平成 30 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

専門科目試験問題
（電気工学コース）

（実施時間　１４：００ ～ １６：００）

【注　意　事　項】

1．問題用紙は，この表紙や白紙を除いて２９ページある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

2．試験問題は，①「制御工学」，②「パワーエレクトロニクスと電気機器」，③「電磁気工学１」，「電磁気工学２」，④「量子電子物性１」，「量子電子物性２」，「量子電子物性３」，「量子電子物性４」，及び，⑤「信号処理」，の全部で５分野（①～⑤）９題あり，この順番に綴じられている．この５分野（①～⑤）９題のなかから２分野以上３題を選択し解答すること．

3．解答開始前に，別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

4．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【制御工学】解答は，白色（１番）の解答用紙に記入すること．

以下の 1.〜4. に答えよ．

1. 伝達関数 $G(s)$ が次式で表される１次系について，以下の問いに答えよ．

$$G(s) = \frac{1}{2s+6}$$

(i) ステップ応答の定常値を求めよ．

(ii) $G(s)$ のボード線図におけるゲイン曲線を折れ線近似したときの折点角周波数の値を求めよ．

(iii) 正弦波関数 $\sin 3t$ で表される入力に対し，定常状態での出力は $Y \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ と表される正弦波関数となった．Y の値を求めよ．

2. 図１のフィードバックシステムについて，以下の問いに答えよ．ただし，K は実数値をとるゲインである．

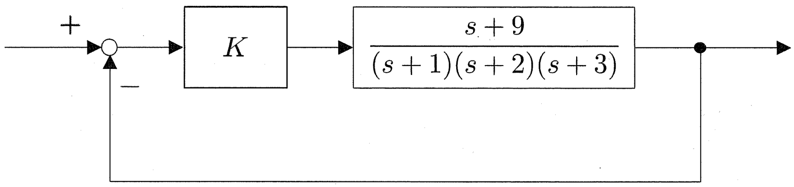

図１

(i) K を $0 \to \infty$ と変化させたとき，虚軸と交わる根軌跡が存在する．根軌跡が虚軸と交わるときの K の値を求めよ．

(ii) 問 2. (i) において，根軌跡が虚軸と交わる点の座標をすべて求めよ．

3. 次式の状態方程式と出力方程式で与えられる線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

ただし，a は実数値をとるパラメータであり，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル，$u(t)$ は入力変数，$y(t)$ は出力変数とする．

(i) このシステムが可制御となるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) このシステムが任意の a の値に対して可観測となることを示せ．

(iii) $a = -1$ とする．K を正の実数値をとるゲインとし，入力 $u(t) = -Kx_2(t)$ を与えたとき，このシステムが漸近安定となるための K に関する必要十分条件を求めよ．

4．2階常微分方程式

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=u(t)$$

で与えられる線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．ただし，$u(t)$ は入力変数，$y(t)$ は出力変数とする．

(i) $x_1(t)=\dfrac{1}{2}y(t)$ と $x_2(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(y(t)+\dfrac{dy(t)}{dt}\right)$ を状態変数としたとき，このシステムを表す状態空間表現

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)$$
$$y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)$$

の係数行列 $\boldsymbol{A}$ と係数ベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$ とする．

(ii) $y(t)$ を零入力応答とすると，$y(0)=1$ かつ $y\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}\right)=0$ となった．初期値 $x_1(0)$ と $x_2(0)$ を求めよ．ここで，つぎの結果を用いてもよい．

$$\exp\left(\begin{bmatrix}-\lambda & \omega\\ -\omega & -\lambda\end{bmatrix}t\right)=\exp(-\lambda t)\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}$$

ただし，λ と ω は正の実数とする．

専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
1 次系	first order system
ステップ応答	step response
定常値	steady-state value
ボード線図	Bode diagram
ゲイン曲線	log-magnitude curve
折れ線近似	piecewise linear approximation
折点角周波数	corner angular frequency
正弦波関数	sinusoidal function
定常状態	steady state
フィードバックシステム	feedback system
虚軸	imaginary axis
根軌跡	root locus
線形時不変システム	linear time-invariant system
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数	input variable
出力変数	output variable
可制御	controllable
可観測	observable
漸近安定	asymptotically stable
状態空間表現	state-space description
零入力応答	zero-input response

【パワーエレクトロニクスと電気機器】解答は，赤色（2番）の解答用紙に記入すること．

以下の１．と２．に答えよ．

1. 図 1 に昇圧チョッパの回路を示す．回路は，インダクタ L，キャパシタ C，負荷抵抗 R，トランジスタ Q，ダイオード D から構成され，入力電圧を E_{in}，出力電圧を E_{out} とする（$E_{\mathrm{out}} > E_{\mathrm{in}}$）．$C$ は E_{out} の変動を無視できるほど十分大きい．また，Q のスイッチング周期を T とし，デューティ比（オン時比率）を d で表す．回路動作はすべて周期定常状態にあるものとし，以下の問いに答えよ．

(i) インダクタ L の電圧 v_{L} と時間 t との積を 1 周期 T にわたって積分した値を求めよ．

(ii) 回路が電流連続動作モード（インダクタ電流 i_{L} が零になる期間が無い動作モード）で動作する場合を考える．このときのダイオード電圧 v_{D}，ダイオード電流 i_{D}，インダクタ電圧 v_{L}，トランジスタ電流 i_{Q} の各波形の概形をそれぞれの特徴がわかるように描け（2 周期以上の波形を描くこと．さらに電圧波形については振幅の大きさを記入すること）．また E_{out} を E_{in} と d で表わせ．ただし，Q と D は理想的なスイッチング動作を行い，オン電圧降下は無視するものとする．

(iii) 問 1.(ii)の条件で，ダイオード D の逆回復電流が無視できないほど大きい場合について考える．このときのダイオード電流 i_{D}，トランジスタ電流 i_{Q} の各波形の概形を，ダイオード D の逆回復電流の影響がわかるように描け（2 周期以上の波形を描くこと）．

(iv) 回路が電流断続動作モード（インダクタ電流 i_{L} が零になる期間が存在する動作モード）で動作する場合を考える．インダクタ電流 i_{L} が零となる期間の長さを T_0 とし，$d_0 = T_0 / T$ とする．このときダイオード電圧 v_{D}，ダイオード電流 i_{D}，インダクタ電圧 v_{L}，トランジスタ電流 i_{Q} の各波形の概形を，それぞれの特徴がわかるように描け（2 周期以上の波形を描くこと．さらに電圧波形については振幅の大きさを記入すること）．また，E_{out} を E_{in} と d, d_0 で表わせ．さらに i_{L} の 1 周期の平均電流 I_{L} を T, d, L, E_{out}, E_{in} で表わせ．ただし， Q と D は理想的なスイッチング動作を行い，オン電圧降下は無視するものとする．

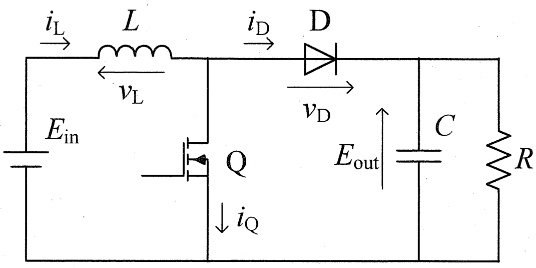

図 1

2. 三相巻線形誘導電動機の一相分の等価回路を図 2 に示す．同図において，一次抵抗r_1，一次漏れリアクタンスx_1，一次側に換算した二次抵抗r_2'，一次側に換算した二次漏れリアクタンスx_2'，一次側に換算した負荷抵抗r'，励磁アドミタンス$\dot{Y}_0$とする．ここで，一次電圧$\dot{V}_1$，一次電流$\dot{I}_1$，負荷電流$\dot{I}_1'$，励磁電流$\dot{I}_0$のとき，すべり s で電動機として動作した．以下の問いに答えよ．

