平 成 ２１年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　門

平成２０年８月１１日（月）
１２：３０～１５：３０

注 意 事 項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．（外国人留学生は、日本語から母国語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。）

４．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認せよ。

５．問題は、線形代数、微分積分、離散数学、数理論理学、確率論・統計学、
微分方程式、量子力学、アルゴリズム設計法、オートマトン理論、プログラミング
の１０題からなる。このうち３題を選択して解答せよ。
ただし，確率論と統計学を同時に選択してはならない。

また、選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

６．解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を
記入してはならない。

７．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出せよ。

８．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)

s, t を実数とし, $A = \begin{pmatrix} s & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & t & 2t \end{pmatrix}$ とする. A を表現行列とする 3 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換を f で表す. また $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0 \right\}$ で定義する. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $f(W) \subseteq W$ であるとき, s, t の値を求めよ.

以下, s, t は (1) で求めた値とする.

(2) A の行列式を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ に自然な内積を考えるとき, W の直交補空間 $W^\perp$ の基底となるベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つあげよ.

(4) (3) の $\boldsymbol{v}$ について, $f(\boldsymbol{v})$ の $W^\perp$ への射影は $\boldsymbol{v}$ の何倍か.

(5) f を W に制限して得られる W 上の線形変換の行列式を求めよ.

問題 2. (微分積分)

以下の各問に答えよ.

(1) (i) x を $0 < x < 1$ をみたす任意の実数とするとき, $x \leqq e^x - 1 \leqq ex$ が成り立つことを示せ.

(ii) 実数 $\alpha > 0$ に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^\alpha} dx$ の収束・発散を調べよ.

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \dfrac{x + 2y + 3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ とする.

(i) 原点を中心とする半径 r $(r > 0)$ の円周上における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(ii) $\mathbb{R}^2$ における $f(x, y)$ の最大値, 最小値があればそれらを求めよ.

問題 3. (離散数学)

次の方程式の，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $GF(4)$ における解の個数をそれぞれ求めよ．また，$GF(4)$ において 1 つも解をもたない場合は，少なくとも 1 つ解をもつ $GF(4)$ の最小の拡大体の要素の個数を求めよ．

(1) $x^2 - 1 = 0$

(2) $x^3 + 1 = 0$

(3) $x^{2008} + x^8 + 11 = 0$

(4) $x^6 + x + 1 = 0$

ただし，重解は重複して数えないものとする．また，$GF(q)$ は q 個の要素をもつ有限体を表す．

問題 4. (数理論理学)

$\varphi(x,y,z)$ を次の真理表をみたす命題論理の論理式とする．(使用する論理記号は $\vee$, $\wedge$, $\neg$ とする)

x	y	z	$\varphi(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

以下の各問に答えよ．

(1) 使用する論理記号の数が合計 8 個以下となる $\varphi(x,y,z)$ の例を一つあげよ．

(2) 使用する $\vee$ と $\wedge$ の数が合計 4 個以下 ($\neg$ は何個用いても良い) では，このような $\varphi(x,y,z)$ を書くことはできないことを示せ．

問題 5. (確率論・統計学)

次の I, II のいずれか一方を選択して答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I.　λ を正の定数とし，N をパラメータ λ のポアソン分布に従う確率変数とする．つまり，$N = r$ の確率 $P(N = r)$ が

$$P(N = r) \;=\; e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^r}{r!},\quad r = 0, 1, 2, ...,$$

によって与えられるとする．また，p を $0 < p < 1$ である定数とし，表が出る確率が p の硬貨を N 回投げるとする．ただし，硬貨投げの結果と N は独立であるとする．以下の各問に答えよ．

(1) $N, N(N-1)$ の期待値がそれぞれ λ, λ^2 であることを示し，N の分散を求めよ．

(2) 表の回数を X，裏の回数を Y とする．X, Y の確率分布は何か．

(3) X と Y が独立であることを示せ．

II.　確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立とし，それぞれ区間 $[0, \theta]$ 上の一様分布に従うとする．ただし $\theta > 0$ とする．また，Y, Z を

$$Y \;=\; \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Z \;=\; \max_{i=1,\ldots,n} X_i$$

と定義する．以下の各問に答えよ．

(1) $(Y - \theta)^2$ の期待値を求めよ．

(2) Z の分布関数を求めよ．

(3) $(Z - \theta)^2$ の期待値を求めよ．

問題 6. (微分方程式)

x_0 を正の実数とするとき，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + (1-t)e^{-2t}x(t)^2 \quad (t \geqq 0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ とおき，$y(t)$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2) $y(t)$ を求めよ．

