$\boxed{1}$

1．次の問に答えよ．

$y = \tan^{-1}\sqrt{1-x^2}$ を微分せよ．ただし $-1 < x < 1$ とする．

2．$x > 0$ において次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{x}{1+x} < (x+1)\log(1+x)$$

3．実数 x を変数とする何回でも微分可能な関数 $f(x)$ を考える．次の問に答えよ．

1) n を自然数とし，

$$g_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \int_0^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

とおく．ただし，$f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(n)}(x)$ はそれぞれ $f(x)$ を 1, 2, n 回微分したものを表す．数学的帰納法を用いて，$f(x) = g_n(x)$ が成り立つことを示せ．

2) $f(x) = g_n(x)$ であることを利用して，任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$

1．行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と半径 1 の球体

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$$

を考える．次の問に答えよ．

1) 行列 A の固有値・固有ベクトルの対を全て計算せよ．ただし，固有ベクトルは長さが 1 となるよう正規化すること．

2) 行列 A によって定まる一次変換を n 回適用して，球体 B が写される先は

$$A^n B = \left\{ A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \right\}$$

である．$n \to \infty$ の時，$A^n B$ が近づく先の図形を xyz 空間中に図示せよ．座標も記すこと．

（次のページに続く）

2．任意の実数 x に対して次式が成り立つ．

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

これらと同様に，A を 2×2 行列として，無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots$$

が収束するとき，これらをそれぞれ $\cos A, \sin A$ と書くことにする．ただし，I は 2×2 単位行列であり，$A^0 = I$ とする．以下では λ を実数とし，

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

とする．次の問に答えよ．

1) $\cos N, \sin N$ を求めよ．

2) k を 0 以上の整数とするとき，A^k は

$$A^k = \alpha_k I + \beta_k N$$

の形となる．実数 α_k, β_k を λ, k を用いて表せ．

3) $\cos A$ を $\cos \lambda, \sin \lambda$ を用いて表せ．

$\boxed{3}$

1．次の微分方程式を解け．

$$ax\frac{dy}{dx}+by=xy\frac{dy}{dx}$$

2．次の微分方程式の一般解を求めよ．

1） $$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=xe^{2x}$$

2） $$\frac{dy}{dx}+(\sin x)y=\sin 2x$$

3．滑らかな曲線ℓ上の点Q(x,y)における接線を考える．次の問に答えよ．ただし，$dy/dx=p$とし，pが有限である場合のみ考えればよい．

1）Qにおける接線の方程式を，pを含む形で求めよ．ただし，接線上の任意の点の座標を(u,v)とする．

2）接線と原点の距離を2とする．このとき，次の微分方程式が得られることを示せ．

$$y-px=\pm2\sqrt{1+p^2}$$

3）2）で示した微分方程式をxに関して微分することにより解け．

4

図 1 に示すような，導体1および2（ともに面積は S）の間を誘電体1および2で満たされている正方形平行平板コンデンサーについて考える。誘電体1および2の誘電率はそれぞれε_1 およびε_2，厚さはそれぞれ d_1 および d_2 であり，誘電体1と2の境界面には面密度σの真電荷が一様に存在している。

導体1と2の間に電位差 V_0 を与えた。定常状態において，以下の問いに答えよ。ただし，導体間距離は導体の一辺の長さに対して無視できるほど短く（$d_1+d_2 \ll \sqrt{S}$ ），コンデンサーの端における電界の乱れは無視できるものとする。

1） 誘電体1および2における電束密度をそれぞれ D_1 および D_2 とする。D_1，D_2 およびσとの間に成り立つ関係を示せ。

2） 導体1からの距離xにおける電位を$V(x)$とする。$V(x)$をε_1，ε_2，d_1，d_2，V_0およびσを用いて表し，$V(x)$の概略図を示せ。ただし，D_1 および D_2 の向きはともに導体1から2へむかう向き（x 軸正方向）であるとして描け。

3） 導体1および2に誘起される電荷 q_1 および q_2 をガウスの定理を使って求めよ。

4） このコンデンサーに蓄えられる静電エネルギーU を求めよ。

5） 導体1および2に作用するそれぞれの吸引力 f_1 および f_2 を求めよ。ただし，簡単のためσ=0 とする。（以下のヒントのいずれかを用いてもよい。ヒント1：エネルギーと力の関係を考えよ。ヒント2：導体表面の電荷に作用する力は，対向導体表面の電荷の作る電界による。）

