

平成 29 年 4 月入学及び平成 28 年 9 月入学  
大学院修士課程・専門職学位課程入学試験

工学院 電気電子系

筆答専門試験科目

想 定 問 題
---------

平成 28 年 1 月

東京工業大学

- ※ 出題される分野、問題数等本想定問題の内容は、実際の試験問題とは異なる場合があります。
- ※ 各系の試験概要については、2月上旬に公表予定です。
- ※ 本入学試験にかかる募集要項は、4月上旬に本学ホームページで公表し、志願票等を含む冊子を5月上旬より配布する予定です。

専門科目（午前）

28 大修

数学

時間 9:30 ～ 11:00

注 意 事 項

1. 大問1の解答は答案用紙綴りの1枚目, 大問2の解答は答案用紙綴りの2枚目, 大問3の解答は答案用紙綴りの3枚目に記入せよ。
  2. すべての答案用紙に受験番号を記入せよ。
  3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。
  4. なお虚数単位を  $j$  と表し,  $j^2 = -1$  である。
-

問 題 分 野
数学

【数学】  
(次ページに続く)

1.  $x$  の関数  $y$  に関する 2 階斉次微分方程式について、以下の問に答えよ。ただし、解答は導出過程も含めて答えること。

1) 微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$  ( $a, b$  は実定数) の一般解は、特性方程式  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  を解くことにより求めることができる。特性方程式が、異なる 2 つの複素解  $h \pm kj$  ( $h, k$  は実定数) をもつとき、 $a, b$  の満たすべき条件を求めよ。

2) 問 1) で求めた条件が成り立つ場合、微分方程式の一般解を、 $h, k, j$  を含む関数で表せ。

3) 問 2) で求めた微分方程式の一般解を、 $j$  を含まない関数で表せ。

4) 問 3) の結果を用いて、微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$  の一般解を求めよ。

問 題 分 野
数学

【数学】  
(次ページに続く)

2. 周期関数  $f(t)$  の複素フーリエ級数展開は次式で与えられる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t), \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

ただし,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  は  $f(t)$  の周期とする。これを用いて, 以下の問に答えよ。ただし, 解答は導出過程も含めて答えること。

- 1)  $f(t)$  が実数値関数であるとき,  $c_n$  と  $c_{-n}$  の関係を表す式を導出せよ。
- 2)  $f(t)$  の導関数  $f'(t)$  の複素フーリエ係数を  $d_n$  とする。 $f(t)$  の複素フーリエ級数展開が項別微分可能であるとして,  $d_n$  を  $c_n$  で表せ。
- 3)  $f(t)$  の 1 周期分が次式で与えられるとき,  $f(t)$  の複素フーリエ係数  $c_n$  を求めよ。

$$f(t) = |t|, \quad -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$$

- 4) 問 3) で与えられた周期関数  $f(t)$  およびその導関数  $f'(t)$  を,  $t$  を横軸にして  $-T \leq t < T$  の範囲で別々にグラフ化せよ。ただし, 微分不可能な点はグラフから除外してよい。

問 題 分 野
数学

3. 確率モデル  $X = \theta + \varepsilon$  において, 誤差  $\varepsilon$  の分布が, 確率密度関数  $f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \exp(-|\varepsilon|)$  で表される両側指数分布に従うとする。  $n$  個の独立な観測値  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  が得られるとき, 以下の手順で母数  $\theta$  の最尤推定量を求めよ。ただし,  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  はすべてお互い重複しない値とする。なお最尤推定とは, 確率分布が既知であるが母数が未知であるとき, 尤度関数  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i - \theta)$  を最大にする母数を求める手法である。解答は導出過程も含めて答えること。

- 1)  $\theta$  の対数尤度関数を求めよ。
- 2)  $n$  が偶数のとき,  $\theta$  の最尤推定量の範囲を求めよ。
- 3)  $n$  が奇数のとき,  $\theta$  の最尤推定量を求めよ。

専門科目(午後 1)

28 大修

電気回路

時間 13:30 ～ 15:00

注 意 事 項

1. 大問 1 の解答は答案用紙綴りの 1 枚目, 大問 2 の解答は答案用紙綴りの 2 枚目, 大問 3 の解答は答案用紙綴りの 3 枚目に記入せよ。
  2. すべての答案用紙に受験番号を記入せよ。
  3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。
  4. なお虚数単位を  $j$  と表し,  $j^2 = -1$  である。
-

1. 図 1.1 に示す回路について以下の問に答えよ。ただし、インダクタンス、キャパシタンス、抵抗値、および時刻はそれぞれ、 $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $t$  とする。電源電圧は角周波数  $\omega$  の正弦波交流  $v(t)$  であり、その実効値を  $V_e$  とする。

- 1) 端子 1-1' から右側を見込む並列アドミタンスを求めよ。
- 2) インダクタンス  $L$  は可変であるとするとき、端子 1-1' に流れる電流  $i(t)$  が角周波数  $\omega$  に関係なく電源電圧と同位相になるための  $L$  の条件を求めよ。
- 3) 問 2) の条件が満たされるとき、電流  $i(t)$  の実効値  $I_e$  を求めよ。ただし、問 2) で求めた  $L$  の条件を用いて簡単化すること。
- 4) 問 2) の条件が満たされるとき、この回路で消費される電力  $P$  を求めよ。

