

問題 1 1 電気回路・電子回路 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。なお、導出過程も記すこと。

- (1) 図 1(a)の回路を図 1(b)のように等価変換を行う。図 1(a)の回路と図 1(b)の回路において、端子 p-q 間のインピーダンスが等しくなるための関係式を示せ。
- (2) 問い(1)と同様の関係式は、端子 q-r 間、端子 r-p 間においても同様に導くことができる。これらの関係式を用いて、 Z_1 と Z_2 を Z_A , Z_B , Z_C を用いて表せ。
- (3) 図 2 の交流回路において、電流計 A の指示値が 0 となった。
ここで、抵抗 $R_1=2[\Omega]$, $R_2=5[\Omega]$, $R_4=15[\Omega]$, $R_5=1[\Omega]$, インダクタンス $L=0.05[\text{H}]$ とし、交流電源 E の電圧は、実効値 $100[\text{V}]$, 角周波数 $\omega=300[\text{rad/s}]$ とする。これらのうち、必要な値を用いて、電流 I の実効値を求めよ。単位も記すこと。
- (4) 図 2 の回路は、図 1 の等価変換を用いると、図 3 の回路のように置き換えることができる。抵抗とインダクタンスは、問い(3)で示した値であるとき、抵抗 R_3 および静電容量 C を求めよ。単位も記すこと。このとき、図 3 の回路における電流計 A の指示値は 0 である。

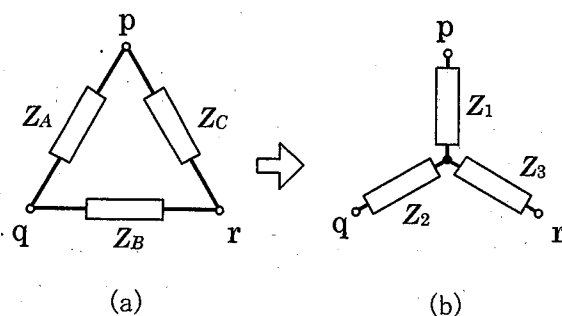


図 1

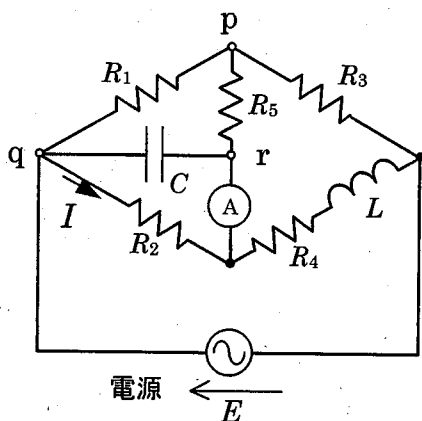


図 2

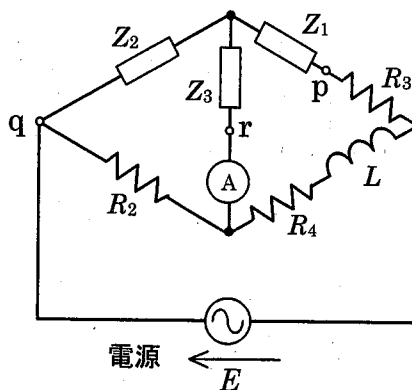


図 3

Ⅱ 図4および図5はオペアンプを用いた逆相増幅回路である。次の(1)～(4)の問いについて答えよ。なお、導出過程も示すこと。ただし、オペアンプの特性は理想的(利得は無限大、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロ)とする。

- (1) 図4の回路の電圧増幅率 V_2/V_1 を求めよ。
- (2) 図4の回路で電圧増幅率が5倍となるように設計し、抵抗 $R_1 = 10 \text{ [k}\Omega\text{]}$ としたとき抵抗 R_2 の値を求めよ。
- (3) 図5の回路の電圧増幅率 V_2/V_1 を求めよ。
- (4) 図5の回路で電圧増幅率が5倍となるように設計し、抵抗 $R_1 = 10 \text{ [k}\Omega\text{]}$ としたとき抵抗 R_2 , R_3 , R_4 の値を求めよ。

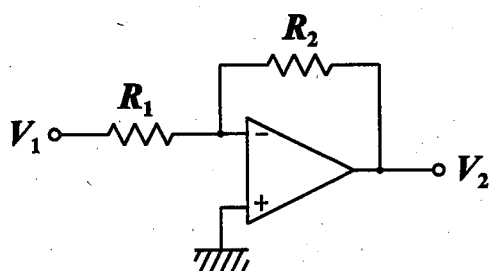


図4

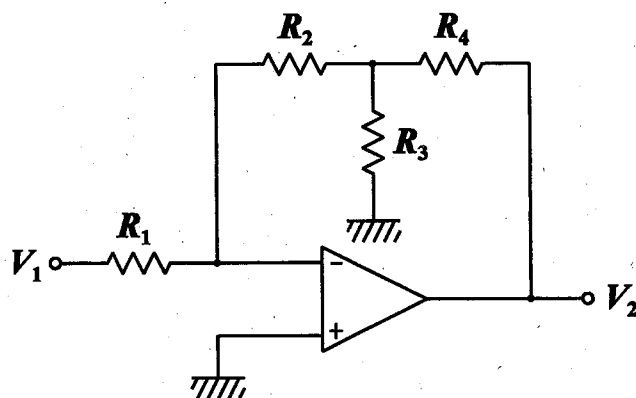


図5

問題 12 計測数理解析 設問すべてについて解答すること。

I 三つの確率変数 X, Y, Z は確率的に互いに独立であり, X は離散型, Y と Z は連続型である。 X の分布 $p_X(k)$, Y と Z のそれぞれの密度関数 $f_Y(y)$, $f_Z(z)$ は次のように与えられている。 n は正の整数である。

$$p_X(k) = \Pr\{X = k\} = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad p + q = 1, \quad 0 < p < 1,$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} nz^{n-1}, & 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

