大阪大学大学院情報科学研究科
博士前期課程

情報数理学専攻

参考問題

[情報基礎]

1. N 個の実数が $A[1], A[2], \ldots, A[N]$ に格納された配列 A に対して、以下の整列アルゴリズムを実行する。

```
i ← 0;
while i < N do
    if i = 0 or A[i] ≦ A[i + 1] then
        i ← i + 1;
    else
        swap(A[i], A[i + 1]);
        i ← i − 1;
    end if
end while
```

ただし、swap$(A[i], A[i+1])$ は、$A[i]$ と $A[i+1]$ の値を交換する操作を意味する。また、2 項演算子 **or** は、第 1 項が真であるとき第 2 項を評価することなく真を返すとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 長さ $N = 5$ の配列 $A = \{2, 6, 1, 3, 8\}$ に対して、アルゴリズムを実行する。if 文の条件式が評価される時点での変数 i の値と配列 A の内容を順に答えなさい。

(2) 長さ N の配列 A に対してアルゴリズムを実行するとき、if 文の条件式が評価される回数の最小値 $T_{\mathrm{min}}(N)$ と最大値 $T_{\mathrm{max}}(N)$ を求めなさい。

(3) N 個の相異なる実数がランダムな順序に格納された配列 A に対してアルゴリズムを実行するとき、if 文の条件式が評価される回数の期待値 $T_{\mathrm{ave}}(N)$ を求めなさい。

(次ページにつづく)

2. a を実数、n を正の整数とする。a を掛け合わせてべき乗 a^n を求める以下のアルゴリズムにおいて、乗算 $(\times)$ の回数を考える。

function Power(a, n)
　　if $n = 1$ **then**
　　　　return a;
　　end if
　　$r \leftarrow$ Power$(a, \lfloor n/2 \rfloor)$;
　　$r \leftarrow r \times r$;
　　if $n\%2 = 1$ **then**
　　　　$r \leftarrow r \times a$;
　　end if
　　return r;
end function

ただし、$\lfloor n/2 \rfloor$ は $n/2$ の整数部分、$n\%2$ は n を 2 で割った余りを表し、これらの演算は乗算の回数には含めないものとする。以下の問いに答えなさい。

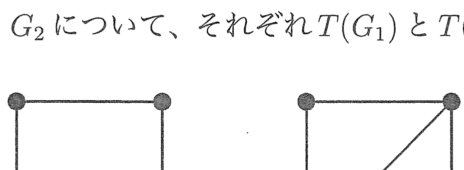
(1) a^5 を求めるときに行われる乗算の回数を答えなさい。

(2) n の 2 進表記を $b_k b_{k-1} \cdots b_0$ とする。すなわち、$b_i \in \{0, 1\}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ かつ $b_k \neq 0$ であり、$n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$ が成り立つ。a^n を求めるときに行われる乗算の回数を、k と $b_0, b_1, \ldots, b_k$ を用いて表しなさい。

(3) a を掛け合わせて a^{15} を求めるとき、このアルゴリズムによる乗算回数よりも少ない乗算回数で計算できる方法を示しなさい。

3. N 個の頂点 $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ を持つグラフ G に対して、$T(G) = \mathrm{tr}(A^3)$ とする。ただし、N 次正方行列 $A = (a_{ij})$ は G の隣接行列であり、頂点 v_i と v_j の間に辺が存在するとき $a_{ij} = 1$、頂点 v_i と v_j の間に辺が存在しないとき $a_{ij} = 0$ である。また、$\mathrm{tr}(X)$ は行列 X の対角和を表す。以下の問いに答えなさい。なお、グラフは多重辺や自己ループを持たないとする。

(1) 以下のグラフ G_1 と G_2 について、それぞれ $T(G_1)$ と $T(G_2)$ を求めなさい。



G_1　　　　G_2

(2) 頂点数 N $(\geqq 3)$ のグラフ G が連結で $T(G) > 0$ を満たすとき、辺の数の最小値を求めなさい。

(3) 頂点数 N $(\geqq 3)$ のグラフ G に対して、$T(G)$ の最大値を求めなさい。

[数理基礎]

1. パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ をもつ線形計画問題

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\alpha,\beta) & \text{最小化} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ & \text{条件} & x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = \alpha, \\ & & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = \beta, \\ & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & & x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0,\quad x_4 \geqq 0 \end{array}$$

について、以下の問いに答えなさい。

(1) x_1, x_2, x_3, x_4 を整数に限るとき、問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となる α, β の組をすべて求めなさい。

(2) 問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となる α, β の集合を図示しなさい。

(3) 問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となるとき、その最適値を $f(\alpha,\beta)$ とおく。このとき、$\mathrm{P}(\alpha_1,\beta_1)$, $\mathrm{P}(\alpha_2,\beta_2)$ が実行可能であるならば、すべての $\lambda \in [0,1]$ について、問題 $\mathrm{P}(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2)$ が実行可能であり、

$$f(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2) \leqq \lambda f(\alpha_1,\beta_1) + (1-\lambda) f(\alpha_2,\beta_2)$$

であることを示しなさい。

2. xy 平面上の集合 $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ を考える。この集合上で一様にランダムに点を生成し、その x 座標を確率変数 X、y 座標を確率変数 Y とおく。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 確率変数 X, Y の同時確率密度関数を与えなさい。

(2) 確率変数 S, T を

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad T = \frac{Y}{X}$$

と定義する。これらの同時確率密度関数を求めなさい。

(3) 確率変数 T の周辺確率密度関数を求めなさい。

(次ページにつづく)

3. 5個のかぼちゃについて、2種の秤 X、秤 Y を用いて重さを計測し、

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 1.1, & x_2 = 1.2, & x_3 = 1.1, & x_4 = 0.8, & x_5 = 1.0, \\ y_1 = 1.0, & y_2 = 1.1, & y_3 = 0.9, & y_4 = 0.7, & y_5 = 0.9 \end{array}$$

を得た。ただし、x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ は、それぞれ秤 X、秤 Y により、第 i 番目のかぼちゃの重さを計測した結果を表すとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 各標本の差 $d_i = x_i - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ のデータについて、標本平均、標本分散を求めなさい。

(2) 秤 X、秤 Y の計測に有意差があるか、有意水準 0.05 で検定を行いなさい。ただし、必要であれば、表 1 を用いてもよい。

表 1: t 分布表

	上側確率		
自由度	0.1	0.05	0.025
1	3.078	6.314	12.706
2	1.886	2.920	4.303
3	1.638	2.353	3.182
4	1.533	2.132	2.776
5	1.476	2.015	2.571
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.895	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228

[数学解析]

1. 非負整数 n に対して、複素積分

$$I_n = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{2n}(z^2+a^2)} dz$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $0 < a < 1$ のとき、I_0 を求めなさい。

(2) $a = 0$ のとき、I_n を求めなさい。

(3) $a > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a^{2n}|I_n|$ を求めなさい。

2. 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

を考える。ただし、

$$P(x,y) = x^2y - y^2 - 2x, \qquad Q(x,y) = x^3 - xy + 1$$

とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 次の式が完全微分方程式となるように、積分因子 $\lambda(z)$ を $z = xy$ の関数として定めなさい。

$$\lambda(xy)P(x,y)dx + \lambda(xy)Q(x,y)dy = 0$$

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい。

3. 以下の問いに答えなさい。ただし、i は虚数単位、a は整数でない実数とする。

(1) $f(x) = e^{-iax}$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ を周期 2π の周期関数として $-\infty < x < \infty$ に拡張する。この周期関数の複素フーリエ級数展開を求めなさい。

