東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受験番号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成25年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成24年8月21日（火）

13:30～16:00（150分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は18ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，数学　4問，物理学　4問，化学　3問、合計11問出題されます．そのうち3問を選択して解答しなさい．解答する3問は，1科目の中からでもよいし，複数科目から選択して解答してもよい.
5. 解答用紙は計3枚配られます．　各問題ごとに必ず1枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

（草稿用紙）

(草稿用紙)

（草稿用紙）

第1問（数学）

関数 $f(x), F(x)$ が，微分方程式

$$\begin{aligned} f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) &= 0 \\ F''(x) - 4F'(x) + 4F(x) &= 0 \end{aligned}$$

を満たしているとする．ただし，$f(0) = 0, f'(0) = 1, F(0) = 1, F'(0) = 0$ とする．このとき，以下の手順により，$f(x), F(x)$ を求めよ．なお，自然対数の底を e とする．

(問1) 任意の実数 x に対して，$(f'(x) - af(x))' = b(f'(x) - af(x))$ を満たす実数 (a, b) を求めよ．ただし，$a \leq b$ とする．

(問2) $g(x) = f'(x) - f(x)$ とおく．このとき，$g(x)$ が満たす微分方程式を求めよ．さらに，$g(0)$ の値を定めよ．

(問3) 問2で求めた微分方程式を解くことにより，$g(x)$ を求めよ．

(問4) $h(x) = f'(x) - 3f(x)$ とおく．このとき，$h(x)$ を求めよ．

(問5) 問3，問4で求めた答えを用いることにより，$f(x)$ を求めよ．

(問6) $F(x) = G(x)\mathrm{e}^{2x}$ とおく．このとき，$G(x)$ が満たす微分方程式を求めよ．

(問7) 問6で求めた答えを用いることにより，$F(x)$ を求めよ．

第2問(数学)

以下の条件を満たす行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{L}$ を考える.

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ は，対角成分が0でそれ以外の成分が0か1であるような $n \times n$ の対称行列. $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ は，各 (i,i) 成分が $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}$ となる $n \times n$ の対角行列. $\boldsymbol{L}$ は，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$ で定義される行列.	$\cdots(*)$

以下の問に答えよ．ただし，行列 $\boldsymbol{X}$ の転置を $\boldsymbol{X}^\top$ と表すこととする.

(問1) 行列 $\boldsymbol{A}$ が，次式で与えられているとする.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 $\boldsymbol{L}$ を示せ.

(b) 行列 $\boldsymbol{L}$ の固有値をすべて求めよ.

(c) 2×3 行列

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

の各成分が，$-1, 0, 1$ のいずれかをとるとする．このとき，$\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ を満たす $\boldsymbol{B}$ を1つ求めよ.

(問2) $(*)$ の条件を満たす，一般の $n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{L}$ を考える．いま，行列 $\boldsymbol{L}$ の固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ を満たすようにとることができるとし，それらに対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ と書くことにする．ただし，n 次元ベクトルは $n \times 1$ 行列として表現するものとする．さらに，行列 $\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ となる，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{B}$ が必ず存在することは，既知であるとする.

(a) 行列 $\boldsymbol{L}$ の固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ が，すべて非負であることを示せ.

(b) 行列 $\boldsymbol{L}$ の最小の固有値 λ_1 が $\lambda_1 = 0$ を満たすことを示し，さらに対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の値を求めよ.

(c) n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ が，$\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{e}_1 = 0$ を満たすとする．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{x}}$$

の最小値を，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を用いて表せ.

