平成16年8月24日（火）
13:00 ～ 16:00

平成17年度大学院博士前期課程
電気工学専攻
通信工学専攻
電子工学専攻
電子情報エネルギー工学専攻

選択科目　電磁エネルギー工学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は5題である。4題選択して解答せよ。解答は

問題1を（白色）の解答用紙
問題2を（赤色）の解答用紙
問題3を（青色）の解答用紙
問題4を（黄色）の解答用紙
問題5を（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題50点であり、合計200点である。

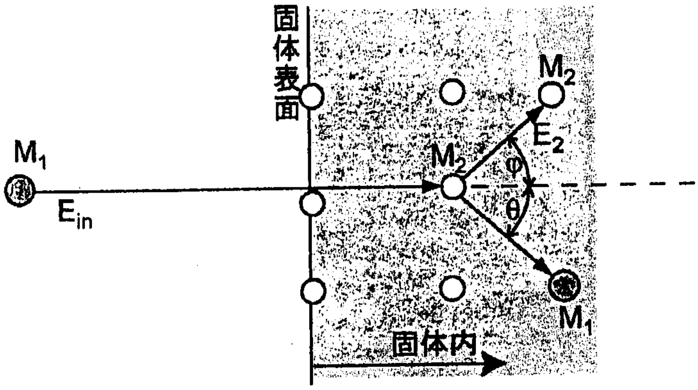
● 問題用紙は表紙を含めて9枚である。

54

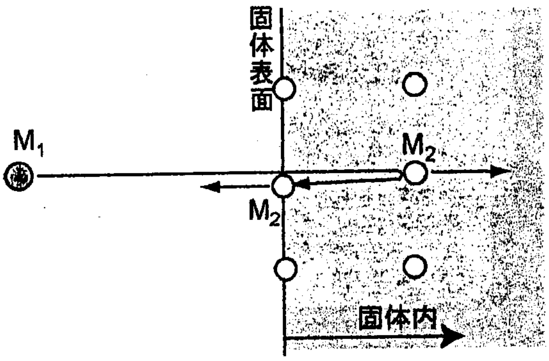
問題１　　（解答用紙「白色」に解答しなさい。）

固体に運動エネルギーE_{in}を持った粒子が入射した場合に、運動量の交換によって固体を構成する原子が空間へ放出される現象をスパッタリングと呼ぶ。以下の問に答えよ。なお、問１と問２では、簡単のため、弾性衝突による入射粒子と固体原子間のエネルギー移行のみを考慮し、その他のエネルギー移行過程（電子との衝突、電離や再結合に伴うエネルギー移行など）は無視する。

問１　固体表面に垂直に粒子が（質量 M_1）入射し、固体内の原子（質量 M_2）と衝突し、その直後入射粒子と固体原子は、それぞれ散乱角θとφで散乱された（図参照）。この時、衝突直後の固体原子の運動エネルギーE_2 と、入射粒子の衝突前のエネルギーE_{in} の比（E_2/E_{in}）が $4M_1M_2\cos^2\varphi/(M_1+M_2)^2$　となることを示せ。



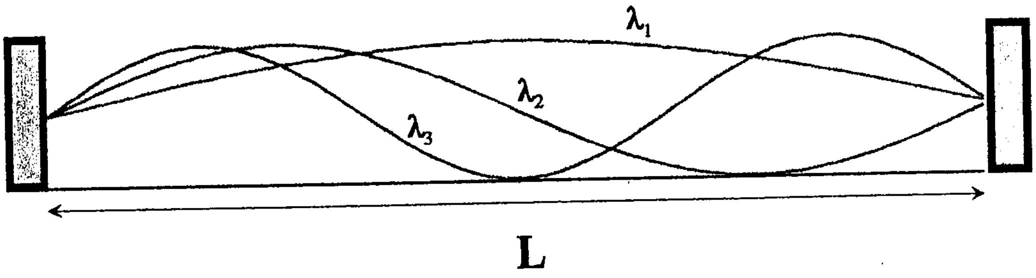
問２　問１と同じ入射条件で、入射粒子は固体内原子と衝突して 180 度散乱（$\theta=\pi$）を起こし、その後固体最表面の原子に正面衝突して、その固体原子が空間に放出されるという過程を考える（このような場合、散乱角は厳密には 180 度にならないが計算ではこのように仮定せよ）。この過程において、スパッタリングが起こりうる入射粒子の最小エネルギーE_{min}を求めよ。ただし、$M_1 < M_2$とし、固体表面の原子が空間に放出されるためには、表面結合エネルギーE_s以上のエネルギーを衝突により得る必要があることを考慮せよ。



