平成３０年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電気工学専攻　/　電子工学専攻　/　情報・通信工学専攻

入学試験問題

基　　　礎

（平成２９年８月２２日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．５問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

(1) $y=e^{-x}\sin x$ とするとき，以下の問いに答えよ．

1) 不定積分 $\int y dx$ を求めよ．

2) 定積分 $\int_0^{\infty}|y|dx$ を求めよ．

ヒント：まず $\int_0^{2n\pi}|y|dx$ の定積分を考え，その $n\to\infty$ の極限を求める．

(2) 2次元直交デカルト座標系上の曲線 C 上の点 (x, y) が次のように表されるとき，以下の問いに答えよ．

$$x=\frac{1}{\theta+1}\cos\theta, \quad y=\frac{1}{\theta+1}\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \theta_0)$$

1) 曲線 C の長さ L が以下の式で表されることを示せ．

$$L=\int_0^{\theta_0}\left\{\frac{\sqrt{1+(\theta+1)^2}}{(\theta+1)^2}\right\}d\theta$$

2) 1)の L は，以下の式に変換できることを示せ．

$$L=\int_{u_0}^{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}\right)du$$

ただし，$u_0=\left(\dfrac{1+t_0}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$，また，$t_0=(\theta_0+1)^2$ であるとする．

2

以下の問いに答えよ．ただし $\mathcal{R}$ は実数全体の集合を表す．

(1) 以下の行列式の値を計算せよ．ただし $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ である．

$$\text{(a)} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の行列 $\boldsymbol{V}$ を定義する．

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_N^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1^{N-1} & a_2^{N-1} & \cdots & a_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

ただし $a_1, \ldots, a_N \in \mathcal{R}$ である．$\det \boldsymbol{V}$ を，$a_1, \ldots, a_N$ の関数として表せ．導出過程も記すこと．

(ヒント) 剰余の定理より，$f(a) = 0$ となる多項式 $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる．これを用いて問 (1) で求めた行列式を因数分解すると，$N = 2, 3$ かつ $a_1 = 1, a_2 = \alpha, a_3 = \beta$ の場合の関数が得られる．この結果から $\det \boldsymbol{V}$ を推定し，対応する余因子展開を行う．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}_k = (a_k, a_k^2, \ldots, a_k^{N-1}) \in \mathcal{R}^{N-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ を法線ベクトルとする $\mathcal{R}^{N-1}$ 中の N 個の超平面

$$\boldsymbol{a}_k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) + 1 = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

を考える．ただし $\cdot$ はベクトルの内積を取ることを表す．$a_1, a_2, \ldots, a_N$ が互いに相異なるとき，全ての超平面に共通に含まれる点が存在しないことを示せ．

(ヒント) $\boldsymbol{a}_k \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) + 1 = (1, \boldsymbol{a}_k) \cdot (1, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ を用いよ．

また，$(1, \boldsymbol{a}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ を転置し横に並べることで $\boldsymbol{V}$ となることにも注意せよ．

3

以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \frac{dy}{dx}$ ならびに $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ であるものとする．

(1) 次の常微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$(\cos y + x + 3) + (\sin y)y' = 0$$

1) 上式が完全微分形で無いことを示せ．

2) 上式に対して積分因子を求め，それを用いることで上式が完全微分形に変換できることを示せ．

3) 上式の一般解を求めよ．

(2) 次の常微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

1) 同次方程式 $y'' + 2y' + y = 0$ の一般解を求めよ．

2) 非同次方程式 $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ の一般解を求めよ．

ヒント 1: 同次方程式 $y'' + 2y' + y = 0$ の 2 つの基底y_1およびy_2に対するロンスキアン $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ を用いてもよい．

ヒント 2: 微分演算子Dを用いて，非同次微分方程式を $f(D)y = F(x)$ と表した場合において，以下の演算子法の公式を用いてもよい．

$$\frac{1}{f(D)}F(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{f(D+\alpha)}\{e^{-\alpha x}F(x)\}$$

(3) 常微分方程式$x(1+x)y'' - 2y' - 2y = 0$を，定数rおよびa_mを用いて表される以下の級数解を用いて解くことを考える．ただし，$|x| < 1$であるものとする．

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (a_0 \neq 0)$$

1) rを求めるための決定方程式を導出し，その解r_1およびr_2を求めよ．ただし，$r_1 > r_2$であるものとする．

2) r_1に対する同常微分方程式の基底y_1を，a_0を用いて示せ．ただし答えは級数式のままでもよいものとする．

ヒント: 同常微分方程式がxに対して恒等的に 0 となる条件を考えよ．

4

質量が無視できる絶縁性の棒（長さd）の一端に点電荷$+q$が，他端に点電荷$-q$がついている（以下，この棒を帯電棒とよぶ）．図１のように，真空中にxy座標をとり，この帯電棒（帯電棒１）を固定する．ここで，帯電棒１の点電荷$+q$，$-q$はそれぞれ点$P_0(0, d/2)$，$Q_0(0, -d/2)$に位置している．以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率をε_0とし，電位ϕの基準点を無限遠にとる．また，以下に用いる座標のパラメーターsおよびrについて，$s > d/2$および$r > d$が成り立つとする．

