# 平成 27 年度大学院博士前期課程入学試験

# 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

# 専門科目試験問題

(先進電磁エネルギーエ学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

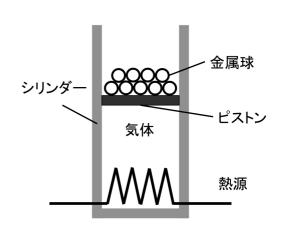
#### 【注 意 事 項】

- 1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて26ページある、解答開始の指示があるまで開いてはいけない、解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること、
- 2. 試験問題は、「熱・統計力学」、「電磁気工学 1」、「電磁気工学 2」、「量子電子物性 1」、「量子電子物性 2」、「量子電子物性 3」、「量子電子物性 4」、「制御工学 1」、及び、「制御工学 2」、の全部で 9 題あり、この順番に綴じられている、このうち、3 題を選択し解答すること.
- 3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと.
- 4. 問題用紙は持ち帰ってもよい.

#### 【熱・統計力学】 解答は、 青色(1番)の解答用紙に記入すること.

以下の文章中の(ア)、(ウ)~(シ)、(セ)に適切な語句または文字式を、(イ)と(ス)には数値を 記入せよ. また、(ソ)には文章を記述せよ.

右図のように、nモルの理想気体がピストン付きシリンダーに閉じ込められており、ピストンの上には微小金属球が複数のせられている。ピストンは滑らかに動くとともにその重量は無視でき、閉じ込められた気体の圧力によってピストンに働く上向きの力は、この金属球による下向きの力と等しいとする。重力加速度はg、ピストンの面積はAとする。ピス



トンとシリンダーは断熱されているが、底部にある熱源を通して気体と熱のやり取りができる。気体分子 1 つの質量はmであり、アボガドロ数は $N_A$ 、気体定数はRとする。必要に応じて、理想気体の状態方程式、および以下の積分公式(aは正の定数、kは正の整数)を用いること。

$$\int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-ax^{2}} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^{k+1} a^{k}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
 (1)

今,ピストン上の全金属球の質量がM,熱源の温度がTの時にピストンが静止した。この状態から,適切に金属球の数を増やしつつ熱源の温度を (r) と,ピストンの位置を変えること無く気体の状態を変化させることができた。このとき気体がなした仕事Wは (d) であり,熱力学の第一法則によれば (d) と (x) が等しい。また,気体の温度Tを一定に保ったまま,全金属球の質量を $M=M_i$ から  $M_f$ まで減らしたときにはピストンが上昇し,この気体がなした仕事Wは

と表せる. ここで気体がなす外向きの仕事を正とする.

このシリンダー内の気体分子の速度分布は、マクスウェルの速度分布則

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{mN_A}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-mN_A v^2}{2RT}\right)$$
(3)

に従うとすると、二乗平均速度 $\overline{v^2}$ は

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty \qquad (\pi) \qquad dv \qquad (4)$$

で表され,これを解くと $\overline{v^2}$  = (キ) となる.したがって,平方二乗平均速度は $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$  となる.

ここで速さ $v_{rms}$ のある分子が微小時間 $\Delta t$ の間に進む距離は (ク) である.この注目する分子を半径dの球とし、残りの標的となる分子が質点かつ静止しているという最も簡単なモデルを考える.この注目した分子が時間 $\Delta t$ 中に他の分子と衝突する回数 $\tau$ は、この分子が時間 $\Delta t$ 中に進んだ体積中に存在する標的分子の数と等価であり

$$\tau = \boxed{ (\mathcal{T}) } \tag{5}$$

となる. したがって、各衝突間に分子が進む平均的な距離、すなわち平均自由行程λの近似解λ'について

$$\lambda = \frac{3}{4}\lambda' \tag{7}$$

となり、平均自由行程は式(6)で求めた近似解より小さくなることがわかる。そして、全分子の速度が 等速ではなくマクスウェルの速度分布則に従うとすると最終的に

$$\lambda = \boxed{(z) \quad \lambda'} \tag{8}$$

を得る.

ピストン上の金属球の個数を変化させずにシリンダー内の温度をゆっくりと (セ) と, ピスト

ンの位置がそれに伴って下がったが、ある温度の領域でピストンの位置が変化しなくなった.この理由 について、以下に示されたキーワードのいずれかを用いて説明せよ.

(ソ) キーワード:吸熱反応もしくは発熱反応

#### 専門用語の英訳

理想気体 ideal gas

気体定数 gas constant

状態方程式equation of state平方二乗平均root mean square

平均自由行程 mean free path

吸熱反応 endothermic reaction 発熱反応 exothermic reaction

#### 【電磁気工学1】 解答は、黄色(2番)の解答用紙に記入すること、

問1~3に答えなさい.

問 1 以下の文章を読んで、(ア)、(イ)、(ク)、(ケ)には適切な語句を、(ウ)、(エ)、(オ)、(キ)、(コ)には適当な文字式を、(カ)には適当な数値を記入せよ.

電子とイオンが一様に分布している2成分プラズマを考える.電子が一様な分布から変位したとすると、電子を元の位置に引き戻す方向に電場が生じ、電子は特性的な周波数で平衡位置を中心に振動する.この振動は非常に速く、イオンはその振動場に応答できず動かないと考えられる.このような振動は、熱運動があると、波として伝搬する.この波を (ア) と呼ぶ.

