_z)$ は

$$\begin{aligned} H_x &= H_{1x} + H_{2x} = -H_1 \sin\varphi_1 + H_2 \sin\varphi_2 = -\frac{yI}{2\pi r_1^2} + \frac{yI}{2\pi r_2^2} \\ &= -\frac{yI}{2\pi\{(x+d)^2+y^2\}} + \frac{yI}{2\pi\{(x-d)^2+y^2\}} \\ &= \frac{2xydI}{\pi\{(x+d)^2+y^2\}\{(x-d)^2+y^2\}} \\ H_y &= H_{1y} + H_{2y} = H_1\cos\varphi_1 - H_2\cos\varphi_2 = \frac{(x+d)I}{2\pi r_1^2} - \frac{(x-d)I}{2\pi r_2^2} \\ &= \frac{(x+d)I}{2\pi\{(x+d)^2+y^2\}} - \frac{(x-d)I}{2\pi\{(x-d)^2+y^2\}} \\ &= \frac{d(y^2-x^2+d^2)I}{\pi\{(x+d)^2+y^2\}\{(x-d)^2+y^2\}} \\ H_z &= H_{1z} + H_{2z} = 0 \end{aligned}$$

(4) 図 B のように，往復導線を流れる電流 I が長方形コイルの面内 $(y=0)$ につくる磁界は y 成分のみで，z 方向には一様である。

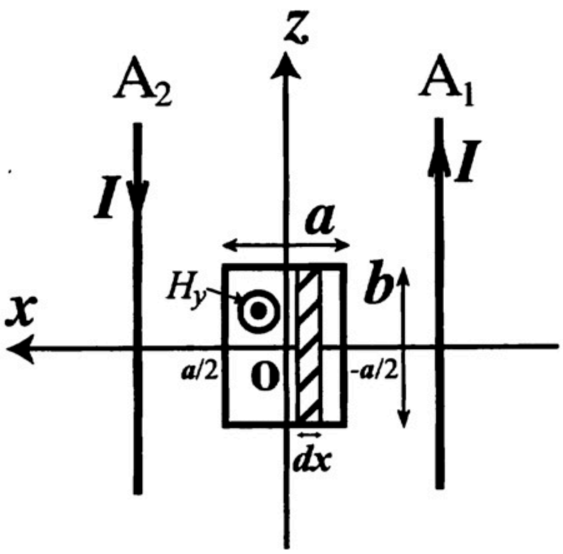

図 B

したがって，長方形コイルの面内の微小面積（図Bの斜線部分）$b \cdot dx$ を貫く全磁束 $d\Phi$ は，（3）で求まった合成磁界の y 成分を用いて

$$
\begin{aligned}
d\Phi &= \mu_0 H_y|_{y=0}\, b\, dx \\
&= \mu_0 \left\{ \frac{(x+d)I}{2\pi(x+d)^2} - \frac{(x-d)I}{2\pi(x-d)^2} \right\} b\, dx \\
&= \mu_0 \left\{ \frac{I}{2\pi(x+d)} - \frac{I}{2\pi(x-d)} \right\} b\, dx \\
&= \frac{\mu_0 bI}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x+d} - \frac{1}{x-d} \right\} dx
\end{aligned}
$$

ゆえに長方形コイル全体を貫く全磁束 Φ は

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 bI}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x+d} - \frac{1}{x-d} \right\} dx \\
&= \frac{\mu_0 bI}{2\pi} \left\{ \log\frac{2d+a}{2d-a} - \log\frac{2d-a}{2d+a} \right\} \\
&= \frac{\mu_0 bI}{\pi} \log\frac{2d+a}{2d-a}
\end{aligned}
$$

よって，相互インダクタンス M は $\Phi = MI$ より

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{\Phi}{I} \\
&= \frac{\mu_0 b}{\pi} \log\frac{2d+a}{2d-a}
\end{aligned}
$$