II 部電気回路 I　中間演習験問題１

１．図１の回路に関し答えよ。

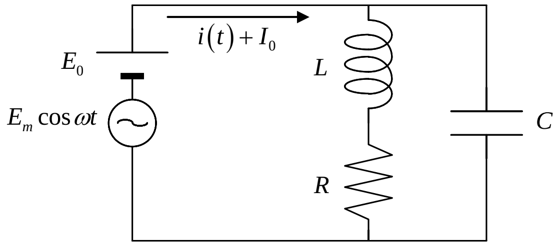


図１

１）図１の回路における定常電流の瞬時値$i(t)+I_0$を求めよ。但しI_0は直流電源E_0による直流電流である。
２）交流電源$E_m\cos\omega t$と交流成分$i(t)$が同相となる条件を求めよ。
３）上記２）の条件下で$E_0=10\ (\mathrm{V})$、$E_m=\sqrt{2}\cdot 100\ (\mathrm{V})$、$R=1000\ (\Omega)$、$\omega L=2000\ (\Omega)$のとき、負荷で消費される有効電力$P\ (\mathrm{W})$を求めよ。

２．図２の回路に関し答えよ。

電流$\dot{I}_1$と電流$\dot{I}_2$の大きさが等しく、$\dot{I}_1$の位相が$\dot{I}_2$に比べ$\dfrac{\pi}{2}$進む場合の$L,\ C,\ R_1,\ R_2$間の条件式を求めよ。

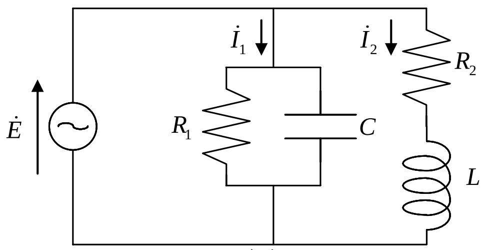


図２

３．図３の回路に関し答えよ。

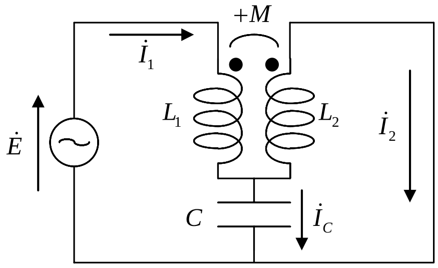


図３

１）相互インダクタンスMを含むT形の等価回路を示せ。
２）$|\dot{I}_C|$が最大となる電源の角周波数ωを求めよ（但しこのとき$\dot{I}_2=0$となる)。

４．図４の回路に関し答えよ。

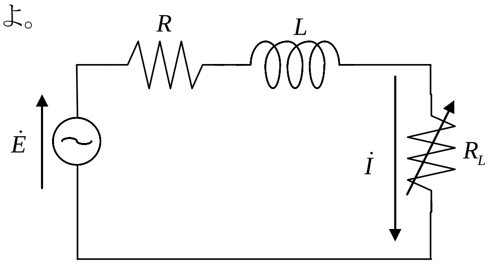


図４

１）抵抗R_Lで消費される電力が最大になるよう抵抗R_Lを可変するとする。このときのR_Lの値を求めよ。
２）R_Lで消費される最大電力$P_{L\max}$を求めよ。

II 部電気回路 I　中間演習問題１　解答

１．

１）解答：重ね合わせの理より、直流電源E_0による電流をI_0、交流電源$E_m\cos\omega t$による電流を$i(t)$とすると、求める電流は$I_0+i(t)$となる。直流電源E_0による電流をI_0は、$I_0=E_0/R$

次に交流電源$E_m\cos\omega t$による電流を$i(t)$を求める。交流電源$E_m\cos\omega t$を複素記号法に変換すると、$\dot{E}=\dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$となる。よって、$\dot{E}$による電流$\dot{I}$は

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{R+j\omega L}+\frac{\dot{E}}{\frac{1}{j\omega C}}=\left(\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C\right)\dot{E}=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega CR}{R+j\omega L}\dot{E}$$

$$=\frac{\left(1-\omega^2LC+j\omega CR\right)\left(R-j\omega L\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}=\frac{R-\omega^2LCR+\omega^2LCR+j\left(\omega CR^2-\omega L+\omega^3L^2C\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}=\frac{R+j\left(\omega CR^2-\omega L+\omega^3L^2C\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}$$