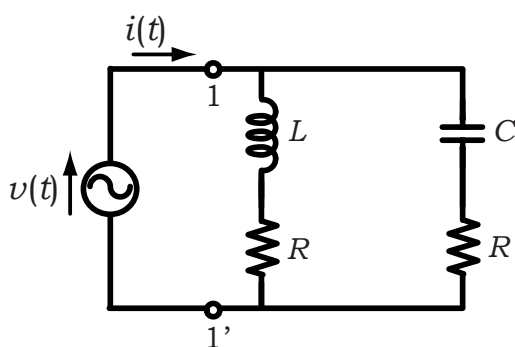


図 1.1

2. 図 2.1 の回路について以下の問に答えよ。 $R$ を抵抗値,  $L$ をインダクタンス,  $t$ を時刻とする。電流  $i(t)$  と電圧  $v(t)$  の正方向を図 2.1 に示すように定義する。 $E_0$  を直流電圧源の電圧値とし,  $I_0$  を直流電流源の電流値とする。時刻  $t=0$  でスイッチ  $S$  を閉じた。ただし,  $t<0$  では直流定常状態にあるものとする。また,  $E_0 > RI_0 > 0$  とする。

- 1) スイッチ  $S$  を閉じる直前の電流  $i(-0)$  および電圧  $v(-0)$  を求めよ。
- 2) スイッチ  $S$  を閉じた直後の電流  $i(+0)$  および電圧  $v(+0)$  を求めよ。
- 3) スイッチ  $S$  を閉じて十分に時間が経過し, 直流定常状態に達した時の電流  $i(+\infty)$  および電圧  $v(+\infty)$  を求めよ。
- 4)  $t>0$  において電圧  $v(t)$  を求めよ。 $E_0, I_0, R, L, t$  を用いて表せ。
- 5) 電圧  $v(t)$  の概略波形を描け。ただし, 問 1), 2), 3) で求めたスイッチ  $S$  を閉じる前後の電圧値の変化や直流定常状態の値がわかるように記載すること。

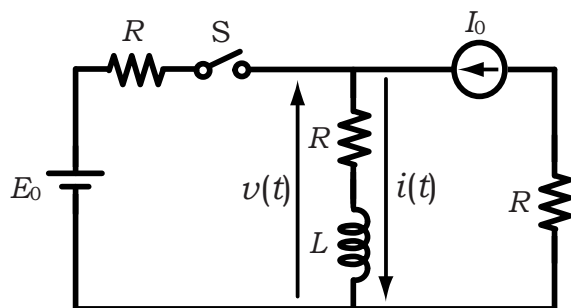


図 2.1



3. 以下の問に答えよ。ただし、 $v_{in}$ ,  $v_{out}$ ,  $v_{gs}$  は小信号電圧を示し、 $V_{in}$ ,  $V_{out}$ ,  $V_{DD}$  は大信号電圧（バイアス成分）を示す。 $R$  は抵抗値、 $L$  はインダクタンス、 $C$  はキャパシタンスとする。ただし、図 3.1 と図 3.2 の回路で用いている MOSFET の小信号等価回路は、電圧制御電流源のみからなる図 3.3 の回路で表される。ここで、 $g_m$  は MOSFET のトランスコンダクタンスとする。

- 1) 図 3.1 に示す増幅器の小信号等価回路を図示せよ。
- 2) 問 1) で求めた小信号等価回路を用いて、電圧利得を表す伝達関数  $A_1(j\omega) (= v_{out} / v_{in})$  を求めよ。ただし、 $\omega$  は角周波数とする。
- 3) 図 3.2 に示す発振器について、点 X に対する開ループ利得  $A_2(j\omega)$  を求めよ。
- 4) 問 3) の結果から、図 3.2 の回路が発振するための位相条件 ( $\text{Im}[A_2(j\omega)] = 0$ ) を用いて、発振周波数  $f_0$  を求めよ。
- 5) 問 4) の結果と、図 3.2 の回路が発振するための利得条件 ( $\text{Re}[A_2(j\omega)] > 1$ ) を用いて、 $g_m$  が満たすべき条件を不等式により示せ。