(i) 一次側に換算した二次漏れリアクタンスx_2'を，換算前の二次漏れリアクタンスx_2，巻線比αを用いて表せ．ただし，相数比は 1 とし，αは電動機停止時における二次誘導起電力に対する一次誘導起電力の割合を表す．

(ii) 負荷電流の大きさI_1'を，V_1，r_1，x_1，r_2'，x_2'，s を用いて表せ．

(iii) 三相分のトルクTを，V_1，r_1，x_1，r_2'，x_2'，s，ω_s を用いて表せ．ただし，ω_s は同期速度に相当する角速度を表す．

(iv) 三相分のトルクTが最大となるすべり $s_{\max}$ を，問 2. (iii)で求めたTを用いて導出せよ．

(v) この誘導電動機が始動時に最大トルクを得るため，二次回路に新たに抵抗を追加することを考える．二次側に追加すべき抵抗を，一次側に換算した一相分としてr_1，x_1，r_2'，x_2'を用いて表せ．

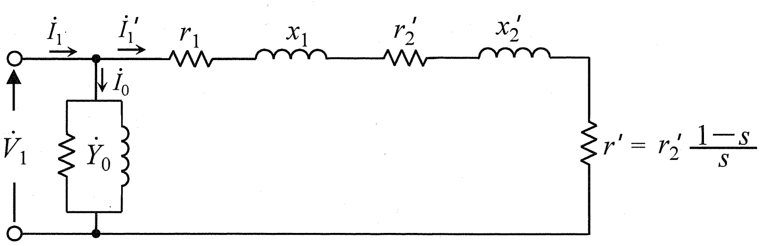

図 2

専門用語の英訳

昇圧チョッパ	boost chopper
デューティ比	duty ratio
電流連続動作モード	continuous conduction mode
波形	waveform
逆回復電流	reverse recovery current
電流断続動作モード	discontinuous conduction mode
平均電流	average current
三相巻線形誘導電動機	three-phase wound-rotor induction motor
等価回路	equivalent circuit
一次抵抗	primary resistance
一次漏れリアクタンス	primary leakage reactance
二次抵抗	secondary resistance
二次漏れリアクタンス	secondary leakage reactance
負荷抵抗	load resistance
励磁アドミタンス	exciting admittance
一次電圧	primary voltage
一次電流	primary current
励磁電流	exciting current
すべり	slip
巻線比	turn ratio
相数比	phase ratio
負荷電流	load current
トルク	torque
同期速度	synchronous speed
始動	starting

【電磁気工学1】 解答は，黄色（3番）の解答用紙に記入すること．

以下の文章中(ア) 〜 (サ)に適切な文字式を記入せよ．また(シ)に文章で答えよ．

実験室系において質量 m_1，電荷 e_1，速度 $\mathbf{v_1}$ の粒子 1 と質量 m_2，電荷 e_2，速度 $\mathbf{v_2}$ の粒子 2 が遠方から相対速度 $\mathbf{u}$ で近づき，相互のクーロン反発力によって弾性散乱される場合を考える．

ここでは両粒子ともに大きさの無視できる質点とし，重力の影響はないものとする．また，粒子の速さは光速に比べ十分小さく，相対論的な効果は無視してよいとする．これらの衝突前後の運動は全て同一平面内で起こるものとする．

衝突前の粒子 1, 粒子 2 の相対速度 $\mathbf{u}$ は次の式で与えられる．

$$\mathbf{u} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} \tag{1}$$

弾性散乱においては衝突の前後で全運動量が保存するので，散乱後の粒子 1, 粒子 2 の速度をそれぞれ$\mathbf{v_1} + \delta\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2} + \delta\mathbf{v_2}$とすると$\delta\mathbf{v_1}, \delta\mathbf{v_2}$は

$$\delta\mathbf{v_1} = \boxed{\quad（ア）\quad}\ \delta\mathbf{u} \tag{2}$$

$$\delta\mathbf{v_2} = \boxed{\quad（イ）\quad}\ \delta\mathbf{u} \tag{3}$$

と表される．ここで，$\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$は衝突後の相対速度である．

次に，重心速度 $\mathbf{V_G}$，換算質量 μ をそれぞれ以下の式で与える．

$$\mathbf{V_G} = \frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{5}$$

すると，粒子 1 の散乱前後における運動量の変化量 $\delta\mathbf{p_1}$，および運動エネルギーの変化量 δE_1は，μ, $\mathbf{V_G}$, m_1, $\mathbf{u}$，$\delta\mathbf{u}$ を用いてそれぞれ以下の式となる．

$$\delta\mathbf{p_1} = \boxed{\quad（ウ）\quad} \tag{6}$$

$$\delta E_1 = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v_1} + \delta\mathbf{v_1})^2 - \frac{1}{2}m_1\mathbf{v_1^2} = \boxed{\quad（エ）\quad} \tag{7}$$

続いて，同じ散乱を重心系において考えてみる[図 1(左)]．

相対速度の大きさは散乱の前後で変化せず（$|\mathbf{u}| = |\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}|$），粒子はそれぞれ角度$\theta$の方向に散乱する．この関係を図 1(右)に示す．図 1(右)において，$\mathbf{i}$ を $\mathbf{u}$ に平行な単位ベクトル，$\mathbf{j}$ を $\mathbf{u}$ に対して垂直な単位ベクトルとすると，$\delta\mathbf{u}$ は

$$\delta\mathbf{u} = \boxed{\quad（オ）\quad}\ \mathbf{i} + \boxed{\quad（カ）\quad}\ \mathbf{j} \tag{8}$$

となる．ここで必要なら公式 $(1 - \cos\theta)/2 = \sin^2(\theta/2)$ を使っても良い．

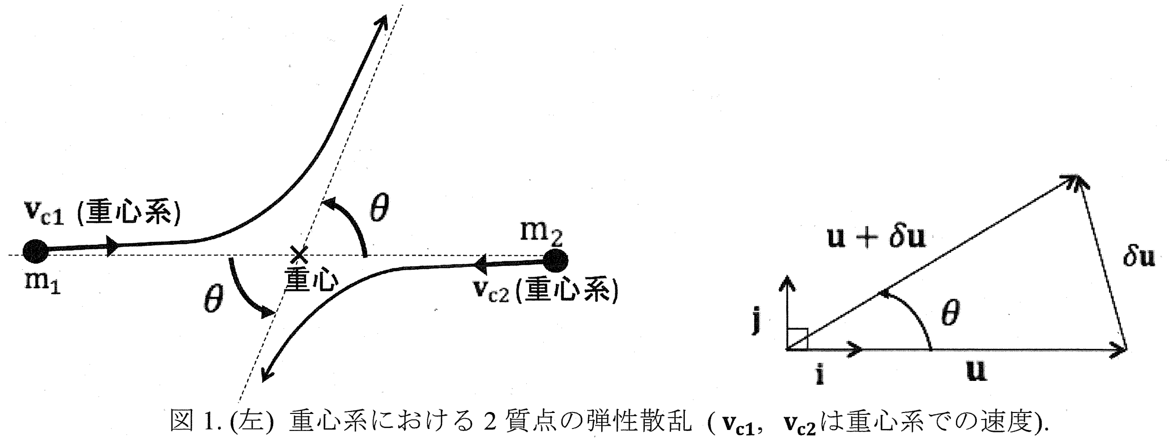

図 1. (左) 重心系における 2 質点の弾性散乱 ($\mathbf{v_{c1}}$, $\mathbf{v_{c2}}$は重心系での速度).
(右)散乱前後の相対速度$\mathbf{u}$.