一方

$$\left|\dot{I}\right|=\left|\frac{\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega CR}{R+j\omega L}\dot{E}\right|=\frac{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\left|\dot{E}\right|=\frac{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot\frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

$\dot{I}=\left|\dot{I}\right|e^{j\theta}$における位相$\theta$は、$\dot{I}=\dfrac{R+j\left(\omega CR^2-\omega L+\omega^3L^2C\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}=\dfrac{R+j\omega\left(CR^2-L+\omega^2L^2C\right)}{R^2+(\omega L)^2}\cdot\dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$であるから

$$\theta=\tan^{-1}\left\{\frac{\omega\left(CR^2-L+\omega^2L^2C\right)}{R}\right\}$$

で与えられる。この$\dot{I}=\left|\dot{I}\right|e^{j\theta}$に対応する瞬時時（時間波形）は、$i(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right\}$で与えられるので

$$i(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\left|\dot{I}\right|e^{j\theta}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\frac{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j(\omega t+\theta)}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}E_m\cos\left(\omega t+\theta\right)$$

$\therefore I_0+i(t)=\dfrac{E_0}{R}+\dfrac{\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+(\omega CR)^2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}E_m\cos\left(\omega t+\theta\right)$、但し$\theta=\tan^{-1}\left\{\dfrac{\omega\left(CR^2-L+\omega^2L^2C\right)}{R}\right\}$

・・・・・答え

２）解答：

$$\dot{I}=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega CR}{R+j\omega L}\dot{E}=\frac{\left(1-\omega^2LC+j\omega CR\right)\left(R-j\omega L\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}=\frac{R+j\omega\left(CR^2-L+\omega^2L^2C\right)}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}$$

において$\omega\left(CR^2-L+\omega^2L^2C\right)$、すなわち、$CR^2-L+\omega^2L^2C=0$、$C\left(R^2+\omega^2L^2\right)=L$となれば、$\dot{I}$の虚部は０となり、$\dot{E}=\dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$と$\dot{I}$は共に実数となり同相となる。すなわち$C=\dfrac{L}{R^2+\omega^2L^2}$となれば、$\dot{I}=\dfrac{R}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}$となって、$\dot{I}$と$\dot{E}$は同相となり力率100%となる。　$C=\dfrac{L}{R^2+\omega^2L^2}$　・・・・・答え

3）解答：$\dot{I}$ と $\dot{E}$ が同相となるとき、交流電源による有効電力は

$$P_{AC}=\mathrm{Re}\left\{\dot{E}\dot{I}^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\dot{E}\dot{E}^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\left|\dot{E}\right|^2\right\}=\frac{1000}{1000^2+(2000)^2}100^2=2\ (\mathrm{W})$$

直流電源による消費電力は$P_0=\dfrac{E_0{}^2}{R}=\dfrac{10^2}{1000}=0.1\ (\mathrm{W})$。よって全消費電力は$P_0+P_{AC}=0.1+2=2.1(\mathrm{W})$

・・・・・答え

２．解答：

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{E}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{j\omega C}}}}=\frac{\dot{E}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+j\omega C}}=\frac{\dot{E}}{\dfrac{R_1}{1+j\omega CR_1}}=\frac{1+j\omega CR_1}{R_1}\dot{E}\text{、}\dot{I}_2=\frac{\dot{E}}{R_2+j\omega L}$$

$\left|\dot{I}_1\right|=\left|\dot{I}_2\right|$ でかつ $\dot{I}_1$ の位相が $\dot{I}_2$ に比べ$\dfrac{\pi}{2}$ 進むということは

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}=e^{j\frac{\pi}{2}}=j \qquad \therefore \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}=\frac{\dfrac{1+j\omega CR_1}{R_1}\dot{E}}{\dfrac{\dot{E}}{R_2+j\omega L}}=\frac{(1+j\omega CR_1)(R_2+j\omega L)}{R_1}=j$$

$$(1+j\omega CR_1)(R_2+j\omega L)=jR_1$$
$$R_2-\omega^2LCR_1+j\omega CR_1R_2+j\omega L-jR_1=0$$
$$\left(R_2-\omega^2LCR_1\right)+j\left(\omega CR_1R_2+\omega L-R_1\right)=0$$

