

第3問

コインが12個ある。12個のうち、他のコインと重さが異なる偽コインが1つ含まれている可能性がある。すなわち、コインがとり得る状態は以下の25通りであり、すべての状態は同一の発生確率を有するものとする。

- 12個のコインのうち1つのコインが重い
- 12個のコインのうち1つのコインが軽い
- すべてのコインの重さが等しい

天秤を複数回用いて、偽コインが含まれているか否かを明らかにし、偽コインが含まれている場合には偽コインを特定し、それが重いか軽いかを明らかにしたい。

- (1) 天秤は「釣り合っている」「左の皿が軽い」「右の皿が軽い」の3通りの状態をとる。これらの3状態の発生確率が同一であるとしたとき、天秤を1回用いることで得られる情報量を求めよ。
- (2) 12個のコインの中から、偽コインがあれば、それを特定し、偽コインが重いか軽いかを明らかにするために必要な情報量を求めよ。
- (3) 偽コインがあれば、それを特定し、偽コインが重いか軽いかを明らかにするために利用する天秤の回数について、(1)と(2)の結果から言えることを具体的に説明せよ。

天秤の左右の皿にそれぞれ m ($m = 1, 2, \dots, 6$) 個のコインをのせて、重さを比べたときに得られる相互情報量 $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$ について考える。ここで、 X を12個のコインの状態を示す確率変数、 Y を天秤で重さを比べたときの結果を示す確率変数 ($Y = B$: 釣り合っている, $Y = L$: 左の皿が軽い, $Y = R$: 右の皿が軽い) とする。なお、 $H(X)$ は、(2)で求めた情報量である。また、 $H(X|Y)$ は条件付エントロピーである。

- (4) $H(X|Y)$ を、 $\Pr(Y = L)$, $\Pr(Y = R)$, $\Pr(Y = B)$, $H(X|Y = L)$, $H(X|Y = R)$, $H(X|Y = B)$ を用いて示せ。ここで、 $\Pr(A)$ は事象 A の発生確率である。
- (5) $\Pr(Y = L) = \frac{2m}{25}$, $\Pr(Y = B) = 1 - \frac{4m}{25}$ となることを導け。
- (6) $H(X|Y = L) = \log_2 2m = 1 + \log_2 m$, $H(X|Y = B) = \log_2 (25 - 4m)$ となることを導け。
- (7) (4), (5), (6) より、 $I(X; Y)$ を求めることができる。第1回目の天秤を用いた比較で左右の皿のそれぞれにのせるコインの個数について、 $I(X; Y)$ から言えることを具体的に説明せよ。

Problem 3

Suppose that we have 12 coins, among which there may or may not be one counterfeit coin. If there is a counterfeit coin, it may be either heavier or lighter than the other coins. There are 25 possible outcomes as follows, and the occurrence probabilities of all possible outcomes are equal.

- One of the 12 coins is heavier.
- One of the 12 coins is lighter.
- They are all of equal weight.

Using a balance several times, we wish to identify the counterfeit coin if any, and to judge if it is heavier or lighter.

- (1) Each measurement by the balance has three possible outcomes: balanced, left pan lighter, or right pan lighter. If we assume that the occurrence probabilities of these three possible outcomes are equal, determine the amount of information obtained from each measurement.
- (2) What is the amount of information necessary to identify the counterfeit coin if any, and to judge if it is heavier or lighter?
- (3) Explain in detail how we use the results of (1) and (2) to determine the number of measurements necessary to identify the counterfeit coin if any, and to judge if it is heavier or lighter.

Suppose that we weigh m ($m = 1, 2, \dots, 6$) coins against other m coins using the balance. Let X be a random variable describing the possible outcomes of 12 coins, and let Y be a random variable describing the outcome of the measurement, where $Y = B$ means balanced, $Y = L$ means the left pan is lighter, and $Y = R$ means the right pan is lighter. We would like to consider the amount of mutual information $I(X; Y) = H(X) - H(X | Y)$ obtained from the measurement. Note that $H(X)$ is the amount of information obtained in (2), and that $H(X | Y)$ is the conditional entropy.

- (4) Write $H(X | Y)$ as a function of $\Pr(Y = L)$, $\Pr(Y = R)$, $\Pr(Y = B)$, $H(X | Y = L)$, $H(X | Y = R)$, and $H(X | Y = B)$. Here, $\Pr(A)$ is the occurrence probability of an event A .
- (5) Show $\Pr(Y = L) = \frac{2m}{25}$ and $\Pr(Y = B) = 1 - \frac{4m}{25}$.
- (6) Show $H(X | Y = L) = \log_2 2m = 1 + \log_2 m$ and $H(X | Y = B) = \log_2 (25 - 4m)$.
- (7) We can calculate $I(X; Y)$ from the results of (4), (5), and (6). Explain in detail how we use $I(X; Y)$ to determine the number of coins put on each pan in the first measurement.