第３問（数学）

$x(t)$ を奇関数とすると，そのフーリエ正弦変換 $X(s)$ とその逆変換は次式で与えられる．

$$X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin st \, \mathrm{d}t$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \sin st \, \mathrm{d}s$$

また，$y(t)$ を周期 $2T$ を持つ奇関数とすると，$y(t)$ は次のフーリエ正弦級数で表現できる．

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{T}$$
$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} y(t) \sin \frac{n\pi t}{T} \, \mathrm{d}t$$

以下では，$x(t)$ は次式で定義されているものとする．

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq -T \\ t, & \text{if } -T < t < T \\ 0, & \text{if } T \leq t \end{cases}$$

ここで，T は正の定数である．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) $X(s)$ を求めよ．

(問 2) $X(s) = 0$ を満たす s を具体的に 1 つ与えよ．また，$X(s) = 0$ を満たす s が無限個存在することを示せ．

(問 3) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$s_n = \dfrac{n\pi}{T}$ と定義する．$X(s_n)$ を三角関数を用いずに表せ．

(問 4) $y(t)$ を，$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ に対して

$$y(t) = x(t - 2mT), \quad \text{if } (2m-1)T < t \leq (2m+1)T$$

と定義する．このとき，$y(t)$ のフーリエ正弦級数展開を求めよ．

(問 5) $-T < t \leq T$ における $x(t)$ を，$\sin s_n t$ を用いた級数として表現せよ．

(問 6) $f(u)$ を $f(u) = \dfrac{\sin u}{u}$ と定義する．$X(s)$ を関数 f を用いた級数として表現せよ．

第4問（数学）

0と1の二値をとるN個の確率変数x_i, $i=1,2,\ldots,N$を考える．ここでNは奇数の自然数である．x_iは互いに独立であり，次の確率に従うとする．

$$\Pr(x_i=1)=1-\Pr(x_i=0)=p, \quad 0<p<1$$

また，確率変数yを次式で定義する．

$$y \equiv \begin{cases} 1, & m>N/2 \\ 0, & m<N/2 \end{cases}$$

ここで確率変数mは，N個の変数のうち1をとるx_iの個数である．mがkに等しい確率を$\Pr(m=k)$と書く．

(問1) x_iの平均値$\mathrm{E}[x_i]$と分散$\mathrm{Var}[x_i]$を求めよ．

(問2) $N=3$の場合を考える．

(a) 全てのとりうるkに対して，$\Pr(m=k)$を求めよ．

(b) mの平均値$\mathrm{E}[m]$と分散$\mathrm{Var}[m]$を求めよ．

(c) $y=1$となる確率$\Pr(y=1)$を求めよ．

(問3) 一般のNに対して，mの平均値$\mathrm{E}[m]$と分散$\mathrm{Var}[m]$を求めよ．

(問4) Nが十分大きいとき，中心極限定理により$\Pr(m=k)$は問3で求めた平均値$\mathrm{E}[m]$と分散$\mathrm{Var}[m]$を持つガウス分布に従う．また確率変数zが平均0，分散1のガウス分布に従うとき，その確率密度関数$\mathrm{P}(z)$は，

$$\mathrm{P}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

で与えられる．このとき，十分大きなNとある実数tに対して，$h\equiv m/N$が$h>t$を満たす確率$\Pr(h>t)$を$\mathrm{P}(z)$を用いて表現せよ．

(問5) Nが十分大きいときの確率$\Pr(y=1)$を式(1)の誤差関数$\mathrm{erf}(t)$を用いて求めよ．

$$\mathrm{erf}(t)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-u^2)du \tag{1}$$

(問6) tが十分大きいとき，式(1)の誤差関数$\mathrm{erf}(t)$は，

$$\mathrm{erf}(t)\to 1-\frac{\exp(-t^2)}{\sqrt{\pi}t} \quad t\to\infty \tag{2}$$

と近似できる．式(2)を用いて，Nが十分大きい時の確率$\Pr(y=1)$をNを用いて求めよ．

第５問（物理学）

地球を周回する質点 A，B の運動を考える．A，B の質量は両方とも m であり，質量の無視できる棒でつながっている．図に示すように質点 A，B，棒，地球が一直線上に並んだ状態のまま，質点 A，B，棒が地球の周りを角速度 ω で等速円運動しているとする．この時の質点 A，B の地球の中心からの距離を r_A，r_B（$r_A > r_B$）とする．地球の質量を M（$>> m$），万有引力定数を G とし，以下の問に答えよ．ただし，棒には棒の長さの方向の張力または圧縮力のみが働くとし，質点 A，B 間に働く万有引力は無視できるものとする．