確率変数 U, V を以下のように定義する。

$$U = X + Z, \quad V = Y + Z.$$

次の (1) ~ (8) の問いに答えよ。なお, 期待値の線形性は, 連続型と離散型の確率変数が混在していても成立することに注意せよ。

(1) X の期待値が $E[X] = mp$ であることを以下の計算を続けることで導きだしなさい。

$$E[X] = \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} p^k q^{m-k} = \sum_{k=1}^m \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} p^k q^{m-k} =$$

(2) X の分散が $\text{Var}[X] = mpq$ であることを以下の計算を続けることで導きだしなさい。

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 =$$

(3) Y の分散は, $\text{Var}[Y] = \frac{3}{5}$ である。期待値 $E[Y]$ は, 密度関数の対称性からどのようなか。

(4) Z の期待値 $E[Z]$ と分散 $\text{Var}[Z]$ を求めよ。

(5) U の期待値 $E[U]$ と分散 $\text{Var}[U]$ を求めよ。

(6) V の期待値 $E[V]$ と分散 $\text{Var}[V]$ を求めよ。

(7) U と V の共分散 $\text{Cov}(U, V)$ を求めよ。次のことに注意せよ。

$$\text{Cov}(U, V) = E[(U - E[U]) \cdot (V - E[V])]$$

(8) U と V との相関係数 $\rho(U, V)$ を求め, $n \rightarrow \infty$ としたときの極限値を求めよ。相関係数は, 次のように定義されている。

$$\rho(U, V) = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}[U]} \sqrt{\text{Var}[V]}}$$

II 二階微分方程式 $d^2y/dx^2 - 2x \cdot dy/dx + 2y = 0$ に従う y が, $x = 0$ において $y = 0$ および $dy/dx = 1$ とする。以下 (1) から (4) に答えよ。

(1) 一階微分方程式 $dy/dx = z$ を満たす変数 z を導入する。上記の二階微分方程式を同等な, y と z に関する 2 つの一階微分方程式に書きかえよ。

(2) 上記 (1) で求めた 2 つの一階微分方程式を用いて, 刻み幅 h ($\neq 0$) でオイラー法を使い, $x = h$, $x = 2h$, $x = 3h$ における y と z をそれぞれ求めよ。

(3) 上記 (2) を一般化し, $x = nh$ での y と z をオイラー法で求めよ。ただし, n は任意の自然数とする。

(4) 上記 (3) の結果から, y は x のどのような関数であるか, その理由を含めて説明せよ。

問題 1.3 制御工学 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 に示す閉ループ系について、次の (1) ~ (5) の問いに答えよ。

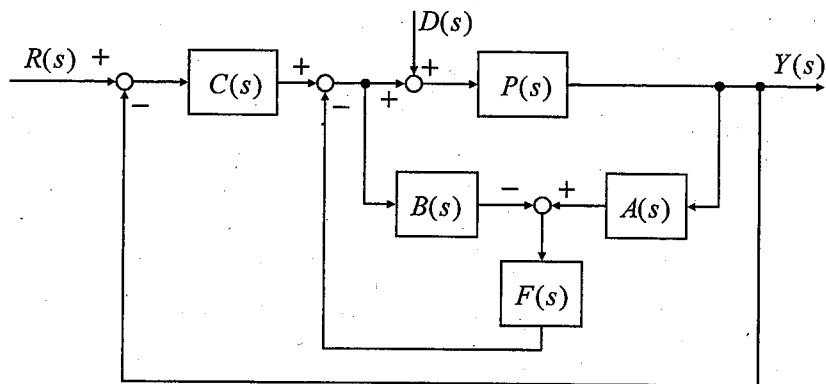


図 1 閉ループ系

(1) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数を求めよ。

(2) $P(s) = \frac{2}{s(s+3)}$, $A(s) = s + \frac{2s}{s+1}$ であるとき、 $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数が $F(s)$ に依存しないための $B(s)$ の条件を求めよ。

(3) 上記 (2) の条件下において、 $C(s) = \frac{1+as}{s}$, $F(s) = \frac{1}{3}$ とする。この閉ループ系が安定となる a の範囲を求めよ。

ここで $C(s) = \frac{1+5s}{s}$, $F(s) = \frac{1}{3}$ とする。また $R(s)$ を目標値、 $Y(s)$ を制御量とする。

(4) 上記 (2) の条件下において、 $D(s) = 0$ とする。 $R(s)$ が単位ステップ信号であるときと単位ランプ信号であるときの定常偏差をそれぞれ求めよ。

(5) 上記 (2) の条件下において、 $R(s) = 0$ とする。 $D(s)$ が単位ランプ信号であるときの定常偏差を求めよ。

- II 図2に示すRLC回路において、電圧 $v_i(t)$ を入力信号、電圧 $v_o(t)$ を出力信号とする。この回路の伝達関数を R と L と C を用いて表せ。ただし R は抵抗値、 L はインダクタンス、 C は静電容量を表わす。

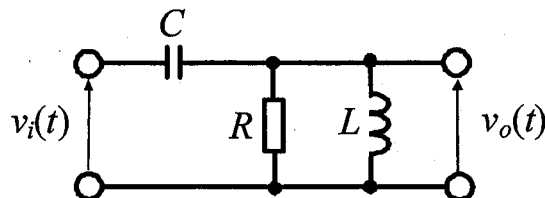


図2 RLC回路

- III 図3に示す質量－バネ－ダッシュポット（ダンパ）系において、質量を M 、バネ定数を K 、粘性減衰係数（粘性抵抗係数）を B とする。ただし運動は一直線上に拘束されているものとする。壁は図のように地面に固定されており、動かないものとする。外力 $f(t)$ から変位 $x(t)$ までの伝達関数を求めよ。

