

# 平成 29 年度大学院博士前期課程入学試験

## 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

### 専門科目試験問題 (情報通信工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

#### 【注 意 事 項】

1. 問題用紙はこの表紙や白紙を除いて18ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「通信方式」、「通信ネットワーク」、「光・電波工学」、「情報理論」、「信号処理」、「論理回路と計算機システム」、「データ構造とアルゴリズム」、及び、「制御工学」の全部で8題あり、この順番に綴じられている。このうち、3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【通信方式】解答は、赤色の解答用紙に記入すること。

FM 変調された信号が受信される際の波形は、

$$A \cos\{2\pi f_c t + \varphi_d(t)\} \quad (1)$$

で与えられるものとする。ただし  $\varphi_d(t)$  は変調信号によって変化する位相変動であり、

$$\varphi_d(t) = 2\pi \Delta f \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $A$  は受信信号の振幅、 $f_c$  は搬送周波数、 $t$  は時刻、 $\Delta f$  は FM 変調処理における最大周波数偏移、 $s(t)$  は周波数が  $f_0$  の正弦波で構成される変調信号であり、 $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  で与えられる。

受信機では、受信信号に対して  $n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$  で与えられる雑音加わるものとする。ここで雑音は平均値 0 の加法性白色ガウス雑音であり、 $E[n^2(t)] = E[n_I^2(t)] = E[n_Q^2(t)] = N$  が満たされるものとする。また  $E[\cdot]$  は期待値である。

雑音は、中心周波数  $f_c$ 、 $B = 2(m_f + 1)f_0$  の帯域幅を有する理想帯域通過フィルタで帯域制限されており、雑音の電力スペクトル密度は、理想帯域通過フィルタの通過帯域において、どの周波数においても一定の値を有しているものとする。ただし  $m_f$  は FM 変調の変調指数である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (i) 式(1)で規定される信号に雑音加わった受信信号を式で表せ。またその際の受信信号電力、雑音電力それぞれを示した上で、それらの比 ( $\gamma_{\text{In}} = \text{受信信号電力} / \text{雑音電力}$ ) を示せ。
- (ii) 検波器では、受信信号の位相成分を微分することで変調信号を再生することとする。検波器入力における雑音の電力スペクトル密度を求めよ。
- (iii) 検波器において、 $\gamma_{\text{In}}$  が十分大きいという前提の近似を適用すると、検波された信号波形はどのような式で表されるかを説明せよ。
- (iv) 検波後の信号電力と雑音電力の比  $\gamma_{\text{Out}}$  を、変調指数  $m_f$  と  $\gamma_{\text{In}}$  の関数として求めよ。ただし  $m_f$  は

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_0} \text{で与えられるものとする。}$$

専門用語の英訳

FM 変調	frequency modulation
位相	phase
振幅	amplitude
搬送周波数	carrier frequency
最大周波数偏移	maximum frequency deviation
受信機	receiver
加法性白色ガウス雑音	additive white Gaussian noise
帯域幅	bandwidth
理想帯域通過フィルタ	ideal bandpass filter
変調指数	modulation index
検波器	detector
微分する	differentiate

【通信ネットワーク】 解答は、黄色の解答用紙に記入すること。

情報通信ネットワークでは、ルータ等の中継ノードの性能を評価するために待ち行列システムが用いられる場合がある。

単一の入力ポート，単一の出力ポート，および単一のバッファを備えた中継ノードについて考える．入力ポートより，ポアソン過程に従いパケットが中継ノードに到着する．中継ノードに到着したパケットはバッファに蓄積され，FIFO (First-In, First-Out) 規律に従い，バッファの先頭パケットより 1 パケットずつ出力ポートから送出される．あるパケットの 1 ビット目が出力ポートより送出されてから最後のビットが送出されるまでの時間は平均  $1/\mu$  ( $\mu > 0$ ) の指数分布に従うと仮定する．バッファサイズは  $K$  であるとし，送出途中のパケットを含めて  $K$  個のパケットを蓄積できるものとする．送出途中のパケットを含めて  $n$  個 ( $0 \leq n \leq K$ ) のパケットが中継ノードに存在するとき，中継ノードは状態  $n$  であるということにする．中継ノードが状態  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, K$ ) である定常状態確率を  $p_n$  とする．

