平成 28 年度 10 月期入学 / 平成 29 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(専門科目)

平成 28 年 8 月 8 日 9:00〜12:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 29 枚ある.
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない.
3. 試験開始後, 枚数を確認し, 落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること.
4. 問題は下記 14 題であり, 日本語と英語の両方で出題されている. このうちいずれか **4 題を選択**し, 解答しなさい.

生命情報学(問題番号:B−1〜B−2)	1−4 ページ
心理学, 認知神経科学(問題番号:P−1〜P−4)	5−12 ページ
計算機科学, 電気電子工学(問題番号:T−1〜T−5)	13−22 ページ
基礎数学(問題番号:M−1〜M−3)	23−28 ページ

5. 特に指定のない限り, 日本語または英語で解答すること.
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること.

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version; the English translation below is provided for reference only

October 2016 Admissions / April 2017 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

August 8, 2016
9:00 - 12:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 29 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the exam has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 14 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 4 questions.**

Bioinformatics (Question Numbers B-1 to B-2)	Pages 1 to 4
Psychology and Cognitive Neuroscience (Question Numbers P-1 to P-4)	Pages 5 to 12
Computer Science and Electrical and Electronic Engineering (Question Numbers T-1 to T-5)	Pages 13 to 22
Basic Mathematics (Question Numbers M-1 to M-3)	Pages 23 to 28

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問　生命情報学に関する以下の語句の中から８つを選んで，それぞれ4行以上１０行以内で説明せよ．必要に応じて図を用いてもよい．

(1) SNP
(2) オーソログ
(3) プロテアーゼ
(4) 選択的スプライシング
(5) DDBJ データベース
(6) Swiss-Prot データベース
(7) EC 番号
(8) SSEARCH
(9) マルチプルアラインメント
(10) タンパク質スレッディング

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Choose and explain 8 terms from the following 10 terms related to bioinformatics, where 4 – 10 lines must be used for each explanation, and figure(s) can be used if necessary.

(1) SNP
(2) ortholog
(3) protease
(4) alternative splicing
(5) DDBJ database
(6) Swiss-Prot database
(7) EC number
(8) SSEARCH
(9) multiple alignment
(10) protein threading

$s = s_1s_2\dots s_m, t = t_1t_2\dots t_n$ をそれぞれ長さ m と n の DNA 配列（文字集合 {A,C,G,T} 上の文字列）とする．アラインメントとは，長さが同じになるように，それぞれの配列に 0 個以上のギャップ文字（–）を挿入したものである（ただし，得られた文字列を並べた際に同じ位置にギャップ文字だけが並ぶことはないものとする）．ここで $f(x,y)$ を x と y が同じ文字の時 1 を返し，それ以外は 0 を返す関数とする．$\langle s',t'\rangle = \langle s'_1s'_2\dots s'_l, t'_1t'_2\dots t'_l\rangle$ をアラインメントとすると，そのスコアは $\sum_{i=1}^{l} f(s'_i,t'_i)$ で与えられるものとする．スコアが最大となるアラインメントを最適アラインメントとよび，配列 s,t に対する最適アラインメントのスコアを $OPT(s,t)$ で，最適アラインメントの個数を $\#_{OPT}(s,t)$ で表す．例えば，$s=$ACGTA, $t=$ACCGT に対する最適アラインメントは以下の 2 種類があり，そのスコアは 4 であるので，$OPT(\text{ACGTA},\text{ACCGT}) = 4$，$\#_{OPT}(\text{ACGTA},\text{ACCGT}) = 2$ となる．

```
A C - G T A        A - C G T A
A C C G T -        A C C G T -
```

また，$(s)^i$ で文字列 s を i 個，連接した文字列を表す．例えば，$(\text{AC})^2\text{GT}(\text{A})^3$ は ACACGTAAA という文字列を表す．以下の設問に答えよ．

設問 1　$OPT(\text{ACATCG},\text{TACGTGA})$ を求めよ．

設問 2　$\#_{OPT}((\text{AC})^2,(\text{AG})^2) = 9$ が成立する．その理由を説明せよ．

設問 3　$\#_{OPT}((\text{AC})^4\text{A},(\text{AG})^6)$ を理由とともに示せ．

設問 4　長さ h の DNA 配列 t のうち $\#_{OPT}((\text{A})^k,t)$ を最大にするものの個数は以下の式で与えられる（ただし，h,k は $1 \le k \le h$ を満たす整数とする）．

$$\square^{\square}$$

空欄を埋めた式を理由とともに示せ．

設問 5　長さ h の DNA 配列 t のうち $\#_{OPT}((\text{A})^k,t)$ を最小にするものの個数は以下の式で与えられる（ただし，h,k は $1 \le k \le h$ を満たす整数とする）．

