平成２７年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　　礎

（平成２６年８月２６日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．５問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

以下の問いに答えよ．

(1) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+6x-3}{x^3-3x+2}$ の不定積分を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ．

(3) テイラーの定理を用いて，$\sin(31^\circ)$ の近似値を有効数字４桁で求めよ．
必要ならば，下表の近似値を用いること．

$\pi \approx 3.1416$	$\pi/180 \approx 1.7453\times10^{-2}$
$(\pi/180)^2 \approx 3.0462\times10^{-4}$	$(\pi/180)^3 \approx 5.3166\times10^{-6}$
$\sqrt{2} \approx 1.4142$	$\sqrt{3} \approx 1.7321$

(4) $x=\cot y$ とする．
$\dfrac{dy}{dx}$ ならびに $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を y の関数として求めよ．

ヒント：(2) $x=\tan(\dfrac{\theta}{2})$ を用いて変数変換する．

ヒント：(4) $\cot y=\dfrac{1}{\tan y}$

$\boxed{2}$

(1) 二次の正方行列$\mathbf{M}$に対応する線形変換は，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$ へ，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 63 \\ 33 \end{pmatrix}$ へ移すという．行列$\mathbf{M}$を求めよ．

(2) 実対称行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ に関し，以下の問いに答えよ．

1) $\mathbf{A}$の行列式を計算せよ．

2) $\mathbf{A}$の固有値λを求めよ．ただし，$a\neq 0$，$b\neq 0$とする．

3) $\mathbf{A}$のすべての固有値が正であるためのa，bに関する条件を求めよ．

(3) 実対称行列 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化せよ．

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ.

(1) 常微分方程式 $\sin x\cos^2 y+\dfrac{dy}{dx}\cos^2 x=0$ の一般解を求めよ.

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2$ の一般解を求めよ.

(3) $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=0$ で与えられる常微分方程式について考える.
ただし, $P(x)+Q(x)+R(x)=0$ が成立するものとする.

1) $y=e^x$ が $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=0$ の解となることを示せ.

2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(-2x+1)\dfrac{dy}{dx}+(x-1)y=0$ の一般解を求めよ.

4

真空中の静電荷による電場について以下の問いに答えよ．真空の誘電率はε_0とする．

(1) 半径aの無限に長い円柱状の導体の表面に，単位長さあたりλ ($\lambda > 0$)の電荷が一様に分布しているとする．

1) 導体内外の電場の大きさEを，導体の中心軸からの距離rの関数として求めよ．

2) Eを縦軸，rを横軸として，両者の関係を図示せよ．

(2) 図 1 に示すように，半径aの無限に長い円柱状の導体 A, B が，中心軸間の距離$2d$ ($d > a$)だけ離れて平行におかれ，単位長さあたり$+\lambda$，$-\lambda$の電荷をそれぞれに与えたとする．導体 A, B の中心軸は，z軸と平行であり，xy面内の$(-d, 0), (d, 0)$を通るとする．このとき，導体外部の電場を，単位長さあたり$+\lambda$，$-\lambda$の電荷が一様に分布した無限に長い線状電荷A′, B′ による電場と等価として考える．

1) aがdと比較して十分に小さく($a \ll d$)，図 1(a)に示すように，線状電荷A′, B′の位置が，導体 A, B の中心軸に等しいとする．このとき，導体 A, B 間のx軸上の点の電場の大きさEを，導体 A の中心軸からの距離r ($a \leq r \leq 2d - a$)の関数として求めよ．

2) 1)の条件の下で，導体 A の電位Vを求めよ．ただし，原点 O の電位を0とする．電位Vは，単位電荷を原点 O から導体 A の表面まで電場に逆らって運ぶのに必要な仕事として求められる．

3) 1)の条件の下で，導体 A, B の中心軸からの距離がr_A，r_B ($r_A \geq a, r_B \geq a$)である点 P の電位を，原点 O の電位を0として求め，$r_A/r_B = C$（一定）を満たす点の軌跡が，等電位面となることを示せ．

4) 厳密には，二本の導体 A, B 上の電荷は，互いに影響を及ぼすため，線状電荷A′, B′の位置は，図 1(b)に示すように，導体 A, B の中心軸からずれる．線状電荷A′, B′間の距離を$2s$ ($s < d$)とし，xy平面における導体 B の表面上の点P′と線状電荷A′, B′の距離を$r_{A'}, r_{B'}$とする．このとき$r_{A'}/r_{B'}$ およびsをa, dを用いて表せ．