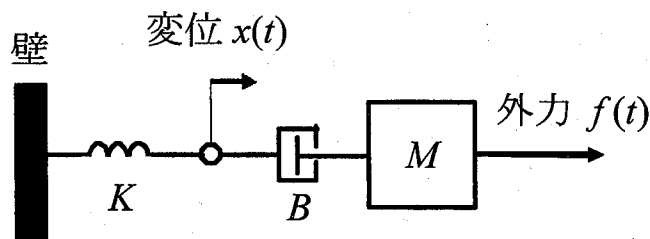


図3 質量－バネ－ダッシュポット系

- IV つぎの伝達関数 $G(s)$ で表されるシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 4s + 3} e^{-2s}$$

このシステムの単位ステップ応答 $y(t)$ を求めよ。

問題 1 4 力学・材料力学 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1), (2)の問いにすべて答えよ。

- (1) 動摩擦係数が μ の水平な床の上を速度に比例する抵抗 R (比例係数を c とする) を受けながら質量 m の質点が運動している。時刻 0 での質点の速さを V_0 とし、時刻 0 から停止するまでの質点の運動について以下の設問に答えよ。重力加速度の大きさは g で一定とする。

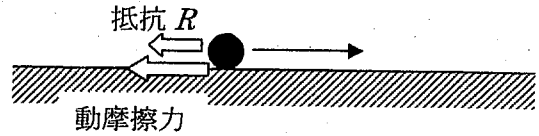


図 1

- (a) 適切に座標系を設定し、質点の運動方程式を書き下せ。
 (b) 運動する時間が十分に短いなど一定の条件が満たされれば、抵抗 R は無視することができる。
 抵抗 R が無視できる場合、質点が距離 d だけ移動したときの質点の速さを求めよ。
 (c) 抵抗 R が無視できる場合、質点が停止する時刻を求めよ。
 (d) 抵抗 R が無視できない場合に、時刻 t での質点の速度を求めよ。

- (2) 半径 R の円柱 (質量 m) が、図 2 のように円柱の周りに巻かれたひもの端に加えられた水平な力 P によって水平面上 ($y=0$ 上) を引っ張られている。円柱と床面の摩擦係数 F は十分に大きく、円柱は滑らずに転がり、ひもは軽いものとして、次の問いに答えよ。
- (a) 円柱の中心 G の並進運動について、水平方向 (x 方向) の運動方程式を示せ。
 (b) 円柱の中心 G 周りの回転運動について、角加速度を α (時計回りを正)、慣性モーメントを I_G として、運動方程式を示せ。
 (c) 円柱の中心 G を x 軸正方向に L だけ移動させるには、ひもを引っ張る長さをどれくらいにする必要があるか。
 (d) 円柱の中心 G を x 軸正方向に L だけ移動したときの円柱の回転角を求めよ。

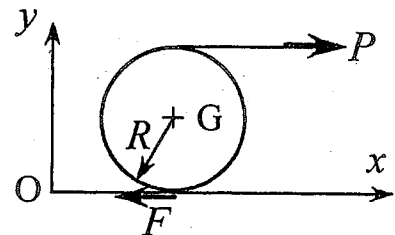


図 2

II 次の文章を読み、(1)～(5)の問いにすべて答えよ。

以下の両端単純支持はりでは、BC部分に、単位長さ当たり w の大きさの分布荷重が鉛直下向きに作用する。はりの変形は、はりの長さに比べて非常に小さいとする。また、はりの自重は無視できる。

はじめに、図3に示すように、ABCの部分弾性体である場合を考える。

- (1) 点A、Cにおいて、はりが支点から受ける力 R_A 、 R_C を求めよ。力は上向きを正(+)とする。
- (2) ABCの部分について、せん断力図と曲げモーメント図を描け。これらの図中には、点ABCそれぞれの位置におけるせん断力および曲げモーメントの値を記入せよ。この場合、せん断力と曲げモーメントを式の形で示す必要はない。なお、せん断力、曲げモーメントの正(+)の方向は、図4のように定義する。
- (3) 曲げモーメントの絶対値が最大になる位置を求めよ。位置は、点Aからの距離 x で示せ。

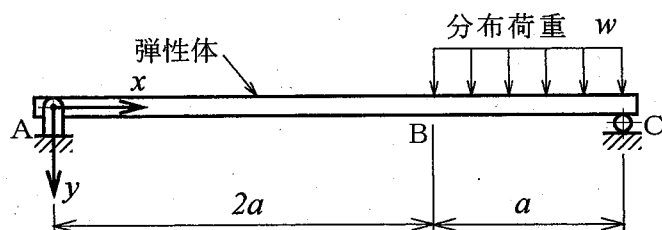


図3

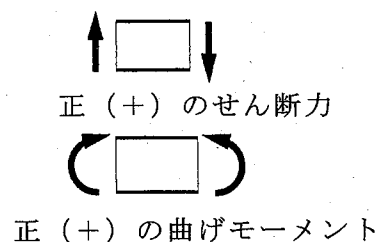


図4

次に、図5に示すように、ABの部分弾性体であり、BCの部分は剛体である場合を考える。ABとBCは、点Bで互いに回転しないように接合(剛節結合)されている。

- (4) 点Aを原点として、軸方向の座標を x とし、はりのたわみ曲線を鉛直下向きに $y(x)$ とする。点Bにおいて、たわみ y とたわみ角 dy/dx の間に成り立つ関係式を示せ。
- (5) 点Bにおけるたわみ y_B を求めよ。AB部分の曲げ剛性を EI とする。なお、 $EI = 1$ として、たわみを求めてもよい。