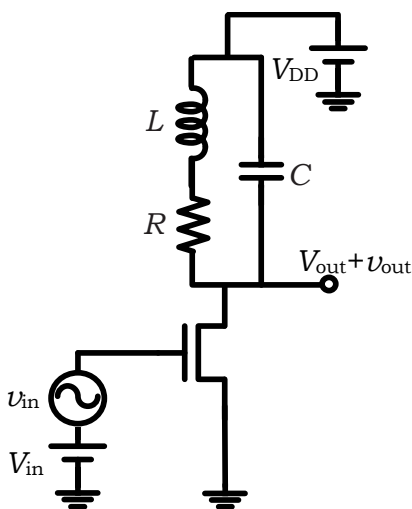


図 3.1

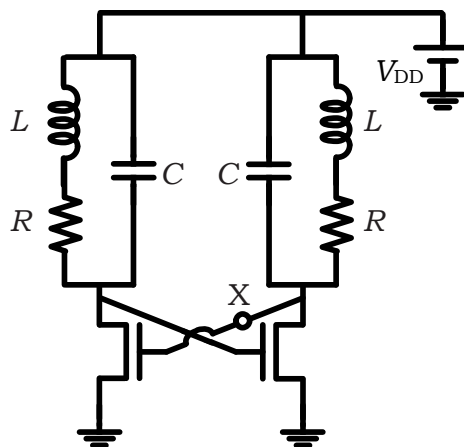


図 3.2

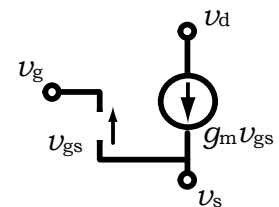


図 3.3

専門科目(午後 2)

28 大修

電磁気学

時間 15:30 ~ 17:00

注 意 事 項

1. 大問 1 の解答は答案用紙綴りの 1 枚目, 大問 2 の解答は答案用紙綴りの 2 枚目, 大問 3 の解答は答案用紙綴りの 3 枚目に記入せよ。
  2. すべての答案用紙に受験番号を記入せよ。
  3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。
  4. なお虚数単位を  $j$  と表し,  $j^2 = -1$  である。
-

1. 図 1.1 のように、長さ  $\ell$ 、半径  $a$  の円柱状の内部導体と、厚さを無視できる長さ  $\ell$ 、半径  $c$  の円筒状外部導体がある。内外の導体の中心軸は一致している。 $r = b$  を境界として 2 種類の一様な誘電体で導体間を満たし、内側層と外側層の誘電率をそれぞれ  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  とする。ただし、 $r$  は中心軸から半径方向外向きを正とする。また、真空の誘電率は  $\varepsilon_0$  とする。内側の導体に  $+Q$ 、外側の導体に  $-Q$  の電荷を与えた。以下の問に答えよ。ただし、 $\ell$  は  $c$  に比べて十分に長く、端部効果は無視する。

- 1)  $a \leq r \leq c$  における電束密度の大きさを求めよ。
- 2)  $a < r < b$ ,  $b < r < c$  における電界の大きさをそれぞれ求めよ。
- 3) 内外の導体間の電位差を求めよ。
- 4) 内外の導体間の静電容量を求めよ。
- 5) 2 つの誘電体の境界に生じる分極電荷を求めよ。

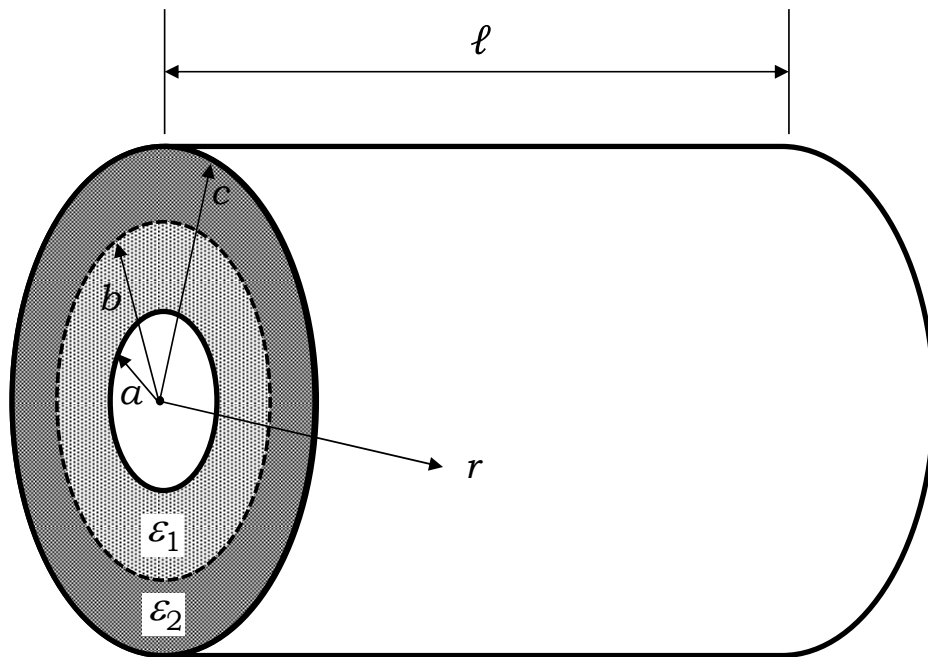


図 1.1

2. 図 2.1 のように、半径  $a$  の円柱状の内部導体と厚さを無視できる半径  $b$  の円筒状の外部導体で構成される無限長の同軸線路がある。内部導体では  $+z$  方向に、外部導体では  $-z$  方向に電流  $I$  が流れる往復回路であり、各導体内では電流は一様に流れている。ただし、内部導体の透磁率は  $\mu_i$  とし、内部導体以外の透磁率は真空の透磁率  $\mu_0$  とする。中心軸からの距離を  $r$  として、以下の問に答えよ。