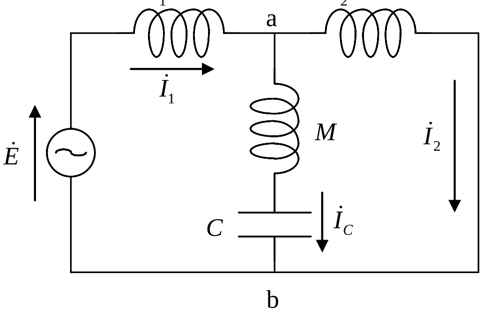
実部＝０及び虚部＝０より

$$\begin{cases}R_2=\omega^2LCR_1\\ \omega(CR_1R_2+L)=R_1\end{cases}\text{、よって}\begin{cases}\omega^2=\dfrac{R_2}{LCR_1}\\ \omega=\dfrac{R_1}{CR_1R_2+L}\end{cases}$$

ω を消去して、$\dfrac{R_2}{LCR_1}=\left(\dfrac{R_1}{CR_1R_2+L}\right)^2$　・・・・・答え

３．

1）解答：T 形等価回路は以下で与えられる。



2）解答：T 形等価回路で a,b 間のインピーダンス $\dot{Z}_{ab}$ は

$$\dot{Z}_{ab} = j\omega M + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\dot{Z}_{ab} = j\omega M + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega M - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$\dot{Z}_{ab}$ の大きさ $\left|\dot{Z}_{ab}\right| = 0$ となれば $\left|\dot{I}_C\right|$ が最大となり、$\dot{I}_1 = \dot{I}_C$ となって $\dot{I}_2 = 0$ となる。よって

$\left|\dot{Z}_{ab}\right| = \left|j\left(\omega M - \frac{1}{\omega C}\right)\right| = \left|\omega M - \frac{1}{\omega C}\right| = 0$ より、$\omega^2 = \frac{1}{MC}$、$\therefore \omega = \sqrt{\frac{1}{MC}}$ ・・・・・答え

４．

1）解答：

$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{(R+R_L) + j\omega L}$ 、$\dot{V}_L = R_L\dot{I}$

$$P_L = \mathrm{Re}\left\{\dot{V}_L\dot{I}^*\right\} = \frac{1}{2}\left(\dot{V}_L\dot{I}^* + \dot{V}_L{}^*\dot{I}\right) = \frac{1}{2}\left(R_L\dot{I}\dot{I}^* + R_L\dot{I}^*\dot{I}\right) = R_L\left|\dot{I}\right|^2 = R_L\left|\frac{\dot{E}}{(R+R_L)+j\omega L}\right|^2 = \frac{R_L}{(R+R_L)^2 + (\omega L)^2}\left|\dot{E}\right|^2$$

P_L を R_L で微分して０と置く。

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left\{\frac{R_L}{(R+R_L)^2+(\omega L)^2}\left|\dot{E}\right|^2\right\} = \left|\dot{E}\right|^2\frac{d}{dR_L}\left\{\frac{R_L}{(R+R_L)^2+(\omega L)^2}\right\}$$

$$= \frac{\left\{(R+R_L)^2+(\omega L)^2\right\} - 2(R+R_L)R_L}{\left\{(R+R_L)^2+(\omega L)^2\right\}^2} = \frac{R^2 + 2RR_L + R_L{}^2 + (\omega L)^2 - 2RR_L - 2R_L{}^2}{\left\{(R+R_L)^2+(\omega L)^2\right\}^2}$$

$$= \frac{R^2 + (\omega L)^2 - R_L{}^2}{\left\{(R+R_L)^2+(\omega L)^2\right\}^2} = 0$$

$\therefore R^2 + (\omega L)^2 = R_L{}^2$ よって $R_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ・・・・・答え

