解答
問題２３
I
(1)

$$P_X(0)=P_{XYZ}(000)+P_{XYZ}(011)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad P_X(1)=P_{XYZ}(110)+P_{XYZ}(101)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$H(X)=\sum_{x=0}^{1}P_X(x)\log_2\frac{1}{P_X(x)}=2\cdot\frac{1}{2}\log_2 2=1$$　　答　$H(X)=1$（ビット）

(2)

$$P_{XY}(00)=P_{XYZ}(000)=\frac{1}{4},\ P_{XY}(01)=P_{XYZ}(011)=\frac{1}{4},\ P_{XY}(10)=P_{XYZ}(101)=\frac{1}{4},\ P_{XY}(11)=P_{XYZ}(110)=\frac{1}{4}$$

$$H(XY)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1}P_{XY}(xy)\log_2\frac{1}{P_{XY}(xy)}=4\cdot\frac{1}{4}\log_2 4=2$$　　答　$H(XY)=2$（ビット）

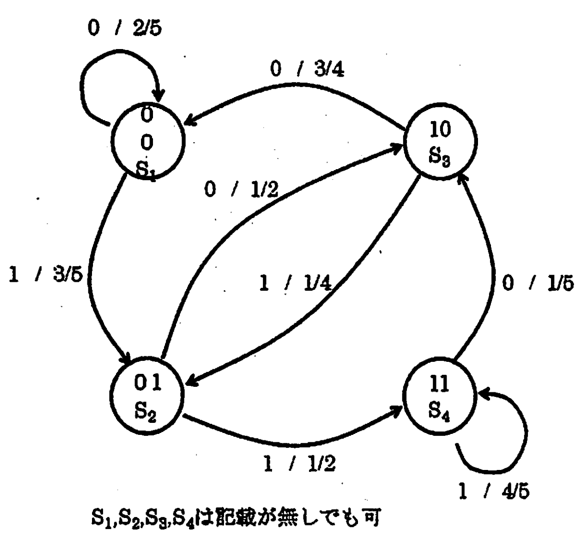
(3)

$$H(XYZ)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1}\sum_{z=0}^{1}P_{XYZ}(xyz)\log_2\frac{1}{P_{XYZ}(xyz)}=4\cdot\frac{1}{4}\log_2 4=2$$　　答　$H(XYZ)=2$（ビット）

(4)

$$H(YZ\,|\,X)=H(XYZ)-H(X)=2-1=1$$　　答　$H(YZ\,|\,X)=1$（ビット）

II
(1)
直前の２出力によりマルコフ情報源の状態を表す。マルコフ情報源の状態集合 $\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$を $S_1=00, S_2=01, S_3=10, S_4=11$ と対応づけたときのシャノン線図および遷移確率行列 A は以下のようになる。



S_1,S_2,S_3,S_4は記載が無しでも可

(2)

状態S_iの定常確率分布をx_iとすると，定常確率分布は以下の式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x_1+\frac{3}{4}x_3=x_1 \\ \frac{3}{5}x_1+\frac{1}{4}x_3=x_2 \\ \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{5}x_4=x_3 \\ \frac{1}{2}x_2+\frac{4}{5}x_4=x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$$

これを解いて，$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{5}{23},\frac{4}{23},\frac{4}{23},\frac{10}{23})$を得る。

(3)

(2)の結果より，定常分布において1を出力する確率は$\frac{5}{23}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{23}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{23}\cdot\frac{1}{4}+\frac{10}{23}\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{23}$，また，0を出力する確率は$\frac{9}{23}$であり，求めるエントロピーは以下のようになる。

$$\frac{14}{23}\log\frac{23}{14}+\frac{9}{23}\log\frac{23}{9}$$

III

(1)

$$H(X)=P_X(0)\log_2\frac{1}{P_X(0)}+P_X(1)\log_2\frac{1}{P_X(1)}=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2=1$$

