2. 電磁気

xyz直角座標系のy軸上に直流電流Iが正方向に流れている無限に長い直線状導線が置かれている。また、2辺の長さがa、bの長方形状の導線ループがxy平面に平行でz方向に微小距離（a、bに比べて充分小さい）離れた状態で存在する。長方形ループの位置をループの中心のx座標で表し、また、ループの電気抵抗をRとする。真空中の透磁率をμ_0として以下の問に答えよ。

(1)図2.1(a)に示すx＞a/2の場合、ループを貫く磁束Φ（大きさと向き）を求めよ。

(2)図2.1(b)に示すx=0、すなわち、ループを導線の真上に重ねた状態の場合、ループを貫く磁束Φを求めよ。（このとき、ループと直線状導線は微小距離を隔てているので接触はしていない。）

(3)図2.1(c)に示すように、x＞a/2の範囲で、ループが一定速度vでゆっくり直線状導線に近づいて行くとき、ループに流れる電流の大きさをxの関数として求めよ。電流の向きは図中で時計回り方向を正とする。

(4)時刻t=0でx=2aの位置にいるループが上記設問(3)の動きを始め、設問(2)の状態を経て、反対側x=-2aまで等速度vで通過して行く際にループに流れる電流波形の概略を時間の関数として求めて図示せよ。

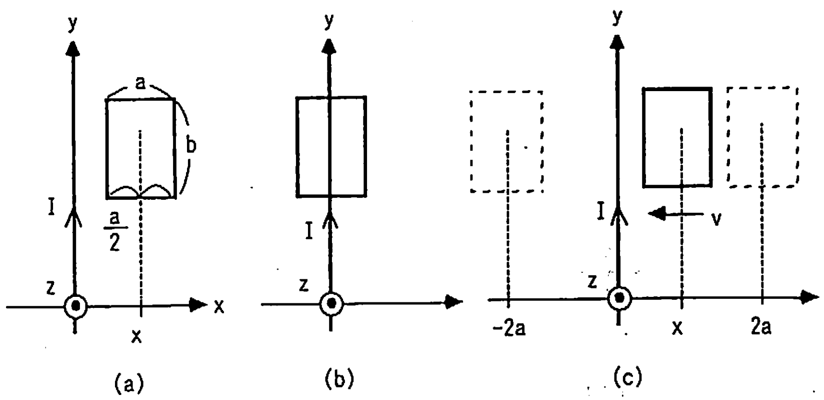

図2.1

$U = [\mathrm{u}_1, \cdots, \mathrm{u}_m], V = [\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n]$ を各々 $R^{m\times m}, R^{n\times n}$ の直交行列とする。
U, V のベクトルを各々 r 個ずつ用いて

$$A = [a_{p,q}] = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathrm{u}_i \mathrm{v}_i^t$$

で定義される $m\times n$ 実行列 A を構成する。
但し、$r \le \min(m,n)$ であり、$\sigma_i \ne 0 (i = 1, \cdots, r)$ であるとする。
この時、次の問題に答えよ。

1. $\{\mathrm{u}_i\}_{i=1}^{m}, \{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{n}$ は正規直交系をなす、即ち

$$\mathrm{u}_i^t \mathrm{u}_j = \delta_{i,j} \text{ for } i,j = 1,\cdots,m$$

$$\mathrm{v}_i^t \mathrm{v}_j = \delta_{i,j} \text{ for } i,j = 1,\cdots,n$$

が成立することを示せ。
但し、

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \ne j \end{cases}$$

である。

2. A の零空間とは、

$$A\mathrm{x} = 0$$

を満足するベクトル $\mathrm{x} \in R^n$ の集合のことである。
A の零空間は、$\mathrm{v}_{r+1}, \cdots, \mathrm{v}_n$ で張られるベクトル部分空間であることを証明せよ。

3. A の値域とは、任意の $\mathrm{x} \in R^n$ に対して

$$\mathrm{y} = A\mathrm{x}$$

で写像される R^m の部分集合を指す。
A の値域は、$\mathrm{u}_1, \cdots, \mathrm{u}_r$ で張られる R^m のベクトル部分空間であることを証明せよ。

4. ベクトル $\{\mathrm{u}_i\}_{i=1}^{r}, \{\mathrm{v}_i\}_{i=1}^{r}$ に対して

$$\begin{aligned} A\mathrm{v}_i &= \sigma_i \mathrm{u}_i (i = 1, \cdots, r) \\ A^t\mathrm{u}_i &= \sigma_i \mathrm{v}_i (i = 1, \cdots, r) \end{aligned}$$

が成立していることを証明せよ。

5. 行列 A の要素 $[a_{p,q}]$ に対して

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} |a_{p,q}|^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2$$

が成立していることを証明せよ。