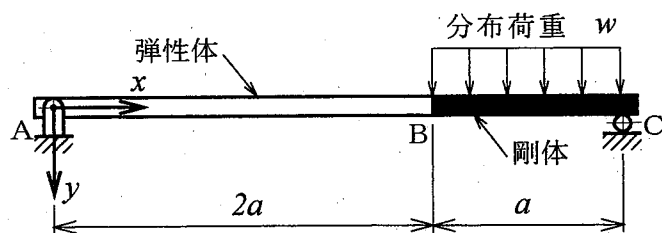


図5

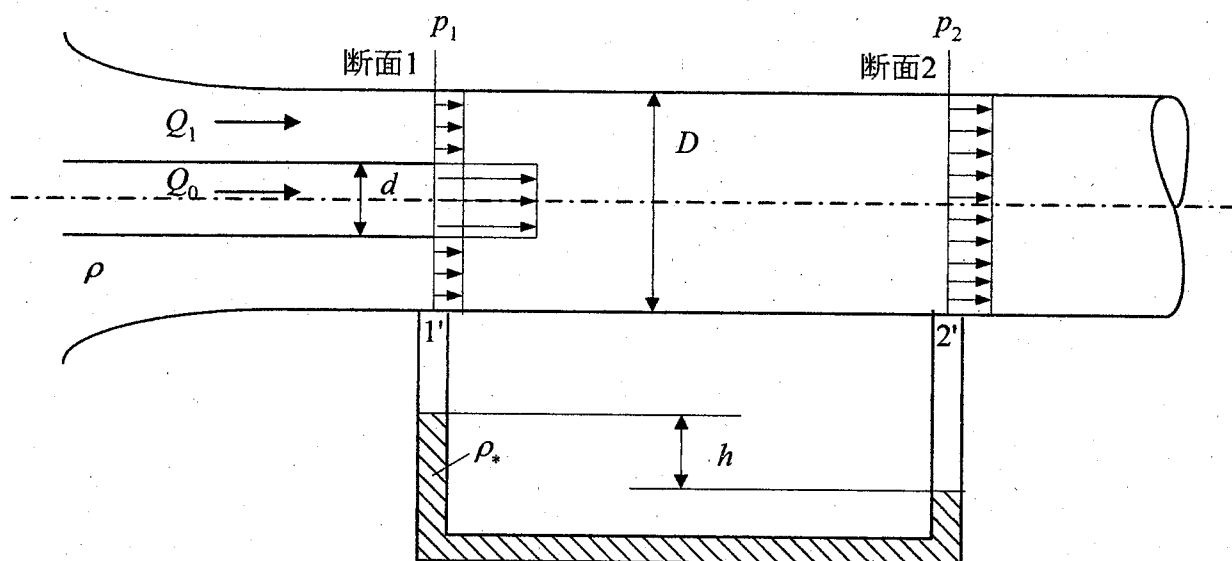
問題 15 流体力学 設問 I および II のすべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙について、設問 I を表面、設問 II の解答を裏面に記入すること。

また、各設問の小問について、最終的な解答に小問の番号を付して下線で明記すること。

I 図に示すようなジェットポンプを考える。ジェットポンプは水平に設置されており、断面 1-1' で直径 D の管に、直径 d の内管より流量 Q_0 を供給する。内管と外管の間から引き込まれる流量は Q_1 であった。下流の断面 2-2' では、 Q_0 と Q_1 が十分に混合し、速度分布が一様となった。管路を流れる液体の密度を ρ とする。断面 1-1' と断面 2-2' の間にマノメータ（マノメータの中の液体の密度を ρ_* 、但し $\rho_* > \rho$ ）を設置したところ液面差が h となった。検査区間を断面 1-1' と断面 2-2' の間として、次の (1) ～ (5) の小問に答えよ。断面 1-1' での圧力を p_1 、断面 2-2' での圧力を p_2 、重力加速度を g とし、諸損失は無視できるものとする。

- (1) 断面 2-2' を通しての単位時間当たりの流出運動量を求めよ。
- (2) 断面 1-1' を通しての単位時間当たりの流入運動量を求めよ。
- (3) 断面 1-1' と 2-2' を通して断面 1-1' と断面 2-2' の間にある流体に作用した力を求めよ。
- (4) 圧力差 $(p_2 - p_1)$ を ρ , d , D , Q_0 , Q_1 を用いて表せ。この圧力差の正負を判断せよ。
- (5) マノメータの液面差 h を ρ , ρ_* , d , D , Q_0 , Q_1 , g を用いて表せ。



II 2枚の平面ガラスを極めて狭い隙間 a (通常は 1mm 以下) を隔てて平行に図のように設置し、その隙間に粘性率 μ の非圧縮粘性流体を満たす。 z 軸をガラス面に垂直に、 (x, y) 軸をガラス面に平行にとり各軸方向の速度成分を (u, v, w) とする。この粘性流体に時間的に変化しない圧力勾配を (x, y) 軸方向にかけたとき、ガラス面に平行に極めて遅い流れが生じる。この時、速度ベクトル成分は $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = 0$ である。極めておそい流れのため粘性流体の慣性項は無視でき、 (u, v, w) の方程式は

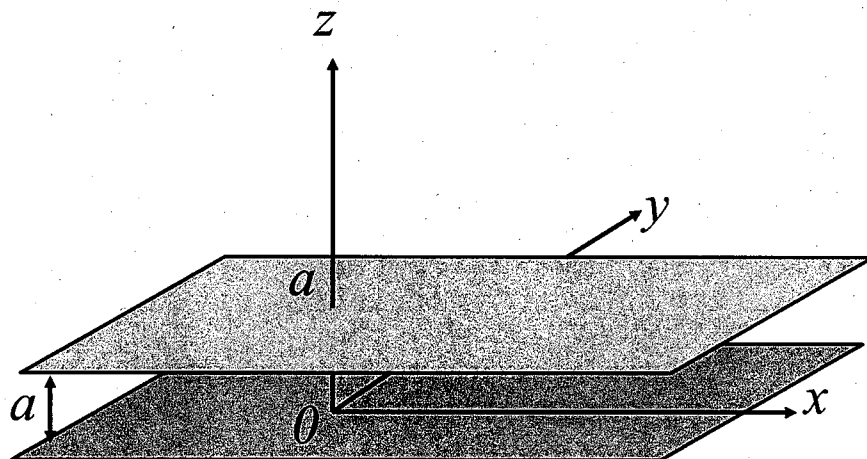
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

