東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受　験　番　号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成 26 年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成 25 年 8 月 20 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は 16 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 3 問，化学 2 問，合計 9 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～9 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計 3 枚配られます．　各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

（草稿用紙）

（草稿用紙）

（草稿用紙）

第１問（必修問題）

以下の問に答えよ．

(問1) 実関数 $f(x,y)$ の x に関する偏微分を $f_x(x,y)$ で表す．つまり，$f_x(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ とする．また，$g(x)$ と $G(x)$ を次式で定義する．

$$g(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y, \qquad G(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

ただし，$f(x,y)$ と $f_x(x,y)$ は，$\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ 上で連続な関数とする．

このとき，$a\le x\le b$ を満たす任意の x に対して $\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=G(x)-G(a)$ が成り立つことを示せ．

(問2) (問1) の結果を用いて，$a<x<b$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

が成り立つことを示せ．

(問3) 実数 $\alpha>0,\beta>0$ と自然数 n に対して，$H_n(\alpha,\beta)$ を次式で定義する．

$$H_n(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)^n}\mathrm{d}t$$

$H_1(\alpha,\beta)$ を求めよ．

(問4) (問2) の関係を利用して，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t$ を，$H_1(\alpha,\beta)$ を用いて表せ．さらに (問３) の結果を代入してこの積分を求めよ．

(問5) (問4) と同様にして $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t$ を求め，$H_2(\alpha,\beta)$ を求めよ．

(問6) 一般の自然数 $n\ge 2$ に対して，$H_n(\alpha,\beta)$ を $H_{n-1}(\alpha,\beta)$ を用いて表わせ．

第２問（数学）

行列 $\boldsymbol{A}$ を，実数 $p,\,q$ を用いて次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & p-1 & 1-q \\ 1-q & p+q-1 & 1-q \\ p-1 & 1-p & p+q-1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．ただし，実数の集合を $\mathbb{R}$ と書くことにする．

(問 1) $\boldsymbol{A}$ が固有値 $p,\,q,\,p+q-1$ をもつことを示せ．

(問 2) (問 1)で示された 3 つの固有値が相異なるとき，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(問 3) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x}(\neq 0) \in \mathbb{R}^3$ が存在するとする．このとき，$p,\,q$ が満たすべき条件を示せ．

(問 4) 集合 $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ が，$\mathbb{R}^3$ 内の平面になるとする．このとき，$p,\,q$ が満たすべき条件と，対応する平面の式を示せ．

第３問（数学）

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ は，x, k を実数として以下のように定義される．

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

ここで i は虚数単位であり，e は自然対数の底である．また x, t の関数 $q(x, t)$ に対し，その２次元フーリエ変換は

$$Q(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

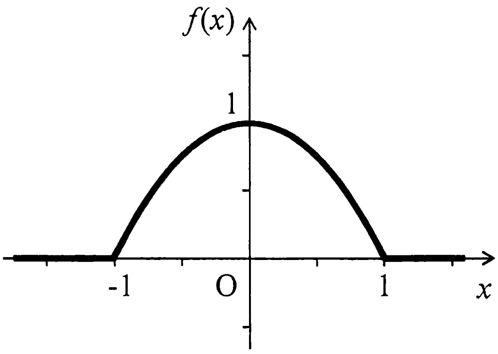
である．いま $f(x)$ は下図のような実数関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

であるとして，以下の問に答えよ．いずれの問においても，最終的な答は積分記号を用いずに表すこと．ただし

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

で与えられるデルタ関数 $\delta(x)$ は用いてよい．



(問 1) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を求めよ．

(問 2) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(k)$ は，$G(k) = f(k)$ を満たすものとする．このときの $g(x)$ を求めよ．

(問 3) $p(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

(問 4) a, b を定数として，$q(x, t) = \cos(ax + bt)$ のとき，その２次元フーリエ変換 $Q(k, \omega)$ を求めよ．

(問 5) ある関数 $q(x, t)$ は $q(x, 0) = f(x)$ を満たしており，その２次元フーリエ変換 $Q(k, \omega)$ は，$\omega \neq ck$ を満たす全ての点 (k, ω) において０である．ただし c は定数とする．このときの $q(x, t)$ を求めよ．

