

平成18年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成17年8月30日（火） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1、第2、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

第1問

1次元系で無限に高い2つの壁にはさまれた領域を考える。1次元の座標を x で表すこととし、壁の位置は $x = -a$ 、及び、 $x = a$ とする ($a > 0$)。そこに質量 m の粒子がある。二つの壁の間の領域でのポテンシャルエネルギーを $U(x)$ と表わす。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。

1. この粒子の従う、時間に依存しないシュレーディンガー方程式を示せ。ただし、基底状態から見て第 n 励起状態のエネルギー固有値を E_n とせよ。また、 $n = 0$ は基底状態を表わすとせよ。次に、このシュレーディンガー方程式を解く際の境界条件を述べよ。さらに、

$$U(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1)$$

の場合 (図1 参照) について、エネルギー固有値 E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を、解を得る概略とともに示せ。固有波動関数 $\phi_n(x)$ を、 $n = 0, 1$ の場合について、具体的に示せ。

2. 設問1の各固有関数 $\phi_n(x)$ は、座標系の $x \rightarrow -x$ なる変換によってどのように変化するか述べよ。波動関数のそのような性質は、ハミルトニアンの中の不変性の帰結として起こるのか説明せよ。
3. ポテンシャル $U(x)$ をゼロからわずかにずらす事にする。まず、図2のように、

$$U(x) = 0, \quad -a < x \leq 0 \quad (2)$$

$$U(x) = -w, \quad 0 < x < a \quad (3)$$

とする。 w は正の実数であるが、絶対値は十分小さいものとする。この時の、 $n = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値をそれぞれ1次の摂動論で求めよ。

4. 設問3の場合、設問1に比べてポテンシャルがわずかに変わっている。ここで、 $n = 0$ の状態の波動関数を $\psi_0(x)$ とすると、 $\psi_0(x)$ を設問1の $\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で展開した時の $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ の確率振幅を、 w に関して1次の項まで求めよ。
5. 設問1の波動関数 $\phi_0(x)$ に対して座標 x の期待値 $\langle x \rangle$ がどのようなになるか、簡単な説明とともに示せ。それは、設問2とはどのような関係にあるか述べよ。
6. 設問4の波動関数 $\psi_0(x)$ を $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ までで展開したものに対して、期待値 $\langle x \rangle$ を w の1次まで示せ。それはポテンシャルの変化と関連づけて、どのように解釈できるか述べよ。
7. 十分小さい正の実数 u に対して、次のポテンシャルを考える (図3)。

$$U(x) = -ux/a, \quad -a < x < a \quad (4)$$

この時の、 $n = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値はそれぞれどのようなになるか、 u に関して1次までの効果を述べよ。

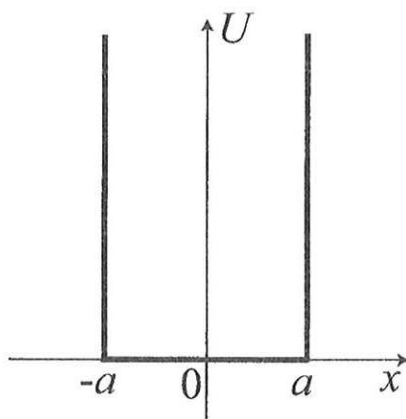


図 1: ポテンシャル (設問 1)

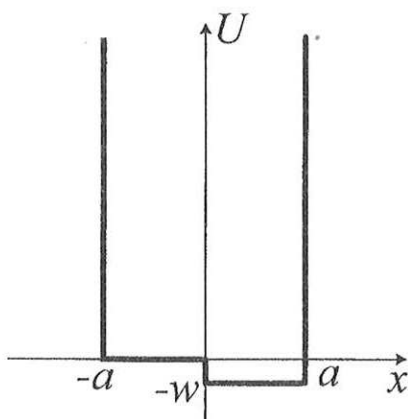


図 2: ポテンシャル (設問 3)