（問１）棒に働く力を T とし，質点 A，B それぞれの力のつり合いの式を求めよ．ただし T の符号は張力の時に正となるように定義するものとする．

（問２）（問１）の式を解いて，ω と T を G，M，m，r_A，r_B で表せ．

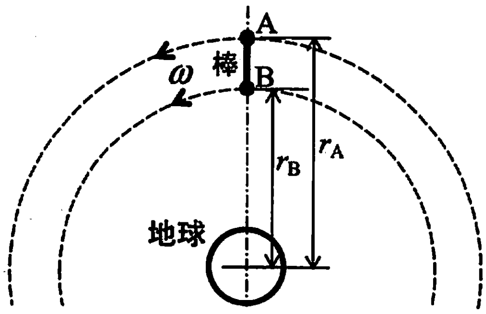
（問３）静止衛星では，その角速度が地球の自転の角速度 ω_0 と同じである．静止衛星の地球の中心からの距離 r_S を求めるには，（問２）において $r_A = r_B$ の場合を考えればよい．r_S を求めよ．

（問４）質点 B の地球の中心からの距離 r_B が地球の半径 r_E に等しく，ω が ω_0 に等しい場合を考える．この時の r_A を r_E と r_S で表せ．ただし，$r_A >> r_E$ とし，r_A の近似式を求めればよい．

次に，質点 A，B 間に働く万有引力が無視できない場合を考える．

（問５）$r_0 = (r_A + r_B)/2$，$l = (r_A - r_B)/2$ を用いて $r_A = r_0 + l$，$r_B = r_0 - l$ と表わすとする．r_A，r_B の差が小さく，$l << r_0$ であるとして，（問２）で求めた T を l の一次式で表せ．さらに，この T よりも質点 A，B 間に働く万有引力が大きくなるための条件を求めよ．

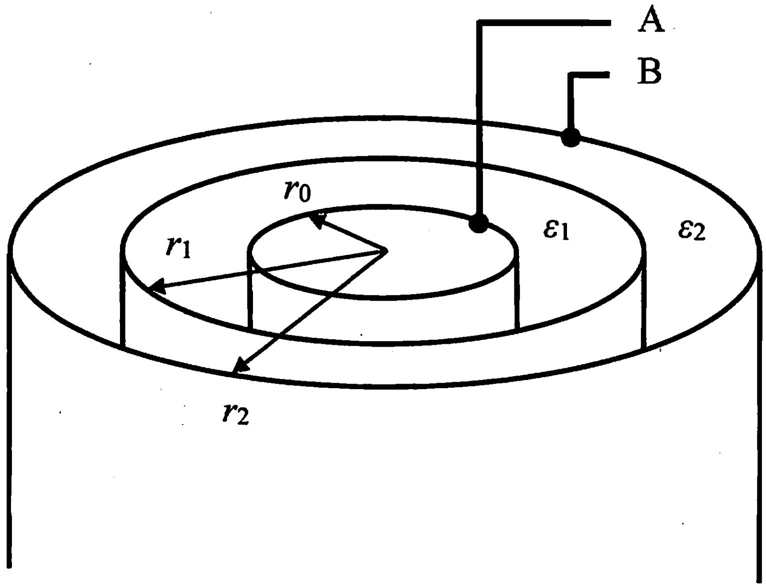
（問６）小型の天体がより大型の天体に近づいた時に破壊されることがある．この機構を数行で説明せよ．



