

# Question No. 1: Electrical engineering (1/2)

## 2013 年 8 月実施 問題 1 電気工学 (1 頁目 / 2 頁中)

Fig.1(a)に示す閉ループ制御系について、以下の問に答えよ。必要であれば、 $\log_{10} 2 \approx 0.3$ を用いよ。

(1) (a)～(c)の各々の場合について、開ループ伝達関数を求め、そのボード線図の概形を描け。ただし、Fig.1(b)を参考にして、ゲイン線図のみを折れ線近似で描けばよい。

(a)  $K_1 = 10, K_2 = 0$

(b)  $K_1 = 1, K_2 = 20$

(c)  $K_1 = 1, K_2 = 200$

(2) 問(1)の(a)～(c)の場合について、閉ループ制御系の伝達関数を求め、それらの単位ステップ応答の違いについて、定常偏差、立ち上がり時間（応答の速さ）、行き過ぎ量の観点から述べよ。

(3)  $K_1 = \frac{1}{20} K_2, K_2 > 0$  とする。単位ステップ応答波形に行き過ぎが生じないで、かつ、

$X(s) = \frac{1}{s^2}$  に対する定常偏差が 0.1 以下になる  $K_2$  の条件を求めよ。

In the closed-loop control system shown in Fig.1(a), answer the following questions. Use  $\log_{10} 2 \approx 0.3$ , if necessary.

(1) Find the open-loop transfer function and sketch the Bode plot for each of the cases of (a), (b) and (c). Here, sketch only the gain plot using piecewise linear approximation in reference to Fig.1(b).

(a)  $K_1 = 10, K_2 = 0,$

(b)  $K_1 = 1, K_2 = 20,$

(c)  $K_1 = 1, K_2 = 200.$

(2) Find the closed-loop transfer function for each of the cases of (a), (b) and (c) in question (1), and describe the differences of their unit step responses from the points of view of the steady-state error, the rise time (speed of response) and the overshoot.

# Question No. 1: Electrical engineering (2/2)

## 2013 年 8 月実施 問題 1 電気工学 ( 2 頁目 / 2 頁中 )

- (3) Assume that  $K_1 = \frac{1}{20}K_2$  and  $K_2 > 0$ . Find the condition of  $K_2$  so that the waveform of the unit step response has no overshoot and the steady-state error for  $X(s) = \frac{1}{s^2}$  is less than or equal to 0.1.

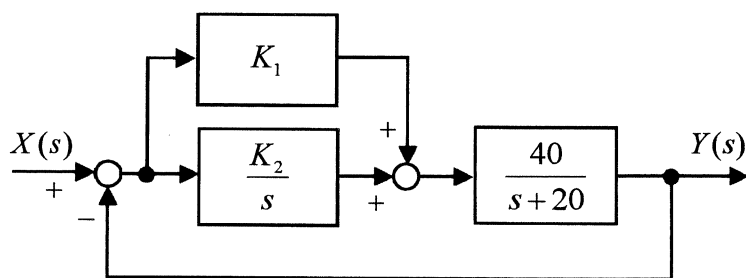


Fig.1(a)