よって，運動量の変化量 $\delta\mathbf{p_1}$ は式(6)に式(8)を代入し，

$$\delta\mathbf{p_1} = \boxed{\quad（キ）\quad} \tag{9}$$

と求まる．同様に運動エネルギーの変化量に対しても式(7)に式(8)を代入し，エネルギー保存則を考慮に入れて，

$$\delta E_1 = \boxed{\quad（ク）\quad} \tag{10}$$

と求まることがわかる．

次にプラズマ中でのクーロン衝突の影響について考える．

プラズマ中を質量 m_1，電荷 e_1，速度 $\mathbf{v_1}$ の粒子 1 が運動しており，この粒子 1 が，質量 m_2，電荷 e_2，速度 $\mathbf{v_2}$，数密度 n_2 の粒子 2 と衝突する場合を考える．微小時間δtの間に粒子 1 が失う運動量，運動エネルギーの平均を式(11)，式(12)で与える．

$$\left\langle\frac{\delta\mathbf{p_1}}{\delta t}\right\rangle = n_2 u\int \delta\mathbf{p_1}\sigma(\theta,u)d\Omega \tag{11}$$

$$\left\langle\frac{\delta E_1}{\delta t}\right\rangle = n_2 u\int \delta E_1\sigma(\theta,u)d\Omega \tag{12}$$

$\sigma(\theta,u)$ はラザフォードの散乱公式であり，立体角をΩ，真空中の誘電率をε_0とすると

$$\frac{d\sigma(\theta,u)}{d\Omega} = \left(\frac{e_1e_2}{8\pi\varepsilon_0\mu u^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \tag{13}$$

と表される．ただしuは相対速度の大きさとする．

ここで式(9)，式(10)の $\mathbf{j}$ ベクトルに関する項はその対称性から積分することで打ち消しあうので，無視できる．また，プラズマ中でのデバイ遮蔽の効果でクーロンポテンシャルは遠方まで到達しないため，式(11)，式(12)の積分において，ある最小の散乱角度θ_{min}を仮定できる．そのため積分範囲を$\theta_{min}\le\theta\le\pi$として良い．

以上の条件を踏まえて，$d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$の関係と式(9)，式(13)を式(11)に代入することで

$$\left\langle\frac{\delta\mathbf{p_1}}{\delta t}\right\rangle = \boxed{\quad（ケ）\quad} \tag{14}$$

と求めることができる．運動エネルギーの変化量に関しても同様に

$$\langle\frac{\delta E_1}{\delta t}\rangle = \boxed{\quad（コ）\quad} \tag{15}$$

となる．

ここで，式(14)を変形することで以下の形で表すことが可能である．

$$\langle\frac{\delta \mathbf{p_1}}{\delta t}\rangle = -\nu_{12}\mathbf{p_1} \tag{16}$$

ν_{12}は衝突周波数といい，数密度n_2のプラズマ中での粒子 1 と粒子 2 の衝突の頻度を表すとともに，単位時間あたりの運動量やエネルギーの減衰の速さなどを表すパラメーターと言える．衝突周波数は以下の式で与えられる．

$$\nu_{12} = \boxed{\quad（サ）\quad} \tag{17}$$

式(17)における換算質量を考慮すれば，電子-電子衝突，電子-陽子衝突，陽子-陽子衝突における運動量の減衰速度の比がわかる．それぞれの衝突による減衰速度ならびに，平衡状態への緩和時間の大きさを比較し，(シ)に記入せよ．

(シ)

専門用語の英訳

実験室系	laboratory system
クーロン反発力	Coulomb repulsion
弾性散乱	elastic scattering
重心系	center-of-mass system
換算質量	reduced mass
エネルギー保存則	conservation of energy
真空中の誘電率	vacuum permittivity
立体角	solid angle
数密度	number density
デバイ長	Debye length
クーロンポテンシャル	Coulomb potential
衝突周波数	collision frequency
減衰速度	decay speed
平衡状態	equilibrium state
陽子	proton

【電磁気工学２】解答は，水色（４番）の解答用紙に記入すること．

以下の文章の $\boxed{\text{（ア）}}$ ~ $\boxed{\text{（エ）}}$ に当てはまる適切な文字式を答え，また問(i)~(v)について答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$とする．

電子とイオンが等しい電荷量で，一様に分布している 2 成分プラズマを考える．イオンの運動は無視でき，電子の運動は特性的な周波数で平衡位置を中心に振動しているとする．

平衡時に電場，磁場が無いとして線形化し，2 次以降の項を省略する．平衡の成分を添え字 0 で示し，1 次の摂動の成分を添え字 1 で示すと，電子の数密度n_e，電子の速度$\boldsymbol{u}_\mathrm{e}$，電場$\boldsymbol{E}$はそれぞれ，$n_\mathrm{e}=n_0+n_1$，$\boldsymbol{u}_\mathrm{e}=\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1$と書ける．このとき，電子に対する密度連続の式

$$\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(n_\mathrm{e}\boldsymbol{u}_\mathbf{e})=0 \tag{1}$$

は，

$$\boxed{\text{（ア）}}=0 \tag{2}$$

と変形できる．さらに直交座標系を考え，1 次の摂動が波数k並びに角周波数ωでx軸方向に伝播する縦波だとすると，$\boldsymbol{u}_1$並びに$\boldsymbol{E}_1$のy，z成分は無視できて，密度の摂動n_1，速度ならびに電場の摂動のx方向成分u_{1x}，E_{1x}に対して，

$$n_1=n_{1\mathrm{t}}\exp i(kx-\omega t) \tag{3}$$

$$u_{1x}=u_1\ \exp i(kx-\omega t) \tag{4}$$

$$E_{1x}=E_1\ \exp i(kx-\omega t) \tag{5}$$

と仮定できる．ここで，右辺の$n_{1\mathrm{t}}$，u_1，E_1は振幅と位相差を表す複素数である．

よって，密度連続の式は，

$$\boxed{\text{（イ）}}=0 \tag{6}$$

と線形化でき，

$$n_{1\mathrm{t}}=\boxed{\text{（ウ）}} \tag{7}$$

が得られる．また，真空の誘電率をε_0，電荷密度をρ，素電荷をe，イオンの数密度をn_iとするとき，ガウスの法則

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho=e(n_\mathrm{i}-n_\mathrm{e}) \tag{8}$$

から，電場についても同様に線形化して，

$$E_1=\boxed{\text{（エ）}} \tag{9}$$

が得られる．

ここで，熱運動の無い電子の運動について考える．磁場の効果を無視し，質量m_eの電子が周波数ν_cで衝突しエネルギーを失っていくとき，　運動方程式は

$$m_\mathrm{e} n_\mathrm{e}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{e}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}_\mathrm{e}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}_\mathrm{e}\right]=-en_\mathrm{e}\boldsymbol{E}-m_\mathrm{e}n_\mathrm{e}\nu_c\boldsymbol{u}_\mathrm{e} \tag{10}$$

と表される．

(i) 上記運動方程式について，2 次以降の摂動部分を省略し，線形化した方程式を示せ．

(ii) (i)で得られた線形化方程式を用いて，式(7)からu_1 を消去することで，$n_{1\mathrm{t}}$とE_1 の関係を角周波数ωや衝突周波数ν_cを用いて示せ．

(iii) プラズマの比誘電率ε_rを用いて，$\nabla\cdot(\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\boldsymbol{E})=0$が満たされるとき，プラズマの比誘電率を角周波数$\omega$，プラズマ振動数$\omega_\mathrm{p}$，衝突周波数$\nu_\mathrm{c}$を用いて示せ．

(iv) プラズマの電気伝導度σが$\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}=\varepsilon_0+i\frac{\sigma}{\omega}$で表されるとき，プラズマの電気伝導度を角周波数$\omega$，プラズマ振動数$\omega_\mathrm{p}$，衝突周波数$\nu_\mathrm{c}$，真空の誘電率$\varepsilon_0$を用いて示せ．

(v) ①$\omega>\omega_\mathrm{p}\gg\nu_c$，　②$\omega_\mathrm{p}>\omega\gg\nu_c$のそれぞれの場合について，(iii)の結果から示されるプラズマの電気的特性を簡潔に説明せよ．

専門用語の英訳

密度連続の式	equation of continuity
体積積分	volume integral
平衡	equilibrium
摂動	perturbation
誘電率	dielectric constant
電気伝導度	electric conductivity
角周波数	angular frequency
プラズマ振動数	plasma frequency
衝突周波数	collision frequency

【量子電子物性1】 解答は，桃色（5番）の解答用紙に記入すること.

