平成２１年度大学院前期課程

電気電子情報工学専攻

システム・制御・電力工学
先進電磁エネルギー工学
情報通信工学
量子電子デバイス工学

電　磁　理　論
入　試　問　題

【注意】
- ○ 問題は４問ある。配点は各２５点で、合計１００点である。
- ○ 各問題用紙の第１志望コース欄に○印をつけ、受験番号を必ず記入すること。
- ○ 解答はすべて問題用紙の $\boxed{}$ の中に書くこと。

平成２０年８月１８日（月）
１３：００～１５：００実施

1－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

真空中の静電界に関する以下の記述の空欄に適当な数式や語句を記入せよ。また語句が複数記載されている時は適切な語句を選択せよ。

半径 a の球面上に正電荷 Q が一様に分布しているとする。電束に関するガウスの法則を用いると、球内外の電界の大きさ（スカラー量）は、球中心を原点とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$（$|\boldsymbol{r}|=r$）として、それぞれ、

外部で　$E=$ $\boxed{}$ (1)

内部で　$E=$ $\boxed{}$ (2)

となる。この球内の電子（質量 m、電荷 $-e$（e は正の値））に対する運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boxed{} \quad (3)$$

であり、その運動は初速度がゼロであれば、

①中心に向かって進む　②球面に向かって進む　③静止したまま　(4)

となる。

次に、半径 a の球内に正電荷 Q が一様な密度で分布しているとする。電束に関するガウスの法則を用いると、球内外の電界の大きさ（スカラー量）は、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$（$|\boldsymbol{r}|=r$）として、それぞれ、

外部で　$E=$ $\boxed{}$ (5)

内部で　$E=$ $\boxed{}$ (6)

となる。

1−2	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

そして無限遠における電位をゼロとすると、球内外の電位は、それぞれ、

外部で　$V =$ $\boxed{}$ (7)

内部で　$V =$ $\boxed{}$ (8)

となる。

この球内に電子（質量 m、電荷 $-e$（eは正の値））を、球の中心を除く位置に初速度ゼロでおく。球中心を原点とする電子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として、電子に対する運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boxed{} \quad (9)$$

で与えられる。

その運動は、初速度ゼロの場合は周期 Tの $\boxed{}$ (10)

であり、その運動周期 Tは、

$$T = \boxed{} \quad (11)$$

である。

25 点

2-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に、適当な数式、数値、または語句を入れて、文章を完成せよ。

[1] 定常電流によって生じる磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ は、次のように与えられる。

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{i}_r}{r^2}dV \qquad (1)$$

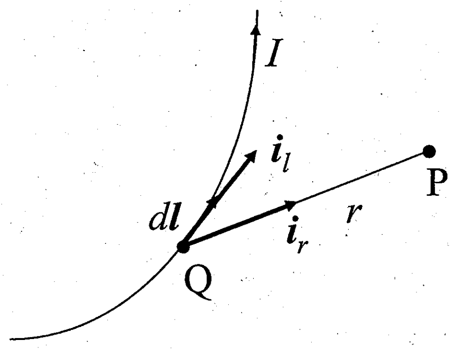

図1

ただし、$\boldsymbol{J}$ は定常電流の電流密度、$\boldsymbol{i}_r$ は電流の分布する点から $\boldsymbol{H}$ を求めている観測点の方向を向く単位ベクトル、r は対象としている電流の分布点と観測点との間の距離、V は電流の分布する領域、dV はその体積要素を表す。

特別な場合として、図1に示すような距離 r に対して太さが無視できるほどの細い導線に、大きさが I なる電流が流れているとする。点Qにある微小ベクトル線素 $\boldsymbol{dl}=\boldsymbol{i}_l dl$ の部分を流れる微小電流要素によって生じる磁界の強さ $\boldsymbol{dH}$ を考えよう。導線の断面積を dS とすると、電流密度 $\boldsymbol{J}$ および微小電流要素の体積 dV は、それぞれ、$\boldsymbol{J}=\boxed{}\ \boldsymbol{i}_l$、$dV=\boxed{}$ と表される。従って、$\boldsymbol{J}dV=\boldsymbol{i}_l I dl$ となることに注意すると、式（1）から、点Qにある微小電流線素によって生じる点Pにおける磁界の強さ $\boldsymbol{dH}$ は、