イオンの運動を無視すると、電子の運動方程式ならびに連続の式は、素電荷をeとして、電子の質量 $m_e$ 、数密度 $n_e$ 、流速 $v_e$ 、電場E、磁場B並びに圧力 $p_e$ を用いて、

$$m_e n_e \left[ \frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_e \cdot \nabla) v_e \right] = -e n_e (\mathbf{E} + v_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e$$
 (1)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e v_e) = 0 \tag{2}$$

と表される. 一様なプラズマを仮定し、平衡時に電場、磁場がないとして線形化して、2次以降の項を 省略する. 平衡の部分を添字0で示し、1次の摂動部分を添字1で示すと、

 $n_e=n_0+n_1,\; \pmb{v}_e=\pmb{v_1},\; \pmb{E}=\pmb{E_1}$ となる。ローレンツ力の項は省略されて、式(1)並びに(2)は

$$m_e n_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -e n_0 \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{\nabla} p_e \tag{3}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 v_1) = 0 \tag{4}$$

と表される. 断熱的であると仮定すると, 圧力勾配は0次の温度  $T_0$ を用い,

$$\nabla p_e = \gamma k_B T_0 \nabla n_1 \tag{5}$$

と表される.  $k_B$  はボルツマン定数,  $\gamma$ は (イ) である.

1次の擾乱が波数 k 並びに角振動数  $\omega$  で、x軸方向に伝搬する縦波だとすると、 $v_1$ 並びに $E_1$ のz,y成

分は無視できて、密度の擾乱 $n_1$ 、速度並びに電場のx方向成分 $v_{1x}$ 、 $E_{1x}$  に対して、

$$n_1 = n_{1t} \exp i \left( kx - \omega t \right) \tag{6}$$

$$v_{1x} = v_1 \exp i \left( kx - \omega t \right) \tag{7}$$

$$E_{1x} = E_1 \exp i (kx - \omega t) \tag{8}$$

と仮定することができて、式(3)並びに(4)は,

$$-i\omega m_e n_0 v_1 = -e n_0 E_1 - \gamma k_B T_0 i k n_{1t} \tag{9}$$

$$-i\omega n_{1t} + ikn_0 v_1 = 0 \tag{10}$$

と書き換えられる.  $n_{1t}$ は、密度擾乱の振幅を表す. また、ガウスの法則

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -e n_1 \tag{11}$$

は,

となる. ここで、i は虚数単位、 $\epsilon_0$ は真空の誘電率である. 式 (9) より、 $n_{1t}$ と $E_1$ を消去して、

$$-i\omega m_e n_0 v_1 = \boxed{ (\bot) } -\gamma k_B T_0 i k \frac{k n_0 v_1}{\omega}$$
 (13)

が得られる。式(13)が、0でない $v_1$ に対して成立するためには、

$$\omega^2 = \boxed{(1)} + \frac{\gamma k_B T_0 k^2}{m_e} \tag{14}$$

でなければならない. 1 次元で考えると,  $\gamma = \boxed{ (力) }$  となるので, $\omega_p^2 = \boxed{ (オ) }$  並びに熱速度

 $v_{th} = \sqrt{\frac{2k_BT_0}{m_e}}$  を用いて式 (14) は

$$\omega^2 = (15)$$

と表される. これを Bohm-Gross (p) 式と呼ぶ. また, 角周波数 $\omega_p$ のことを (f) と呼ぶ.

式(15)より、この波の群速度  $v_g$  は、k,  $\omega$ ,  $v_{th}$ を用いて、

$$v_g = \boxed{(\beth)} \tag{16}$$

と表される.

問2 プラズマ中を伝搬する電磁波のファラデー回転とその機構を200字以内で説明せよ.

問3 空間的に強度が変化する電磁波は、強度の勾配に比例し周波数の2乗に反比例する平均的な力をプラズマに及ぼす。この力を何と呼ぶか。また、この力はプラズマ中を伝搬するレーザービームにどのような効果を及ぼすかを100字以内で説明せよ。

#### 以上

#### 専門用語の英訳

ボルツマン定数	Boltzmann constant,	断熱的	adiabatic,
電磁波	electromagnetic wave,	圧力勾配	pressure gradient,
擾乱	fluctuation,	伝搬	propagation,
摂動	perturbation,	熱速度	thermal velocity,
群速度	group velocity,	角周波数	angular frequency,
位相速度	phase velocity,	ファラデー回転	Faraday rotation.

#### 【電磁気工学2】 解答は、水色(3番)の解答用紙に記入すること.

以下の文章を読んで、(r) ~ (r) 、(r) 、(r) に適切な文字式を、(r) には語句を記入し、(r) に は選択肢の中から正しい語句を選択せよ. また、設問1,2に答えよ.

1個のイオン[質量M (> 0)、電荷q(> 0)]が一様な磁場B中を移動するとき、どのように振る舞うかを考 える. イオンの運動方程式は速度をvとして,

$$M\frac{dv}{dt} = \boxed{ (\mathcal{V})} \tag{1}$$

である.

ここで、直角座標系を設定し、 $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ をそれぞれx方向、y方向、z方向の単位ベクトルとする. z方向を 磁場方向にとる( $B = Bi_z$ )と、各方向成分に対して運動方程式が得られる.

$$M\frac{dv_x}{dt} = \boxed{ ( ) } \tag{2}$$

$$M\frac{dv_x}{dt} = \boxed{ (1) }$$

$$M\frac{dv_y}{dt} = \boxed{ (1) }$$
(2)

$$M\frac{dv_z}{dt} = 0 (4)$$

また、(2)、(3)式の両辺をtで微分し変数変換すると、それぞれ $v_x$ 、 $v_y$ についての 2 次の微分方程式が得られ る.

