平成２７年度大学院工学研究科（博士前期課程）専門試験問題

問題１１　電気回路・電子回路　Ｉ（解答例）

（１）

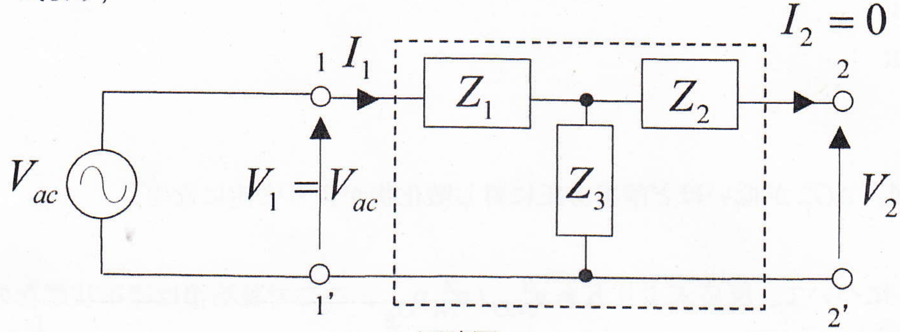
問題の縦続行列を展開すると，次式を得る。

１行目　$V_1 = AV_2 + BI_2$ ・・・（１）　２行目　$I_1 = CV_2 + DI_2$ ・・・（２）

（１）（２)式において，出力端を開放した場合，$I_2 = 0$ より，

$$V_1 = AV_2 \Rightarrow A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad \cdots (3) \qquad I_1 = CV_2 \Rightarrow C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad \cdots (4)$$

図１のＴ形回路で，下記回路図Ａのように入力端に交流電圧源 V_{ac} を接続して出力端を開放した場合，（３），（４）式より，



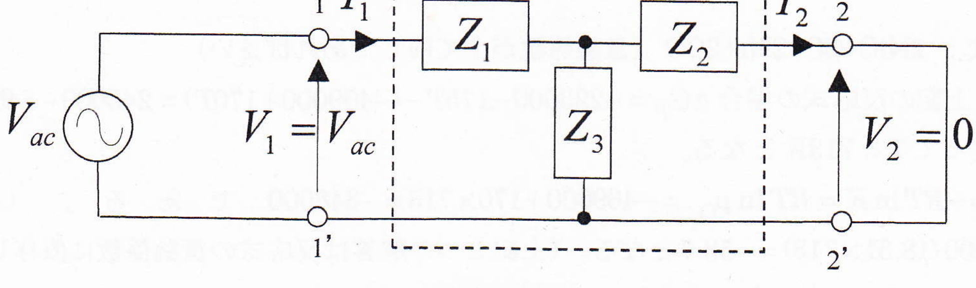
回路図Ａ

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{V_{ac}}{\dfrac{Z_3}{Z_1+Z_3}V_{ac}} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} \quad \cdots (5) \qquad C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{\dfrac{1}{Z_1+Z_3}V_{ac}}{\dfrac{Z_3}{Z_1+Z_3}V_{ac}} = \frac{1}{Z_3} \quad \cdots (6)$$

一方，（１）（２)式において，出力端を短絡した場合，$V_2 = 0$ より，

$$V_1 = BI_2 \Rightarrow B = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \quad \cdots (7) \qquad I_1 = DI_2 \Rightarrow D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \quad \cdots (8)$$

図１のＴ形回路で，下記回路図Ｂのように入力端に交流電圧源 V_{ac} を接続して出力端を短絡した場合，（７），（８）式より，



回路図Ｂ

$$D=\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}=\frac{\dfrac{1}{Z_1+\dfrac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}}V_{ac}}{\dfrac{Z_3}{Z_2+Z_3}\dfrac{1}{Z_1+\dfrac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}}V_{ac}}=1+\frac{Z_2}{Z_3}\quad\cdots(9)$$

