平成 22 年度大学院博士前期課程電気電子情報工学専攻

選択科目 電磁エネルギー工学 入試問題

【注意事項】

● 問題の数は5題である。問題1を必須とし、問題2から問題5までの4題から2題を選択して解答せよ。なお、解答は、

問題1を(白色)の解答用紙

問題2を(赤色)の解答用紙

問題3を(青色)の解答用紙

問題4を(黄色)の解答用紙

問題5を(水色)の解答用紙

に記入すること。解答用紙を間違うと採点されない場合があるので 注意すること。

● 問題用紙は表紙を含めて14枚である。

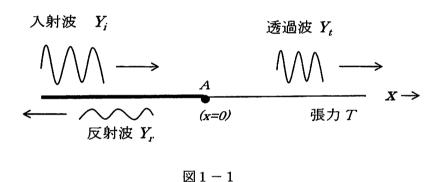
問題[1] (解答用紙「白色」に解答してください。)

問1

図1-1のように太さが無視できる2本の糸がつなぎ目の点Aで結ばれており、全体は一様な張力Tで引っ張られている。またそれぞれの糸の線密度は異なるとする。この状態で糸を伝わる波を左側から入射させると線密度の違いにより、つなぎ目において反射波や透過波が発生する。いま糸の方向をx軸にとり、入射波 Y_i を、

$$Y_i = \sin\left[\omega(t - \frac{x}{v_i})\right] \tag{1}$$

の正弦波で表すとき、この波が糸を伝わる様子を考える。ただし入射波 Y_i の振幅は1であり、 ω は角振動数、 v_i は入射波の位相速度である。



つなぎ目の点Aを原点(x=0)に取り、波が成立する条件を考える。点Aより左側では入射波と反射波が合成された波(Y_i + Y_r)が存在し、右側では透過波(Y_t)のみが存在する。

- ① 反射波の振幅を R (R > 0)、初期位相を Φ ($0 \le \Phi \le \pi$) とし、入射波の式を参考に反射 波 Y_r の式を表せ。
- ② 透過波の振幅を S(S>0)、初期位相を $O(\forall \Box)$ としたとき、透過波 Y_t の式を表せ。 (ただし透過波の位相速度は v_t とし、入射波が点 Aに到達した瞬間を時間 t=0とする。)
- ③ 点Aで波が連続である条件より $Y_t+Y_r=Y_t$ (x=0 において)となることから、振幅R、S と 初期位相 ϕ の間の関係式を求め、波が存在するとき ϕ が取ることができる値は限られることを示せ。
- ④ 波の位相速度は糸の張力 T と線密度で決まる。いま入射側の糸の線密度を ρ_i として、次元解析により入射波の位相速度 ν_i を Tと ρ_i で表せ。
- ⑤ つなぎ目にて糸の形がなめらかである条件として点 A において、

$$\left[\frac{d(Y_i + Y_r)}{dx}\right]_{x=0} = \left[\frac{dY_t}{dx}\right]_{x=0}$$
 (2)

が満たされる。いま ho_t は右側(透過側)の糸の線密度とし、 $ho_i=4
ho_t$ であるときの反射波と透過波の振幅R、Sの値をそれぞれ求めよ。

問2

図 2-1 に示すように大気圧雰囲気 $P=P_0$ に置かれたピストン付きシリンダーの中に、質

量 m、モル数 Nの物質 A が固体として閉じ込められている。ピストンとシリンダーは断熱材で構成されており、ピストンの重量は無視できるほど軽く、滑らかに動くことができる。シリンダーには、ヒーターが取り付けられており、ヒーターの電源が入っているときのみ、物質 A に熱を与えることができる。

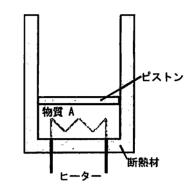


図 2-1 ピストン付きシリンダー

以下に記述する問題に対して、空欄(ア)から (ケ)に適当な式を記入しなさい。記号は、問題

文中に使用されているもののみ使用してよい。また、空欄(a)から(d)に、選択肢の中から適した語句、不等号を選び記入しなさい。なお、同一選択肢を複数回使用しても良い。

