2008 年 2 月 27 日　9:30－11:30

大学院工学研究科　　電気・通信工学専攻
　　　　　　　　　　電子工学専攻
大学院情報科学研究科
　　　　　　情報・生命系群（物理・情報系）
大学院医工学研究科
　　　　　　工学系コース電気工学系

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良いが，”裏面へ続く”と書くこと．問題は和文と英文を併記してある．

Attention: Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them on a separate answer sheet for each problem. If space of the sheet is shortened, use backside of the same sheet and note “continued to backside”. Problems are written both in Japanese and English.

2008 年 2 月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig. 1(a)～(c)のように，真空と等方的媒質との平面境界を考える．座標系は Fig. 1(a)に示したとおりであり，平面境界は xy 平面上にある．真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 および μ_0，媒質の誘電率と透磁率をそれぞれ ε および μ とする．**n** は $+z$ 方向の単位ベクトル，**t** は xy 平面内における任意方向の単位ベクトルである．以下の問に答えよ．

(1) Fig. 1(a)のように，一様な静磁界 $\boldsymbol{H}_0$ を真空中に与える．Ampere の法則の微分形を基に，媒質内部の磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{m}$ が満たすべき境界条件，式(1)を導け．ただし媒質表面の伝導電流は無視できるものとする．

$$(\boldsymbol{H}_\mathrm{m}-\boldsymbol{H}_0)\cdot\mathbf{t}=0 \tag{1}$$

(2) Fig. 1(b)のように，時間的に変化する磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{a}$ が真空から媒質へ入射している．また，媒質表面には単位幅あたり電流 $\boldsymbol{I}$ が流れている．Ampere-Maxwell の法則の微分形 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ から，媒質内部の磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{m}$ が満たすべき境界条件，式(2)を導け．ただし $\boldsymbol{i}$ は伝導電流密度，$\boldsymbol{D}$ は電束密度である．

$$(\boldsymbol{H}_\mathrm{m}-\boldsymbol{H}_\mathrm{a})\times\mathbf{n}=\boldsymbol{I} \tag{2}$$

(3) Fig. 1(c)のように，角周波数 ω，波数 k の平面電磁波を真空中から境界面に垂直に入射させる．j を虚数単位として，入射波の電界成分 $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ と磁界成分 $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ を式（3）のように与えるとき，反射波の電界成分 $\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$ と磁界成分 $\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$，および透過波の電界成分 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$ と磁界成分 $\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$ を導け．それぞれ，入射波の電界振幅 E_i と媒質定数で表すこと．

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}=E_\mathrm{i}e^{\mathrm{j}(\omega t-kz)},\quad \boldsymbol{H}_\mathrm{i}=H_\mathrm{i}e^{\mathrm{j}(\omega t-kz)} \tag{3}$$

(4) 問(3)の場合について，反射率と透過率を求めよ．

As shown in Fig. 1(a)～(c), consider the plane boundary between a vacuum and an isotropic medium. The coordinate system is as shown in Fig. 1(a), and the plane boundary is located on the xy plane. Let the permittivity and permeability of the vacuum be ε_0 and μ_0, and those of the medium be ε and μ, respectively. **n** is the unit vector along the $+z$ direction and **t** is the unit vector along an arbitrary direction in the xy plane. Answer the following questions.

(1) As shown in Fig. 1(a), a static and uniform magnetic field $\boldsymbol{H}_0$ is applied to the vacuum. Derive the boundary condition, equation (1), for the internal magnetic field $\boldsymbol{H}_\mathrm{m}$, based on the differential form of the Ampere's law. Suppose that the surface current on the boundary is negligible.

$$(\boldsymbol{H}_\mathrm{m}-\boldsymbol{H}_0)\cdot\mathbf{t}=0 \tag{1}$$

(2) As shown in Fig. 1(b), a time-varying magnetic field $\boldsymbol{H}_\mathrm{a}$ is applied from the vacuum to the medium. There is a conducting current $\boldsymbol{I}$ per unit width of the boundary surface. Derive the boundary condition, equation (2), for the internal magnetic field $\boldsymbol{H}_\mathrm{m}$, based on the differential form

of the Ampere-Maxwell law, $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t$, where $\boldsymbol{i}$ is the conduction current density and $\boldsymbol{D}$ is the electric flux density.

$$(\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}) \times \mathbf{n} = \boldsymbol{I} \tag{2}$$

(3) As shown in Fig. 1(c), a plane wave with angular frequency ω and wave number k is incident perpendicularly from the vacuum to the medium. Suppose that the electric field component $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ and magnetic field component $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}$ of the incident wave are given by equation (3), where j is the imaginary unit. Derive the electric field component $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$ and the magnetic field component $\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}$ of the reflected wave, and the electric field component $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$ and the magnetic field component $\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$ of the transmitted wave. Write each component in terms of the magnitude of the incident electric field E_{i} and the medium constants.