2）解答：$P_L = \frac{R_L}{(R+R_L)^2+(\omega L)^2}\left|\dot{E}\right|^2$

ここで $R_L{}^2 = R^2 + (\omega L)^2$ であり、$(\omega L)^2 = R_L{}^2 - R^2$ を上式に代入して

$$P_L = \frac{R_L}{(R+R_L)^2+(\omega L)^2}\left|\dot{E}\right|^2 = \frac{R_L}{(R+R_L)^2 + R_L{}^2 - R^2}\left|\dot{E}\right|^2 = \frac{R_L}{R^2 + 2RR_L + R_L{}^2 + R_L{}^2 - R^2}\left|\dot{E}\right|^2$$

$$= \frac{R_L}{2RR_L + 2R_L{}^2}\left|\dot{E}\right|^2 = \frac{1}{2(R+R_L)}\left|\dot{E}\right|^2$$

を得る。　$P_{L\max} = \frac{1}{2(R+R_L)}\left|\dot{E}\right|^2$ ・・・・・答え

II 部電気回路 I 中間演習問題２

１．図１の回路に関し答えよ。

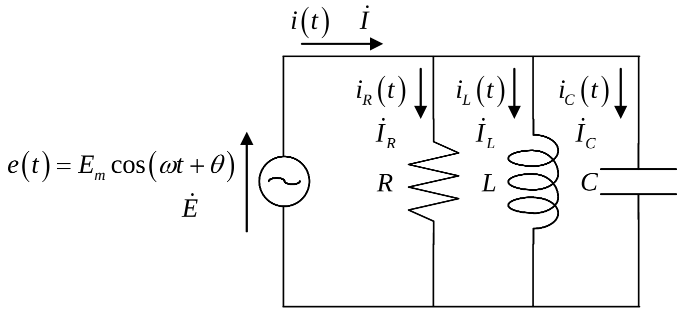


図１

１）交流電源電圧が時間領域表現で $e(t) = E_m \cos(\omega t + \theta)$ (Volt)であるとき、これに対応する複素記号法における電圧 $\dot{E}$ を示せ。
２）複素記号法を用い、電流 $\dot{I}_R$, $\dot{I}_L$, $\dot{I}_C$ を求めよ。
３）時間領域波形である $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ を求めよ。
４）複素記号法における電流 $\dot{I}$ を求めよ。
５）時間領域波形である $i(t)$ を求めよ。

２．図２の回路に関し答えよ。
１）電源電圧を $\dot{E}$ とし、複素記号法を用いて電流 $\dot{I}$ を計算せよ。
２）上記の結果を用い、電圧時間波形が $e(t) = E_m \cos\omega t$ のとき時間波形 $i(t)$ を求めよ。
３）抵抗 R で消費される有効電力 P (W)を複素記号法を用いて計算せよ。

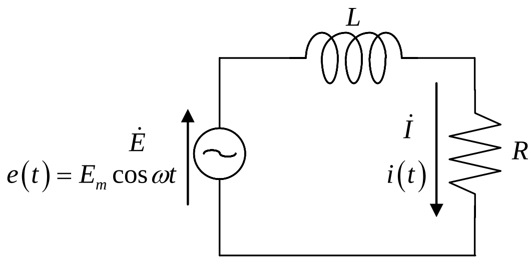


図２

３．図３の回路に関し答えよ。

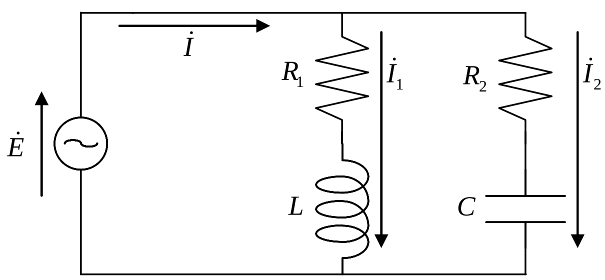


図３

１）複素記号法を用いて $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ を求めよ。
２）$\dot{E}$ と $\dot{I}$ が同相になるための条件を述べよ（条件を説明せよ）。
３）全ての角周波数 ω において $\dot{E}$ と $\dot{I}$ が同相になるための条件式を計算により求めよ。