$$\binom{\square}{\square}\cdot\square^{\square}$$

空欄を埋めた式を理由とともに示せ．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Let $s = s_1 s_2 \ldots s_m$ and $t = t_1 t_2 \ldots t_n$ be DNA sequences (i.e., strings over an alphabet $\{$A,C,G,T$\}$) of length m and n, respectively. An alignment is obtained by inserting (0 or more) gap symbols ($-$) to each sequence so that the resulting sequences have the same length, where gap symbols must not appear at the same position in the two resulting sequences. Let $f(x, y)$ be a function such that $f(x, y) = 1$ if x and y are the same symbol, and $f(x, y) = 0$ otherwise. The score of an alignment $\langle s', t' \rangle = \langle s'_1 s'_2 \ldots s'_l, t'_1 t'_2 \ldots t'_l \rangle$ is given by $\sum_{i=1}^{l} f(s'_i, t'_i)$. An alignment with the maximum score is called an optimal alignment. The score and the number of optimal alignments between sequences s and t are denoted by $OPT(s,t)$ and $\#_{OPT}(s,t)$, respectively. For example, the following are the optimal alignments (with score 4) between s =ACGTA and t =ACCGT:

```
A C - G T A          A - C G T A
A C C G T -          A C C G T -
```

and thus we have $OPT(\text{ACGTA}, \text{ACCGT}) = 4$ and $\#_{OPT}(\text{ACGTA}, \text{ACCGT}) = 2$. $(s)^i$ denotes the string obtained by concatenating i copies of a string s. For example, $(\text{AC})^2\text{GT}(\text{A})^3$ denotes ACACGTAAA. Answer the following questions.

Q.1 Provide $OPT(\text{ACATCG}, \text{TACGTGA})$.

Q.2 Show that $\#_{OPT}((\text{AC})^2, (\text{AG})^2) = 9$.

Q.3 Compute $\#_{OPT}((\text{AC})^4\text{A}, (\text{AG})^6)$, and explain its derivation.

Q.4 The number of DNA sequences t of length h, each of which maximizes $\#_{OPT}((\text{A})^k, t)$, is given by

$$\square^{\square},$$

where k and h are integers such that $1 \le k \le h$. Complete the formula by filling the blank boxes, and explain its derivation.

Q.5 The number of DNA sequences t of length h, each of which minimizes $\#_{OPT}((\text{A})^k, t)$, is given by

$$\binom{\square}{\square} \cdot \square^{\square},$$

where k and h are integers such that $1 \le k \le h$. Complete the formula by filling the blank boxes, and explain its derivation.

設問

神経回路のモデル・解析法に関連する以下の概念について簡潔に説明せよ。数式や図を用いてもよい。

（１）ヘッブ学習（Hebbian learning）

（２）ポアソンスパイク（Poisson spike）

（３）積分発火モデル（integrate-and-fire model）

（４）スパイク同期平均（spike-triggered average）

（５）リカレントネットワーク（recurrent network）

Ouestion is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Give a brief explanation on each of the following terms on neural modeling and analysis. Mathematical expressions and/or figures may be used.

(1) Hebbian learning

(2) Poisson spike

(3) integrate-and-fire model

(4) spike-triggered average

(5) recurrent network

修士課程　専門科目　　【心理学、認知神経科学】　　問題番号　P－2

Figure 1 は Itti and Koch (2001)による注意のモデルの概略を示したものである。

設問１　入力画像中（input image）の物体を探索する際に、顕著性マップ（saliency map）はどのように働くか。winner-take-all と inhibition of return という用語を用いて説明せよ。

設問２　Figure 1 における top-down attentional bias について説明せよ。ただし、top-down attentional bias から出ている矢印の数や方向には意味はない。

