

# 平成 23 年度大学院博士前期課程入学試験

## 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

### 専門科目試験問題 (量子電子デバイス工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

#### 【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて 12 頁ある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「量子電子物性 1」、「量子電子物性 2」、「量子電子物性 3」、「量子電子物性 4」、「制御工学 1」、「制御工学 2」、及び、「信号処理」、の全部で 7 題あり、この順番に綴じられている。このうち、3 題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【量子電子物性1】 解答は、白色の解答用紙に記入すること。

光電効果に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、電子の静止質量  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 素電荷  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , プランク定数  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  または  $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , 真空中の光の速さ  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  とする。

【Ⅰ】 清浄な表面をもった金属（仕事関数  $2.3 \text{ eV}$ ）を真空中に置き、その表面に波長  $400 \text{ nm}$ ,  $510 \text{ nm}$ ,  $630 \text{ nm}$  のレーザー光をそれぞれ照射して光電効果の実験を行う。

問 1 これらの波長を持つレーザー光は何れも可視光であるが、それぞれのレーザー光は何色を示すか。緑、赤、青の内から最も近い色を選べ。

問 2 波長  $400 \text{ nm}$ ,  $510 \text{ nm}$ ,  $630 \text{ nm}$  のレーザー光の照射強度をそれぞれ  $0.8 \text{ W}$ ,  $1.2 \text{ W}$ ,  $2.0 \text{ W}$  としたとき、金属表面から放出される電子の運動エネルギーの最大値が最も大きくなるのはどの波長のレーザー光を照射したときか。また、そのレーザー光を照射したときに放出される電子の運動エネルギーの最大値は何  $\text{eV}$  か。答えは小数点以下第 1 位まで求めよ。

【Ⅱ】 金属の表面付近の電子に対するポテンシャルは階段型ポテンシャルで近似的に表すことができ、ここでは光電効果を図 1-1 に示すような一次元階段型ポテンシャル [領域 I ( $x < 0$ ) でポテンシャル  $V = 0$  および、領域 II ( $x \geq 0$ ) で  $V = V_0$ ] 中の電子の波動関数を使って考えてみる。即ち、領域 I を金属内部、領域 II を真空領域、 $V_0$  を金属の仕事関数にそれぞれ対応したものとして考える。

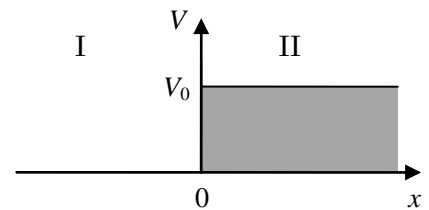


図 1-1 一次元階段型ポテンシャル

問 3 エネルギー  $\varepsilon$  (ただし  $\varepsilon > V_0$ ) を持った電子の領域 I および II における波動関数をそれぞれ  $\Psi_I(x)$  および  $\Psi_{II}(x)$  として、これらが満たすべきシュレディンガーの波動方程式をそれぞれ求めよ。

問 4 問 3 で考えたエネルギー  $\varepsilon$  を持った電子が、領域 I で光励起された電子であるとして、 $\Psi_I(x)$  および  $\Psi_{II}(x)$  をそれぞれ求めよ。ただし、解答するうえで新たに記号等を用いるときは定義すること。

問 5 この階段型ポテンシャルの境界面 ( $x = 0$ ) における電子の領域 I から II への透過率は、その入射波および透過波の確率の流れの密度の比によって定義される。また一般に、波動関数  $\varphi(x)$  で表される電子波の確率の流れの密度  $S$  は以下の式によって与えられる。

$$S = -\frac{i\hbar}{2m} \left[ \varphi^*(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x) \frac{d\varphi^*(x)}{dx} \right]$$

このとき、この透過率を計算する上で必要な入射波および透過波の確率の流れの密度をそれぞれ  $S_I$ ,  $S_{II}$  とするとき、 $S_I$ ,  $S_{II}$  を求めよ。ただし、問 4 で定義した記号はそのまま使ってもよい。

問 6 問 5 の結果を用いて,  $x=0$  における波動関数  $\Psi_I(x)$  および  $\Psi_{II}(x)$  の境界条件を考えることにより, 領域 I から II への電子の透過率を求めよ. ただし, 解答は  $\varepsilon$  および  $V_0$  のみを使って表せ.