(3) 解 $x(t)$ が爆発するような初期値 x_0 の範囲を求めよ．ここで，解 $x(t)$ が爆発するとは，ある $\tau > 0$ が存在して，$\displaystyle\lim_{t \to \tau - 0} |x(t)| = \infty$ となることを言う．

問題 7. (量子力学)

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される 2×2 行列とし，$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ とする．3 次元実ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, z)$ に対して，$\mathbf{x} \cdot \sigma$ を

$$\mathbf{x} \cdot \sigma = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$$

で定まる 2×2 行列とする．

(1) $\mathbf{x} \cdot \sigma$ の固有値を求めよ．

(2) 長さが 1 の 3 次元実ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して，$A = \mathbf{a} \cdot \sigma$, $B = \mathbf{b} \cdot \sigma$ で 2×2 行列 A, B を定める．$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ とするとき，$AB - BA$ の固有値を求めよ．

問題 8. (アルゴリズム設計法)

以下の各問に答えよ．なお，アルゴリズムを説明する際は，プログラムのような詳細な記述をする必要はなく，本質的なアイデアが分かるように説明すればよい．

(1) 以下の (i)–(iii) それぞれに対し，与えられる数値の中から 2 つを選ぶとき，それらの差が最も小さい対を出力する効率の良いアルゴリズムを与えよ．また，その時間計算量を述べよ．

  (i) $x[1..n]$ はサイズ n の配列で，n 個の数値が入っている．これら n 個の中で差が最小の対を出力する．

  (ii) $x[1..n]$ と $y[1..n]$ はともにサイズ n の配列で，それぞれ昇順にソート済みの n 個の数値が入っている．これら $2n$ 個の中で差が最小の対を出力する．

  (iii) $i = 1, 2, \ldots, m$ のそれぞれに対し，$x_i[1..n]$ はサイズ n の配列で，昇順にソート済みの n 個の数値が入っている．これら mn 個の中で差が最小の対を出力する．

(2) $x[1..n]$ と $y[1..n]$ はともにサイズ n の配列で，それぞれ昇順にソート済みの n 個の数値が入っている．これら $2n$ 個の数値は相異なるものとする．このとき，$x[1..n]$ と $y[1..n]$ に格納されている $2n$ 個の数値の中央値 (median) を求める $O(\log n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ (入力サイズよりも小さな計算時間が要求されていることに注意せよ)．なお，$2h-1$ 個の数の中央値は小さいほうから h 番目の数であり，$2h$ 個の数の中央値は小さいほうから h 番目と $h+1$ 番目の数の相加平均である．

問題 9.（オートマトン理論）
$\Sigma = \{0, 1\}$ をアルファベットとする言語を考える．

(1) 以下のオートマトンを図示せよ．

(i) 00 を含む文字列全体からなる言語を認識する有限オートマトン
(決定性でも非決定性でもかまわない)

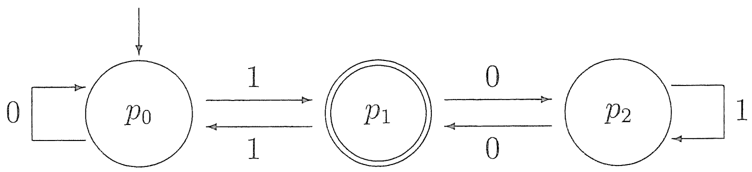
(ii) 00 を含まない文字列全体からなる言語を認識する決定性有限オートマトン

(iii) 0 が出現する数と 1 が出現する数の差が 4 の倍数である文字列全体からなる言語 $L = \{\varepsilon, 01, 10, 0000, 0011, 0101, \ldots\}$ を認識する決定性有限オートマトン

(2) 以下の各問に答えよ．

(i) 関数 $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ は，$w \in \Sigma^*$ を 2 進数とみなしたときの値を n とすると，$f(w) = n$ となる関数である．ただし，$f(\varepsilon) = 0$ とする．例えば，$f(0110) = f(110) = 6$ となる．関数 f の定義を文字列の長さに関する再帰的な定義で与えよ．
(具体的には，$f(\varepsilon)$ の値は分かっているので，$f(w0)$ と $f(w1)$ の値を $f(w)$ の値を用いて表せば充分である．)