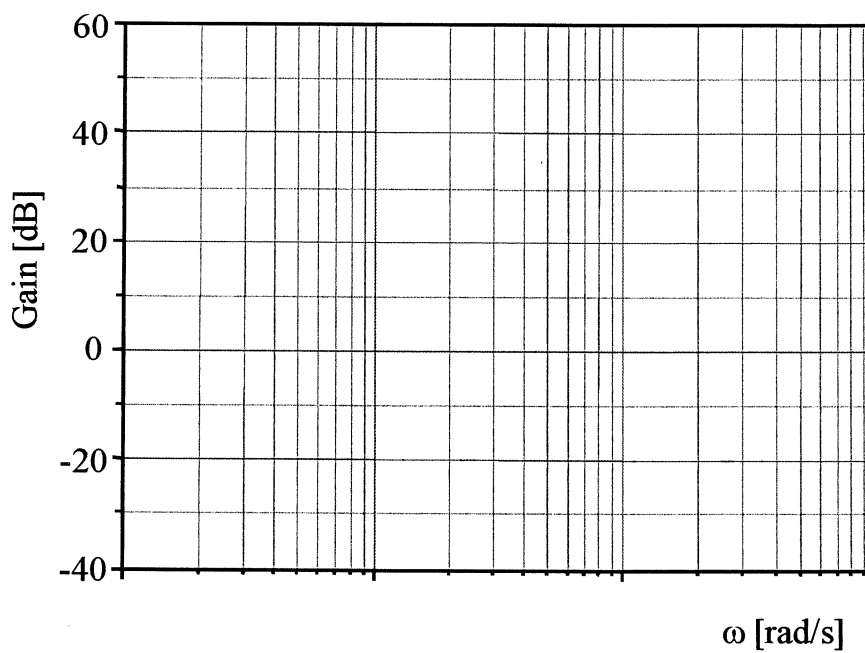


Fig.1(b)

## Question No. 2: Communication engineering (1/3)

### 2013 年 8 月実施 問題 2 通信工学 (1 頁目／3 頁中)

Fig. 2(a)に示すような，単側波帯搬送波抑圧（SSB-SC）変調方式の伝送系がある．伝送路は理想的で損失はないものとする．受信機中の帯域通過フィルタ（BPF）と低周波通過フィルタ（LPF）は，次式及び Fig. 2(b)で表される伝達関数  $H_{BPF}(f)$ ,  $H_{LPF}(f)$  をそれぞれ持つものとする．

$$H_{BPF}(f) = \begin{cases} \cos \frac{\pi|f| - f_c}{2f_T}, & |f| - f_c \leq f_T \\ 0, & |f| - f_c > f_T \end{cases}$$

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_T \\ 0, & |f| > f_T \end{cases}$$

送信機には， $s(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  で表される低周波信号が入力されている．また受信機には，SSB-SC の変調信号  $g_{SSB-SC}(t)$  と，電力スペクトル密度が  $-\infty < f < \infty$  にわたって  $N_0/2$  である白色雑音  $n(t)$  とが入力されている．信号周波数  $f_m$ ，搬送波周波数  $f_c$ ，各フィルタの遮断周波数  $f_T$  の間には， $0 < f_m < f_T \ll f_c$  の関係があるとする．このとき，以下の問に答えよ．

- (1)  $H_{BPF}(f)$  のフーリエ逆変換を求め，BPF のインパルス応答との関連を論ぜよ．
- (2) 変調信号  $g_{SSB-SC}(t)$  が以下の式で表されることを示せ．

$$g_{SSB-SC}(t) = A_m A_c \cos\{2\pi(f_c + f_m)t\}$$

- (3) BPF 通過後の A 点における電力密度スペクトルを図示せよ．ただし図の主要な部分には値も記すこと．
- (4) 受信機出力  $v_o(t)$  の信号対雑音電力比  $(S/N)_o$  を求めよ．
- (5)  $(S/N)_o$  を最大にする  $f_T/f_m$  の値を求めよ．必要なら， $2x \tan x = 1$  の近似解が  $x \approx \pi/5$  であることを使ってよい．

## Question No. 2: Communication engineering (2/3)

### 2013 年 8 月実施 問題 2 通信工学 (2 頁目 / 3 頁中)

Consider a transmission system using single side-band amplitude modulation with suppressed carrier (SSB-SC) as shown in Fig. 2(a). The transmission channel is assumed to be ideal and lossless. The BPF (Band Pass Filter) and LPF (Low Pass Filter) in the receiver have the frequency response  $H_{BPF}(f)$  and  $H_{LPF}(f)$  expressed as follows and shown in Fig. 2(b).

$$H_{BPF}(f) = \begin{cases} \cos \frac{\pi |f| - f_c}{2f_T}, & ||f| - f_c| \leq f_T \\ 0, & ||f| - f_c| > f_T \end{cases}$$

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_T \\ 0, & |f| > f_T \end{cases}$$

A low frequency signal expressed as  $s(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  is fed to the input of the transmitter. An SSB-SC modulated signal  $g_{SSB-SC}(t)$  and a white noise  $n(t)$  whose power spectral density is  $N_0/2$  for  $-\infty < f < \infty$  are fed to the input of the receiver. The signal frequency  $f_m$ , carrier frequency  $f_c$ , and the cut-off frequency of each filter  $f_T$  satisfy the relation of  $0 < f_m < f_T \ll f_c$ . Answer the following questions.