以下の問いに答えよ．

問い (i), (ii) では， $K$  を無限大とする．

(i) この中継ノードを表す待ち行列システムをケンドールの記号を用いて示せ．

(ii) パケットの到着率を単位時間あたりに中継ノードに到着する平均パケット数とする．到着率が  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) であるとき， $p_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を  $\lambda$ ,  $\mu$  を用いて表せ．ただし， $\lambda/\mu < 1$  と仮定する．

以下の問いでは， $K$  を有限値とする．

(iii) 中継ノードに大量のパケットが到着するような状況において，エンドホストから送出されるパケット数を減らす制御が行われることがある．このようなパケットの送信制御を一般に何というか．

(iv)  $L$  を  $0 < L < K$  となる整数とする．中継ノードは状態  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, L-1$ ) であるとき，パケットの到着率は  $\lambda$  とする．一方，中継ノードが状態  $n$  ( $n = L, L+1, \dots, K$ ) であるとき，パケットの到着率は  $\lambda/2$  であるとする．このとき，中継ノードを表す待ち行列システムの状態遷移速度図を示せ．

(v) 問い (iv) の待ち行列システムにおいて， $p_n$  ( $n = 0, 1, \dots, K$ ) に関する平衡方程式を示せ．

(vi) 問い (iv) の待ち行列システムにおいて，定常状態確率  $p_0$  を求めよ．

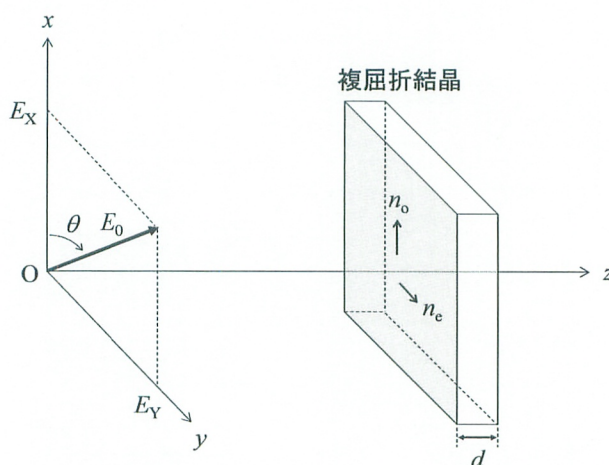
## 専門用語の英訳

中継ノード:	intermediate node
待ち行列システム:	queueing system
入力ポート:	input port
出力ポート:	output port
バッファ:	buffer
ポアソン過程:	Poisson process
パケット:	packet
指数分布:	exponential distribution
定常状態確率:	steady state probability
ケンドールの記号:	Kendall's notation
到着率:	arrival rate
送信制御:	transmission control
平衡方程式:	balance equation
状態遷移速度図:	state transition rate diagram

【光・電波工学】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること。

図に示すように、直角座標系  $(x, y, z)$  において、真空中を  $z$  方向に伝搬する光が、複屈折を有する結晶を透過する場合を考える。この結晶の主軸は  $x$  方向であり、結晶の  $x$  方向の屈折率は  $n_o$ 、 $y$  方向の屈折率は  $n_e$  である。ここでは、 $n_o > n_e$  とする。結晶端面は  $xy$  平面に平行かつ無限に広く、 $z$  方向の厚さは  $d$  である。結晶に入射される光は、真空中において波長が  $\lambda$  で電界の振幅の大きさが  $E_0$  の平面波であり、 $xy$  平面上において  $x$  軸に対して  $\theta$  だけ傾いた直線上で振動する電界成分のみを有する。結晶端面での反射は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

- (i) 結晶に入射される光の電界の  $x$  成分と  $y$  成分の振幅の大きさをそれぞれ  $E_X$  および  $E_Y$  とする。 $\theta$  を用いて、 $E_Y/E_X$  を表せ。
- (ii) 結晶透過後の光が、結晶の厚さ  $d$  によらず、ある直線上で振動する電界成分のみを有する平面波となる場合がある。このときの  $\theta$  を求めよ。
- (iii) 結晶を透過した後の光の電界の  $x$  成分と  $y$  成分の位相差を求めよ。
- (iv) 結晶透過後の光が、入射光の電界の振動方向  $\theta$  によらず、入射光と同様に  $\theta$  だけ傾いた直線上で振動する電界成分のみを有する平面波となる場合がある。このときの結晶の厚さ  $d$  を求めよ。
- (v) 次に、結晶を透過した後の光を偏光子に入射する。この偏光子では、 $xy$  平面上において  $x$  軸に対して  $\phi$  だけ傾いた直線上で振動する電界成分のみが透過される。今、偏光子の  $\phi$  を変化させても、偏光子出力光の強度が一定となった。この場合の結晶の厚さ  $d$  を求めよ。ここでは、光の強度は電界の振幅の大きさの 2 乗とする。すなわち、偏光子出力における光の電界の振幅の大きさを  $E_\phi$  とすると、その強度は  $E_\phi^2$  である。
- (vi) 問い (v) において、偏光子出力光の強度を求めよ。