次の文章を読み，下記の問いに答えよ.

[Ⅰ] x 軸方向の一次元ポテンシャル $U(x)$ の中で運動する質量 m の粒子に対する時間 t に依存する波動関数を $\psi(x,t)$ とすると，$\psi(x,t)$ が満たすべきシュレーディンガー方程式は，$\hbar = h/(2\pi)$（h はプランク定数）を用いて，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right]\psi(x,t) \qquad (1)$$

となる．この波動関数は $\psi(x,t) = \varphi(x)\phi(t)$ のように位置と時間の関数の積の形で表すことができ，これを使って式(1)を x と t について次のように変数分離することができる.

$$i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t) = [\quad ① \quad] \qquad (2)$$

このように変数分離された式が常に成立するためには，式(2)の各辺の値は x および t に依らない定数 E（ただし，E は正でエネルギー固有値である）に等しくなる必要がある. ここで, 右辺を E とおくと, $\varphi(x)$ に対する時間に依存しないシュレーディンガー方程式が得られる.

$U(x) = 0$ の自由空間を考えると，この時間に依存しないシュレーディンガー方程式は平面波型の 2 つの解，$\exp(ikx)$ および $\exp(-ikx)$ を持つ．ただし，k は正の実数で，E を用いて表すと $k =$ [②] となる．このとき，式(1)の一般解はこれら 2 つの解の一次結合として表すことができるので，複素定数 A および B を用いて，

$$\psi(x,t) = \{A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)\} \times [\quad ③ \quad] \qquad (3)$$

となる．この右辺を展開して得られる 2 つの項に対応する平面波の位相速度の大きさは同一で，[④] である．またその符号を考えると，前者は粒子が x の [㋐] 方向，後者は x の [㋑] 方向に進む平面波を表す.

[Ⅱ] 図 1-1 のような，領域Ⅰ（$x \le 0$）および領域Ⅲ（$a \le x$）で0，領域Ⅱ（$0 < x < a$）で正の値を有する一次元ポテンシャル $U(x)$ において, エネルギー ε を持った質量 m の粒子が領域Ⅰから領域Ⅱに向かって入射し，領域Ⅲへ透過する場合を考える.

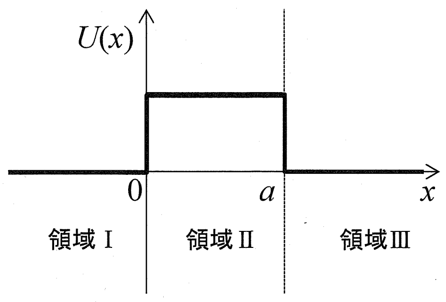

図 1-1

領域 I および III における粒子の波動関数をそれぞれ $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$，$\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ とし，これらを求めると，

$$\begin{cases}\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx) \\ \varphi_{\mathrm{III}}(x) = C\exp(ikx)\end{cases} \tag{4}$$

となる．ただし，A，B および C は複素定数であり，領域 II に対して粒子がそれぞれ，[　㋒　]，[　㋓　] および透過する確率振幅を表す．

このとき領域 I から領域 III へ粒子が透過する確率（透過率）T を求めるためには，領域 II での粒子の波動関数を考え，領域 I および III との境界条件を考える必要がある．領域 II 内での粒子の波動関数を $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ とすると，この波動関数が満たすべきシュレーディンガー方程式は 2 階微分方程式であるから，一般に独立な解が 2 つ存在する．これらを $f(x)$，$g(x)$ とすると，

$$f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2} - g(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = [\quad ⑤ \quad] \tag{5}$$

が成立する．よって，

$$\Delta = f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} - g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \tag{6}$$

を考えると，この行列式 Δ は一定であることが分かる．

また，領域 II における波動関数の一般解は $f(x)$，$g(x)$ の一次結合として表すことができるので，複素定数 F および G を用いて，

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = Ff(x) + Gg(x) \tag{7}$$

となる．ここで $x = 0$ における境界条件を考えると，F および G は行列式 Δ を使って，

$$F = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A+B & g(0) \\ ik(A-B) & g'(0) \end{vmatrix},\quad G = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(0) & A+B \\ f'(0) & ik(A-B) \end{vmatrix} \tag{8}$$

同様に，$x = a$ における境界条件を考えると，

$$F = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} [\quad ⑥ \quad] & g(a) \\ [\quad ⑦ \quad] & g'(a) \end{vmatrix},\quad G = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f(a) & [\quad ⑥ \quad] \\ f'(a) & [\quad ⑦ \quad] \end{vmatrix} \tag{9}$$

と表すことができる．ここで簡単のために $f(0)=0$ および $g'(0)=0$ の条件を満たすように $f(x)$，$g(x)$ を選ぶと，式(8)および式(9)より A は C を使って，

$$A=\frac{1}{2}\times [\quad ⑥ \quad] \times S \qquad (10)$$

と表すことができる．ただし，

$$S=\frac{1}{f'(0)}\times [\quad ⑧ \quad] + \frac{1}{g(0)}\times [\quad ⑨ \quad] \qquad (11)$$

で定義される．よって，透過率 T は以下の式で与えられる．

$$T=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\frac{[\quad ⑩ \quad]}{|S|^2} \qquad (12)$$

問 1　文章中の空欄［　①　］～［　⑩　］にあてはまる数式または数値を答えよ．

問 2　文章中の空欄［　㋐　］～［　㋓　］にあてはまる語句を答えよ．

問 3　式(6)の Δ が x に対して一定であることを示せ．

問 4　図 1-1 の領域Ⅱにおける $U(x)$ が一定のポテンシャル U_0（$<\varepsilon$）を持つときの粒子の透過率について考える．

1)　この条件で領域Ⅱでのシュレーディンガー方程式を解くと，

$f(x)=\sin\gamma x$，$g(x)=\cos\gamma x$ となる．ただし，$\gamma=\dfrac{\sqrt{2m(\varepsilon-U_0)}}{\hbar}$ である．

このとき，透過率 T を γ, k および a を使って表せ．

2)　$U_0<\varepsilon$ を満たすとき，古典力学では粒子の透過率は1となるが，量子力学では一般に1よりも小さくなる．$k=2/a$ のとき，$\varepsilon\to U_0$ の極限において上で求めた透過率 T の値を求めよ．

【量子電子物性2】 解答は，緑色（6番）の解答用紙に記入すること．

金属に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，素電荷をe，自由電子の質量をmで表す．$\hbar$はプランク定数hを2πで割った値である．