- 1) 内部導体中の電流密度の大きさ  $J$  を示せ。
- 2) 中心軸からの距離  $r$  における磁界の大きさ  $H$  を  $r$  の関数  $H(r)$  として示せ。
- 3)  $\mu_i = 2\mu_0$  として磁束密度の大きさ  $B$  を  $r$  の関数  $B(r)$  としてグラフに表せ。
- 4) 中心軸からの距離  $r$  が  $a < r < b$  となる領域での長さ  $\ell$  あたりの磁束  $\Phi_i$  を求めよ。
- 5) 中心軸からの距離  $r$  が  $0 < r < a$  となる内部導体部分の領域で電流と鎖交する長さ  $\ell$  あたりの磁束  $\Phi_i$  を求めよ。
- 6) この同軸線路の長さ  $\ell$  あたりの自己インダクタンス  $L$  を求めよ。

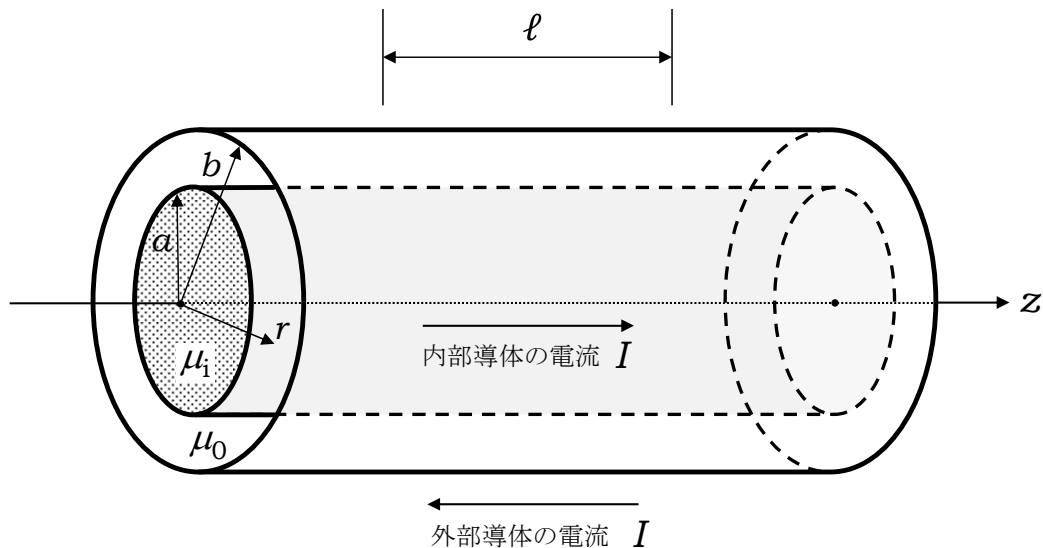


図 2.1

3. 図 3.1 のように、真空中に半径  $a$  の 2 つの円板状電極が間隔  $d$  で対置するキャパシタがあり、交流電圧が時間  $t$  の関数  $v(t) = V_0 \sin \omega t$  として印加されている。円板状電極間の下側の電極から  $\frac{d}{2}$  の位置で中心軸から径方向に距離  $r$  の位置を通る円を  $K$  とし、この円上にある点を  $P$  とする。2 つの円板状電極と円  $K$  は互いに平行である。点  $P$  に微小面積  $\Delta S$  を持つ起電力検出用のコイル（1 回巻）を設置する。このコイル面の法線方向は円  $K$  の周方向を向くものとする。簡単のため、このコイル自身やコイルに発生する起電力によって、電磁界や電束は影響を受けないものとし、キャパシタの端部効果は無視する。真空の誘電率および透磁率はそれぞれ  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  とする。以下の問に答えよ。

- 1) 導線を流れる電流  $i(t)$  を求めよ。
- 2) キャパシタ内部に点  $P$  がある場合 ( $0 \leq r < a$ ) の点  $P$  における電束密度の大きさ  $D(t)$  を求めよ。
- 3) 以下の場合の点  $P$  における磁界の大きさ  $H$  を  $r$  と  $t$  の関数  $H(r, t)$  として表せ。
  - a) キャパシタ内部に点  $P$  がある場合 ( $0 \leq r < a$ )
  - b) キャパシタ外部に点  $P$  がある場合 ( $a \leq r$ )
- 4) キャパシタ外部に点  $P$  がある場合 ( $a \leq r$ )、電磁誘導によりコイルに生じる起電力の大きさ  $E$  を  $r$  と  $t$  の関数  $E(r, t)$  として表せ。