(1) ヒーターの電源を入れ、単位時間あたりの 熱量 q となる熱を物質 A に与えたところ、図 $2\cdot 2$ で示す温度変化をし、物質 A は時刻 t=0 から t=aまでは固体、時刻 t=2aから t=4aまでは 液体、時刻 t=6a以降は気体として存在し、相転 移は温度が一定のときに生じた。ここで、物質 Aの比熱は、それぞれ、 c_s (固体)、 c_ℓ (液体)と して与える。固体から液体、もしくは液体から固 体へ相転移するときの融解熱を L_f とし、また、液体 から気体、もしくは、気体から液体へ相転移すると

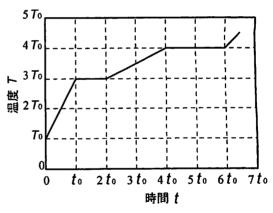


図 2-2 物質 A の温度変化

きの蒸発熱を L_v として与える。ヒーターで物質 A を加熱し始めてから時刻 t= あまでに物質 A へ与えられた熱は q を使って表すと、 $Q_s=$ (r) であり、温度は $T=T_0$ から $T=3T_0$ まで上昇したので、固体状態における単位質量あたりの比熱は Q_s を使って表すと、 $c_s=$ (d) である。また、この物質 A の固体と液体の比熱の大きさを比べると、 c_s (a) c_ℓ の関係が成立する。一方、物質 A が固体からすべて液体になるときに必要な熱量は、融解熱 L_f を使って表すと、 $Q_f=$ (p) となり、融解熱と蒸発熱の大きさを比べると、 L_f (b) L_v の関係が成立する。

- (2)物質 Aがすべて気体状態となり、体積が V=V,となったところでヒーターの電源を切 った。これ以降、気体状態にある物質 A を気体 A と呼び、単原子分子の理想気体として取 り扱う。気体定数を Rとすると、体積 V=V,のとき、気体 A の温度は、 $T_{I}=$ (エ)ある。ここで、体積 V=V,はシリンダーの容積よりも小さい。その後、ピストンを外部から ゆっくり押し込んで $\mid \quad (c) \quad \mid \quad \cup$ 、温度 $T=T_2$ 、体積 $V=V_2$ となった。体積が $V=V_1$ か ら $V=V_2$ へ変化する過程では、 $TV^{\gamma-1}=-$ 定の関係が成立するので、体積 $V=V_2$ における 気体 A の圧力は、 P_0 、 V_1 、 V_2 を使って表すと P_2 = で与えられる。このとき、内 (オ) 部エネルギーの変化 ΔE_{int} は温度を使って表すと、 ΔE_{int} = となる。内部エネル (カ) ギーの変化 ΔE_{int} 、熱 Q、気体がした仕事 Wの間には、(d)の関係が成立する。したがって、(c)過程における気体がした仕事 $\Delta E_{int} = (1 + 1)$ Wは、W=
- (3) 気体 A の体積が $V=V_2$ の状態でピストンが動かないように固定した。その後、ヒーターの電源を入れ、気体 A を加熱したところ、圧力は、 $P=P_2$ から $P=P_3$ 、温度は $T=T_2$ から $T=T_3$ ~変化した。このときのエントロピー変化 ΔS は、

$$\Delta S = \int_{-T_{c}}^{T_{c}} \frac{dQ}{T}$$

で表すことができ、 $\Delta S = \boxed{ (f) }$ となる。

選択肢

等温圧縮、断熱圧縮、等温膨張、断熱膨張、熱力学第 1 法則、熱力学第 2 法則、エントロピー、比例、反比例、≦、<、=、>、≧

問題[2] (解答用紙「赤色」に解答して下さい。)