- (1) Derive the inverse Fourier transformation of  $H_{BPF}(f)$ , and discuss its relation to the impulse response of the BPF.
- (2) Show that the modulated signal  $g_{SSB-SC}(t)$  is expressed by the following formula.

$$g_{SSB-SC}(t) = A_m A_c \cos\{2\pi(f_c + f_m)t\}$$

- (3) Sketch the power density spectrum at point A after the BPF. Indicate values at principal points in the figure.
- (4) Derive the averaged signal power to the averaged noise power ratio  $(S/N)_o$  of the output from the receiver,  $v_o(t)$ .
- (5) Derive  $f_T/f_m$  which maximizes  $(S/N)_o$ . Use the fact that the solution of the equation  $2x \tan x = 1$  is approximated by  $x \approx \pi/5$ , if necessary.

# Question No. 2: Communication engineering (3/3)

2013 年 8 月実施  
問題 2 通信工学  
(3 頁目 / 3 頁中)

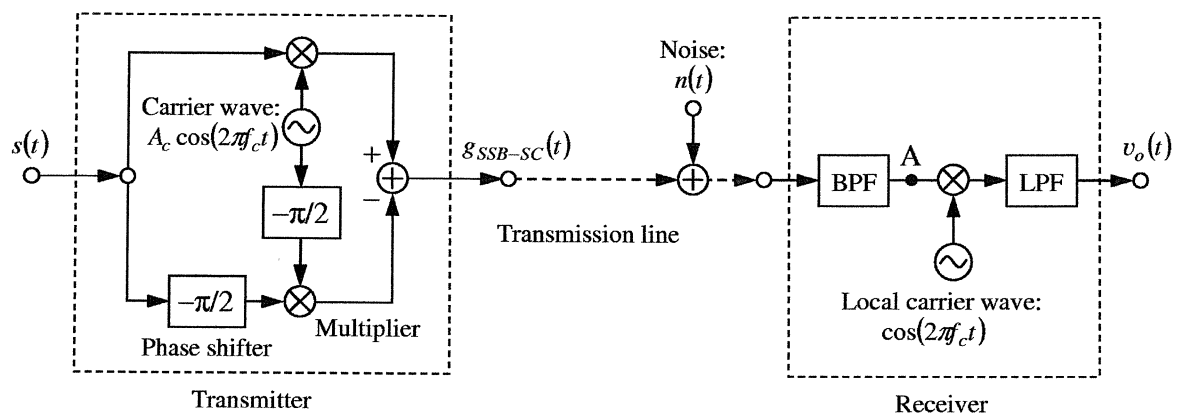


Fig. 2 (a)

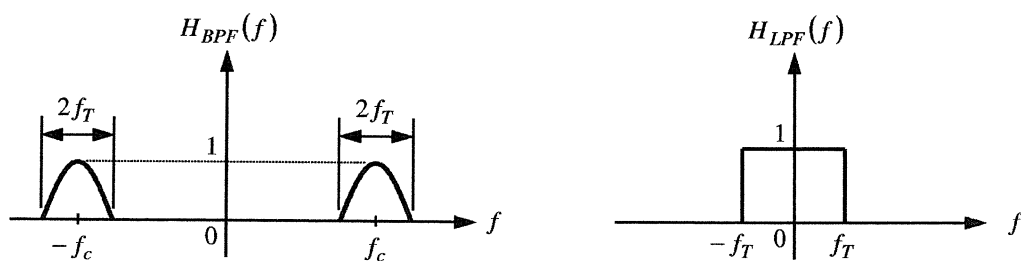


Fig. 2 (b)