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \boxed{ \qquad (\pm) } \tag{5}$$

これは、xy平面上に投影されたイオンの運動が円運動となることを表している。この時の角周波数 $\omega_c$ は、

$$\omega_c = | (\mathfrak{D})$$
 (7)

で表される.  $v_x, v_y$ について解くと, Bに垂直な平面での速さを $v_\bot$ として,

$$v_{\chi} = v_{\perp} e^{(i\omega_c t + \delta_{\chi})} \tag{8}$$

$$v_{y} = v_{\perp} e^{(i\omega_{c}t + \delta_{y})} \tag{9}$$

となる. iは虚数単位である. 位相 $\delta_x$ を適当に選ぶと,

$$v_{x} = v_{\perp} e^{i\omega_{c}t} = \frac{dx}{dt} \tag{10}$$

とおける. (10)式をtで微分し(2)式に代入すると,

$$v_y = (\ddagger) = \frac{dy}{dt} \tag{11}$$

が得られる. 積分すると,

$$x - x_0 = \boxed{ (\mathcal{T}) }$$

$$y - y_0 = \boxed{ (\mathcal{T}) }$$

$$(12)$$

となる. (12), (13)式の実数部は固定点 $(x_0,y_0)$ を中心とした円軌道を示しており、回転の方向はイオンの回転によってできる磁場が外部から加えられた磁場に対して((コ) 同方向、逆方向)となる. このことからプラズマは((サ) 反磁性体、常磁性体)である.

イオンの回転半径 $r_L$ は (シ) と呼ばれ, $\omega_c$ を用いて

$$r_L = \boxed{(z)} \tag{14}$$

で定義される.

- 設問 1 前述の検討におけるz方向の磁場に加えて、x方向に空間的に一様な電場を印加した場合、イオンはどのように運動するかを、 $v_{\perp}$ の変化とこれによる $r_{L}$ の変化の観点から説明せよ。また、電荷が-qの場合はどのようになるかを説明せよ。ただし、字数は全体で 200 字以内とし、必要であれば図を用いても良い。
- 設問 2 設問 1 において、一様な電場の代わりに、x方向に重力が働いた場合、どのように運動するかを 100字以内で説明せよ.

## 専門用語の英訳

角周波数 angular frequency

反磁性体 diamagnetic substance

常磁性体 paramagnetic substance

#### 【量子電子物性1】 解答は、桃色(4番)の解答用紙に記入すること.

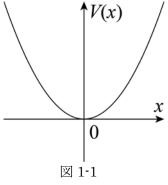
次の文章を読み、下記の問に答えよ.

図 1-1 のような一次元調和振動子型のポテンシャルV(x)中を運動する質量m の粒子について考える. ここで、

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である.  $\omega$ は正の実数とする. この時、ハミルトニアンHは、 $\hbar = h/(2\pi)$  (hはプランク定数)、mを用いて、次式で与えられる.

$$H = [$$
 ① ]



このポテンシャル中で、基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ は、実数A、実数 $\sigma>0$ を用いて、次式のようなガウス関数で表されることが知られている.

$$\psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

これがシュレーディンガー方程式を満たすことから, $\sigma$  と基底状態のエネルギー $E_0$ が, $\hbar$  と $\omega$  を使って,それぞれ,以下のように求まる.

$$\sigma$$
= [ ② ]

$$E_0 = [$$
 ③ ]

基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ が、偶関数であることを使うと、位置xの期待値< x>と運動量 $p=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ の期待値は、それぞれ、以下のように求まる.

$$< x > = [ 4 ]$$

これらの結果は、ポテンシャルがx=0に対して左右対称であることからも明らかである.

位置xの不確かさは、標準偏差 $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ で表される。ここで基底状態の波動関数において、 $\Delta x$  は $\sigma/\sqrt{2}$  と等しいので、 $x^2$  の期待値 $\langle x^2 \rangle$ は $\hbar$  と $\omega$  を使って以下のように求まる。

$$\langle x^2 \rangle = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

ここで、調和振動子型のポテンシャルでは、運動エネルギー $\frac{p^2}{2m}$ の期待値とポテンシャルエネルギーの

期待値が等しいことが知られているので、 $p^2$ の期待値< $p^2$ >は、 $\hbar$ と $\omega$ を使って以下のように求まる.

$$< p^2 > = [$$
 ⑦

これから,p の標準偏差  $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$  は, $\hbar$  と $\omega$  を使って以下のように求まる.

$$\Delta p = [$$
 ® ]

したがって、 $\Delta x \, e^{\Delta p}$ の積 $\Delta x \Delta p$ は、以下のようになり、

位置と運動量の間の[ ① ] 関係を満たすことが確認できる.