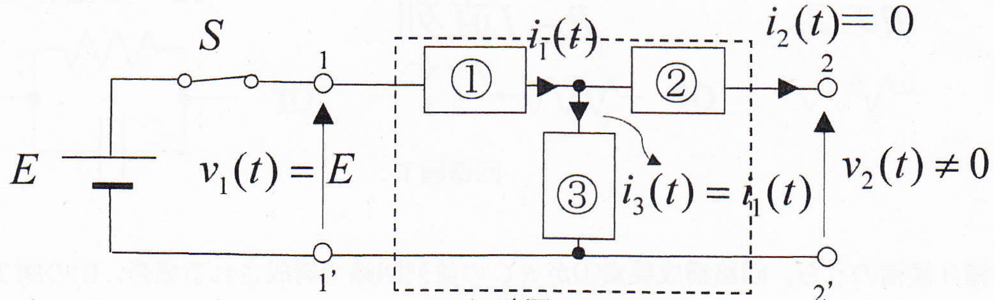
$$B=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}=\frac{V_{ac}}{\dfrac{Z_3}{Z_2+Z_3}\dfrac{1}{Z_1+\dfrac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}}V_{ac}}=Z_1+Z_2+\frac{Z_1Z_2}{Z_3}\quad\cdots(10)$$

以上、(５), (６), (９), (１０) 式より,

$$\therefore\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{Z_1}{Z_3} & Z_1+Z_2+\dfrac{Z_1Z_2}{Z_3}\\ \dfrac{1}{Z_3} & 1+\dfrac{Z_2}{Z_3}\end{bmatrix}$$

(２)

(ア) A)の図 3(a)の回路の下では, 回路図 C のように$i_3(t)=i_1(t)$であり, 「$i_3(t=\infty)=i_1(t=\infty)=$ある有限の一定値($\neq 0$)」の結果から, 回路構成要素③の中身は少なくとも開放ではなく, 「スイッチ S を閉じた後, 暫くの間は $v_2(t)\neq 0$」の結果から, 回路構成要素③の中身は少なくとも短絡でもない。すなわち, <u>回路構成要素③は, 回路素子を含む。</u>



回路図 C

(イ) 一方, B)の「常に$i_1(t)=i_2(t)$」の結果から, 回路図 D のように回路構成要素③に流れる電流i_3は常に$i_3(t)=0$である。回路構成要素③が開放でも短絡でもない, すなわち何らかの回路素子を含むとして, 回路図 D で回路構成要素③に流れる電流が$i_3(t)=0$となるためには, <u>回路構成要素②は回路要素を含まず, 短絡要素である。</u>

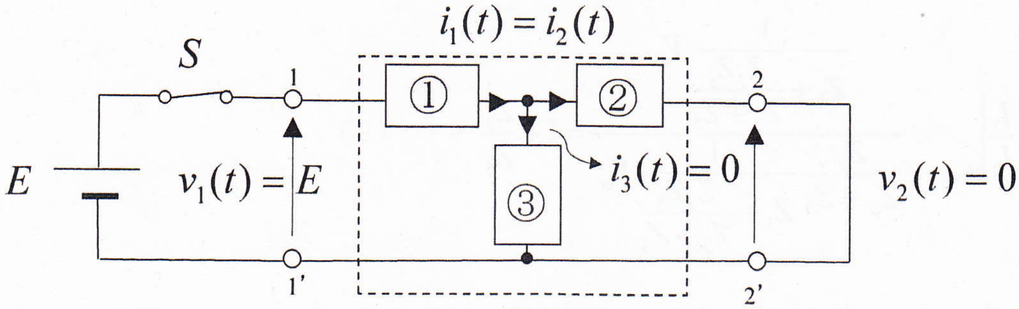
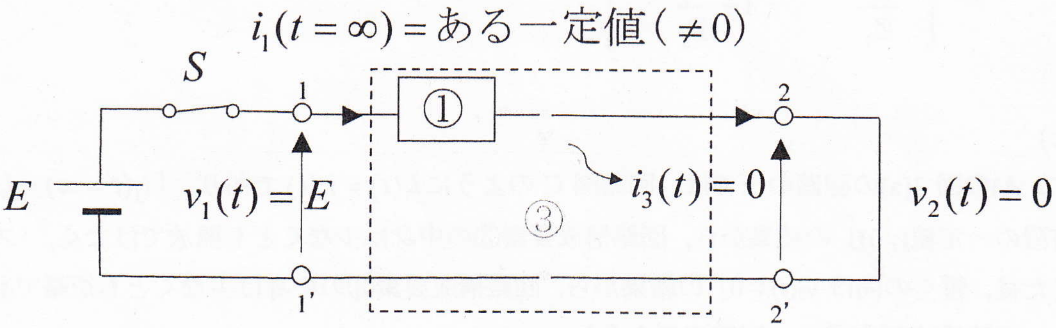