設問３　このモデルに関連する神経科学の知見を１つ取り上げ、説明せよ。

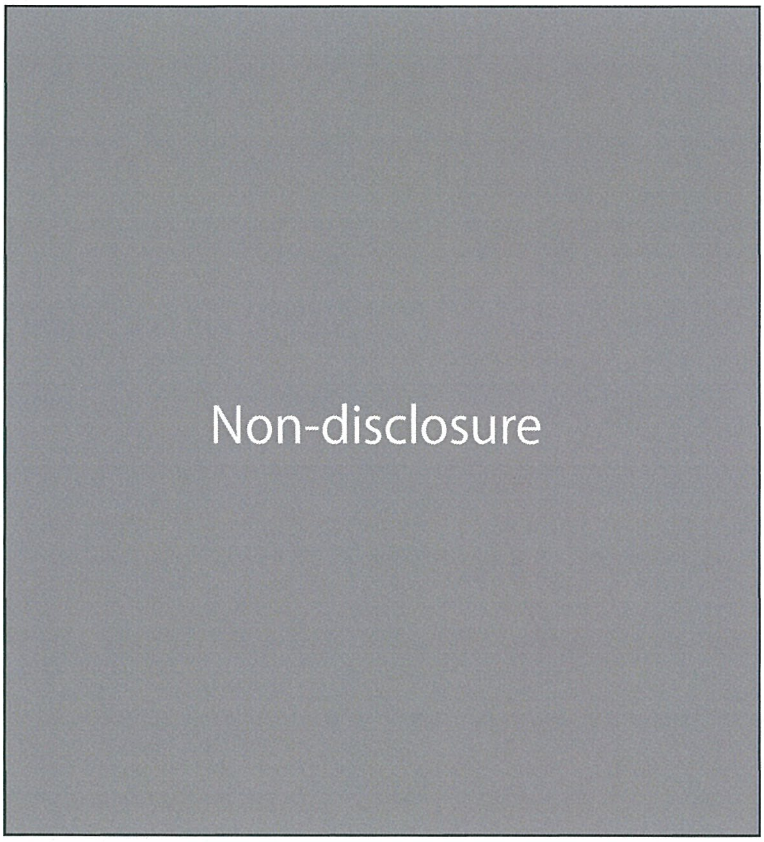

Figure 1. Modified from Itti, L., & Koch, C. (2001). Computational modelling of visual attention. *Nature Reviews Neuroscience, 2*, 194–203.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Figure 1 shows the framework of a model of visual attention by Itti and Koch (2001).

Q.1 Explain the function of the saliency map when searching objects in the input image using the terms "winner-take-all" and "inhibition of return".

Q.2 Explain the role of the top-down attentional bias, which is mentioned in Figure 1. Note that the number of arrows and their directions drawn from "top-down attentional bias" have no particular meaning.

Q.3 Explain a finding in neuroscience related to this model.

Non-disclosure

Figure 1. Modified from Itti, L., & Koch, C. (2001). Computational modelling of visual attention. *Nature Reviews Neuroscience*, *2*, 194–203.

設問　下の図は、前頭前野腹内側部損傷患者（VMF Patients）と健常コントロール（Normal Control）の２群における、アイオワ・ギャンブリング課題のカード選択の結果を示している。以下の問いに答えよ。

(1) 図中の Decks A & B および Decks C & D は、どのような性質を持つか。課題全体の説明と合わせて述べよ。

(2) それぞれの被験者群の結果について、図から読み取れることを述べよ。

(3) この課題の遂行中に皮膚コンダクタンス反応（SCR）を計測すると、健常コントロール群では、被験者が Decks A & B と Decks C & D の性質に気づく前に SCR が変化を始めるが、前頭前野腹内側部損傷患者の SCR はそれに気づいた後でも予期的な変化を示さない（e.g., Bechara et al., 1997）。これらの結果に関連して提案されている仮説について概説せよ。

Non-disclosure

Modified from Bechara et al. (1999) *J Neurosci*, 19: 5473-5481. エラーバーは標準誤差を示す。

Master's Program	Specialized Subjects	[Psychology and Cognitive Neuroscience]	Question Number	P−3

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. The following figure shows the results of card selection in the Iowa Gambling task for two groups of participants: patients with damage to the ventromedial prefrontal cortex (VMF patients) and normal controls. Answer the following questions.

(1) What kind of characteristics do the Decks A & B and Decks C & D in the figure have? Describe in the context of overall characteristics of the task.

(2) Describe what you can tell from the figure for the results of each group of participants.

(3) During the performance of this task, skin conductance response (SCR) was measured. As a result, control participants showed anticipatory change in the SCR before they became consciously aware of the characteristics of Decks A & B and Decks C & D, whereas the SCR in VMF patients did not show such anticipatory change even after they became aware of the characteristics (e.g., Bechara et al., 1997). Briefly describe the hypothesis proposed in relation to this finding.

Non-disclosure

Modified from Bechara et al. (1999) *J Neurosci*, 19: 5473-5481. Error bars indicate SEM.

以下の設問に答えよ．

設問 1　記憶の心理学実験における下記の用語について説明せよ．

(1) 自由再生

(2)·系列再生

(3) 手がかり再生

(4) 再認

設問 2 記憶の心理学実験における想起条件として，実験参加者をランダムに自由再生条件，再認条件に割りあてた場合に，図 1 に示すような想起成績を得た．自由再生，再認の各想起条件は，図 1 の(a)，(b)のいずれに対応するかを述べよ．また，その理由を再生の 2 段階説の観点から説明せよ．

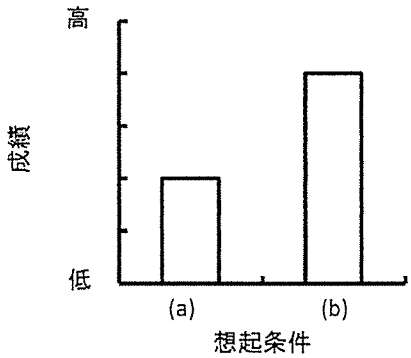

図 1 記憶の心理学実験結果の概略図

設問 3　単語の長さによる記憶痕跡の変化を観察する心理学実験を行いたい．そこで，単語の長さを変化させた場合の再認実験を行い，このときの正答率を測定する．単語の提示後から回答するまでに，実験参加者のペースでゆっくりと 1 から 10 まで数えさせる．この実験における独立変数，従属変数は何であるかを述べよ．また，考えられる交絡変数について述べよ．

Answer the following questions.