となる。さらに、 (x, y) 方向には流れは極めてゆっくりとしか変化しないので (x, y) 方向の微分は z 方向の微分に比べて無視でき、最終的に流れの方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

となる。以下の小問に答えなさい。

- (1) 圧力 p はどのような変数に依存するかを示しなさい。
- (2) $z = 0$ と $z = a$ にガラス面が固定してあるとして速度ベクトル $(u, v, 0)$ のうち 2 成分 (u, v) を求めなさい。
- (3) この速度場の渦度ベクトルの各成分を求めなさい。
- (4) z 方向に空間平均された平均速度ベクトル (\bar{u}, \bar{v}) を求めなさい。
- (5) 平均速度ベクトル (\bar{u}, \bar{v}) が (x, y) 平面内の空間で非圧縮条件を満たすとみなせるとき、圧力の従う方程式を求めなさい。
- (6) 平均速度ベクトル (\bar{u}, \bar{v}) が (x, y) 平面内で一様な流れ (U, V) のとき、圧力を求めなさい。



問題 16 熱力学 設問すべてについて解答すること。

次の (1) ~ (16) の問いについて答えよ。

高膨張比サイクルであるアトキンソンサイクルの高効率特性について以下のように考える。

図のように、断面積 S [m^2] のピストンとシリンダーの間の長さ x_1 [m] の空間に、質量 m [kg] (物質
量 n [mol]), ガス定数 R [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$] (一般ガス定数 R' [$\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$]), 定容比熱 (定積比熱) C_v [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]
(または C_v' [$\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$]) および 比熱比 κ の気体が、圧力 p_1 [Pa] および温度 T_1 [K] の状態で閉じ
込められている。この状態を「状態 1」とする。ただし、気体は理想気体とし、ピストンとシリンダ
ーの壁面は断熱壁であるとする。

(1) 「状態 1」における気体の体積 V_1 [m^3] を、 S および x_1 を用いて表せ。

(2) 温度 T_1 [K] を、 m , n , p_1 , R , R' および V_1 のうち必要なものを用いて表せ。

つぎに、ピストンをゆっくり動かして気体に対して圧縮比 ε の断熱圧縮を行ったところ、ピスト
ンとシリンダーの間隔が $x_2 = x_1/\varepsilon$ になった。この状態を「状態 2」とする。

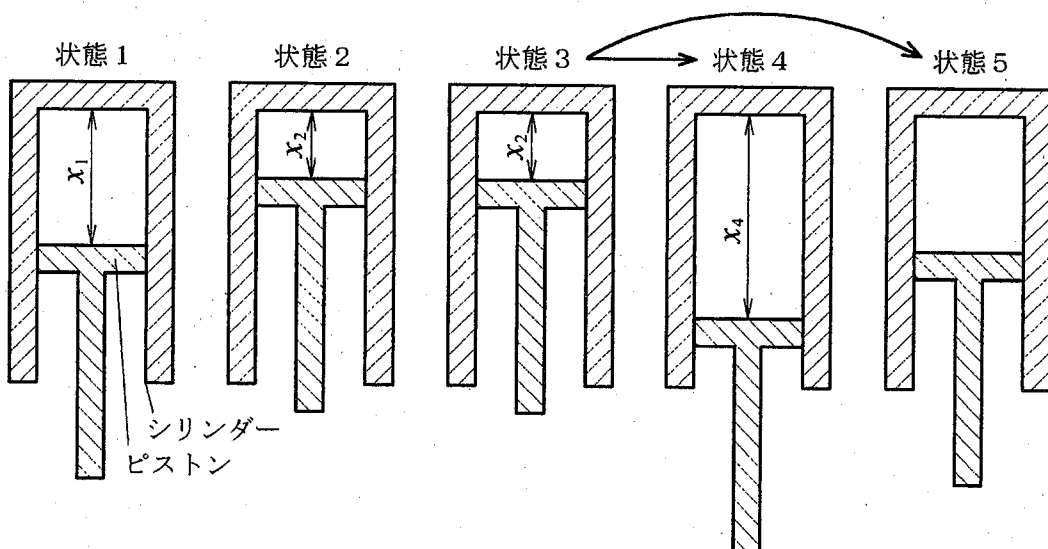
(3) 「状態 2」における気体の体積 V_2 [m^3] を、 S , x_1 および ε のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 「状態 2」における気体の圧力 p_2 [Pa] を、 p_1 , ε および κ のうち必要なものを用いて表せ。

(5) 「状態 2」における気体の温度 T_2 [K] を、 T_1 , ε および κ のうち必要なものを用いて表せ。

(6) 「状態 1」から「状態 2」の間に気体がした仕事 W_{12} [J] を、 p_1 , V_1 , κ , ε のうち必要なも
のを用いて表せ。

(7) 「状態 1」から「状態 2」の間の気体の内部エネルギーの変化 ΔU_{12} [J] を、 C_v , C_v' , m , n ,
 T_1 および T_2 のうち必要なものを用いて表せ。



つぎに、ピストンの位置を x_2 に保ったまま気体に熱量 Q_{23} [J] を加えたところ、気体の温度が T_2 [K] から T_3 [K] まで上昇した。この状態を「状態 3」とする。