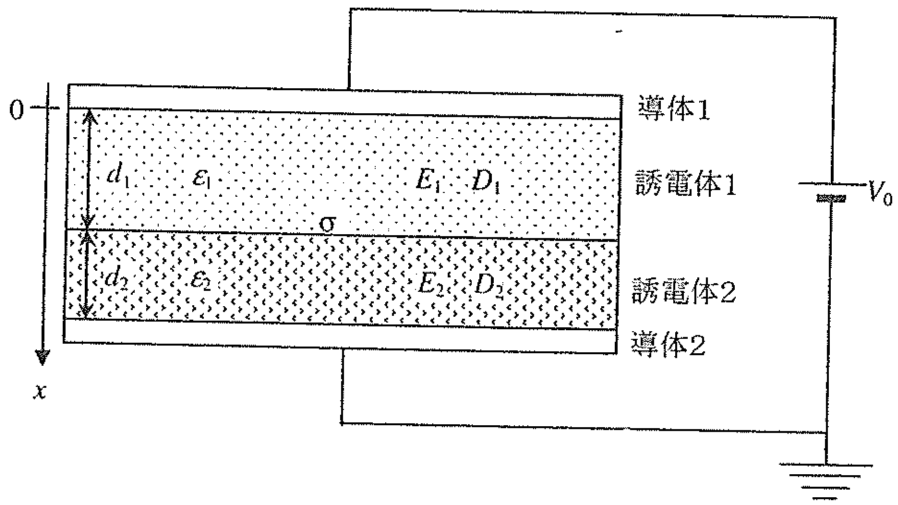


図1

5

図1のように x 軸に沿って置かれた断面積 S の導体に対して，xy 面内に x 軸から角度 θ だけ傾いた方向に均一な磁界(磁束密度 $\boldsymbol{B}$)が印加されている。導体の両端に電圧を印加したところ，導体中に電流が流れるとともに導体に力が加わった。電流が定常状態にあるとき，以下の問いに答えよ。

1）導体内を流れる電子(素電荷 $-e$)の平均速度が $\boldsymbol{v}$ であるとき，磁界によって導体内を流れる1個の電子に加わる平均的な力 $\boldsymbol{F}$ の x, y, z 成分(F_x, F_y, F_z)を e, $|\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{B}|$, θ を用いて表せ。また，導体内を流れる電子の数密度(単位体積あたりの電子数)を n とするとき，導体単位長さあたりに存在する電子に加わる力 $\boldsymbol{F}_t$ の x, y, z 成分(F_{tx}, F_{ty}, F_{tz})を e, $|\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{B}|$, θ, n, S を用いて表せ。

2）導体に流れる電流 $\boldsymbol{I}$ の絶対値 $|\boldsymbol{I}|$ を e, $|\boldsymbol{v}|$, n, S を用いて表すとともに，1）で求めた力 $\boldsymbol{F}_t$ の x, y, z 成分(F_{tx}, F_{ty}, F_{tz})を $|\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{I}|$, θ を用いて表せ。

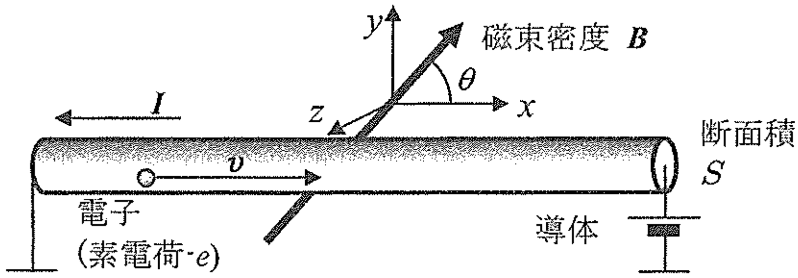


図1

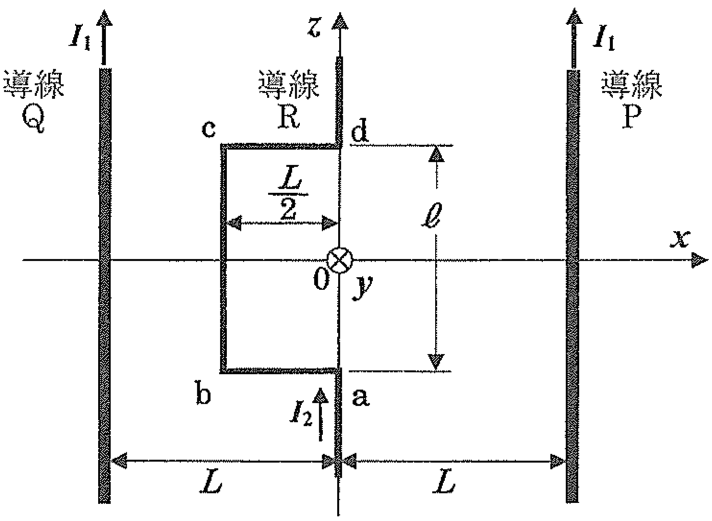
図2のように，透磁率 μ_0 の空間中の xz 平面内に無限長かつ太さが無視できる2本の平行導線P,Qが距離 $2L$ だけ離れて存在し，$+z$ 方向に電流 I_1 が流れている。また，同じ xz 平面内には折れ曲がった導線Rがあり，電流 I_2 が流れている。このとき以下の問いに答えよ。ただし，$|I_1| >> |I_2|$ であり，導線Rにより生じる磁界は導線PおよびQによる磁界に比べて無視できるものとする。