(2) 以下の式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

[情報物理]

1. 電荷 $\pm q$、間隔 d の電気双極子が真空中に置かれている。座標系や変数を適切に定義し、以下の問いに答えなさい。

(1) 周囲の静電ポテンシャル（静電位）を求めなさい。

(2) 十分離れた点での静電ポテンシャル（静電位）を求めなさい。

(3) (2) の場合の電場を求めなさい。

2. 図 1 のように、幅 D の広がりをもつ光源から発する単色光（振幅 A, 波数 k）を、距離 r だけ離れた二つのピンホール（間隔 d）を通して、さらに距離 R だけ離れたスクリーン上で観察する。光源の輝度は一様であり、異なる点から出る光の位相関係はランダムである。光源の広がりと二つのピンホールは光軸に対して対称であり、光源面、ピンホール面、スクリーン面では、光軸との交点をそれぞれの原点とする。この光学系について、以下の問いに答えなさい。

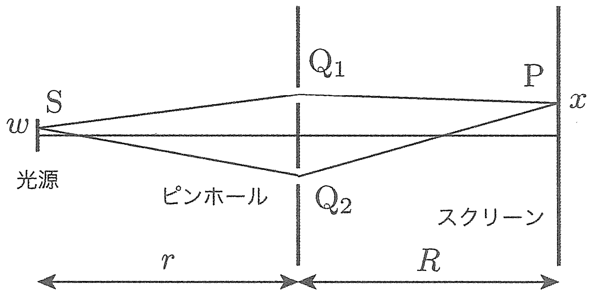


図 1

(1) 光源上の点 S（座標 w）から発した光によるスクリーン上の点 P（座標 x）での光強度 $I_0(\mathrm{P})$ は

$$I_0(\mathrm{P}) = 2|A|^2(1+\cos kL)$$

で与えられるものとする。L は二つのピンホールによる光路差で、$r \gg |w|,\ R \gg |x|$ のとき、

$$L = \overline{\mathrm{SQ_2P}} - \overline{\mathrm{SQ_1P}} \approx \frac{wd}{r} + \frac{xd}{R}$$

と近似される。このとき、点 P での光強度 $I(\mathrm{P})$ が次式で求められることを説明しなさい。

$$I(\mathrm{P}) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 2|A|^2(1+\cos kL)dw$$

(2) 点 P における光強度 $I(\mathrm{P})$ を計算し、$\alpha = \dfrac{kdD}{2r}$ を用いて整理しなさい。

（次ページにつづく）

(3) スクリーン上で観察される縞の鮮明度Θを求めなさい。

(4) 変数αに対する鮮明度Θの変化を図2に示す。これより、ピンホール面より光源を見込む角度（視直径）$\dfrac{D}{r}$を求める手順を説明しなさい。

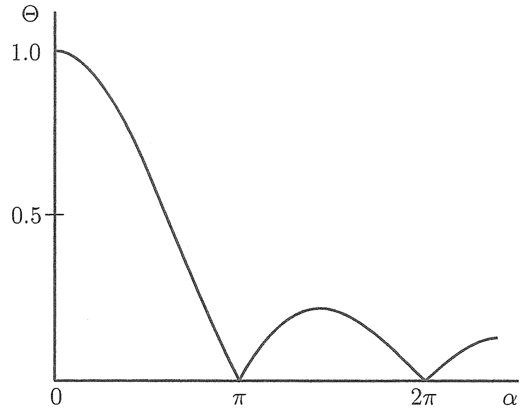


図2

3. 自然界で見られる色について、それぞれの事例ごとに、関連する光学現象の名称をあげ、発色のしくみを200字程度で説明しなさい。

(1) 虹

(2) 夕焼け

(3) タマムシの羽

[情報基礎]

1. ソーティングに関する以下の問いに答えなさい。

(1) n 個の正の実数 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ からなるリスト A がある。以下のアルゴリズム SORT-1(A) によってリスト A の要素をソートするときの時間計算量を求めなさい。

```
SORT-1(A)
  for j ← 2 to n do
    s ← A[j];
    i ← j − 1;
    while i > 0 and A[i] > s do
      A[i + 1] ← A[i];
      i ← i − 1;
    end while
    A[i + 1] ← s;
  end for
```

(2) n 個の正の実数をそれらの最大値で割ることで区間 $(0, 1]$ に正規化した数値 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ からなるリスト A がある。n 個のリスト $B[1], B[2], \ldots, B[n]$ を用意して、以下のアルゴリズム SORT-2(A) によってリスト A の要素をソートする。$\lceil x \rceil$ は x を切り上げた整数である。

```
SORT-2(A)
  for i ← 1 to n do
    A[i] をリスト B[⌈nA[i]⌉] に挿入する;
  end for
  for i ← 1 to n do
    SORT-1(B[i]);
  end for
  リスト B[1], B[2], ..., B[n] を順に連接する;
```

(i) 数値 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ が独立に区間 $(0, 1]$ 上に一様分布していると仮定するとき、リスト $B[i]$ に入る要素数の期待値と分散を求め、SORT-1($B[i]$) に必要な平均時間計算量を求めなさい。

(ii) SORT-2(A) にかかる平均時間計算量と最悪時間計算量を求めなさい。

(次ページにつづく)

2. n 桁の正の整数の掛け算に必要となる 1 桁の整数同士の掛け算の回数を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) n が偶数のとき、n 桁の正の整数 x, y を $n/2$ 桁ごとに 2 分割して、$x = a10^{n/2} + b, y = c10^{n/2} + d$ と表すと

$$\begin{aligned} xy &= (a10^{n/2}+b)(c10^{n/2}+d) = ac10^n + (ad+bc)10^{n/2} + bd \\ &= ac10^n + \{ac + bd - (a-b)(c-d)\}10^{n/2} + bd \end{aligned}$$

と変形できるので、xy を計算するためには、$ac, bd, (a-b)(c-d)$ の 3 つの掛け算をすればよい。

このことを利用して、再帰的に 2 分割して掛け算をするときの 1 桁の整数同士の掛け算の回数を $T(n)$ とするとき、$T(n)$ と $T(n/2)$ の関係式を求めなさい。また、$T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_2 3})$ となることを示しなさい。

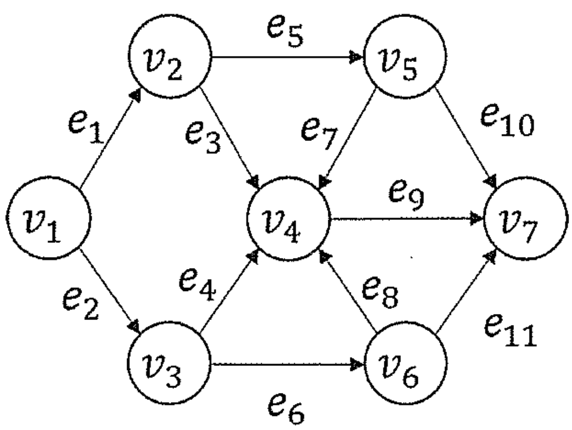
(2) 再帰的に 3 分割して掛け算をするときの 1 桁の整数同士の掛け算の回数を $S(n)$ とするとき、$S(n)$ と $S(n/3)$ の関係式を求めなさい。また、$S(n) = \mathrm{O}(n^{\log_3 6})$ となることを示しなさい。