## 専門用語の英訳

複屈折 : birefringence

主軸 : principal axis

屈折率 : refractive index

平面波 : plane wave

波長 : wavelength

振幅 : amplitude

偏光子 : polarizer

強度 : intensity

【情報理論】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること。

1. 情報記号  $a \in \{0, 1\}$  が生起確率  $P(0) = 0.8$ ,  $P(1) = 0.2$  で送信され,  $p = 0.3$  の確率で誤って受信される二元対称通信路を想定する. このとき, 受信記号  $b \in \{0, 1\}$  に対し, 送信された情報記号を一意に定めることを復号と呼ぶ. ここでは, 記号  $b$  が受信されたとき,  $P(a|b)$  を最大とする記号  $a$  が送信されたと判定する最大事後確率復号則を考える. 以下の問いに答えよ.
  - (i) 送信された記号が受信記号と異なる確率 (受信記号の誤り率) を求めよ.
  - (ii) 最大事後確率復号則を用いて受信記号  $b \in \{0, 1\}$  を復号した記号を求めよ. またそのときの復号誤り率を求めよ.
  - (iii) 問い(i)で求めた受信記号の誤り率と, 問い(ii)で求めた復号誤り率の大小を比較し, そのようになる理由を説明せよ.
2. 図 1 に示す加法的二元通信路について, 以下の問いに答えよ. 解答に際して対数の計算が必要となる場合は,  $\log_2 3 = 1.58$ ,  $\log_2 5 = 2.32$ ,  $\log_2 7 = 2.81$  を利用すること.
  - (i) 誤り源が, 図 2 に示す単純マルコフモデルで表されるとき, 通信路容量を求めよ. ただし図において,  $s_0, s_1$  は誤り源の状態を表し, 各矢印に付けられている記号  $o/p_T$  はその遷移に伴う出力記号  $o$  とその遷移が起きる確率  $p_T$  を表す.
  - (ii) 誤り源が, 問い(i)の誤り源と同じ生起確率でランダムに 1 を出力するとき, 通信路容量を求めよ.
  - (iii) 問い(i), (ii)で求めた通信路容量の大小を比較し, そのようになる理由を説明せよ.

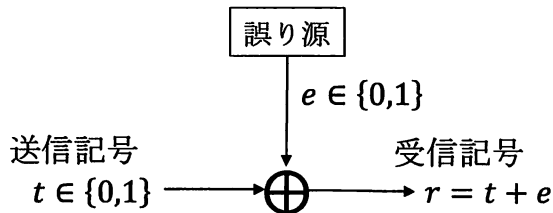


図 1: 加法的二元通信路

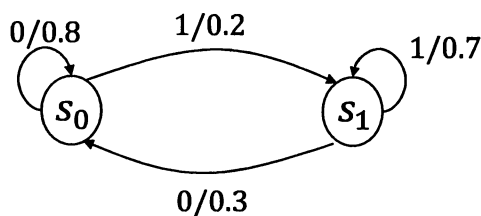


図 2: 単純マルコフモデル

3. 情報語長  $k$  の情報語  $\mathbf{x} = (x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_0)$  を符号化し, 誤り訂正を可能にした符号語長  $n$  の符号語  $\mathbf{w} = (w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_0)$  (ただし,  $n > k$ ) を生成する誤り訂正符号について, 以下の問いに答えよ. ただし,  $\mathbf{w}$  の多項式表現は  $W(y) = w_{n-1}y^{n-1} + w_{n-2}y^{n-2} + \dots + w_0$  に対応し,  $(w_{n-k-1}, w_{n-k-2}, \dots, w_0)$  は検査記号である.
  - (i)  $q$  個の元からなる有限体 (ガロア体とも呼ぶ) を  $GF(q)$  と表す.  $GF(2)$  上の 3 次多項式を  $f(y) = y^3 + y + 1$  とする. このとき,  $f(y)$  が  $GF(2)$  上の既約多項式になることを示せ.
  - (ii) 問い(i)の  $GF(2)$  上の 3 次多項式  $f(y) = y^3 + y + 1$  の根を  $\alpha$  とする. すなわち,  $f(\alpha) = 0$  とする. このとき,  $\alpha$  が  $GF(2^3)$  の原始根となることを示せ.  $\alpha$  が原始根とは  $GF(2^3)$  上で  $\alpha^\lambda = 1$  となる最小の  $\lambda$  が 7 であることをいう.
  - (iii) 問い(i)の  $GF(2)$  上の 3 次多項式  $f(y) = y^3 + y + 1$  を生成多項式とする巡回符号を構築すると,  $f(y)$  が原始多項式であることから, 情報語長 4, 符号語長 7 の単一誤り訂正符号となる. このとき, 情

