北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2021 年 8 月 19 日(木) 10:00～12:00

専門科目 1

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと．
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計（計時機能のみのもの）以外の所持品は置くことができない．ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない．
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと．
- 問題冊子は本表紙を含め7枚ある（2枚目は白紙）．試験開始後，問題冊子を確認し，不備（ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など）があれば試験監督員に申し出ること．試験終了後，問題冊子は回収しない．
- 解答用紙の枚数は2枚である．出題された4問から2問を選択して，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること．
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「□裏面を使用」をチェックのこと．
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること．受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと．
- 草案紙の枚数は2枚である．草案紙は回収しない．

（白　紙）

システム情報科学コース　専門科目 1

問1（線形代数） 以下の各設問に答えなさい．

1-1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ ならびに線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ について，次の(a)～(d)のそれぞれが成立するために必要十分な p,q,r に対する条件を求めなさい．ただし，p,q,r は実数，$\boldsymbol{I}_2$ は 2 次単位行列，$\mathbb{R}^4$ は 4 次元実ベクトル空間とする．

(a) $\det \boldsymbol{C} = 0$

(b) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_2$

(c) f の核の次元が 2

(d) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{I}_2$ を満たす実数 a,b,c の組が唯一存在する

1-2) 行列 $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & s \end{bmatrix}$（$s$ は実数）に関する，次の小問(a)，(b)に答えなさい．

(a) $s = -3$ として，$\boldsymbol{D}$ のすべての固有値と，各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求め，$\boldsymbol{D}$ を対角化しなさい．

(b) 任意の s に対して，$\boldsymbol{D}$ が対角化可能か否かを判定しなさい．

問 1　終わり

問 2（常微分方程式） 以下の各設問に答えなさい．

2-1) 次の微分方程式 (a), (b) の一般解を求めなさい．

(a) $(y - 3x - 2)dx = xdy$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 21y = \cos x$

2-2) 関数 $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ と表現する．また，単位階段関数 $u_a(t)$ を次のように定義する．ただし，a は正の実数である．以下の小問 (a), (b) に答えなさい．

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t < a) \\ 1 & (a \le t) \end{cases}$$

(a) $\mathcal{L}[f(t-a)u_a(t)] = e^{-as}F(s)$ となることを示しなさい．

(b) $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 2u_1(t)$（ただし，$f(0) = f'(0) = 0$）の解を求めなさい．

2-3) 次の関数 $x(t), y(t)$ に対する連立微分方程式に関して，以下の小問 (a), (b) に答えなさい．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 6x + 2y \end{cases}$$

(a) 一般解を求めなさい．

(b) $x(0) = 2$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 50$ の場合の解を求めなさい．

問 2　終わり

システム情報科学コース　専門科目 1

問 3（フーリエ解析と z 変換）　以下の各設問に答えなさい.

3-1)　次の小問(a)(b)に答えなさい．ただし，ωは角周波数である.

(a) 実信号 $x(t)$ のフーリエスペクトルを$X(\omega)$ とするとき，$|X(\omega)|$が ω=0 に対して対称となることを証明しなさい.

(b) 実信号 $x(t)$ が偶関数であるとき，そのフーリエスペクトル$X(\omega)$は実関数となることを証明しなさい.

3-2)　ある離散時間信号 $y[n]$ の z 変換 $Y(z)$が式(1)で与えられるとき，その逆 z 変換を求めよ．ただし，nは整数であり，$n<0$で $y[n]=0$ を満たすものとする.

$$Y(z)=\frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \tag{1}$$

3-3)　離散時間の入力信号$x[n]$と出力信号$y[n]$の関係が, 式(2)

$$y[n]=x[n]+x[n-1]+\frac{1}{2}y[n-1] \tag{2}$$

で与えられる離散時間システムについて，次の小問(a)～(c)に答えなさい.
ただし，$n<0$ で $x[n]=0$　とする.

(a) この離散時間システムの伝達関数　$H(z)$　を求めなさい.

(b) この離散時間システムのインパルス応答 $h[n]$を求めなさい.

(c) この離散時間システムのブロック線図を，1 サンプル時間の遅延要素 $\boxed{z^{-1}}$ を 1 個だけ含む形で書きなさい.