(3) n が十分大きいとき、$T(n)$ と $S(n)$ の大小を比較しなさい。ただし、$\log_2 3 < 1.6$ を用いてよい。

3. 自己ループを持たない有向グラフ $G = (V, E)$ における接続行列は、$|V| \times |E|$ の行列 $B = (b_{ij})$ で、次の成分を持つ行列である。

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{辺 } e_j \text{ が頂点 } v_i \text{ から出る} \\ 1 & \text{辺 } e_j \text{ が頂点 } v_i \text{ に入る} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

各頂点間に高々1 本の辺しかないとき、BB^T および B^TB の要素はそれぞれ何を表すかを説明しなさい。ただし、^{T} は転置を表す。また、以下のグラフに対して、BB^T および B^TB も求めなさい。



[数理基礎]

1. 線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{P:}\quad \text{最小化}\quad & -2x_1 - 3x_2 \\
\text{条件}\quad & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 12 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\
& x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0
\end{aligned}
$$

について、以下の問いに答えなさい。

(1) 基底解をすべて求め、実行可能基底解を示しなさい。

(2) いま、$x_1 = 0, x_3 = 0$ である実行可能基底解からシンプレックス法を開始するとき、次のステップで得られる実行可能基底解を（複数の可能性がある場合は、それらをすべて）示しなさい。

(3) P の双対問題を示しなさい。

2. ある装置は二つの部品 A, B よりなり、確率変数 X, Y をそれぞれ部品 A、部品 B が故障するまでの年数とする。(X, Y) の同時確率密度関数が

$$
f(x,y) = \begin{cases} ce^{-2(x+2y)} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

であるとき、以下の問いに答えなさい。ただし、c は定数である。

(1) c を決めなさい。

(2) X と Y は従属か、それとも独立かを調べなさい。

(3) この装置の寿命（部品 A、部品 B のどちらか一方が故障するまでの年数）が半年以上である確率は何%か。小数点以下第 1 位まで求めなさい。ただし、e の近似値は 2.7183 であることを用いてよい。

3. データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ を曲線 $y = ax^2 + bx + c$ に当てはめる問題を考える。そのために、モデル式

$$
y_k = ax_k^2 + bx_k + c + \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, N
$$

を導入する。つまり、入力 x_k に対応する曲線上の値にランダムな誤差 ε_k が加わったものが出力 y_k であるとみなす。各 ε_k が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従って独立に発生しているとするとき、以下の問いに答えなさい。

(1) $y_1, y_2, \ldots, y_N$ の尤度を示しなさい。

(2) 評価関数

$$
J = \sum_{k=1}^{N} (y_k - ax_k^2 - bx_k - c)^2
$$

を最小とする a, b, c は最尤推定量となるか。

[数学解析]

1. 微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0, \qquad x_0(0) = 1,$$
$$\frac{dx_k}{dt} = -x_k + x_{k-1}, \quad x_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

に対する解 $x_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x) = e^{-a|x|}$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(w)$ を求めなさい。ただし、$a > 0$ とする。

(2) $\phi(w) = \dfrac{1}{\pi(1 + w^2)}$ とする。n 個の $\phi(w)$ の畳み込み積 $\phi_n(w)$ を

$$\phi_1(w) = \phi(w),$$
$$\phi_n(w) = (\phi_{n-1} * \phi)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n-1}(w - s)\phi(s)ds \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

により定める。$\phi_n(w)$ を求めなさい。

3. 複素積分 $I = \oint_{|z|=1} \dfrac{1}{|z-2|^2}\, dz$ を求めなさい。

[情報物理]

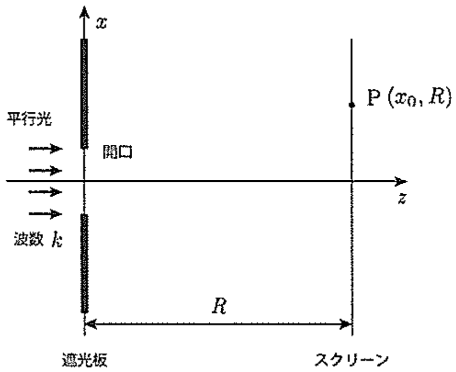
1. 長方形の導体板（面積 S）を真空中に水平に置き、正電荷 Q を与えた。真空の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 導体板における電荷の分布状態を説明し、導体板の上部と下部、内部における電場の向きと大きさを求めなさい。

(2) 導体板の上方に、同じ形状で電荷を持たない別の導体板を間隔 d で平行に置いた。各導体板における電荷の分布状態を説明し、これらの導体板で構成される平行板コンデンサーの静電容量と静電エネルギーを求めなさい。

(3) (2) の平行板コンデンサーの上方より水平に保った導体板小片を近づけた。このときに起きる現象と、平行板コンデンサー上での導体板小片の座標を検出する方法について説明しなさい。

2. 図のように、遮光板の開口に平行光（波数 k）を入射させ、距離 R だけ離れたスクリーン上で観察する。開口面に x 軸、光の伝搬方向に z 軸を設定し、y 軸方向の分布は考えないものとする。この光学系において、フレネル回折とフラウンホーファ回折を考える。以下の問いに答えなさい。



(1) 開口内の一点 $(x, 0)$ からスクリーン上の点 P (x_0, R) までの距離 r を求めなさい。

(2) 開口に比較的近い場所で観察する場合、$|x_0 - x| \ll R$ が妥当な条件と考えられる。その理由を述べ、距離 r を $\dfrac{(x_0 - x)^2}{R}$ の項までの近似式で表しなさい。

(3) スクリーン上の点 P での光の変位は $u_{\mathrm{P}} \propto \displaystyle\int_{\text{開口}} e^{ikr} dx$ によって与えられる。(2) の条件が満たされる場合の u_{P} を表す式を求め、その物理的意味を説明しなさい。

(4) 開口からさらに離れて観察する場合、x^2 の項も省略できる。$R_0 = \sqrt{R^2 + x_0^2}$ として、この条件下での距離 r の近似式を求めなさい。

（次ページにつづく）

(5) (4) の条件が満たされる場合の u_{P} を表す式を求め、その物理的意味を説明しなさい。

3. z 方向に伝搬する光波を考える。x 方向、y 方向の変位は次式で表されている。

$$E_x = \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = \cos(kz - \omega t + \phi)$$

以下の問いに答えなさい。

(1) $\phi = 0$ のとき、時刻 $t = 0$ における光波の概形を xyz 座標軸とともに図示しなさい。

(2) $\phi = \pi/2$ のとき、時刻 $t = 0$ における光波の概形を xyz 座標軸とともに図示しなさい。

(3) (2) の光波から (1) のような光波に変換する方法を三つあげて説明しなさい。

[情報基礎]

1. 配列 T に n 個、配列 P に m 個、それぞれ一桁の非負の整数値（$0, 1, \ldots, 9$ のどれか）が格納されているとし、それらを $T[1], T[2], \ldots, T[n]$ および $P[1], P[2], \ldots, P[m]$ と書く。ただし、$n > m$ である。アルゴリズム A

```
t ← 0
p ← 0
for i ← 1 until m do
     t ← 10t + T[i]
     p ← 10p + P[i]
end for
for s ← 0 until n − m do
     if t = p then
          print s
     end if
     if s < n − m then
          t ← 10t + T[s + m + 1] − 10^m T[s + 1]
     end if
end for
```

