平成 17 年 8 月 22 日（月）
10:00 〜 12:00

平成 18 年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。解答は

問題 1　を　1 枚目（白色）の解答用紙
問題 2　を　2 枚目（赤色）の解答用紙
問題 3　を　3 枚目（青色）の解答用紙
問題 4　を　4 枚目（黄色）の解答用紙
問題 5　を　5 枚目（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 20 点であり、合計 100 点である。

●問題紙は表紙を含めて 6 枚である。

問題 1　（20 点）

次の行列 A に関する以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 A の固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P およびその対角行列を求めよ。

問題２（２０点）

(a)　次の連立微分方程式を解け。ここで y，x は t の関数、 D は t に関する微分演算子である。

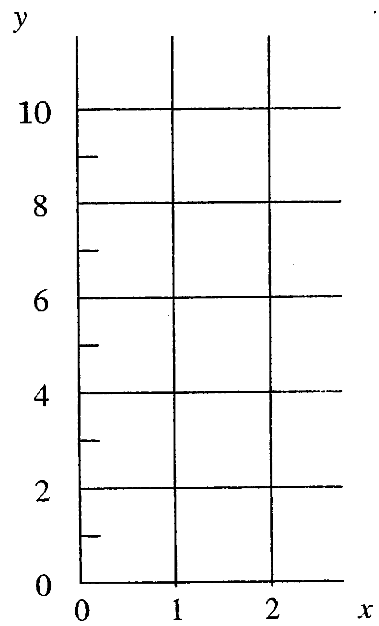
$$\begin{cases} (D^2+D+1)x+D^2y=t \\ Dx+(D-1)y=t^2 \end{cases}$$

(b) 非同次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x^2}y=8x$$

の解を求めよ。

$x=1$ で $y=3$，$dy/dx=3$ の時、 $y=f(x)$ を求め、 $0<x<2$ の領域で $f(x)$ を解答用紙に図示せよ。また、$f(x)$ の極大値あるいは極小値を示す場所に×印をつけよ。



問題３　（20 点）

$z=x+iy$ を表す複素平面上に図１に示すような半径 R 、ρ の半円を含む閉曲線の積分経路があり、その経路に沿って $f(z)\mathrm{Log}\,z$ を積分する。ここでは、$f(z)$ は実軸上に極を持たない有理関数でかつ偶関数であり、$|z|\to\infty$ で $|z^2 f(z)|$ は有界とする。以下の設問に答えよ。

(a) 積分経路 C_1 における $f(z)\mathrm{Log}\,z$ の積分が $\rho\to 0$ としたときに 0 となることを示せ。

(b) 積分経路 C_3 における $f(z)\mathrm{Log}\,z$ の積分が $R\to\infty$ としたときに 0 となることを示せ。

(c) (a)、(b)の結果と積分経路 C_2、C_4 における $f(z)\mathrm{Log}\,z$ の積分の関係から

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{Log}\,x\,dx+\frac{\pi i}{2}\int_0^\infty f(x)\,dx=\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0}\mathrm{Res}\left[f(z)\,\mathrm{Log}\,z,\ \alpha\right]$$

となることを示せ。但し、Res[ ]は留数を表わし、Im α は α の虚部を表わす。

(d) (c)の結果を利用して次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}\,x}{1+x^2}dx$$

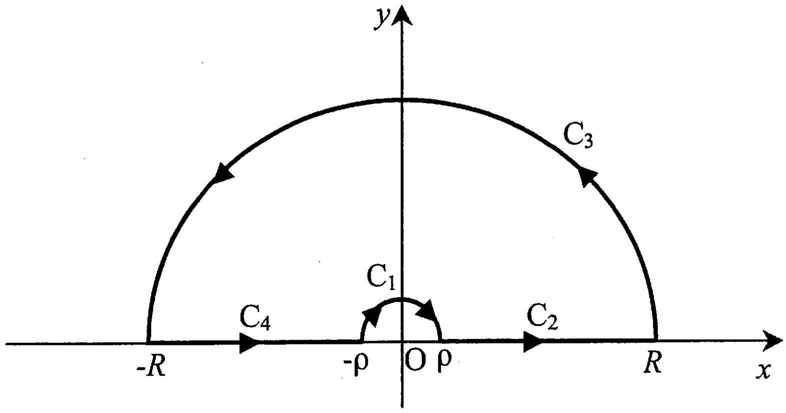


図１

問題４（20 点）

次の定積分を以下の手順で求めよ。

$$I=\int_0^\infty \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^3 d\omega$$

(a) 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求め、逆フーリエ変換を用いて、$f(t)$ を表せ。

$$f(t)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & |t|<1 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & |t|=1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$$

ただし、関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ および逆フーリエ変換をそれぞれ次式で定義する。

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

(b) (a) の結果を用いて、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega=\frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(c) 次の関数 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ は $G(\omega)=\left(\dfrac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$ であることを示せ。

$$g(t)=\begin{cases} \sqrt{2\pi}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{|t|}{4}\right) & |t|<2 \\ 0 & |t|\geq 2 \end{cases}$$

(d) (a), (c) の結果と次式のパーセバルの定理を用いて、定積分 I を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\ g(t)\ dt=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ G(\omega)\ d\omega$$

問題５　（２０点）

(a) aを正の実数、sを実部がaより大きい複素数とするとき、ラプラス変換

$$L\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}\right]=\frac{1}{s-a}$$

となることを証明せよ。ただし、$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$とする。

(b) $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at)^m}{m!}$を求めよ。

(c) ラプラス変換

$$L\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\{a(t-\tau)\}^m}{m!}e^{a\tau}u(\tau-bn)d\tau\right\}\right]=\frac{1}{(s-a)^2\{1-e^{-(s-a)b}\}}$$

となることを証明せよ。ただし、bは正の実数、$u(t)$はヘビサイド単位関数

$$u(t)=\begin{cases}1 & (0\le t)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

である。

(d) $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\{a(t-\tau)\}^m}{m!}e^{a\tau}u(\tau-bn)d\tau\right\}=te^{at}$を証明せよ。