(ii) 次の決定性有限オートマトン M を考える．



各 $k \in \{0, 1, 2\}$ で次の命題が成立することを文字列 w の長さに関する同時帰納法で証明せよ．

$$\hat{\delta}(p_0, w) = p_k \Rightarrow f(w) \equiv k \pmod 3$$

なお，帰納法の仮定を用いた個所は明示すること．ここで，$\hat{\delta}$ は遷移関数の文字列上への拡張である．

(iii) (ii) の結果を用いて $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid f(w) \equiv 1 \pmod 3\}$ を証明せよ．

問題 10. (プログラミング)

以下に示すＣ言語プログラム中の関数 `quick_sort` は，クイックソートアルゴリズムにより，ポインタの配列 `a` の `left` 番目から `right` 番目までの要素を，比較関数 `compare` が定める順序によりソートする関数である.（行頭の数字は行番号を表し，プログラムには含まれない.）

ここで，配列の添字（index）は 0 から始まるものとし，配列の最初の要素を 0 番目の要素と呼ぶ.

quick_sort.h

```
1   typedef int BOOL;
2
3   #define TRUE  1
4   #define FALSE 0
5
6   extern void quick_sort(void *a[], int left, int right,
7                          BOOL compare(void *, void *));
```

quick_sort.c

```
8   #include "quick_sort.h"
9
10  void quick_sort(void *a[], int left, int right,
11                  BOOL compare(void *, void *))
12  {
13      void *p, *t;
14      int  i, j;
15
16      p = a[(left + right) / 2];
17      i = left;
18      j = right;
19      while (i <= j) {
20          while (compare(a[i], p)) i = i + 1;
21          while (compare(p, a[j])) j = j - 1;
22          if (i >= j) break;
23          t = a[i];
24          a[i] = a[j];
25          a[j] = t;
26          i = i + 1;
27          j = j - 1;
28      }
29      if (left < i - 1) quick_sort(a, left, i - 1, compare);
30      if (j + 1 < right) quick_sort(a, j + 1, right, compare);
31  }
```

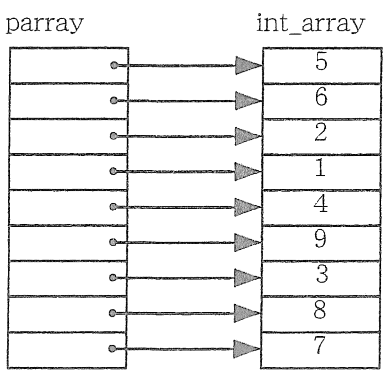
関数 quick_sort を用いて，9 つの整数値をソートして表示するプログラムを，次のように作成した．

main.c

```
#include <stdio.h>
#include "quick_sort.h"

BOOL int_compare(int *a, int *b)
{
    if (*a < *b) return(TRUE);
    else return(FALSE);
}

int int_array[9] = { 5, 6, 2, 1, 4, 9, 3, 8, 7 };
int *parray[9];

main()
{
    int i;

    for (i = 0; i < 9; i++) {
        parray[i] = &int_array[i];
    }
    quick_sort(parray, 0, 8, int_compare);
    for (i = 0; i < 9; i++) {
        printf("%d\n", *(parray[i]));
    }
}
```

（1）このプログラムは，与えられた整数値をどのような順序にソートするか．また，ソートする順序を逆にするには，**main.c** をどのように修正すればよいか．

（2）このプログラム（前問で修正する前のプログラム）が最初に関数 quick_sort を呼ぶ時の配列 parray および配列 int_array を図示したものを下に示す．これを参考に，プログラムが最初に 29 行目を実行する直前および最初に 30 行目を実行する直前の配列 parray および配列 int_array を下に示す形式で図示せよ．



（3） 学生の学籍番号（id フィールド），氏名（name フィールド），成績（score フィールド）を管理するための構造体型 student を下のように定義した．関数 quick_sort を用いて，構造体型 student の値を，成績の高い順（成績が同じ学生の間では，学籍番号の小さい順）にソートするために用いる比較関数 student_compare を完成させよ．

```
typedef struct {
    int     id;
    char    *name;
    int     score;
} student;

BOOL student_compare(student *a, student *b)
{

    . . . .

}
```

（4） 関数 quick_sort の問題点として，型の整合性（consistency）がチェックできないことが挙げられる．この問題により不具合が生じるのは，関数 quick_sort をどのように呼び出した場合か述べよ．

また，関数 quick_sort を型の整合性がとれていない状況で呼び出した結果，関数 quick_sort 中で不正なメモリアドレスに対するアクセスが発生し，プログラムの実行が中断される可能性がある．不正なメモリアドレスに対するアクセスが発生する理由を具体的に説明せよ．