問３　スパッタリングにおいて、放出された原子数 n_2 と入射粒子数 n_1 の比（n_2/n_1）をスパッタリング率という。垂直入射の場合のスパッタリング率の入射粒子エネルギー依存性について、理由を付して説明せよ。

問題２　（解答用紙「赤色」に解答しなさい。）

図のように２枚の鏡が距離Lだけ離れて置かれているとする。鏡が作るキャビティー内で共振する定在波の電磁波について考察する。空白を埋め、図を描け。



上図に示すようにキャビティー内で共振できる定在波の中で最も波長の長いものをλ_1とすれば

$\lambda_1 =$ 1)

と表せる。さらに上図に示すように、このキャビティー内に共振できる定在波のうちn番目の高調波の波長をλ_n（但し$n=1,2,3,\cdots$）とすると

$\lambda_n =$ 2)

と表せる。実際にこのようなキャビティー内に共振できる電磁波は上述の波長を持つ電磁波の重ね合わせと考えられる。波長λ_nの電磁波成分の電界の複素振幅をE_n、時刻$t=0$における位相をϕ_nとする。電磁波の波長がλ_nなので角周波数ω_nはn、Lと光速cを用いて表せば

$\omega_n =$ 3)

となる。従って$\omega_n - \omega_{n-1}$はnによらず一定であり、それを$\Delta\omega$とすればL、cを用いて、

$\Delta\omega =$ 4)

と表すことができる。一方、キャビティー内に共振する電磁波の複素電界$E(t)$は波の重ね合わせを考えることで、

56

$$E(t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\exp\left(j\left(\omega_n t+\phi_n\right)\right)\qquad（ただし\ j=\sqrt{-1}）$$

と表すことができるが、このような定在波の位相が完全にそろっていた場合について考察する。すなわち$\phi_n=0$であったとする。さらに電磁波の周波数帯が限られていたとし、今、$n=n_c$を中心に$2N+1$個の定在波のみがキャビティー内で共振したとする。すなわち、

$n=n_c-N,n_c-N+1,n_c-N+2,\cdots,n_c,\cdots,n_c+N-1,n_c+N$

の場合のみE_nは有限値を有し、$E_n=E_0$で一定値であると仮定する。逆に上記以外のnに対しては$E_n=0$であると仮定する。このとき$E(t)$は$\Delta\omega$やN、n_c、E_0などを用いて

$$E(t)=E_0\exp\left(jn_c\Delta\omega t\right)\cdot\boxed{5)\qquad\qquad}$$

と表すことができる。ただし5)を答えるにあたり、

等比級数は整数m_1、m_2に対し、$\displaystyle\sum_{n=m_1}^{m_2}a\cdot r^n=\frac{a\left(r^{m_1}-r^{m_2+1}\right)}{1-r}$となることや

$\displaystyle\frac{\exp(jx)-\exp(-jx)}{2j}=\sin x$であることを利用して答えよ。

次にキャビティー中の電磁波の強度$I(t)$を$I(t)=\left|E(t)\right|^2$と定義すると、

$$I(t)=\left|E_0\right|^2\cdot\boxed{6)\qquad\qquad}$$

となる。

$\left|\left(N+\frac{1}{2}\right)\Delta\omega t\right|<<1$として$t=0$近傍の範囲

$-2\pi/((N+1/2)\Delta\omega)<t<2\pi/((N+1/2)\Delta\omega)$

における$I(t)$の様子を図示せよ 7)。

さらに$I(t)$は周期関数であり、周期Tとすると

$$T=\boxed{8)\qquad\qquad}$$

と表すことができる。これはキャビティーを電磁波が往復するのに要する時間であり、このようにして繰り返しの短パルス電磁波を発生する方法を、キャビティー内で共振する定在波の全ての位相を揃えることからモード同期法と呼ぶ。

57

問題３　（解答用紙「青色」に解答しなさい。）

立方体（一辺L）の中に種々の振動モード（$\omega_n = n\pi c / L$）のフォトンが閉じこめられているとして、空洞内（$V=L^3$）のフォトンの全エネルギーUを次の手順でもとめる。