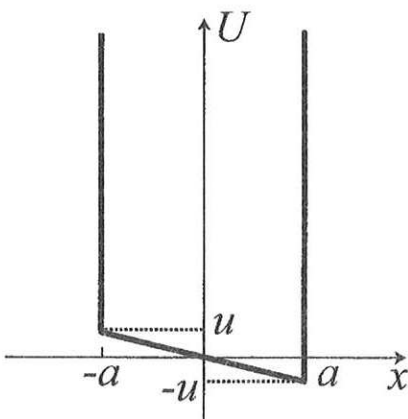


図 3: ポテンシャル (設問 7)

第2問

一辺の長さが L の立方体の箱があつて、絶対温度 T の熱浴に接しているとする。箱の中に存在する電磁波が熱浴と熱平衡になっている場合を考える。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、 $\hbar = h/2\pi$ とする。

1. 箱の中の異なる角振動数を持つ電磁波は、お互いに独立に振る舞うと考えられる。さらに、ある角振動数 ω を持つ電磁波は、同じ角振動数を持つ量子力学的な調和振動子として扱うことができる。絶対温度 T の場合に、角振動数 ω の調和振動子の分配関数を求めよ。
2. 設問 1 の調和振動子の平均エネルギーを求めよ。さらに、非常に低温の場合と非常に高温の場合に、平均エネルギーはどのような温度依存性を持つか調べ、その結果について物理的内容を簡潔に説明せよ。
3. 電磁波は箱の中で定在波を作る。壁の位置で節を作るとして、電磁波の波数 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ のとり得る値を求めよ。
4. 波数 \vec{k} を持つ電磁波の角振動数は、 $k = |\vec{k}|$ として $\omega = ck$ で与えられる。ここで c は光速である。箱内の電磁波の持つ全エネルギーは、すべてのとり得る角振動数についての和として書ける。このとき、全エネルギー E を

$$E = \int_0^\infty \varepsilon(k) dk$$

という形に表したときの $\varepsilon(k)$ を求めよ。ただし、箱の一辺の長さ L は十分長いとして、固有振動についての和を積分の形にしてよい。また、零点振動のエネルギーは無視せよ。(電磁波は横波であり、横波の偏光の方向が2通りあることも考慮せよ。)

5. 全エネルギー E が、どのような温度のべき乗則に従うか求めよ。
6. 非常に低温の場合に、設問 4 で得られた $\varepsilon(k)$ が極大になる k_{\max} の表式を求めよ。絶対温度が 2.7 K のとき、 k_{\max} の波数を持つ電磁波の波長を求めよ。ただし $\hbar = 1.0 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ を用いて、有効数字 2 桁で答えよ。

第3問

以下に示す真空中での Maxwell の方程式を出発点として平面電磁波の性質を導き出したい。ここで、 \vec{E} と \vec{B} はそれぞれ電場と磁束密度、 ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。また、 t は時間であり、 ∇ は空間座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ についてのベクトル微分演算子である。電荷や電流の存在しない場合を考える。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

以下の設問に答えよ。

1. 任意の三次元ベクトル \vec{V} に対して次の公式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

2. 前問の公式を Maxwell の方程式に適用して、 \vec{E} に対する波動方程式および \vec{B} に対する波動方程式をそれぞれ導け。
3. 次の式で表される \vec{E} および \vec{B} 、すなわち平面波が前問で求めた波動方程式の解であるための条件を求めよ。ただし、 \vec{E}_0 、 \vec{B}_0 、 \vec{k} 、 \vec{k}' は定数ベクトル、 ω 、 ω' 、 α 、 α' はそれぞれ定数で、 $0 \leq \alpha < \pi$ 、 $0 \leq \alpha' < \pi$ である。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \alpha') \quad (6)$$

4. 式 (5) と式 (6) で表される \vec{E} および \vec{B} がそれぞれの波数ベクトルに垂直であること、すなわち横波であることを示せ。
5. 式 (5) と式 (6) において、 $\vec{k} = \vec{k}'$ 、 $\omega = \omega'$ および $\alpha = \alpha'$ であることを示せ。
6. 式 (5) と式 (6) で表される \vec{E} と \vec{B} は互いに直交していることを示せ。
7. 平面電磁波の位相速度を求めよ。
8. 式 (5) と式 (6) で電場 \vec{E} と磁場 $\vec{H} (= \vec{B}/\mu_0)$ の大きさの比 $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ が常に一定であること、およびこの比は抵抗の次元をもつことを示せ。