問 3　終わり

システム情報科学コース 専門科目1

問4（情報学基礎） 以下の **4-1)〜4-5)** の設問に答えなさい．
※ **4-3)〜4-5)** の問題文は次ページにある．

4-1) 次の **(a)〜(c)** の小問に答えなさい．

(a) 全体集合 $U = \{x \mid x \text{ は } 1 \le x \le 10 \text{ の整数}\}$ に対して，その部分集合 $A = \{3, 4, 7, 8\}$，$B = \{x \mid x = 3y - 6,\ x \in U,\ y \in A\}$ および $C = \{x \mid x = y - 2,\ x \in U,\ y \in A\}$ が与えられているとする．このとき，$(A \cup \overline{B}) \setminus C$ を外延的形式で示しなさい．

(b) $(3x + 4y)^6$ を展開したとき，x^2y^4 および x^3y^3 の係数をそれぞれ a および b とする．このとき，b/a を求めなさい．

(c) 有向グラフ G の隣接行列（adjacency matrix）が次のように与えられているとする．

$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ここで，行列の上と左の a, b, c, d, e は頂点記号を表している．このとき，グラフ G を頂点記号を含めて図示しなさい．また，グラフ G の強連結成分の数を求めなさい．

4-2) 2つの集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$Y = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，次の関係 R_f, R_g で定義される写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to X$ を考える．

$$R_f \subseteq X \times Y,\quad R_f = \{(1,3), (2,2), (3,4), (4,1), (5,4)\}$$
$$R_g \subseteq Y \times X,\quad R_g = \{(1,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$$

次の **(a)** および **(b)** の小問に答えなさい．

(a) 写像 f, g は（ア）単射だが全射でない，（イ）全射だが単射でない，（ウ）全単射，（エ）単射でも全射でもない，のどれに該当するか．それぞれ答えなさい．

(b) 次の (i)〜(iii) の合成写像の値をそれぞれ求めなさい．

(i) $g(f(5))$　　(ii) $f(g(f(4)))$　　(iii) $g(f(g(4)))$

次ページに続く

4-3) 図 4.1 の各有向辺に非負の容量が割り当てられている有向グラフ（ネットワーク）に対して，始点（ソース）を頂点 v，終点（シンク）を頂点 w としたネットワークフローを考える．次の **(a)** および **(b)** の小問に答えなさい．なお，頂点 a から頂点 b への有向辺は (a, b) と記述しなさい．

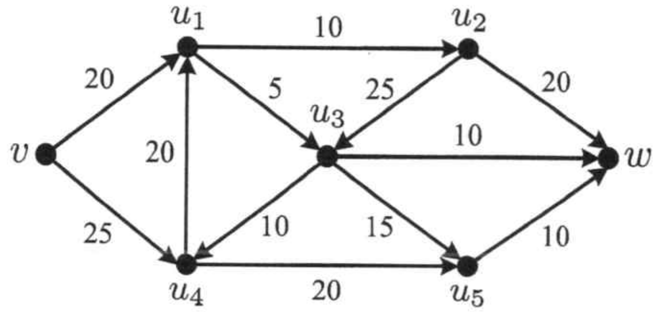

図 4.1　ネットワーク

(a)　カットの例を一つ挙げなさい．また，挙げたカットの容量を求めなさい．

(b)　最大フローを，各有向辺に非負の値を割り当てた有向グラフとして図示しなさい．

4-4) 3 つの命題 p, q, r から作られる次の 2 つの合成命題 $s(p, q, r)$, $t(p, q, r)$ を考える．

$$s(p, q, r) = (\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow \sim r)$$
$$t(p, q, r) = \sim (p \rightarrow q) \wedge r$$

ここで，$\sim p$ は命題 p の否定を表す．次の **(a)** および **(b)** の小問に答えなさい．

(a) 合成命題 $s(p, q, r)$, $t(p, q, r)$ の真理値表を作成しなさい．

(b) 次の (i)〜(iv) について，正しいものには○を，正しくないものには×を答えなさい．

(i) $s(p, q, r) \vee \sim t(p, q, r)$ はトートロジー（恒真命題）である．

(ii) $s(p, q, r) \wedge t(p, q, r)$ は矛盾命題（恒偽命題）である．

(iii) $s(p, q, r) \rightarrow t(p, q, r)$ は矛盾命題（恒偽命題）である．

(iv) $t(p, q, r) \rightarrow s(p, q, r)$ はトートロジー（恒真命題）である．

4-5) 4 つのブール変数 x, y, z, w からなる次のブール表現 $E(x, y, z, w)$ を考える．

$$E(x, y, z, w) = x(z'w)' + x'yw' + (x + y')'zw' + xw$$

ここで，x' はブール変数 x の逆（否定）を表す．次の **(a)〜(c)** の小問に答えなさい．

(a)　$E(x, y, z, w)$ のカルノー図を示しなさい．

(b)　$E(x, y, z, w)$ を最も簡単化された基本積の和の形式で示しなさい．

(c)　$E(x, y, z, w)$ を NAND ゲートのみを用いた論理回路で図示しなさい．

問 4 終わり