# Question No. 3: Electronic engineering (1/3)

## 2013 年 8 月実施 問題 3 電子工学 (1 頁目 / 3 頁中)

Si 半導体を用いた電子デバイスや電子回路による電流制御に関連して、以下の問に答えよ。

- (1) Si 半導体に不純物を添加することで得られる n 形および p 形半導体と、それらの pn 接合について考える。
  - (a) n 形および p 形の半導体中に極性の異なる多数キャリアが生じるメカニズムを説明するとともに、多数キャリアが印加電界により半導体中を移動できる理由を述べよ。
  - (b) Fig. 3 (a) の pn 接合に、順方向および逆方向バイアス電圧を印加した場合に流れる電流の違いを述べるとともに、その要因をキャリアの挙動に基づき説明せよ。
- (2) エミッタ (E)、ベース (B)、コレクタ (C) の電極を持つ Fig. 3 (b) の npn バイポーラトランジスタの電流動作について考える。
  - (a) ベース電極に印加する電圧を変えることにより、コレクタ電流  $I_C$  を制御できるメカニズムを、キャリアの挙動に基づき説明せよ。
  - (b)  $I_C$ 、エミッタ電流  $I_E$  およびベース電流  $I_B$  の関係を考えることにより、エミッタ接地電流利得  $\beta$  を  $I_E$  と  $I_B$  のみを用いて表せ。
- (3) npn バイポーラトランジスタを用いた Fig. 3 (c) のエミッタ接地増幅回路について考える。Fig. 3 (c) 中に示される入力電圧  $v_{in}$ 、入力電流  $i_{in}$ 、出力電圧  $v_{out}$  および出力電流  $i_{out}$  は、角周波数  $\omega$  の交流成分である。
  - (a) 増幅回路の微小信号等価回路を示せ。トランジスタには h パラメータ（入力インピーダンス  $h_{ie}$  および電流利得  $h_{fe}$ ）を用いた Fig. 3 (d) の簡略化モデルを用いるとともに、等価回路にはバイパスコンデンサ  $C_E$  およびエミッタ抵抗  $R_E$  を含めよ。
  - (b) バイパスコンデンサ  $C_E$  のインピーダンスが無視できるほど小さいとき、増幅回路の（出力開放）電圧利得  $K_v (= v_{out} / v_{in})$  を求めよ。

## Question No. 3: Electronic engineering (2/3)

### 2013 年 8 月実施 問題 3 電子工学 (2 頁目 / 3 頁中)

Answer the following questions regarding current control by electronic devices and electronic circuits using Si semiconductors.

- (1) Consider the n-type and p-type Si semiconductors obtained by doping with impurities and their pn junction.
  - (a) Explain the mechanism generating different-polarity majority carriers in the n-type and p-type semiconductors, and show the reason why the majority carriers can move in the semiconductors under an applied electric field.
  - (b) Explain the difference between electric currents for the pn junction of Fig. 3 (a) under forward and reverse bias voltages, and show the cause of difference based on carrier behaviors.
- (2) Consider the current operation of an npn bipolar transistor with emitter (E), base (B) and collector (C) electrodes in Fig. 3 (b).
  - (a) Explain the mechanism for controlling a collector current  $I_C$  by varying the voltage applied to the base electrode, based on carrier behaviors.
  - (b) Express the common-emitter current gain  $\beta$  using only the emitter current  $I_E$  and the base current  $I_B$ , by considering the relationship between  $I_E$ ,  $I_B$  and  $I_C$ .
- (3) Consider the common-emitter amplifier circuit using an npn bipolar transistor shown in Fig. 3 (c). The input voltage  $v_{in}$ , the input current  $i_{in}$ , the output voltage  $v_{out}$ , and the output current  $i_{out}$  shown in Fig. 3 (c) are alternating components with angular frequency  $\omega$ .
  - (a) Show the small-signal equivalent circuit of the amplifier circuit. Use the simplified h-parameter model (input impedance  $h_{ie}$  and current gain  $h_{fe}$ ) shown in Fig. 3 (d) for the transistor, and include the bypass capacitor  $C_E$  and the emitter resistance  $R_E$  in the equivalent circuit.
  - (b) Derive the (open-circuit) voltage gain  $K_v (= v_{out} / v_{in})$  for the amplifier circuit, when the impedance of the bypass capacitor  $C_E$  is small enough to be ignored.

Question No. 3: Electronic engineering (3/3)

2013 年 8 月実施  
問題 3 電子工学  
(3 頁目 / 3 頁中)

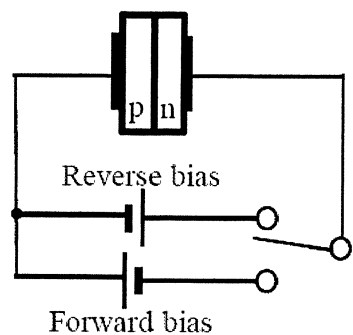


Fig. 3 (a)

