平成 19 年 8 月 21 日（火）
10:00 ～ 12:00

平成 20 年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。解答は

問題 1　を　1 枚目（白色）の解答用紙
問題 2　を　2 枚目（赤色）の解答用紙
問題 3　を　3 枚目（青色）の解答用紙
問題 4　を　4 枚目（黄色）の解答用紙
問題 5　を　5 枚目（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 20 点であり、合計 100 点である。

●問題紙は表紙を含めて 6 枚である。

問題１　（２０点）

(a)　対称行列 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ。

(b)　行列 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ に対して、$\mathbf{B}^{-1}$ と $\mathbf{B}^{5}$ を求めよ。

問題 2　(20 点)

次の問いに答えよ. ただし, x および y は t の関数であり, x' および y' は t に関する 1 階微分, x'' および y'' は 2 階微分を表すものとする.

(a) 次の微分方程式を解け.

$$x'' + 3x' - 4x = 5\cos t$$

(b) 次の連立微分方程式を解け. ただし, p, q は $p > 0,\ q > 0$ の定数であり, 初期条件として, $x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = y'(0) = 0$ を用いるものとする.

$$\begin{cases} x'' + py' = 0 \\ y'' - qx' = 1 \end{cases}$$

問題 3　（20 点）

(a) 複素関数 $\dfrac{z}{z^2-1}$ の特異点 $z=1$ のまわりのローラン展開を求めよ．

(b) 実変数 θ に対する下記の積分値を，複素関数を用いて求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\cos\theta)^2}\, d\theta$$

問題4 (20点)

(a) 周期 2π をもつ次の周期関数 $f(x)$ を複素型フーリエ級数で表すとき，その係数 c_n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を求めよ．

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-\pi \le x < \pi), \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

ただし，関数 $f(x)$ の複素型フーリエ級数を次式で定義する．

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(b) $f(x)$ のフーリエ級数を $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ と表すとき，次のパーセバルの等式が成り立つ．

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

これと等価な関係式として，$f(x)$ の複素型フーリエ級数の係数 c_0，c_n，c_{-n} について，次式が成り立つことを示せ．

$$2\,{c_0}^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

(c) (a), (b) の結果を用いて，次の無限級数の和 S の値を求めよ．

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+n^2\right)^2}$$

必要ならば，次式で定義される双曲線関数を用いよ．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

問題5 (20点)

次の微分方程式の $t \geqq 0$ における解 $x(t)$ をラプラス変換を用いて求める．以下の問に答えよ．

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t)\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{1}$$

ここで，$f(t)$ は次式で定義される関数である．

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t > 1) \\ t & (0 \leqq t \leqq 1) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(a) 次式で定義される関数 $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ を求めよ．

$$g(t) = \begin{cases} t & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(b) $f(t) = g(t) - g(t-1)$ と表せることを用いて，$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．

(c) 式 (1) の $t \geqq 0$ における解 $x(t)$ をラプラス変換を用いて求めよ．