次に、第一励起状態について考える。第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ は、次式で表されることが知られている。

$$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} Ax \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

これがシュレーディンガー方程式を満たすことから,第一励起状態のエネルギー $E_1$ が, $\hbar$ と $\omega$ を使って以下のように求まる.

$$E_1 = \begin{bmatrix} & & \textcircled{10} & & \end{bmatrix}$$

いま、粒子一つが第一励起状態から基底状態へ遷移する際に、光子が一つ放出されたとする。この時、光子の波長 $\lambda$ と運動量Pは、 $\omega$ と光速cを使って以下のように求まる。

$$\lambda = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$
 $P = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}$ 

- 問 1 文章中の空欄 [ ① ]  $\sim$  [ ② ]にあてはまる数式を, [ ⑦ ], [ ⑦ ] にあてはまる語句を答えよ.
- 問 2  $E_0$ のエネルギーを持つ粒子に対して、古典力学で許される運動の領域は $E_0 \geq \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ である。  $E_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$  を満たす折り返し点  $x_0$ (>0)を  $\hbar$  と  $\omega$  を使って求めよ、次に、基底状態において、この  $x = x_0$  で粒子を見出す確率が、x = 0 で粒子を見出す確率の何倍になるか求めよ、自然対数の底 e と数字で表すこと.
- 問 3 問 2 で述べた点 $x_0$ に対し、古典力学では許されない領域 $x>x_0$ においても粒子を見出す確率がある。基底状態において、 $x=2x_0$ で粒子を見出す確率が、x=0で粒子を見出す確率の何倍になるか求めよ。自然対数の底eと数字で表すこと。
- 問4 基底状態の波動関数  $\psi_0(x)$  を規格化することにより A を求めよ. ただし積分公式  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \ exp(-x^2) dx$
- 問 5 [ ② ]関係は、位置xと運動量pの間の交換関係 [x,p] が 0 でないことからもわかる. [x,p] を導出過程も含めて求めよ.

#### 【量子電子物性2】 解答は、緑色(5番)の解答用紙に記入すること.

下記の問  $1\sim3$  に答えよ. 数値は端数を四捨五入し有効数字二桁まで求め、単位も示して解答せよ. 必要ならば素電荷  $q=1.6\times10^{-19}$  C 、ボルツマン定数  $k_{\rm B}=1.4\times10^{-23}$  J/K , $\log_e10=2.3$  (e は自然対数の底)の値を用いよ.

問 1 下記の文章 [I] および [II] は、半導体についての記述である。文章中の空欄 [ ⑦ ] ~ [ ⑦ ] にあてはまる語句、および [ ① ] ~ [ ⑧ ] にあてはまる数式を答えよ。

[I] ドナー密度  $N_{\rm D}$  とアクセプタ密度  $N_{\rm A}$  を有する半導体を考え, $N_{\rm D}>>N_{\rm A}$  とする.伝導帯と価電子帯の有効状態密度をそれぞれ  $N_{\rm c}$  ,  $N_{\rm v}$  とし,伝導帯の底,価電子帯の頂上,ドナー準位,アクセプタ準位,フェルミ準位のエネルギーをそれぞれ  $\varepsilon_{\rm c}$  ,  $\varepsilon_{\rm v}$  ,  $\varepsilon_{\rm D}$  ,  $\varepsilon_{\rm A}$  ,  $\varepsilon_{\rm F}$  とする.伝導帯における電子密度 n は絶対温度 T によって,図 2-1 のような変化を示した.この時,n の温度依存性は,(i) ~ (iv) に示すような四つの領域に分けることができ,比較的低温の (i) ~ (iii) の領域では,以下の式が成り立つ.

$$\frac{n(n+N_{\rm A})}{N_{\rm D}-N_{\rm A}-n} = \gamma_{\rm D} N_{\rm c} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\rm c} - \varepsilon_{\rm D}}{k_{\rm B} T}\right) \tag{1}$$

ここで、 $\gamma_D$ はドナーの縮重因子で、1/2 とする.

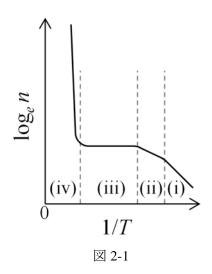
(i) の領域は温度が非常に低い場合であり、  $N_{\rm A}>>n$  であるので、

$$\log_e n = \left[ \frac{1}{T} + \log_e \frac{(N_D - N_A)N_c}{2N_A} \right]$$
 (2)

としてnと1/Tの関係が表される. また、温度が少し高くなると現れる (ii) の領域では $N_{\rm D}>>n>>N_{\rm A}$ となるため、nと1/Tの関係は、

$$\log_e n = \left[ 2 \right] \frac{1}{T} + \log_e \sqrt{\frac{N_{\rm D} N_{\rm c}}{2}}$$
 (3)

で表される. (ii) の領域は $N_{\rm D}/N_{\rm A}$ が大きいほど広い温度領域で現れる. なお, (i) と (ii) の領域を合わせて, [  $\bigcirc$  ] 領域と呼ぶ.



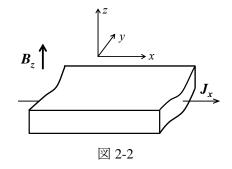
一方、(iii) の領域は [ ① ] 領域と呼ばれ、n=[ ③ ] で一定の値を示す。さらに温度が高くなると、ドナーから供給した電子以外に価電子帯から伝導帯へと電子が励起されるようになり、式(1) が成り立たなくなる((iv) の領域).この領域は [ ⑦ ] 領域と呼ばれ、この時のnと1/Tの関係は、

$$\log_e n = \left[ \qquad \textcircled{4} \qquad \right] \frac{1}{T} + \log_e \sqrt{N_c N_v} \tag{4}$$

で表される.