図

第６問（物理学）

図のように半径 r_0, r_2の二つの同軸円筒電極 A, B がコンデンサを形成し，電極間に誘電率 ε_1, ε_2 の２層の誘電体が充填してある．両者の境界は半径 r_1 の同軸円筒であり，$r_0 < r_1 < r_2$ である．半径方向の座標を r とし，$r_0<r<r_2$ における電界の強さに関する以下の問に答えよ．なお，円筒の長さは無限大とする．



図

（問１）このコンデンサの単位長さあたりの静電容量を求めよ．

（問２）電極 AB 間に電圧V_0 を印加したとき，電界の強さを r の関数として図示せよ．ただし，$r_1 = 2r_0, r_2 = 3r_0, \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ とする．また，電界の強さの最大値を示せ．

（問３）ε_1 と ε_2 が r の関数として $\varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)$ のように自由に変えられる場合，r によらず電界の強さを一定にする $\varepsilon_1(r), \varepsilon_2(r)$ の式を示せ．

（問４）同軸円筒状の誘電体が，r_0 と r_2 $(= 3r_0)$ の間に等間隔に４層になっているとする．四つの誘電体内それぞれの電界の強さの最大値を等しくするためには，その誘電率の間にどのような関係があればよいか．

（問５）もとの２層の誘電体をもつコンデンサにおいて，$r_1 = 2r_0$, $r_2 = 3r_0$ と固定し，電極Aの半径を変化させて $r_0' = \rho r_0$ とする．ただし，内側誘電体（誘電率 ε_1）の内半径は電極Aの半径と等しく保たれるものとする．また，誘電体の誘電率を $\varepsilon_1 = k\varepsilon_2$ とする．電極 AB 間に一定電圧 V_0 を印加したとき，各誘電体中の電界の強さの最大値を等しくし，かつ最小化する ρ と k を求めよ．また，そのときの電界の強さの最大値を求めよ．次に，その結果を（問２）の解と比較せよ．ここで，$\ln 2 \approx 0.69$ を用いよ．

第７問（物理学）

電気エネルギーを消費することによって低温側から高温側へと熱を移動させることができるペルチェ素子を熱力学的に考察する．図のように，金属板を介してｐ型半導体とｎ型半導体を直列に接続したペルチェ素子を起電力 E の電源につないだ回路を考える．温度 T_A の高温側のペルチェ素子上面では，ｐ型半導体から金属板へ，金属板からｎ型半導体へと電流が流れ，熱が放出される．一方で，温度 T_B（$T_A > T_B$）の低温側の下面では，金属板からｐ型半導体へ，ｎ型半導体から金属板へと電流が流れ，熱が吸収される．上面と下面の温度差によって回路に発生する熱起電力と電源の起電力 E がつり合っているものとする．また，ジュール熱は無視できるものとする．ヒートポンプの中でガスが仕事を受けて循環して熱を吸収・放出するように，この回路の中を電荷 q が起電力 E から qE の大きさの仕事を受けて熱を吸収・放出しながら一周する場合を考える．

（問１）電荷 q を回路を一周させたとき，ペルチェ素子の上面でやりとりされる熱量を Q_A，下面でやりとりされる熱量を Q_B とする．熱が吸収される向きを正として（熱が放出される向きを負として），上面では熱が放出されるために $Q_A < 0$，下面では吸収されるために $Q_B > 0$ となる．熱力学の第一法則から Q_A，Q_B，q，E の間に成り立つ関係式を求めよ．ペルチェ素子の上面および下面以外の部分での熱の出入りはないものとする．

