第１志望専攻	電気　通信　電子	電情工		受験番号	
		電磁	電情		

平成 17 年度大学院前期課程

電気工学専攻
通信工学専攻
電子工学専攻
電子情報エネルギー工学専攻

電　磁　理　論
入　試　問　題

【注意】
○ 問題は４問ある。配点は各２５点で合計１００点である。
○ 各問題用紙の志望専攻欄に○印をつけ、受験番号を必ず記入すること。
○ 解答はすべて問題用紙の □ の中に書くこと。

平成１６年８月２３日（月）
１０：００～１２：００実施

1 - 1	第１志望専攻	電気 通信 電子	電情工 電磁 電情	受験番号	

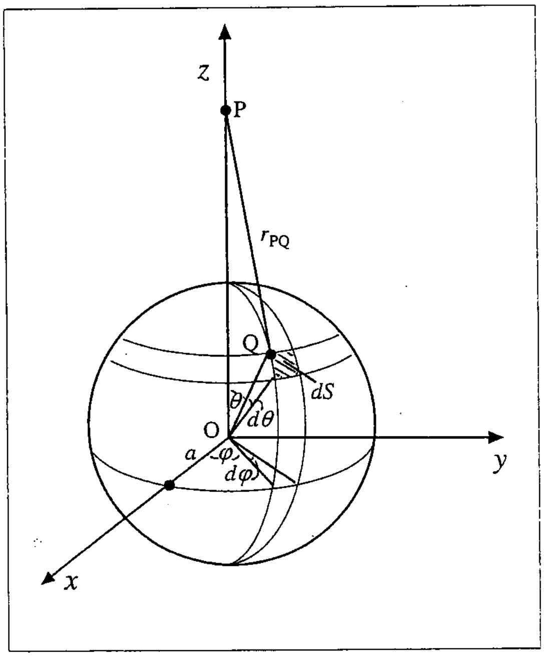
以下の文章の空欄に適当な数式を入れよ。

半径 a の球面上に 電荷 q が一様に分布しているものとする。このとき、この球面の周辺の点 P での電位および電界は次のようにして求められる。ただし P はこの球面の内部にあってもよいものとする。また、無限遠での電位をゼロとし、真空の誘電率を ε_0 とする。

球面の中心を点 O とし、O から P への方向を極軸とする球座標系を用いて点 P の位置を $(r, 0, 0)$ と表わす。球面上の任意の点での面電荷密度は $\xi = \boxed{\qquad\qquad}$ であるから、球面の上の点 $(a,\ \theta,\ \varphi)$ (これを Q とする)の付近の微小面積 dS の上にある電荷は $\xi\, dS = \boxed{\qquad\qquad}\, d\theta\, d\varphi$ である。この微小電荷により点 P に生じる電位は、PQ 間の距離 r_{PQ} を用いて $d\phi = \boxed{\qquad\qquad} / r_{PQ}$ と書けるので、 これを球面全体にわたって積分することにより、球面上の全電荷によって点 P に生じる電位は

$$\phi(r) = \int_0^{\pi} \boxed{\qquad\qquad}\, d\theta$$

と表わされる。ただし、z 軸に関しての対称性を利用して φ での積分を行ってある。



θ についての積分は以下のようにして行うことができる。まず、三角形 OQP についての余弦定理 $r_{PQ}^{\ 2} = r^2 - 2ar\cos\theta + a^2$ を用いて

1 - 2	第１志望専攻	電気 通信 電子	電情工 電磁 電情	受験番号	

積分変数を θ から r_{PQ} に変換する。上式から、

$2\,r_{PQ}\,dr_{PQ} = \boxed{}\,d\theta$ という関係が得られるので、これを用いて

$$\phi(r) = \int_{min}^{max} \boxed{}\,dr_{PQ}$$

を得る。ただし積分の上限と下限は

1. $r > a$ のとき

　$max = \boxed{}$、 $min = \boxed{}$

2. $r < a$ のとき

　$max = \boxed{}$、 $min = \boxed{}$

である。従って、球面の中心点 O からの距離が r の点 P での電位は

$$\phi(r) = \begin{cases} \boxed{} & (r > a) \\ \boxed{} & (r < a) \end{cases}$$

であり、また電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、$\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$ を r, θ, φ 方向の単位ベクトルとして