$$\boldsymbol{dH}=\frac{Idl}{4\pi r^2}\left(\boxed{}\right) \qquad (2)$$

と表される。ここで dl は微小ベクトル線素 $\boldsymbol{dl}$ の大きさ、$\boldsymbol{i}_l$、$\boldsymbol{i}_r$ はそれぞれ $\boldsymbol{dl}$ ならびにQPの方向を向く単位ベクトルである。式(2)は $\boxed{}$ の法則と呼ばれており、線状電流全体によって生じる磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ を求めるには、式(2)で与えられる $\boldsymbol{dH}$ を線電流全体にわたって積分すればよい。

[2] 図2に示すような、太さが無視できる無限に長い一本の直線状導線を時間的に定常な電流が流れている場合において、点Pにおける磁界の強さを考える。点Pから導線に垂線をおろし、導線との交点をOとする。Oを原点とした円柱座標$(r,\ \phi,\ z)$を考え、直線電流に沿った方向に z 軸をとる。

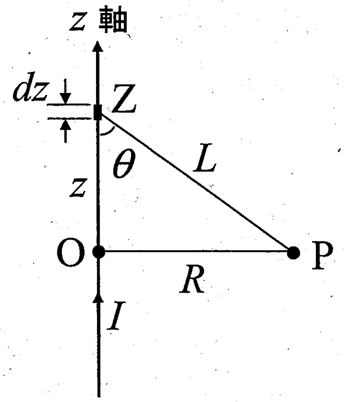

図2

2-2	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

また z 軸上の点 Z における微小電流要素の大きさを Idz、線分 OZ と線分 ZP のなす角度を θ とする。系の対称性から、円柱座標系での$\boxed{}$成分と$\boxed{}$成分の磁界の強さはゼロとなる。こうして、点 Z における微小電流要素がもたらす$\boxed{}$成分の磁界の強さの絶対値を dH とする。式 (2) の法則より dH は I, L, θ で表すと $dH = \boxed{}\,dz$、これを書き換え、I, L, R で表すと、$dH = \boxed{}\,dz$、そして、I, R, z で表すと $dH = \boxed{}\,dz$ となる。従って、電流全体が点 P にもたらす磁界の強さの絶対値 H は、I, R, z で表した上式を積分して、

$$H = \frac{IR}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\frac{}{}}\,dz = \frac{I}{4\pi R}\left[\boxed{\frac{}{}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \boxed{} \quad (3)$$

となる。なお、必要に応じて、積分公式 $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}dx = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$ を参照せよ。

[3]　図 3 に示すような一辺の長さが a の正四面体 ABCD の底面 BCD の周辺に沿って、太さが無視できるような導線に大きさ I の電流が流れている。底面 BCD から点 A を通過する垂線を立て、これに沿って z 軸を取る。このとき、頂点 A における z 方向の磁界の強さの絶対値 H_z を求めよう。まず、導線 BC を流れる電流によって点 A に生じる三角形 ABC に垂直な磁界の強さを $\boldsymbol{H}_{\mathrm{BC}}$、その絶対値を H_{BC} とすると、点 A と導線 BC との距離は$\boxed{}$であり、CB と BA のなす角度、BC と CA のなす角度はともに$\boxed{}$であることから、上記 [2] の考察を利用して、

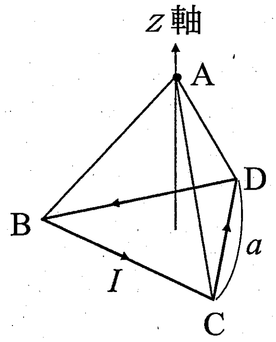

図 3

$$H_{\mathrm{BC}} = \boxed{\frac{}{}\left[\cos() - \cos()\right]} = \boxed{} \quad (4)$$

を得る。$\boldsymbol{H}_{\mathrm{BC}}$ の z 軸方向に沿った成分の絶対値 $H_{\mathrm{BC},z}$ は、$H_{\mathrm{BC},z} = \boxed{}\,H_{\mathrm{BC}}$ であるため、点 A における磁界の強さは、$\boldsymbol{H}_{\mathrm{BC}}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{CD}}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{DB}}$ の各 z 成分を加え合わせればよいので、$H_z = \boxed{}$ を得る。