およびアルゴリズム B

```
for s ← 0 until n − m do
     c ← 0
     for i ← 1 until m do
          if [      (a)      ] then
               c ← c + 1
          end if
     end for
     if c = m then
          print s
     end if
end for
```

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $n = 8, m = 2$ であり、$T[1], T[2], \ldots, T[8]$ には $7, 4, 7, 8, 9, 4, 7, 2$ が、$P[1], P[2]$ には $4, 7$ が、それぞれこの順に格納されているとする。アルゴリズム A を実行するとき、表示される数字の列を示しなさい。

(2) アルゴリズム B がアルゴリズム A と同じ機能をもつように、空欄 (a) を埋めなさい。

(3) 比較（if 文）の実行回数をアルゴリズムの時間計算量とするとき、アルゴリズム A と B のそれぞれについて、時間計算量と n, m の関係を示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 行列の積 $P_1P_2\cdots P_N$ の計算について考える。ただし、各行列は $P_1 \in \mathbb{R}^{q_0\times q_1}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{q_1\times q_2}, \ldots, P_N \in \mathbb{R}^{q_{N-1}\times q_N}$ であるとする。なお、この問題を通して、行列 $A=[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と $B=[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ の積は定義 $AB=[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}] \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ にしたがって計算することとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 行列の積 $P_1P_2P_3$ の計算を、括弧付けに従って $(P_1P_2)P_3$ および $P_1(P_2P_3)$ の順に行うときのスカラー乗算の回数を、それぞれ示しなさい。

(2) 行列の積 $P_sP_{s+1}\cdots P_t$ $(1 \leqq s \leqq t \leqq N)$ の計算に必要なスカラー乗算の最小回数を $\alpha[s,t]$ とする。$s=t$ のときは $\alpha[s,t]=0$ である。$s<t$ のときの $\alpha[s,t]$ を、$\alpha[s,r]$, $\alpha[r+1,t]$ $(s \leqq r \leqq t-1)$ を使って表しなさい。

(3) 各行列を $P_1 \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{5\times 2}$, $P_4 \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ とする。$\alpha[s,t]$ $(1 \leqq s \leqq t \leqq 4)$ を求めなさい。そして、行列の積 $P_1P_2P_3P_4$ の計算に必要なスカラー乗算の回数が最小となる括弧付けを示しなさい。

3. 有向グラフ $G=(V,E)$ を探索するアルゴリズム S

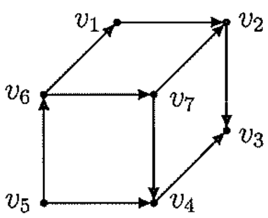
```
1   L を空のリストとする
2   すべての頂点 v ∈ V について T(v) を実行する
```

について考える。ただし、関数 $T(v)$ は

```
3   function  T(v)
4   if  v に訪問済みの印がない  then
5      v に訪問済みの印を付ける
6      始点が v のすべての有向辺の終点 w について T(w) を実行する
7      v を L の先頭に追加する
8   end if
```

で定義されている。また、対象とするグラフ G は、有向閉路、自己ループ、多重辺をもたないとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 下図のグラフを対象にアルゴリズム S を実行するとき、訪問済みの印の付く順に頂点を並べるとともに、実行後のリスト L を示しなさい。ただし、2 行目と 6 行目の頂点の実行順は、適当に定めてよい。



(2) アルゴリズム S の実行後のリスト L で v_i が v_j より前にあるとき、グラフ G に始点が v_j、終点が v_i の有向辺は存在しないことを示しなさい。

(3) グラフ G がハミルトン路（有向辺に沿って全頂点を一度ずつ通る道）をもつとき、アルゴリズム S の実行後のリスト L は、2 行目と 6 行目の頂点の実行順によらず、一意になることを示しなさい。

[数理基礎]

1. n ($\geqq 3$) 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をもつ線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P:} & \text{最小化} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
& \text{条件} & 2x_1 + x_2 \geqq 1 \\
& & x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} \geqq 1, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \\
& & x_{n-1} + 2x_n \geqq 1 \\
& & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0
\end{array}
$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) P の双対問題を示しなさい。

(2) $n = 3$ のとき、P の最適値を求めなさい。

(3) n が奇数のとき、P の最適値を求めなさい。

2. 長さ L の棒を 2 つに折り、短い方を捨てて、残った棒の長さを X とする。ただし、棒を折る位置は一様分布に従うとする。以下の問いに答えなさい。

(1) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めなさい。

(2) この長さ X の棒をさらに 2 つに折り、短い方を捨てて、残った棒の長さを Y とする。Y の期待値 $\mathrm{E}[Y]$ と分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めなさい。

3. 体温計の温度センサーで計測されたデータから、体温 u を推定することを考える。体温計を身体に接触させ始めた時刻を $t = 0$ とするとき、時刻 $t \geqq 0$ に計測される温度 X_t は、各時刻独立に、平均 $u + \alpha^t(u_0 - u)$、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。ただし、室温 u_0、分散 $\sigma^2 > 0$、実数 $\alpha \in (0, 1)$ は既知の定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) ある時刻 $t > 0$ に $X_t = x$ が計測されたとき、u の最尤推定量 $\hat{u}$ を求めなさい。

(2) 時刻 $t = 1, 2, \ldots, n$ に $X_t = x_t$ が計測されたとき、u の最尤推定量 $\hat{u}_n$ を求めなさい。

(3) (2) の最尤推定量 $\hat{u}_n$ が不偏推定量であるか答えなさい。

[数学解析]

1. 2 以上の整数 n に対して、$\omega^n = 1, \omega^k \neq 1, k = 1, 2, \ldots, n-1$ とする。

(1) 複素数 z に対して、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

(2) 複素数 z に対して、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

(3) (2) より、$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = n$ となることを用いて、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

2. 微分方程式 $\ddot{x} + 2\dot{x}\tan t - x = 0$ について、以下の問いに答えなさい。

(1) $x_0 = \sin t$ は微分方程式の解となることを示しなさい。

(2) 微分方程式の一般解を求めなさい。

3. 2π 周期関数に対する複素型フーリエ級数のフーリエ係数を c_n とし、

$$\lim_{n\to\infty} n^k c_n = 0$$

となる最大の整数を k とする。3 つの 2π 周期関数 $f(x), g(x), h(x)$ について、k の値の小さい順に並べなさい。また、その理由も答えなさい。

$$f(x) = x, \ -\pi < x \leqq \pi$$

$$g(x) = |x|, \ -\pi < x \leqq \pi$$

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}(x+\pi)^2 + \pi, & -\pi < x \leqq -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}x^2, & -\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{2}{\pi}(x-\pi)^2 + \pi, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi \end{cases}$$

[情報物理]

1. 半径がそれぞれ a, b $(a < b)$ の円筒状の導体（以下、電極）を同軸に配置したコンデンサがある。円筒の長さは a, b それぞれよりも十分に大きい。真空中でコンデンサの内側の電極に単位長あたり $\rho\ (> 0)$、外側の電極に単位長あたり $-\rho$ の電荷を与えた。なお、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 電極間の電位差を求めなさい。