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = E_{\mathrm{i}} e^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}, \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = H_{\mathrm{i}} e^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} \tag{3}$$

(4) For the case of question (3), derive the reflectivity and transmissivity.

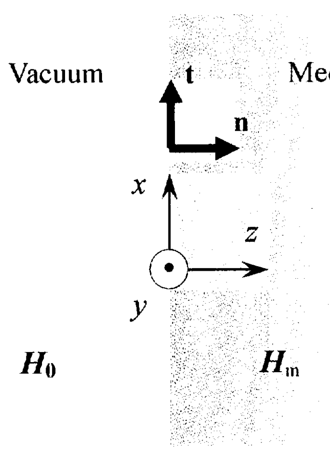

Fig. 1(a)

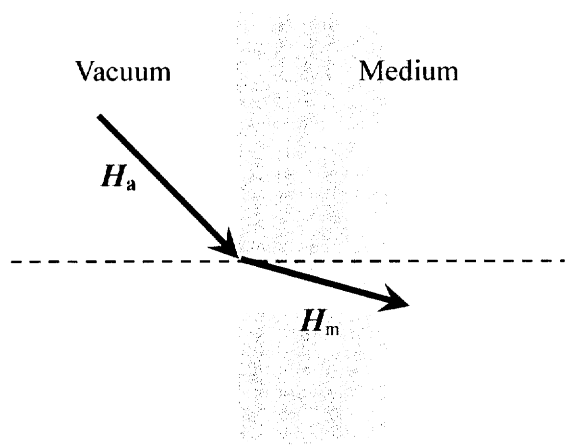

Fig. 1(b)

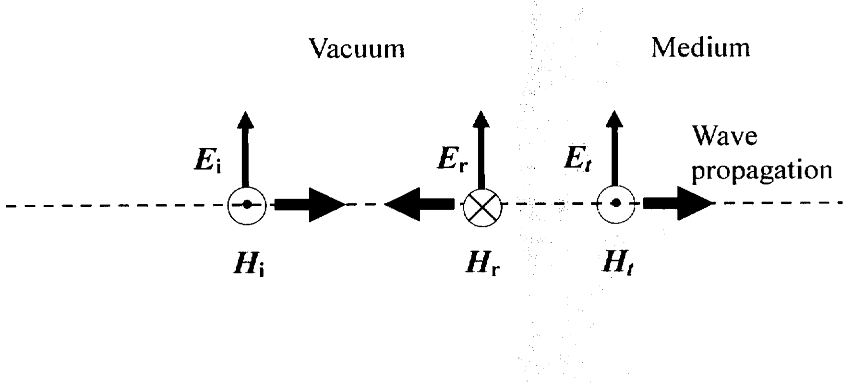

Fig. 1(c)

2008 年 2 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／2 頁中）

Fig. 2(a), Fig. 2(b)において，端子 1-1'と 2-2'の間に無損失分布定数線路が接続されている．電源の内部抵抗と分布定数線路の特性インピーダンスは等しく R_0 である．線路の位相定数を β, 長さを L, 電源電圧を E として次の問に答えよ．

(1) Fig. 2(a) の回路において端子 1-1'から右側を見た回路のインピーダンスを求めよ．

(2) Fig. 2(a) の回路において抵抗 R で消費される電力を求めよ．

(3) Fig. 2(b) の回路において R_0 が $50\,\Omega$ のとき，端子 2-2'における反射係数が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$ となった．このときの R ならびに X の値を求めよ．

In Fig. 2(a) and Fig. 2(b), the terminals 1-1' and 2-2' are connected by a lossless transmission line. The internal resistance of the power supply and the characteristic impedance of the line are the same as R_0. The phase constant and the length of the line are β and L, respectively, and the voltage of the power supply is E. Answer the following questions.

