平成30年度　問題１５ 電磁気学Ｉ　解答例

(1)　導線上の電荷の線密度λは$\lambda = \dfrac{Q}{2L}$

(2)　導線上の点$(0,0,z')$ $(-L \le z' \le L)$の位置にある微小電荷要素$dQ = \lambda dz'$が点$\mathrm{P}(\rho,\phi,0)$につくる電位dVは

$$dV = \frac{\lambda dz'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z'^2+\rho^2}}$$

よって，全分布電荷による電位は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-L}^{L}\frac{\lambda dz'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z'^2+\rho^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{z'^2+\rho^2}} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{z'^2+\rho^2}} \qquad (t = z' + \sqrt{z'^2+\rho^2}\text{とおく}) \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\rho}^{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}\frac{dt}{t} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}{\rho}
\end{aligned}$$

従って，$\lambda = \dfrac{Q}{2L}$を代入して

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}{\rho}$$

また，この導線の電位V_0は，太さの無視できる導線の断面半径をa（$a \ll L$）とおくと，$\rho = a$とおいて

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{L+\sqrt{L^2+a^2}}{a}$$

と表されるので，導線の静電容量Cは

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\log\left\{\left(L+\sqrt{L^2+a^2}\right)/a\right\}}$$

で与えられる．$a \to 0$とすると，$V_0 \to 0$となり，Cの値は無限大に近づく．

(3)　電界は$\boldsymbol{E} = -\nabla V$より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}\frac{\rho}{\sqrt{L^2+\rho^2}} - \frac{1}{\rho}\right) \\
&= -\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{\sqrt{L^2+\rho^2}-L}{\rho^2}\frac{\rho}{\sqrt{L^2+\rho^2}} - \frac{1}{\rho}\right) \\
&= -\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L\rho}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+\rho^2}} - 1\right). \\
&= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \rho\sqrt{L^2+\rho^2}}
\end{aligned}$$

（別解）導線上 $z'\hat{\boldsymbol{z}}$ $(-L \le z' \le L)$ の位置にある微小電荷要素 $dQ = \lambda dz'$ が $\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$ の点 P につくる電界ベクトル $d\boldsymbol{E}$ は

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda dz'(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - z'\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0|\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - z'\hat{\boldsymbol{z}}|^3} = \frac{\lambda dz'(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - z'\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

ゆえに，全分布電荷による電界は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \int_{-L}^{L} \frac{\lambda dz'(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - z'\hat{\boldsymbol{z}})}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\int_{-L}^{L} \frac{\lambda\rho dz'}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} + \hat{\boldsymbol{z}}\int_{-L}^{L} \frac{\lambda z' dz'}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

被積分関数の偶奇性を考慮すると z 成分はゼロとなる．よって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\int_{0}^{L} \frac{\lambda\rho dz'}{2\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\lambda\rho}{2\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\lambda\rho}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right]_0^L \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0\rho\sqrt{\rho^2 + L^2}}\end{aligned}$$

従って，$\lambda = \dfrac{Q}{2L}$ を代入して

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\rho\sqrt{\rho^2 + L^2}}$$

(4) 図 A1，図 A2 に正方形ループ ABCD と電界の様子を示す．なお，図 A2 の E_0 は辺 AB の線電荷が点 P につくる電界で，E_{0z} はその z 成分である．

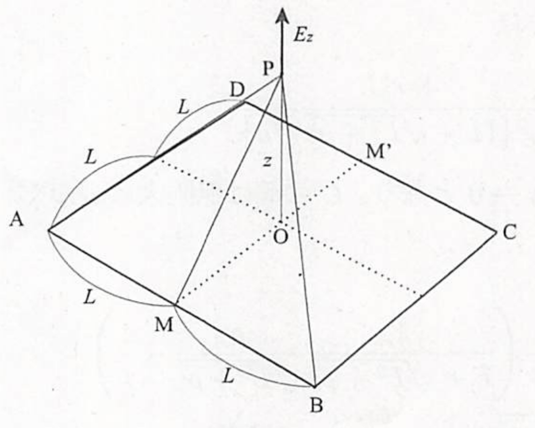

図 A1

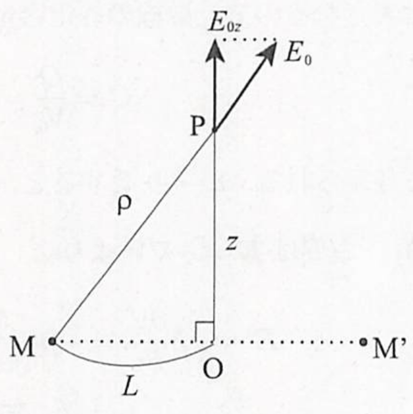

図 A2

図 A2 において，以下の関係が成り立つ．

$$\overline{\mathrm{PO}} = z, \quad \overline{\mathrm{MO}} = L, \quad \overline{\mathrm{PM}} = \rho = \sqrt{z^2 + L^2}$$

$$\frac{E_{0z}}{E_0} = \frac{\overline{\mathrm{PO}}}{\overline{\mathrm{PM}}} = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + L^2}}$$