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \boxed{} & (r > a) \\ \boxed{} & (r < a) \end{cases}$$

である。

25点

2－1	第１志望専攻	電気　通信　電子	電情工 電磁　電情	受験番号	

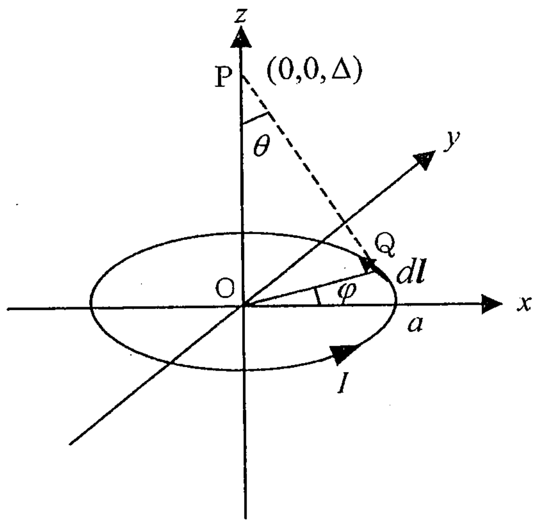
以下の空白に適切な語句、数字または数式を記入せよ。ただし、直角座標系における x, y および z 方向の単位ベクトルとしてはそれぞれ $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y$ および $\boldsymbol{i}_z$ を用いよ。

一般的に、点Ｑに存在する微小ベクトル線素 $\boldsymbol{dl} = \boldsymbol{i}_l dl$ に沿って流れる、大きさが I の定常な微小電流要素によって点Ｐに生じる磁界の強さ $\boldsymbol{dH}$ は、点Ｑから点Ｐの方向を向く単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_r$ 、線分 QP の長さを r 、点Ｑにおける $\boldsymbol{dl}$ の方向を向く単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_l$ 、$dl = |\boldsymbol{dl}|$ とすると、

$$\boldsymbol{dH} = \boxed{\qquad\qquad} (\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_r) \tag{1}$$

と表される。式（１）は $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ の法則と呼ばれている。線電流全体によって生じる磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ を求めるためには、式（１）で与えられる $\boldsymbol{dH}$ を線電流全体にわたって積分すればよい。

次に、右の図に示すように、$x-y$ 平面内の原点を中心とする半径 a の円周上を大きさが I の定常な線電流が流れているとき、z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,\Delta)$ に生じる磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ を求めてみよう。



まず、図中の線電流上で方位角 φ の位置にある点Ｑの直角座標系における座標は

($\boxed{\qquad\qquad}$, $\boxed{\qquad\qquad}$, 0)

である。また、点Ｑにおける $\boldsymbol{i}_l$ は $\boldsymbol{i}_x$ および $\boldsymbol{i}_y$ を用いて

$$\boldsymbol{i}_l = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

と表される。

次に、点Ｑにおける $\boldsymbol{dl}$ の部分を流れる微小電流要素によって z 軸上の点Ｐに生じる磁界の強さ $\boldsymbol{dH}$ を求めよう。直線 PQ と z 軸のなす小さいほうの角を θ とおくと、$\theta = \tan^{-1}(a/\Delta)$ であり、点Ｑにおける $\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y$ および $\boldsymbol{i}_z$ を用いて

$$\boldsymbol{i}_r = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

と表される。また、$r = \sqrt{a^2 + \Delta^2}$, $dl = a\,d\varphi$ であることを用いると、式（１）より

$$\boldsymbol{dH} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

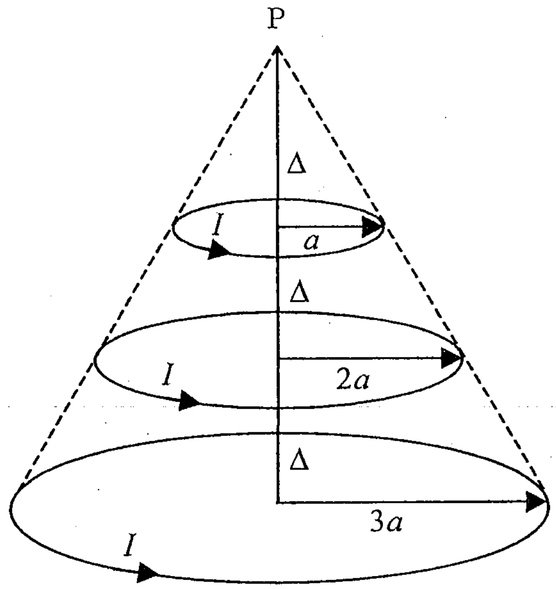
となる。これを φ について積分し、円形ループ線電流によって点Ｐに生じる磁界の強さ