第4問

1. π^0 は、静止質量 m_0 、平均寿命 τ を持つ粒子で、主に2個の光子に崩壊する。

π^0 の静止系での4元座標の成分を ct_0, x_0, y_0, z_0 とする。これらは、 π^0 が z 軸方向に速度 $v = c\beta$ で運動している系での座標の成分 ct, x, y, z と、次の式（ローレンツ変換）で関係付けられる。ここで、 c は光速、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

- (a) z 軸方向に速度 $v = c\beta$ で運動している系での、 π^0 の4元運動量を求めよ。
- (b) この系での、 π^0 の平均寿命と平均飛距離を求めよ。
- (c) 運動量 p について $pc = 135 \text{ GeV}$ を持つ π^0 の、生成から崩壊までの平均飛距離を有効数字2桁で求めよ。その際、光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $m_0 c^2 = 135 \text{ MeV}$ 、 $\tau = 8.4 \times 10^{-17} \text{ s}$ を用いよ。また、 $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ 、 $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ である。
2. 高いエネルギーを持つ光子を鉛に入射したときの電磁シャワー過程について考察する。電磁シャワーとは、高いエネルギーを持つ光子からの電子・陽電子対生成過程（図1左）と、高いエネルギーを持つ電子または陽電子からの制動放射過程（図1右）が、原子核近傍の強い電磁場を受けて次々に起こり、雪崩（なだれ）的に粒子数が増大する過程である。ここでは、以下のように単純化したモデルを考える。上述の電子・陽電子対生成過程と制動放射過程のみを考慮する。これらの過程はそれぞれの粒子が物質中を距離 X_0 進む毎に起き、各ステップでの原子核が受ける反跳は無視し、終状態の残りの2粒子は、始状態の粒子の持つエネルギーを等分する。生成粒子は進行方向に放出され、横方向の拡がりはないものとする。