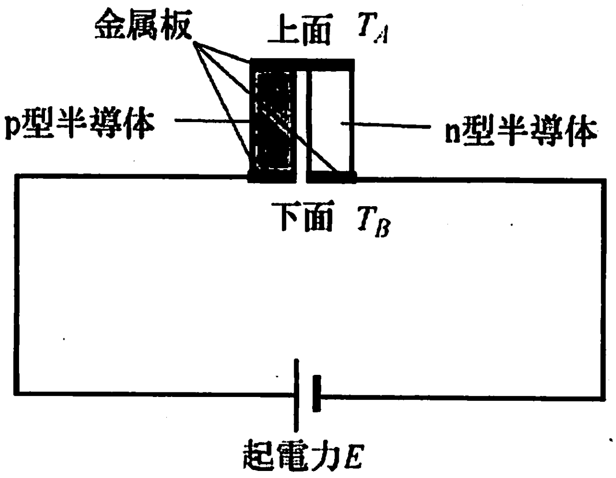
（問２）（問１）の状況で電荷 q を回路を一周させるときのクラウジウスの不等式を Q_A，Q_B，T_A，T_B を用いて表せ．電荷 q を可逆的に回路を一周させる場合も含めること．

（問３）（問１）の状況で電荷 q を可逆的に回路を一周させる場合，Q_A，Q_B を T_A，T_B，q，E で表せ．

（問４）（問１）では，ペルチェ素子の上面および下面以外の部分での熱の出入りはないものと仮定したが，実際にはｎ型半導体およびｐ型半導体には温度勾配が生じ，トムソン効果と呼ばれる熱の吸収・放出がある．微小な温度差 dT のある微小領域を電荷 q が移動したときの吸熱量はｎ型半導体およびｐ型半導体でそれぞれ $q\sigma_n dT$ および $q\sigma_p dT$ で与えられるとして，熱力学の第一法則から Q_A，Q_B，q，E，T_A，T_B，σ_n，σ_p の間に成り立つ関係式を求めよ．σ_n，σ_p は温度に依存しない定数とする。

（問５）（問４）の状況でクラウジウスの不等式を Q_A，Q_B，q，E，T_A，T_B，σ_n，σ_p を

用いて表せ．電荷 q を可逆的に回路を一周させる場合も含めること．



図

第８問（物理学）

図に示すような，強さ $-V_0a$ のデルタ関数が周期 a で x 方向に並んでいる１次元周期的ポテンシャルは，整数 l を用いて $-V_0a\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(x-la)$ と表される．このポテンシャル中で運動する質量 m，エネルギー E（>0）の粒子を考える．Planck 定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とし，次の問に答えよ．

（問１）この粒子の波動関数を $u(x)$ として Schrödinger 方程式を書け．

（問２）$x=0$ において波動関数 $u(x)$ およびその微分 $du(x)/dx$ はどのような接続条件を満たす必要があるか．

n を整数として，$(n-1)a<x<na$ の区間を「区間 n」とする．Schrödinger 方程式の解は，区間０では $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ を使って

$$u_0(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

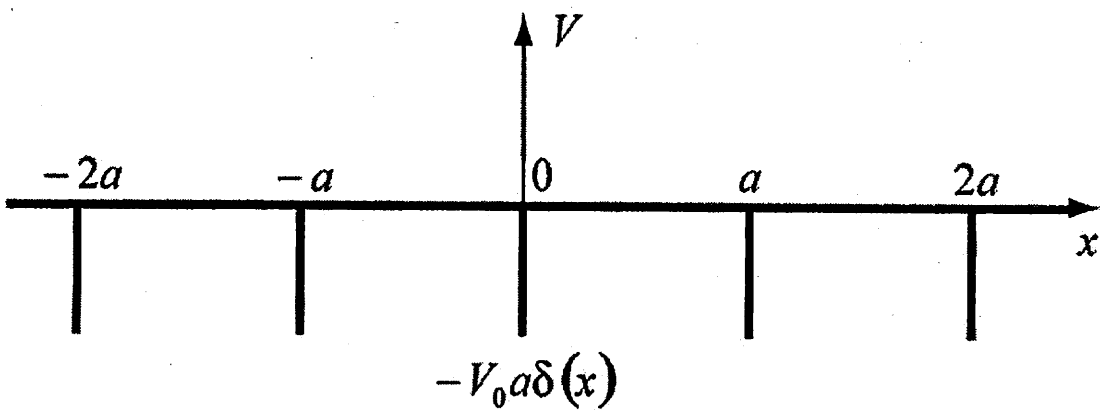
と書ける．$n\to\pm\infty$ で解が発散しないため，次の周期（区間１）の解は区間０の解と位相は異なってもよいが振幅は同じでなければならない．従って実数 K を用いて