第４問（数学）

正の実数 a に対して，実数値を取る確率変数 X の確率密度関数が，

$$f(x) = \max(a(1-|x|), 0)$$

で与えられているとする．ただし，max 関数は，以下で与えられる．

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & (x \geq y \text{ のとき}) \\ y & (x < y \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) a の値を定めよ．

(問 2) X の平均および X の分散を求めよ．

(問 3) 非負整数 n に対して，X の n 次モーメント

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \mathrm{d}x$$

の値を求めよ．

(問 4) X の累積分布関数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x$$

を求めよ．

(問 5) X のモーメント母関数

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x) \mathrm{d}x$$

を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(問 6) $M'(t), M''(t)$ を，

$$M'(t) = \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}, \quad M''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 M(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

で定義する．このとき，

$$\lim_{t \to 0} M(t), \quad \lim_{t \to 0} M'(t), \quad \lim_{t \to 0} M''(t)$$

の値を求めよ．

第５問（物理学）

図１に示すように，鉛直上向きのz軸上にある回転軸Ｒがモータ Ｍ に結合している．さらに長さlの針金で回転軸Ｒ上の支点Ａからつるされた質量mのおもりが, モータＭにより回され，針金と鉛直方向との角度をθに保ちながら，xy平面内で等速円運動をしている．おもりは速度に比例する空気抵抗力を受けるものとし，その比例係数をbとする．また，重力加速度をgとする．回転軸および針金は十分に固く，その太さと質量は無視できるものとする．

（問１）等速円運動をしているときの，針金の張力S，円運動の周期T，モータのトルク（原点Ｏのまわりの力のモーメントの大きさ）τを求めよ．

（問２）ある時刻t_1において，おもりがx軸を通過した．時刻$t=t_1$における支点Aのまわりでのおもりの角運動量$\vec{L}(t)$の(x,y,z)成分を求めよ．

（問３）時刻$t=t_1$における角運動量の時間的変動$\mathrm{d}\vec{L}(t)/\mathrm{d}t$の$(x,y,z)$成分を求めよ．

次に，モータのトルクをゆっくりと増加させると，θがゆっくり増加した．針金の張力が$2mg$以上になると針金からおもりが外れるものとする．

（問４）おもりが外れる瞬間の角度θ_cを求めよ．

（問５）おもりが外れた瞬間のおもりの座標は$(x,y,z)=(x_0,0,z_0)$，時刻はt_0であった．おもりが外れた後も速度に比例する空気抵抗力を受けることに注意をして，時刻$t\ (t>t_0)$におけるおもりの位置を(x,y,z)座標で求めよ．

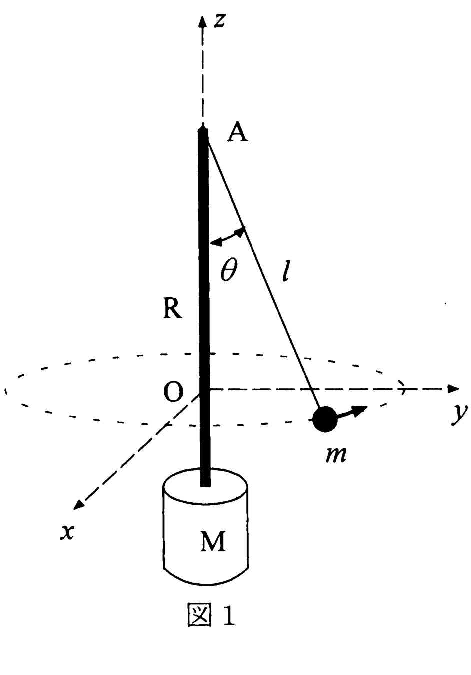


図１

第６問（物理学）

図１のように，半径Rの円形の導線に一定の電流Iが流れている．円の中心を原点とし，z軸は円の中心を通って円を含む面に垂直な方向である．この円電流が，$\vec{r}=(x,y,z)$ の点に作る磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ について，以下の設問に答えよ．$\nabla=(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$とする．