(1) Find the impedance of the circuit shown in Fig. 2(a) seen from the terminals 1-1' toward the right part.

(2) Find the power consumed in the resistance R in Fig. 2(a).

(3) In the circuit in Fig.2(b), when R_0 is $50\,\Omega$, the reflection constant at the terminals 2-2' is $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$. Find the values of R and X.

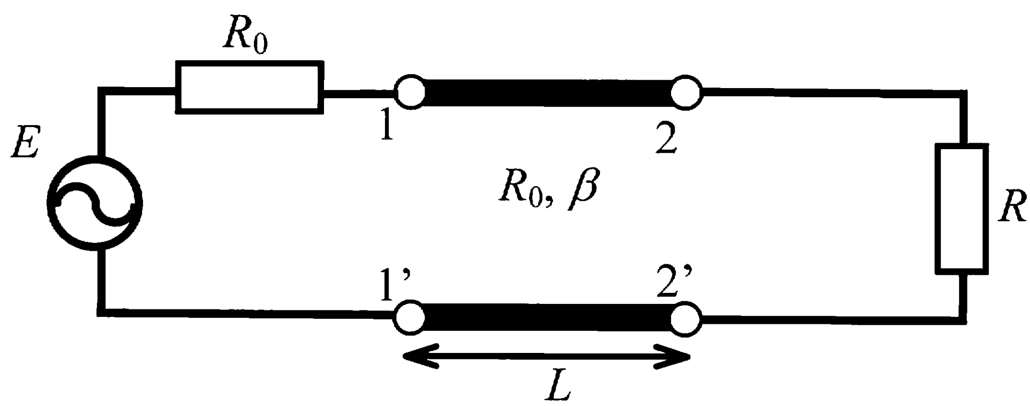

Fig. 2(a)

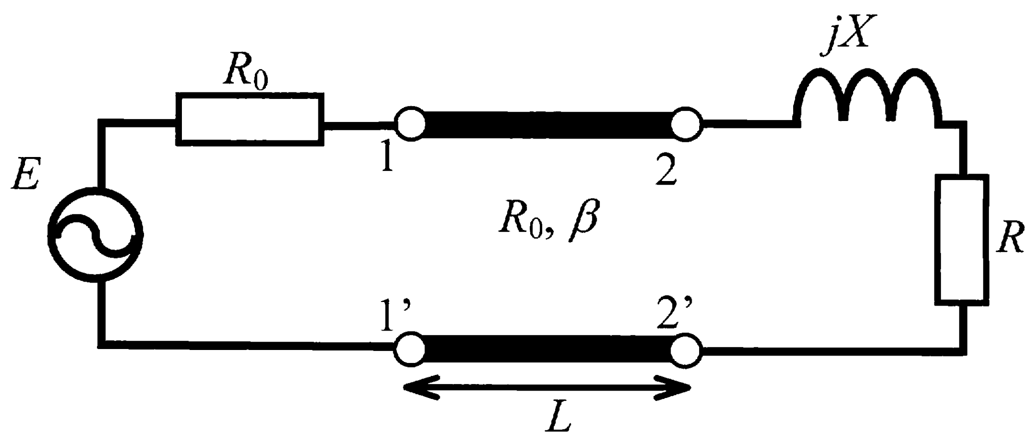

Fig. 2(b)

2008年2月実施
問題3　情報基礎1
（１頁目／２頁中）

論理関数 $f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0)$ を次のように定義する．

$$f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0)=\begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{i=0}^{2} x_i \le [t_1 t_0]_2 \\ 1 & \text{if } \sum_{i=0}^{2} x_i > [t_1 t_0]_2 \end{cases}$$

ただし，$\sum$ は数列の算術和（通常の加算）による総和を表し，$[\alpha]_2$ は2進数 α の値を表す．また，$x_i, t_i \in \{0,1\}$ とする．このとき，次の問に答えよ．問題の解答では，NOT（否定）演算の記号として $\bar{x}$ を，AND（論理積）演算の記号として $x \cdot y$ または xy を，OR（論理和）演算の記号として $x+y$ をそれぞれ使用すること．