$$\boldsymbol{H} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{2}$$

を得る。

2−2	第1志望専攻	電気　通信　電子	電情工 電磁　電情	受験番号	

さらに、右の図に示すように、円形ループ線電流が円錐面に内接して等間隔Δで3つ並んでいる場合について考える。ループ電流の大きさIおよび電流の向きはすべてのループで等しく、一番小さなループの半径をaとする。このとき、式（2）の結果を用いると、円錐の頂点における磁界の強さの絶対値$|\boldsymbol{H}|$は



となる。また、円形ループ線電流が円錐面に内接して等間隔Δで無限個並んでいる場合の円錐の頂点における磁界の強さの絶対値$|\boldsymbol{H}|$は

となる。

２５点

3－1	第１志望専攻	電気　電子　通信	電情工		受験番号	
			電磁	電情		

電磁波に関する以下の記述の空欄に適当な数式、語句を記入せよ。

誘電率がε、透磁率がμ、導電率がσであり、導電電流以外の自由電流および自由電荷が存在しない一様な媒質がある。この媒質中で電磁波が満たすべきマクスウェルの基本式は、電界を $\boldsymbol{E}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、電流密度を$\boldsymbol{J}$、電束密度を$\boldsymbol{D}$、磁束密度を$\boldsymbol{B}$、時間をtとし、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

という関係式を用いることにより、$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{H}$を使って、次のように表すことができる。

アンペア・マクスウェルの法則　① ［　　　　］　(1)

ファラデー・マクスウェルの法則　② ［　　　　］　(2)

電束に対するガウスの法則　③ ［　　　　］　(3)

磁束に対するガウスの法則　④ ［　　　　］　(4)

式(1)～(4)とベクトル微分公式　$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$　を使って電界 $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式を導くと、

⑤ ［　　　　］　(5)

となる。

次に、電磁波のエネルギーの流れとして、ポインティング・ベクトル$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$を考える。この式の右辺の空間微分をとると、

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} \qquad (6)$$

となる。式(6)にマクスウェルの基本式(1)～(2)を代入すると、

$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{H} \cdot$ ⑥ ［　　］ $-$ ⑦ ［　　］ $- \boldsymbol{J} \cdot$ ⑧ ［　　］　(7)

が得られる。上式の右辺において、

第１項は、単位体積あたりの ⑨ ［　　　　］ の時間変化

第２項は、単位体積あたりの ⑩ ［　　　　］ の時間変化

第３項は、単位体積、単位時間当たりに発生する ⑪ ［　　　　］

となっていることがわかる。

M-05-磁気

3－2	第１志望専攻	電気　電子　通信	電情工 電磁 ｜ 電情	受験番号	

誘電率ε、透磁率μ、導電率σ=0 の無損失媒質と完全導体が無限平面によって接している。無損失媒質側から完全導体表面に、角周波数ωで正弦波的に時間変化する平面波が垂直に入射した場合に完全導体表面に働く力を考える。今、平面波の進行方向を z 軸にとり、境界面を z=0、z<0 を無損失媒質、z>0 を完全導体とし、平面波の電界を $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{i}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$、磁界を $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{i}_y H_0 \cos(\omega t - kz)$ となるように x 軸、y 軸をとる。ただし、k は波数であり、$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ で与えられる。また、$\boldsymbol{i}_x$、$\boldsymbol{i}_y$ はそれぞれ x 方向、y 方向の単位ベクトルである。完全導体表面における平面波の反射では、反射電界および反射磁界を $\boldsymbol{E}_r$、$\boldsymbol{H}_r$ とすると、入射電界と反射電界および入射磁界と反射磁界の間には

$\boldsymbol{E}_i =$ ⑫ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (8)

$\boldsymbol{H}_i =$ ⑬ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (9)