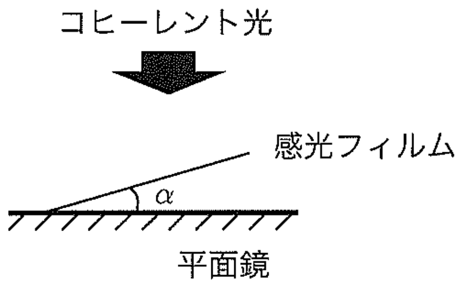
(2) このコンデンサの単位長あたりの静電容量を求めなさい。

(3) 電極間に誘電体を満たすと静電容量が増える。これはどのような現象によるものか説明しなさい。

2. (1) 波面が平面で、ベクトル $(0, \cos\theta, \sin\theta)$ の方向に進む正弦波の変位 $u_1(x, y, z, t)$ を、振幅 A、波長 λ、角振動数 ω を用いて表しなさい。ただし、(x, y, z) は空間座標、t は時間、θ は定数であり、$x = y = z = t = 0$ における位相は 0 とする。

(2) (1) の正弦波と、これとは進行方向のみが異なる（ベクトル $(0, \cos\theta, -\sin\theta)$ の方向に進む）別の正弦波が空間内に同時に存在するときの変位 $u_{12}(x, y, z, t)$ を求め、その波のふるまいについて、y 方向と z 方向に分けて説明しなさい。

(3) 図のように、平面鏡上に、非常に薄い感光フィルムがわずかな角度 α だけ傾けて置かれている。平面鏡に対し、振幅が一様な平面波のコヒーレント光を垂直入射させたとき、フィルムはどのように感光されるか説明しなさい。



（次ページにつづく）

3. 原点 O においた点光源を、別の位置 P で観測することを考える。点光源を囲む任意の面を S、S 上の一点を Q、点 O から点 Q までの距離を r_0、点 Q から点 P までの距離を r とすると、位置 P での光学的変位 u_{P} は

$$u_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{S}} \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \frac{Be^{ikr}}{r} e^{-i\omega t}\, d\sigma \qquad (*)$$

とかける。ただし、$d\sigma$ は面 S 上の微小な面要素、k は波数、ω は角振動数、B は傾斜因子、A は光源強度、t は時間、i は虚数単位である。

(1) 光の伝搬に関する以下の文章の空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句を答えなさい。ただし、(b) は示された語句の中から選びなさい。
光源から伝搬してきた光波（1 次波）がある瞬間に作る $\boxed{\text{(a)}}$ 上の各点は、この 1 次波と同じ角振動数をもつ 2 次波の光源として作用する。各 2 次波は $\boxed{\text{(b) 平面波・球面波}}$ として伝搬する。任意の点での光学的変位は、すべての 2 次波の光学的変位の $\boxed{\text{(c)}}$ となる。

(2) (1) の説明文と式 (*) の対応関係を説明しなさい。

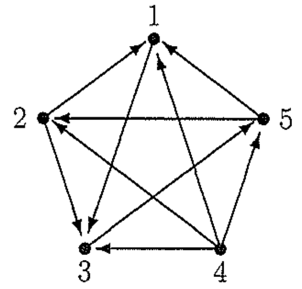
(3) $B = \dfrac{1}{i}\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ とかける。ただし、λ は波長、θ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ のなす角である。B における因子 $\dfrac{1}{i}$ は、1 次波と 2 次波がどのような関係にあることを示しているか、答えなさい。

(4) 点 O と点 P の間に開口を挿入したときの u_{P} は、式 (*) の S を開口面に限定することで得られる。この式では、ホイヘンスの原理では説明できなかった光の伝搬に関するいくつかの事実を説明することができる。その例を 1 つ挙げなさい。

[情報基礎]

1. 任意の相異なる 2 頂点がただ一つの有向辺で結ばれている有向グラフをトーナメントという。また、有向グラフにおいて、有向辺に沿って全ての頂点を 1 度ずつ通る路をハミルトン路という。以下の問いに答えなさい。

(1) 下図のトーナメント内のハミルトン路をすべて列挙しなさい。ハミルトン路は通る頂点の番号の列で表すこと。



(2) 任意のトーナメントはハミルトン路を持つ。このことが、頂点数が N 未満のときに成立すると仮定して、頂点数が N のときに成立することを示しなさい。

2. 文字集合 A に属する文字を M 個ならべた列 $U = u_1u_2\cdots u_M$ $(u_i \in A)$ を長さ M の文字列という。ただし、長さ 0 の文字列とは空文字列のことである。文字列 $U = u_1u_2\cdots u_M$ に対する、挿入、削除、置換の操作をそれぞれ以下の通り定める。

挿入 長さ $M \geqq 0$ の文字列 U の k 番目 $(0 \leqq k \leqq M)$ の文字の後に文字 $u' \in A$ を挿入して、長さ $M+1$ の文字列 $U' = u_1\cdots u_k u' u_{k+1}\cdots u_M$ を得る。

削除 長さ $M > 0$ の文字列 U の k 番目 $(1 \leqq k \leqq M)$ の文字 u_k を削除して、長さ $M-1$ の文字列 $U' = u_1\cdots u_{k-1}u_{k+1}\cdots u_M$ を得る。

置換 長さ $M > 0$ の文字列 U の k 番目 $(1 \leqq k \leqq M)$ の文字 u_k を $u' \in A$ に置換して、長さ M の文字列 $U' = u_1\cdots u_{k-1}u' u_{k+1}\cdots u_M$ を得る。

長さ M の文字列 $U = u_1u_2\cdots u_M$ と長さ N の文字列 $V = v_1v_2\cdots v_N$ に対して、その間の距離 $d(U,V)$ を、上記の操作を繰り返して U から V を得るために必要な最小の操作回数と定める。以下の問いに答えなさい。

(1) 文字列 U の先頭 m 文字 $(0 \leqq m \leqq M)$ の列を $U_m = u_1u_2\cdots u_m$ で表し、文字列 V の先頭 n 文字 $(0 \leqq n \leqq N)$ の列を $V_n = v_1v_2\cdots v_n$ で表す。$d(U_0, V_n)$ および $d(U_m, V_0)$ を求めなさい。

(2) $m \geqq 1, n \geqq 1$ のとき $d(U_m, V_n)$ が $d(U_{m-1}, V_n)$, $d(U_m, V_{n-1})$, $d(U_{m-1}, V_{n-1})$ および u_m, v_n を用いて計算できることを説明しなさい。

(3) (1) と (2) を用いて $d(U,V)$ を求めるアルゴリズムを考え、その時間計算量を理由とともに答えなさい。

（次ページにつづく）

3. N 個のノードからなるデータ構造を考える。ノードを $i = 1, 2, \ldots, N$ で表し、各ノード i は次のノードを示す番号 $\mathrm{next}(i) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ を保持しているとする。以下の問いに答えなさい。

(1) ノード 1 から順に次のノードをたどっていくとき、ノードの番号の列を $x_0, x_1, x_2, \ldots$ とおく。すなわち、$x_0 = 1$ および $x_{k+1} = \mathrm{next}(x_k)$ $(k \geqq 0)$ と定める。このとき、$x_m = x_{m+n}$ となる $m \geqq 0$ と $n > 0$ が存在することを示しなさい。さらに、このとき、任意の $k \geqq m$ に対して $x_k = x_{k+n}$ となることを示しなさい。