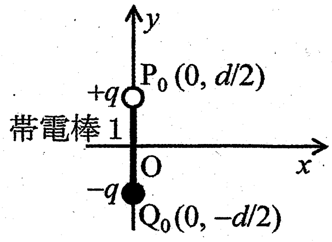

図１

(1) 点$(0, s)$における電位$\phi(s)$を求めよ．

(2) 点$(0, s)$における電場ベクトル$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}(s)$を求めよ．

(3) 帯電棒１と同じ帯電棒（帯電棒２）を無限遠から動かし，この棒の点電荷$+q$，$-q$がそれぞれ点$P_1(0, r+d/2)$，$Q_1(0, r-d/2)$に位置するように固定した（図２）．このとき帯電棒２がもつ静電ポテンシャルエネルギーUを求めよ．

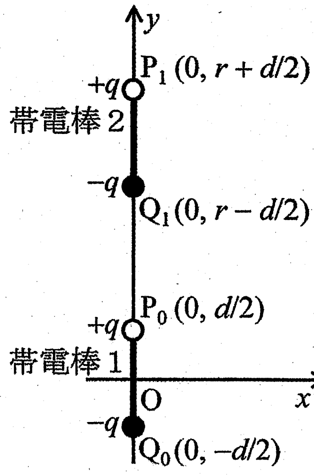

図２

(4) 次に，図２の配置から帯電棒２を動かし，この棒の点電荷$+q$，$-q$がそれぞれ点$Q_2(r, -d/2)$，$P_2(r, d/2)$に位置するように固定した（図３）．このときに必要な仕事W_1を求めよ．

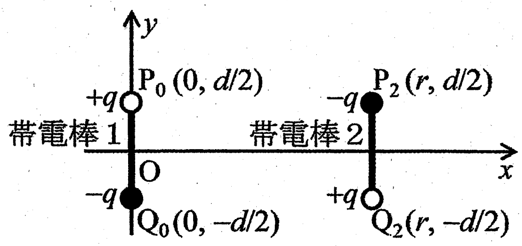

図３

(5) 図２の配置と図３の配置を比べると，どちらの帯電棒２の静電ポテンシャルエネルギーが低いか答えよ．ただし，計算により理由も示せ．

問(4)の操作の後，一様な電場（大きさE）が$+y$方向に印加された．

(6) この電場による点P_2と点Q_2の電位差（絶対値）を求めよ．

(7) 帯電棒２を反転し，この棒の点電荷$+q$，$-q$がそれぞれ点P_2，Q_2に位置するように固定した（図４）．このときに必要な仕事W_2を求めよ．

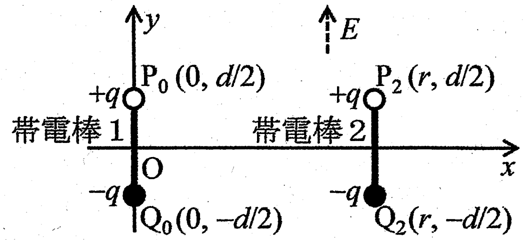

図４

5

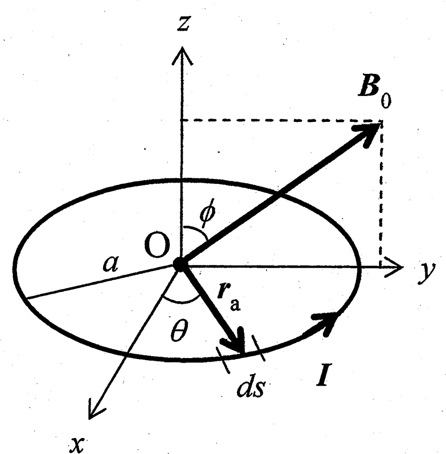

図 1

図 1 に示すように，中心軸を z 軸とする半径 a の円形コイルが，xy 平面内に固定して置いてある．そのコイルには，図1に示す向きに大きさ I の定常電流（円電流）が流れている．

コイルの置かれている空間に z 軸とのなす角を ϕ とする一様な磁場 $\boldsymbol{B}_0 = (0, B_0\sin\phi, B_0\cos\phi)$ を加えた．コイルが磁場から受けるトルク $\boldsymbol{T}$ を求めたい．

1) x 軸となす角を θ とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される円形コイル上の点を流れる電流の方向を示す単位ベクトルを求めよ．

2) x 軸となす角を θ とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される微小区間（長さ ds）が $\boldsymbol{B}_0$ から受ける力を $d\boldsymbol{F}_a$ とする．ベクトル $d\boldsymbol{F}_a$ を I, B_0, ds, θ, ϕ を用いて成分表示せよ．

3) x 軸となす角を θ とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}_a$ で示される微小区間（長さ ds）にはたらく x 軸まわりのトルクの大きさ dT を求め I, B_0, ds, θ, ϕ, a を用いて表せ．

4) コイル全体が磁場から受ける x 軸まわりのトルクの大きさ T を θ による積分で求め B_0, I, a, ϕ を用いて表せ．

5) コイルの面積 $S\,(=\pi a^2)$ と円電流 I により磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ を $\boldsymbol{m} = SI\boldsymbol{e}_z$ と定義する．ここで，$\boldsymbol{e}_z$ は，z 軸方向の単位ベクトルである．$\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{m}$ を用いて表せ．