(1) $f(0,0,x_2,x_1,x_0), f(0,1,x_2,x_1,x_0), f(1,0,x_2,x_1,x_0)$ を，変数 x_0, x_1, x_2 に関する最簡積和形（最小論理和形）で表せ．

(2) 任意の整数 $1 \le i \le n$ について

$$F(z_1, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n) \le F(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n)$$

であるとき，n 変数論理関数 F は単調増加関数であるという．ある t_1, t_0 を任意に与えたとき，3変数論理関数 g_{t_1,t_0} を

$$g_{t_1,t_0}(x_2, x_1, x_0) = f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0)$$

と定義する．このとき，どんな t_1, t_0 を与えても，g_{t_1,t_0} が単調増加関数であることを示せ．

(3) ある x_2, x_1, x_0 を任意に与えたとき，2変数論理関数 h_{x_2,x_1,x_0} を

$$h_{x_2,x_1,x_0}(t_1, t_0) = f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0)$$

と定義する．このとき，h_{x_2,x_1,x_0} だけを使って任意の論理関数が合成できるための，x_2, x_1, x_0 に関する条件を示せ．

Let $f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0)$ be a logic function such that

$$f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{i=0}^{2} x_i \le [t_1 t_0]_2 \\ 1 & \text{if } \sum_{i=0}^{2} x_i > [t_1 t_0]_2 \end{cases},$$

here $\sum$ denotes the sum of a sequence (using arithmetic sum), and $[\alpha]_2$ denotes the value of a binary number α. We assume that $x_i, t_i \in \{0,1\}$. Answer the following questions. In the answer, use $\overline{x}$, $x \cdot y$ ($x\,y$) and $x + y$ as the NOT, AND and OR operators, respectively.

(1) Determine the minimum sum-of-product expressions of $f(0,0,x_2,x_1,x_0)$, $f(0,1,x_2,x_1,x_0)$ and $f(1,0,x_2,x_1,x_0)$ using variables x_0, x_1 and x_2.

(2) An n-argument logic function F is called a monotonically increasing function if

$$F(z_1, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n) \le F(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n)$$

for any integer $1 \le i \le n$. Given arbitrary t_1 and t_0, let us define a three-argument logic function g_{t_1, t_0} as

$$g_{t_1, t_0}(x_2, x_1, x_0) = f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0).$$

Prove that g_{t_1, t_0} is a monotonically increasing function for any t_1 and t_0.

(3) Given arbitrary x_2, x_1 and x_0, let us define a two-argument logic function h_{x_2, x_1, x_0} as

$$h_{x_2, x_1, x_0}(t_1, t_0) = f(t_1, t_0, x_2, x_1, x_0).$$

Describe conditions on x_2, x_1 and x_0 so that any logic function can be composed using only h_{x_2, x_1, x_0}.

２００８年２月実施

問題４　情報基礎２

（１頁目／１頁中）

配列 A には n 個の整数が入っていて，昇順にソートされているとする．任意の実数 x に対し，配列 A に含まれる整数で x 以下のものの個数を $rank(x, A)$ と表す．以下の問に答えよ．(なお，ある整数 $k \geq 0$ に対し $n = 2^k$ として答えてよい．)

(1) 配列 A の全ての要素が相異なるとする．このとき，与えられた実数 x に対し $rank(x, A)$ を計算する $O(\log_2 n)$ 時間のアルゴリズムを与え，その計算時間は $O(\log_2 n)$ であることを示せ．

(2) 配列 A の要素は必ずしも相異なるとは限らず，同じ値の要素があるかもしれないとする．このとき，与えられた実数 x に対し $rank(x, A)$ を計算する $O(\log_2 n)$ 時間のアルゴリズムを与え，その計算時間は $O(\log_2 n)$ であることを示せ．

Let A be an array containing n integers which are sorted in non-decreasing order. For a real number x, denote by $rank(x, A)$ the number of integers contained in A that are smaller than or equal to x. Answer the following questions. (You may assume that $n = 2^k$ for some integer $k \geq 0$ in your answer.)

(1) Assume that the n elements in A are pairwise distinct. Give an $O(\log_2 n)$-time algorithm to compute $rank(x, A)$ for a given real number x, and prove that its time-complexity is $O(\log_2 n)$.

