２０１０年３月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

以下の問に答えよ．

(1) Fig.1(a)において，半径aの無限長円柱内に，電荷が体積密度ρで一様に分布するとき，位置(x,y)での電界ベクトル$\boldsymbol{E}$を求めよ．

(2) Fig.1(b)において，$(x,y)=(0,d)$を中心とした，半径bの無限長円柱内に，電荷が体積密度$-\rho$で一様に分布する．この無限長円柱内の位置(x,y)における電界ベクトル$\boldsymbol{E}$を求めよ．

(3) 問(1)の電荷分布と問(2)の電荷分布を重ね合わせることで得られる電荷分布を図示せよ．ただし，$d+b<a$とする．

(4) Fig.1(c)の様に，半径aの無限長円柱内に，$(x,y)=(0,d)$を中心とした半径bの無限長円柱状の空洞がある．空洞以外の円柱内には一様な電荷（体積密度ρ）が分布している．空洞の中の位置(x,y)における電界ベクトル$\boldsymbol{E}$を求めよ．

(5) Fig.1(a)において，半径aの無限長円柱内に，$+z$方向の一様な電流Iが流れるとき，位置(x,y)での磁束密度ベクトル$\boldsymbol{B}$を求めよ．

(6) Fig.1(c)の様に，半径aの無限長円柱内に，$(x,y)=(0,d)$を中心とした半径bの無限長円柱状の空洞がある．空洞以外の円柱内を一様な電流（電流密度J）が流れている．空洞の中の位置(x,y)における磁束密度ベクトル$\boldsymbol{B}$を求めよ．

Answer the following questions.

(1) Find the vector of the electric field $\boldsymbol{E}$ at the position (x,y) when the charge is uniformly distributed with a volume charge density ρ within an infinitely long solid cylinder of radius a, as shown in Fig. 1(a).

(2) The charge is uniformly distributed with a volume charge density $-\rho$ within an infinitely long solid cylinder with center $(x,y)=(0,d)$ and radius b, as shown in Fig. 1(b). Find the vector of the electric field $\boldsymbol{E}$ at the position (x,y) within the infinitely long solid cylinder.

(3) Sketch the charge distribution given by the superposition of the charge distributions in question (1) and question (2) under the assumption that $d+b<a$.

２０１０年３月実施
問題１　電磁気学

(4) As shown in Fig. 1(c), an infinitely long solid cylinder of radius a has an infinitely long cylindrical cavity with center $(x,y)=(0,d)$ and radius b. The infinitely long solid cylinder has a uniform charge (volume charge density ρ), except in the cavity. Find the vector of the electric field $\boldsymbol{E}$ at the position (x,y) within the cavity.

(5) Find the vector of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the position (x,y) when a current I flows in the $+z$ direction through the infinitely long solid cylinder of radius a, as shown in Fig. 1(a).

(6) As shown in Fig. 1(c), an infinitely long solid cylinder of radius a has an infinitely long cylindrical cavity with center $(x,y)=(0,d)$ and radius b. A uniform current (current density J) flows through the infinitely long solid cylinder, except in the cavity. Find the vector of the electric field $\boldsymbol{B}$ at the position (x,y) within the cavity.

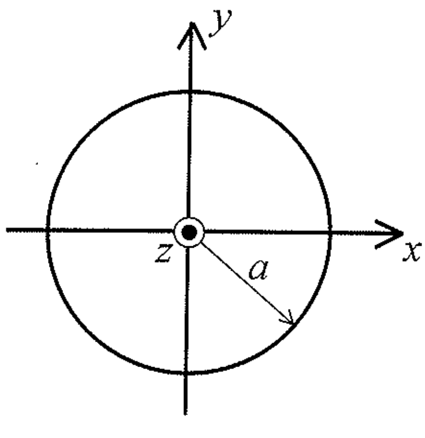

Fig.1(a)

