Fig. 1 に示すように，半径R_1の導体球 A と内半径R_2，外半径R_3の導体球殻 B が，いずれも原点 O に中心を持つように真空中に置かれている．導体球 A と導体球殻 B に，それぞれ電荷q_Aとq_Bを与える．以下の問に答えよ．ただし，真空の誘電率をε_0とし，無限遠点での静電位を 0 とする．

(1) 静電界におけるガウスの法則を数式で表し，その物理的意味を説明せよ．

(2) 静電界においては，電界$\mathbf{E}(\mathbf{r})$について，$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})=0$が常に成り立つ．ここで，$\mathbf{r}$は原点 O を始点とする位置ベクトルである．この式の物理的意味について，ストークスの定理を用いて説明せよ．

(3) ガウスの法則を用いて，Fig. 1 に示す系の任意の位置$\mathbf{r}$における電界$\mathbf{E}(\mathbf{r})$を求めよ．

(4) 問(3)で求めた電界$\mathbf{E}(\mathbf{r})$が$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})=0$を満たしていることを計算で示せ．

(5) 導体球 A と導体球殻 B の静電位ϕ_Aとϕ_Bを求め，これらの導体からなる導体系に蓄えられている静電エネルギーUを求めよ．その際，

$$U=\frac{1}{2}\left(q_A\phi_A+q_B\phi_B\right)$$

を利用せよ．

(6) この導体系の各部分における静電エネルギー密度を示せ．次に，静電エネルギー密度を全空間にわたって積分することにより，その結果が問(5)で求めた静電エネルギーUと一致することを示せ．

As shown in Fig. 1, a conducting sphere A and a spherical conducting shell B are located in the vacuum, both with the same center at the origin O. The conducting sphere A has a radius of R_1, and the spherical conducting shell B has an internal radius of R_2 and an external radius of R_3. The electric charges q_A and q_B are placed on the conducting sphere A and the spherical conducting shell B, respectively. Answer the following questions. The vacuum permittivity is ε_0 and the electrostatic potential at infinity is defined to be zero.

(1) Show the equation of Gauss's law for electrostatic fields and give its physical meaning.

(2) The equation $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r})=0$ always holds for electrostatic fields $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Here, $\mathbf{r}$ is the position

vector from the origin O. Give the physical meaning of the equation by using Stokes's theorem.

(3) For the system shown in Fig. 1, evaluate the electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ at an arbitrary point $\mathbf{r}$ by using Gauss's law.

(4) Show by calculation that $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ holds for the electric field $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ obtained in (3).

(5) Evaluate the electrostatic potential ϕ_{A} of the conducting sphere A and the electrostatic potential ϕ_{B} of the spherical conducting shell B. Then, evaluate the electrostatic energy U stored in the system composed of these conductors by using

$$U = \frac{1}{2}\left(q_{\mathrm{A}}\phi_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}}\phi_{\mathrm{B}}\right).$$

(6) Evaluate the density of the electrostatic energy at an arbitrary point in the system. Then, by integrating the density of the electrostatic energy over all space, show that the result of the integration is the same as the electrostatic energy U obtained in (5).

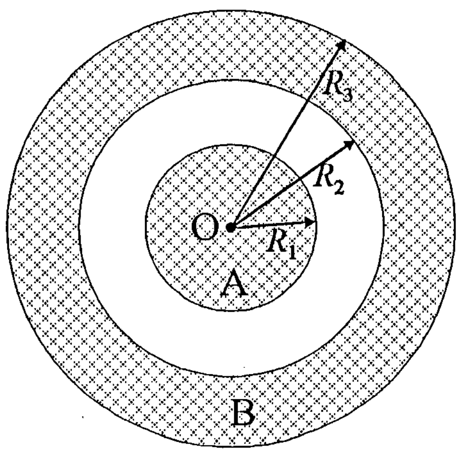

Fig. 1

Fig. 2(a)のような RLC 直列回路に正弦波電圧 $e(t)=E\sin\omega t$ を印加する．E は一定の振幅で，ω は角周波数，t は時刻である．以下の問に答えよ．

(1) ある角周波数 $\omega=\omega_0$ において回路に流れる電流の振幅が最大値 I_0 になるという．ω_0 と I_0 を R，L，C および E を用いて表せ．

(2) 角周波数 ω を問(1)で定めた ω_0 に固定し，かつインダクタンスを $L+\Delta L$ に置き換えると，電流振幅最大値 I_0 の $1/k$ 倍の電流が流れるという．この回路の良さ Q および抵抗 R の値を，$k, L, \Delta L$ および ω_0 を用いて表せ．ただし，$k>1$ とする．

