平成２９年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　礎

（平成２８年8月２３日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．５問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

1

(1) 関数 $f(x,y)=\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{2y}{3}$ （$-\pi<x<\pi,\ -\pi<y<\pi$）について，以下の問いに答えよ．

1) 関数 $f(x,y)$ の x，y についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ と表し，第２次偏導関数を $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ と表すとき，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる点 (x,y) をすべて求めよ．

2) 問 1)で求めた各点が極大値をとるか，極小値をとるか，あるいは極大値も極小値もとらないか，判定せよ．なお，極大値または極小値をとる場合には，その値を求めよ．

3) x 軸，y 軸，z 軸からなる三次元直交座標系（デカルト座標系）における曲面 $z=f(x,y)$ を考える．点 $\mathrm{O}(x,y,z)=\mathrm{O}(0,0,0)$ におけるこの曲面の法線を求めよ．

(2) x 軸，y 軸からなる二次元直交座標系（デカルト座標系）に互いに異なる点 $\mathrm{a}_1(x_1,y_1)$，…，$\mathrm{a}_n(x_n,y_n)$（nは２以上の整数）があるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}\right)^2$ の極値を与えるこの座標系上の点 $\mathrm{p}(x_\mathrm{p},y_\mathrm{p})$ を求め，また，その値が極小であることを証明せよ．

ここで，$\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}$ は，点 $\mathrm{a}_k(x_k,y_k)$ から点 $\mathrm{p}(x_\mathrm{p},y_\mathrm{p})$ までの線分の長さ，つまり，$\overline{\mathrm{a}_k\mathrm{p}}=\sqrt{(x_k-x_\mathrm{p})^2+(y_k-y_\mathrm{p})^2}$ で与えられるものとする．

2

2 次の正方行列 $\boldsymbol{M}$ を以下の関係を満足する行列とする．

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

また，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ とする．ただし，$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{M}$ の転置行列である．以下の問いに答えよ．その際，2 重根号があらわれても，それを外す必要はない．

(1) $\boldsymbol{M}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{M}^4+a\boldsymbol{M}^3+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}+b\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ を満足する a，b を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{O}$ はそれぞれ 2 次の単位行列，零行列である．

(4) $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(5) 二次元直交座標系における 4 点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_D=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とする．さらに，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_A$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_B$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_C$，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_D$ を位置ベクトルとする点をそれぞれ A′，B′，C′，D′ とする．このとき，四角形 A′B′C′D′ の面積を求めよ．

(6) $\boldsymbol{P}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(7) $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ を満足する直交行列 $\boldsymbol{U}$ と対角行列 $\boldsymbol{S}$ を求めよ．

(8) $\boldsymbol{x}$ を 2 次元ベクトルとする．$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に対するスカラー値関数 $f(\boldsymbol{x})$ を以下のように定める．

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

このとき，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}+4y^3-y=0$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{dy}{dx}=xy+y^2$$

ヒント：$u=y/x$とする.

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=4\sin 4x$$

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=4xe^{-x}$$

ヒント：特解を $y=(ax+b)e^{-x}$ とする.

4

真空の誘電率をε_0とする．以下の問いに答えよ．

(1) 真空中のxy平面上に置かれた太さを無視できる円形の導線に電荷$Q\ (>0)$が一様に分布している．円の中心Oを原点，円の半径をa，円に垂直な軸をz軸とする．