$$u_1(x) = e^{iKa}[Ae^{ik(x-a)} + Be^{-ik(x-a)}]$$

と書ける．

（問３）$x=0$ での接続条件を満足するための K と k の関係式を導け．

（問４）（問３）の結果を使って，$V_0\,a$ が十分大きいときには禁制帯がある（解の存在しないエネルギー領域が存在する）ことを定性的に説明せよ．



図

第9問（化学）
化学反応速度論に関する以下の問いに答えよ.

（問1）気体分子Aが，触媒上に吸着したA(a)を経て分子BとCに熱分解し，すみやかに気相に脱離する下のような触媒反応を考える．ここで，触媒は平坦な表面を持ち，k_1，k_{-1}，k_2は，下に示すそれぞれの過程での速度定数とする.

$$\mathrm{A} \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{A(a)} \qquad \text{--------------------(i)}$$

$$\mathrm{A(a)} \xrightarrow[k_2]{} \mathrm{B} + \mathrm{C} \qquad \text{--------------------(ii)}$$

(1) 気体分子Aの分圧をP_A (Pa)，温度をT (K) とするとき，気体分子Aが1秒あたりに1 m^2の触媒表面に衝突する回数を，A分子1個の質量 m (kg)，ボルツマン定数 k ($J \cdot K^{-1}$)，P_A，およびTを用いて表わせ．ただし，Aは理想気体であり，単位体積中のA分子の触媒表面に向かう平均速度 $<v_z>$ ($m \cdot s^{-1}$) は，マクスウェルの速度分布則に従い，以下のように表わされるとする.

$$<v_z> = (kT / 2\pi m)^{1/2}$$

(2) (i) 式の初期反応速度がk_1とP_Aの積 ($= k_1 \times P_A$) で表わされるとし，触媒表面のA(a)の被覆率をθ_A ($0 \leq \theta_A \leq 1$) とする．(i) 式の反応が吸着平衡にあると仮定したとき，θ_Aを k_1，k_{-1}，およびP_Aを用いて表わせ.

(3) (2) のように (i) 式が吸着平衡にあるとき，P_Aが十分に高い場合と低い場合におけるBおよびCの生成速度 ($= k_2 \times \theta_A$) が，近似的にどのように表わされるか簡単に論ぜよ.

（問2）アミノ酸にはL体とD体という2つの光学異性体が存在し，地球上の生命は，主にL体のアミノ酸を生化学的に利用している．生命体が死などにより代謝活動を行なわなくなると，細胞内のL体のアミノ酸のラセミ化が生じ，D体とL体の存在比が1となる平衡状態に近づいていく．アミノ酸の1種であるアスパラギン酸のラセミ化が1次反応で進行し，下に示すような可逆反応で記述できるとして，以下の問いに答えよ．ここで，k_Lはアスパラギン酸のL体（L-アスパラギン酸）がD体（D-アスパラギン酸）に，k_DはD-アスパラギン酸がL-アスパラギン酸に，それぞれ変化する際の速度定数とする.

$$\text{L-アスパラギン酸} \underset{k_D}{\overset{k_L}{\rightleftarrows}} \text{D-アスパラギン酸}$$