(3) Fig. 2(b)のように，$t=0$ においてスイッチ S を閉じ，$e(t)=E\sin\omega_0 t$ を回路に印加する．コンデンサの初期電荷は零であるとし，ラプラス変換によって周波数域における電流 $I(s)$ を求めよ．ただし，ω_0 は問(1)で定めた角周波数である．

(4) 問(3)において，抵抗 R は零に近似できるとする．時間域における電流 $i(t)$ を求め，その波形を図示せよ．必要であれば以下の関係を用いてよい．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{t}{2a}\sin at$$

Fig. 2(a) shows an RLC series circuit driven by a sinusoidal voltage $e(t)=E\sin\omega t$, where E is the constant amplitude and ω is the angular frequency. Answer the following questions:

(1) Suppose that the amplitude of current reaches the maximum of I_0 at $\omega=\omega_0$. Express I_0 and ω_0 using R, L, C and E.

(2) Suppose that $\omega=\omega_0$ as obtained in the question (1) and that the inductance is set to $L+\Delta L$. Then the amplitude of current becomes $1/k$ ($k>1$) times of the maximum of I_0. Express the quality factor, Q of the circuit, and the resistance, R, by using k, L, ΔL and ω_0.

(3) Suppose that the switch S in Fig. 2(b) is closed at $t=0$ to apply $e(t)=E\sin\omega_0 t$ to the circuit, where ω_0 is as obtained in the question (1). Under the condition that the initial charge of the capacitor is zero, derive the circuit current in the frequency domain, $I(s)$, by means of the Laplace transformation.

(4) Suppose that the resistance R can be approximated to zero in the question (3). Derive the circuit current in the time domain, $i(t)$, and sketch the waveform. Use the following relation, if necessary.

問題 2 （２頁目／２頁中）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\frac{t}{2a}\sin at$$

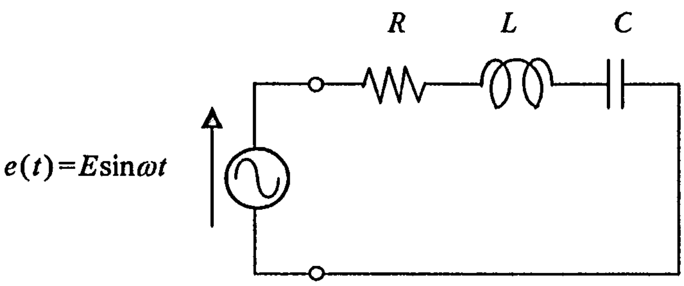

Fig. 2(a)

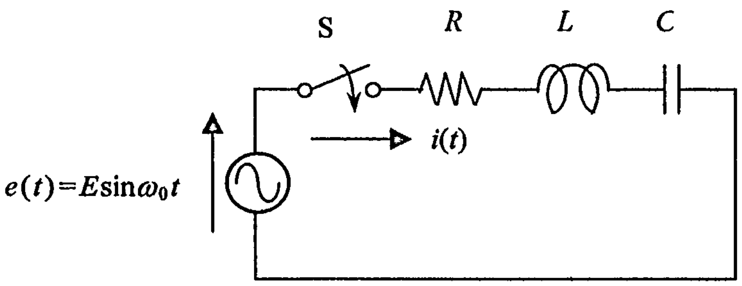

Fig. 2(b)

問題 3

$\vee$ は論理和を表し，$\oplus$ は排他的論理和を表すとする．実数 $a, b, c, t \in \mathbf{R}$ に対し，3 変数論理関数 $f_{(a,b,c;t)}(x, y, z)$ を次のように定義する．

$$f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) = \begin{cases} 1 & ax+by+cz \geq t \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

また，$F = \{f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) \mid (a,b,c,t) \in \mathbf{R}^4\}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f_{(1,2,3;4)}(x, y, z)$ を積和標準形で表せ．

(2) 次の命題それぞれについて，真か偽かを判定せよ．ただし，判定の根拠となる証明を与えること．

(a) $g(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$ ならば，$g \in F$ である．

(b) 任意の $a, b, c, t, t' \in \mathbf{R}$ に対し $f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) \vee f_{(a,b,c;t')}(x,y,z) \in F$ である．

Let $\vee$ denote the OR Boolean operator, and let $\oplus$ denote the exclusive-OR Boolean operator. For real numbers $a, b, c, t \in \mathbf{R}$, define a 3-variable Boolean function $f_{(a,b,c;t)}(x, y, z)$ as follows:

$$f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{if } ax+by+cz \geq t\text{; and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Furthermore, let $F = \{f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) \mid (a,b,c,t) \in \mathbf{R}^4\}$. Answer the following questions.

(1) Find the canonical disjunctive form for $f_{(1,2,3;4)}(x, y, z)$.

(2) Determine whether each of the following assertions is true or false. Justify your answers with proofs.