問 7 問 6 の透過率を計算することにより, 光電効果によって放出される電子の個数を見積もってみる.

[ I ] の光電効果の実験において, 仕事関数  $2.3 \text{ eV}$  を持った金属表面に波長  $510 \text{ nm}$  のレーザー光を強度  $1 \text{ W}$  で照射したとき, 単位時間当たりに金属表面から放出される電子の数を有効数字 2 桁で求めよ. ただし, 照射したレーザー光の 10% が金属内部に吸収され, その吸収されたフォトンの量子効率を  $0.8$  とする. また, フォトンによる励起はフェルミレベルにある電子に対してのみ行われると仮定する. なお, 解答に際しては計算過程を示し, 必要であれば以下の平方根表の値を用いてもよい.

表 1-1 平方根表

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$\sqrt{x}$	0.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	1.0	1.0	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3	1.3	1.4
$x$	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
$\sqrt{x}$	1.4	1.4	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6	1.6	1.7	1.7	1.7	1.8	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9	2.0

【量子電子物性2】 解答は、赤色の解答用紙に記入すること。

物質の磁性に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。

【Ⅰ】 イオン結晶などの化合物の示す磁性は、下線 A その構成原子またはイオンの持っている磁気モーメントが担っており、その磁気モーメントの配列状態から議論できる。下線 B 常磁性体では、外部磁界がない場合には各磁気モーメント間に相関はなく、また、独立に熱振動しているとして理解される。今、各々の構成原子（またはイオン）の磁気モーメントの向きと大きさを矢印の向きと長さでそれぞれ表すと、外部磁界がない場合の常磁性体の磁気モーメントは、図 2-1 のような状態として書き表される。一方、下線 C 強磁性体、反強磁性体やフェリ磁性体では、外部磁界がない場合でも、それら磁気モーメントがある秩序で配列しており、磁気モーメント間に強い相互作用が働いていることを示している。

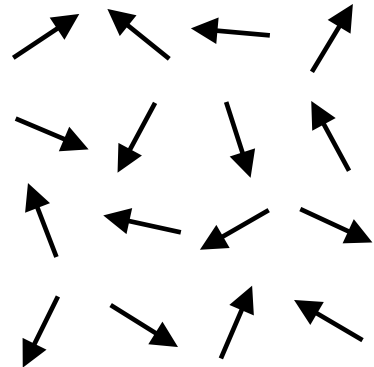


図 2-1

問 1 下線 A で述べている磁気モーメントの主な起因を 2 つ書け。

問 2 下線 B について、次の問いに答えよ。

- (1) 常磁性体の磁化率の温度変化はキュリーの法則に従う。そのような常磁性体 X がある。温度  $T_1$  のときの X の磁化率が  $\chi_1$  であるとき、温度  $T_2$  のときの X の磁化率  $\chi_2$  を求めよ。
- (2) 常磁性体 X に右向きの弱い外部磁界を印加したとき、個々の磁気モーメントで起こる変化と、その結果として常磁性体 X 全体に現れる変化について、40 字程度で答えよ。また、外部磁界を強くしていったとき、個々の磁気モーメントに起こる変化について、20 字程度で答えよ。

問 3 下線 C について、次の問いに答えよ。

- (1) 強磁性体、反強磁性体およびフェリ磁性体について、図 2-1 にならって、それぞれの磁気モーメントの配列状態を図示せよ。
- (2) 強磁性体、反強磁性体およびフェリ磁性体の中で、外部に現れる自発磁化を持つものはどれか。3 つの中で該当するものをすべて書け。
- (3) 自発磁化を持つ磁性体を消磁する（外部磁界が零のとき、磁化が零の状態にする）方法を 1 つ書け。

【Ⅱ】 金属では、電子が原子を離れて自由に動き回って電子の海を作り、伝導電子となって電氣的に良導体となっている。このような金属内の伝導電子のスピンに起因する磁性を自由電子モデルで考えよう。零磁界での自由電子の状態密度を  $D(\epsilon)$ 、1 個の伝導電子のスピンによる磁気モーメントの大きさを

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

とする。ここで、 $e$  は素電荷、 $m$  は自由電子の質量、 $h$  はプランク定数で、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。