 $[\Pi]$  図 2-2 に示すように、p 型半導体中の+x方向に一様な電流密度  $J_x$ の電流が流れており、これに磁束密度  $B_z$ の均一な磁界を+z方向に加えた場合を考える。キャリア 1 個の電荷量、移動速度のx成分、およびキャリア密度をそれぞれq、 $v_x$ 、pとすると  $J_x$ は、

と表される。さらに、キャリアにはローレンツ力がかかり、キャリア1個当たりに+y方向にかかるこのローレンツ力 $F_v$ は、

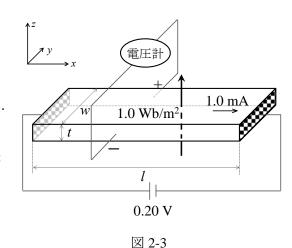


となる. この結果、半導体試料のy方向の両端面に異符号の電荷がたまり、+y方向に電界 $E_y$ が発生する. 定常状態ではこの電界がキャリアに及ぼす力とローレンツ力が釣り合うため、式(5) 、式(6)より、

と表すことができる. [ ⑦ ] はしばしば  $R_{\rm H}$  と表記され, [  $\square$  ] 係数と呼ばれている. また,  $R_{\rm H}$  および電気抵抗率  $\rho$  を用いると,この半導体中のキャリアの移動度  $\mu_{\rm H}$  は,

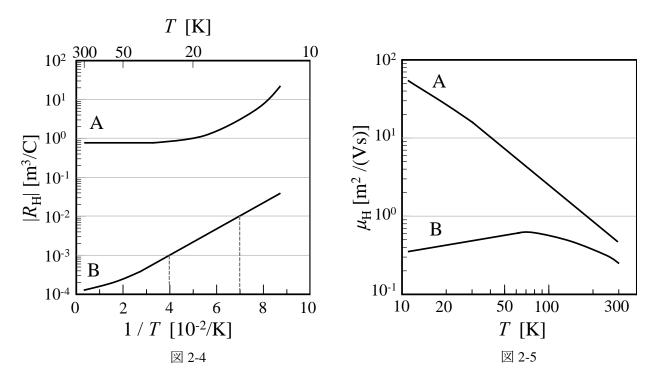
$$\mu_{\rm H} = [ \hspace{1cm} \circledast \hspace{1cm} ] \hspace{1cm} (8)$$

問 2 ある元素をドープした高純度シリコンを、図 2-3 に示すように直方体状に切り出し、x方向の両端面にオーミック電極を設置して電極間に0.20 Vの電圧を印加したところ、+x方向に1.0 mA mA max max



- 1) シリコン中の多数キャリアの種類を答えよ.
- 2) シリコン中の多数キャリアの密度、および移動度  $\mu_{\rm H}$  の値を有効数字二桁で求めよ.ただし、シリコン直方体のx, y, z 方向の寸法は  $l=20\,{
  m mm}$ ,  $w=4.0\,{
  m mm}$ ,  $t=1.0\,{
  m mm}$ であるとし、電圧計の電極接触位置のx座標は+極、-極で同じであるとする.また、測定中の温度変化は無視できるものとする.

問3 ヒ素を異なる濃度でドープした高純度ゲルマニウム試料 A, B において,  $R_{\rm H}$ , および  $\mu_{\rm H}$  の絶対温度 T に対する変化を計測したところ, それぞれ図 2-4, および図 2-5 のような結果が得られた. この時, 以下の 1)~3)の間に答えよ.



- 1) 図 2-4 において、試料 A では $30\,\mathrm{K}$ 以上で $\left|R_{\mathrm{H}}\right|$ がほぼ一定になるのに対し、試料 B では $300\,\mathrm{K}$ まで温度とともに減少した。この違いが生じた理由を、「ドープ量」をキーワードとして $50\sim100$ 字程度で述べよ。
- 2) 試料 B では $30\,\mathrm{K}$ 以下の温度において,図 2-1 における (ii) の領域にあるとした場合,図 2-4 のグラフを基にドナー準位の深さ $\varepsilon_\mathrm{c}-\varepsilon_\mathrm{D}$ の値を単位 [eV] に換算して計算し,有効数字二桁で答えよ.なお,グラフから読み取った $|R_\mathrm{H}|$ ,および1/T の数値も記載せよ.
- 3) 図 2-5 において、試料 A では  $30\,\mathrm{K}$  以上で  $\mu_{\mathrm{H}} \propto T^{-3/2}$  の関係を示した.一方、試料 B では  $70\,\mathrm{K}$  程度までは温度に対し  $\mu_{\mathrm{H}}$  が単調増加したが、それ以上の温度では逆に単調減少した.この違いが生じた理由を、「ドープ量」、「キャリアの散乱」をキーワードとして  $50\sim100$  字程度で述べよ.

#### 【量子電子物性3】 解答は, 灰色(6番)の解答用紙に記入すること.

次の文章を読み下記の間に答えよ.ただし,絶対温度をT,フェルミ準位のエネルギーを $\varepsilon_F$ ,伝導帯下端のエネルギーを $\varepsilon_c$ ,価電子帯上端のエネルギーを $\varepsilon_v$ ,素電荷をq,ボルツマン定数を $k_B$ ,真性キャリア濃度を $n_i$ で表す.

図 3-1 のエネルギーバンド図に示すように,p型半導体とn型半導体を接触させ,両者を電気的に接続したデバイスを考える.接合境界付近ではp型領域からは多数キャリアである [ ⑦ ] がn型領域へ拡散し,n型領域からは多数キャリアである [ ① ] がp型領域へ拡散することで,キャリア濃度が不足し電界が発生する.この領域は [ ⑦ ] と呼ばれる.この時現れる電位差 $V_{bi}$ は [ ② ] と呼ばれる.平衡状態におけるp型領域および,n型領域の電子濃度をそれぞれ $n_1$ ,  $n_2$ とすると,電子濃度比は下記の関係式

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{qV_{\text{bi}}}{k_{\text{B}}T}\right)$$

で表すことができる.