金属の簡単なモデルとして，一辺の長さがLである立方体の中の電子を考える．この電子の波動関数$\Psi(x,y,z)$は，ポテンシャルを0とするシュレーディンガー方程式で記述できる．ただし，電子間相互作用は無視する．ここで波動関数$\Psi(x,y,z)$に，$\Psi(x,y,z)=\Psi(x+L,y,z)=\Psi(x,y+L,z)=\Psi(x,y,z+L)$の条件を課す．これを［　㋐　］条件とよぶ．シュレーディンガー方程式の解は，波数を(k_x,k_y,k_z)として，$\Psi(x,y,z)=\exp\left(i[k_x x+k_y y+k_z z]\right)/\sqrt{L^3}$と表される．エネルギー固有値$\varepsilon(k_x,k_y,k_z)$は［　①　］と表される．［　㋐　］条件により，波数の成分k_j（$j=x,y,z$）は，整数$n_j=0,\pm1,\pm2\ldots$を使って，$k_j=$［　②　］となる．三次元自由電子の電子状態は，三次元の波数空間の中の点として表され，(k_x,k_y,k_z)で指定される．電子は［　㋑　］粒子であるから1つの電子状態にはスピンを考慮して2個の電子しか占有できない．これを［　㋒　］という．

絶対零度では結晶内の電子はエネルギーεが低い状態から，あるエネルギーε_{F}までの状態を占有する．このエネルギーε_{F}をフェルミエネルギー，それに対応する波数k_{F}をフェルミ波数とよぶ．三次元自由電子の場合，電子の状態は波数空間内において大きさkを持つ波数(k_x,k_y,k_z)で指定され，電子はk_{F}を半径とする球の中の状態を占有する．エネルギーがεから$\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$の間にある電子状態の数（単位体積当たり）を$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$と書くとき，$D(\varepsilon)$を状態密度とよぶ．ここで状態密度を求める．波数空間内で1つの電子状態が占有する体積は［　③　］である．εに対応する波数をkとし，kから$k+\mathrm{d}k$の球殻の体積は［　④　］$\mathrm{d}k$なので，$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$は，

$$D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{2}{L^3}\times\frac{[\quad ④\quad]}{[\quad ③\quad]}\times\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon \tag{1}$$

となる．右辺の最初の2はスピン自由度を表す．さらに自由電子のエネルギーεの関数として書き直し，質量mと$\hbar$を用いて状態密度$D(\varepsilon)$は

$$D(\varepsilon)=[\quad ⑤\quad] \tag{2}$$

と表される．

絶対零度での電子密度n_0は，k_{F}を半径とする球の中の電子状態の数から求めることができるので，n_0はk_{F}を用い，スピンも考慮して，

$$n_0=[\quad ⑥\quad] \tag{3}$$

となる．したがって，n_0とε_{F}の間の関係は，mと$\hbar$を用いて，

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=[\quad ⑦\quad] \tag{4}$$

と表される．この結果と式(2)を比べると，あるエネルギーεにおける状態密度$D(\varepsilon)$はε，ε_{F}，n_0を使

って，

$$D(\varepsilon) = [\quad ⑧ \quad] \tag{5}$$

という簡単な形になる．

絶対零度での電子密度は$n_0 = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$とも表すことができる．有限温度における電子密度$n$は，[　㋓　] 分布関数$f(\varepsilon)$と状態密度$D(\varepsilon)$を使って，

$$n = [\quad ⑨ \quad] \tag{6}$$

と表される．

次に，金属の有限温度における電気伝導度を自由電子モデルで考える．電子密度nで，電荷$-e$を持つ自由電子が外部電界中をドリフト速度$\mathbf{v}_\mathrm{d}$で運動するときの電流密度は [　⑩　] である．自由電子は外部電界によって加速されるが，ある確率でランダムな方向に散乱され，散乱直後の平均的な速度はゼロになるとする．平均散乱時間をτと定義すると，電気伝導度σは

$$\sigma = [\quad ⑪ \quad] \tag{7}$$

と表される．

問 1　文章中の空欄 [　㋐　] ～ [　㋓　] にあてはまる語句，および空欄 [　①　] ～ [　⑪　] にあてはまる数式を答えよ．

問 2　電子密度n_0が6.4×10^{28} $\mathrm{m^{-3}}$の場合について，フェルミエネルギーε_F [eV] を有効数字 1 桁で求めよ．ただし，$m = 9.1\times10^{-31}$ kg，$\hbar = 1.0\times10^{-34}$ J·s，$e = 1.6\times10^{-19}$ C，$(3\pi^2)^{2/3} \approx 10$とする．

問 3　絶対零度においてフェルミエネルギーε_Fまでに含まれている三次元自由電子の全エネルギーは$\dfrac{3}{5}n_0\varepsilon_\mathrm{F}$であることを示せ．

問 4　金属中での電子の散乱の要因として主な機構を 2 つ挙げよ．

問 5　二次元（2D）電子を考えた場合，電子は波数空間中のフェルミ波数k_F^2Dを半径とする円の中の状態を占有する．したがって二次元電子の状態密度$D^\mathrm{2D}(\varepsilon)$を求めるには，円周$2\pi k\,\mathrm{d}k$に含まれる状態を考えればよい．ただし，以下では温度が絶対零度の場合を考える．

1)　$D^\mathrm{2D}(\varepsilon)$を求め，$\varepsilon$の関数として図示せよ．

2)　k_F^2Dを二次元電子密度n_0^2Dを用いて表せ．

【量子電子物性3】 解答は，灰色（7番）の解答用紙に記入すること．

半導体に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，絶対温度をT，ボルツマン定数をk_{B}，素電荷をeで表す．ここでは，$k_{\mathrm{B}} = 1.38\times10^{-23}$ J/K，$e = 1.60\times10^{-19}$ C とする．

[I] 半導体に不純物を意図的に添加することを［ ㋐ ］とよぶ．［ ㋑ ］型構造をもつゲルマニウム結晶に［ ㋐ ］されたヒ素原子は，ゲルマニウム原子と置換して1原子あたり［ ① ］個の共有結合に寄与しない電子（ここでは余剰電子とよぶ）を生じる．ヒ素のように余剰電子を与える不純物原子をドナーとよび，共有結合電子が不足するような不純物原子を［ ㋒ ］とよぶ．半導体の価電子帯の電子が［ ㋒ ］に捕らえられると，価電子帯には空の準位が残される．この空の準位は価電子帯の他の準位の電子が遷移することによって次々に置き換わり，価電子帯を移動する．この空の準位は正電荷をもった粒子のように振る舞い，一般に［ ㋓ ］とよばれている．ドナーから供給される電子が電気伝導を担う半導体を［ ㋔ ］半導体，［ ㋓ ］が電気伝導を担う半導体を［ ㋕ ］半導体とよぶ．

いま，ゲルマニウム結晶において，［ ㋖ ］相互作用によって余剰電子を束縛しているドナーを水素類似原子とみなし，ボーアの水素原子モデルとの類似性に基づき，ドナーのイオン化エネルギー$\Delta\varepsilon_{\mathrm{D}}$を見積もる．基底状態にある水素原子のイオン化エネルギーを$\Delta\varepsilon_{\mathrm{H}}$，自由電子の質量を$m$，余剰電子の有効質量を$m^*$，静電界に対するゲルマニウムの比誘電率を$\kappa$とすると，

$$\Delta\varepsilon_{\mathrm{D}} = [\quad ② \quad] \times \Delta\varepsilon_{\mathrm{H}} \tag{1}$$

と表すことができる．ここでは有効質量，比誘電率の異方性は考慮しない．基底状態の水素原子のイオン化エネルギーを$\Delta\varepsilon_{\mathrm{H}} = 13.6$ eV，ゲルマニウムの比誘電率を$\kappa = 16.0$，余剰電子の有効質量を$m^* = 0.250m$とすると，ドナーのイオン化エネルギーは［ ③ ］meV と計算できる．熱エネルギーを$k_{\mathrm{B}}T$とすると，室温（$T = 300$ K）での熱エネルギーは［ ④ ］meV と計算できるため，先に求めたイオン化エネルギーとの比較によりゲルマニウム中のドナーは室温で［ ㋗ (a) ほとんどイオン化している，(b) 一部がイオン化している，(c) ほとんどイオン化していない ］と考えられる．