自由電子の状態密度を + スピン (+1/2 のスピン磁気量子数  $m_s$  を持つ) 電子と - スピン (-1/2 のスピン磁気量子数  $m_s$  を持つ) 電子に分けて考え、それぞれの状態密度を  $D_+(\epsilon)$ 、 $D_-(\epsilon)$  と置くことにする。ここで、 $D_+(\epsilon)$  と  $D_-(\epsilon)$  は同じエネルギー依存性を持っている。磁界がないときには、

$D_+(\varepsilon) = D_-(\varepsilon) = D(\varepsilon)/2$  であり、エネルギーの等しい＋スピン電子と－スピン電子は同数存在する。そのため、両者のフェルミエネルギーは一致しており、このときのフェルミエネルギーを  $\varepsilon_F^0$  とする。磁束密度  $B = \mu_0 H$  ( $\mu_0$  は真空の透磁率、 $H$  は磁界) の静磁界中にこの金属を置くと、磁界と逆向きの磁気モーメントを持つ＋スピン電子のエネルギーは式 (1) で表される磁気エネルギー  $\Delta\varepsilon$  だけ増加し、磁界と同じ向きの磁気モーメントを持つ－スピン電子は  $\Delta\varepsilon$  だけ減少する。

$$\Delta\varepsilon = [ \quad \text{①} \quad ]. \quad (1)$$

そのため、磁界を印加した瞬間には両者のスピンのフェルミエネルギーもそれぞれ  $\Delta\varepsilon$  だけ増減する。しかし、フェルミエネルギーは両者で一致する必要があるので、＋スピン電子はそのスピンを反転させて－スピン電子となり、単位体積当たりの＋スピン電子数  $N_+$  と単位体積当たりの－スピン電子数  $N_-$  は異なる値となる。その結果、弱い磁界中でのフェルミエネルギー  $\varepsilon_F$  は近似的に  $\varepsilon_F^0$  と一致するようになる。

このような考え方を基に、温度  $T = 0$  における磁化率を求めてみよう。磁界中での単位体積当たりのそれぞれのスピン電子数  $N_+$  と  $N_-$  は次式で与えられる。

$$N_+ = \int_0^{\varepsilon_F} D_+(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$N_- = \int_0^{\varepsilon_F} D_-(\varepsilon) d\varepsilon.$$

このときの磁化  $M$  は、 $\Delta N = N_- - N_+$  を用いて式 (2) で表される。

$$M = [ \quad \text{②} \quad ]. \quad (2)$$

$H = 0$  のときは、 $D_+(\varepsilon) = D_-(\varepsilon)$  であるので、 $M = 0$  となることは明らかである。弱い磁界  $H$  が印加された場合、式 (1) から  $\Delta\varepsilon$  も小さな値となるので  $\varepsilon \gg \Delta\varepsilon$  として

$$D_+(\varepsilon) = \frac{D(\varepsilon - \Delta\varepsilon)}{2} \approx \frac{D(\varepsilon)}{2} - \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\Delta\varepsilon}{2},$$

$$D_-(\varepsilon) = \frac{D(\varepsilon + \Delta\varepsilon)}{2} \approx \frac{D(\varepsilon)}{2} + \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\Delta\varepsilon}{2}.$$

と近似できる。この2式から  $\Delta N$  を求めると

$$\Delta N = [ \quad \text{③} \quad ]. \quad (3)$$

となり、式 (1)、(2) および (3) を用いて磁化率  $\chi$  を求めると式 (4) が得られる。

$$\chi = [ \quad \text{④} \quad ]. \quad (4)$$

この磁化率の磁界依存性から、下線 D 反磁性を示すことが分かる。

問 4 上の文章中の空欄 [ ① ] ～ [ ④ ] を適切な数式で補い、文章を完成させよ。

問 5 磁界を印加したとき、＋スピン電子より－スピン電子の方が低いエネルギー状態をとるのであれば、すべての＋スピン電子のスピンを反転させた方が安定と考えられる。しかし、実際にはそうはならない。その理由を 40 字程度で簡潔に述べよ。

問 6 下線 D は正しいか、間違っているかを答えよ。間違っている場合は正しく書き直せ。

【量子電子物性3】 解答は、青色の解答用紙に記入すること。

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ．なお、必要ならば素電荷  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ ，電子の静止質量  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，ボルツマン定数  $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{J/K}$  として、有効数字 2 桁で解答せよ．得られた数値には単位を示せ．