(a) If $g(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$, then $g \in F$.

(b) For any $a, b, c, t, t' \in \mathbf{R}$, it holds that $f_{(a,b,c;t)}(x,y,z) \vee f_{(a,b,c;t')}(x,y,z) \in F$.

2分木を，次のように変数 root と2つの配列 left，right で表す．ただし，葉でない頂点には，必ず2つの子があると仮定する．

- 各頂点を相異なる非負の整数で指定する．
- root は根を表す．
- 頂点 i の左の子を left[i]，右の子を right[i] とする．
- ただし，i が葉のときは left[i] = right[i] = −1 とする．

例えば，Fig. 4(a) に示す木は，Fig. 4(b) のように表される．

また，葉の集合上に次のような順序関係（$\prec$）を定義する．葉 i，j（i $\neq$ j）に対し，

$$\mathtt{i} \prec \mathtt{j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{i}\ \text{は}\ \mathtt{k}\ \text{の左の子の子孫}.$$

ここに，k は i と j の共通の先祖で根から最も遠い頂点．例えば，Fig. 4(a) の木において，葉3と葉4の共通の先祖で根から最も遠い頂点は7であり，葉3は頂点7の左の子の子孫なので $3 \prec 4$ が成り立つ．以下の問に答えよ．

(1) 入力として root，left，right が与えられたとき，その入力が表す2分木の葉を，順序（$\prec$）に基づいて小さい順に配列 A に格納する，なるべく効率の良いアルゴリズムの概要を示せ．ただし，最も小さい葉を A[0] に格納することとする．

(2) 2分木の平面描画を考える．頂点 i の座標 (x, y) を次のように定義する．
- i が葉のとき，x は問 (1) で求めた配列 A における i の位置（すなわち A[j] = i なる j），y は 0.
- i が葉でないとき，$x = (x_l + x_r)/2$，$y = \max\{y_l, y_r\} + 1$.
  ただし，(x_l, y_l)，(x_r, y_r) は，それぞれ i の左の子と右の子の座標．

すべての頂点の座標を求め，i 番目の頂点の x 座標が x[i]，y 座標が y[i] となるように配列 x，y に格納するアルゴリズムの概略を示せ．また，このアルゴリズムを Fig. 4(a) の木に適用したときに得られる配列 x，y の内容を示せ．

Consider a representation of a binary tree with a variable root and two arrays left and right as described below. We assume that any non-leaf node has two children.

- Each node is identified with a unique non-negative integer.
- The variable root specifies the root.
- left[i] and right[i] specify the left and the right children of node i, respectively.
- If i is a leaf, then let left[i] = right[i] = −1.

For example, the representation of the tree of Fig. 4(a) is given in Fig. 4(b).

We define an ordering ($\prec$) on the set of leaves as follows. For leaves i and j (i $\neq$ j),

$$\mathtt{i} \prec \mathtt{j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathtt{i}\ \text{is a descendant of the left child of}\ \mathtt{k},$$

where k is the furthest node from the root among the common ancestors of i and j. For example, in the tree of Fig. 4(a) we have $3 \prec 4$ because 3 is a descendant of the left child of 7 which is the furthest node from the root among the common ancestors of 3 and 4. Answer the following questions.

(1) Outline an efficient algorithm that, when `root`, `left` and `right` are given as input, stores the leaves of the tree represented by the input into an array `A` in the increasing order with respect to $(\prec)$. Let the least leaf be stored into `A[0]`.

(2) Consider a plane drawing of such trees. The coordinate (x, y) of node `i` is defined as follows.
- If `i` is a leaf, then x is the position of `i` in the array `A` obtained in (1) (that is, x is `j` such that `A[j]` $=$ `i`) and $y = 0$.
- If `i` is not a leaf, then $x = (x_l + x_r)/2$ and $y = \max\{y_l, y_r\} + 1$, where (x_l, y_l) and (x_r, y_r) are the coordinates of the left and the right children of `i`, respectively.

Outline an algorithm that obtains the coordinates for all nodes `i` and stores them in the arrays `x` and `y` so that `x[i]` and `y[i]` have x and y coordinates of node `i`, respectively. Moreover, show the contents of the arrays `x` and `y` obtained when the algorithm is applied to the tree of Fig. 4(a).