点Pにおける電界は，正方形ループの4辺を構成する長さ $2L$ の線電荷による電界の重ね合せとなる．重ね合せの際，点Pにおける電界は x, y 成分が打ち消され，z 成分のみとなる．1辺当たりの電荷が $Q/4$ であることを考慮すると，求める電界成分 E_z は(3)の結果を用いて次式のように表される．

$$
\begin{aligned}
E_z = 4E_{0z} &= 4 \cdot \frac{Q/4}{4\pi\varepsilon_0 \rho \sqrt{L^2+\rho^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}} \\
&= \frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}}
\end{aligned}
$$

従って，空欄(a)は L^2，空欄(b)は $2L^2$ である．

（別解）

4辺の線電荷が作る電位 V を重ね合せによって求め，$E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$ から求めても良い．すなわち，

$$
V = 4\frac{Q/4}{4\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{L+\sqrt{L^2+\rho^2}}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{z^2+L^2}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \rho\sqrt{L^2+\rho^2}}\cdot\frac{z}{\rho} \\
&= \frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}}
\end{aligned}
$$

(5)

E_z の対数（自然対数）をとる．

$$
\begin{aligned}
\log E_z &= C + \log z - \log(z^2+L^2) - \frac{1}{2}\log(z^2+2L^2) \quad (C\text{: 定数}) \\
\frac{\partial}{\partial z}\log E_z &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2+L^2}2z - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+2L^2}2z \\
&= \frac{(z^2+L^2)(z^2+2L^2) - 2z^2(z^2+2L^2) - z^2(z^2+L^2)}{z(z^2+L^2)(z^2+2L^2)} \\
&= -\frac{2(z^4+L^2z^2-L^4)}{z(z^2+L^2)(z^2+2L^2)} = 0
\end{aligned}
$$

$$
z^2 = \frac{-L^2+\sqrt{L^4+4L^4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}L^2 = z_0^2
$$

ゆえに

$$
z_0/L = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}
$$

Ⅱ【解答】

（１）アンペアの法則より$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1$より磁束密度$B$は

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

（２）r方向の微小長さdrと$2b$の幅の長方形と鎖交する磁束φは

$$\varphi = B \cdot 2b \cdot dr = \frac{\mu_0 b I_1}{\pi r} dr$$

長方形コイルと鎖交する磁束φは

$$\varphi = \int_d^{d+a} d\varphi = \frac{\mu_0 b I_1}{\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 b I_1}{\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

（３）相互インダクタンスMは

$$M = \frac{\varphi}{I_1} = \frac{\mu_0 b}{\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

（４）コイル面の法線が磁界とθの角をなすとき鎖交磁束は

$$\varphi = \frac{\mu_0 I_1}{\pi} \ln \frac{d+a}{d} \cdot b \cos\theta, \quad \theta = \omega t$$

起電力eはファラデーの法則より

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi} \ln \frac{d+a}{d} \cdot \sin \omega t$$

（５）長方形コイルに流れる電流は

$$I = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi R} \ln \frac{d+a}{d} \cdot \sin \omega t$$

消費される電気量Wは

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I^2 R dt = R\left(\frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi R} \ln \frac{d+a}{d}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t \, dt$$

$$= R\left(\frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi R} \ln \frac{d+a}{d}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt$$

$$= R\left(\frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi R} \ln \frac{d+a}{d}\right)^2 \left(\left[\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \left[\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}\right) = \frac{\pi R}{2\omega}\left(\frac{\mu_0 b \omega I_1}{\pi R} \ln \frac{d+a}{d}\right)^2$$

（６）ADは$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot 2b$の引力を受け、BCは$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \cdot 2b$の斥力を受ける

ABとDCにはそれぞれ上向きと下向きに等しい力が加わり打ち消しあう

よって、コイルには引力が働き、その大きさFは

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot 2b - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \cdot 2b = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{\pi} \frac{a}{d(d+a)}$$