半導体中の不純物にはキャリアとして電子を供給する [ ① ] と正孔を供給する [ ② ] があり、電気伝導に寄与するキャリアを生成する．IV族 (14 族) の半導体であるシリコンを例にとると、電子を供給する [ ① ] となる不純物には、一般には [ ③ ] 族に属する [ ④ ] などの原子が用いられ、それらの原子を半導体中にドーピングすることにより [ ⑤ ] 型半導体が形成される．一方、正孔を供給する [ ② ] となる不純物には、一般には [ ⑥ ] 族に属する [ ⑦ ] などの原子が用いられ、それらの原子を半導体中にドーピングすることにより [ ⑧ ] 型半導体が形成される．

半導体中のキャリア濃度  $N$  を求める方法として、[ ⑨ ] 効果に基づく方法がある．いま、図 3-1 に示すような均一な半導体試料に、 $xyz$  直角座標の  $x$  方向に一樣な電流密度  $J_x$  が流れており、これに  $z$  方向の磁束密度  $B_z$  を加える場合を考える．キャリアのドリフト速度を  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ，キャリアの電荷を  $e$  とすると、このキャリアは磁束密度  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  の中ではローレンツ力  $\mathbf{F} = [ \text{⑩} ]$  を受けるから、 $y$  方向には  $F_y = [ \text{⑪} ]$  なる力が作用する．その結果、試料の  $y$  方向の表面に電荷がたまり  $y$  方向に電界  $E_y$  が発生する．この電界は [ ⑫ ] 電界と呼ばれ、キャリアが受けるローレンツ力  $F_y$  と電界  $E_y$  から受ける力が釣りあったときに定常状態に達する．すなわち、 $F_y$  と  $E_y$  の間には、[ ⑬ ] の関係式が成り立つ． $J_x$  は、キャリアの  $x$  方向の速度  $v_x$  を用いて  $J_x = [ \text{⑭} ]$  と表され、これより電界は

$$E_y = [ \text{⑮} ] \quad F_y = [ \text{⑯} ] \quad v_x = [ \text{⑰} ] \quad B_z J_x$$

となる．ここで、 $R_H = [ \text{⑱} ]$  と定義すると、 $R_H$  は [ ⑲ ] 係数と呼ばれる．

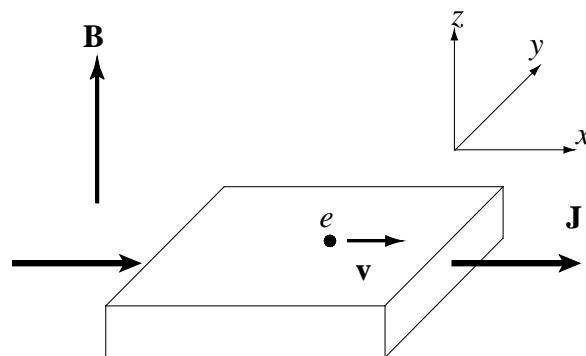


図 3-1

ここでキャリアの有効質量を  $m^*$  とすれば、電界  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  によりキャリアが受ける力の関係は、キャリアの平均の緩和時間を  $\tau$  とすると、

$$m^* \frac{d}{dt} \mathbf{v} + m^* \frac{\mathbf{v}}{\tau} = [ \text{⑳} ] \quad (1)$$

となる．定常状態では  $\frac{d}{dt}\mathbf{v}=0$

となり，

$$\mathbf{v} = \frac{\tau}{m^*} [ \quad \quad \quad ] \quad (17) \quad (2)$$

が得られる．磁束密度  $\mathbf{B}$  が  $z$  方向のみに存在するとき， $v_x$  と  $v_y$  について  $\omega_c = \frac{eB_z}{m^*}$  を用いて解くと，

$$v_x = [ \quad \quad \quad ] \quad (18) \quad (3)$$

$$v_y = [ \quad \quad \quad ] \quad (19) \quad (4)$$

となる．ここで  $\omega_c$  は [ ②① ] 周波数と呼ばれる． $\omega_c \tau \gg 1$  の条件が満たされると，キャリアは磁界に垂直な面内を角周波数  $\omega_c$  で回転運動するので，この回転運動は [ ②② ] 運動と呼ばれる．