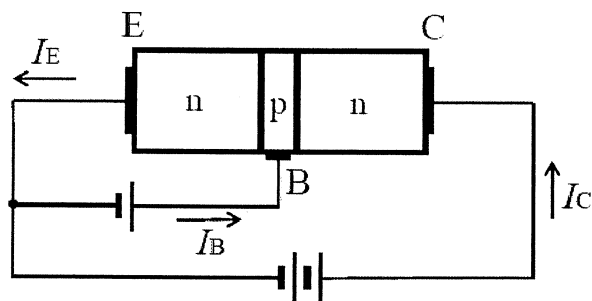


Fig. 3 (b)

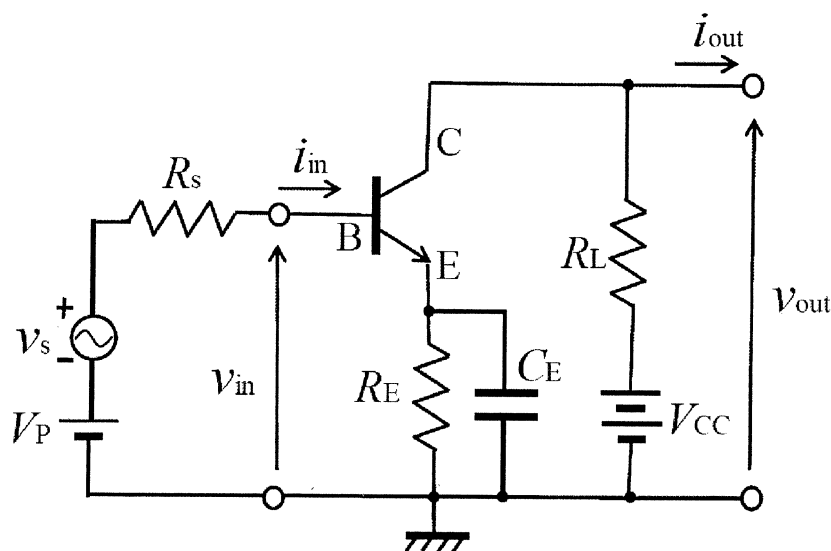


Fig. 3 (c)

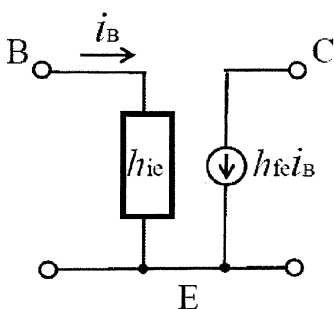


Fig. 3 (d)



# Question No. 4: Computer science 1 (1/3)

## 2013 年 8 月実施 問題 4 計算機 1 (1 頁目 / 3 頁中)

各番地に整数が格納されるメモリと、1 つの整数レジスタ SP を持つ計算機を考える。  
Fig. 4 (a)の命令を用いて、以下の問に答えよ。ただし、整数オーバーフローおよびアンダー  
フローは起きないとする。また、SP の初期値は 0 とし、メモリは十分に大きいとする。

- (1) Fig. 4 (b)のプログラム（命令の列）を実行した後に、0 番地に格納されている整数は何  
か。
- (2) Fig. 4 (c)は、100 以下の正の偶数の和  $100 + 98 + 96 + \dots + 2$  を計算し、その結果を 0  
番地に格納して停止するプログラムである。[x], [y], [z]のそれぞれに対し適切な整  
数を答えよ。また、このプログラムがどのように  $100 + 98 + 96 + \dots + 2$  を計算するか  
簡潔に（3 行から 10 行程度で）説明せよ。
- (3) Fig. 4 (d)は、 $n > 0$  ならば  $f(n) = 4 \times f(n-1) - 2$ ,  $n \leq 0$  ならば  $f(n) = 1$  と定義される  
関数  $f$  に対し  $f(10)$  を計算して、その結果を 0 番地に格納して停止するプログラムで  
ある。[v], [w]のそれぞれに対し適切な整数を答えよ。また、このプログラムがどのよ  
うに  $f(10)$  を計算するか簡潔に（3 行から 10 行程度で）説明せよ。

Consider a computer with a memory in which an integer is stored at each address, and  
with an integer register SP. Answer the following questions using the instructions in  
Fig. 4 (a). Here, assume that no integer overflow or underflow will occur. Assume also  
that the initial value of SP is 0, and that the memory is sufficiently large.