[II]［ ㋒ ］を含まず，ドナー密度がN_{D}である縮退していない［ ㋔ ］半導体を考える．ある温度Tにおける伝導帯の伝導電子密度をn，価電子帯の［ ㋓ ］密度をp，ドナーから伝導帯に熱励起された電子の密度をn_{D}，イオン化したドナー密度をN_{D}^{+}とする．ドナー準位を電子が占有している確率$f_{\mathrm{D}}(\varepsilon_{\mathrm{D}})$は，

$$f_{\mathrm{D}}(\varepsilon_{\mathrm{D}}) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{D}}-\varepsilon_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)} \tag{2}$$

と表される．ここで，ドナー準位をε_D，フェルミ準位をε_Fとする．式(2)を用いてn_Dは

$$n_D = N_D^+ = N_D\{1 - f_D(\varepsilon_D)\} \tag{3}$$

となる．電荷の中性条件より，n，p，N_D^+の間には次式が成立する．

$$n = [\quad ⑤ \quad] \tag{4}$$

伝導帯の下端のエネルギーをε_C，価電子帯の上端のエネルギーをε_V，伝導帯，価電子帯の有効状態密度をそれぞれN_C，N_Vとし，$\varepsilon_C - \varepsilon_F >> k_B T$，$\varepsilon_F - \varepsilon_V >> k_B T$と仮定すると，$n$と$p$は近似的にそれぞれ次のように表される．

$$n = [\quad ⑥ \quad] \tag{5}$$

$$p = [\quad ⑦ \quad] \tag{6}$$

また，式(4)は式(2)，(3)，(5)，(6)を用いて次のように表される．

$$[\quad ⑥ \quad] = [\quad ⑦ \quad] + N_D\left(\frac{1}{[\quad ⑧ \quad]}\right) \tag{7}$$

次に，以下の 3 つの温度領域（A，B，C）に分けて，伝導電子密度とフェルミ準位の温度依存性について考える．

A) 非常に温度が低く，伝導帯の電子はドナー準位からわずかに熱励起される電子のみで，価電子帯から熱励起される電子は無視できるほど少ない場合（$n \cong n_D = N_D^+ << N_D$），伝導電子密度は以下のように表される．

$$n \cong n_D = \sqrt{\frac{N_D N_C}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_D}{2k_B T}\right) \tag{8}$$

この温度領域のことを［　㋘　］領域という．特に$T \to 0$ K の極限では，フェルミ準位は［　㋙ (a) 伝導帯下端，(b) ドナー準位，(c) 伝導帯下端とドナー準位の中間　］に位置する．

B) もう少し温度が高くなり，ほとんどすべてのドナーがイオン化しているが，価電子帯から熱励起される電子はまだ無視できるほど少ない場合（$n \cong n_D \cong N_D$），伝導電子密度は温度変化に対して一定となる．また，このときのフェルミ準位は次のように表される．

$$\varepsilon_F \cong [\quad ⑨ \quad] \tag{9}$$

この温度領域を［　㋚　］領域という．

C) さらに高温になると，価電子帯からも電子が熱励起されるようになる．価電子帯からの励起が多くなり，ドナーから励起された電子の伝導電子密度への寄与が無視できるようになる場合（$n >> N_D$），伝導電子密度とフェルミ準位はそれぞれ次のように表される．

$$n = [\quad ⑩ \quad] \tag{10}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = [\quad ⑪ \quad] \tag{11}$$

この温度領域を［　㋛　］領域という．

問 1　文章中の空欄［　㋐　］～［　㋛　］にあてはまる語句を答えよ．ただし，［　㋗　］，［　㋙　］は，(a)～(c)の中から適切なものを一つ選ぶこと．

問 2　文章中の空欄［　①　］～［　⑪　］にあてはまる数式または数値を答えよ．ただし，［　③　］，［　④　］は端数を四捨五入し，有効数字 2 桁で解答すること．また，［　⑥　］～［　⑧　］は｛k_{B}，T，N_{C}，N_{V}，N_{D}，ε_{C}，ε_{V}，ε_{D}，ε_{F}｝の内から，［　⑨　］～［　⑪　］は｛k_{B}，T，N_{C}，N_{V}，N_{D}，ε_{C}，ε_{V}，ε_{D}｝の内からそれぞれ必要なものを用いて数式で示せ．

問 3　[Ⅱ] の文章中で述べたフェルミ準位の温度依存性を考える．図 3-1 を解答用紙に転記し，温度を絶対零度から温度領域 A, B, C と連続的に変化させていったときのフェルミ準位の変化の様子を，伝導帯下端 ε_{C}，価電子帯上端 ε_{V}，真性フェルミ準位 ε_{i}，ドナー準位 ε_{D} との相対的位置関係を明確にして描け．ただし，各温度領域の境界を明示する必要はない．また，バンドギャップエネルギーの温度依存性は考慮しなくてよい．

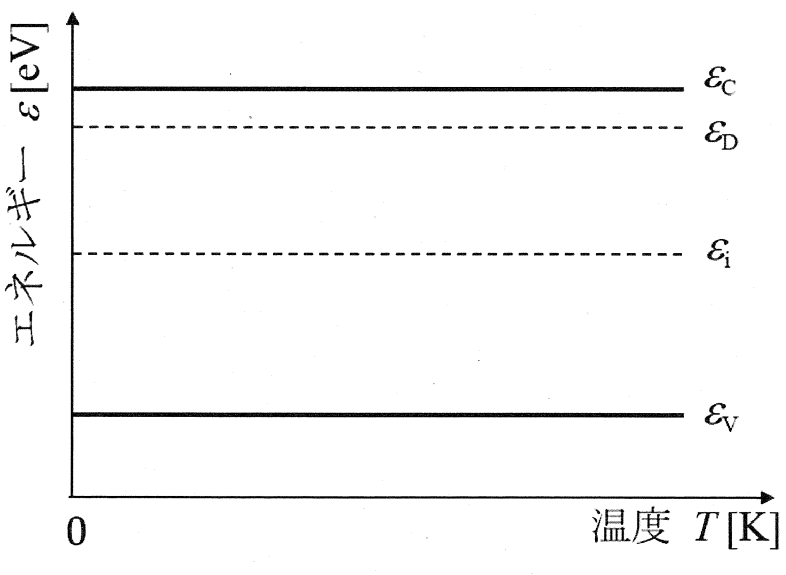

図 3-1

【量子電子物性4】 解答は，青色（8番）の解答用紙に記入すること.

磁性に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ.

[I] ある1個の原子またはイオンの中の電子系がもつ磁気モーメントを求めるには，全電子の軌道角運動量量子数Lとスピン角運動量量子数Sおよび全角運動量量子数Jを知らなければならない．原子内の電子は，主量子数n，方位量子数l，磁気量子数m_zおよびスピン量子数m_sによってその占有軌道が規定される．このとき，基底状態における電子配置は，次のフントの規則によって決まる.

（1）1つの量子状態（n，l，m_z，m_s）には1個の電子しか入りえなく，Sが［　①　］になるようにする.

（2）条件（1）を満たしたうえで，さらにLが最大になるように配置する.

（3）Jは，電子殻が半分以下占められているとき　$J=$［　②　］
　　電子殻が半分以上占められているとき　$J=$［　③　］
となる.

例えば，電子殻が半分占められているときは，$L=$［　④　］，$J=$［　⑤　］となる.