問 1 上の文章中の空欄 [ ① ] ～ [ ②② ] にあてはまる語句，記号または数式を答えよ．

問 2 図 3-2 に示すような均一な半導体試料 ( $x \times y \times z = 10 \times 5 \times 1 \text{ mm}^3$ ) に， $x$  方向に 1 mA の一様な電流を流し， $z$  方向に磁束密度  $0.2 \text{ Wb/m}^2$  の磁界を印加したところ，電圧計に正の電圧が生じた．この半導体の電気伝導の多数キャリアは電子，正孔のいずれか答えよ．また，電圧計が 1 mV を示したときの半導体のキャリア濃度を求めよ．

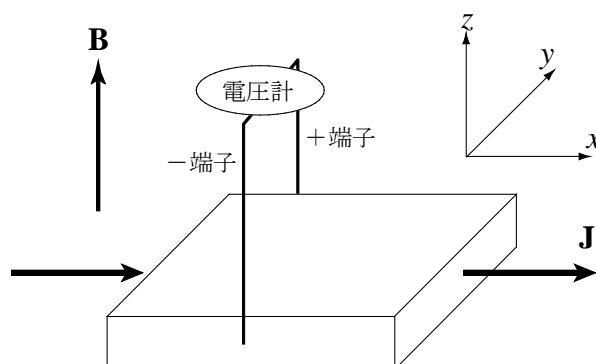


図 3-2

問 3 半導体中にキャリア濃度の勾配があるとき，キャリア濃度の高いところから低いところにキャリアはブラウン運動をしながら流れる．温度 300 K における電子の移動度を  $0.4 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$  とするとき，アインシュタインの関係式を用いて電子の拡散係数を求めよ．

【量子電子物性4】 解答は、黄色の解答用紙に記入すること。

次の文章を読み、下記の問いに答えよ。

半導体の光吸収とその応用について検討する．図 4-1 に示すような表面積  $A$ ，厚さ  $d$  の光伝導体中を， $x$  方向に光子束  $I(x)$  [光子束＝単位時間単位面積当りの光子数] の光が伝搬する場合を考える．ここで，入射面を  $x=0$  とする．光子束  $I(0)$  の光が表面から入射するとする．このとき，光子のエネルギーは半導体のエネルギーギャップより大きいとし，1 つの光子が入射した場合，一対の電子正孔対が生成されるとする．光子数は表面から  $x$  のところで  $I(x)$  に減衰し，さらに微小区間  $dx$  を進む間に  $dI$  だけの減衰を受けたとする．このとき吸収係数  $\alpha$  は

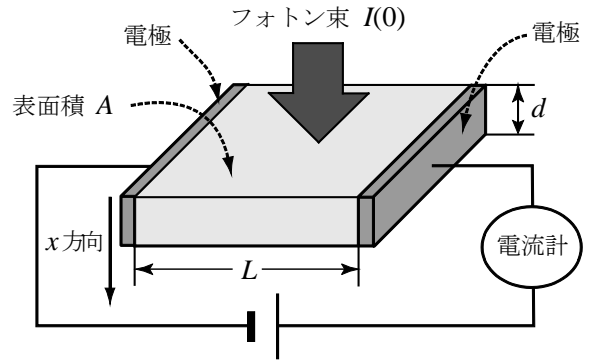


図 4-1 光伝導体（光伝導セル）の構造．光は表面に一様に照射されており，表面での光の反射は考慮しない．

$$\alpha = \frac{\{I(x) - dI\} - I(x)}{I(x)dx} \quad (1)$$

で定義される．この微分方程式を解いて，

$$I(x) = I(0) \quad (1) \quad (2)$$

となる．従って，表面からの距離  $x$  と  $x+dx$  の間の区間  $dx$  で単位面積当りに生成される電子の数  $dn$  は

$$dn = I(0) \quad (2) \quad dx \quad (3)$$

で与えられる．

式 (3) より，光伝導体中で，単位時間単位面積当りに生成される電子数  $G$  は，

$$G = I(0) \quad (3) \quad (4)$$

となり，光の入射により増加した電子数は，単位体積当りで， $G/d$  となる．一方，生成された電子正孔対は再結合で消滅するため，単位体積当りの増加電子数  $\Delta n$  の時間変化は，再結合時間を  $\tau$  として，方程式，