以下の問1、および問2の文章中の(r)~(t)、および(ta)~(td)に、それぞれ適切な数式、および語句を入れよ。

問1

レーザー光(電磁波)が、真空中を伝搬する際、 ω (レーザー角周波数)とk(レーザー波数 = $2\pi/\lambda$, λ :レーザー波長)との分散関係は、

$$\omega^2 = c^2 k^2 \tag{1}$$

プラズマ中では、レーザー光の分散関係は、粒子同士の衝突などによる減衰を考慮しなければ、プラズマ密度の影響を受ける。プラズマ角周波数 ω_p は、プラズマ電子密度 n_e 、電子質量 m_e 、真空中の誘電率 ε_0 を用いて

$$\omega_p^2 = \boxed{(\mathcal{T})} \tag{2}$$

と表される。この場合の分散関係式は、 ω_p を用いて

$$\omega^2 = \boxed{(1)} \tag{3}$$

で表される。

これを波数kについて解くと、

$$k = \boxed{(\dot{\mathcal{D}})} \tag{4}$$

となる。このkを用いてx方向へ伝搬するレーザーの位相部分を、 $\exp(ikx)$ と表わすことが出来る。

 $1<{\omega_p}^2/\omega^2$ の場合 (4) 式の k は、正となりプラズマ中を伝搬する波を表す。

 $1>\omega_{p}^{2}/\omega^{2}$ の場合、k は虚数となる。 k_{I} を実数として、虚数となる解を

$$k = ik, (5)$$

と置くと exp(ikx) の表現は、

$$\exp(ikx) = \boxed{(\mathcal{I})} \tag{6}$$

となる。つまりレーザー光は自らの周波数より大きいプラズマ周波数を持つプラズマ中では、(a)する。ただし、虚数 i は、 $i^2=-1$ と定義する。

問2

電子が、衝突断面積 σ の中性原子と衝突し、運動量を失う現象を考える。電子の運動量を完全に吸収する中性原子(数密度; n_N)を含む面積A、厚さdxの層に電子東 Γ_0 が入射されたとき、層を横切って反対側に現れる電子東 Γ_1 は、

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 \left(1 - \boxed{(\not x)} \right) dx \tag{7}$$

となる。すなわち、dxにおけるの変化量を考えると、

$$\frac{d\Gamma}{dx} = -\left[(\frac{1}{2}\right)\right]\Gamma \qquad (8)$$

これを解くと、距離 $\lambda_m = (D)$ で、電子東は 1/e に減少する。この距離 λ_m を衝突における (b) と呼ぶ。速度が v である電子の衝突間における平均時間 τ は、v と λ_m を用いて、 $\tau = (+)$ であり、 τ の逆数をとると衝突周波数 f が求まる。

次に、電子とイオンの衝突について考える。この場合は長距離相互作用である (c) 力の影響を最も受ける。静止しているイオンの半径、および原子番号はそれぞれb、およびZで、電子の大きさはイオンの大きさに比べ十分小さいものとする。衝突が起こるのは、最接近距離bにおけるポテンシャルエネルギーが運動エネルギーとほぼ等しい場合であるので、電荷、真空中の誘電率、電子の質量、速度をそれぞれe、 ϵ_0 、 m_e 、 v_e とすると、

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b} = \boxed{(2)}$$

また、衝突断面積 σ はイオンの断面積と考えていいので $\sigma = \pi b^2$ であるとする。さらに、イオン数密度を n_i とすると、衝突周波数 f_{ei} は Zを用い τ (f) と求まる。

イオンが静止しているとき、衝突を考慮した1次元等温プラズマの電子の運動方程式は、

$$m_e n_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial x} \right] = -e n_e E - k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - m_e n_e f_{ei} \mathbf{v}_e$$
 (10)