報語 $\mathbf{x} = (1,1,0,0)$ の符号語を求めよ.

- (iv) 問(i)の $GF(2)$ 上の3次多項式 $f(y) = y^3 + y + 1$ を生成多項式とする巡回符号を考える. このとき, 受信語 $\mathbf{w}' = (1,0,1,1,0,0,1)$ に誤りがあればその位置を推定し, 送信された元の符号語 $\mathbf{w}$ を示せ.

#### 専門用語の英訳

情報記号	information symbol
生起確率	occurrence probability
二元対称通信路	binary symmetric channel
最大事後確率復号則	maximum a posteriori probability decoding rule
誤り率	error rate
加法的二元通信路	additive binary channel
誤り源	error source
単純マルコフモデル	first order Markov model
通信路容量	channel capacity
状態	state
遷移	transition
情報語長	information word length
情報語	information word
符号化	coding
誤り訂正	error correction
符号語長	code word length
符号語	code word
誤り訂正符号	error correcting code
多項式表現	polynomial representation
検査記号	check symbol
有限体	finite field
ガロア体	Galois field
既約多項式	irreducible polynomial
根	root
原始根	primitive root
生成多項式	generator polynomial
巡回符号	cyclic code
原始多項式	primitive polynomial
単一誤り訂正符号	single error correcting code
受信語	received word



【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

基本周期  $T_0$  [秒] の周期的な連続時間信号  $x(t)$  ( $t$  は時間を表す実数) を入力とし、 $x(t)$  の一部の周波数成分のみを抽出し復元した信号  $x'(t)$  を出力する信号処理システムを次のステップで設計する。ただし、 $x(t)$  の最大周波数は  $f_{\max}$  [Hz] とする。また、この信号処理システムに対する入出力は実数の値をとる信号とする。

ステップ 1  $x(t)$  からその一周期分を取り出し、これをサンプリング周期  $T_s$  [秒] (ただし  $T_0$  が  $T_s$  の整数倍となるように定める) でサンプリングすることにより、 $N$  点のデータからなる離散時間信号  $x[n] = x(nT_s)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) を得る。

ステップ 2  $x[n]$  に対し  $N$  点離散フーリエ変換 ( $N$  点 DFT) を適用し、DFT 係数  $X[k]$  を

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

として求める (ただし  $j^2 = -1$ )。

ステップ 3  $X[k]$  に「一部の周波数成分のみを抽出する処理」を加え、その値を  $X'[k]$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) に変更する。

ステップ 4  $X'[k]$  に対し  $N$  点逆離散フーリエ変換 ( $N$  点 IDFT) を適用し、離散時間信号  $x'[n]$  を

$$x'[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X'[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

として得る。

ステップ 5  $x'[n]$  を周期的拡張したのち、連続時間信号  $x'(t)$  を復元し出力する。

以上の信号処理システムについて、以下の問いに答えよ。

- (i) ステップ 1 において、サンプリング定理に従って  $x[n]$  から  $x(t)$  ( $0 \leq t < T_0$ ) が完全に復元できるようにサンプリングするために  $T_s$  が満たすべき条件を数式で表せ。

これ以降の問いでは、問い (i) の条件が満たされるように  $T_s$  を設定するものとする。

- (ii) ステップ 2 において、 $k$  番目の係数  $X[k]$  をサンプリング前の連続時間信号  $x(t)$  における  $f_k$  [Hz] の周波数成分に対応させるとき、 $f_k$  を  $k$ ,  $T_s$ ,  $T_0$ ,  $N$  から必要なものを用いて表せ。