(2) 以下のアルゴリズムが必ず停止することを説明しなさい。

$p \leftarrow \mathrm{next}(1)$
$q \leftarrow \mathrm{next}(\mathrm{next}(1))$
while $p \neq q$ **do**
  $p \leftarrow \mathrm{next}(p)$
  $q \leftarrow \mathrm{next}(\mathrm{next}(q))$
end while

[数理基礎]

1. 以下の問いに答えなさい。ただし、e はすべての成分が 1 の n 次元ベクトルである。また、$\bullet^T$ は転置を表す。

(1) A は $m \times n$ 行列、b は m 次元ベクトル、x は n 次元ベクトルとする。$Ax = b$ を満たす x のうちで $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が最小となる x を求めるための数理計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \|x\| \\ \text{条件} & Ax = b \end{array}$$

は、u^+ と u^- を求めるための次の線形計画問題と等価になることを説明しなさい。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & e^T u^+ + e^T u^- \\ \text{条件} & Au^+ - Au^- = b \\ & u^+ \geqq 0,\ u^- \geqq 0 \end{array}$$

ただし、u^+ と u^- は n 次元ベクトルである。

(2) n 個の点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$ に対する直線の当てはめを考える。x_i に対する直線上の点を $\hat{y}_i = ax_i + b$ とおくとき、y_i との差を $d_i = y_i - \hat{y}_i$ とおく。d_i の絶対値の和が最小となる a, b を求めるための数理計画問題を考える。その双対問題は、双対変数 $v_i, i = 1, 2, ..., n$ を用いて、以下の線形計画問題で表されることを説明しなさい。ここで、$x = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T, y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^T, v = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]^T$ である。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & y^T v \\ \text{条件} & x^T v = 0 \\ & e^T v = 0 \\ & -e \leqq v \leqq e \end{array}$$

(3) 双対問題の最適解 v^* が $-1 < v_k^* < 1$ となる k に対応する点 (x_k, y_k) は、当てはめた直線とどのような関係にあるかを述べなさい。

(次ページにつづく)

2. 単位円周上にランダムに 2 点を取るとき、2 点を結ぶ線分の長さを X とする。

(1) $X \leqq 1$ となる確率を求めなさい。

(2) X の分布関数 $F(x) = \Pr(X \leqq x)$ を求めなさい。

(3) X の確率密度関数を求めなさい。

(4) X の期待値を求めなさい。

3. ある母集団の母集団分布の確率密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, 0 \leqq x \leqq 1$ であるとする。ただし、$\theta > 0$ である。この確率密度関数に従う確率変数 X について、以下の問いに答えなさい。

(1) X の期待値を求めなさい。

(2) $\log X$ の期待値を求めなさい。

(3) この母集団から n 個のサンプル $X_1, X_2, ..., X_n$ が得られたとする。このとき、θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めなさい。

(4) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量であることを示しなさい。

[数学解析]

1. 原点を中心とする半径 $(2k+1)\pi$ の円周を C_k とする。ただし、k は非負の整数である。複素積分

$$I_k = \int_{C_k} \frac{1}{1-e^z}\,dz$$

を計算しなさい。

2. 実数値関数 $f(x)$ を用いて

$$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

を定義する。実数値関数 $g(w)$, $h(w)$ を用いて $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(w)$ を

$$\hat{f}(w) = g(w) + h(w)i$$

と表現するとき、$p(x)$, $q(x)$ のフーリエ変換 $\hat{p}(w)$, $\hat{q}(w)$ について

$$\hat{p}(w) = g(w), \qquad \hat{q}(w) = h(w)i$$

が成り立つことを示しなさい。

3. 1 階の線形微分方程式系

$$\dot{x} = Ax \tag{$*$}$$

を考える。ただし、A は $n \times n$ の実行列、x は独立変数が t の n 次元未知関数ベクトル、$\dot{x}$ は x の 1 次導関数ベクトルである。また、行列値関数

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

を定義する。ただし、$0! = 1$, $A^0 = I$ とする（I は単位行列）。いま、実数 α と n 次元実ベクトル f, g に対して

$$Af = \alpha f + g, \qquad Ag = \alpha g$$

が成り立つとする。以下の問いに答えなさい。

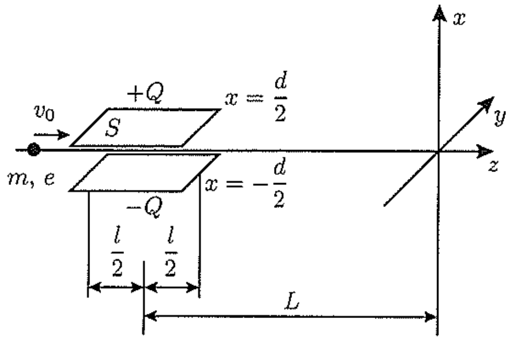
(1) k を正の整数とするとき、$A^k f$ を α, f, g, k を用いて表現しなさい。

(2) $e^{tA} f$ を α, f, g, t を用いて表現しなさい。

(3) 初期条件 $x(0) = f + g$ を満たす $(*)$ の解を α, f, g, t を用いて表現しなさい。

[情報物理]

1. 下図に示す座標系に基づいて、真空中に面積 S の導体板を z 軸を挟むように 2 平面 $x=\dfrac{d}{2}, -\dfrac{d}{2}$ 上に間隔 d で平行に配置し、上側を正の電荷 $+Q$、下側を負の電荷 $-Q$ で一様に帯電させた。真空の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えなさい。



(1) 導体板間の電場 $\boldsymbol{E}=[E_x, E_y, E_z]$ と電位差 V を求めなさい。

(2) 静電容量 C と静電エネルギー U を求めなさい。

(3) 質量 m、電荷 e の荷電粒子を z 軸に沿って速度 $\boldsymbol{v}_0=[0, 0, v_0]$ で外部より導体板の間隙に入射させた。このとき、荷電粒子に働く力 $\boldsymbol{F}=[F_x, F_y, F_z]$ を書きなさい。なお、必要であれば電場の大きさ E を用いてもよい。

(4) 導体板の z 方向の長さを l として、荷電粒子が導体板の間隙から外部に出たときの速度 $\boldsymbol{v}=[v_x, v_y, v_z]$ を求めなさい。なお、荷電粒子は導体板に衝突することはないものとする。

(5) 導体板の中央から z 方向に距離 L（$L>\dfrac{l}{2}$）だけ離れたスクリーンに到達する荷電粒子の座標 (x, y) を求めなさい。なお、電場が存在しない場合の到達点をスクリーンの原点とする。

2. 1. の実験系において、電場と同じ領域に、電場と同じ向きに一様な磁場（磁束密度 $\boldsymbol{B}$）を加えた。以下の問いに答えなさい。

(1) 電荷 e の荷電粒子に作用する力 $\boldsymbol{F}$ を、電場 $\boldsymbol{E}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$、荷電粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて記述しなさい。

以下では、電場が存在しない場合を考える。

(2) 導体板の外部より導体板の間隙に、質量 m、電荷 e の荷電粒子を速度 $\boldsymbol{v}_0=[0, 0, v_0]$ で入射させた。入射直後の荷電粒子に働く力 $\boldsymbol{F}=[F_x, F_y, F_z]$ を書きなさい。なお、必要であれば磁束密度の大きさ B を用いてもよい。