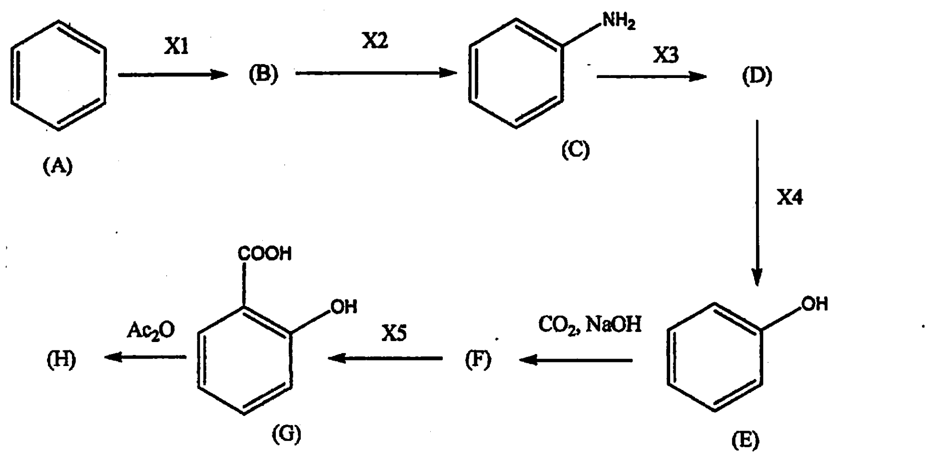
(1) ラセミ化反応の速度定数 k_L が，アレニウスの式に従う温度依存性を持ち，その活性化エネルギーが 105 kJ/mol であるとする．温度 27℃における k_L を 8.0×10^{-3} year^{-1} とするとき，−23℃ における k_L(year^{-1}) を求めよ．必要があれば，R を気体定数として $\exp(-10/R) = 0.3$，$\exp(-70/R) = 2.2 \times 10^{-4}$ を用いよ．

(2) L-アスパラギン酸の濃度の時間変化 $-\mathrm{d}[\mathrm{L_{asp}}]/\mathrm{d}t$ を，$[\mathrm{L_{asp}}]$，k_L，k_D，および代謝活動が停止したとき($t = 0$)の L-アスパラギン酸の初期濃度 $[\mathrm{L_{asp}}]_0$ を用いて表わせ．ただし，アスパラギン酸の分解は起きないとする．

(3) 上の結果から，−23℃に保たれている永久凍土内で代謝活動を行なわなくなった生物に由来する L-アスパラギン酸の濃度が，初期濃度の 60% に減少するまでに要する年数を求めよ．ただし，代謝活動が停止したときの D-アスパラギン酸の初期濃度を 0 とし，k_L は k_D と等しい（$k_L = k_D$）とする．必要があれば $\ln 5 = 1.6$, $\ln 10 = 2.3$ を用いよ．