$$\frac{d\Delta n}{dt} = \frac{G}{d} - \frac{\Delta n}{\tau} \quad (5)$$

で記述される．従って，光入射時の定常状態での増加電子数は，

$$\Delta n = \quad (4) \quad (6)$$

と求められる．同様に正孔も同じ数だけ増大するので，光入射による導電率の変化量  $\Delta\sigma$  は，電子と正孔の移動度をそれぞれ  $\mu_e$ ， $\mu_p$  として，

$$\Delta\sigma = e \quad (4) \quad (\mu_e + \mu_p) \quad (7)$$

で与えられる．ここで， $e$  は素電荷である．

以上のように，光入射により導電率が変化し，外部電界を印加することで，光を電流の変化として検出することができる．



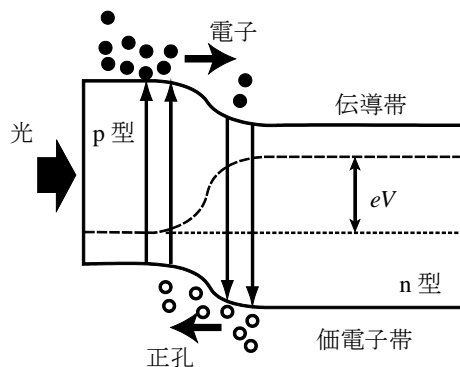


図 4-2 pn 接合の光吸収.

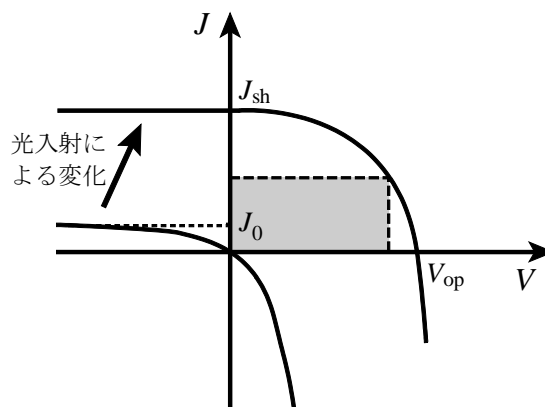


図 4-3 光入射による電流電圧特性の変化.  
式 (8) で説明される.

次に同種の半導体で構成された pn 接合型太陽電池 (図 4-2) の動作について考える. ここで光入射面は薄い p 型半導体とする. 表面から入射した光子は, 式 (2) に従って半導体中で吸収され, 電子正孔対を生成する. pn 接合部近傍で生成された電子正孔対のそれぞれの電荷は空間電荷制限領域の電界により移動する. このとき電子と正孔は反対方向に移動し, 空間的に分離され, pn 接合には起電力が発生する. その結果, 太陽電池を外部回路につなぐと電流が流れる. 太陽電池の電流電圧特性は,

$$J = J_{sh} - J_0 \quad \text{⑤} \quad (8)$$

で与えられる. ただし, pn 接合にかかる順方向電圧を  $V$  とし,  $J_0$  は飽和電流,  $J_{sh}$  は外部回路を短絡したときの電流で, 取り出せる電流  $J$  の符号は正とする. 光入射による電流電圧特性の変化する様子を図 4-3 に示す.

効率の良い太陽電池を開発するには, 直列につなぐ負荷抵抗を最適化する必要がある.  $J_{sh} \gg J_0$  の条件下では, 最大電力を取り出せる電圧  $V_{max}$  は,

$$\frac{J_{sh}}{J_0} = \exp\left(\frac{eV_{max}}{k_B T}\right) \left(1 + \frac{eV_{max}}{k_B T}\right) \quad (9)$$

の関係を満たす. ここで,  $k_B$  はボルツマン定数,  $T$  は温度である. この関係式と式 (8) より  $V_{max}$  と最適電流  $J_{max}$  を求めることで, 最適負荷  $R_{max} = V_{max}/J_{max}$  が求められる.

問 1 上の文章中の空欄 [ ① ] ~ [ ⑤ ] に適切な数式を入れよ. ただし,  $e$ ,  $k_B$ ,  $T$ ,  $G$ ,  $d$ ,  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $V$  の内から必要な記号を用いて解答すること.