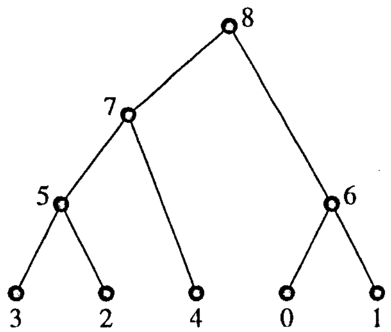

Fig. 4(a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
`left`	−1	−1	−1	−1	−1	3	0	5	7
`right`	−1	−1	−1	−1	−1	2	1	4	6

`root` $= 8$

Fig. 4(b)

質量mの粒子が，次式で与えられる重力ポテンシャル$U(x,y)$のもとで２次元平面上を運動するものとする．

$$U(x,y)=-\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (k>0).$$

Fig. 5 に示すように，点A$(a,0)$において粒子を速度$(0,\ v_A)$で打ち出すとき，次の各問に答えよ．ここで，$a>0$，$v_A>0$とする．

（１） 粒子に働く力$\mathbf{F}$を求めよ．

（２） 粒子がもつ原点の回りの角運動量$\mathbf{L}$が保存されることを示せ．

（３） 粒子がもつ全エネルギーE（＝運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー）が保存されることを示せ．

（４） Fig. 5 に示すように，打ち出された粒子がx軸上の点B$(-b,0)$を速度$(0,\ -v_B)$で横切ったとする．bとv_Bを求めよ．ここで，$b>0$，$v_B>0$とする．

（５） 打ち出された粒子が点Aに戻らないためのv_Aの最小値v_{A0}はいくらか．

（６） 粒子が問（５）で求めた速度$(0, v_{A0})$で打ち出されるとき，粒子は次式

$$x=-\frac{1}{4a}y^2+a$$

で表される軌道上を運動することを確かめよ．

Consider that a particle of mass m moves on a two-dimensional plane under the gravitational potential $U(x,y)$ given by the following equation:

$$U(x,y)=-\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (k>0).$$

When the particle is ejected at the point A$(a,0)$ with the velocity $(0,\ v_A)$ as shown in Fig.5, answer the following questions. Here, $a>0$ and $v_A>0$.

(1) Find the force $\mathbf{F}$ that acts on the particle.

(2) Show that the angular momentum $\mathbf{L}$ of the particle about the origin is conserved.

(3) Show that the total energy E (= kinetic energy + potential energy) of the particle is conserved.

(4) Find b and v_B, when the ejected particle crosses the x-axis at the point B$(-b,0)$ with the velocity $(0,\ -v_B)$ as shown in Fig. 5. Here, $b>0$ and $v_B>0$.

(5) Find the minimum value v_{A0} of v_A for the ejected particle not to return to the point A.

(6) When the particle is ejected with the velocity $(0, v_{A0})$ obtained in (5), confirm that the trajectory of the particle is expressed by the equation

$$x = -\frac{1}{4a}y^2 + a .$$

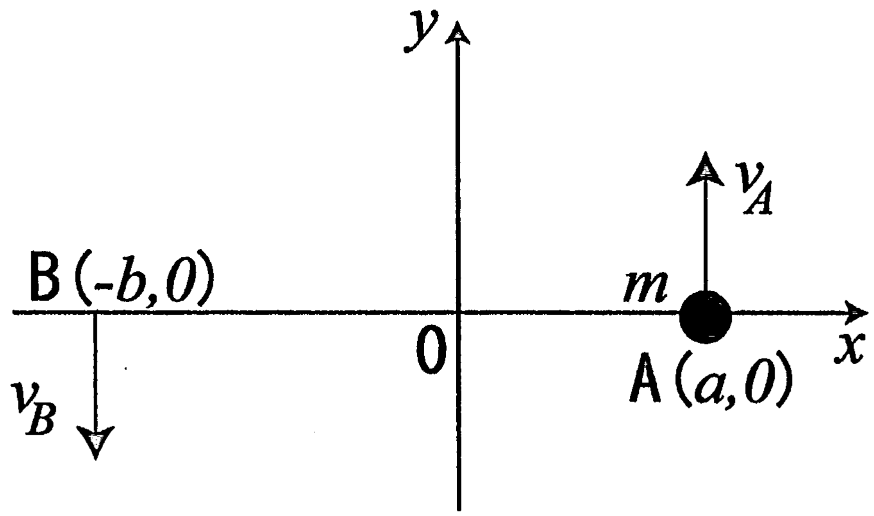

Fig. 5

問題 6

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルのすべてを求めよ．

(2) A^n が単位行列となる正の整数 n のうち最小のものを求めよ．

(3) 行列 X の指数級数を次のように定義する．

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

ここで，X^0 は単位行列を表すものとする．$\exp A$ を 1 つの行列で表せ．

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where i is an imaginary unit, answer the following questions.

(1) Find all the eigenvalues and their corresponding eigenvectors of the matrix A.

(2) Find the smallest positive integer n such that A^n is equal to the identity matrix.

(3) The exponential series of the matrix X is defined as follows,

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k,$$

where X^0 denotes the identity matrix. Express $\exp A$ by means of a matrix.