II 部電気回路 I 中間演習問題２　解答

１．図１の回路に関し答えよ。

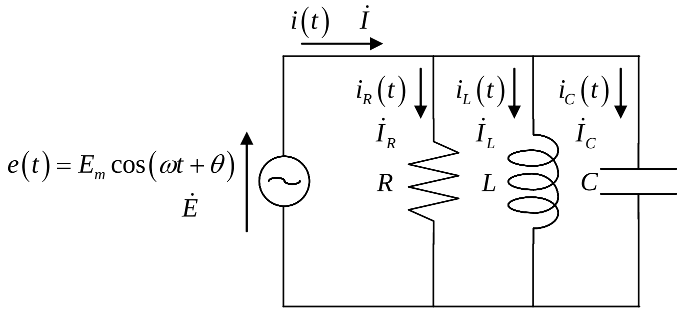


図１

1）交流電源電圧が時間領域表現で$e(t)=E_m\cos(\omega t+\theta)$(Volt)であるとき、これに対応する複素記号法における電圧$\dot{E}$を示せ。

時間波形$e(t)$と複素記号法電圧$\dot{E}$の関係は

$$e(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{E}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

である。したがって

$$e(t)=E_m\cos(\omega t+\theta)=\mathrm{Re}\left\{E_m e^{j(\omega t+\theta)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}\quad \text{より}\quad \dot{E}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}$$ ・・・・・答

2）複素記号法を用い、電流$\dot{I}_R$, $\dot{I}_L$, $\dot{I}_C$を求めよ。

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{E}}{R}、\ \dot{I}_L=\frac{\dot{E}}{j\omega L}、\ \dot{I}_C=\frac{\dot{E}}{(1/j\omega C)}=j\omega C\dot{E}$$ ・・・・・答

3）時間領域波形である$i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$を求めよ。

$$i_R(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{I}_R\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{\dot{E}}{R}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{R}\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\frac{E_m}{R}\cos(\omega t+\theta)$$ ・・・・・答

$$i_L(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{I}_L\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{\dot{E}}{j\omega L}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{j\omega L}\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{E_m}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$ ・・・・・答

$$=\frac{E_m}{\omega L}\cos\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{E_m}{\omega L}\sin(\omega t+\theta)$$

$$i_C(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{I}_C\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot j\omega C\dot{E}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot j\omega C\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\omega CE_m e^{+j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\theta}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$ ・・・・・答

$$=\omega CE_m\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\omega CE_m\sin(\omega t+\theta)$$

4）複素記号法における電流$\dot{I}$を求めよ。

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=\frac{\dot{E}}{R}+\frac{\dot{E}}{j\omega L}+j\omega C\dot{E}=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)\dot{E}=\left\{\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right\}\dot{E}$$ ・・・・・答

5）時間領域波形である$i(t)$を求めよ。

$$\begin{cases}\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=\dfrac{\dot{E}}{R}+\dfrac{\dot{E}}{j\omega L}+j\omega C\dot{E}=\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{j\omega L}+j\omega C\right)\dot{E}=\left\{\dfrac{1}{R}+j\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)\right\}\dot{E}=\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot\dot{E}e^{j\phi}\\ \phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega C-\dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R}}\right)=\tan^{-1}\left\{R\left(\omega C-\dfrac{1}{\omega L}\right)\right\}\end{cases}$$

$$i(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{I}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot\dot{E}\cdot e^{j\phi}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot\frac{E_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta}\cdot e^{j\phi}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\cdot E_m e^{j(\theta+\phi)}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}E_m\cos\left(\omega t+\theta+\phi\right),\quad \phi=\tan^{-1}\left\{R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\right\}$$

・・・・・答

２．図２の回路に関し答えよ。

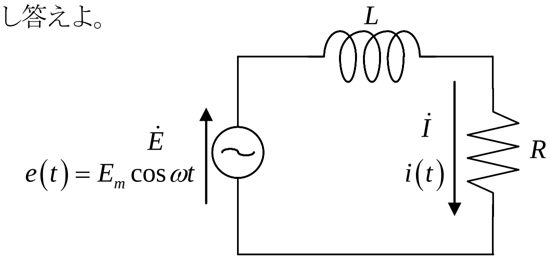


図２

2） 電源電圧を$\dot{E}$とし、複素記号法を用いて電流$\dot{I}$を計算せよ。

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{R+j\omega L}$$ ・・・・・答

2）上記の結果を用い、電圧時間波形が$e(t)=E_m\cos\omega t$ のとき時間波形$i(t)$を求めよ。

$e(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{E}\cdot e^{j\omega t}\right\}$ より、$e(t)=E_m\cos\omega t=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\frac{E_m}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\cdot\dot{E}\cdot e^{j\omega t}\right\},\quad \therefore\dot{E}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}$