先ず、振動モードωのS個のフォトンのエネルギーε_Sはε_S＝（　1　）と表せる。またフォトンが温度τ（=kT）で平衡状態にあるとき、分配関数Zは（　2　）のように計算される。

ε_Sの状態にある確率$P(S) = \exp(-\varepsilon_S/\tau)/Z$　と表されるので１つの振動モードのフォトン数の熱平均値$\langle S \rangle$ =（　3　）と計算される。

種々の振動モードのフォトンの全エネルギーU を求めるにはωの代わりに　ω_nと置きnの空間でヒントを参考に積分すると U=（　4　）が求まる。これを（　5　）の輻射法則と呼んでいる。

一方、熱力学の恒等式はエントロピーσ、圧力Pとすると$d\sigma$ =（　6　）のように書けるので、体積一定の条件では熱輻射のエントロピーと U、τの関係は（　7　）のようになる。従ってこれをVとτで書き直すと、熱輻射のエントロピーが一定のもとでは（　8　）=constant の関係が成り立つ。

（ヒント：$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$　）

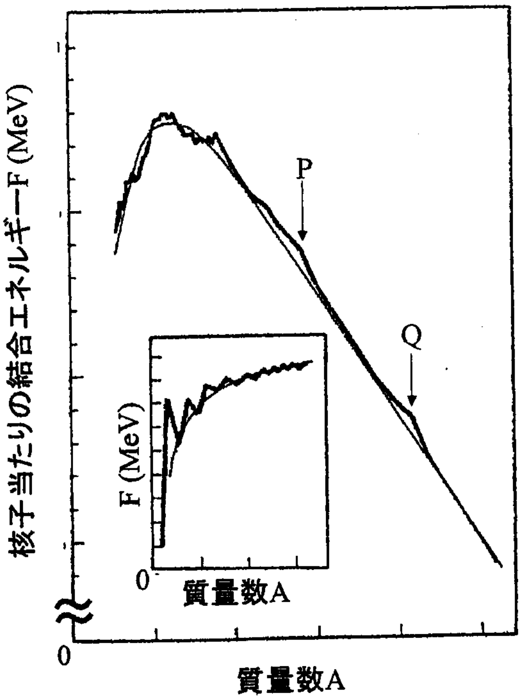
問題　上記の (1) ～ (4)、(6) ～ (8) には数式で答えよ。(5) には人名を入れよ。

58

問題 4　（解答用紙「黄色」に解答しなさい。）

以下の空欄に当てはまる言葉、数字、数式、人名などを候補欄から選べ。なお、同じものを何度使用しても良い。

右図は、安定な原子核の質量数 A に対する核子(中性子や陽子)当たりの平均結合エネルギーF を示す。細実線は液滴模型を仮定し（ 1 ）により 1935 年に導出された質量公式である。太実線は測定値を示している。なお、図中の小図は A の小さな領域における F 値を示す。



核子当たりの結合エネルギー図(小図は軽核に対するもの)。なお、横軸の原点は両図とも0、縦軸の原点は、小図は0、大図は、0ではない。

結合エネルギーの著しい特徴として、A がある程度大きくなると F がおよそ（ 2 ）MeV になる、ということがある。これを、結合エネルギーの（ 3 ）という。また、F は A=（ 4 ）付近で最大値をとる。この付近の原子核が最も（ 5 ）であることを意味している。核子当たりの平均結合エネルギーF は、以下のように求められる。

質量数 A、原子番号 Z の原子核の質量を M(A,Z)、陽子および中性子の質量を Mp 及び Mn とすると、

$$\triangle M = Z \cdot Mp + (A-Z) \cdot Mn - M(A,Z)$$

を（ 6 ）と呼ぶ。原子核の結合エネルギーB は、アインシュタインのエネルギーと質量との関係を示す公式（ 7 ）を用い、B=（ 8 ）とあらわされる。B は原子核をバラバラにするのに必要なエネルギーと解釈される。核子当たりの結合エネルギーF は、F=（ 9 ）となる。

図の実験値と（ 1 ）の質量公式を比較すると、非常に良くあっていることが分かるが、P や Q などに見られるピークが再現できていない。（ 1 ）の質量公式は、体積エネルギー効果、（ 10 ）、（ 11 ）などの効果は入っているが、ある質量数で特に原子核が（ 5 ）になるという原子核の（ 12 ）構造の効果が入っていないためである。この特定の質量数のことを（ 13 ）と呼ぶ。A が小さい領域では、特に（ 14 ）の倍数の質量数を持つ原子核の F が大きく、この事実は、軽核の性質を説明する（ 15 ）クラスターモデルを支持している。