閉殻構造をもつHeやNe等の希ガスは，外部磁界が無い場合は磁気モーメントが［　⑥　］となり，磁界を印加してもわずかに［　⑦　］磁性を示すだけである.

［　⑧　］磁性体である α-Fe_2O_3 は正の磁化率をもつ.
α-Fe_2O_3の3価の鉄イオンFe^{3+}には3d軌道に5個の電子が存在する.
3d軌道は$n=$［　⑨　］，$l=$［　⑩　］であるから，m_zは［　⑪　］個の状態をもち，さらにスピンの自由度を含めると合計［　⑫　］個の電子状態をとることができる．つまり$S=$［　⑬　］，$L=$［　⑭　］，$J=$［　⑮　］が基底状態である.

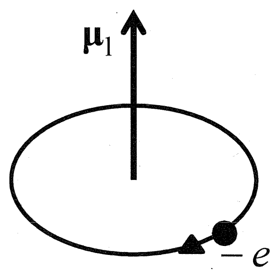

図 4-1

[II] 図4-1に示すように電荷$-e$ ($e>0$)，質量mの電子が半径rの円周上を角周波数ωで運動している場合を考える．この運動による環状電流Iの大きさ$|I|$は

$$|I| = [\quad ⑯ \quad] \tag{1}$$

となるため，「電流」と「環状電流の囲む面積」の積で決まる磁気モーメント$\boldsymbol{\mu}_1$の大きさ$|\boldsymbol{\mu}_1|$は，

$$|\boldsymbol{\mu}_1| = [\quad ⑰ \quad] \tag{2}$$

と求まる．電子の軌道角運動量$\mathbf{l}$の大きさ$|\mathbf{l}|$は

$$|\mathbf{l}| = [\quad ⑱ \quad] \tag{3}$$

となるので，$\boldsymbol{\mu}_1$は$\mathbf{l}$を用いて

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{l} = -\ [\quad ⑲ \quad]\ \mathbf{l} \tag{4}$$

と表される．古典論の立場から求めた式(4)は磁気モーメントと軌道角運動量の間に成り立つ関係式であり，量子論の立場から求めた場合にもそのまま成立する．

電子は $\mathbf{l}$ の他にスピン角運動量 $\mathbf{m}_\mathrm{s}$ を持っている．電子のスピンに起因する磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{s}$ と電子のスピン角運動量 $\mathbf{m}_\mathrm{s}$ との間には

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{s} = -\ [\quad ⑲ \quad]\ g\,\mathbf{m}_\mathrm{s} \tag{5}$$

の関係が成り立つ．ここで g は g 因子とよばれ，ほぼ 2 に等しい．

次に 1 つの原子あるいはイオン中に含まれるいくつかの電子による軌道運動とスピンによって生じる磁気モーメントについて考える．各電子の $\mathbf{l}$ と $\mathbf{m}_\mathrm{s}$ をそれぞれベクトル的に合成した軌道角運動量 $\hbar\mathbf{L}$ とスピン角運動量 $\hbar\mathbf{S}$ を用いて，全角運動量 $\hbar\mathbf{J}$ は,

$$\hbar\mathbf{J} = [\quad ⑳ \quad] \tag{6}$$

と表される．ただし，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数である．軌道角運動量 $\hbar\mathbf{L}$ とスピン角運動量 $\hbar\mathbf{S}$ の和に関係づけられる磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{m}$ は,

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{m} = -\ [\quad ⑲ \quad]\ \hbar(\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \tag{7}$$

となる．$\hbar\mathbf{L}$ と $\hbar\mathbf{S}$ が $\hbar\mathbf{J}$ の周りを歳差運動していることを考慮すると，$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{m}$ も $\hbar\mathbf{J}$ の周りを回っており，$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{m}$ は $\hbar\mathbf{J}$ に平行で時間変化のない部分と $\hbar\mathbf{J}$ に垂直で時間変化する部分とに分けることができる．一方，原子あるいはイオンの $\hbar\mathbf{J}$ に平行で時間変化のない磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}_\mathrm{J}$ は，ランデの g 因子 g_L を用いて

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{J} = -\ [\quad ⑲ \quad]\ g_\mathrm{L}\,\hbar\mathbf{J} \tag{8}$$

と書ける．式 (7)，(8)の両辺と $\mathbf{J}$ とのスカラー積をつくり，式(6)の関係より，g，$\mathbf{L}$，$\mathbf{S}$ を用いて

$$g_\mathrm{L}\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + [\quad ㉑ \quad] + [\quad ㉒ \quad]\ \mathbf{S}^2 \tag{9}$$

となる．$2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = (\mathbf{L}+\mathbf{S})^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2$ であることを利用すると，g_L は g，$\mathbf{S}^2$，$\mathbf{L}^2$，$\mathbf{J}^2$ を用いて

$$g_\mathrm{L} = [\quad ㉓ \quad] \tag{10}$$

と求まる．ここで，$\mathbf{S}^2$，$\mathbf{L}^2$，$\mathbf{J}^2$ の固有値がそれぞれ $S(S+1)$，$L(L+1)$，$J(J+1)$ であることから，$g = 2$ とすると，g_L は S，L，J を用いて

$$g_\mathrm{L} = \frac{3}{2} + [\quad ㉔ \quad] \tag{11}$$

で与えられる．

問 1 [I] の文章中の空欄［　①　］～［　⑮　］にあてはまる語句，数式または数値を答えよ．

問 2 [II] の文章中の空欄［　⑯　］～［　㉔　］にあてはまる数式を答えよ．

問 3 磁鉄鉱 Fe_3O_4 はフェリ磁性体であり，$FeO \cdot Fe_2O_3$ とも表されるように 2 価の Fe^{2+} と 3 価の Fe^{3+} イオンが 1 : 2 の割合で含まれている．Fe_3O_4 の 1 分子あたりの磁気モーメントの実測値が約 $4\mu_B$（μ_B : ボーア磁子）である理由を，全電子の軌道角運動量量子数 L とスピン角運動量量子数 S を用いて説明せよ．

問 4 不対電子をもち常磁性を示す物質の g 因子は，電子スピン共鳴（ESR）の実験から求めることができる．その原理を説明せよ．

問 5 初期状態で磁化 M を持たない強磁性体に，キュリー温度以下で磁化容易軸方向に外部磁界 H を加えた場合を考える．図 4-2 を解答用紙に転記し，強磁性体の特徴が分かるように，磁界 H と磁化 M の関係を示すグラフの概形を図示せよ．ただし，初期状態で $H = 0$ であるものとする．

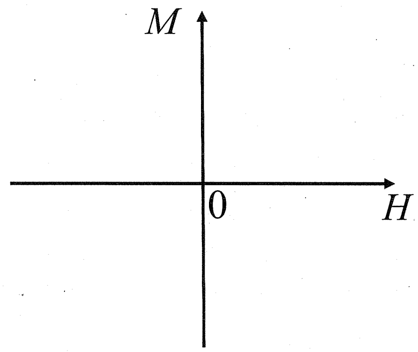

図 4-2

量子電子物性　単語の英訳

量子電子物性１

プランク定数：	Planck constant
一次元ポテンシャル：	one-dimensional potential
粒子：	particle
波動関数：	wavefunction
シュレーディンガー方程式：	Schrödinger equation
変数分離：	variable separation
エネルギー固有値：	energy eigenvalue
微分方程式：	differential equation
自由空間：	free space
一般解：	general solution
複素定数：	complex constant
平面波：	plane wave
位相速度：	phase velocity
透過率：	transmittance (or transmissivity)
2 階微分方程式：	second-order differential equation
行列式：	determinant
境界条件：	boundary condition
極限：	limit