$$\dot{I}=\frac{\dot{E}}{R+j\omega L}=\frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}e^{j\phi}}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}\frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}},\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i(t)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\frac{E_m}{\sqrt{2}}\frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j(\omega t-\phi)}\right\}=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t-\phi),\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

・・・・・答

3）抵抗Rで消費される有効電力P (W)を複素記号法を用いて計算せよ。

$P=\mathrm{Re}\left\{\dot{V}_R\dot{I}^*\right\}=\frac{1}{2}\left(\dot{V}_R\dot{I}^*+\dot{V}_R{}^*\dot{I}\right)$、∵公式 $\mathrm{Re}(\dot{z})=\frac{\dot{z}+\dot{z}^*}{2}$、$\dot{V}_R=R\dot{I}$ であるので

$P=\mathrm{Re}\left\{V_R\dot{I}^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{\left(R\dot{I}\right)\dot{I}^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{R\dot{I}\dot{I}^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{R\left|\dot{I}\right|^2\right\}=R\left|\dot{I}\right|^2$、∵公式 $\dot{z}\dot{z}^*=\left|\dot{z}\right|^2$

$\left|\dot{I}\right|=\left|\frac{\dot{E}}{R+j\omega L}\right|=\frac{\left|\dot{E}\right|}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\frac{E_m}{\sqrt{2}}$、$\therefore P=R\left|\dot{I}\right|^2=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}\frac{E_m{}^2}{2}$ ・・・・・答

３．図３の回路に関し答えよ。

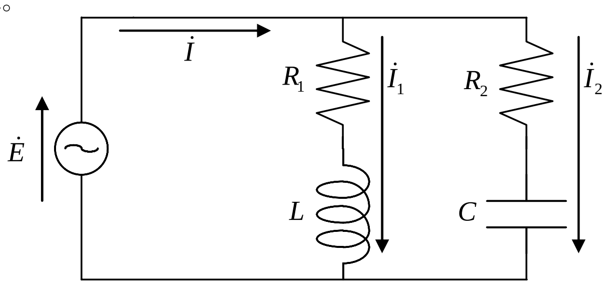


図３

1）複素記号法を用いて$\dot{I}_1,\ \dot{I}_2$を求めよ。

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R_1 + j\omega L},\quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}}$$ ・・・・・答

2）$\dot{E}$と$\dot{I}$が同相になるための条件を述べよ（条件を説明せよ）。

$\dot{E}$と$\dot{I}$が同相になるということは、$\dot{E}$と$\dot{I}$の位相が等しいことである。複素記号法電源電圧$\dot{E}$を時間波形電源電圧$e(t) = E_m \cos\omega t$に対応させ、$\dot{E} = \dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$と実軸ベクトルに取ると$\dot{E}$は実数になり虚部は０となる。$\dot{E}$と$\dot{I}$の位相が等しい為には、$\dot{I}$が実数になり虚部が０にならなければならない。・・・・・答

3）全ての角周波数ωにおいて$\dot{E}$と$\dot{I}$が同相になるための条件式を計算により求めよ。

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{R_1 + j\omega L} + \frac{\dot{E}}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = \left(\frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_2}\right)\dot{E} = \left\{\frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \frac{j\omega C(1 - j\omega C R_2)}{1 + (\omega C R_2)^2}\right\}\dot{E}$$

$$= \frac{(R_1 - j\omega L)\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\} + \left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}(\omega^2 C^2 R_2 + j\omega C)}{\left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\}}\dot{E}$$

$$= \frac{R_1\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\} + \left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}\omega^2 C^2 R_2 - j\omega\left[L\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\} - C\left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}\right]}{\left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\}}\dot{E}$$

$\dot{E} = \dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$が実数のとき、$\dot{I}$が実数になるためには、上式において