図 D

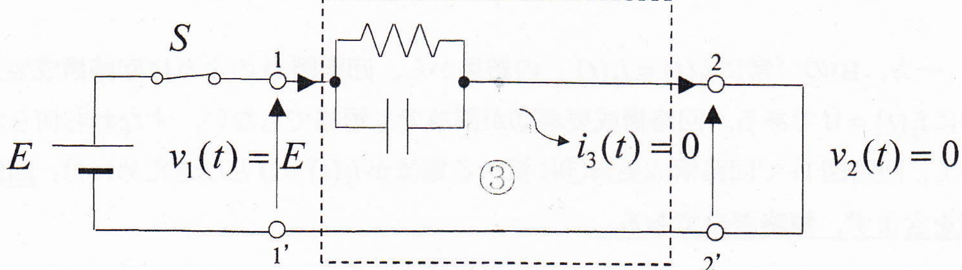
（ウ）（ア）で解答した「回路構成要素③は開放でも短絡でもない，すなわち回路素子を含む」，これに（イ）で解答した「回路構成要素②は短絡要素である」とした回路図 E の下，B)の「$i_1(t=\infty)=$ある有限の一定値$(\neq 0)$」を満たす回路構成要素①を考えれば，問題にあるように回路構成要素①の中身は開放でも短絡いずれでもなく，回路素子を含み，かつ回路図 F に示す３通りが回路構成要素の解候補となる。



回路図 E

回路図 F

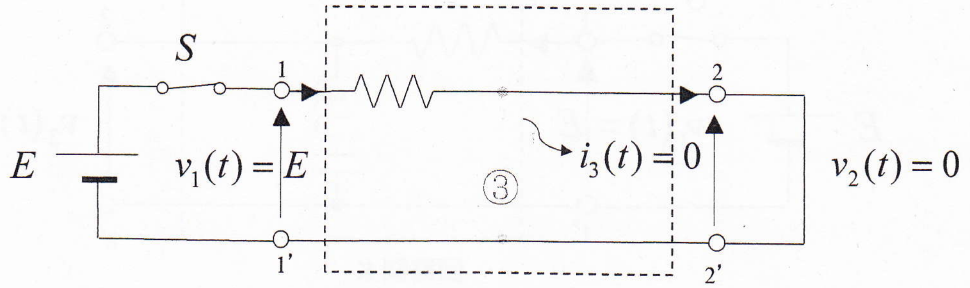
上記候補３候補のうち，回路構成要素①が R-C の並列回路で構成される場合，B)の図 3(b)の出力端短絡状態を考えると回路図 G を得る。



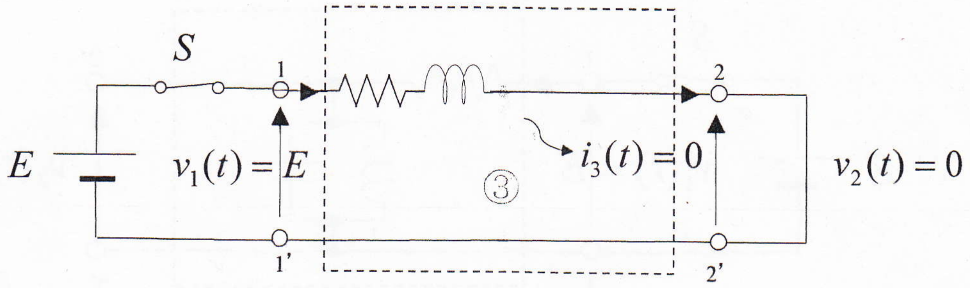
回路図 G

この場合，スイッチ S を閉じた直後の入力端電流 $i_1(t)$は無限大となり，B)のもう１つの条件である「入力端電流 $i_1(t)$と出力端電流 $i_2(t)$の関係は，経過時間に関係なく常に等しく，かつ有限値であった。」を満たさないため，回路構成要素の解候補から除外される。