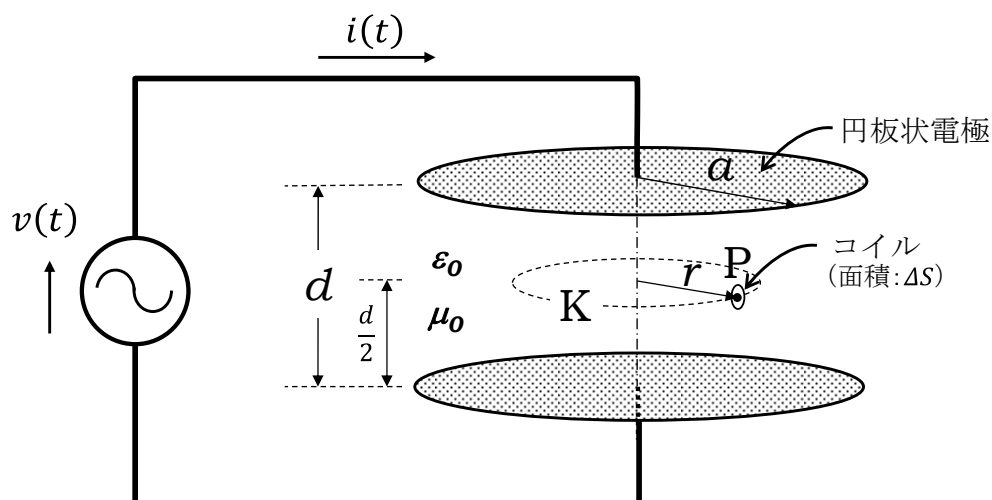


図 3.1

## 専門科目 量子力学・物性基礎(想定過去問題)

本想定過去問題では合計6題を掲載しているが、実際の試験問題では2題が出題され、その2題を解答することになるので注意すること。

[1] 図 1-1 に示すように原子核を原点、電子の座標を  $P(x, y, z)$  として、水素原子を考える。電子の質量を  $m$ 、電気素量を  $e$ 、真空中の誘電率を  $\epsilon_0$ 、プランク定数を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  とする。尚、球座標系でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (1)$$

である。

1. エネルギー  $E$  として、 $xyz$  座標系で電子に関するシュレディンガー方程式を書きなさい。波動関数は波動関数  $\Psi(x, y, z)$  とする。
2. 1 で答えたシュレディンガー方程式を球座標系  $(r, \theta, \phi)$  で書きなさい。波動関数は  $\Psi(r, \theta, \phi)$  とする。
3. 2 で答えた式を解くと  $\Psi(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) S_{l,q}(\theta) T_q(\phi)$  のように 3 つの関数の積として表すことができる。ここで、 $n$  は主量子数、 $l$  は方位量子数、 $q$  は磁気量子数である。2 で答えた式を左辺を  $r$  に関する項、右辺を  $\theta$  と  $\phi$  に関する項に分離しなさい。また、この式が恒等的に成り立つための条件を答えなさい。
4. 主量子数  $n$ 、方位量子数  $l$ 、磁気量子数  $q$  の間の関係を論じ、1 つの主量子数に対していくつの状態が存在するか  $n$  を使って答えなさい。
5.  $T_q(\phi)$  は  $A$  を変数として  $T_q(\phi) = A \exp(iq\phi)$  と書ける。 $z$  軸まわりの角運動量をもとめなさい。 $z$  軸まわりの角運動量演算子は  $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$  である。
6. 上で示した 3 つの量子数に加えて、電子の状態を記述するもう一つの量子数は何か答えなさい。また、その量子数と取り得る値をすべて答えなさい。

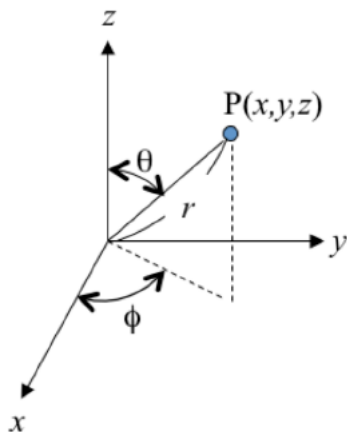


図 1-1 水素原子

[2] 図1に示すように、質量  $m$  の粒子が幅  $d$  の無限の深さのポテンシャル井戸に閉じ込められている。ポテンシャル  $V$  は以下のように記述される。プランク定数を  $2\pi$  で割った定数を  $\hbar$  とする。

$$V = \begin{cases} 0 & (0 < x < d) \\ \infty & (x < 0 \text{ または } d < x) \end{cases} \quad (1)$$

1. 規格化された波動関数を  $\psi(x)$  とするとき、時間を含まないシュレディンガー方程式を書きなさい。
2. 1で答えたシュレディンガー方程式を解いて、波動関数  $\psi_n^{(0)}(x)$  と全エネルギー  $E_n^{(0)}$  を求めなさい。  
ここで  $n$  は量子数 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする。

次に、図2に示すような摂動のある無限の深さのポテンシャル井戸に質量  $m$  の粒子が閉じ込められている場合を考える。 $V$  は以下の式で表される。

$$V = \begin{cases} V_0 & (0 < x < q) \\ 0 & (q < x < d) \\ \infty & (x < 0 \text{ または } d < x) \end{cases} \quad (2)$$