- (1) What is the integer stored at address 0 after executing the program (sequence of  
instructions) in Fig. 4 (b)?
- (2) Fig. 4 (c) is a program that computes the sum  $100 + 98 + 96 + \dots + 2$  of the positive  
even numbers that are not greater than 100, stores the result to address 0, and halts.  
Give appropriate integers for each of [x], [y], and [z]. Also, explain briefly (in  
around 3 to 10 lines) how this program computes  $100 + 98 + 96 + \dots + 2$ .
- (3) Fig. 4 (d) is a program that computes  $f(10)$  for the function  $f$  defined as  
 $f(n) = 4 \times f(n-1) - 2$  if  $n > 0$  and  $f(n) = 1$  if  $n \leq 0$ , stores the result to address 0,  
and halts. Give appropriate integers for each of [v] and [w]. Also, explain briefly  
(in around 3 to 10 lines) how this program computes  $f(10)$ .

## Question No. 4: Computer science 1 (2/3)

### 2013 年 8 月実施 問題 4 計算機 1 (2 頁目 / 3 頁中)

命令 Instruction	動作 Operation
CONST $i$	SP 番地に整数 $i$ を格納してから, SP の値を 1 つ増やす. Store the integer $i$ at address SP, and then increase the value of SP by 1.
ADD	SP の値を 1 つ減らしてから, $(SP - 1)$ 番地と SP 番地に格納されている整数の和を, $(SP - 1)$ 番地に格納する. Decrease the value of SP by 1, and then store the sum of the integers stored at address $(SP - 1)$ and SP to address $(SP - 1)$ .
LOAD $i$	$(SP - i)$ 番地に格納されている整数を SP 番地に複製してから, SP の値を 1 つ増やす. Copy the integer stored at address $(SP - i)$ to address SP, and then increase the value of SP by 1.
STORE $i$	SP の値を 1 つ減らしてから, SP 番地に格納されている整数を, $(SP - i)$ 番地に複製する. Decrease the value of SP by 1, and then copy the integer stored at address SP to address $(SP - i)$ .
IFP $i$	SP の値を 1 つ減らす. それから, SP 番地に格納されている整数が正ならば, 先頭の命令から数えて $i$ 番目の命令にジャンプする (ただし先頭の命令を 1 番目と数える). Decrease the value of SP by 1. Then, if the integer stored at address SP is positive, jump to the $i$ -th instruction counted from the initial instruction (where the initial instruction is counted as the first).
CALL $i$	$i$ 番目の命令にジャンプする. Jump to the $i$ -th instruction.
RET	SP の値を 1 つ減らしてから, SP 番地に格納されている整数 $i$ に対し $i$ 番目の命令にジャンプする. Decrease the value of SP by 1, and then jump to the $i$ -th instruction for the integer $i$ stored at address SP.
HALT	プログラムの実行を停止する. Stop the execution of the program.

Fig. 4 (a)

# Question No. 4: Computer science 1 (3/3)

## 2013 年 8 月実施 問題 4 計算機 1 (3 頁目 / 3 頁中)

1: CONST 13  
2: CONST -8  
3: LOAD 2  
4: ADD  
5: ADD  
6: HALT

Fig. 4 (b)

1: CONST 0  
2: CONST 100  
3: LOAD 2  
4: LOAD 2  
5: ADD  
6: STORE 2  
7: LOAD 1  
8: CONST -2  
9: ADD  
10: STORE x  
11: LOAD y  
12: IFP z  
13: HALT

Fig. 4 (c)

1: CONST 10  
2: CONST 4  
3: CALL 5  
4: HALT

5: LOAD 2  
6: IFP 10  
7: CONST 1  
8: STORE 2  
9: RET

10: LOAD 2  
11: CONST -1  
12: ADD  
13: CONST v  
14: CALL w

15: LOAD 1  
16: ADD  
17: LOAD 1  
18: ADD  
19: CONST -2  
20: ADD  
21: STORE 2  
22: RET

Fig. 4 (d)

# Question No. 5: Computer science 2 (1/1)

2013年8月実施

問題5 計算機2

(1 頁目/1 頁中)

Fig.5 に示す再帰関数  $f$  と  $g$  を考える. ただし,  $-$ ,  $*$  は, 整数の減算, 乗算を各々表す. また, 式 “if  $e_1$  then  $e_2$  else  $e_3$ ” の値は,  $e_1$  の値が真ならば  $e_2$  の値に, そうでなければ  $e_3$  の値に等しい.