25 点

3－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

無限の広がりをもつ誘電体中をz軸と平行な方向に平面電磁波が伝搬している。この電磁波に関する以下の文章中の空白に適切な数式を記入せよ。なお、電磁界の各成分は正弦的に時間変化しており、電界ベクトルおよび磁界ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}(z)e^{j\omega t}] \qquad (1a)$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{H}}(z)e^{j\omega t}] \qquad (1b)$$

のように書けるものとする。ただし、ωは角周波数、jは虚数単位である。さらに、媒質の透磁率をμ_0とする。

（１）誘電体の誘電率がεであるとき、(1a)および(1b)をマクスウェルの方程式 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$ および $\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ に代入し、成分ごとに表示すると

$$\boxed{\qquad\qquad} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_x \qquad (2a) \qquad\qquad \boxed{\qquad\qquad} = j\omega\varepsilon \dot{E}_x \qquad (3a)$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_y \qquad (2b) \qquad\qquad \boxed{\qquad\qquad} = j\omega\varepsilon \dot{E}_y \qquad (3b)$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_z \qquad (2c) \qquad\qquad \boxed{\qquad\qquad} = j\omega\varepsilon \dot{E}_z \qquad (3c)$$

を得る。これらの式から、電界ベクトルの方向がx軸と平行であるとき、磁界ベクトルの方向は $\boxed{\quad}$ 軸と平行であり、電界ベクトルの方向がy軸と平行であるとき、磁界ベクトルの方向は $\boxed{\quad}$ 軸と平行であることがわかる。また、電磁界のx、y、およびz成分のうち $\boxed{\quad}$ 成分は常にゼロであることがわかる。

ここで、(2b)および(3a)を連立させて、$\dot{E}_x$が満たす微分方程式を導くと

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

となる。この方程式の一般解は指数関数を用いて

$$\dot{E}_x = a_1 \boxed{\qquad\qquad} + a_2 \boxed{\qquad\qquad} \qquad (4)$$

のように表される。ただしa_1およびa_2は任意の定数である。上式より、この平面電磁波の波数の大きさは $k = \boxed{\qquad}$ であることがわかる。

3－2	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

（２）次に、電界ベクトルの方向によって誘電率が異なる値をとる場合について考える。ここでは、電界ベクトルの方向がx、y、およびz方向を向くときの誘電率が、それぞれ、ε_x、ε_y、およびε_zで与えられ、$\dot{D}_i = \varepsilon_i \dot{E}_i$（$i = x$、$y$、および z）が成り立つものとする。このとき、(3a)および(3b)は、それぞれ

$$\boxed{} \quad (5a)$$

$$\boxed{} \quad (5b)$$

のように書き換えられる。(2b)と(5a)を、また、(2a)と(5b)をそれぞれ連立させて解くことにより、$\dot{E}_x$および$\dot{E}_y$の解が(4)と同様に

$$\dot{E}_x = b_1 \boxed{} + b_2 \boxed{} \quad (6a)$$

$$\dot{E}_y = c_1 \boxed{} + c_2 \boxed{} \quad (6b)$$

のように表される。ただし、b_1、b_2、および、c_1、c_2 は任意の定数である。

(6a)および(6b)より、この誘電体中を＋ z方向に伝搬するx方向に偏波した平面電磁波（電界ベクトルの方向がx軸と平行な平面電磁波）と、＋ z方向に伝搬するy方向に偏波した平面電磁波の波数の差の絶対値が

$$|\Delta k| = \boxed{}$$

で与えられることがわかる。ただし、x方向の誘電率ε_xは、y方向の誘電率ε_yよりも大きい、すなわち、$\varepsilon_x > \varepsilon_y$であるとする。