(8) 加えた熱量 Q_{23} [J] を、 C_v 、 C_v' 、 m 、 n 、 T_2 および T_3 のうち必要なものを用いて表せ。

(9) 「状態 3」における気体の圧力 p_3 [Pa] を、 p_2 、 T_2 および T_3 のうち必要なものを用いて表せ。

つぎに、ピストンをゆっくり動かして気体に対して膨張比 E の断熱膨張を行ったところ、ピストンとシリンダーの間隔が $x_4 = E x_2$ になった。この状態を「状態 4」とする。ただし、膨張比 E は $E > \varepsilon$ とする。

(10) 「状態 4」における気体の体積 V_4 [m³] を、 E 、 S 、 x_1 および ε のうち必要なものを用いて表せ。

(11) 「状態 4」における気体の圧力 p_4 [Pa] を、 E 、 p_3 および κ のうち必要なものを用いて表せ。

(12) 「状態 4」における気体の温度 T_4 [K] を、 E 、 T_3 、 ε および κ のうち必要なものを用いて表せ。

(13) 「状態 3」から「状態 4」の間に気体がした仕事 W_{34} [J] を、 E 、 p_3 、 V_2 および κ のうち必要なものを用いて表せ。

一方、「状態 3」からピストンをゆっくり動かして気体に対して圧縮比 ε と同じ膨張比 ε で断熱膨張を行った状態を「状態 5」とする。

(14) 「状態 3」から「状態 5」の間に気体がした仕事 W_{35} [J] を、 p_3 、 V_2 、 ε および κ のうち必要なものを用いて表せ。

(15) 膨張行程において気体がした仕事 W_{34} および W_{35} は、どちらが大きいかわかればよい。

(16) 「状態 1」から「状態 4」の間において、加えた熱量に対する気体がした仕事の比として高膨張サイクルの熱効率 η を定義する。熱効率 η を Q_{23} 、 W_{12} および W_{34} のうち必要なものを用いて表せ。

問題 17 生産加工 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。

- (1) 図 1 は Al-Cu 系平衡状態図の模式図を示している。図中の L, α および θ は、それぞれ液相, α -Al 固溶体および θ -Al₂Cu 相を示す。Al-10mass%Cu 合金を 800℃ からゆっくりと冷却したときの組織変化について説明しなさい。また、共晶温度直下で得られる組織の量比も算出せよ。
- (2) 共晶組成を有する Al-Cu 合金を用いて、800℃ からゆっくりとした冷却速度で冷却した鑄造材および比較的速い冷却速度で冷却した鑄造材を作製した。このとき、冷却速度の違いによって生じる鑄造材の微細組織の違いについて述べなさい。ただし、これらの鑄造材は両者とも共晶組織を有するものとする。
- (3) 上記 (2) における鑄造材の微細組織の違いが生じる原因を「過冷度」および「核形成」の観点から説明しなさい。
- (4) Al-4mass%Cu 合金は析出強化を行ったうえで用いられることが多い。析出強化を行うために必要な 2 段階の熱処理について、それぞれの熱処理の方法および役割について述べなさい。
- (5) 純 Al と軟鋼を用いて引張試験を行った。これらの材料における引張挙動の違いを応力 - ひずみ曲線の模式図を描いたうえで説明しなさい。

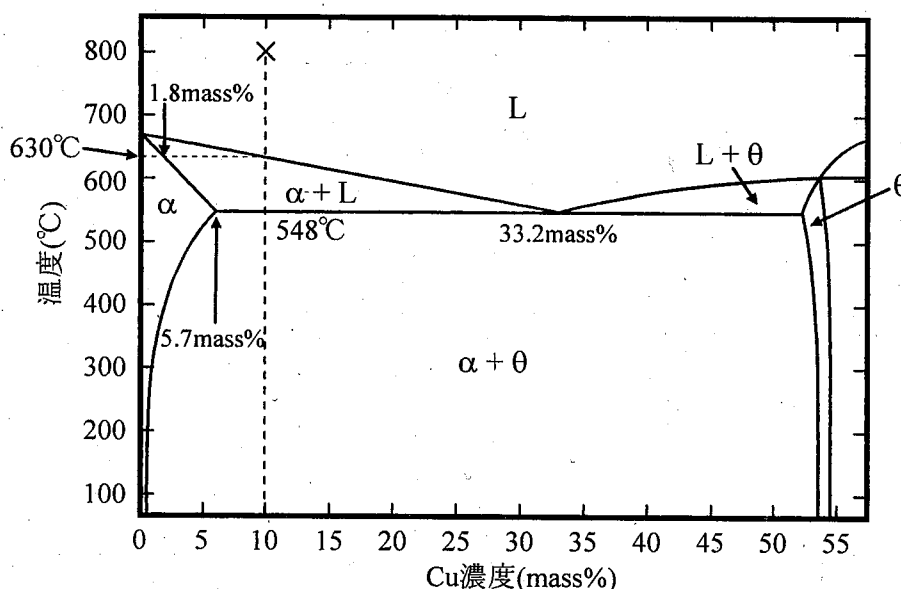
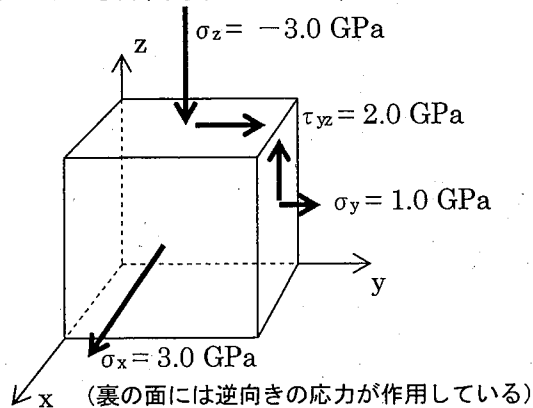