3. 区間  $(0 < x < q)$  の摂動ハミルトニアン  $\hat{H}^P$  を答えなさい。
4. 1次の摂動エネルギー  $E_n^P$  を求めなさい。
5. 粒子の全エネルギー  $E_n$  を求めなさい。
6. 波動関数  $\psi_n(x)$  は2. で求めた  $\psi_n^{(0)}(x)$  を使って以下の式で表される。波動関数  $\psi_n(x)$  を求めなさい。

$$\psi_n(x) = \psi_n^{(0)}(x) + \sum_{k \neq n} \frac{(\hat{H}^P)_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)}(x) \quad (3)$$

ここで、 $(\hat{H}^P)_{kn}$  は摂動ポテンシャルの行列要素であり以下の式で与えられる。

$$(\hat{H}^P)_{kn} = \langle \psi_k^{(0)}(x) | V_0 | \psi_n^{(0)}(x) \rangle \quad (4)$$

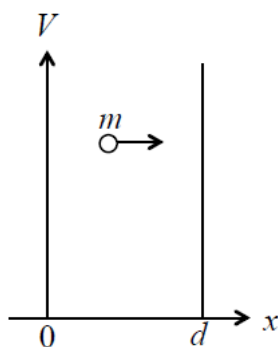


図 2-1 井戸型ポテンシャル

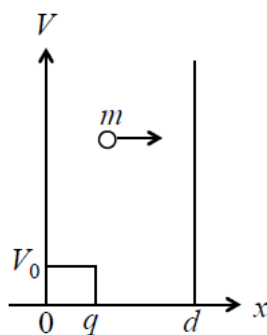


図 2-2 摂動のある井戸型ポテンシャル

[3] プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$ , また,  $i^2 = -1$  とする.

1. 無限に広い 1 次元の空間で一定のエネルギー  $E$  で自由運動する電子を考えよう. 電子の質量を  $m$  として, 次の間に答えよ. ただし, 自由電子のシュレーディンガー方程式は次式で与えられるものとする.  $\Psi(x)$  は電子の波動関数とする.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E\Psi(x)$$

- 上記のシュレーディンガー方程式の解は  $A, k$  を定数とすると,  $\Psi(x) = A \exp(ikx)$  で与えられる.  $k$  を  $m, E, \hbar$  を用いて表せ.
- 位置  $x$  において電子を見出す確率密度はどのようなになるか.
- 電子のもつ運動量  $p$  の期待値を  $k$  を用いて表せ.
- 電子を位置  $x$  で測定した時の運動量の不確定性  $\Delta p$  はいくらかになるか.
- 電子の位置と運動量を測定する際の不確定性について簡単に説明せよ.

2. 図3-1 に示すポテンシャル障壁にエネルギー  $E$  を持つ質量  $m$  の電子が  $x < 0$  の領域から入射する場合を考えよう. ただし,  $x = 0$  と  $x = a$  の間にポテンシャル障壁  $V_0$  ( $V_0 > E$ ,  $E$  は電子のエネルギー) があるとする. また,  $x < 0$ ,  $0 < x < a$ ,  $x > a$  の領域における波動関数をそれぞれ,  $\Psi_0(x), \Psi_{0a}(x), \Psi_a(x)$  とする.

- $0 < x < a$  の領域における電子の満たすべきシュレーディンガー方程式を記せ.
- $x < 0$  の領域における電子の波動関数を  $\Psi_0(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$  ( $A, B, k$  は定数),  $0 < x < a$  の領域の波動関数を  $\Psi_{0a}(x) = C \exp(-\alpha x) + D \exp(\alpha x)$  ( $C, D, \alpha$  は定数),  $x > a$  の領域の波動関数を  $\Psi_a(x) = F \exp(ikx)$  ( $F, k$  は定数) と表す時,  $x = 0$  と  $x = a$  において波動関数が満たすべき境界条件をすべて示せ.
- 電子が障壁を通過する際の透過率は, 入射波と透過波の確率の流れ密度の比で与えられる. 透過率を  $A, B, C, D, F$  の中から必要なものを用いて表せ. ただし, 確率の流れ密度  $S$  は波動関数を  $\Psi(x)$  とすると, 次式で表される.

$$S = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^*(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*(x)}{\partial x} \Psi(x) \right) \quad \Psi^*(x) \text{ は } \Psi(x) \text{ の複素共役を表す.}$$

- 図は  $x$  の負より正方向に進む電子の波動関数の実部を示したものである. 解答用紙にこの図を描き,  $x > 0$  の領域における電子の波動関数の実部を同様に図示せよ. また, それぞれの領域における確率密度の概略を, 横軸を  $x$ , 縦軸を確率密度として, 別に作図をして示せ.

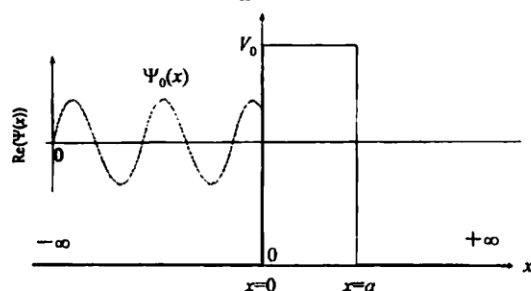


図3-1



[4]

半径  $a$  の円周上を運動する質量  $m$  の粒子を考える. この円周上でポテンシャルエネルギーを零とすれば, 角度  $\theta$  を用いてシュレディンガー方程式は次式で与えられる.