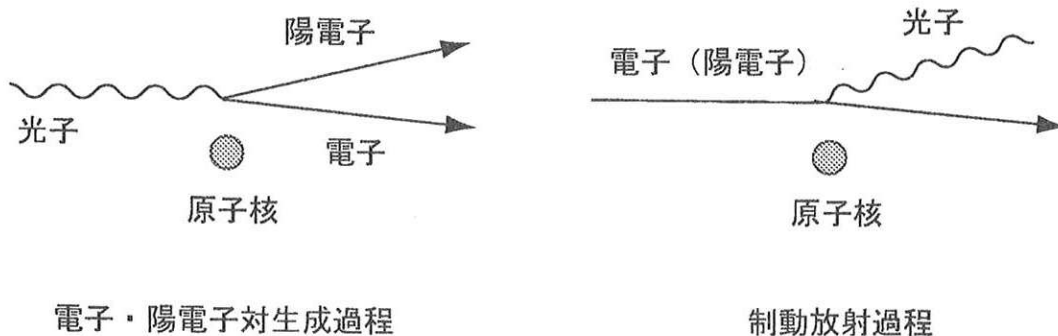


図1: (左) 光子の電子・陽電子対生成過程。(右) 電子及び陽電子の制動放射過程。

- (a) 高いエネルギーの光子を入射する。 n ステップ後の光子数を $G(n)$ 、電子数と陽電子数の和を $E(n)$ として、これらの漸化式を示せ。次に、 $G(n)$ と $E(n)$ の解を求めよ。この際、 $S(n) = G(n) + E(n)$ と $D(n) = 2G(n) - E(n)$ の漸化式を考えてもよい。
- (b) エネルギー E_0 の光子を入射したとき、 n ステップ終了時に個々の粒子が持つエネルギーを求めよ。また、物質への入射点から距離 nX_0 までの電子と陽電子の走行距離の総和を求めよ。
- (c) 電磁シャワー過程は、反応で生成される電子・陽電子のエネルギーが小さくなり、電離損失過程が優勢になると、終焉（しゅうえん）に向う。ここでは、簡単のために、生成粒子のエネルギーが E_C 以下となった時点で突然終了するものとする。何ステップで終了するか、エネルギー 1 GeV の光子について計算せよ。次に、電子と陽電子の走行距離の総和を求めよ。その際、 $E_C = 7 \text{ MeV}$ 、 $X_0 = 5.6 \text{ mm}$ を用いよ。また、 $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ 、 $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ である。
- (d) 電磁カロリメーターは、電磁シャワーを利用して、光子等のエネルギーを測定する検出器である。実際のエネルギー測定では、電子・陽電子の電離損失過程やチェレンコフ光放出過程を利用して、近似的に電子と陽電子の走行距離の総和を測定する。光子の入射エネルギー 28 MeV～500 MeV の範囲について、入射エネルギーと電子と陽電子の走行距離の総和の関係を略図で示せ。この結果をもとに、単純化した模型の問題点を指摘し、その原因について考察せよ。

第5問

1. (a) 金属中の電子の運動を古典的に自由電子モデルで考え、電気伝導を考察する。外部電場 \vec{E} および外部磁場（磁束密度 \vec{B} ）中の自由電子の運動方程式を、時刻 t での速度を $\vec{v}(t)$ として、 $d\vec{v}(t)/dt = \dots$ の形式で記せ。ただし、電子の質量を m 、電荷を $-e$ とし、相対論的効果は無視できるとする。

- (b) 金属中では、伝導電子は格子欠陥、不純物、格子振動などによって散乱される。この散乱の効果を、平均の電子散乱時間 τ を用いて以下の運動方程式で表す。

$$d\vec{v}(t)/dt = -\vec{v}/\tau \quad (1)$$

金属中の伝導電子の運動方程式は、設問 1(a) で求めた運動方程式の右辺に (1) 式の右辺を加えたものとする。外部磁場がないときに、電場に平行方向の電子の 1 次元運動方程式を解け。速度 v は時刻 $t = 0$ で $v(0) = 0$ とする。ここで、簡単のため金属中の伝導電子の有効質量は m のままとし、電荷は $-e$ とする。また、時刻 $t = \infty$ での定常速度 v_∞ を求めよ。

- (c) 電流密度 j は定常速度 v_∞ と伝導電子密度 n を用いて、 $j = -nev_\infty$ で与えられる。電気伝導度 σ と散乱時間 τ の関係を求めよ。また、散乱時間の温度依存性を考察し、このモデルでは金属の電気伝導度はどのように温度に依存するかを定性的に説明せよ。

- (d) 直方体の試料を図 1 のようにおき、電流密度 j の電流を x 軸方向に流し、磁束密度 B の外部磁場をそれと垂直な z 軸方向にかけると、双方に垂直な y 軸方向に電位差が生じる。この電位差のために生じる y 軸方向の電場 E_H (ホール電場) を求めよ。ここで、定常状態では、磁場によって電子にかかるローレンツ力が y 軸方向の電場による力とつり合っているとしてよい。

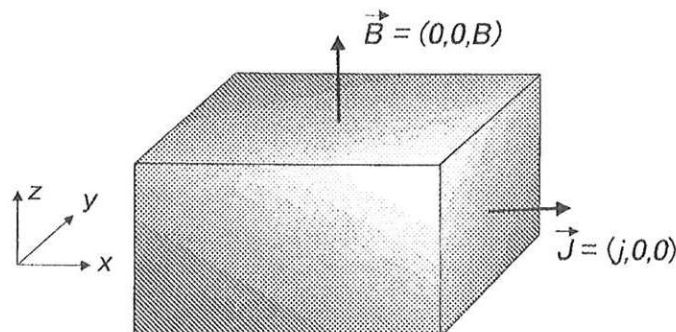


図 1

2. 純粋なシリコン (Si) は真性半導体であり、そのバンドギャップは、1.1 eV である。これに電子を供給するドナー不純物としてリン (P) をドーピングする。リンが供給した電子は基底状態でリン原子に束縛され、そのエネルギー準位は伝導帯の底から 44 meV 下にある。電流密度と磁場を一定にして温度を変化させたとき、リンをドーピングしたシリコンのホール電場はどのように温度に依存するかを図に示して定性的に説明せよ。この場合は、伝導帯に熱励起された電子について設問 1(d) と同じ考え方ができるとしてよい。
3. ホール電場の大きさを測定するための実験装置及びその配置をブロック図で示し、測定上注意すべき点を簡潔に説明せよ。