Q.1 Explain the following terms in the context of psychological experiments on memory.

(1) free recall

(2) serial recall

(3) cued recall

(4) recognition

Q.2 Participants are randomly assigned to a free recall retrieval condition or a recognition retrieval condition in a psychological experiment on memory. The results of the retrieval performance are shown in Fig. 1. Identify which of (a) or (b) in Fig. 1 corresponds to the free recall condition or the recognition condition. Explain the reason for your answer, from the perspective of the two-stage theory of recall.

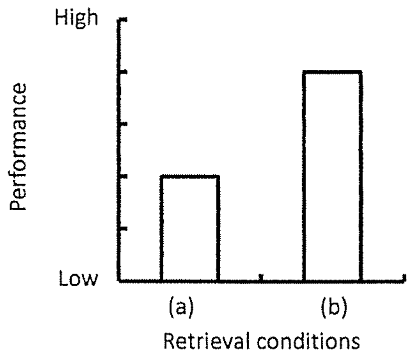

Fig. 1 Schematic result of a psychological experiment on memory.

Q.3 To observe an engram modulation in association with word length, a recognition test is performed with words of variable lengths. Between the presentation of words and the response, participants are required to slowly count from one to ten at their own pace. Describe what are the independent variable, the dependent variable, and a potential confounding variable in this experiment.

設問　通信路行列 $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ で規定される記憶のない 2 元定常通信路 T が与えられたとする．ただし，$0 \leq p \leq 1$ である．

(1)　T の通信路容量が最小になるときの，p の値を求めなさい．また，そのときの通信路容量を求めなさい．

(2)　T の通信路容量が最大になるときの，p の値を求めなさい．また，そのときの通信路容量を求めなさい．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Consider a memoryless binary communication channel T characterized by a channel matrix $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, where $0 \le p \le 1$.

(1) Find the value of p that minimizes the channel capacity of T, and compute that minimum.

(2) Find the value of p that maximizes the channel capacity of T, and compute that maximum.

設問 1　差分方程式 $y[n] = y[n-1] - \frac{2}{9}y[n-2] + 2x[n] - x[n-1]$ で表される線形離散時間システムを考える．ここで離散信号 $x[n]$ はシステムの入力，離散信号 $y[n]$ はシステムの出力，n は整数である．

(1) このシステムを，加算器，乗算器，遅延素子を用いて図示せよ．

(2) このシステムの伝達関数 $H(z)$ を z 変換を用いて求めよ．

(3) このシステムが安定であるための必要十分条件を示し，安定性を判定せよ．

(4) このシステムのインパルス応答 $h[n]$ を求めよ．

設問 2　FIR フィルタと IIR フィルタの利点をそれぞれ説明せよ．

Q. 1 Consider a discrete-time linear system whose difference equation is given by $y[n] = y[n-1] - \frac{2}{9}y[n-2] + 2x[n] - x[n-1]$, where $x[n]$ is its input, $y[n]$ is its output, and n is an integer.

(1) Draw a diagram of this system using adder blocks, multiplier blocks, and unit-delay blocks.

(2) Compute the transfer function $H(z)$ of this system by applying the z-transform.

(3) Describe a necessary and sufficient condition for this system to be stable. Check the stability of the system.

(4) Compute the impulse response $h[n]$ of this system.

Q. 2 Explain advantages of FIR filters and those of IIR filters.

設問 1　確率変数の組 (F, L) がある。$F = (F_1, F_2)$ は 2 次元の特徴ベクトルであり、L は特徴ベクトルのクラスを表し A, B のいずれかの値を取る。クラス A, B の生起確率はそれぞれ 0.8, 0.2 であり、F_1, F_2 は確率変数 L の条件下で互いに独立であるとみなせる。

(1) 識別器 P は F_1 のみを用いて入力特徴ベクトルをクラス A または B に識別する。識別器 P がクラス A, B を正しく識別する確率はそれぞれ 0.7, 0.6 である。識別器 P がある入力をクラス A と識別した時、それが正答である確率を求めよ。

(2) 識別器 Q を用意し、識別器 P と組み合わせて使用することを考える。識別器 Q は F_2 のみを用いて入力特徴ベクトルをクラス A, B に識別する。識別器 Q がクラス A, B を正しく識別する確率はそれぞれ 0.6, 0.8 である。識別器 P と Q が同時にクラス A と識別した時に、それが正答である確率を求めよ。