(1)  $f(3), g(3, 7)$  の値を各々計算せよ. 計算過程も示せ.

(2) 非負整数  $x, y$  ( $x \leq y$ ) について  $f(x), g(x, y)$  を計算する際の整数演算  $*$  の回数を各々示せ.

(3) 非負整数  $x, y$  ( $x \leq y$ ) について以下の関係式を導出せよ.

(a)  $(y - x + 1) * g(x, y + 1) = (y + 1) * g(x, y)$

(b)  $\frac{g(x + 1, y + 1)}{f(x + 1)} = \frac{g(x + 1, y)}{f(x + 1)} + \frac{g(x, y)}{f(x)}$

(4) 非負整数  $n$  について  $\sum_{k=0}^n \frac{g(k, n)}{f(k)} = 2^n$  であることを帰納法により証明せよ.

Consider the recursive functions  $f$  and  $g$  shown in Fig.5. Here,  $-$  and  $*$  denote integer subtraction and multiplication, respectively. Furthermore, the value of the expression “if  $e_1$  then  $e_2$  else  $e_3$ ” equals the value of  $e_2$  if the values of  $e_1$  is true, and equals the value of  $e_3$  otherwise.

(1) Calculate  $f(3)$  and  $g(3, 7)$ , respectively. Show your working.

(2) For non-negative integers  $x, y$  ( $x \leq y$ ), show the numbers of the integer operation  $*$  required to calculate  $f(x)$  and  $g(x, y)$ , respectively.

(3) For non-negative integers  $x, y$  ( $x \leq y$ ), derive the following relational expressions,

(a)  $(y - x + 1) * g(x, y + 1) = (y + 1) * g(x, y)$ ,

(b)  $\frac{g(x + 1, y + 1)}{f(x + 1)} = \frac{g(x + 1, y)}{f(x + 1)} + \frac{g(x, y)}{f(x)}$ .

(4) For a non-negative integer  $n$ , prove by induction that  $\sum_{k=0}^n \frac{g(k, n)}{f(k)} = 2^n$ .

$$f(x) = \begin{array}{ll} \text{if } x \leq 0 & \text{then } 1 \\ \text{else } & x * f(x - 1) \end{array}$$

$$g(x, y) = \begin{array}{ll} \text{if } x > y & \text{then } 0 \\ \text{else if } x \leq 0 & \text{then } 1 \\ \text{else } & y * g(x - 1, y - 1) \end{array}$$

Fig.5

## Question No. 6: Advanced physics 1 (1/2)

### 2013年8月実施 問題6 物理専門1 (1頁目／2頁中)

一次元のポテンシャル井戸

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$$

を考える (Fig.6). この井戸の中に質量  $m$ , エネルギー  $E (< 0)$  の粒子が束縛状態にある. 以下の間に答えよ. 必要に応じて  $\hbar = h/(2\pi)$  を用いよ. ここに  $h$  はプランク定数である.

(1) 領域  $0 \leq x \leq a$  および領域  $x \geq a$  における, 時間に依存しないシュレーディンガー方程式をそれぞれ書け. 粒子の波動関数を  $\varphi(x)$  とせよ.

(2) この粒子の領域  $0 \leq x \leq a$  および領域  $x \geq a$  における波動関数を, それぞれ

$$\varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (6A)$$

$$\varphi_2(x) = Ce^{-\kappa(x-a)} \quad (6B)$$

とする.  $k$  および  $\kappa$  を求めよ.

(3)  $\xi = ka$ ,  $\eta = \kappa a$  とする. 波動関数の境界条件を用い,  $\xi$  と  $\eta$  の間に以下の関係が成立することを示せ.

$$\eta = -\xi \cot \xi \quad (6C)$$

(4) 次式を示せ.

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \quad (6D)$$

(5) 式(6C)と(6D)のグラフの概略を  $\xi$ - $\eta$  平面に描け. 少なくとも一個の束縛状態が存在するには以下の関係が成立しなければならないことを示せ.

$$V_0a^2 \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{8m} \quad (6E)$$

# Question No. 6: Advanced physics 1 (2/2)

2013年8月実施

問題6 物理専門1  
(2頁目／2頁中)

Consider a one-dimensional potential well (Fig. 6)

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}.$$

In this well, a particle with mass  $m$  and energy  $E$  ( $< 0$ ) is in a bound state. Answer the following questions. Use  $\hbar = h/(2\pi)$  if necessary. Here,  $h$  is Planck's constant.

