

平成25年度
神戸大学大学院工学研究科 博士課程前期課程 入学試験問題
(数学：電気電子工学専攻)

注意事項

- (1) 問題番号と同じ番号の解答用紙を使って解答してください。例えば問題1は、左上端に1と印刷されている解答用紙に答えを書いてください。解答用紙の番号と異なる問題を解答した場合、採点の対象となりません。
- (2) 解答欄が不足した場合は、裏面に書いてよろしい。ただし、表と上下を逆にしてください。
- (3) 受験番号と科目名の裏の部分には、何も書いてはいけません。

1. つぎの各問いに答えよ.

- (1) 全平面から原点を除いた領域 $D = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, (x, y) \neq (0, 0)\}$ について, つぎの広義 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy$$

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ.

2. $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$(3x - y - 2) \frac{dy}{dx} - (6x - 2y + 3) = 0 \quad (*)$$

を考える.

- (1) $u = 3x - y$ とおいて, u に関する微分方程式を求めよ.
(2) (1) で求めた u の微分方程式を解くことにより, 方程式 (*) の一般解を求めよ.
(3) 初期条件 $y(1) = 3$ を満たす方程式 (*) の解を求めよ.

3. $f(z)$ を, $\sin z = zf(z)$ を満たす複素平面全体で正則な関数とする.

- (1) $f(0), f'(0), f''(0)$ の値をそれぞれ求めよ. また, $|z| < \pi$ では $f(z) \neq 0$ となることを示せ.
(2) 上記の f に対して, $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ とおく. このとき, $F(z)$ の $z = 0$ を中心とするテイラー級数展開を z^2 の項まで求めよ.
(3) C は, 原点中心, 半径 1 の単位円で, 反時計方向に向き付けられているとする.
(1), (2) の結果を利用して, 複素積分

$$\int_C \frac{1}{\sin^3 z} dz$$

の値を計算せよ.

4. $0 < a < \pi$ とし, 関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a - |x|}{a^2}, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & -\pi \leq x < -a, a < x \leq \pi \end{cases}$ を考える.

- (1) $f(x)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ においてフーリエ級数に展開せよ.

- (2) (1) の結果を利用して, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{ka}{2})}{k^2}$ を求めよ.