平成 18 年 8 月 21 日（月）
13:00 〜 15:00

平成 19 年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。解答は

問題 1　を　1 枚目（白色）の解答用紙
問題 2　を　2 枚目（赤色）の解答用紙
問題 3　を　3 枚目（青色）の解答用紙
問題 4　を　4 枚目（黄色）の解答用紙
問題 5　を　5 枚目（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 20 点であり、合計 100 点である。

●問題紙は表紙を含めて 6 枚である。

問題１（２０点）

(a)次の連立方程式を逆行列を求めることにより解け。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) ω を１の立方根の一つ $\omega = e^{2\pi i/3}$ とする。このとき次の行列式の値を求めよ。

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \omega & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$$

問題２（２０点）

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (n \neq 0, 1 \text{ の自然数})$$

は変換 $z = y^{1-n}$ によって、線形微分方程式

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

に導かれる。ここで、y, $P(x)$ および $Q(x)$ はそれぞれ x の関数、また y' は y の１階微分を示している。これを利用して、下記の１階常微分方程式を解け。

$$(1-x^2)y' - xy = 2xy^2 \quad .$$

問題３（20 点）

複素平面上の変数 z（$z = x + iy$）について以下の設問に答えよ。

(a) 次式を証明せよ。ただし、ln は自然対数を表し、n は整数である。

$$\ln i = \left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi i$$

(b) 次の積分の値を求めよ。ただし、C_1 は a を中心とする円周上であり、m は正の整数とする。

$$\int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^m}\, dz$$

(c) 積分路 C_2 を図１のようにとり、次の積分の値を求めよ。

$$\int_{C_2} \frac{1}{(z+1)(z+3)}\, dz$$

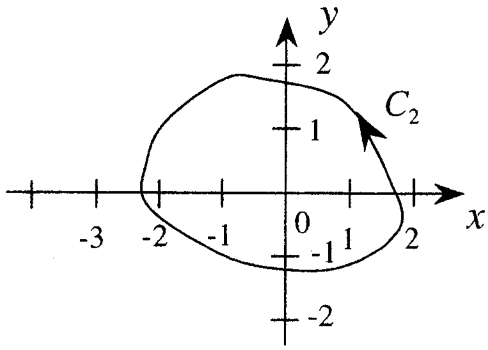

図１

問題 4　(20 点)

周期 2π を持つ周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数を

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と表すとき、以下の問に答えよ。

(a)　次の周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0, & (-\pi < x \leqq 0) \\ x, & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}, \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

(b)　(a) の結果を用いて、次の無限級数の和 S の値を求めよ。

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

問題５（２０点）

(a) $f(t) = t^n$ $(n = 1, 2, ...)$ のラプラス変換 $L[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ を数学的帰納法を用いて求めたい．$L[t^n](s)$と $L[t^{n-1}](s)$の関係を求めよ．

(b) n=1 のときのラプラス変換を定義式から求め, (a)の結果から$L[t^n](s)$を求めよ．

(c) ラプラス変換の定義式と上の結果を利用して以下の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-\alpha t} dt \qquad (ただし，\alpha > 0)$$

(d) ラプラス変換を用いて，次の $g(t)$に関する方程式を解け．

$$g(t) = \beta t^2 + \int_0^t \sin(t-\tau) g(\tau)\ d\tau \qquad (\beta > 0)$$