と表される。ただし、E 、 n_e 、 k_B 、 T_e はそれぞれ電界、電子数密度、ボルツマン定数、電子温度である。 \mathbf{v}_e が十分小さい、あるいは f_{ei} が十分大きければ、対流項の影響は無視できるので、定常状態では、

$$\mathbf{v}_{e} = \boxed{(\beth)} E + \boxed{(\varPsi)} \frac{1}{n_{e}} \frac{\partial n_{e}}{\partial x} \tag{11}$$

となる。この式の(サ)は(d)係数と呼ばれている。

問題[3](解答用紙「青色」に解答してください。)

電荷 e、質量 m のイオンの一様静電磁場中の運動について考える。 の中に適当な語句、あるいは式を挿入し、 $(I) \sim (III)$ の問いに答えよ。

イオンの静電磁場中での運動は以下の運動方程式で表される。

$$m\frac{dv}{dt} = e(E + v \times B) \tag{1}$$

ただし、本問では $v=(v_x,v_y,0)$ 、E=(0,E,0)、B=(0,0,B)とする(E>0,B>0)。また、時間 t=0 において、 $v_x=v_{x0}~(\ge 0)$ 、 $v_y=0$ 、及びイオンは座標原点に存在する。

(1) 式の右辺で表される力を、ア) と呼ぶ。

まず、E=0の場合を考える。

(1) 式のx成分とy成分は以下のように表される。

$$x$$
成分: $m\frac{dv_x}{dt} = \checkmark$ (2)

y 成分:
$$m\frac{dv_y}{dt} = \boxed{\dot{\mathcal{D}}}$$
 (3)

(2)、(3) 式より、vyを消去すると、以下の式になる。

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \boxed{\pm}$$
 v_x (4)

次に、 $E \neq 0$ の場合を考える。このときイオンの速度Vを、

$$v = u + w \tag{5}$$

と置く。ここで、u は定ベクトル、w は E=0 の場合の解とする。

(5) 式を(1) に代入し、wを含まない式を求めると、以下のようになる。

$$E + |\psi\rangle = 0 \quad (6)$$

(6) 式に右から、ベクトル的に B を掛け、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ の公式を用いると、 $u = \boxed{\begin{subarray}{c} \text{ if } \mathbf{c} \text{ if }$

これらより、イオンの運動は、x軸方向の等速直線運動と円運動の和として表されることがわかる。このことを考慮して、以下の問いに答えよ。

- (I) $v_{x0}=0$ の時のイオンの軌跡を図示し、yの最大値を求めよ。また、この曲線は通常何と呼ばれるか。
- (II) イオンがx軸上を正方向に一定速度で運動するとき、x方向速度の初期値 v_{x0} の値を求めよ。

問題[4] 光量子工学 (解答用紙「黄色」に解答してください。)

以下の問いに対して、空欄(ア)から(ツ)に適当な式もしくは語句を記入しなさい。語句が 書かれているところでは適当な方を選びなさい。

電磁波に対する物質の応答について古典的に考える。物質内で電磁波に最もよく応答するの は電子である。原子核は電子に比べ質量が大きいため、電子のみの運動を考えることにする。 電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m\Gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} + m\omega_0^2\mathbf{r} = -e(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B})$$
 (1)

と表す事が出来る。ここでr, E, Bは、電子の平衡位置からの変位ベクトル、外部から印加する電界ベクトルと磁束密度ベクトルである。m, e, ω_o , Γ はそれぞれ電子の質量、素電荷、系の共鳴角周波数、および衝突の確率である。またこの運動方程式の左辺第1項は (r) 力、第2項は (d) 力、第3項は (d) 力を表し、右辺は (d) 力を表している。

今、磁束密度を無視し、Eの方向を 1 次元(x方向のみ)に限定する。電界 Eが角周波数 ω を用いて $E=E_0\exp(-i\omega t)$ と表されるとき、電子のx方向への変位 Xは $X=X_0$ (オ)の形となる。ここで、 $i^2=-1$ である。これらを (1) 式から得られる 1 次元の運動方程式に代入すると

$$m\left(\begin{array}{|c|c|}\hline (\mathcal{D})\end{array}\right)X = -eE = -eE_0 \exp(-i\omega t) \tag{2}$$