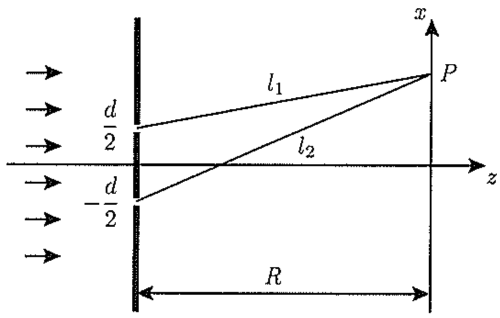
(3) 磁場が作用する範囲における荷電粒子の運動を簡単に説明しなさい。

（次ページにつづく）

(4) 荷電粒子が導体板の間隙から外部に出たときの荷電粒子の運動方向と z 軸のなす角度 θ に対する $\tan\theta$ を求めなさい。なお、磁場による軌道のずれ量は微小であり、荷電粒子が導体板に衝突することはないものとする。

(5) $mv_0 \gg eB$ のとき、導体板の中央から z 方向に距離 L だけ離れたスクリーンに到達する荷電粒子の座標 (x, y) を求めなさい。なお、磁場が存在しない場合の到達点をスクリーンの原点とする。

3. 下図に示すように、真空中に置かれた二つのスリット（間隔 d）をもつ遮光板に波長 λ の単色光を入射させ、距離 R（$R \gg d$）だけ離れたスクリーン上で観察した。以下の問いに答えなさい。



(1) スクリーン上の点P（座標 x）と各スリットとの距離 l_1、l_2 を求めなさい。

(2) $R \gg x$ のとき、l_1 と l_2 の光路差 L を求めなさい。

(3) スクリーン上では明暗の干渉縞が観測される。明縞の間隔を求めなさい。

(4) 干渉縞の鮮明度 V は、干渉縞の最大光強度 I_{max} と最小光強度 I_{min} を用いて、$V = \dfrac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$ と定義される。光路差 L が大きくなると V はどのように変化するか。理由とともに説明しなさい。

(5) スリットの両外側に間隔 d で新たなスリットを開けて総数を増やした。このとき、スクリーン上で観察されるパターンの縞間隔と光強度分布に着目して、(3) のパターンとの違いを理由とともに説明しなさい。

[情報基礎]

1. 次の手続きは n 元連立方程式 $Ax = b$ を解くための手続きであり、行列 A を LU 分解して、前進代入および後退代入によって解を求める方法である。

— LU 分解 —
for $k \leftarrow 1$ **until** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow k+1$ **until** n **do**
    $a(i,k) \leftarrow a(i,k)/a(k,k)$
  for $j \leftarrow k+1$ **until** n **do**
    for $i \leftarrow k+1$ **until** n **do**
      $a(i,j) \leftarrow a(i,j) - a(k,j) * a(i,k)$
— 前進代入 —
for $j \leftarrow 1$ **until** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow j+1$ **until** n **do**
    $b(i) \leftarrow b(i) - a(i,j) * b(j)$
— 後退代入 —
for $j \leftarrow n$ **until** 1 **by** -1 **do**
  $b(j) \leftarrow b(j)/a(j,j)$
  for $i \leftarrow 1$ **until** $j-1$ **do**
    $b(i) \leftarrow b(i) - a(i,j) * b(j)$

以下の問いに答えなさい。

(1) この手続きに要する時間計算量を求めなさい。

(2) この手続きに従って連立方程式 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ を解くとき、LU 分解、前進代入、後退代入のそれぞれの処理が終わったときの行列 A およびベクトル b の要素の値を示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 以下の操作を再帰的に適用して、n 個の数値を昇順にソートすることを考える。まず、r 組のグループに均等に分けて、それぞれのグループで数値を昇順にソートする。次に各グループの先頭の数値を比較して最小のものから順に取り出すことを繰り返す。以下の問いに答えなさい。ただし、r は定数とする。

(1) c 個の数値の中から最小のものを選ぶのに必要な比較回数を $g(c)$ とする。$g(c)$ を c を用いて表しなさい。

(2) n 個の数値を並べ替えるときに必要な比較回数を $f(n)$ と表す。自然数 k を用いて $n = r^k$ とおけるとき、次の関係式を説明し、$f(n)$ のオーダーを求めなさい。

$$f(n) = rf\left(\frac{n}{r}\right) + ng(r)$$

3. 平面グラフの辺によって分割される各領域を面という。一番外側の領域も一つの面とみなす。連結である平面グラフにおいて、頂点数を p、辺数を q、面数を r とするとき、$p - q + r = 2$ が成り立つことを次の手順で示しなさい。

(1) グラフに閉路がないとき、$p - q + r = 2$ となることを示しなさい。

(2) グラフに含まれる閉路が n 個未満のときに $p - q + r = 2$ が成り立つと仮定して、閉路が n 個のときに $p - q + r = 2$ が成り立つことを示しなさい。

[数理基礎]

1. 条件

$$LC: \qquad Ax = b, \qquad x \geqq 0, \qquad A^T w \leqq c, \qquad x^T(c - A^T w) = 0$$

について考える。ただし、$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数、$x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 条件 LC では、$x^T(c - A^T w) = 0$ の代わりに

$$x_i = 0 \quad \text{または} \quad a_i^T w = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

を用いてもよいことを示しなさい。ただし、a_i は A の第 i 列ベクトル、c_i は c の第 i 要素、x_i は x の第 i 要素である。

(2) 条件 LC において、$m = 2, n = 3$ であるとし、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 23 \\ 20 \\ 31 \end{bmatrix}$$

とするとき、条件 LC を満足する x, w をすべて求めなさい。

(3) 条件 LC の A, b, c を用いて、二つの数理計画問題

$$P: \quad \text{最小化} \quad c^T x \qquad \text{条件} \quad Ax = b, \quad x \geqq 0$$
$$D: \quad \text{最大化} \quad b^T w \qquad \text{条件} \quad A^T w \leqq c$$

を定義する。ベクトル x^*, w^* が条件 LC を満足するとき、x^* は問題 P の最適解となり、w^* は問題 D の最適解となることを示しなさい。

2. 一様分布 $U(0, \theta)$ に従う n 個のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が独立に得られるとする。このとき、θ の推定量として

$$\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

を選ぶことにする。以下の問いに答えなさい。

(1) 分布関数 $F(x)$ に従う n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ について、それらの最大値 $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ の分布関数 $G(y)$ が

$$G(y) = \{F(y)\}^n$$

となることを示しなさい。

(2) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量か、つまり、

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

が成り立つかどうかを示しなさい。

(3) $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量か、つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1$$

が成り立つかどうかを示しなさい。

(次ページにつづく)

3. 数列

0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,
0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0,
0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1

は、0 と 1 をランダムに選ぶことを 80 回繰り返して、記録したものであるという。以下の問いに答えなさい。

(1) この数列では、0 と 1 は等確率で現れているとみなしてよいか。有意水準 0.05 で検定しなさい。

(2) この数列のデータを前から順に二つずつ組にすれば、2 次元のデータが 40 個並んだものと考えることができる。このとき、$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ は等確率で現れているとみなしてよいか。有意水準 0.05 で検定しなさい。

