科目
数学

【数学】
問題はこのページのみです。

1. 関数 $f(t)$ および $g(t)$ について，$t<0$ で $f(t)=0$，$g(t)=0$ である。また，関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ は次式で定義される。

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

以下の問に答えよ。断りのない限り，導出過程を含めて記述すること。e は自然対数の底とする。また，$a>0$ である。(300 点)

1) 以下の関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。答えのみでよい。

(i) $f(t)=e^{-at}$

(ii) $f(t)=1$

表 1.1　ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$s^2+6s+9+16$
$(s+3)(s+1)$

2) 以下の式が成り立つことを示せ。

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$$

s^2+4s+3

3) 次の関数 $F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求めよ。表 1.1のラプラス変換表を用いてもよい。

$$F(s)=\frac{2s+22}{s^2+6s+25}$$

$36-4\cdot 25$　64　$8j$

4) $\frac{df(t)}{dt}$ のラプラス変換は，$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$ で与えられる。以下の微分方程式の解 $f(t)$ を，ラプラス変換を用いて求めよ。ただし，$f(0)=2$ とする。

$36-100$

$$\frac{df(t)}{dt}+f(t)=e^{-2t}$$

64

5) 以下の連立微分方程式の解 $f(t)$ および $g(t)$ を，ラプラス変換を用いて求めよ。ただし，$f(0)=1$，$g(0)=1$ とする。

$$\frac{df(t)}{dt}+\frac{dg(t)}{dt}+f(t)+g(t)=e^{-2t}$$

$$2\frac{df(t)}{dt}+\frac{dg(t)}{dt}+2f(t)+g(t)=2$$

科目
電気回路

1ページ目に【電気回路】，2ページ目に【量子力学/物性基礎】の問題が記載されています。選択科目となりますので，どちらか1科目を選択して解答してください。

1． 下図に示した回路について以下の問に答えよ。ただし，Lはインダクタンス，Cはキャパシタンス，Rおよび rは抵抗，vは電圧，iは電流，ω は角周波数，ω_0 は共振角周波数，j は虚数単位とする。なお、4)と 5）については導出過程を記述せよ。(200 点)

1) 図 1.1 の回路の両端 ab に印加する電圧を v とする。電流 i をv, L, C, R, ω, j を用いて表せ。

2) 図 1.1 の回路の両端 ab のインピーダンス Z および共振角周波数 ω_0を求めよ。Zについては以下の式の空欄部を解答すること。

$$Z = \frac{R}{j\boxed{\qquad\qquad}+1}$$

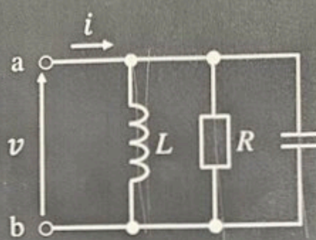


図 1.1

3) $Q = \omega_0 CR$として，2)で求めたインピーダンス Z をQ, R, ω, ω_0, j を用いて表せ。

4) 3)で求めたインピーダンスの絶対値 $|Z|$ が角周波数 ω_1およびω_2 において $\frac{R}{\sqrt{2}}$ となった。ω_1とω_2の積 $\omega_1\omega_2$ を ω_0 を用いて表せ。ただし，$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$とする。

5) 図 1.2 の回路において $r \ll \omega L$ の場合，図 1.1 の回路に近似的に変換できる。この場合のR を r, ω, L を用いて表せ。

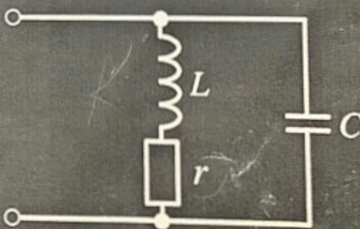


図 1.2

科目
電磁気学

【電磁気学】
問題はこのページのみです。

1．図 1.1 のように，真空中に半径 a の円柱導体の外側を，内半径 $3a$，外半径 $4a$ の共軸の円筒導体で囲った同軸ケーブルがある。導体はすべて完全導体である。同軸ケーブルの長さ L は半径 a に比べて十分長いものとし，端部効果は無視できる。軸の中心からの距離を r，真空の誘電率を ε_0 として，以下の問に答えよ。(300 点)

(A) 円柱導体に電荷 Q_1 $(Q_1 > 0)$を，円筒導体に電荷 Q_2 $(Q_2 > Q_1 > 0)$を与えた。

1) $0 \le r < a$，$a < r < 3a$，$3a < r < 4a$，$4a < r$ における電界の大きさ $E(r)$をそれぞれ求めよ。答えのみ記載すればよい。

2) $0 \le r \le a$，$a \le r \le 3a$，$3a \le r \le 4a$，$4a \le r$における電位分布 $V(r)$をそれぞれ求めよ。ただし，$r = 4a$ を電位の基準 $(V(4a) = 0)$ とする。答えのみ記載すればよい。

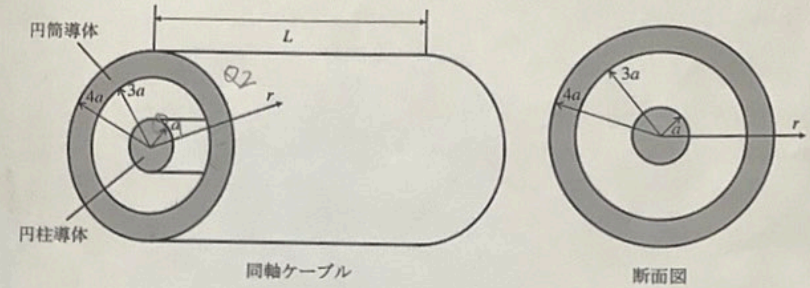


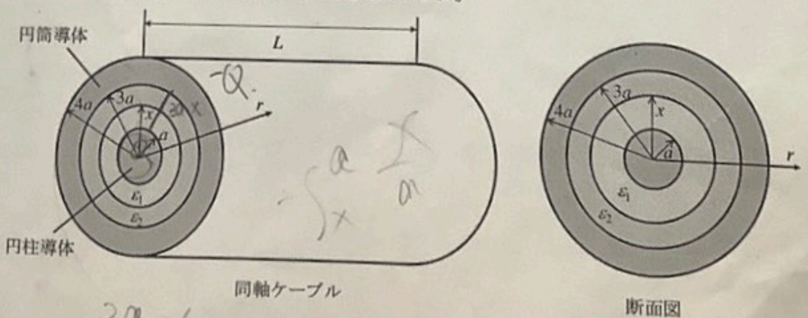
図 1.1

(B) 図 1.1 の円柱導体と円筒導体の間を，図 1.2 に示すように，半径 $r = x$ $(a < x < 3a)$ の円筒面を境にして，内側に誘電率 ε_1，外側に誘電率 ε_2 $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > \varepsilon_0)$ の誘電体で充填した。円柱導体に電荷 Q $(Q > 0)$を，円筒導体に電荷 $-Q$を与えた。以下の問に導出過程も含めて答えよ。

3) 円柱導体と円筒導体からなるコンデンサのキャパシタンスを求めよ。

4) 円柱導体と円筒導体からなるコンデンサが蓄えている静電エネルギーを求めよ。

5) 仮想変位の原理を用いて，2 つの誘電体の境界面 $(r = x)$ にはたらく単位面積あたりの力を求め，その大きさと向きを答えよ。



3a x

図 1.2