設問 2　主成分分析について、以下の設問に答えよ。

特徴ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K \in \mathbb{R}^N$ および N 個の正規直交基底ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{R}^N$ が与えられたものとする。 ただし $K \geq N$ かつ $\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$ である。このとき $\boldsymbol{x}_k$ および $\boldsymbol{x}'_k$ を以下のように表す。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_k &= \alpha_{k1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{kd}\boldsymbol{v}_d + \ldots + \alpha_{kN}\boldsymbol{v}_N, \\
\boldsymbol{x}'_k &= \alpha_{k1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{kd}\boldsymbol{v}_d, \\
\alpha_{kn} &= \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k.
\end{aligned}
$$

ただし $k = 1, \ldots, K$, $n = 1, \ldots, N$, $0 < d < N$ である。

(1) 主成分分析において、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ は、目的関数

$$
J(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d) = \sum_{k=1}^{K} \left\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}'_k \right\|^2
$$

を最小化することで得られる。これは、$\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{v}_i$ を最大化することと等しいことを示せ。ただし $\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K$ の共分散行列である。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を求める方法について述べよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Consider a random pair (F, L), where the random feature vector $F = (F_1, F_2)$ takes values in $\mathbb{R}^2$, and L, a random class label, takes values in $\{A, B\}$. Suppose that the prior probabilities of A and B are 0.8 and 0.2, respectively. We assume that the distribution of the first and second components of F, F_1 and F_2, are independent conditionally to the class variable L.

(1) A classifier P uses only F_1 for classification and its classification accuracies for A and B are 0.7 and 0.6, respectively. When a feature vector is classified as A by P, what is the probability that this decision is correct?

(2) We prepare another classifier Q and combine the results of P and Q for classification. Q uses only F_2 for classification and its classification accuracies for A and B are 0.6 and 0.8, respectively. When a feature vector is classified as A by P and Q at the same time, what is the probability that these decisions are correct?

Q.2 Answer the following questions regarding Principal Component Analysis (PCA).

Given feature vectors $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K \in \mathbb{R}^N$, where $K \geq N$ and $\sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$, and N orthonormal basis vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{R}^N$, we write $\boldsymbol{x}_k$ and $\boldsymbol{x}'_k$ as,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_k &= \alpha_{k1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{kd}\boldsymbol{v}_d + \ldots + \alpha_{kN}\boldsymbol{v}_N, \\ \boldsymbol{x}'_k &= \alpha_{k1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{k2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{kd}\boldsymbol{v}_d, \\ \alpha_{kn} &= \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k, \end{aligned}$$

where $k = 1, \ldots, K$, $n = 1, \ldots, N$ and $0 < d < N$.

(1) In PCA, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ are obtained by minimizing the following objective function,

$$J(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d) = \sum_{k=1}^{K} \left\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}'_k \right\|^2 .$$

Show that this is equivalent to maximizing $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \Sigma \boldsymbol{v}_i$, where Σ is the covariance matrix of $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K$.

(2) Describe how to compute $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$.

設問　次の問いに答えよ。

(1) 整数の集合 $\{5, 12, 19, 22, 33, 45, 56, 71, 90\}$ を格納した二分探索木を考える。このような二分探索木のうち、高さが 4 で 22 を根とするものを一つ図示し、その二分探索木を用いて 90 を探索する過程を説明せよ。

(2) 二分探索木の探索が効率的になる場合と、効率が悪くなる場合について、二分探索木がそれぞれどのような形状になるかを説明せよ。

(3) 二分探索木に対してノードを挿入する方法と削除する方法について説明せよ。

(4) 二分探索木を用いて、ある英語文書中の異なる単語の数および各単語の出現頻度を計数する方法を説明せよ。

(5) 文字列に対する辞書式データ圧縮においては、文字列を前から走査し、現在の位置から始まる部分文字列が、それ以前に出現しているかどうかを検知する。この操作を木構造を用いて効率的に行う方法について、「aebccgaccbdafbccb」という文字列を例として説明せよ。ただし、検知する最長の部分文字列長を 4 文字とする。

(6) 二分探索木を一般化した探索木として、1 つのノードにおいて 3 つ以上の子をもつことができる B 木がある。B 木の基本的な性質、操作、応用について説明せよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Answer the following questions.

(1) Consider the set of integers {5, 12, 19, 22, 33, 45, 56, 71, 90}. Draw a binary search tree of this set whose height is 4 and whose root is 22, and describe a process for searching 90 using this binary search tree.

(2) Describe shapes of binary search trees for which binary search is efficient and inefficient, respectively.

(3) Describe a method for inserting and deleting a node in a binary search tree.

(4) Describe a method for counting the number of different words and the frequency of each word in a given English document using a binary search tree.