（問１）μ_0を空間の透磁率として，電流密度 $\vec{j}(\vec{r})$，磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ の間に成立するマクスウェルの方程式を書け．

（問２）$\vec{B}(\vec{r})$はベクトルポテンシャル$\vec{A}(\vec{r})$を用いて $\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$ と表現される．$\vec{A}(\vec{r})$ がクーロンゲージ $\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})=0$ を満たす場合，（問１）の電流密度 $\vec{j}(\vec{r})$ と $\vec{A}(\vec{r})$ はポアソン方程式 $-\nabla^2\vec{A}(\vec{r})=\mu_0\vec{j}(\vec{r})$ を満たすことを示せ．

（問３）$\displaystyle \vec{A}(x,y,z)=\iiint\frac{\mu_0\vec{j}(x',y',z')}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz'$ が，（問２）のポアソン方程式を満たすことを示せ．ここで，積分範囲は全空間である．

（問４）図１の円電流の場合，（問３）で示した式で $(x',y',z')=(R\cos\theta,R\sin\theta,0)$ と変換することにより，$\vec{A}(x,y,z)$ のx成分を下式から計算できる．

$$A_x(x,y,z)=\int_0^{2\pi}\frac{-\mu_0 IR\sin\theta}{4\pi\sqrt{(x-R\cos\theta)^2+(y-R\sin\theta)^2+z^2}}d\theta$$

$|x|>>R,|y|>>R,|z|>>R$として，$\vec{A}(x,y,z)$の各成分を計算せよ．

（問５）（問４）で求めたベクトルポテンシャル$\vec{A}(\vec{r})$から磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を計算せよ．

（問６）図２のように，（問５）の$\vec{B}(\vec{r})$中に $(a,0,b)$ を中心として半径Rの円電流Iを置く（円を含む面はz軸に垂直である）．$|a|>>R$，$|b|>>R$として，この円電流が（問５）の$\vec{B}(\vec{r})$から受ける $(a,0,b)$ のまわりの力のモーメントを求めよ．

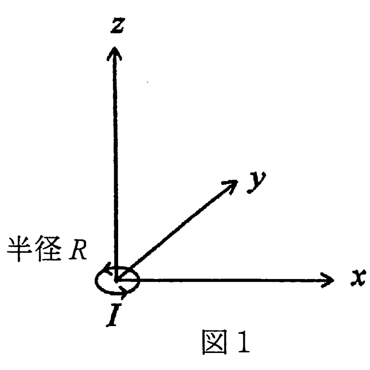


図１

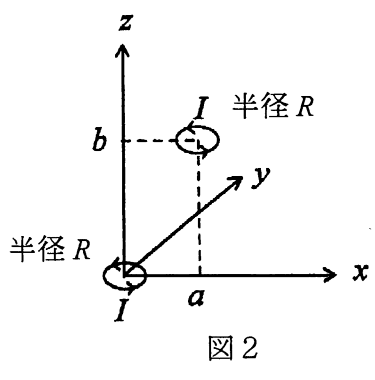


図２

第７問（物理学）

ポテンシャル障壁がある場合の粒子の１次元運動を考える．粒子の運動エネルギーE (>0) がポテンシャル障壁の高さよりも低い場合でも，粒子はある確率で障壁を透過できる．これをトンネル効果と言う．以下の問に答えよ．

（問１）質量m，運動エネルギーEの粒子が図１に示す１次元のポテンシャル $V(x)$ 中を左から右へ運動し，高さ $V_0\,(V_0>E)$ ，幅 a のポテンシャル障壁を透過する確率を以下の手順に従って求めよ．

粒子の波動関数を$\psi(x)$ とした時，定常状態のシュレーディンガー方程式は

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+E\psi(x)=0 \qquad (x<0,\ x>a)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+(E-V_0)\psi(x)=0 \qquad (0<x<a)$$

と書ける．ただし，$\hbar$はプランク定数を2πで割ったものである．この時，$\psi(x)$の解は

$$\psi(x)=A_1\exp(i\alpha x)+A_2\exp(-i\alpha x) \qquad (x<0)$$

$$\psi(x)=B_1\exp(\beta x)+B_2\exp(-\beta x) \qquad (0<x<a)$$

$$\psi(x)=C\exp(i\alpha x) \qquad (a<x)$$

と書ける．ただし，$\alpha=\sqrt{2mE}/\hbar$，$\beta=\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$である．