同時確率を求める。

$$P_{XY}(0,0)=P_X(0)P_{Y|X}(0\,|\,0)=\frac{1}{2}\cdot(1-\varepsilon)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{8},\quad P_{XY}(0,1)=P_X(0)P_{Y|X}(1\,|\,0)=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P_{XY}(1,0)=P_X(1)P_{Y|X}(0\,|\,1)=\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon=\frac{1}{4},\quad P_{XY}(1,1)=P_X(1)P_{Y|X}(1\,|\,1)=\frac{1}{2}\cdot(1-2\varepsilon)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} H(XY)&=P_{XY}(0,0)\log_2\frac{1}{P_{XY}(0,0)}+P_{XY}(0,1)\log_2\frac{1}{P_{XY}(0,1)}+P_{XY}(1,0)\log_2\frac{1}{P_{XY}(1,0)}+P_{XY}(1,1)\log_2\frac{1}{P_{XY}(1,1)} \\ &=\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}+\frac{1}{8}\log_2\frac{8}{1}+\frac{1}{4}\log_2\frac{4}{1}+\frac{1}{4}\log_2\frac{4}{1}=\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}+\frac{11}{8} \end{aligned}$$

$$P_Y(0)=P_{XY}(0,0)+P_{XY}(1,0)=\frac{1}{2}\cdot(1-\varepsilon)+\varepsilon=\frac{1+\varepsilon}{2}=\frac{1+1/4}{2}=\frac{5}{8}$$

$$P_Y(1)=P_{XY}(0,1)+P_{XY}(1,1)=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon+\frac{1}{2}\cdot(1-2\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}-\varepsilon=\frac{1-\varepsilon}{2}=\frac{1-1/4}{2}=\frac{3}{8}$$

$$H(Y)=P_Y(0)\log_2\frac{1}{P_Y(0)}+P_Y(1)\log_2\frac{1}{P_Y(1)}=\frac{5}{8}\log_2\frac{8}{5}+\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}$$

$$\therefore I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=1+\frac{5}{8}\log_2\frac{8}{5}+\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}-\left(\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}+\frac{11}{8}\right)=\underline{\frac{5}{8}\log_2\frac{8}{5}-\frac{3}{8}}$$

答 $\underline{I(X;Y)=\frac{5}{8}\log_2\frac{8}{5}-\frac{3}{8}}$

(23. 9. 29 加筆)

$=\frac{5}{2}-\log_2 3$

(ここまで簡約化することが望ましい)

(2)

$$P_{X|Y}(1|0)=\frac{P_{XY}(1,0)}{P_Y(0)}=\frac{\varepsilon}{\frac{1+\varepsilon}{2}}=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

答 $P_{X|Y}(1|0)=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$

(3)

$$P_b=P_{XY}(x=0,y=1)+P_{XY}(x=1,y=0)=\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=\frac{3}{2}\varepsilon$$

答 $P_b=\frac{3}{2}\varepsilon$

(4)

n ビット中に k ビットの誤りが含まれる確率は ${}_nC_kP_b^k(1-P_b)^{n-k}$ で与えられる。ワード誤り率 P_w は n ビット中に $1\sim n$ ビットのいずれかの誤りが含まれる確率であり

$P_w=\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kP_b^k(1-P_b)^{n-k}$ で与えられる。ここで2項展開の公式

$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kx^ky^{n-k}=y^n+\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kx^ky^{n-k}$ において, $x=P_b,\ y=1-P_b,\ x+y=1$ と置くと

$1=(1-P_b)^n+\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kP_b^k(1-P_b)^{n-k}$ $\quad\therefore P_w=\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kP_b^k(1-P_b)^{n-k}=1-(1-P_b)^n$

を得る。

また, ワード誤り率 P_w は n ビット中に 1 ビットも誤りが含まれない確率を 1 から引いた確率であるので, 直接 $P_w=1-(1-P_b)^n$ と導出することも出来る。

答 $P_w=\sum_{k=1}^{n}{}_nC_kP_b^k(1-P_b)^{n-k}=\sum_{k=1}^{8}{}_8C_kP_b^k(1-P_b)^{8-k}=\sum_{k=1}^{8}{}_8C_k\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^k(1-\frac{3}{2}\varepsilon)^{8-k}$

または、$P_w=1-(1-P_b)^8=1-\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon\right)^8$

(5)

$P_b=\frac{3}{2}\varepsilon$ であり, $\varepsilon<<1$ のとき $P_b<<1$ となり, $(1-P_b)^n\approx1-nP_b$ が言える。

従って $P_w=1-(1-P_b)^n\approx1-(1-nP_b)=nP_b$ と近似される。

$n=8,\ P_b=\frac{3}{2}\varepsilon$ であり、$P_w\approx nP_b=8P_b=8\cdot\frac{3}{2}\varepsilon=12\varepsilon$

答 c=12