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{d^2}{d\theta^2}$$

固有関数  $\psi$  は周期的境界条件  $\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta)$  を満たす.  $E$  はエネルギー固有値である. また,  $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割った定数である.

- (1) この場合,  $\psi$  は  $\psi = Ae^{in\theta}$  の形に書ける.  $A$  は任意定数である.  $n$  のとり得る値を求め, 規格化された固有関数を示せ.
- (2) エネルギー固有値を求めよ.
- (3) この系における角運動量の演算子  $\hat{l}$  を, 極座標表示で求めよ. 必要なら, 以下を用いて良い.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

- (4) 交換関係  $[\hat{H}, \hat{l}]$  を求め, この結果について, 1 行程度で簡単に論ぜよ.
- (5) 設問(1)の固有状態における角運動量を求めよ.
- (6) この系のハミルトニアンに  $\hat{H} + \lambda \cos 2\theta$  のように摂動が加えられた場合, 第一励起状態のエネルギーと零次近似の波動関数を求めよ.  $\lambda$  は実数である.

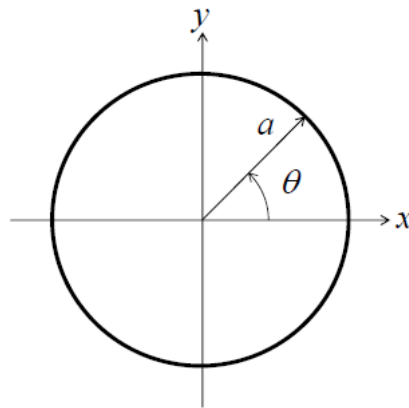


図4-1

[5]

図 5-1(a)のように六角形の二次元格子が規則的に配置した単層結晶がある. この結晶の単位胞は図中の斜線部で表され, この単位胞の中には2つの原子が含まれる. 以下, それぞれ原子の位置をAサイト, Bサイトと呼ぶことにする. 並進ベクトル  $T$  によって単位胞の位置を指定し, 単位胞内にある A サイトと B サイトの位置をそれぞれベクトル  $\tau_A, \tau_B$  で指定する.  $T$  は基本格子ベクトル  $a_1, a_2$  を用いて,  $T = n_1 a_1 + n_2 a_2$  で与えられる.  $n_1, n_2$  は整数である. ここで, サイト A および B にある原子に関するブロッホ和  $\chi_A, \chi_B$  を次式で定義する.

$$\chi_A = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1, n_2} e^{ik \cdot (T + \tau_A)} \phi_A(r - T - \tau_A)$$

$$\chi_B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n_1, n_2} e^{ik \cdot (T + \tau_B)} \phi_B(r - T - \tau_B)$$

$\phi_A, \phi_B$  はそれぞれ規格化された原子軌道関数である.  $k$  は波数ベクトルである. また,  $N$  は A サイトおよび B サイトにある原子の総数である.  $\chi_A, \chi_B$  を用いれば, この単層結晶の電子の波動関数  $\Psi$  は, 次式のように書ける.

$$\Psi = C_A \chi_A + C_B \chi_B$$

ただし  $C_A, C_B$  は定数である.

- (1) A サイト間の距離を  $a$  とするとき, 基本格子ベクトル  $a_1, a_2$  を求めよ.
- (2)  $a_1, a_2$  に関する基本逆格子ベクトル  $b_1, b_2$  を定め, 図 5-1(b)に示すブリルアンゾーンにおける M 点の座標を求めよ. 図中の  $\Gamma$  点の座標を原点とすること.
- (3) 電子のハミルトニアン  $\hat{H}$  が, 最近接原子間の相互作用を考慮すれば, 以下になることを示せ.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & V(e^{ik \cdot d_1} + e^{ik \cdot d_2} + e^{ik \cdot d_3}) \\ V(e^{-ik \cdot d_1} + e^{-ik \cdot d_2} + e^{-ik \cdot d_3}) & E_0 \end{pmatrix}$$

ただし, 同一サイト上の同一原子軌道間で  $E_0 = \langle \phi_A | \hat{H} | \phi_A \rangle$ ,  $E_0 = \langle \phi_B | \hat{H} | \phi_B \rangle$  とする. また, 最近接原子間の飛び移り積分  $\langle \phi_A | \hat{H} | \phi_B \rangle$ ,  $\langle \phi_B | \hat{H} | \phi_A \rangle$  をともに  $V$  とする, さらに,  $\langle \phi_A | \phi_B \rangle$  などの重なり積分は零とする. 最近接原子は3つあるが, その原子間の位置を表すベクトルを図 5-1(c)のように  $d_1, d_2, d_3$  とする. これらのベクトルは A 原子を始点にしていることに注意せよ.