1) 原点Oからみて微小角$d\theta$をなす微小円弧上にある電荷量を求めよ．

2) z軸上の任意の点P（OP=z）において，円形の導線によって作られる電位ϕ_1を求めよ．ただし，電位の基準点を無限遠とする．電場から先に求めてはいけない．

3) 2)の結果を用いて，点Pにおける電場E_1の大きさを求めよ．

(2) 真空中のyz平面上で$x=0$の位置に無限に広がる薄い平板に，単位面積あたりσ（>0）の電荷が一様に分布している．

1) 平板から距離x（>0）の点における電場E_2の大きさを求めよ．

2) 1)の結果を用いて，平板から距離x（>0）の点における，$x=0$の位置との電位差ϕ_2を求めよ．

3) ϕ_2を縦軸に，xを横軸にとって，$x\geq 0$および$x<0$の両領域について電位差ϕ_2を図示せよ．

5

(1) 図 1 に示すように，x方向に流れる電流I_1を考える．A から B までの部分の電流が，この電流からz方向に距離Rだけ離れた点 P において作る磁束密度の大きさを求めよ．ただし，点 P と A, B を結んだ直線と電流のなす角をそれぞれθ_1，θ_2とする．
[補足]ビオ・サバールの法則：電流I_1が流れているとき，図 1 に示すように原点 O からx 軸方向に距離sだけ離れた位置における電流素分$I_1\boldsymbol{ds}$によって，角度θ，距離$|\boldsymbol{r}|$だけ離れた点 P に生ずる磁束密度$d\boldsymbol{B}$は$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$で与えられる．$\mu_0$は真空の透磁率である．

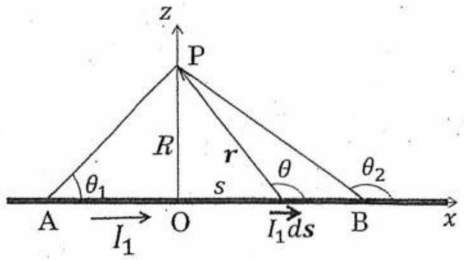

図 1

(2) 問(1)の結果を用いて，$\pm x$方向に無限に長い直線電流が点 P において作る磁束密度の大きさBが，$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$になることを示せ．

(3) 図 2 に示すように，問(2)で考えた無限に長いx方向の電流が，さらにy方向にシート状に広がっているとする．この電流シートのy方向の単位長さあたりの電流密度をJ_1とし，電流シートのz方向の厚さは無視できるとする．原点 O からy軸上で距離yだけ離れた点 Q の位置にある幅dyの電流が，電流シートからz軸上で距離Rだけ離れた点 P に作る磁束密度の大きさを求めよ．ただし，直線 PQ と電流シートのなす角をφとし，このφを含む形で磁束密度の大きさを表せ．

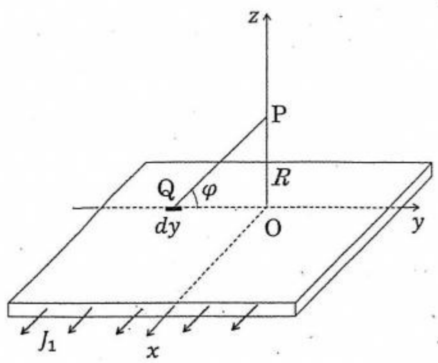

図 2

(4) 問(3)の結果を用いて，このシート電流の幅が$\pm y$方向に無限大になったときの点 P における磁束密度の大きさと向きを求めよ．

(5) 図 3 に示すように，問(4)で考えたxy平面上の無限大のシート電流の中に，長方形の電流回路 ABCD を，辺 BC をz軸上に，回路の半分がシートの上，もう半分がシートの下になるように，xz 平面と平行に置く．この回路には A→B→C→D→A の方向に電流I_2が流れている．回路の一辺の大きさを，AB=CD=a，BC=DA=bとする．このとき，回路 ABCD 全体にかかる力とその方向を求めよ．ただし，回路 ABCD とシート電流の間は絶縁されており，回路の導線の太さは無視でき，この回路によりシート電流は妨げられないとする．

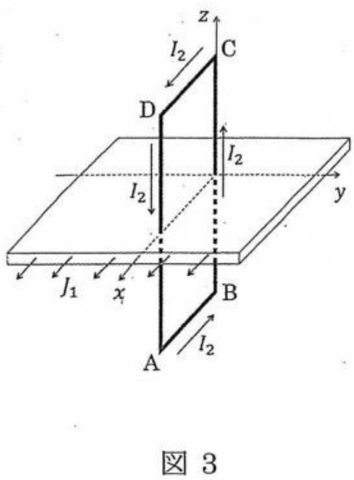

図 3