(1) $x=0$，$x=a$ で$\psi(x)$の満たすべき境界条件から A_1, A_2, B_1, B_2, C の関係式を導け．

(2) B_1, B_2を C, α, β, a を用いて表せ．

(3) A_1を C, α, β, a を用いて表せ．

(4) ここでポテンシャル障壁が十分広いとして $\exp(\beta a) \gg \exp(-\beta a)$と仮定し，粒子の透過率 $|C/A_1|^2$をα, β, a を用いて表せ．

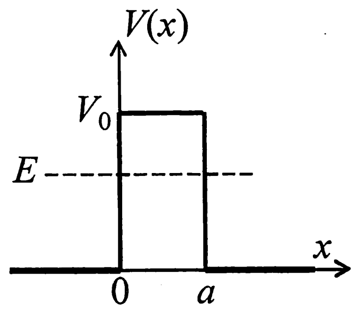


図１

（問２）一般的なポテンシャル障壁 $V(x)$の透過率はガモフ因子

$T\equiv\exp\left(-\int\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V(x)-E)}\,dx\right)$にほぼ比例する．ただし，積分区間は，$V(x)>E$の範囲である．ここで，図２に示すポテンシャル $V(x)$ を考える．$V(x)$ は，$x>a$ (>0) の領域では$V(x)=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}$ と表され，$x<a$ の領域で $V(x)=0$ である．た

だし，$q_1, q_2\ (q_1, q_2 > 0)$ は電荷，ε_0 は真空の誘電率である．質量 m，運動エネルギーE の粒子が，図２のポテンシャル障壁に右側から入射する時のガモフ因子を以下の手順で求める．ただし，図中の $b\ (> a)$ は $V(b) = E$ を満たすとする．

(1) ガモフ因子 T を $a, b, m, q_1, q_2, \varepsilon_0, \hbar$ で表せ．ただし，積分を残したままの形で解答せよ．

(2) 積分変数を $x/b = \cos^2\theta$ で定義される θ に変数変換して積分し，T を $b, m, q_1, q_2, \varepsilon_0, \hbar, \theta_a$ で表せ，ただし，θ_a は $a/b = \cos^2\theta_a$ を満たす．

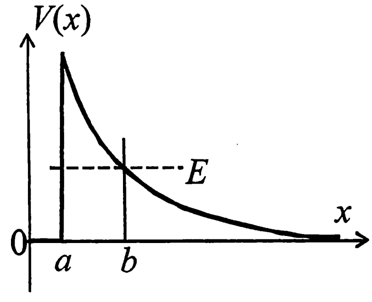


図２

(3) $a \ll b$ の場合を考える．この時，$a/b = \cos^2\theta_a \ll 1$，$\theta_a \approx \pi/2, \sin 2\theta_a \ll 1$ となる．この場合，ガモフ因子は $T \approx \exp\left(-\sqrt{E_G/E}\right)$ と書ける．E_G を $m, q_1, q_2, \varepsilon_0, \hbar$ で表せ．

(4) 以下の数値を用いた場合，(3)で定義した E_G を単位を明記した上で有効数字1桁で求めよ．

$m = 3.0\times10^{-27}$ [kg]，$q_1 = q_2 = 1.6\times10^{-19}$ [C]，$\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}$ [F/m]，$\hbar = 1.1\times10^{-34}$ [Js]

第８問（化学）

理想気体Ａについて以下の問に答えよ．文中の R は気体定数を表し，$R = 8.3\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$ とする．解答に際しては，導出の過程も示すこと．必要があれば，$2^{-0.4} \approx 0.76$，$\ln 20 \approx 3.0$ を用いよ．

（問１）Ａの熱力学的性質について考察する．ここで，γ，C_v，C_p はそれぞれＡの比熱比，定積モル比熱，定圧モル比熱を表わし，C_v は温度に依存しないものとする．