となり変位 Xを求めることができる。原子 1 個が持つ電気双極子能率 p は p=-eX であり、単位体積当たりの原子の個数をNとすると、分極 P は

$$P = (\ddagger) = \varepsilon_0 \chi E \tag{3}$$

となる。ここで ϵ_0 は真空の誘電率、 χ は (0) であり角周波数 ω の関数として求められる。プラズマ角周波数 $\omega_p = \sqrt{Ne^2/m\epsilon_0}$ を用いると、 χ の実部 χ と虚部 χ はそれぞれ

$$\chi'(\omega) = \omega_p^2 \qquad (5)$$

$$\chi''(\omega) = \omega_p^2 \qquad (\exists)$$

となる。

一方、非線形分極と磁化の影響を無視すると、物質中での電磁波の伝搬は、

$$\nabla^2 E = \varepsilon_0 \mu_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 E}{\partial^2 t} \tag{6}$$

と表される。ここで μ_0 は真空の透磁率である。いま物質中を z 方向に伝搬する電磁波の波数 k を $k=\beta+i\alpha$ とおく。 $\epsilon_0\mu_0=1/c^2$ (c は真空中の光速)を用いると(6)式は

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \boxed{(+)} = (\beta + i\alpha)^2 \tag{7}$$

となり、物質中を伝搬する電磁波の電界 E_{out} は

$$E_{out} = E_0 \exp(-\alpha z) \cdot \exp[i(\beta z - \omega t)]$$
 (8)

となる。 α が正の時、 α は電界の減衰係数を表し、電磁波の強度の減衰係数は (>) となる。 $\alpha=0$ の時、k と屈折率 n との関係は

$$k = \beta = n \quad (\beta) \tag{9}$$

となる。 $\alpha \neq 0$ の時、kと複素屈折率 $\eta = n + i\kappa$ との関係は

$$k = \beta + i\alpha = \eta$$
 (\(\tau\)) = $(n + i\kappa)$ (\(\tau\))

となる。複素屈折率 η は χ を使って

$$\eta^2 = 1 + \chi = (n + i\kappa)^2 \tag{11}$$

と表され、それぞれ η と χ の虚部と実部を比較して

(12)
$$= 1 + \chi' = 1 + \omega_p^2$$

$$2n\kappa = \chi'' = \omega_p^2 \qquad (\exists)$$

となる。

特に金属など自由電子が支配的な時は、 $\omega_0 = \underbrace{ (y) }$ となり、ドルーデの式となる。 $\omega > 0$ とすると、ドルーデの式において、 η^2 の実部が 0 となるのは、 $\omega = \underbrace{ (9) }$ の時である。また、 $\omega < (9)$ の時に、 η^2 の実部は $\underbrace{ (f) }$ 正、 $\underline{ }$ となる。これは電磁波が物質中に入り込めない事を意味し、金属の高い反射率の原因になっている。

さらに無衝突プラズマのような場合は、 (ツ) = 0となり、複素屈折率はプラズマ角周波数のみの関数となる。

問題[5] (解答用紙「水色」に解答してください。)

問1.以下の空欄(ア)~(ツ)に適する文字式、数式、語句を埋めよ。

(1) 電界 E、電荷密度 ρ 、磁束密度 B、真空中の誘電率 ϵ_0 としたとき、電束に関するガウスの法則を表す微分方程式は

ファラデー・マクスウェルの法則を表す微分方程式は

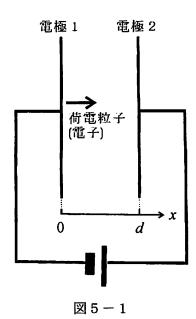
である。今、定常状態を考えると(2)式は

となり、このことから電界 E は、ポテンシャル V を用いて

$$\boldsymbol{E} = \left(\begin{array}{c} (\boldsymbol{x}) \end{array} \right) \tag{4}$$