第6問

図(次ページ)のような円柱状の真空容器内に閉じ込められている、電子および水素イオンからなるプラズマの電子温度 T_e を、レーザー光の散乱を用いて計測することを考える。座標系は原点を真空容器の中心とし、 z 軸を円柱の対称軸とする。レーザー光は原点を通り y 軸に沿って入射し、プラズマにより散乱される。散乱光のうち x 軸方向に進む光が集光され、検出されるものとする。電子はレーザーの電場により加速されて振動する。その結果、電磁波が放射され、これが散乱光として観測される。ここでは電子の速度は十分遅く、相対論的効果は無視できる場合を考える。以下の設問に答えよ。

- なぜ電子による散乱の方がイオンによる散乱より重要か説明せよ。
- まず1個の電子による散乱を考える。散乱光は電子の運動によりドップラーシフトを受ける。入射光および散乱光の角振動数をそれぞれ ω_i 、 ω_s 、波数ベクトルを \vec{k}_i 、 \vec{k}_s 、電子の速度を \vec{v} とする。ただし、電子の静止系では入射光と反射光の角振動数は変化しないとせよ (Thomson 散乱)。プラズマ中の光速は 3×10^8 m/s としてよい。
 - 入射光は、運動している電子からはどのような角振動数 ω_e で振動しているように見えるか、
 - レーザー光の電場により加速された電子により放射された光は、どのような角振動数 ω_s の散乱光として観測されるか、 ω_s を ω_i 、 \vec{k}_i 、 \vec{k}_s 、 \vec{v} を用いて表せ。
 - 入射光として YAG レーザー (波長 $1.06 \mu\text{m}$) を用いた場合を考える。電子速度の (x, y) 成分が $(3 \times 10^6 \text{ m/s}, -3 \times 10^6 \text{ m/s})$ のとき、散乱光は入射光からどちらにどれだけ波長のシフトを受けるか。有効数字1桁で求めよ。
- 実際観測される散乱光は多数の電子による散乱の寄与を足し合わせて得られる。粒子間の相関は無視できる場合を考えるので、散乱光の干渉は考えなくてよい。電子の速度分布が温度 T_e の Maxwell 分布 $f(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m_e |\vec{v}|^2}{2k_B T_e}\right)$ で表されるとき、散乱光の中心角振動数 ω_0 および角振動数ひろがりの幅 $\Delta\omega$ (散乱光強度がピーク値の $1/e$ になるところまでの半幅) を求めよ。ただし m_e は電子の質量、 k_B は Boltzmann 定数である。散乱光の角振動数スペクトルを図示し、 ω_0 および $\Delta\omega$ を図中に示せ。
- 入射光、散乱光とも z 方向に偏光している場合、 x - y 平面上における微分断面積は $d\sigma/d\Omega_s = r_e^2$ である。但し $r_e = 3 \times 10^{-15}$ m は電子の古典半径である。レーザー光路に沿って $L = 1$ cm の長さの領域から立体角 $\Omega_s = 10^{-2}$ sr で散乱光を集める。電子密度が $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ の場合、検出器に到達する光子数は入射光子数のどのくらいの割合か。有効数字1桁で答えよ。
- 散乱光の波長スペクトルを測る方法を具体的な例をあげて説明せよ。前問で求めたように、プラズマによる散乱光は極めて微弱なので、その検出には注意を要する。真空窓や真空容器壁により散乱または反射された光 (迷光という) を低減する方法を一つ述べよ。