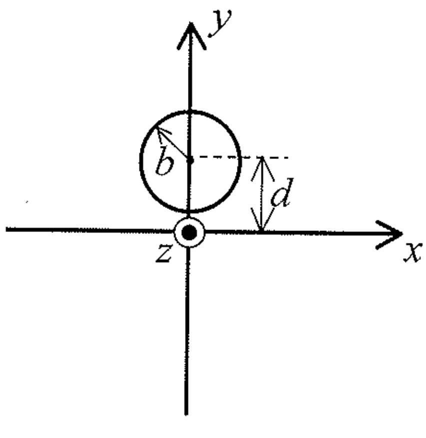

Fig.1(b)

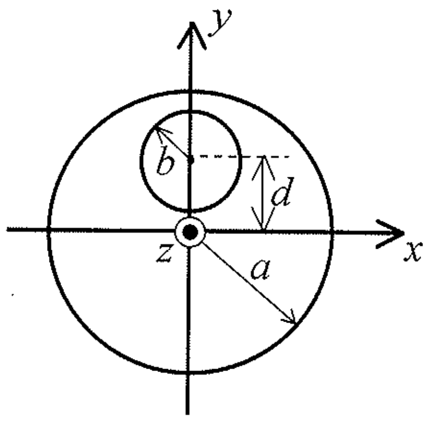

Fig.1(c)

2010年3月実施
問題2　電気回路
（1頁目／1頁中）

Fig. 2 に示す回路について次の問に答えよ. なお交流電源 kE の角周波数は $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ である.

(1) 端子 a-a'における電圧波形の概略を示せ.
(2) 負荷 R を流れる電流の直流成分と交流成分を求めよ.
(3) 負荷 R に供給される電力 P を求めよ.

Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2. Here the angular frequency of the AC voltage source kE is $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1}$.

(1) Sketch the voltage waveform at the terminal pair a-a'.
(2) Find the DC component and the AC component of the current flowing through the load R.
(3) Find the power P supplied to the load R.

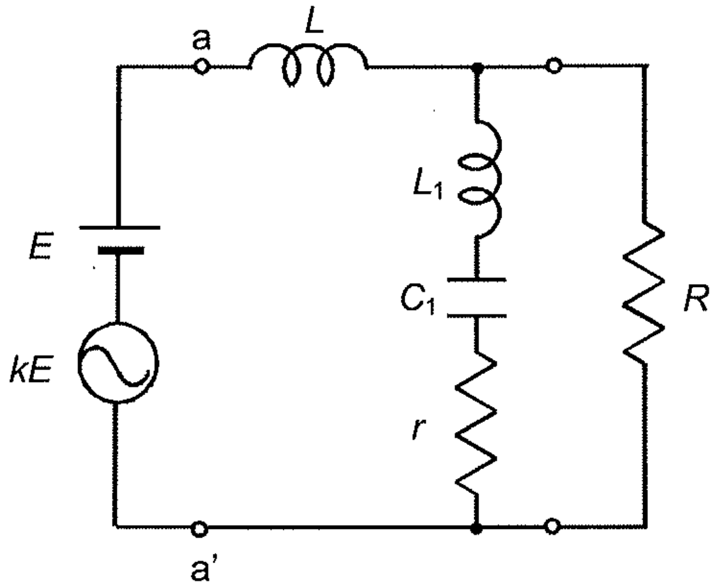

Fig. 2

２０１０年３月実施
問題３　情報基礎１
（１頁目／１頁中）

n 変数の部分論理関数 $g_n : E_n \to \{0,1\}$ を

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \lceil n/2 \rceil \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義する．ただし，$E_n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n \mid b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n = 0\}$ とし，$\oplus$ は排他的論理和を表し，$\lceil n/2 \rceil$ は $n/2$ 以上の最小な整数を表す．以下の問に答えよ．

(1) $n = 2$，$n = 3$ および $n = 4$ のそれぞれについて，$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ となるベクトル $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ をすべて列挙せよ．