3）導線PおよびQに流れる電流により生ずる磁界について，x 軸上の $|x| < L$ の範囲における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の x, y, z 成分(B_x, B_y, B_z)を x の関数で表わせ。

4）導線Rのbc間に発生する力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{bc}}$ の x, y, z 成分($F_{\mathrm{bc}x}, F_{\mathrm{bc}y}, F_{\mathrm{bc}z}$)を求めよ。

5）導線Rのab間に発生する力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ab}}$ の x, y, z 成分($F_{\mathrm{ab}x}, F_{\mathrm{ab}y}, F_{\mathrm{ab}z}$)を求めよ。

図2



6

雨滴が空気中を落下する場合の運動を考える．上空のある高さから質量 m の雨滴が初速0で落下をはじめる．なお風は吹いておらず雨滴は鉛直下方向に落下する．重力加速度を g 、時刻を t として以下の問いに答えよ．

1) 落下の初期においては、雨滴には速度に比例する抗力が働くとみなしてよい．

a) この比例係数を $a\ (a>0)$ とする．鉛直方向を z 軸とし上向きを正として、雨滴の運動方程式を z の微分方程式として表せ．ただし、雨滴に働く浮力は無視できるものとする．

b) a) の運動方程式を z について次の手順にしたがって解け．まず、特別解を $-\frac{mgt}{a}$ として z の一般解および z 方向の速度 $\frac{dz}{dt}$ を求めよ．次に初期条件として時刻 $t=0$ において $z=0$ 、$\frac{dz}{dt}=0$ とした場合、時刻 t における z および $\frac{dz}{dt}$ を求めよ．

2) 雨滴の落下速度が増すにつれて、速度の2乗に比例する抗力の影響が大きくなる．この比例係数を $b\ (b>0)$ として雨滴の運動方程式を $v\ (v=\frac{dz}{dt})$ の微分方程式として表せ．このとき、速度に比例する抗力は無視できるとする．また、雨滴の速度は時間とともに一定値に限りなく近づき、この速度を終端速度という．終端速度を v_f とすると $\frac{dv_f}{dt}=0$ となることを用いて終端速度 v_f を求めよ．

3) 図1に示すように上面の開口部の面積が ab 、深さ c 、質量 M_0 の箱が雨滴を受けながら摩擦の無視できる滑らかな水平面上を移動する場合を考える．箱に当たる雨滴は終端速度 v_f で落下しているとする．雨滴の質量はすべて m であるとし、雨滴の密度を ρ、単位体積あたりの雨滴の個数を N とするとき、時刻 $t=0$ に初速 V_0 で走り始めた箱の時刻 t における速度 V を求めよ．走り始めた瞬間には箱に雨滴は入っていないとする．ただし、箱に対する空気及び雨滴の抗力は無視できるものとする．また、箱の縁部や側面に付着したり、はねかえる雨滴の影響も無視できるものとする．箱の中の水面の表面張力によるふくらみは無視し、水面は水平とする．

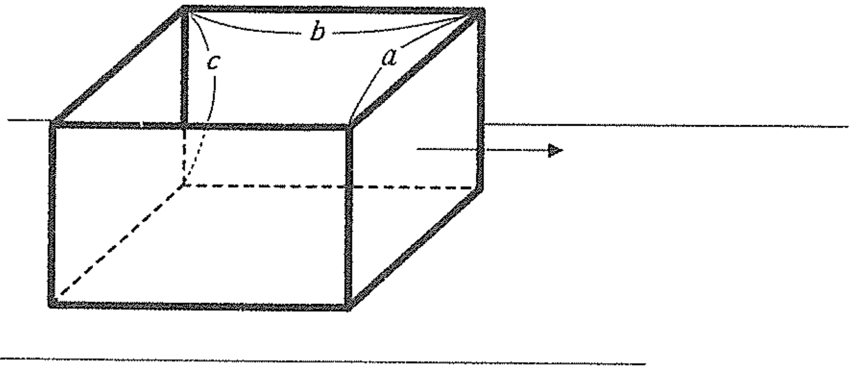


図1