とおける。(4)式を(1)式に代入して、次のポアソンの式を得る。

(2)図5-1に示すように、距離dだけ離れた2枚の平行平板電極があり、その一方の電極1(V=0)から、初速度v=0の荷電粒子(電子)が供給され、荷電粒子の量は充分供給可能なものとする。他方の電極2には、荷電粒子を加速する電圧が印加されており、両電極の電位差を V_0 とする。荷電粒子流の進む方向(x方向)の1次元として、2電極間を流れる定常電流について考え、荷電粒子の進む方向に働く、空間電荷効果を以下で考える。



x 方向1次元の場合、(5)式は、

となる。電流密度を J_0 とすると、電流は連続でどの x の位置においても同じ値を持たねばならない。電荷密度 ρ と速度 vを用いて、

である。

一方、電荷 q と質量 m をもつ荷電粒子のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和は、位置 x に関わらず一定であり、x=0 の電極 1 で V=0, かつ初速がゼロであるから、位置 x でのポテンシャルと速度をそれぞれ V, v とすると、

$$(\mathcal{I}) = 0 \tag{8}$$

が成立する。 今、荷電粒子流として電子電流を考え、(6) \sim (8) 式より ρ と ν を消去して、以下では、絶対値のみを考えると、

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \boxed{ (7) \qquad V^{-1/2} } \tag{9}$$

両辺に $2\frac{dV}{dx}$ を掛けて x で積分すると

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \boxed{(3)} \cdot (7) \cdot V^{(4)} + C_1 \quad (10)$$

V=0 (x=0)で、 $\frac{dV}{dx}=0$ と仮定すると $C_1=0$ となり (10)式より、

(11)式を変数分離で積分表示して扱い易い形に変形すると

$$+C_2 \tag{12}$$

となり、積分を実行して、x=0でV=0より、 $C_2=0$ となるから、

$$V =$$
 (13)

となる。

x=d における電極2の電圧が V_0 であるから、(13)式から J_0 について解くと、

となり、この式は (ツ) の式と呼ばれる。

問2 図5-2は、小さな焦点を持つ透過試験用X線発生装置の構造の概略図である。 この装置に関連して以下の設問(1)~(4)に答えなさい。

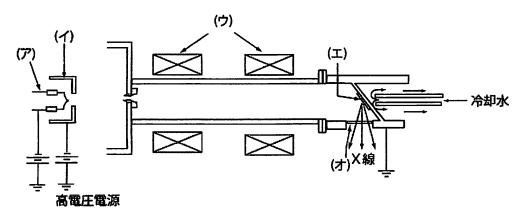


図5-2 X線発生装置の構造図

- (1) X線発生装置を構成する要素(ア)~(ウ)の名称を下の括弧の中から選びなさい。 また、それらの構成要素の機能あるいは役割について簡単に説明しなさい。 (イオン源、ヘアピンフィラメント、アパーチャ、集束カップ、重心調整器、磁界 レンズ、静電レンズ、水冷ターゲット)
- (2) X線発生装置を構成する要素(エ)、(オ)にはどのような材料が用いられるか。下の括弧の中から選びなさい。また、それぞれの材料の、選択のための要件について簡単に説明しなさい。 (シリカガラス、鉄、アルミニウム、タングステン、ポリエチレンフィルム、ベリリウム、金)
- (3) 図5-3は、この X 線装置から発生 する X 線の波長スペクトルの概略図 である。このスペクトルの形状と X 線の発生機構の関係について説明し なさい。
- (4) もしビーム電流値を変えずに加速電圧(高電圧電源)のみを高くすれば、図5-3の波長スペクトルの形状はどのように変わるか。簡単に説明しなさい。

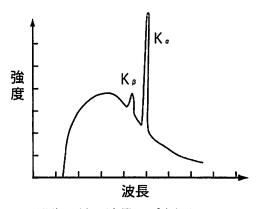


図5-3 発生 X線の波長スペクトル