この媒質を＋ z方向に伝搬する平面波の偏波状態は一般に伝搬距離とともに周期的に変化するが、その周期は

$$L = \boxed{}$$

で与えられる。

２５点

4−1	第１志望 コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験 番号	

以下の記述において、空欄に適切な式あるいは語句を記入せよ。

[I]　真空中の電磁界（電界：$\boldsymbol{E}$、磁束密度：$\boldsymbol{B}$）内において、速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している電荷量 $-e$ ($e>0$)の点電荷がある。電磁界がこの点電荷に及ぼす力は［　　　　］力と呼ばれ、これを $\boldsymbol{F}$ で表すと、

$$\boldsymbol{F} = \boxed{\qquad\qquad} \tag{1}$$

の関係が成り立つ。

[II]　真空中において直角座標系の原点に電荷量 q ($q>0$)の点電荷 $\mathrm{Q_A}$ が存在する。また、電荷量 $-e$ ($e>0$)、質量 m の点電荷 $\mathrm{Q_B}$ が点電荷 $\mathrm{Q_A}$ と相互作用しながら運動している。点電荷 $\mathrm{Q_A}$ は原点から動かない。磁界は存在しないとする。真空の誘電率を ε_0 で表し、x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ で表す。

二つの点電荷の間に働く力は［　　　　］の法則に従う。点電荷 $\mathrm{Q_B}$ が存在する位置の座標を(x, y, z)とすれば、$\mathrm{Q_B}$ に働く力 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$は次のように表わされる。

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boxed{\qquad\qquad}\,\boldsymbol{i}_x + \boxed{\qquad\qquad}\,\boldsymbol{i}_y + \boxed{\qquad\qquad}\,\boldsymbol{i}_z \tag{2}$$

点電荷 $\mathrm{Q_B}$ が満たすべき運動方程式を x, y, z の各成分に分けて書くと次のようになる。

x 成分：　$$\frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{\qquad\qquad} \tag{3}$$

y 成分：　$$\frac{d^2y}{dt^2} = \boxed{\qquad\qquad} \tag{4}$$

z 成分：　$$\frac{d^2z}{dt^2} = \boxed{\qquad\qquad} \tag{5}$$

点電荷 $\mathrm{Q_B}$ は時刻 $t=0$ に点$(x, y, z)=(0, R, 0)$ ($R>0$)を速度 $\boldsymbol{v}=(v_0, 0, 0)$ ($v_0>0$)で通過した。ある条件のもとでは、点電荷 $\mathrm{Q_B}$ は xy 平面内において原点を中心とする半径 R の円周上で等速円運動をする。すなわち、$x(t) = R\sin\omega t,\ y(t) = R\cos\omega t,\ z(t) = 0$ が式(3)~(5)を満たす。

これらの $x(t), y(t), z(t)$ を式(3)に代入して円運動の角速度 ω を求め、$R, e, q, m, \varepsilon_0$ などを用いて表すと

$\omega =$ [　　　　] (6)

となる。一方、t=0 における初期条件から、ω, R, v_0 の間には次の関係が成り立つ。

$\omega =$ [　　　　] (7)

式(6)、(7)より、点電荷 Q_B が等速円運動をするための条件は次のように求められる。

$R =$ [　　　　] (8)

[III]　真空中に磁束密度が $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$ で表わされる静磁界が存在する。(電界は存在しない。) 電荷量 $-e$ ($e>0$)、質量 m の点電荷 Q_B が磁界と相互作用しながら運動している。x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ で表す。

点電荷 Q_B が満たすべき運動方程式を x, y, z の各成分に分けて、Q_B の座標 (x, y, z) を用いて書くと次のようになる。

x 成分： $\dfrac{d^2x}{dt^2} =$ [　　　　] (9)

y 成分： $\dfrac{d^2y}{dt^2} =$ [　　　　] (10)

z 成分： $\dfrac{d^2z}{dt^2} =$ [　　　　] (11)

点電荷 Q_B は時刻 t=0 に点 $(x, y, z)=(0, R, 0)$ ($R>0$) を速度 $\boldsymbol{v}=(v_0, 0, 0)$ ($v_0>0$) で通過した。点電荷 Q_B が xy 平面内において原点を中心とする半径 R の円周上で等速円運動をするための条件は、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が次のように表わされることである。

$\boldsymbol{B} =$ [　　　　] $\boldsymbol{i}_x$

＋ [　　　　] $\boldsymbol{i}_y$ (12)

＋ [　　　　] $\boldsymbol{i}_z$

25 点