(5) A dictionary coder for character sequences scans a character sequence from the beginning, and detects a preceding occurrence of a substring starting at the current position. Describe an efficient implementation of this operation based on a tree structure using the character sequence "aebccgaccbdafbccb" as an example. Let the length of the longest substring to be searched be four characters.

(6) B-trees, in which a node can have more than two children, are a generalization of binary search trees. Describe basic characteristics, operations, and applications of B-trees.

設問　計算機における数値表現と算術演算に関する以下の設問に答えよ. ただし整数の表現には2の補数を, 浮動小数点数の表現にはIEEE浮動小数点数演算標準(以下IEEE 754) を用いるとする.

(1)　16ビットの符号付き整数として-1を2の補数で表現せよ. またその2の補数表現を16ビットの符号なし整数と解釈した場合の値を計算せよ.

(2)　2つの整数の加減算において, オーバーフローが生じたことを検出する方法を述べよ.

(3)　1桁の2進数A, B, Xの加算を行い, 和Sと桁上げCを出力する全加算器の真理値表を示すとともに, その論理回路を高々10個のNANDゲートのみを用いて作図せよ.

(4)　2つの符号なし整数の乗算は, 整数同士の加算とシフト演算によって実現することができる. そのアルゴリズムを示せ.

(5)　浮動小数点数では仮数部にnビットが割り当てられているとすると, 実質的には$n+1$ビットで仮数を表現している. その理由を説明せよ.

(6)　上位ビットから符号：1ビット, 指数部：5ビット, 仮数部：10ビット, 指数部バイアス：15であるような半精度2進浮動小数点数表現 (binary16) を考える. binary16で表現できる正の最大値と, その次に大きい正の値を計算せよ. またそれぞれに対応するバイナリ表現を16進数で示せ. ただしIEEE 754では指数部が11111のときには無限大もしくはNaNに対応することに注意せよ.

(7)　2つの浮動小数点数の加算は, 整数同士の加算とシフト演算によって実現することができる. そのアルゴリズムを示せ.

(8)　浮動小数点演算においてアンダーフローがどのような場合に生じるか, 除算を例に挙げながら説明せよ.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Answer the following questions about arithmetic operations and number formats for computers. In what follows integers and floating-point numbers are assumed to be represented by the two's complement and IEEE standards for floating-point arithmetic (IEEE 754) respectively.

(1) What is the two's complement of -1 if it is encoded as a signed 16-bit integer? Also convert that two's complement into a decimal number, assuming it is unsigned.

(2) Describe an algorithm to detect overflows in addition and subtraction of two integers.

(3) A one-bit full adder adds three numbers A, B and X, and has two outputs: sum S and carry C. Describe the truth table and a logic diagram of the one-bit full adder. The logic diagram should consist of up to ten NAND gates only.

(4) Multiplication of two unsigned integers can be realized by combining additions and shift operations of integers. Describe that algorithm.

(5) A floating-point number, whose significand has $n+1$ bits, can be represented using n bits only. Explain why.

(6) Consider the half-precision floating-point format (binary16) which assigns, from MSB to LSB, 1 bit for the sign, 5 bits for the exponent, and 10 bits for the significand with the bias being 15 for the exponent. Compute the maximum and the second maximum positive values of binary16 and describe their corresponding binary representations in hexadecimal. Note that the exponent of 11111 in IEEE 754 corresponds to either infinity or NaN.

(7) Addition of two floating-point numbers can be realized by combining additions and shift operations of integers. Describe that algorithm.

(8) Explain when underflow occurs in division of two floating-point numbers.

設問　実関数の微分方程式について考える。実変数 x の微分可能な関数 f, g のロンスキアン

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ \frac{df}{dx} & \frac{dg}{dx} \end{vmatrix} = f\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx}g$$

について以下の問に答えよ。

(1)　以下を証明せよ。

1. $W(f,f) = 0$
2. $W(f,g) = -W(g,f)$
3. $W(f, g \pm h) = W(f,g) \pm W(f,h)$ (h は x の微分可能な関数)
4. $W(f, Cg) = CW(f,g)$ (C は定数)
5. $W(f, gh) = hW(f,g) + fg\frac{dh}{dx} = gW(f,h) + f\frac{dg}{dx}h$
6. f と g が 1 次従属であれば $W(f,g) = 0$ である。
7. $W(f,g) \neq 0$ であれば f と g が 1 次独立である。

(2)　$y_1(x), y_2(x)$ を次の微分方程式の任意の 2 つの解とする。ここで $p(x)$ と $q(x)$ は x の積分可能な関数である。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

以下を証明せよ。

1. $\dfrac{dW(y_1,y_2)}{dx} = -p(x)W(y_1,y_2)$
2. $W(y_1,y_2) = K\exp\left[-\int p(x)dx\right]$ (K は定数)

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Consider differential equations of real functions. Answer the questions about the Wronskian of differentiable functions f and g of a real variable x,

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ \frac{df}{dx} & \frac{dg}{dx} \end{vmatrix} = f\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx}g.$$

(1) Prove the following statements.