- (iii) ステップ 4 において、「 $x'[n]$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) が実数」となるための必要十分条件は「 $X'[0]$  が実数」かつ「 $X'[N-k] = \overline{X'[k]}$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ )」であることを証明せよ ( $\bar{z}$  は複素数  $z$  の複素共役)。

- (iv) ステップ 3 において、 $a$  [Hz] 以上  $b$  [Hz] 以下の範囲の周波数成分 ( $0 < a < b < f_{\max}$ ) のみを抽出したいとき、 $X[k]$  をどのように変更して  $X'[k]$  を生成すればよいか。問い (ii) および問い (iii) の内容を踏まえて答えよ。

- (v) ステップ 5 は理論上どのような操作により実現されるか、簡単に述べよ。

専門用語の英訳	
基本周期	fundamental period
連続時間信号	continuous-time signal
周波数成分	frequency component
最大周波数	maximum frequency
サンプリング周期	sampling period
サンプリング	sampling
離散時間信号	discrete-time signal
$N$ 点離散フーリエ変換	$N$ -point discrete Fourier transform ( $N$ -point DFT)
DFT 係数	DFT coefficient
$N$ 点逆離散フーリエ変換	$N$ -point inverse discrete Fourier transform ( $N$ -point IDFT)
周期的拡張	periodic expansion
サンプリング定理	sampling theorem
必要十分条件	necessary and sufficient condition
複素共役	complex conjugate

【論理回路と計算機システム】 解答は、水色の解答用紙に記入すること。

1. 2つの2進数整数の加算・減算を行う回路を構成することを考える。以下の問いに答えよ。ただし、回路図を答える問いにおいて論理ゲートを表す際には、図1に示した記号を用いること。

- (i) 下位桁からの桁上げ入力がない場合の2進数1ビットの加算を行う半加算器の回路を考える。この半加算器への入力を $x$ および $y$ ，出力するそれらの和の下位桁を $s$ ，上位桁への桁上げ出力を $c$ としたとき，この半加算器の真理値表，および論理式の最小積和形を示せ。
- (ii) 問い(i)の半加算器の回路を2つ用いて，下位桁からの桁上げ入力を含める2進数1ビットの加算を行う全加算器の回路を構成することを考える。この全加算器は図2に示すように，3入力2出力の回路となる。この全加算器への加算すべき入力を $x$ および $y$ ，下位桁からの桁上げ入力を $z$ ，出力するそれらの和の下位桁を $s$ ，上位桁への桁上げ出力を $c$ とする。このとき，この全加算器の回路図を示せ。また，この回路図の中で半加算器の回路に相当する部分を点線で囲んで示せ。

ただし，利用可能な論理ゲートは論理和 (OR)，論理積 (AND) および排他的論理和 (EXOR) とし，各ゲートへの入力数は2とする。なお，解となる回路が複数存在する場合には，その1つを示せば良い。

- (iii) 問い(ii)の全加算器を用いて，2つの4ビットの2進数整数  $X = (x_3 x_2 x_1 x_0)$  と  $Y = (y_3 y_2 y_1 y_0)$  の加算・減算を行う回路を構成することを考える。ここで， $x_3$  と  $y_3$  は符号ビットであり，負の数は2の補数で表現する。制御入力  $w = 0$  のとき  $X$  と  $Y$  を加算した結果を出力し， $w = 1$  のとき  $X$  から  $Y$  を減算した結果を出力するとする。また，加算・減算の結果の出力は  $S = (s_3 s_2 s_1 s_0)$ ，最上位桁からの桁上げ出力は  $d$  で表し，加算・減算の結果がこの4ビットで表せる範囲を超える場合については考えなくてよい。なお，2進数表現においては，添え字が小さい方を下位桁とする。このとき，この加算・減算を行う回路の回路図を示せ。

ただし，問い(ii)で設計した全加算器の回路は図2で示した記号を用いて表し，それ以外で利用可能な論理ゲートは論理和 (OR)，論理積 (AND)，論理否定 (NOT) および排他的論理和 (EXOR) とする。なお，解となる回路が複数存在する場合には，その1つを示せば良い。