(1) 1 mol のＡを状態 1（圧力 P_1，温度 T_1，体積 V_1）から状態 2（圧力 P_2，温度 T_2，体積 V_2）へと断熱可逆的に変化させる．このとき，系が外界に対して行う仕事 w と内部エネルギー変化 ΔU の関係を示し，次の式を導け．

$$C_v \ \ln(T_2/T_1) = R \ \ln(V_1/V_2)$$

(2) 上の式とマイヤーの関係式（$C_p - C_v = R$）を使い，次のポアソンの式を導け．

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

(3) 温度 300 K のＡを，断熱可逆的に膨張させ体積を 2 倍にしたとき，温度が 228 K となった．Ａはいくつの原子からなると考えられるか答えよ．

（問２）Ａは 500 K 以上の高温状態において，下の反応（i）のように理想気体Ｂ，Ｃに変化する．この反応が化学平衡に達しているとき，以下の問に答えよ．

$$2\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{C} \qquad \text{(i)}$$

(1) 反応（i）の温度 600 K，圧力 1 atm における平衡定数 $K_{1\mathrm{atm},\,600\mathrm{K}}$ は 2.8×10^{-2} （$= 1/36$）であった．このときの反応進行度（%）（反応で消費されたＡの反応前のＡに対する割合）を求めよ．

(2) 温度 650 K，圧力 1 atm のときの反応（i）の平衡定数 $K_{1\mathrm{atm},\,650\mathrm{K}}$ は 5.6×10^{-1} であった．平衡定数の温度変化と反応熱 ΔH との間で，下に示す式（ファント・ホッフの定圧平衡式）が成り立つとき，上記反応（i）の反応熱 ΔH を有効数字一桁で求めよ．ただし，ΔH は考慮する範囲で温度に依存しないとする．

$$\left[\frac{\partial(\ln K_{\mathrm{P,T}})}{\partial T}\right]_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta H}{RT^2}$$

（問３）（問２）では反応（i）が化学平衡に達しているとしたが，実際に化学反応が進行する速度は，反応速度論によって決定される．高温状態において反応（i）は，理想気体 $\mathrm{A_2}$ を経て次のように進行するとする．ここで k_1，k_2，k_3 は，それぞれの素反応での速度定数であり，Ｍは触媒となる気体分子を表す．また，反応物

系から生成物系に至るまでの，反応座標に対するエネルギーの変化が図 1 のように表わされるとする．反応（iii）の逆反応は無視できるとする．

$$2A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} A_2 \qquad \text{(ii)}$$

$$A_2 + M \xrightarrow{k_3} B + C + M \qquad \text{(iii)}$$

(1) A_2が定常状態にあると仮定して，B の生成速度を表わす速度式を k_1，k_2，k_3，A の分圧 [A]，および M の分圧 [M]を用いて表わせ．

(2) 実験を行なうと，B の生成速度は[A]の 2 次，かつ[M]の 1 次に比例することがわかった．これが成り立つためには，k_2，k_3，[M] の間に，どのような条件が必要か，簡単に記せ．

(3) 反応（i）の速度定数は 800 K で 1.2×10^3 $\mathrm{mol^{-1}\ dm^3\ s^{-1}}$，1000 K で 2.4×10^4 $\mathrm{mol^{-1}\ dm^3\ s^{-1}}$ であった．この温度範囲における反応（i）全体の活性化エネルギーE を有効数字一桁で求めよ．

(4) (2) の条件が成立するとして，図 1 中の各素反応の活性化エネルギーE_1，E_2，E_3と E の関係が，近似的にどのように表わせるか答えよ．

(5) 反応（ii）は，A_2 1 mol あたり 1×10^2 $\mathrm{kJ\ mol^{-1}}$ の発熱反応であった．このとき，E_3を有効数字一桁で求めよ．また，（問 2）(2) の答えを用いて，図 1 の①に相当するエネルギーを，有効数字一桁で求めよ．