量子電子物性２

プランク定数：	Planck constant
素電荷：	elementary charge
自由電子：	free electron
三次元の箱：	three-dimensional box
電子間相互作用：	electron-electron interaction
シュレーディンガー方程式：	Schrödinger equation
エネルギー固有値：	energy eigenvalue
波動関数：	wavefunction
波数：	wavenumber
波数空間：	wavenumber space
電子状態：	electronic state
占有する：	occupy
スピン：	spin
絶対零度：	absolute zero temperature
フェルミエネルギー：	Fermi energy

単位体積当たり：	per unit volume
状態密度：	density of states
球殻：	spherical shell
電子密度：	electron density
有限温度：	finite temperature
電気伝導度：	electrical conductivity
ドリフト速度：	drift velocity
電流密度：	current density
外部電界：	external electric field
散乱：	scattering
平均的な速度：	average velocity
平均散乱時間：	average scattering time
有効数字 1 桁：	one digit accuracy
散乱の要因：	scattering mechanisms
二次元電子：	two-dimensional electron
円周：	circumference of a circle

量子電子物性３

半導体：	semiconductor
絶対温度：	absolute temperature
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
素電荷：	elementary charge
不純物：	impurity
ゲルマニウム：	germanium
ヒ素：	arsenic
共有結合：	covalent bond
ドナー：	donor
価電子帯：	valence band
空の準位：	empty level
遷移：	transition
正電荷：	positive charge
電気伝導：	electric conduction
相互作用：	interaction
水素類似原子：	hydrogen-like atom
ボーアの水素原子モデル：	Bohr’s model of hydrogen atom
イオン化エネルギー：	ionization energy
基底状態：	ground state
自由電子：	free electron

有効質量：	effective mass
静電界：	electrostatic field
比誘電率：	relative permittivity
異方性：	anisotropy
熱エネルギー：	thermal energy
縮退していない：	non-degenerated
伝導帯：	conduction band
伝導電子：	conduction electron
熱励起：	thermal excitation
占有している確率：	occupancy probability
有効状態密度：	effective density of states
フェルミ準位：	Fermi level
有効数字２桁：	two digit accuracy
真性フェルミ準位：	intrinsic Fermi level

量子電子物性４

磁性：	magnetism
軌道角運動量：	orbital angular momentum
スピン角運動量：	spin angular momentum
全角運動量：	total angular momentum
量子数：	quantum number
主量子数：	principal quantum number
方位量子数：	azimuthal quantum number
磁気量子数：	magnetic quantum number
スピン量子数：	spin quantum number
基底状態：	ground state
電子配置：	electron configuration
フントの規則：	Hund rules
磁界：	magnetic field
磁性体：	magnetic substance
角周波数：	angular frequency
磁気モーメント：	magnetic moment
g 因子：	g-factor
ランデ：	Landé
ボーア磁子：	Bohr magneton
電子スピン共鳴：	electron spin resonance
磁化：	magnetization

【信号処理】解答は，だいだい色の解答用紙に記入すること．

線形時不変な離散時間信号処理システム Q，R を図 1 のブロック線図のように構成する．ただし $x[n]$，$y[n]$ は各システムへの入力信号および出力信号であり，n は時刻を表す整数である．また，図中の ⊕ は加算器を，$\boxed{\mathrm{D}}$ は単位遅延器を，▷ は係数乗算器を表し，その定義は図 2 の通りである．信号処理システム Q，R の伝達関数をそれぞれ $H^{Q}(z)$，$H^{R}(z)$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，本問における伝達関数は z 変換により定義されるものとする．

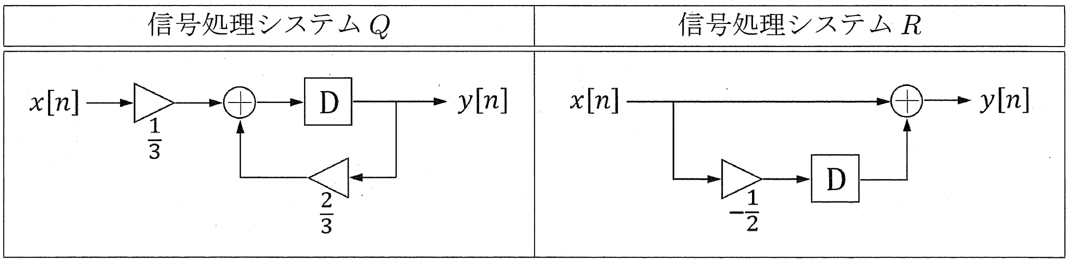

図 1: 離散時間信号処理システム Q，R のブロック線図

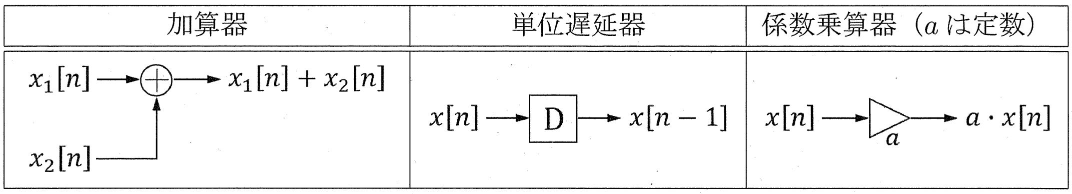

図 2: 加算器，単位遅延器，係数乗算器の定義

(i) Q および R を表す入出力差分方程式を求め，それをもとに Q，R の因果性を議論せよ．

(ii) $H^{Q}(z)$ および $H^{R}(z)$ を求めよ．

(iii) R の周波数応答を求めよ．

(iv) Q のインパルス応答を求めよ．

次に，図 1 の Q，R を用いて，線形時不変な離散時間信号処理システム L_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を図 3 のように再帰的に構成する．L_k の伝達関数を $H_k^{L}(z)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

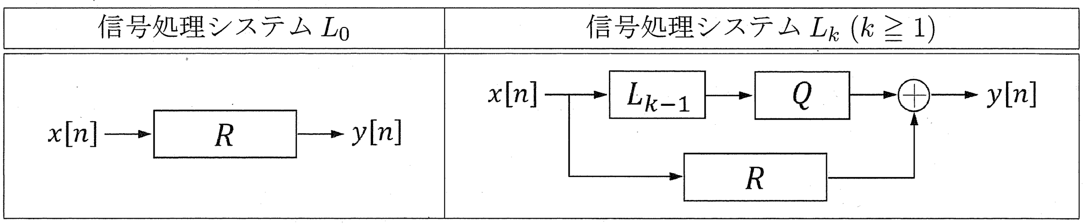

図 3: 離散時間信号処理システム L_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ の再帰的構成

(v) $k \geqq 1$ のとき，$H^{Q}(z)$，$H^{R}(z)$，$H_{k-1}^{L}(z)$ を用いて $H_k^{L}(z)$ を表せ．

(vi) 任意の $k \geqq 0$ に対し

$$H_k^{L}(z) = \frac{(2z-1)\{(3z-2)^{k+1}-1\}}{6z(z-1)(3z-2)^{k}}$$

となることを示し，それに基づいて，$H_k^{L}(z)$ の極と零点を z 平面上に図示するとともに L_k の有界入力有界出力安定性を議論せよ．

専門用語の英訳	
線形時不変	linear time-invariant
離散時間信号処理システム	discrete-time signal processing system
ブロック線図	block diagram
入力信号	input signal
出力信号	output signal
加算器	adder
単位遅延器	unit delay
係数乗算器	scalar multiplier
伝達関数	transfer function
z 変換	z transform
入出力差分方程式	input-output difference equation
因果性	causality
周波数応答	frequency response
インパルス応答	impulse response
再帰的	recursive
極	pole
零点	zero
z 平面	z plane
有界入力有界出力安定性	bounded-input bounded-output stablity