問 2 光伝導体で長さ  $L$ , 表面積  $A$  の光伝導セルを構成する. このセルに電界  $E$  が印加され, 単位時間単位面積当り  $I(0)$  の光子が入射しているとき, 流れる光電流  $\Delta I$  を,  $e$ ,  $E$ ,  $L$ ,  $\tau$ ,  $I(0)$ ,  $A$ ,  $\mu_e$  を用いて表せ. ただし, 量子効率  $\eta$  は 1 とし, 正孔の寄与は無視する. また,  $I(0) \times A = 5 \times 10^{12}$  個/s,  $\tau = 0.5 \times 10^{-9}$  s,  $\mu_e = 0.25 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ ,  $E = 5 \times 10^5 \text{ V/m}$ ,  $L = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$  のとき, 流れる電流を有効数字 1 桁で求めよ. ただし, 素電荷  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  とする. ヒント: 増加する電流密度は, 導電率の増加に印加電界を乗じたものである.

問 3 pn 接合型太陽電池において，外部回路を開放したときの電圧  $V_{\text{op}}$  を求めよ．ただし， $e$ ， $k_{\text{B}}$ ， $T$ ， $\alpha$ ， $\tau$ ， $V$ ， $J_{\text{sh}}$ ， $J_0$  の内から必要な記号を用いて解答すること．

問 4 式 (9) を証明せよ．

【制御工学 1】 解答は，水色の解答用紙に記入すること．

1. 図 1 のフィードバックシステムについて以下の問いに答えよ．ただし， $K_1$ ， $K_2$ ， $a$ ， $b$  はいずれも定数である．

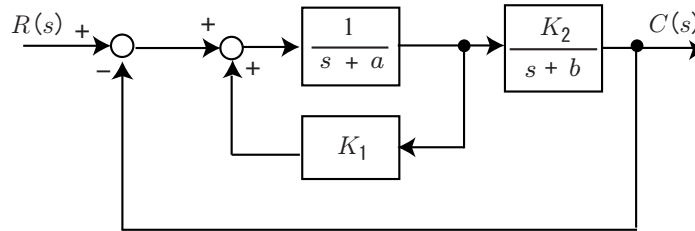


図 1

- (i) 入力  $R(s)$  から出力  $C(s)$  までの伝達関数を答えよ．
- (ii) 図 1 のフィードバックシステムが安定となるための必要十分条件を  $K_1$ ， $K_2$ ， $a$ ， $b$  を用いて示せ．
- (iii) 図 1 のフィードバックシステムが問 (ii) の条件を満たすとき，ステップ応答が単調増加となるための必要十分条件を  $K_1$ ， $K_2$ ， $a$ ， $b$  を用いて示せ．
- (iv)  $K_1 = 1$ ， $K_2 = 2$ ， $a = 1$ ， $b = 3$  のときの単位インパルス応答を時刻  $t$  の関数として求め，応答波形の概形を示せ．
- (v) 図 1 のフィードバックシステムの  $K_1$ ， $K_2$ ， $a$ ， $b$  を適当に定めると，図 2(a)-(d) のいずれかのシステムと同じ伝達関数となる．いずれのシステムであるか答え，そのときの  $K_1$ ， $K_2$ ， $a$ ， $b$  の値の一例を示せ．

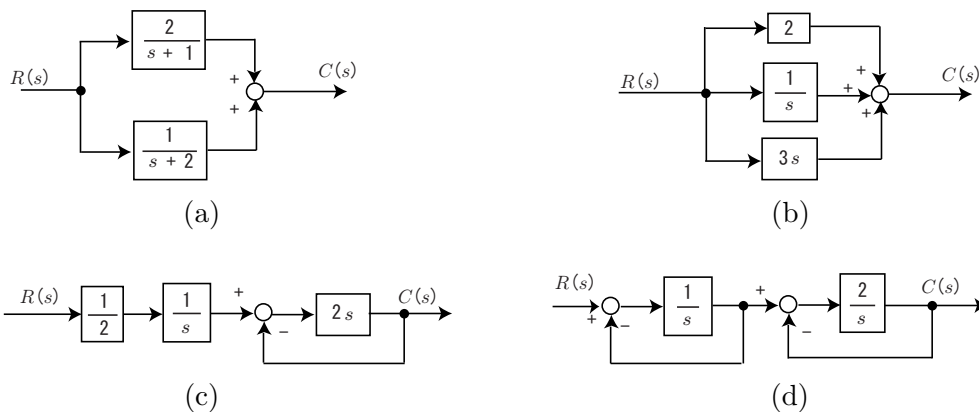


図 2

2. 以下の各項目について，簡単に説明せよ．

- (a) 周波数応答
- (b) 根軌跡

【制御工学 2】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること。

1. 状態方程式と出力方程式がそれぞれ

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

で表現される 1 入力 1 出力システムに対して、以下の問いに答えよ。ただし、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とする。