という関係が成り立つ。

従って、完全導体表面には、磁界による面電流密度 $\boldsymbol{J}_s$ が ⑭ ＿＿＿＿ 軸方向に発生し、その面電流密度の大きさ J_0 は、E_0 を使って表すと、

$$J_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \cos\omega t \tag{10}$$

となる。無損失媒質側および完全導体側の磁束密度をそれぞれ $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ とすると、面電流には $\boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{B}_2$ の平均値が作用すると考えることができるから、この面電流 $\boldsymbol{J}_s$ の単位面積あたりに働く力 $\boldsymbol{F}$ は、

$\boldsymbol{F} =$ ⑮ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (11)

で与えられる。磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ は、平面波の磁界 $\boldsymbol{H}_i$ で表すと、

$\boldsymbol{B}_1 =$ ⑯ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (12)

$\boldsymbol{B}_2 =$ ⑰ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (13)

となるので、式(10)～(13)より、$\boldsymbol{F}$ を E_0、ε、ω、t および単位ベクトルを使って表すと、

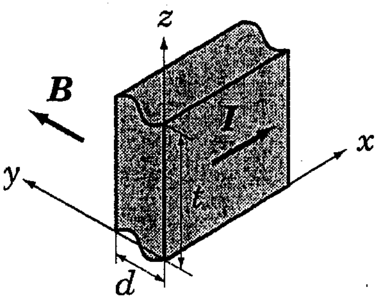
$\boldsymbol{F} =$ ⑱ ＿＿＿＿＿＿＿＿ (14)

となる。

２５点

4−1	第１志望専攻	電気　通信　電子	電情工 電磁　電情	受験番号	

[1]右図に示すように、y 方向の厚さ d、z 方向の厚さ t、x 方向には無限に長い導電性材料がおかれている。x、y、z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}_x$、$\boldsymbol{i}_y$、$\boldsymbol{i}_z$ とした時、導電性材料には、一様な電流 $\boldsymbol{I} = I_0\boldsymbol{i}_x$ が流れている。ここで、y 方向を向く磁束密度 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{i}_y$ の一様な静磁界を印加した時、以下の問いに答えよ。ただし、導電性材料の導電電流に寄与する荷電粒子は電子とし、その電荷を $-e$、単位体積あたりの電子数を n とする。



導電性材料内の電子の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、電子は磁界によって $\boldsymbol{F} =$ ① の力を受ける。$\boldsymbol{v}$ の各成分を v_x、v_y、v_z とすると、$\boldsymbol{F}$ の各成分を求めることができる。これらのうち $\boldsymbol{F}$ の z 成分 F_z は $F_z =$ ② となる。

この力による結果、材料の z 方向に電荷の偏りが生じ、z 方向の電界 $\boldsymbol{E} = E_z\boldsymbol{i}_z$ が発生する。電子の z 方向の移動は、電子にかかる磁界による力と電界による力が釣り合うまで続く。両方の力が釣り合った時、$E_z =$ ③ と求められる。さらに、材料の下側表面を基準とした上側表面の電位 V は、$V =$ ④ となる。

両方の力が釣り合った後は、電子は ⑤ 方向にのみ移動する。この時、電子の速度 $\boldsymbol{v}$ と n、e、$\boldsymbol{I}$ の関係式は $\boldsymbol{I} =$ ⑥ であるから、V は B_0、I_0、d、e、n を用いて $V =$ ⑦ と表される。

解答欄

①	②
③	④
⑤	⑥
⑦	

4−2	第1志望専攻	電気　通信　電子	電情工 電磁 ｜ 電情	受験番号	

[2]　半径 a の球の内部に正の電荷量 q が一様に分布している．球内の誘電率はε_0とする．球の中心を極座標系 $(r,\ \theta,\ \phi)$ の原点に選ぶと、系の対称性により，球の内部の電界は半径方向成分 E_r のみとなり次式で表せる．

$$E_r \quad = \quad q\,r\,/\,(4\pi\varepsilon_0 a^3) \qquad .$$

原点から r なる距離に質量 m，電荷量 $-q$ の点電荷があるとする．ただし、$r < a$ とする．点電荷に働く力は、半径方向成分 F_rのみとなり

F_r = ⑧

である。点電荷の速度に比例する力は働かないとすると、点電荷に対する運動方程式は

⑨ = F_r 　　.

この運動方程式を，初期条件 ($t=0$ で $r=r_0<a$，$dr/dt=0$) を用いて解くと

$r=$ ⑩ 　　,

と求まる。

解答欄

⑧	⑨
⑩	

25 点