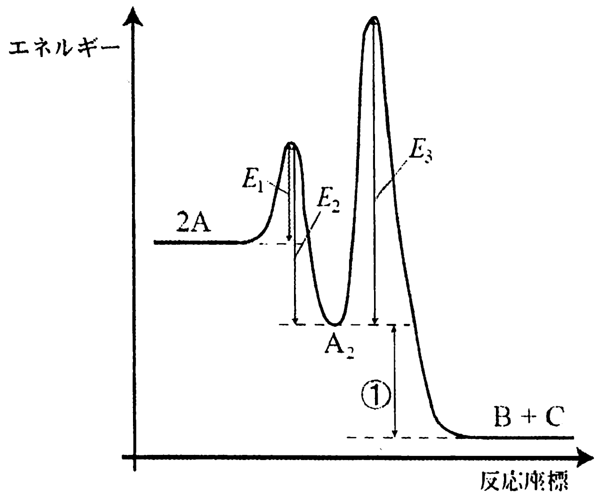
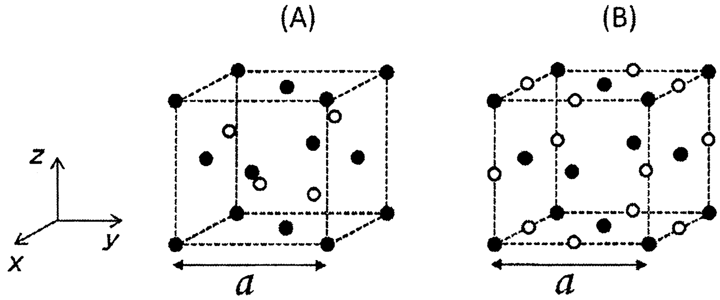


図 1

第９問（化学）

（問１）下図の A，B は，元素 X (●), Y (○) からなる２元化合物の結晶構造を示したものである．どちらも格子定数 a の立方晶であるとして以下の問に答えよ．



(1) 結晶構造 A，B において，元素 X の作る格子は同一である．この格子の名称を答えよ．

(2) 結晶構造 A，B で，元素 Y の作る格子は元素 X の作る格子をそれぞれ $(a/4, a/4, a/4)$，$(a/2, 0, 0)$だけ変位させたものである．A，B の結晶構造名を答えよ．

(3) A，B それぞれの構造で，最近接原子数，最近接原子間距離を求めよ．

(4) A，B それぞれの構造で，第二近接原子数，第二近接原子間距離を求めよ．

(5) A，B の構造の二元化合物の多くは共有結合性あるいはイオン結合性物質である．共有結合，イオン結合のそれぞれの結合力の起源，結合の特徴を説明せよ．

(6) イオン結合性が強い物質は A，B のどちらの構造になりやすいか．理由を付けて答えよ．

（問２）放射線は一般に α 線，β 線，γ 線に分類される．以下の問に答えよ．

(1) α 線，β 線，γ 線それぞれの実体は何か，説明せよ．

(2) 低速の β 線は固体表面の原子構造，電子状態の解析に用いられる．その理由を述べよ．

(3) α 線，γ 線はそれぞれラザフォード後方散乱分光，メスバウアー分光に用いられる．これら分光法のどちらか一つを選び，計測法の原理および得られる情報について簡潔に述べよ．

（問３）有機化合物に関する以下の問に答えよ．

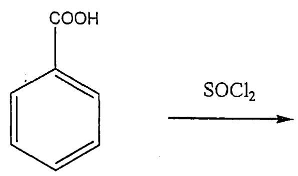
(1) シクロヘキサンには代表的な二つの異なる配座が存在し，安定性も異なる．配座の特徴がわかる概略図とニューマン投影図を描き，構造の特徴と安定性の差について説明せよ．

(2) n-ヘキサン，シクロヘキサン，ベンゼンの各試料がそれぞれサンプル管に入れられて与えられたとする．分光学的方法または化学的方法を用いて，それぞれを区別するための方法を提案せよ．

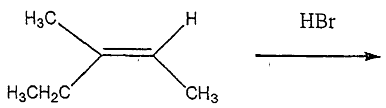
(3)　メソ化合物またはメソ体とはどのような構造を持つ物質のことであるかを，簡単な実例を示しながら述べよ．

（問４）次の反応について，予想される主生成物の構造を記せ．

(1)



(2)



(3)