分子の虚部$j\omega\left[L\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\} - C\left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\}\right]$が成立する必要がある。従って

$$L\left\{1 + (\omega C R_2)^2\right\} - C\left\{R_1^2 + (\omega L)^2\right\} = 0$$

ωについて整理すると

$$\omega^2\left\{(C R_2)^2 L - C L^2\right\} + L - C R_1^2 = 0$$

となるが、この式が全てのωに対し成立する為には

$\begin{cases}(C R_2)^2 L - C L^2 = 0 \\ L - C R_1^2 = 0\end{cases}$ が成り立つ必要がある。さらに整理して $\begin{cases}C R_2^2 - L = 0 \\ L - C R_1^2 = 0\end{cases}$、よって$\begin{cases}R_2^2 = \dfrac{L}{C} \\ R_1^2 = \dfrac{L}{C}\end{cases}$

$$\therefore R_1^2 = R_2^2 = \frac{L}{C}$$ ・・・・・答

II 部電気回路 I　閉ループ解析の演習問題及び解答

演習問題：下図の回路に関し、閉ループ電流解析を行い、電流$\dot{I}_1,\ \dot{I}_2$を求めよ。

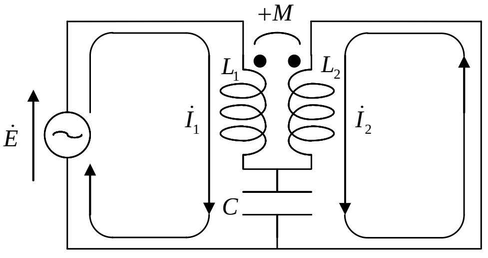


図１

解答：

相互インダクタンス回路の部分をT形等価回路で表すと、図１は図２の様に表される。

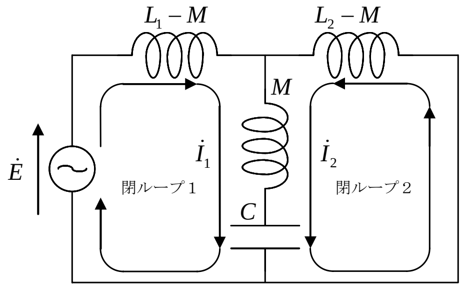


図２

図２より、閉ループ１に関しループの電圧方程式を立てると

$$\dot{E}=j\omega\left(L_1-M\right)\dot{I}_1+\left(j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)\left(\dot{I}_1+\dot{I}_2\right)$$

同様に、閉ループ２に関しループの電圧方程式を立てると

$$0=j\omega\left(L_2-M\right)\dot{I}_2+\left(j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)\left(\dot{I}_2+\dot{I}_1\right)$$

$\dot{I}_1,\ \dot{I}_2$ に関して整理して

$$\begin{cases}\left(j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_1+\left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2=\dot{E}\\ \left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_1+\left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

２元の連立方程式を行列表現すると

$$\begin{bmatrix}\left(j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C}\right) & \left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\\ \left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right) & \left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{E}\\ 0\end{bmatrix}$$

ここで $\begin{bmatrix}\left(j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C}\right) & \left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\\ \left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right) & \left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ と置くと

$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{E}\\ 0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dot{E}\\ 0\end{bmatrix}$　　ここで逆行列の公式 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{AD-BC}\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}$ を用いると

$\begin{bmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{AD-BC}\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{E}\\ 0\end{bmatrix}$ を得る。

$$\therefore\begin{cases}\dot{I}_1=\dfrac{D\dot{E}}{AD-BC}=\dfrac{\left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{\left(j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)-\left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)^2}\dot{E}\\ \dot{I}_2=\dfrac{-C\dot{E}}{AD-BC}=\dfrac{-\left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{\left(j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C}\right)\left(j\omega L_2+\dfrac{1}{j\omega C}\right)-\left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)^2}\dot{E}\end{cases}$$

・・・・・答

上式の $\dot{I}_2$ の分子において $\left(j\omega M+\dfrac{1}{j\omega C}\right)=j\left(\omega M-\dfrac{1}{\omega C}\right)=0$ 、すなわち $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{MC}}$ となる角周波数（周波数は $f=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$ ）では、$\dot{I}_2=0$ となる。