残る回路構成要素①の中身が R のみの場合，R-L 直列回路で構成される場合，図 3(b)の出力端短絡状態を考えるとそれぞれ回路図 H，回路図 I を得る。



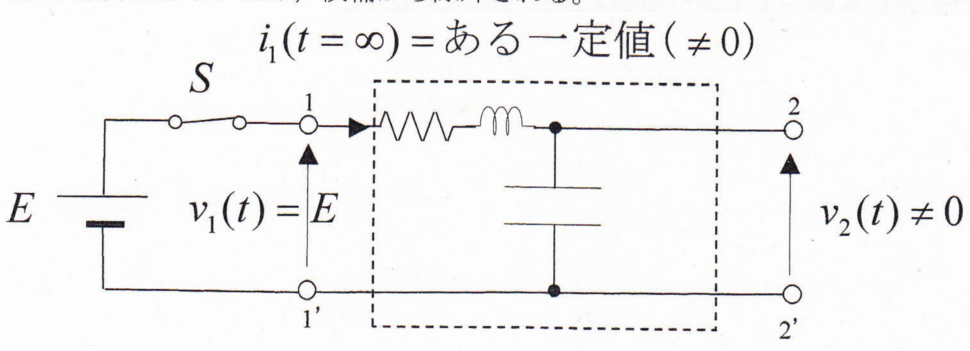
回路図 H



回路図 I

これらの回路の下では，B)のもう１つの条件である「入力端電流 $i_1(t)$と出力端電流 $i_2(t)$の関係は，経過時間に関係なく常に等しく，かつ有限値であった。」を満たすことから，<u>**回路構成要素①の中身は，R のみ，および R-L の直列接続である。**</u>

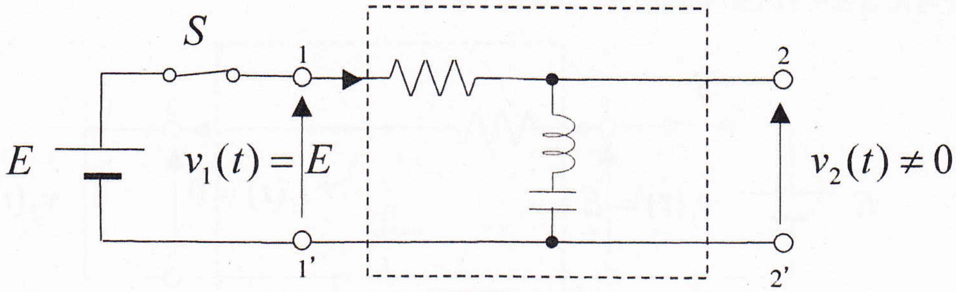
（エ）回路構成要素①の中身が R-L 直列接続で構成される場合，自明的に回路構成要素③は残るキャパシタ C で構成され，A)の図 3(a)の出力端を開放した未知の四端子回路の全体構成は回路図 J となる。回路図 J の下では，R, L, C の値に関わらず，$i_1(t=\infty)=0$ となり，A)の「$i_1(t=\infty)=$ある有限の一定値(≠0)」の条件を満たさないため，候補から除外される。



回路図 J

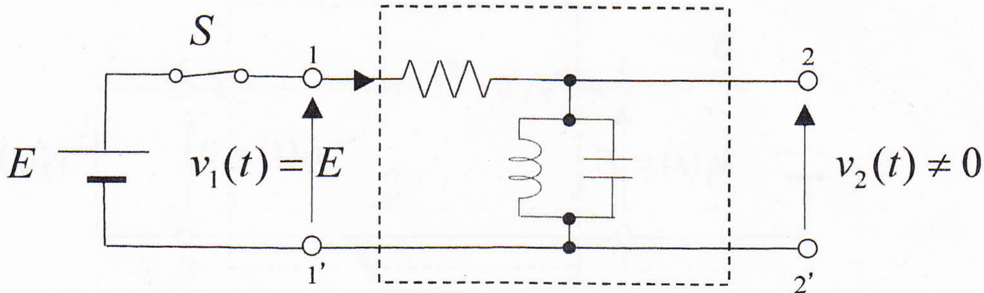
回路構成要素①の中身が R のみの場合，自明的に回路構成要素③は，残るインダクタ L とキャパシタ C で構成され，その接続の組み合わせを考慮すると，L-C 直列（回路 K），もしくは L-C 並列（回路図 L）のいずれかで，未知の四端子回路は構成される。

$$i_1(t=\infty)=\text{ある一定値}(\neq 0)$$



回路図 K

$$i_1(t=\infty)=\text{ある一定値}(\neq 0)$$



回路図 L

まず，回路図 K は回路図 G と同じ R-L-C 直列共振回路であるため，R, L, C の値に関わらず，$i_1(t=\infty)=0$ となり，A)の「$i_3(t=\infty)=i_1(t=\infty)=$ ある有限の一定値(≠0)」の条件を満たさないため，候補から除外される。