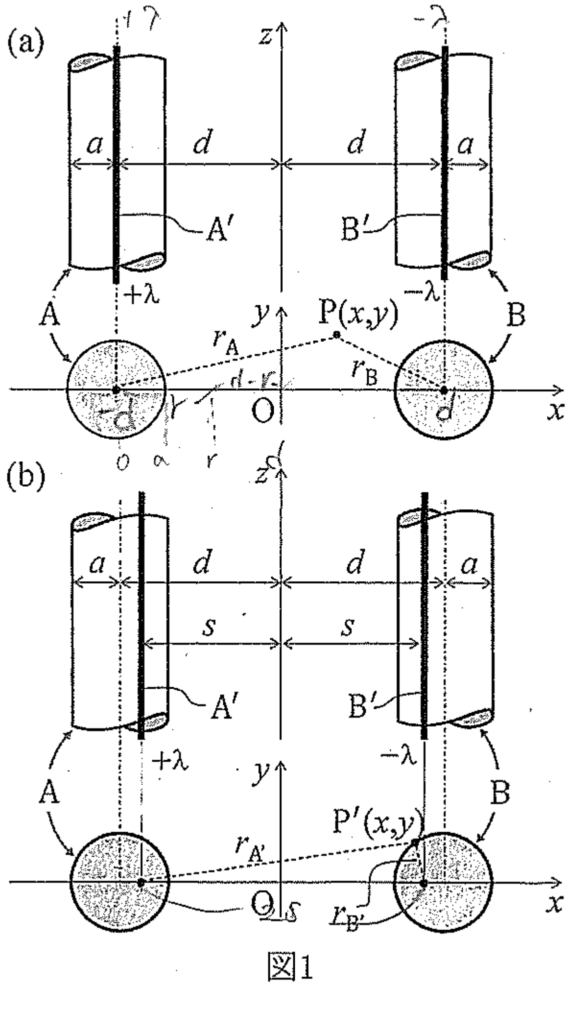

図1

5

(1) 図 1 に示すように，真空中（透磁率 μ_0）において，y 軸上に置かれた無限長の導線 L 上を正の方向に電流 I（$I>0$）が流れている．また，一辺の長さ $2a$ の正方形状の回路 A が xy 平面に置かれている．回路 A の中心座標を $(x_A,\ 0)$ とし，$0<a<x_A$ とする．

1) xy 平面上の任意の点 $(x,\ y)$ における磁束密度の大きさを求めよ．

2) 回路 A を貫く磁束を求めよ．

3) 回路 A を x 軸方向に動かした時に回路 A に誘導される起電力を求めよ．ただし，回路 A の中心の移動速度を dx_A/dt，起電力の符号は反時計回りを正とせよ．

4) 3)において，回路 A の 4 辺 PQ, QR, RS, SP に沿って誘導される電場 E_{PQ}，E_{QR}，E_{RS}，および E_{SP} をそれぞれ求めよ．ただし，回路 A の中心の移動速度を dx_A/dt，電場の符号は反時計回りを正とせよ．

(2) 図 2 に示すように，一様な電場と磁場が存在する空間での電子の運動を考える．電場は，大きさを E（$E\geq 0$），向きを y 軸の負方向とする．磁場については，磁束密度の大きさを B（$B\geq 0$），向きを z 軸の正方向とする．ただし，座標系 xyz は右手系とし，重力は考えない．電子の質量を m，電荷を $-q$（$q>0$）とする．時刻 $t=0$ における電子の位置を $(0,0,0)$，速度を $(0,\ v_0,\ 0)$（$v_0>0$）とする．

1) 電子の速度を $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ とし，x，y，z の各方向について電子の運動方程式を示せ．

2) 1)の結果を用いて，$\dfrac{d^2v_y}{dt^2}=-\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 v_y$ を示せ．

3) 電子の速度 $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ を時刻 t の関数として求めよ．

4) $E=0$ とし，電子の運動の軌跡を表す方程式を求め，その軌跡を図示せよ．

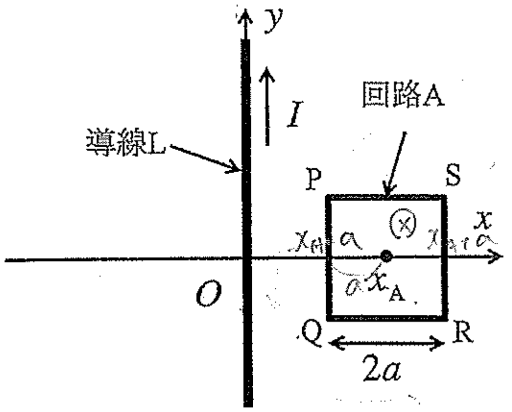

図 1

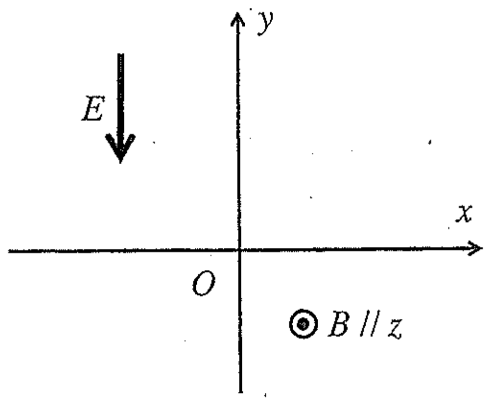

図 2

正