第１０問（化学）

（問１）次に示す化学反応式について以下の問に答えよ．但し，(A)－(H)は化合物名を表し，X1－X5 は反応条件に対応する．



（１）化合物(B)，(D)，(F)，(H)の構造式を示せ．

（２）X1－X5 について，適切な反応条件（反応試薬など）を示せ．

（３）(D)と(E)を１：１で反応させた場合に生じる生成物(I)の構造式を示せ．

（４）(D)から炭素数を一つ増加させる反応を行う場合の反応条件を示せ．

（５）化合物(E)，(G)，(H)の pKa の大きさの順序を予測し，理由とともに記せ．

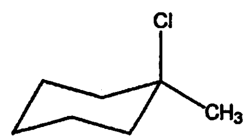
（６）化合物(A)，(E)，(G) を簡単に区別する方法を示せ．

（７）化合物(B)，(C)，(E)を分光法を用いて区別する方法を具体的に説明せよ．複数の分光法を用いても構わないが，具体的な同定法について言及すること．

（問２）ハロアルカンからのハロゲン化水素の脱離反応の機構として，E1 反応機構と E2 反応機構が知られている．

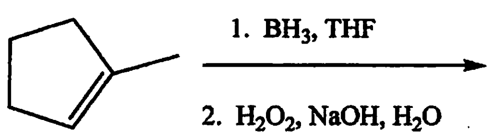
（１）E1反応機構と E2反応機構について反応条件も含めて説明せよ．

（２） 右記の化合物について，E1 反応機構と E2 反応機構それぞれで予想される生成物の構造式を示せ．

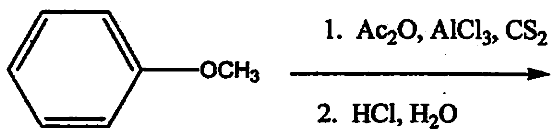


（問３）次の（１）－（３）の中から，二つを選び，反応の生成物の構造式を示せ．またその反応機構を簡単に説明せよ．（反応条件の番号は，逐次的に反応を行うことを示す．）

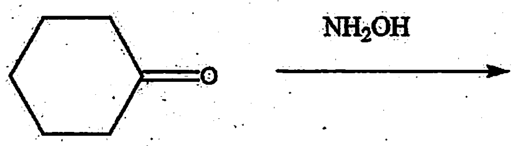
（１）



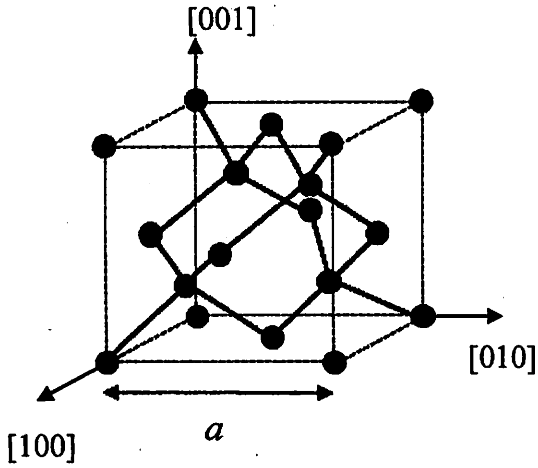
（２）



(3)



第１１問（化学）



シリコン (Si) は最も代表的な半導体素材であり，産業の米とも呼ばれていて現代社会において無くてはならない元素である．右図は Si の結晶格子（黒丸が Si 原子を表す）の単位胞（一辺の長さ a の立方体）を示したものである．Si に関する以下の設問に答えよ．必要があれば末尾の値を用いよ．

（問１）Si は地球の地殻の主要構成元素の一つで，その存在度は重量パーセントでおよそ 27 - 28 %である．Si は地殻中において，どのような化学状態で存在するか．また，地殻中での存在度（重量パーセント）は構成元素中で何番目か．

（問２）図の格子の名称を記せ．

（問３）結晶中での Si 原子の第一近接原子数，第二近接原子数はそれぞれいくつか．

（問４）Si 結晶の化学結合名を記し，その特徴を述べよ．

（問５）Si 結晶の原子数密度を a を用いて記せ．

（問６）(100)面，(110)面の原子数の面密度を a を用いて記せ．ただし，表面再構成や表面緩和はないものとする．

（問７）固体表面では化学結合が切断されている．第一近接原子との間の化学結合のみを考えた時に，(100)面，(110)面上では，1 原子あたりそれぞれ何本の化学結合が切断されているか．ただし，表面再構成や表面緩和はないものとする．

（問８）各結晶面の表面エネルギー密度を，単位面積あたりの切断された化学結合の結合エネルギーの総量の半分と定義する．第一近接原子との間にのみ化学結合があり，結合ひとつあたりの結合エネルギーをϕ とした時に，(100)面，(110)面について，それぞれの表面エネルギー密度を a, ϕ を用いて記せ．

（問９）Si 結晶のバンドギャップはおよそ 1.1 eV である．このエネルギーに対応する光の波長を nm 単位で求めよ．

（問１０）Si 結晶は 1.5 – 6.0 μm 領域の赤外線を透過するとされている．電子励起，振動励起の観点から，その理由を記せ．

光速度 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s，プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ Js，電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg，
電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C