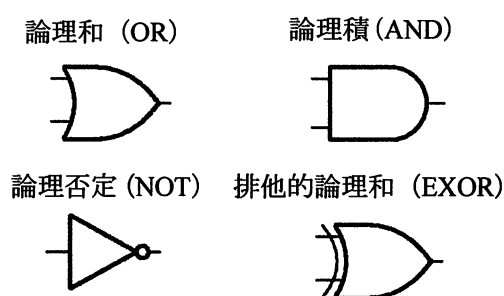


図1 論理ゲートの凡例

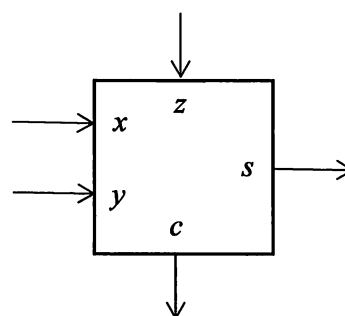


図2 全加算器の記号

2. 計算機の記憶装置には、その速度や容量、コストに応じていくつかの種類があり、これらを考慮した記憶階層方式が採られている。ここでは記憶装置として、主記憶、キャッシュメモリ、補助記憶（ディスク）の3つを考える。キャッシュメモリは、CPUと主記憶との間のアクセスをより高速化するのに用いられる。
- (i) 仮想記憶方式について、以下の文中の①と②にあてはまるものを、主記憶、キャッシュメモリ、補助記憶（ディスク）のうちから選んで答えよ。ただし同じ数字の場所には同じ用語が入る。  
仮想記憶方式は、限られた ① 容量で大規模なプログラムを実行するための方式である。この方式では、処理の実行に必要な情報を随時 ② から ① に移すことで、実際の ① 容量よりも大きい仮想アドレス空間が存在するようにプログラムを実行できる。
- (ii) キャッシュメモリが有効になる前提として、参照の局所性がある。これは時間局所性と空間局所性からなるが、これらについてそれぞれ説明せよ。また、プログラム中でこれらが有効となる状況について、それぞれ例を挙げよ。
- (iii) キャッシュメモリブロックサイズを大きくした場合の利点と欠点を述べよ。ただし、キャッシュメモリの総容量は一定とする。
- (iv) キャッシュメモリへのアクセスに  $p$  ナノ秒、主記憶へのアクセスに  $q$  ナノ秒かかるとする。キャッシュのヒット率を  $\alpha$  とした場合、平均主記憶アクセス時間を求める式を示せ。
- (v) 問い(iv)の状況で、CPUから主記憶へのアクセス時にさらに割合  $\beta$  でページフォルトが起こるとし、その場合ディスクからCPUにデータを読み出すのに  $r$  ナノ秒かかるとする。 $p = 10$ ,  $q = 10p$ ,  $r = 1000q$ ,  $\alpha = 0.95$ ,  $\beta = 0.001$ としたときの平均主記憶アクセス時間を求めよ。

## 専門用語の英訳

2進数整数	binary integer number
加算	addition
減算	subtraction
回路図	circuit diagram
論理ゲート	logic gate
半加算器	half adder
真理値表	truth table
論理式	logical formula
最小積和形	minimum sum-of-products form
全加算器	full adder
排他的論理和	exclusive disjunction (exclusive OR)
記憶装置	memory device
記憶階層方式	memory hierarchy
主記憶	main memory
キャッシュメモリ	cache memory
補助記憶	auxiliary memory
ディスク	disk
仮想記憶	virtual memory
仮想アドレス空間	virtual address space
参照の局所性	locality of references
時間局所性	temporal locality
空間局所性	spatial locality
ブロックサイズ	block size
ヒット率	hit ratio
平均主記憶アクセス時間	average memory access time
ページフォルト	page fault

【データ構造とアルゴリズム】 解答は、青色の解答用紙に記入すること。

1. 図 1 は、データ構造の一つであるヒープの例である。本ヒープでは、「各節点に格納された要素の値は、その子節点に格納された要素の値以上である」という性質を満たしている。ただし、2 分木の各節点内の数字は格納された要素の値を、節点右下の数字は節点番号を表すものとする。配列を用いてヒープを実現し、さらに最大要素（ヒープ中で最大の値を持つ要素）を取り出しヒープから削除する処理を行うためのプログラム A について、次ページの問いに答えよ。なお、プログラム A は C 言語で書かれている。