さらに、p型半導体およびn型半導体には、アクセプタ、およびドナーがそれぞれ一定の濃度 $N_A$ 、および $N_D$ でドーピングされているとすると、非縮退半導体では、室温近辺での多数キャリア濃度 $n_2=N_D$ 、少数キャリア濃度 $n_1=n_i^2/N_A$ であることを用いると

$$V_{\text{bi}} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

の関係が得られる.

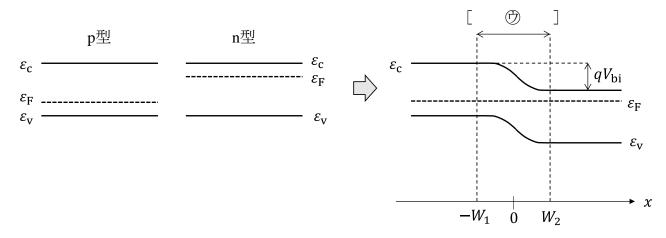


図 3-1

次に,[ ⑦ ]の内部に発生する電界E(x)を,図 3-1 に示す接合部をx=0とした位置xの関数として求めてみる.[ ⑦ ]は $-W_1 \le x \le W_2$ の範囲で存在するものとし,[ ⑦ ]の外部では電界はゼロであるとする.簡単のため,領域内部のキャリア密度は無視できるとすると,電位Vに関するポアソン方程式は次のようになる.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{q(N_{\rm D} - N_{\rm A})}{\kappa_{\rm S}}$$

ただし、 $\kappa_{\rm S}$ は半導体の誘電率である. $-W_1 \leq x \leq 0$ の範囲ではドナーが存在しないので、 $N_{\rm D}=$  [ ② ] であるから、上述のポアソン方程式は

$$\frac{d^2V}{dx^2} = [3]$$

となる. 境界条件として [ の外部には電界が発生していないことを考慮して、電界E(x)を求めると

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = \begin{bmatrix} & & 4 \end{bmatrix}$$

が得られる. 同様にして、 $0 \le x \le W_2$ の範囲では $N_A = [$  ② ] であるから、ポアソン方程式は

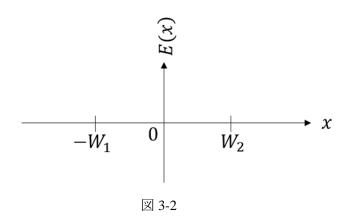
$$\frac{d^2V}{dx^2} = \begin{bmatrix} & \boxed{5} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

で与えられ、電界E(x)は

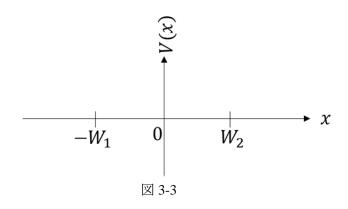
$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = \begin{bmatrix} & 6 & \end{bmatrix}$$

と求まる.

- 問 1 文章中の空欄 [ ⑦ ] ~ [ ② ] にあてはまる語句,および [ ① ] ~ [ ⑥ ] にあてはまる数式を答えよ.
- 問 2 問 1 で得られた電界E(x)の大きさの最大値と最小値を求めよ. その時, q,  $\kappa_S$ ,  $N_A$ ,  $N_D$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ の中から必要なものを用いること. 正負の電荷量の釣り合いに関する関係式 $N_AW_1=N_DW_2$ を使用してもよい. また, 以下の図 3-2 にあるようなグラフを作成してE(x)を図示せよ.



- 問3 電位Vをxの関数V(x)として求めよ. ただし, V(0) = 0とする.
- 問 4 問 3 で得られた電位V(x)の結果を、以下の図 3-3 にあるようなグラフを作成して図示せよ。グラフ中では、 $x=-W_1$ および  $x=W_2$ における電位V(x)をq、 $\kappa_S$ 、 $N_A$ 、 $N_D$ 、 $W_1$ 、 $W_2$ の中から必要なものを用いて明記すること。



問 5 領域 [ の幅 $W=W_1+W_2$ を求めよ. ただし、解答に使用してもよい記号は $V_{\rm bi}$ 、q、 $\kappa_{\rm S}$ 、 $N_{\rm A}$ 、 $N_{\rm D}$ に限る.

#### 【量子電子物性 4】解答は、だいだい色(7番)の解答用紙に記入すること.

次の文章を読み、下記の問に答えよ. ただし、 $\varepsilon_0$ は真空の誘電率である.

外部電界 $\mathbf{E}_0$ の中に誘電体を入れると分極がおこり、誘電体には電磁気学でいうところの平均の電界 $\mathbf{E}$ がかかる。またこの誘電体を構成する個々の原子や分子などについて考えると、これら原子や分子など においても分極によって双極子が現れるため、結果として各原子や分子にかかっている電界は $\mathbf{E}_0$ や $\mathbf{E}$ と は一般に等しくならない.この各原子や分子に作用している電界を局所電界と呼び $\mathbf{E}_{loc}$ で表わす.この 局所電界を見積もることは、誘電現象を理解する上で非常に重要である.

いま図 4-1 のような任意の形状をした誘電体(立方晶構造とする)が外部電界 $\mathbf{E}_0$ の中におかれている ものとする. この誘電体内にその大きさに比べて十分小さな球形の空洞を考える. この空洞内の中心 〇に ある原子(もしくは分子)に注目すると,この原子(もしくは分子)に作用する局所電界 $\mathbf{E}_{\mathrm{loc}}$ は一般に 式(1)のようにいくつかの電界のベクトル和で与えられる.