1. $W(f,f) = 0$.
2. $W(f,g) = -W(g,f)$.
3. $W(f, g \pm h) = W(f,g) \pm W(f,h)$ (h is a differentiable function of x).
4. $W(f, Cg) = CW(f,g)$ (C is a constant).
5. $W(f, gh) = hW(f,g) + fg\frac{dh}{dx} = gW(f,h) + f\frac{dg}{dx}h$.
6. If f and g are linearly dependent, then $W(f,g) = 0$.
7. If $W(f,g) \neq 0$, then f and g are linearly independent.

(2) Let $y_1(x)$ and $y_2(x)$ be two arbitrary solutions of a differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

where $p(x)$ and $q(x)$ are integrable functions of x. Prove the following statements.

1. $\dfrac{dW(y_1, y_2)}{dx} = -p(x)W(y_1, y_2)$
2. $W(y_1, y_2) = K \exp\left[-\int p(x)dx\right]$ (K is a constant)

集合 Σ の要素の空でない有限列全体からなる集合を Σ^+ で表す．本問では，文字 a, b と変数 x, y を用い，集合 $\{a,b\}^+$ の要素を**語**，集合 $\{a,b,x,y\}^+$ の要素を**項**とよぶことにする．例えば，$aabbbabaa$ は語でありかつ項である．また $axby$ は項である．項 $t(x,y)$ の変数 x, y に語を代入すると語になる．例えば，$t(x,y)=axyya$ のとき，$x=abb$, $y=ba$ を代入すると，$t(abb,ba)=aabbbabaa$ となる．以下の設問に答えよ．

設問 1 項 $t(x,y)$ と語 s に対して，$x=u$ と $y=v$ $(u,v\in\{a,b\}^+)$ を代入して $t(u,v)=s$ となるのであれば，$x=u$, $y=v$ を方程式 $t(x,y)=s$ の**解**とよぶ．例えば，$x=abb$, $y=ba$ は $axyya=aabbbabaa$ の解である．方程式によっては複数個の解が存在したり，解が存在しないこともある．

(1) 次の方程式 (A), (B) について，それぞれ解は存在するか．存在すれば解を全て求めよ．解が存在しなければその理由を述べよ．
(A) $axyxa=ababaababa$　　　(B) $axxya=aabaabaa$

(2) 方程式 $t(x,y)=aab$ に解が存在するような項 $t(x,y)$ を全て求めよ．項 $t(x,y)$ は変数 x, y の両方を含むものとする．

設問 2 項 $t(x,y)$ に対して語の集合 $L(t(x,y))\subseteq\{a,b\}^+$ を

$$L(t(x,y))=\{t(u,v)\in\{a,b\}^+\mid u,\,v\in\{a,b\}^+\}$$

とおく．例えば，$aabbbabaa\in L(axyya)$ であるが，$aabbab\not\in L(axyya)$ である．

(1) 変数 x, y の少なくとも一方を含む長さ 4 の項 $t(x,y)$ で $\{abab,bbbb\}\subseteq L(t(x,y))$ を満たすものを全て求めよ．

(2) 集合 $L(axbya)$ を受理する <u>決定性</u> 有限オートマトンを図示せよ．

(3) $L(axbaxxb)\subseteq L(xxy)$ が成立することを示せ．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

In the following questions, Σ^+ denotes the set of all finite non-empty sequences of elements in a set Σ. Let a and b be characters and x and y be variables. Every element in $\{a, b\}^+$ is called a **word**, and every element in $\{a, b, x, y\}^+$ is called a **term**. For example, $aabbbabaa$ is both a word and a term, whereas $axby$ is only a term. We can substitute variables x and y in a term $t(x, y)$ with some words in order to obtain a word. For example, applying substitutions $x = abb$ and $y = ba$ to $t(x, y) = axyya$, we obtain the word $t(abb, ba) = aabbbabaa$. Answer the questions Q.1 and Q.2 below.

Q.1 For $t(x, y)$ and a word s, the pair of substitutions $x = u$ and $y = v$ ($u, v \in \{a, b\}^+$) is called a **solution** of the equation $t(x, y) = s$, if $t(u, v) = s$. For example, the pair of $x = abb$ and $y = ba$ is a solution of $axyya = aabbbabaa$. Some equations have more than one solution and some have none.

(1) For each of the equations (A) and (B) below, either list all its solutions, if at least one exists, or explain why it has no solution.
(A) $axyxa = ababaababa$ (B) $axxya = aabaabaa$

(2) List all terms $t(x, y)$ in which x and y appear at least once, and such that $t(x, y) = aab$ has at least one solution.