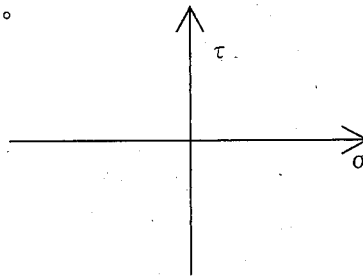
図 1 Al-Cu 系平衡状態図の模式図

II 次の(1)～(2)の問いについて答えよ。

- (1) 等方性金属材料中の微小要素において、各座標軸に垂直な面に下図の応力が作用している（ベクトルは応力が実際に作用している方向を表していて、表の面で表示が無い所は応力が0）。



- (a) この微小要素の応力状態を応力テンソル $\{\sigma_{ij}\}$ で表せ。
- (b) この応力状態を示す3軸応力のモール円を描け。解答用紙には下に示すように右方向に正の垂直応力 σ ，上方向に正のせん断応力 τ （モール円では右回りのせん断応力を正とする）を座標軸に取って描け。



- (c) この微小要素に働いている最大主せん断応力 τ_{max} の値（絶対値）を計算せよ。
- (d) 主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ の値を計算せよ。ただし、 $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$ とする。
- (2) 上記(1)の等方性金属材料の真応力－真ひずみ関係式が $\sigma = 6.0 \varepsilon^{0.5}$ (GPa)で表され、上記(1)の応力が加えられる前（応力が全て0）の真ひずみ ε の値が $\varepsilon_0 = 1.0$ であったとする。
- (a) この状態から上記(1)の応力が加えられたとして、この等方性金属材料が降伏状態となるか否かを Mises の降伏条件で確かめよ。ただし $\sqrt{10} = 3.16$ として計算せよ。
- (b) 前問(a)において降伏状態になるとすると、応力が加えられる前の状態から降伏して塑性変形が進んだ後の真ひずみの増加量 $d\varepsilon$ （相当ひずみ増分）はいくらになるか計算せよ。

問題 18 量子力学 設問すべてについて解答すること。

I 一次元井戸型ポテンシャル中を運動する質量 m の粒子について、以下の問いに答えよ。

ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x > a \end{cases}$$

である。ここで x は一次元空間の座標であり、 a は正の定数である。この粒子の基底状態の波動関数は、 $0 \leq x \leq a$ で

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

である。

関数系 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(i\frac{\pi}{a}x\right)$, $\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-i\frac{\pi}{a}x\right)$ とする。

(1) 関数系 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を用いて波動関数 $\psi(x)$ を表せ。ここで、 $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ の関係を用いてよい。

(2) $\int_0^a \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}$, ($i, j=1, 2$) であることを示せ。(δ_{ij} はクロネッカーのデルタで、

$i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$ を意味している。) また、 $\phi_i^*(x)$ は $\phi_i(x)$ の複素共役とする。この関係は、関数系が正規直交系を作っていることを示している。

(3) $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ とするとき、 $\hat{p}\phi_1(x) = p_1\phi_1(x)$, $\hat{p}\phi_2(x) = p_2\phi_2(x)$ である。($\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h : プランク定数) ここで、 \hat{p} は運動量演算子、 p_1, p_2 はその固有値である。 p_1 および p_2 を求めよ。

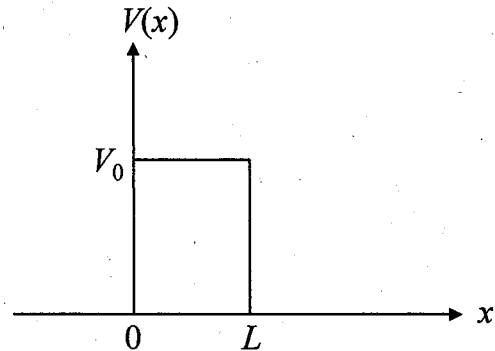
(4) 運動量の期待値 $\int_0^a \psi^*(x) \hat{p} \psi(x) dx$ を求めよ。 $\psi^*(x)$ は $\psi(x)$ の複素共役とする。

(5) ハミルトニアンは、 $0 \leq x \leq a$ で、 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ である。 $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ の関係を用いてエネルギー固有値 E を求めよ。

II 次のような一次元空間におけるトンネル効果について考える。

質量 m の粒子が、図に示すようなポテンシャル $V(x)$ に $x < 0$ の領域から入射した。

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 & \text{領域 I} \\ V_0, & 0 < x \leq L & \text{領域 II} \\ 0, & L < x & \text{領域 III} \end{cases}$$



ここで x は一次元空間の座標であり、 L および V_0 は正の定数である。プランク定数を h 、また $\hbar = h/(2\pi)$ とする。

入射粒子のエネルギーが $E = \frac{V_0}{2}$ の場合を考える。

以下の (1) ~ (7) の問いについて答えよ。

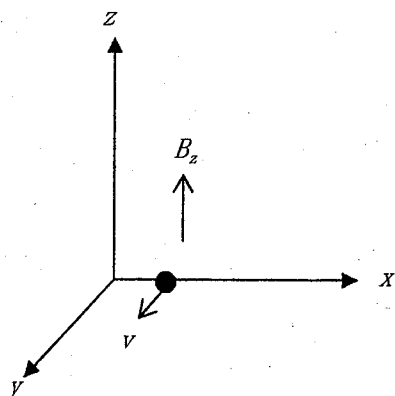
- (1) 領域 I での波動関数を $\phi_I(x) = \exp(ikx) + A\exp(-ikx)$ とする。この領域で成り立つシュレーディンガー方程式を用いて、正の定数 k を求めよ。ただし A は定数である。
- (2) 領域 II での波動関数を $\phi_{II}(x) = B\exp(\alpha x) + C\exp(-\alpha x)$ とするとき、正の定数 α を求めよ。ただし B, C は定数である。
- (3) 波動関数の連続条件 $\phi_I(0) = \phi_{II}(0)$, $\phi'_I(0) = \phi'_{II}(0)$ より、定数 A, B, C の間の関係を求めよ。ただし $\phi'_I(0)$, $\phi'_{II}(0)$ は、それぞれ、 $\phi_I(x)$, $\phi_{II}(x)$ の $x=0$ での微分を意味する。答えには、 k および α を用いて良い。
- (4) 領域 III での波動関数は、 $\phi_{III}(x) = D\exp(ikx)$ と表される。ただし D は定数である。
 $x=L$ での波動関数の連続条件より、定数 B, C, D の間の関係を求めよ。答えには、 k および α を用いて良い。
- (5) このポテンシャルによる反射率を A を用いて表せ。
- (6) 上記 (4) の答えを用いて、 $\frac{C}{B}$ を L および α を用いて表せ。
- (7) 上記 (3) と (6) の答えを用いて、透過率を L および α を用いて表せ。必要ならば、透過率 (T) と反射率 (R) の関係 $T+R=1$ を用いて良い。