59

ところで、この図は、核融合反応が起こるとエネルギーが発生することを示す図にもなっている。いま、Fの小さな、複数の軽核が融合し1つの原子核になったとする。この場合、できた原子核のAが（ 4 ）を超えなければ、反応後の原子核のFは反応前より一般的に（ 16 ）なる。よって、反応前の結合エネルギーの和は反応後の結合エネルギーより（ 17 ）なり、その差が核エネルギーとして放出される。

（候補欄）

Einstein、Planck、Weizsaecker、Heisenberg 2、4、6、8、10、20、40、60、80、100 $E=(1/2)mc^2$、$E=mc$、$E=mc^2$、$(Z\cdot Mp+(A-Z)\cdot Mn-M(A,Z))c^2/A$、$\Delta M\cdot c$、$\Delta M\cdot c^2$、$(1/2)\Delta M\cdot c^2$、$B/A^2$、$\triangle M\cdot c/A$、$\triangle M\cdot c^2/A^2$、アルファ粒子、安定、安定性、位置エネルギー効果、運動エネルギー効果、液滴、大きく、殻、偶-偶核、再現性、シェル効果数、質量欠損、質量保存の法則、スクリーニング効果、対称エネルギー効果、炭素、小さく、表面エネルギー効果、不安定、複合核、複合核数、ベリリウム、飽和性、保存性、マジックナンバー

60

問題５　　（解答用紙「水色」に解答しなさい。）

次の文章を読んで、空欄 [①] から [⑧] を埋めよ。

1次元空間で、原点からの距離に比例する引力 $F = -kx$ を受けている質量 m の粒子について考える。この引力は、ポテンシャル $V(x) = kx^2/2$ から導かれる。したがって、この粒子に対するシュレディンガー方程式は、波動関数を $\Psi(x)$、エネルギーを E として、

[①] $= E\Psi(x)$　　(1)

と表され、これは1次元調和振動子に対するシュレディンガー方程式である。

力 $-kx$ による単振動を古典的に扱うと、$x = A\cos(\omega t + \delta)$ を得るが、この時の角振動数は $\omega = \sqrt{k/m}$ で与えられる。したがって、(1)式は ω, m を用いると、

[②] $= E\Psi(x)$　　(2)

となり、これを解くことを考える。

式を簡単にするために、変数 x , E の代わりに

$\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$　　　$\lambda = 2E/\hbar\omega$

で定義される ξ , λ を用いると、(2)式は $\Psi(\xi)$, ξ , λ からなる式

[③] $= \lambda\Psi(\xi)$

という形になる。この式の解は、エルミートの多項式 $H_n(\xi)$ を用いて

$\Psi(\xi) = H_n(\xi)\exp(-\alpha\xi^2)$

の形で与えられる（α は定数）。

n=0 のエルミートの多項式は $H_0(\xi) = c_0$ であり（c_0 は定数）、波動関数

$\Psi(x) = c_0\exp(-\beta x^2)$　　(3)

は、定数 β を適当に選ぶことにより(2)式の解の1つである。(2)式に代入すると、定数 β が

β =[④]

であれば、(2)式の解となることが分かる。この時、固有値エネルギー E は

E =[⑤]

となる。さらに、波動関数(3)は規格化すると、

$\Psi(x)$ =[⑥]　　(4)

となる（β を用いた形で良い）。

次にこの関数を用いて、波動関数の空間分布の様子を調べて見よう。

規格化された波動関数(4)を用いて、x の空間平均値 $\langle x\rangle$ は

$\langle x\rangle$ = [⑦]

と計算され、直感的に予想された値となる。

61

また、x の空間平均値 ⟨x⟩ からの変位の2乗平均 $<(x-\langle x\rangle)^2>$ は

$$<(x-\langle x\rangle)^2> = [\quad ⑧ \quad]$$

と計算される。

なお、以上の計算において必要であれば次の関係式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2)d\xi = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\exp(-\mathbf{bx}^2) = -2\mathbf{bx}\exp(-\mathbf{bx}^2)$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}\exp(-\mathbf{bx}^2) = \exp(-\mathbf{bx}^2) - 2\mathbf{bx}^2\exp(-\mathbf{bx}^2)$$

62