(1) Write the time-independent Schrödinger's equations for each of the regions  $0 \leq x \leq a$  and  $x \geq a$ . Let  $\varphi(x)$  be the wavefunction of the particle.

(2) Let the wavefunctions of the particle in regions  $0 \leq x \leq a$  and  $x \geq a$  be

$$\varphi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (6A)$$

and

$$\varphi_2(x) = Ce^{-\kappa(x-a)}, \quad (6B)$$

respectively. Obtain  $k$  and  $\kappa$ .

(3) Let  $\xi = ka$  and  $\eta = \kappa a$ . Show that the following relation holds between  $\xi$  and  $\eta$ .

$$\eta = -\xi \cot \xi \quad (6C)$$

(4) Show that

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}. \quad (6D)$$

(5) Sketch the graphs of Eqs. (6C) and (6D) in the  $\xi$ - $\eta$  plane. Show that the following relation must hold in order for at least one bound state to be present.

$$V_0a^2 \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{8m} \quad (6E)$$

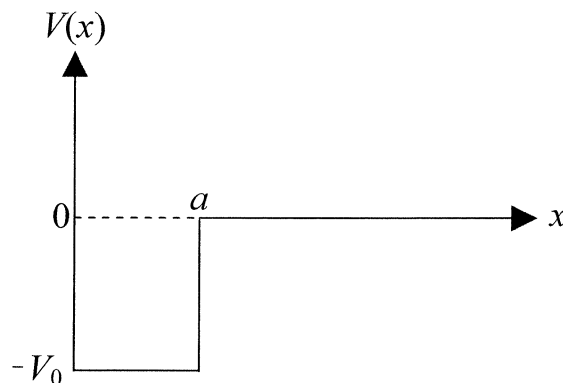


Fig. 6

# Question No. 7: Advanced physics 2 (1/2)

## 2013 年 8 月実施 問題 7 物理専門 2 (1 頁目 / 2 頁中)

複素変数  $z$  の関数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - \omega^2) \sin(z)}$$

を考える.  $\omega$  は,  $|\omega| < \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $N$  は任意の正の整数) かつ  $\omega \neq k\pi$  ( $k$  は任意の整数) を満足する複素定数である.  $C_N$  は  $z = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) により表される円周上を正の向きに回る積分路である.  $i$  は虚数単位である. 以下の問に答えよ.

(1) 関数  $f(z)$  の無限遠点を除く全ての特異点と, その留数を求めよ.

(2) 複素積分  $I_N = \int_{C_N} f(z) dz$  の値を求めよ.

(3) 任意の複素数  $z$  に対して, 次の不等式を証明せよ.

$$|\sin z| \leq |\sin(z)|$$

ただし, 任意の実数  $x$  に対して成り立つ不等式  $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$  および  $0 < \frac{x}{\sinh(x)} \leq 1$  を用いてよい.

(4)  $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N$  を求め,  $\frac{1}{\sin(\omega)}$  と  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^2 - n^2 \pi^2}$  との間に成り立つ関係式を求めよ.

## Question No. 7: Advanced physics 2 (2/2)

### 2013 年 8 月実施 問題 7 物理専門 2 (2 頁目 / 2 頁中)

Consider a function

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - \omega^2) \sin(z)}$$

of a complex variable  $z$ .  $\omega$  is a complex constant that satisfies  $|\omega| < \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $N$  is any positive integer) and  $\omega \neq k\pi$  ( $k$  is any integer).  $C_N$  is the contour consisting of the positively oriented circle  $z = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). Let  $i$  denote the imaginary unit. Answer the following questions.

- (1) Find all the isolated singular points of the function  $f(z)$  except for those points at infinity and find their corresponding residues.
- (2) Find the value of the complex integral  $I_N = \int_{C_N} f(z) dz$ .
- (3) Prove the following inequality equation

$$|\sin|z|| \leq |\sin(z)|$$

for any complex number  $z$ . You may use inequality equations  $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$  and

$0 < \frac{x}{\sinh(x)} \leq 1$  that hold for any real number  $x$ .

- (4) Find the value of  $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N$ , and find the relationship between  $\frac{1}{\sin(\omega)}$  and  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^2 - n^2\pi^2}$ .