問題 19 電子物性・固体物性 設問すべてについて解答すること。

I 半導体中に一様に分布した伝導電子の運動を考える。この伝導電子は電界のない状態では、熱によりランダムな運動をしているが、この熱運動による正味の伝導電子の速度は 0 と近似できる。

- (1) 電界 E を印加した時、電荷 $-q$ 、質量 m^* を有する伝導電子が得る加速度をこれらの記号を用いて示せ。
- (2) 半導体中の伝導電子の運動方程式に用いられる質量 m^* は自由電子の静止質量 $m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ とは異なるみかけの質量である。このみかけの質量の一般的な名称を記述せよ。
- (3) 伝導電子は電界 E により加速されて速度 0 から等加速度運動をし、ある時間 τ_c で他の粒子と衝突してその速度を完全に失う（速度 0 に戻る）とする。衝突直前の伝導電子の速度 v_{max} を上記の記号を用いて表せ。
- (4) (3) の運動において、伝導電子が衝突から次の衝突までの間に有する平均速度 v_d を上記の記号を用いて表せ。
- (5) v_d / E は移動度 μ と定義される。この μ と上記の記号および伝導電子の密度 n を用いて、伝導電子による電気伝導率を表せ。

II 図に示すような電子の散乱を引き起こすものが存在しない 3 次元空間中において、 z 方向に一様な磁界 B_z がある。この空間に y 方向に平行な速度 v を有する伝導電子が入射した場合を考える。なお、伝導電子の質量は m^* 、電荷は $-q$ とする。これらの記号を用いて以下の設問に答えよ。



- (1) 入射直後の伝導電子に働くローレンツ力の方向を示し、さらにその絶対値を示せ。
- (2) 入射から t 経過後の伝導電子の運動方程式を x 方向、 y 方向、 z 方向それぞれについて示せ。
- (3) 伝導電子の運動の半径 r を示せ。

問題 20 計算機基礎 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) と (2) に答えなさい。

- (1) 2 の補数表現による 8 ビット 2 進数 $X = 0101.1000$, $Y = 0110.1010$ について, $X - Y$ の演算結果を 2 の補数表現による 8 ビット 2 進数と符号付き 10 進数で表しなさい。
- (2) 排他的論理和の真理値表を示しなさい。ただし, 入力を x と y , 演算出力を z とする。なお, x, y, z は 2 値論理変数である。

II 次の 2 値論理関数 $f(x, y, z)$ と $g(x, y, z)$ それぞれを, 最小の積和形 (主加法標準形) で表しなさい。ただし, \oplus は排他的論理和を示す演算子である。また, \triangleright は論理演算子であり, $p \triangleright q$ は p が真で q が偽のときのみ偽となり, それ以外は真である。なお, x, y, z, p, q は 2 値論理変数である。

- (1) $f(x, y, z) = (x \oplus y) \oplus (y \oplus z)$
- (2) $g(x, y, z) = (x \triangleright y) \triangleright (y \triangleright z)$

III 2 の補数表現による n ビット 2 進整数 $X = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_k \cdots x_1x_0$ と $Y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_k \cdots y_1y_0$ を加算するとき, n ビット ALU による $X + Y$ の演算結果 $F = f_{n-1}f_{n-2} \cdots f_k \cdots f_1f_0$ がオーバーフローする条件は, 以下で与えられることを証明しなさい。ただし, c_n は ALU の最上位桁の桁上げ出力であり, c_{n-1} はその 1 ビット下位の桁上げ出力である。

$$c_n \oplus c_{n-1} = 1$$

IV 2 の補数表現による n ビット 2 進整数 $X = x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_k \cdots x_1x_0$ と $Y = y_{n-1}y_{n-2} \cdots y_k \cdots y_1y_0$ の加減算を考えると, 以下の (1) ~ (3) に答えなさい。

- (1) $X - Y$ の減算において, 下位桁への桁貸しは無いものとし, x_k と y_k の差の絶対値 d_0 と上位桁からの桁借り b_k を求める論理回路を半減算器 HS と呼ぶ。このとき, 半減算器 HS の真理値表を示し, d_0 と b_k の論理式を求めなさい。
- (2) $X - Y$ の減算において, 全減算器 FS を 2 個の半減算器 HS と 1 個の論理和ゲートのみを用いて設計しなさい。ただし, 全減算器 FS の入力 x_k, y_k , 下位桁への桁貸し b_{k-1} であり, 出力を x_k と y_k の差の絶対値 d_k と上位桁からの桁借り b_k とする。
- (3) $n = 4$ のとき, $X + Y$ または $X - Y$ を演算できる加減算論理回路を全減算器 FS と排他的論理和ゲートのみを用いて設計しなさい。ただし, 加算と減算の切り替えは, 2 値論理変数の入力信号 p によって切り替わるものとする。