プログラム A

```
#define N 10

/* ヒープからの最大要素の削除 */
int delete_max(int *heap, int n) {
    int i, j, tmp, x;
    x = heap[0];
    heap[0] = heap[n-1]; // 配列の最後尾の節点の要素を、配列の先頭へ挿入
    n--;                // 格納要素数を1つ減少
    i = 0;
    while ( i*2+1 < n ) {
        j = i*2+1;
        if ( j<n-1 && heap[j]<heap[j+1] )
            j++;
        if ( heap[i]<=heap[j] ) {
            tmp = heap[1];
            heap[2] = heap[3];
            heap[j] = tmp;
        }
        i = j;
    }
    return x;
}

/* ヒープへ要素 x を格納 */
void insert_heap(int *heap, int x, int n) {
    int i, j;
    heap[n-1] = x;
    i = n-1;
    j = 4; // 節点iの親節点を表す節点番号。小数点以下は切り捨てられる点に注意。
    while ( i>0 && x>heap[j] ) {
        heap[i] = heap[j];
        i = j;
        j = 4; // 節点iの親節点を表す節点番号。小数点以下は切り捨てられる点に注意
    }
    heap[i] = x;
}

int main() {
    int i, x;
    int n = 0;
    int heap[N];
    int data[N] = {34,87,57,4,17,14,71,59,22,80}; // ヒープに格納する要素の配列
    for (i=0; i<N; i++) {
        n++;
        insert_heap(heap, data[i], n);
    }
    x = delete_max(heap, n); // 最大要素の削除
    printf("%d", x);
    return 0;
}
```

- (i) プログラム中のコメント文を参考にして、プログラムが正しく動くように空欄 1 ～ 4 を埋めよ。
- (ii) プログラム実行後のヒープを表す 2 分木を、図 1 の左図と同様の形式で図示せよ。
- (iii) プログラム A は、データ構造としてヒープを用いて、最大要素を取り出しヒープから削除する処理を行うものである。しかし、ヒープを用いずにデータを配列のみを用いて保持しておき、要素の取り出しの指令がきたときに、配列を探索して最大要素を見つけて取り出すようにする事も可能である。今回のような最大要素を取り出す処理を例に、配列のみを用いた場合と比べて、ヒープを用いることによる利点について説明せよ。

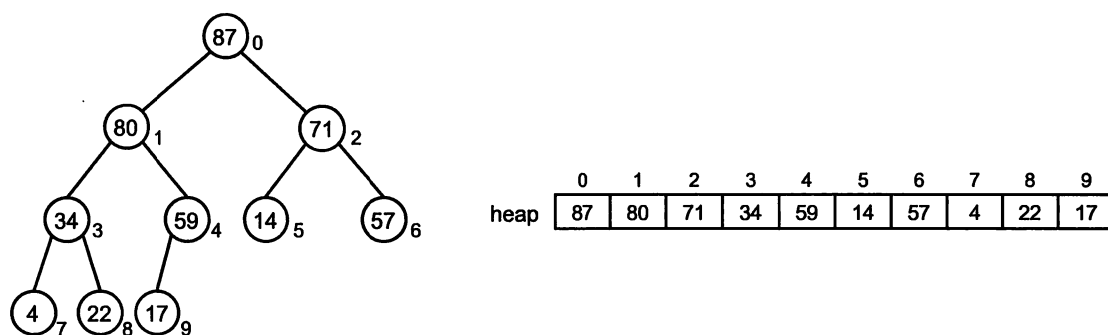


図 1 ヒープの構造 (左) とその配列表現 (右)

2. 図 2 のように、左から順に  $0, 1, \dots, 9$  のハッシュ値を位置番号として割り振った、10 個のセルからなる動的ハッシュ表を考える。表に格納する要素  $x$  はすべて正整数であるとし、要素が 1 度も格納されたことがないセルには 0、かつて存在した要素が削除済みであるセルには  $-1$  が格納されるものとする。要素  $x$  を追加する場合には、 $0, 1, \dots, 9$  の何れかのハッシュ値に変換するハッシュ関数  $hash(x)$  を用いて、 $hash(x)$  以上の位置番号ではじめて空である、すなわち 0 または  $-1$  が格納されているセルに  $x$  を格納する。この動的ハッシュ表について、以下の問いに答えよ。ただし、 $x \bmod 10$  は、整数  $x$  を 10 で割った剰余を表す。

ハッシュ値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				(a)		(b)	(c)			