(2) すべての $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$ に対して $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を満足する n 変数論理関数 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ は，g_n の拡大であるという．g_n の拡大はちょうど $2^{(2^{n-1})}$ 個存在することを証明せよ．

(3) n 変数論理関数 f の変数を任意に置換しても f が変化しないとき，f は対称であるという．g_n の拡大のうち，対称なものはちょうど $2^{\lceil n/2 \rceil}$ 個存在することを証明せよ．

Let $g_n : E_n \to \{0,1\}$ be an n-variable partial Boolean function defined as follows:

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \lceil n/2 \rceil, \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $E_n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n \mid b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n = 0\}$, $\oplus$ denotes the exclusive-OR operator, and $\lceil n/2 \rceil$ denotes the smallest integer not less than $n/2$. Answer the following questions.

(1) For each of $n = 2$, $n = 3$ and $n = 4$, write down all the vectors $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ satisfying $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

(2) An n-variable Boolean function $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ is said to be an extension of g_n if $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ holds for every $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$. Prove that there are exactly $2^{(2^{n-1})}$ extensions of g_n.

(3) An n-variable Boolean function f is said to be symmetric if it is unchanged by any permutation of its variables. Prove that there are exactly $2^{\lceil n/2 \rceil}$ extensions of g_n which are symmetric.

２０１０年３月実施
問題４　情報基礎２
（１頁目／２頁中）

グラフ $G=(V,E)$ を考える．但しグラフにセルフループや多重辺はないとする．たとえば，$V=\{1,2,3,4,5\}$, $E=\{(1,2),(1,3),(1,4),(4,5)\}$ とすると，図 4 で図示されるグラフとなる．グラフ G の頂点 v に接続する辺の数を v の次数といい，頂点の次数の最大および最小をそれぞれグラフ G の最大次数と最小次数と呼ぶ．グラフの頂点彩色とは，辺で結ばれた頂点が異なった色を持つように頂点に色を割り当てることである．図 4 のグラフの最大次数は 3，最小次数は 1 であり，頂点 1 と 5 を赤く塗り，2, 3, 4 を青く塗ったものはこのグラフの 2 色による頂点彩色になる．次の問に答えよ．

(1) 任意の自然数 K に対し，最大次数が K であり，K 色による頂点彩色を持たないグラフが存在する．そのような例を K が 2 及び 3 の場合に対してそれぞれ一つずつ図示せよ．

(2) 最小次数が 3 であり，2 色で彩色できるグラフを一つ図示せよ．

(3) 最大次数が K 以下であるグラフは $K+1$ 色で頂点彩色ができることを証明せよ．

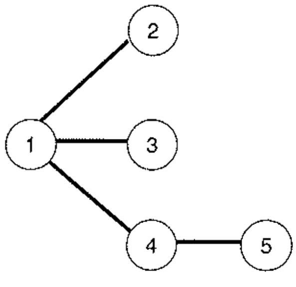

図 4

Consider a graph $G = (V, E)$. We assume that the graph has neither a self-loop nor multiple edges. For example, if $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 5)\}$, we have the graph illustrated in Fig. 4. The degree of a vertex v of a graph G is the number of edges incident to v, and the maximum and minimum of the vertex degrees are called the maximum degree and minimum degree of G, respectively. Vertex-coloring is the assignment of colors to vertices such that any pair of vertices connected by an edge have different colors from each other. For example, the graph given in Fig. 4 has the maximum degree three and the minimum degree one, and its vertex-coloring has two colors if we color 1 and 5 red, and 2, 3 and 4 blue. Answer the following questions.

(1) For any natural number K, there is a graph with maximum degree K that has no vertex-coloring with K colors. Illustrate such an example for $K = 2$ and 3, respectively.

(2) Illustrate a graph with minimum degree three that can be vertex-colored with two colors.

(3) Prove that any graph whose maximum degree is at most K can be vertex-colored with $K + 1$ colors.