一方，回路図 L は，R, L, C の値に関わらず，A)の「スイッチ S を閉じた後，暫くの間，$v_2(t)\neq 0$」を満たし，最終的には $v_2(t)=0$ となって，結果，$i_1(t=\infty)=E/R\neq 0$ となり，同じく A)の「十分時間が経過した後の入力端電流 $i_1(t=\infty)$は，零ではないある有限の一定値となった。」を満たすため，**回路図 L の構成が条件を満たす未知の四端子回路の構成である。**

以上。

平成２７年度大学院工学研究科（博士前期課程）専門試験問題

問題１１　電気回路・電子回路　II　（解答例）

オペアンプの特性は理想的とするので，オペアンプの + 入力端子の電圧と − 入力端子の電圧は等しくなる（仮想短絡）．またオペアンプの二つの入力端子には電流は流れない．

(1) オペアンプの入力端子には電流は流れないので，オペアンプの + 入力端子の節点においてキルヒホッフの電流則を適用すると

$$\frac{V_3 - V_2}{R} + \frac{V_3 - 0}{R_2} = 0$$

上記の仮想短絡を適用すると $V_3 = V_1$ であるので，これを解いて

$$V_2 = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) V_1 \qquad \cdots (\text{答})$$

(2) V_1 と V_2 間の抵抗 R に流れる電流が I_1 であるので

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

となる．従って (1) の結果を代入すると

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = -R_2 \qquad \cdots (\text{答})$$

(3) NIC 回路の入力インピーダンス Z_{in} を用いれば

$$V_1 = \frac{Z_{in}}{R_1 + Z_{in}} E$$

$R_1 = 3R_2$ および (2) の Z_{in} を代入すると

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{-R_2}{3R_2 - R_2} E \\ &= -\frac{1}{2} E \qquad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) オペアンプの利得 μ が有限であれば

$$(V_3 - V_1) \times \mu = V_2$$

これより

$$V_3 = V_1 + \frac{1}{\mu} V_2$$

従って

$$V_2 = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) V_3$$

より

$$V_2 = \frac{1 + \dfrac{R}{R_2}}{1 - \dfrac{1}{\mu}\left(1 + \dfrac{R}{R_2}\right)} V_1$$

となる．従って

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1 - V_2}{R} \\
&= -\frac{V_1}{R_2}\frac{1+\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{R_2}{R}\right)}{1-\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{R}{R_2}\right)}
\end{aligned}
$$

この結果題意より

$$
G = \frac{1-\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{R}{R_2}\right)}{1+\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{R_2}{R}\right)} \qquad \cdots\text{(答)}
$$

問題１３　制御工学　の解答例

I　質量－ばね－ダッシュポット（ダンパ）系の運動方程式は

$$M\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -B\frac{d}{dt}y(t) - Ky(t) - B(\frac{d}{dt}y(t) - \frac{d}{dt}x(t))$$

である。$x(t), y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s), Y(s)$ とおき，全ての初期値を零として上式をラプラス変換をすると

$$(Ms^2 + 2Bs + K)Y(s) = Bs\,X(s)$$

となる。よって入力変位から出力変位までの伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs}{Ms^2 + 2Bs + K}$$

II　(1)　$\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{P(s)F(s)C(s)}{1 + P(s)F(s)C(s)H(s)}$　(2)　$\dfrac{Y(s)}{D(s)} = \dfrac{P(s)}{1 + P(s)F(s)C(s)H(s)}$

(3)　$R(s) = 1/(s+3)$ のとき

$$Y(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{-1}{s+3}$$

であるため，制御量の時間応答はつぎのようになる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t},\ (t \geq 0)$$