図 2 動的ハッシュ表

- (i) ハッシュ関数  $hash(x) = x \bmod 10$  を用いて、全セルが 0 に初期化されたハッシュ表に、正整数からなる要素列  $2, 4, 7, 8, 12, 13$  をその先頭から順番に格納したとする。このとき、図中の (a), (b), (c) に格納された要素の値を答えよ。
- (ii) 問い (i) で作成した要素列  $2, 4, 7, 8, 12, 13$  が格納済みの動的ハッシュ表から、 $12, 13$  の値を持つ要素を探索し削除した。その後、この動的ハッシュ表に、ある任意の正整数の値を持つ要素が含まれるか否かを調べたい。この手順を説明せよ。
- (iii) 問い (ii) のように、要素列  $2, 4, 7, 8, 12, 13$  が格納済みの動的ハッシュ表から  $12, 13$  の値を持つ要素を探索し削除した後、問い (ii) で解答した手順に従って、ハッシュ表に  $13$  の値を持つ要素が含まれているかどうか探索するとき、参照されるハッシュ表内のすべての位置番号を挙げよ。
- (iv) 要素  $x$  が  $1, 2, \dots, 10$  の何れかの値を偏りなく取るものとするとき、2 つのハッシュ関数  $hash1(x) = x \bmod 10$  及び  $hash2(x) = x^2 \bmod 10$  の何れの使用がより適切であるか、その理由と共に述べよ。

## 専門用語の英訳

ヒープ	heap
節点	node
2 分木	binary tree
配列	array
ハッシュ値	hash value
動的ハッシュ表	dynamic hash table
ハッシュ関数	hash function
剰余	remainder of division



【制御工学】解答は、白色の解答用紙に記入すること。

以下の1.～3.に答えよ。

1. 伝達関数  $G(s)$  が次式で表される線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。ただし、 $a$  は実数値をとるパラメータである。

$$G(s) = \frac{s+3}{s^3+5s^2+8s+a+1}$$

- (i)  $a=3$  としたときのステップ応答を時間  $t$  の関数として表せ。
- (ii) この線形時不変システムが安定となるための  $a$  に関する必要十分条件を求めよ。
2. 図1のフィードバックシステムについて、以下の問いに答えよ。ただし、ゲイン  $K$  は正の実数値である。

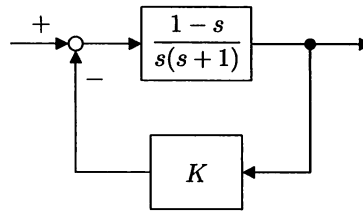


図1

- (i) フィードバックシステムのゲイン余裕が 10 dB となる  $K$  の値を求めよ。
- (ii) フィードバックシステムの位相余裕が  $30^\circ$  となる  $K$  の値を求めよ。

3. 以下の状態方程式と出力方程式で与えられる線形時不変システム  $\Sigma_1$  を考える.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{v}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

ただし,  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  は状態変数ベクトル,  $u(t)$  は入力変数,  $y(t)$  は出力変数,  $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$  は外乱ベクトルとする. また,  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  はそれぞれ次のように与えられている.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i)  $u(t)$  と  $y(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $U(s), Y(s)$  とする. 外乱がない場合, すなわち,  $\mathbf{v}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  となる場合の  $U(s)$  から  $Y(s)$  への伝達関数を求めよ.

(ii)  $r(t)$  を出力  $y(t)$  に対する目標値とする. システム  $\Sigma_1$  において,  $u(t)$  を次式で与えた.

$$u(t) = -\mathbf{f}\mathbf{x}(t) + kz(t)$$

ただし,  $z(t)$  は次を満たす変数である.

$$\frac{dz(t)}{dt} = r(t) - y(t)$$

また,  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$  であり,  $f_1, f_2, k$  は定数である. このとき,  $z(t)$  を状態変数として含む次の拡大システム  $\Sigma_2$  を考える.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f} & k\mathbf{b} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}$$

行列  $\hat{\mathbf{A}}$  の固有値が  $-1, -1+j, -1-j$  となるように,  $f_1, f_2, k$  を定めよ. ただし,  $j$  は虚数単位である.

(iii) 問 3. (ii) で求めた  $f_1, f_2, k$  の値を持つ拡大システム  $\Sigma_2$  に, ステップ状の目標値  $r(t) = r_0$  ( $t \geq 0$ ) を印加した. また, ステップ状の外乱ベクトル  $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}$  ( $t \geq 0$ ) が与えられているものとする. 変数  $z(t)$  の定常値  $z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$  を  $r_0, v_{10}, v_{20}$  を用いて表せ.

## 専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
安定	stable
ゲイン余裕	gain margin
位相余裕	phase margin
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数	input variable
出力変数	output variable
外乱ベクトル	disturbance vector
ラプラス変換	Laplace transform
目標値	reference
虚数単位	imaginary unit
定常値	steady state value