- (4)  $k$  が図 5-1(b)の  $\Gamma$  点から M 点に変化する場合について, 分散関係係 ( $E-k$  関係) を求め, 図示せよ. ただし,  $k$  の  $x$  成分を  $k_x$  とせよ.

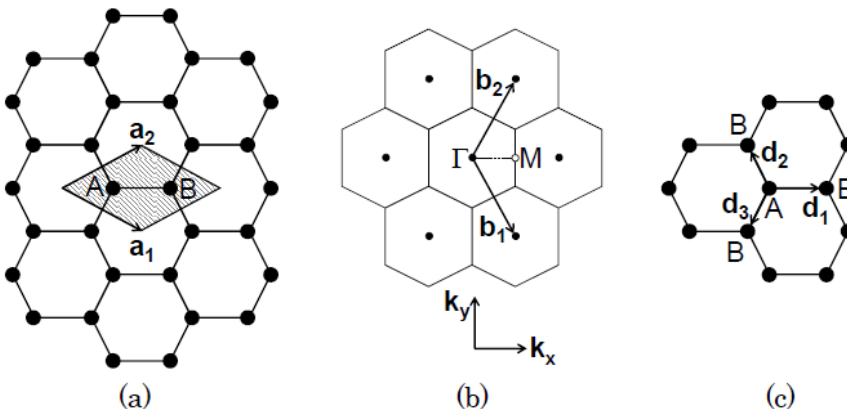


図 5-1

## [6]

半導体中の電子の伝導機構として拡散とドリフトを考え、電子濃度  $n$  に関するキャリア連続の方程式が座標  $x$  と時間  $t$  を用いて次のように表される条件のとき、以下の問いに答えよ。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_e F \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{n - n_0}{\tau_e} + G \quad \dots \textcircled{1}$$

ただし、 $n$  は  $x$  方向のみに変化し、 $y, z$  方向には変化しないものと仮定した。そこで座標は  $x$  方向のみを考え、 $x$  方向の長さは無限に長い ( $-\infty < x < \infty$ ) ものと仮定する。また、半導体の  $y$  方向の幅を  $L_y$ 、 $z$  方向の幅を  $L_z$  とする。ただし、端部効果や量子サイズ効果は無視せよ。式①中、 $F$  は電界の強さを表し、 $D_e$ 、 $\mu_e$  はそれぞれ電子の拡散定数、移動度を表す。また、 $n_0$  は熱平衡状態における電子濃度である。 $\tau_e$  は電子-正孔対の再結合寿命時間と呼ばれ、過剰電子濃度が  $n_0$  に戻るまでの時間の目安を与える。 $G$  は、光照射などによる電子-正孔対生成によって単位時間当たりに増加する電子濃度を表す。

(1) 半導体に外部から一定の強さの光を均一に照射し続ける状況を考える。ここで  $y$  方向には構造が一様に広がり、その方向の変化はないものとし、さらに  $L_z$  は十分小さく、半導体内部の光強度は一定とみなすことができるものとする。その結果、半導体内部には場所によらず均一に電子-正孔対が発生して定常状態となった。電子濃度の熱平衡状態からの増加分  $n - n_0$  を過剰電子濃度  $\Delta n$  と定義すると、この定常状態に達した時の過剰電子濃度  $\Delta n$  を①式の  $G$  と  $\tau_e$  を用いて表しなさい。ただし、半導体の内部にかかる電界  $F$  は 0 と仮定すること。

(2) 前問の状況で、 $t = 0$  において光照射を止めた。 $t \geq 0$  における過剰電子濃度  $\Delta n \equiv n - n_0$  の時間変化  $\Delta n(t)$  が従う微分方程式を示し、それを解くことによって、 $\Delta n(t)$  を式で示せ。

次に、 $\Delta n(x, t)$  に空間分布と時間変化の双方を考慮する状況を考える。

(3) 半導体中の過剰電子濃度の空間的な分布が  $A \cos(kx)$  となるように光照射を行い、時刻  $t = 0$  において、この光照射を止めた。すなわち、 $\Delta n(x, 0) = A \cos(kx)$  とする。ただし、 $A, k$  は  $x, t$  に依存しない定数 ( $\neq 0$ ) であるものとする。また、 $x$  の原点 ( $x = 0$ ) はどこに定めてもよい。

このとき、外部から印加された電界  $F = 0$  の場合の  $t \geq 0$  における過剰電子濃度  $\Delta n(x, t)$  を求め、式で示しなさい。ただし、キャリア連続の方程式の解として  $\Delta n(x, t) = A \cos(kx) \cdot e^{-\alpha t}$  を仮定してよい。

(ただし  $\alpha$  は  $x, t$  に依存しない定数。)

(4) (3) と同様の状況で、時刻  $t = 0$  において、半導体内部に場所に寄らず均一に電界  $F \neq 0$  の印加を開始した。この場合の  $t \geq 0$  における  $\Delta n(x, t)$  を求め、式で示しなさい。

(5) 前問の状況において、 $t \geq 0$ 、位置  $x$  における電子電流  $I_e$  を求め、式で示しなさい。なお、正孔電流は考慮しなくてよい。