(3) この数列は、「0 と 1 をランダムに選ぶことを 80 回繰り返して、記録したもの」とみなしてよいかを論じなさい。

カイ 2 乗分布表

		上側確率									
		0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
自	2	0.010	0.020	0.051	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
由	3	0.072	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
度	4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
	5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75

[数学解析]

1. $\mu > 1$ に対して、定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mu + \cos\theta}$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) I を複素平面内の単位円周 $|z| = 1$ 上の複素積分として表しなさい。

(2) (1) の複素積分を計算することにより、I を求めなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) 以下の関数のフーリエ変換 $\widehat{f}(\omega)$ を求めなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(2) $\widehat{f}(\omega)$ のフーリエ逆変換を利用して、$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega$ を求めなさい。

3. 時間 $t \geq 0$ の実数値関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})x - (\mu + x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})y + (\mu + x)x \end{aligned} \qquad (*)$$

を考える。ただし、$\mu > 1$ である。以下の問いに答えなさい。

(1) 極座標 (r, θ) への変数変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を行うことにより、$r(t)$, $\theta(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (1 - r)r, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + r\cos\theta \end{aligned}$$

が得られることを示しなさい。ただし、$r(t) > 0$ と仮定してよい。

(2) $r(t)$ に関する微分方程式の解を初期値 $r(0) > 0$ を用いて表しなさい。また、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} r(t)$ を求めなさい。

(3) 連立微分方程式 $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ が周期関数（周期解）となるための初期値 $(x(0), y(0))$ の条件を求めなさい。また、このとき大問 **1.** の定積分 I が何を表しているかを説明しなさい。

[情報物理]

1. 誘電率 ε の空間における電荷に関する以下の文について、空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句、式、または数値を答えなさい。

(1) 空間内の点Pに電荷量 $+q$ の点電荷をおく。この電荷から距離 d にある点の静電位（静電ポテンシャル）は $\boxed{\text{(a)}}$ 、電場の大きさは $\boxed{\text{(b)}}$ と書ける。

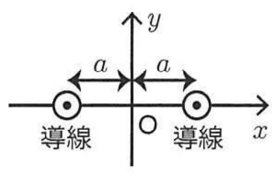
(2) さらに、点Pから距離 d の位置に電荷量 $-q$ の別の点電荷をおくとき、この電荷が (b) の電場から受ける力の大きさは $\boxed{\text{(c)}}$ である。なお、d が小さいとき、このような電荷の対を $\boxed{\text{(d)}}$ という。静電位は $\boxed{\text{(e)}}$ の原理が成り立つことから、電荷量 $+q, -q$ の各電荷からの距離が r_1, r_2 である点における静電位は $\boxed{\text{(f)}}$ となる。

(3) (2) の電荷対の中心Oを始点とするある半直線上を点Qが動く。OQ間の距離を r とおく。$r \gg d$ のとき、点Qにおける電場の大きさは、d の $\boxed{\text{(g)}}$ 乗に比例し、r の $\boxed{\text{(h)}}$ 乗に反比例する。

2. 透磁率 μ の空間における電流と磁場に関する以下の文について、空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句、式、または数値を答えなさい。なお、$\boxed{}$ のうち、候補が示されているものは適切なものを選択し、[理由] と書かれているものはその理由を簡潔に記述しなさい。

(1) 無限に長い直線状の導線に電流 I_1 を流した。導線の周りには、電流の進行方向に対して $\boxed{\text{(a) 時計回り・反時計回り}}$ の向きに磁場が生じる。また、導線から距離 R の位置における磁束密度の大きさを $B(R)$ とおくと、アンペールの法則より $B(R) = \boxed{\text{(b)}}$ である。

(2) 2本の無限に長い直線状の導線を、距離 $2a$ だけ離して平行に置き、各導線に同じ大きさの電流 I_1 を同じ方向に流した。図は導線に垂直な断面図である。電流の方向（紙面奥から手前の方向）を $+z$ とし、図のように原点Oおよび x, y 軸をとる。$x = y = 0$ の点における磁束密度の大きさは $\boxed{\text{(c)}}$ である。これは $\boxed{\text{(d) [理由]}}$ ことによる。また、$x = 0, y = b$ の位置における磁束密度ベクトルは $\boxed{\text{(e)}}$ と求まる。



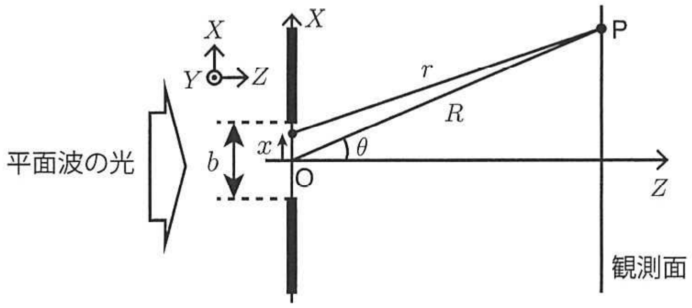
(3) (2) の状態では、それぞれの導線に $\boxed{\text{(f) 引力・斥力}}$ が生じる。単位長さあたりに受ける力の大きさは $\boxed{\text{(g)}}$ である。さらに、片方の導線のみ流す電流を増やしたとき、その導線が受ける力を F_1、もう一方の導線が受ける力を F_2 とすると $\boxed{\text{(h) } F_1 < F_2 \ \cdot\ F_1 = F_2 \ \cdot\ F_1 > F_2}$ となる。この結果は力学における $\boxed{\text{(i)}}$ の法則からも理解できる。

（次ページにつづく）

3. 図のように、空気中にある幅 b の単スリットに左から波長 λ の平面波の光を垂直に入射させる。単スリットは Y 方向には十分長いと仮定し、X 方向の回折のみを考える。図は、開口の中心に座標原点 O をとったときの $Y=0$ 面の様子を示している。O から観測面（Z 軸に垂直）上のある点 P までの距離を R、開口上の位置 $X=x$ の点から P までの距離を r、Z 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とする。点 P の光学的変位 u_{P} は

$$u_{\mathrm{P}} = \alpha \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\, dx$$

と書ける。ただし、α は単位長さあたりの光源強度、t は時間、k は波数、ω は角振動数である。また、$b \ll R$ が成り立っているものとする。



(1) $\psi(r,t) \equiv \sin(\omega t - kr)/r$ はどのような波動を表すか答えなさい。

(2) 図より $r^2 = x^2 + R^2 - 2xR\sin\theta$ である。$\psi(r,t)$ の振幅を表す部分の r を $r \approx R$、位相を表す部分の r を $r \approx R - x\sin\theta$ と近似すると、

$$u_{\mathrm{P}} = \frac{\alpha}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \sin\{\omega t - k(R - x\sin\theta)\}\, dx$$

と書き直せる。この式は、u_{P} が、開口の各点から点 P に到達する波動 $\sin\{\omega t - k(R - x\sin\theta)\}/R$ の重ね合わせとして得られると解釈できる。この観点から、観測面上で最も明るい位置はどこか説明しなさい。

(3) 点 P が暗点となるのは、$x = b/2$ および $x = -b/2$ からの波動の位相差がいくらのときか示しなさい。また、そのときの $\sin\theta$ を b, λ で表しなさい。

(4) この系全体をそのまま水中に移動させたとすると、観測面での強度分布はどのように変化するか説明しなさい。

(5) b を小さくしていくとき、観測面の中央付近での強度分布はどのような分布に近づくか説明しなさい。