(4)　図２のフィードバック制御系の特性方程式とそのラウス表は以下のようになる。

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 3K = 0\ ,\qquad \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 3K \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & \alpha & \beta & \\ s^1 & \gamma & & \\ s^0 & 3K & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 3K \\ \gamma = \dfrac{-6(3K-10)}{10} \end{array}$$

ラウス表の第一列要素が全て同符号であるための条件は，$0 < K < 10/3$。

(5)　$D(s) = 1/s$ である。(4) より安定条件は $0 < K < 10/3$ である。このとき最終値の定理より

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+3) + 3K} \times \frac{1}{s} = \frac{2}{K}$$

(6)　$Y(s) = \dfrac{P(s) + P(s)F(s)G(s)}{1 + P(s)F(s)C(s)H(s)}D(s)$ であるため，任意の外乱に対して $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ となるための条件は，$1 + F(s)G(s) = 0$ である。よって，$G(s) = -s - 2$ である。すなわち

$$a = -1,\ b = -2$$

問題１３　制御工学　解答例

III

(1)　$G(j\omega_1) = \dfrac{6}{1+j} = 3\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$ より，求める答は $y(t) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega_1 t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

(2)　重ね合わせの原理と $G(j\omega_2) = \dfrac{6}{1+\sqrt{3}j} = 3e^{-j\frac{\pi}{3}}$ より，出力信号を $y(t)$ とすると，求める答は

$$y(t) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{3}\right)$$ である。

IV

（ア）E　（イ）B　（ウ）A　（エ）D　（オ）C　（カ）B

（解答例おわり）

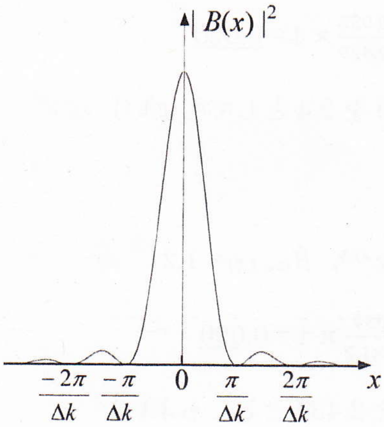
問題18　量子力学解答

I (1)　$B(x) = \dfrac{2\sin(\Delta k x)}{x}$

(2)　$B(0) = 2\Delta k$

(3)　$x = \pm \dfrac{n\pi}{\Delta k}$　($n:0$ を除く整数)

(4)



(5)　$\Delta x = \dfrac{2\pi}{\Delta k}$

(6)　$\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$

問題18　量子力学解答

II (1) $$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=(E-V_0)\psi \quad (x\le 0)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=E\psi \quad (0<x\le a)$$

(2) $$k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)},\quad \alpha=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

(3) $$\begin{cases} 1+A=B+C \\ \mathrm{i}k-\mathrm{i}kA=\mathrm{i}\alpha B-\mathrm{i}\alpha C \end{cases}$$

(4) $\psi(a)=0$,　$B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha a}+C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha a}=0$　または　$C=-B\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}$

(5) $$B=\frac{2k}{(\alpha+k)+(\alpha-k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}}$$

$$C=\frac{-2k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}}{(\alpha+k)+(\alpha-k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}}$$

(6) $$A=B+C-1$$

$$=-\frac{(\alpha-k)+(\alpha+k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}}{(\alpha+k)+(\alpha-k)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha a}}$$

$$|A|^2=1$$

問題19

解答例

（1）

$E \gg E_F$ の場合　$f(E) = e^{-(E-E_F)/kT}$

$E \ll E_F$ の場合　$f(E) = 1 - e^{(E-E_F)/kT}$

（2）

$n = N_C e^{-(E_C-E_F)/kT}$

$p = N_V e^{-(E_F-E_V)/kT}$

（3）

$np = N_C N_V e^{-E_G/kT}$

（4）

$p - n = N_A - N_D$

（5）

$$n = N_D - N_A$$

$$p = \frac{\left\{(np)^{1/2}\right\}^2}{N_D - N_A}$$

（6）

ドナー：例えば燐　理由：燐は価電子の数がシリコン原子より一つ多いため

アクセプター：例えばホウ素　理由：ホウ素は価電子の数がシリコン原子より一つ少ないため

（7）下図の破線により（np）$^{1/2}$ を示す。