- (i) このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ。ただし、その理由を明らかにすること。
- (ii) 入力  $u(t)$  が恒等的に零、すなわち  $u(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) とするとき、出力  $y(t)$  も恒等的に零、すなわち  $y(t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) となるための、初期状態  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$  に関する必要十分条件を示せ。
- (iii) 入力  $u(t)$  を  $u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$  とする状態フィードバック制御を施したシステムの極が  $-2 \pm j3$  となるようなフィードバック係数  $k_1$  と  $k_2$  の値を求めよ。ただし、 $j$  は虚数単位を表す。
- (iv) 正則行列

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

を用いて、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$  と表される新しい状態変数ベクトル  $\mathbf{z}(t)$  を考える。 $\mathbf{z}(t)$  に関する状態方程式を

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t)$$

とおくとき、 $\tilde{\mathbf{A}}$  と  $\tilde{\mathbf{b}}$  を求めよ。

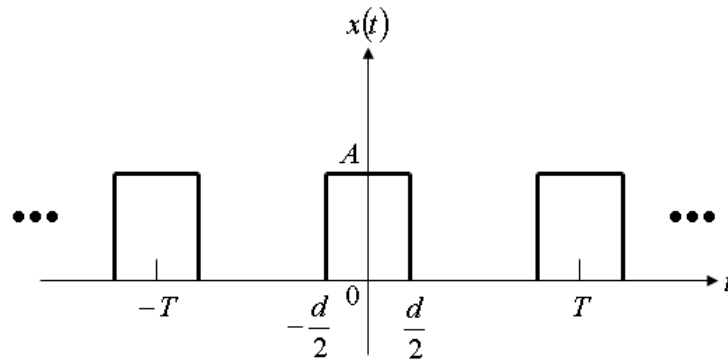
2. 次の伝達関数  $G(s)$  のボード線図に関して、以下の問いに答えよ。

$$G(s) = \frac{20s(s+10)}{(s+2)(s+4)(s+5)^2}$$

- (i) ゲイン曲線の概形を折れ線近似により示せ。ただし、折点角周波数の値と折れ線の各部分の傾きを明示すること。
- (ii) 角周波数  $\omega$  を  $\omega \rightarrow 0$  および  $\omega \rightarrow \infty$  としたときの位相曲線の漸近値  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega)$  と  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega)$  を求めよ。ただし、 $\angle G(j\omega)$  は  $G(j\omega)$  の偏角を表す。

【信号処理】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること.

1. 図 1 に示す方形波パルスで構成される周期パルス列の時間関数について、以下の問いに答えよ.  
ただし、 $t$  は時刻、 $T$  は周期パルス列の周期、 $d$  はパルス幅、 $A$  はパルス振幅、および  $\omega$  は角周波数である.



- (i) 図 1 の時間関数  $x(t)$  をフーリエ級数に展開せよ.
- (ii) 図 1 の時間関数において  $T \rightarrow \infty$ ,  $A = 1/d$  とした場合の  $x(t)$  について、スペクトル  $X(\omega)$  と自己相関関数  $R_{xx}(\tau)$  を求めよ. ただし、 $\tau$  は時間差である.
- (iii) 問い(ii)において、更に  $d \rightarrow 0$  とした場合の  $x(t)$  について、スペクトル  $X(\omega)$  を求めよ.
2. インパルス応答  $h(t)$  が  $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$  で与えられるシステムについて、以下の問いに答えよ.  
ただし、 $t$  は時刻を表す変数、 $T (T > 0)$  は固定時間、 $\delta(t)$  は連続時間の単位インパルス信号 (Dirac のデルタ関数) である.
- (i) このシステムに時間関数  $x(t) = \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T)$  で与えられる信号を入力したときの出力  $y(t)$  を求めよ.
- (ii) このシステムの振幅 (ゲイン) 特性と位相特性をそれぞれ求めよ.
3. アナログ信号をデジタル信号に変換する操作をアナログ・デジタル変換 (A/D 変換) という.  
A/D 変換は、標本化、量子化、および符号化の 3 つの操作により行われている. これら 3 つの操作について、それぞれ説明せよ.