Q.2 For a term $t(x, y)$, we define the set of words $L(t(x, y)) \subseteq \{a, b\}^+$ as

$$L(t(x, y)) = \{t(u, v) \in \{a, b\}^+ \mid u,\, v \in \{a, b\}^+\}.$$

For example, $aabbbabaa \in L(axyya)$ but $aabbab \notin L(axyya)$.

(1) List all terms $t(x, y)$ of length 4 that contain at least one variable and such that $\{abab, bbbb\} \subseteq L(t(x, y))$.

(2) Draw a <u>deterministic</u> finite automaton which accepts $L(axbya)$.

(3) Prove that $L(axbaxxb) \subseteq L(xxy)$.

X をベルヌーイ試行の結果を表す二値確率変数とし，$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$ $(0<p<1)$ とする．

設問 1　n 回のベルヌーイ試行において結果が 1 となる回数 $Y \in \{0,1,\ldots,n\}$ は二項分布に従う．Y の期待値 $E[Y]$ と分散 $V[Y]=E[(Y-E[Y])^2]$ を，n と p を用いて表しなさい．ただし導出過程も示すこと．

設問 2　n 回のベルヌーイ試行において結果が 1 となる回数が f 回であったときの，パラメタ p の最尤推定値 $\hat{p}$ を導出しなさい．

設問 3　n_1 回および n_2 回のベルヌーイ試行のそれぞれにおいて結果が 1 となる比率を確率変数 R_1，R_2 で表すものとする．n_1 および n_2 が十分大きく，R_1，R_2，R_1-R_2 がいずれも近似的に正規分布に従うとき，これら 3 つの正規分布それぞれの平均と分散を，p, n_1, n_2 を用いて表しなさい．

表 1 の分割表は，ある製品の保有率（その製品を持つ人口の割合）の地域 A, B における違いを調べるために行った無作為抽出調査の結果を示している．なお，以下の統計的検定では連続性の補正は考慮しなくてよい．

設問 4　n_A および n_B が十分大きいとき，近似的に標準正規分布に従うような検定統計量 Z を導入し，地域 A, B での保有率の差の有意性を検定する方法について説明しなさい．説明においては，表 1 の記号を用いて Z の実現値を示すこと．

設問 5　$a=100, b=400, c=150, d=350$ のとき，設問 4 で解答した検定を行い，有意水準 5% での検定結果について説明しなさい．ただし $P(|Z|\leq 1.96)=0.95$ とする．

設問 6　表 1 の標本調査における χ^2 統計量の値を，表中の記号を用いて求めなさい．さらに，その χ^2 値を用いた独立性の χ^2 検定と，設問 4 で解答した検定が同じ検定結果を与えるか否かについて理由とともに述べなさい．

表 1: 地域 A，B における標本調査結果（単位: 人数）

地域 ＼ 製品の保有	有	無	計
A	a	b	n_A
B	c	d	n_B
計	m_1	m_0	n

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Let X be a binary random variable that describes the outcome of a Bernoulli trial. Let $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

Q.1 The number of occurrences of 1 in n Bernoulli trials, $Y \in \{0, 1, ..., n\}$, obeys a binomial distribution. Find the expectation of Y, $E[Y]$, and the variance of Y, $V[Y] = E[(Y - E[Y])^2]$, in terms of n and p. Show the work that leads to your answer.

Q.2 Given f, the number of occurrences of 1 in n Bernoulli trials, derive the maximum likelihood estimate $\hat{p}$ of the parameter p.

Q.3 Let random variables R_1 and R_2 describe the proportions of occurrences of 1 in n_1 and n_2 Bernoulli trials, respectively. Suppose that n_1 and n_2 are large enough, and therefore all R_1, R_2, and $R_1 - R_2$ approximately obey normal distributions. Find the mean and variance of each of the three normal distributions in terms of p, n_1, and n_2.

The contingency table in Table 1 shows the result of a random sampling survey conducted to study the difference of the penetration of a particular product in area A and B. Here, penetration is the proportion of a population having the product. A continuity correction does not need to be considered in the statistical tests below.

Q.4 Suppose n_A and n_B are large enough. By introducing a test statistic Z that approximately obeys the standard normal distribution, explain a method to test the significance of the difference of the penetration in area A and B. In your explanation, give the realization of Z using the mathematical symbols in Table 1.

Q.5 Perform the test answered in Q.4 when $a = 100, b = 400, c = 150, d = 350$, and explain the test result under the significance level 5%. Here, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ is assumed.

Q.6 Compute the value of the χ^2 statistic in the sampling survey in Table 1 using the mathematical symbols in the table. Then, answer with the reason whether the test answered in Q.4 and the χ^2 test for independence with the computed χ^2 value yield the same test results or not.

Table 1: The result of a sampling survey in area A and B (unit: the number of people).

Area \ Product ownership	Has	Does not have	Total
A	a	b	n_A
B	c	d	n_B
Total	m_1	m_0	n