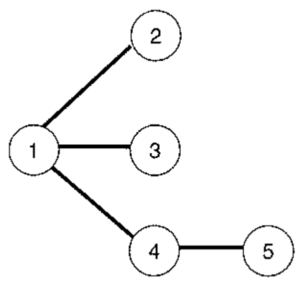

Fig. 4

２０１０年３月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／２頁中）

一定の長さ ℓ の質量の無視できる棒によってつり下げられた質量 m の小さなおもりからなる単振り子を考える．振り子は支点 P のまわりを鉛直面内に振動する．空気抵抗や振り子の支点 P での摩擦はないものと仮定する．棒と鉛直下方のなす角度を θ とし，棒の張力の大きさを T とする．重力加速度の大きさを g とする．以下の問に答えよ．

(1) 支点 P が固定されている状況を考えよ．

(a) おもりの水平方向と鉛直方向の運動方程式を求めよ．

(b) 角度 θ のときのおもりの速さを v として，張力の大きさ T を求めよ．

(c) おもりの接線方向の運動方程式を求めよ．

(d) 振幅が十分小さいときの振り子の固有振動数を求めよ．

(2) 支点 P が動いている状況を考えよ．

(a) 支点 P が鉛直上方に一定の速さ v_0 で動いているとき，振り子の固有振動数を求めよ．

(b) 支点 P が鉛直上方に一定の加速度 a_0 で動いているとき，振り子の固有振動数を求めよ．

(c) 支点 P が振り子の振動面内の水平方向に一定の振動数 f_0 で単振動しているとき，角度 θ を時間の関数として表せ．

２０１０年３月実施
問題５　物理基礎１

Consider a simple pendulum which consists of a small weight of mass m suspended from a rod of constant length ℓ with negligible mass. The pendulum oscillates in a vertical plane about a pivot point P. Assume that there is no air resistance and no friction at the pivot point P. Let the angle between the rod and the downward vertical direction be θ and the magnitude of the tension of the rod be T. Let g denote the magnitude of the gravitational acceleration. Answer the following questions.

(1) Consider the situation with the pivot point P fixed.

(a) Obtain the equations of motion of the weight along the horizontal and the vertical directions.

(b) If the speed of the weight at an angle θ is denoted by v, obtain the magnitude of the tension T.

(c) Obtain the equation of motion of the weight along the tangential direction.

(d) Obtain the characteristic frequency of the pendulum for sufficiently small amplitudes.

(2) Consider the situations with the pivot point P moving.

(a) When the pivot point P moves in the upward vertical direction with a uniform speed v_0, obtain the characteristic frequency of the pendulum.

(b) When the pivot point P moves in the upward vertical direction with a uniform acceleration a_0, obtain the characteristic frequency of the pendulum.

(c) When the pivot point P harmonically oscillates with a constant frequency f_0 along the horizontal direction in the swinging plane of the pendulum, express the angle θ as a function of time.

２０１０年３月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／１頁中）

2 次曲線を表す式

$$13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy = 16 \cdots\cdots (6a)$$

について考える．以下の問に答えよ．

(1) 次の関係式を満たす 2 行 2 列の対称行列 A を求めよ．

$$13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) A を対角化する直交行列 U を求めよ．A を対角化せよ．

(3) 式(6a)を標準形に変換せよ．ただし，座標変数として x' と y' を用いよ．

(4) 式(6a)が表す 2 次曲線の概略を x-y 平面上に図示せよ．

Consider the equation

$$13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy = 16 \cdots\cdots (6a),$$

which represents a quadratic curve. Answer the following questions.

(1) Find a 2 × 2 symmetrical matrix A which satisfies the following equation

$$13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2) Find an orthogonal matrix U which diagonalizes the matrix A. Diagonalize the matrix A.

(3) Transform equation (6a) to a normal form. Use x' and y' as new coordinate variables.

(4) Sketch the outline of the quadratic curve expressed by equation (6a) in the x-y plane.