(2) Assume that the n elements in A are not necessarily pairwise distinct and hence some elements in A may have the same value. Give an $O(\log_2 n)$-time algorithm to compute $rank(x, A)$ for a given real number x, and prove that its time-complexity is $O(\log_2 n)$.

２００８年２月実施
問題５　物理基礎１

質量 m の質点 P が極座標（r, θ）で表される２次元平面内を中心力 $F(r) = -\dfrac{k}{r^2}$（$k>0$）を受けながら運動している．ここで，速度 $\mathbf{v}$，及び加速度 $\mathbf{a}$ はそれぞれ

$$\mathbf{v} = (v_r,\ v_\theta) = (\dot{r},\ r\dot{\theta}),$$

$$\mathbf{a} = (a_r,\ a_\theta) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

で与えられる．以下の各問に答えよ．

(1) θ 方向の運動方程式より，質点 P の角運動量 L が保存されることを示せ．

(2) r 方向の運動方程式が $m\ddot{r} = -\dfrac{k}{r^2} + \dfrac{A}{r^3}$ の形で表されることを示せ．係数 A を m と L を使って求めよ．

(3) 問(2)の運動方程式の右辺の力を与える有効ポテンシャルエネルギー $U(r)$ を求め，概形を図示せよ．ただし，$r \to \infty$ で $U(r) \to 0$ とする．

(4) $U(r)$ が最小値となる半径 R と最小値 U_m を求めよ．

(5) 問(4)の状態にある質点 P はどのような運動をしているか述べよ．そのときの運動の周期 T を求めよ．

２００８年２月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／２頁中）

A particle P of mass m is moving under a central force $F(r) = -\dfrac{k}{r^2}$ $(k > 0)$ in a two-dimensional plane expressed by the polar coordinates $(r,\ \theta)$. Here, the velocity $\mathbf{v}$ and the acceleration $\mathbf{a}$ are given respectively by

$$\mathbf{v} = (v_r,\ v_\theta) = (\dot{r},\ r\dot{\theta}),$$

$$\mathbf{a} = (a_r,\ a_\theta) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}).$$

Answer the following questions.

(1) From the equation of motion in the θ direction, show that the angular momentum L of the particle P is conserved.

(2) Show that the equation of motion in the r direction can be expressed in the form $m\ddot{r} = -\dfrac{k}{r^2} + \dfrac{A}{r^3}$. Obtain the coefficient A in terms of m and L.

(3) Derive the effective potential energy $U(r)$ that gives the force expressed by the right-hand side of the equation in question (2), and illustrate its shape. Let $U(r) \to 0$ for $r \to \infty$.

(4) Find the radius R that minimizes $U(r)$ and obtain the minimum value U_{m}.

(5) Describe the motion of the particle P in the state in question (4). Obtain the period T of the motion.

２００８年２月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，p は実数である．

(a) A^2 を求めよ．

(b) 正方行列 X の指数関数は次のように定義される．

$$\exp(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k$$

ここで X^0 は単位行列を表すものとする．
行列 $\exp(A)$ の対角和を求めよ．

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} q & 0 & i \\ 0 & q & 0 \\ i & 0 & q \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ． ただし，i は虚数単位であり，q は複素数である．

(a) 行列 B の行列式を $|B|$ で表す． $|B|$ を求めよ．

(b) $|B|\neq 0$ を満たす q の条件を求めよ．この条件のもとで行列 B の逆行列を求めよ．

(c) 行列 B のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(d) 任意の自然数 n に対して B^n を求めよ．

２００８年２月実施

問題６　物理基礎２

(1) Consider the matrix $A=\begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}$. Here p is a real number. Answer the following questions.

(a) Calculate A^2.

(b) The exponential function of a square matrix X is defined as follows:

$$\exp(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k ,$$

where X^0 denotes the unit (identity) matrix.
Find the trace of the matrix $\exp(A)$.

(2) Consider the matrix $B=\begin{pmatrix} q & 0 & i \\ 0 & q & 0 \\ i & 0 & q \end{pmatrix}$. Here i is the imaginary unit and q is a complex number. Answer the following questions.

(a) The determinant of the matrix B is denoted by $|B|$. Find the value of $|B|$.

(b) Find the condition on q that satisfies $|B| \neq 0$. Under this condition, find the inverse of the matrix B.

(c) Find all the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrix B.

(d) Find the expression for B^n for any positive integer n.