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 \tag{1}$$

ただし.

 $\mathbf{E}_0$ :外部から印加した電界(大きさ $E_0$ )

E<sub>1</sub>:誘電体の外部表面に誘起された電荷に よってできる電界 (大きさ $E_1$ )

E,:空洞表面に誘起された電荷による電界 (大きさ $E_2$ )

 $\mathbf{E}_3$ : 空洞内の双極子による電界 (大きさ $E_3$ )

 $\mathbf{E}_{4}$ : 空洞外の双極子による電界(大きさ $E_{4}$ )

ここで空洞の大きさは誘電体の大きさに比べ十分小さいの で $E_4 = 0$ とする. また立方晶のように対称性のよい誘電体で は空洞内の双極子による電界も互いに打ち消しあうので $E_3 = 0$ とすると、結局 $\mathbf{E}_{loc}$ は

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \tag{2}$$

となる.

起された電荷による電界なので誘電体の形状に依存する. また  $\mathbf{E}$ , は [  $\bigcirc$  ] と呼ばれる.

この局所電界によって誘電体内の個々の原子や分子には双極子が誘起されるが、この双極子モーメン トをμとすると

$$\mu = \alpha \mathbf{E}_{loc} \tag{3}$$

で与えられる. ここで、この $\alpha$ のことを 「 の ] と呼ぶ.

もし双極子モーメントが何種類かある場合には *j*種の[ と、誘電体内に誘起される分極 $\mathbf{P}$  (大きさP) は

$$\mathbf{P} = \sum_{j} N_{j} \alpha_{j} \mathbf{E}_{\text{loc}} \tag{4}$$

となり、分極 P は局所電界によって誘電体内部の単位体積あたりの原子または分子に誘起される双極子 モーメントの総和であると考えることができる.

- 問1 文章中の「
- 問2 電界 $\mathbf{E}_0$ の中に、帯電していない平板状誘電体をその平板面が電界の方向と垂直になるようにお いたときの誘電体内部の電界 E を考える. 誘電体内に誘起される分極を P, 誘電体外部の電気変位 を $\mathbf{D}_0$ とするとき、誘電体内部の電気変位 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{D}_0$ の関係を示すとともに、電界 $\mathbf{E}$ を $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ を 用いて表せ. ただし、導出過程も示すこと.
- 問3 空洞表面に誘起された電荷による電界 $E_2$ を求めるため、図 4-2 に示すような半径aの仮想球の

表面に誘起された電荷による電界を考える. 分極の方向を 図のz軸方向とし、この軸より傾き角 $\theta$ をなす仮想球表面 上の点における電荷密度 $\sigma_{s}$ を分極の大きさPと角 $\theta$ を用 いて表せ. ただし, 符号も考慮すること.

問3の結果より、z軸より傾き角 $\theta$ と $\theta$ + $d\theta$ の間のリン 問4 グ上に存在する電荷量  $\mathrm{d}Q$  を求めることができる. この  $\mathrm{d}Q$ による仮想球中心の電界を考えることによりE,をPを用 いて表せ. ただし, 導出過程も示すこと.

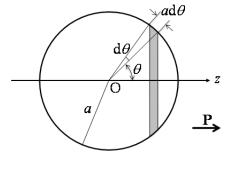


図 4-2

問5 一般に局所電界係数を $\gamma$ とするとき、局所電界 $\mathbf{E}_{loc}$ は次の式によって与えられる.

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\gamma}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}$$

この時、文章中の式(4)と誘電体において成立する次の式

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$$
 (ただし,  $\kappa$  は誘電体の比誘電率)

を使い, $\sum_{i} N_{j} \alpha_{j}$  と比誘電率 $\kappa$ の間の関係式を求めよ.ただし,導出過程も示すこと.

また $\gamma=1$ の時, このように $\kappa$ と $\alpha$ との関係を示す式は何と呼ばれているか.

#### 量子電子物性 単語の英訳

#### 量子電子物性1

一次元調和振動子: one dimensional harmonic oscillator

ハミルトニアン: Hamiltonian プランク定数: Planck constant 基底状態: ground state 波動関数: wave function ガウス関数: Gauss function

シュレーディンガー方程式: Schrödinger equation 古典力学: classical mechanics

偶関数:even function期待値:expectation value

運動量: momentum

標準偏差: standard deviation 運動エネルギー: kinetic energy 第一励起状態: first excited state

光子: photon

光速: speed of light

#### 量子電子物性2

素電荷: elementary charge ボルツマン定数: Boltzmann constant

価電子帯: valence band 伝導帯: conduction band フェルミ準位: Fermi level

縮重因子: degeneracy factor ローレンツ力: Lorentz force 抵抗率: resistivity mobility

異符号の電荷:opposite charge多数キャリア:majority carrier散乱因子:scattering factor

ヒ素: arsenic 高純度: high purity ドープ量: doping amount キャリアの散乱: carrier scattering

#### 量子電子物性3

絶対温度: absolute temperature

フェルミ準位: Fermi level

伝導带: conduction band

価電子帯: valence band

素電荷: elementary charge ボルツマン定数: Boltzmann constant

半導体:semiconductor電子濃度:electron densityキャリア濃度:carrier density多数キャリア:majority carrier少数キャリア:minority carrierエネルギーバンド:energy band

平衡状態: equilibrium state

非縮退半導体: nondegenerate semiconductor

境界条件: boundary condition

電界: electric field 電位: electric potential ポアソン方程式: Poisson's equation

誘電率: permittivity

#### 量子電子物性4

誘電率:permittivity電界:electric field誘電体:dielectric

電磁気学: electromagnetism

分極: polarization (polarisation)

双極子: dipole

双極子モーメント dipole moment local electric field 立方晶構造: cubic structure 電荷密度 charge density

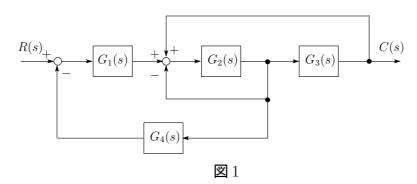
原子: atom 分子: molecule

局所電界係数: local electric field coefficient

比誘電率: relative permittivity

【制御工学1】解答は,白色(8番)の解答用紙に記入すること.

1. 図1のブロック線図において,R(s) からC(s) までの伝達関数を $G_1(s)$ , $G_2(s)$ , $G_3(s)$ , $G_4(s)$  を用いて表せ.



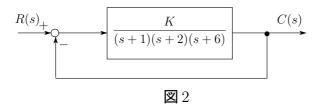
2. 次の伝達関数で表されるシステムについて,以下の問いに答えよ.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

- (i) ステップ応答を時間 t の関数として求めよ.
- (ii) ステップ応答波形において , 初期時刻 t=0 から最大オーバーシュートに達するまでの時間を求めよ .
- (iii) G(s) に対するベクトル軌跡の始点,虚軸との交点,および終点の座標をそれぞれ求めよ.
- (iv) ゲイン  $|G(j\omega)|$  の最大値であるピーク値,およびゲインがそのピーク値をとるときの角周波数  $\omega$  の値を求めよ.ただし,j は虚数単位を表す.
- 3. 次の伝達関数で表されるシステムにおいて,角周波数  $\omega$  を  $\omega \to 0$  および  $\omega \to \infty$  としたときの  $\angle G(j\omega)$  の漸近値  $\lim_{\omega \to 0} \angle G(j\omega)$  と  $\lim_{\omega \to \infty} \angle G(j\omega)$  を求めよ.ただし, $\angle G(j\omega)$  は  $G(j\omega)$  の偏角を表す.

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2(s+3)(s+5)}$$

4. 図 2 のフィードバックシステムにおいて,R(s) から C(s) までの閉ループ伝達関数が 虚軸上に極をもつための,K に関する必要十分条件を示せ.また,その条件が満足 されるとき,閉ループ伝達関数が虚軸上にもつ極をすべて求めよ.ただし,K は正 の実数を表す.



## 専門用語の英訳

### 制御工学1

ブロック線図 block diagram 伝達関数 transfer function ステップ応答 step response

最大オーバーシュート maximum overshoot ベクトル軌跡 vector locus, polar plot

始点 origin

虚軸 imaginary axis

交点 point of intersection

終点 end point coordinate

ゲイン gain

ピーク値 peak value

角周波数angular frequency虚数単位imaginary unit漸近値asymptotic value

偏角 argument

フィードバックシステム feedback system

閉ループ伝達関数 closed-loop transfer function

極 pole

必要十分条件 necessary and sufficient condition

#### 【制御工学2】解答は、赤色(9番)の解答用紙に記入すること、

状態方程式と出力方程式がそれぞれ次のように与えられている 1 入力 1 出力線形時不変システムに対して、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \quad y(t) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)$$

ただし、x(t)、u(t)、y(t) は、それぞれ、システムの状態変数ベクトル、入力変数、出力変数であり、

$$m{x}(t) = egin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad m{A} = egin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m{b} = egin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad m{c} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

とする.

- (i) このシステムが可制御, 可観測であることを示せ.
- (ii) このシステムの可制御正準形を得るために、次の行列 T を用いて、状態変数ベクトルを z(t) = Tx(t) に変換した。ただし、T の逆行列  $T^{-1}$  は以下のように求まる。

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

次に示す z(t) に関する状態方程式および出力方程式の  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}$  を求めよ.

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}(t) + \tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{y}(t) = \tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{z}(t)$$

- (iii) 入力を u(t) = -hy(t) とする出力フィードバック制御を施した場合,このシステムが安定となるための出力フィードバックゲイン h に関する必要十分条件を示せ.
- (iv) 入力を u(t) = -kx(t) とする状態フィードバック制御を施した場合,このシステムの極が  $-1, -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$  となるように状態フィードバックゲイン  $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$  を定めよ.ただし,j は虚数単位を表す.
- (v) 問(iv)の状態フィードバック制御を施した場合の状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)$$

を考える. F を対角化するために、次の行列 U を用いて、状態変数ベクトルを w(t) = Ux(t) に変換した. ただし、U の逆行列  $U^{-1}$  は以下のように求まる.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

w(t) に関する状態方程式は次のようになった.

$$\frac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(t)$$

初期状態が  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0$  であるとき、 $\boldsymbol{w}(t)$  に関する状態方程式を用いて、 $\boldsymbol{x}(t)$   $(t \ge 0)$  を求めよ。

## 専門用語の英訳

### 制御工学2

状態方程式 state equation 出力方程式 output equation

線形時不変システム linear time-invariant system

状態変数state variable入力変数input variable出力変数output variable可制御controllable可観測observable

可制御正準形 controllable canonical form 出力フィードバック制御 output feedback control

安定 stable

出力フィードバックゲイン output feedback gain 状態フィードバック制御 state feedback control

極 pole

状態フィードバックゲイン state feedback gain 対角化 diagonalization 初期状態 initial state