

**問題 1 1 電気回路・電子回路** 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 の回路について、次の問 (1) ～ (3) に答えよ。なお、導出過程も記すこと。図 1 の回路は、直流電源  $E = 80 \text{ V}$ 、交流電源  $v(t) = \sqrt{2}V \cos \omega t$  (実効値  $V = 80 \text{ V}$ 、角周波数  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ )、抵抗  $R_1 = 2 \Omega$ 、 $R_2 = 6 \Omega$ 、インダクタンス  $L = 1 \text{ H}$ 、キャパシタンス  $C$ 、およびスイッチ  $S_1$ 、 $S_2$  から構成されている。

(1) スイッチ  $S_2$  を開放した状態で、時刻  $t = 0 \text{ s}$  でスイッチ  $S_1$  の端子を 0 から 1 へ切り換え直流電源  $E$  を接続したときの電流  $i(t)$  の式を導出せよ。

(2) 問 (1) の状態で十分時間が経過してから、時刻  $t = t_1$  でスイッチ  $S_1$  の端子を 1 から 2 へ切り換え交流電源  $v(t)$  を接続したときの電流  $i(t)$  は、過渡現象を伴わない次式の正弦波電流になった。電流実効値  $I_1$ 、力率角  $\varphi$ 、時刻  $t = t_1$  における交流電源の位相角  $\omega t_1$  を求めよ。

$$i(t) = \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad (t \geq t_1)$$

(3) 問 (2) の状態において、時刻  $t = t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) でスイッチ  $S_2$  を閉じ、さらに十分時間が経過した状態において、電源力率 1 の関係が成り立った。このときのキャパシタンス  $C$  および電流  $i(t)$  の実効値  $I_2$  を求めよ。

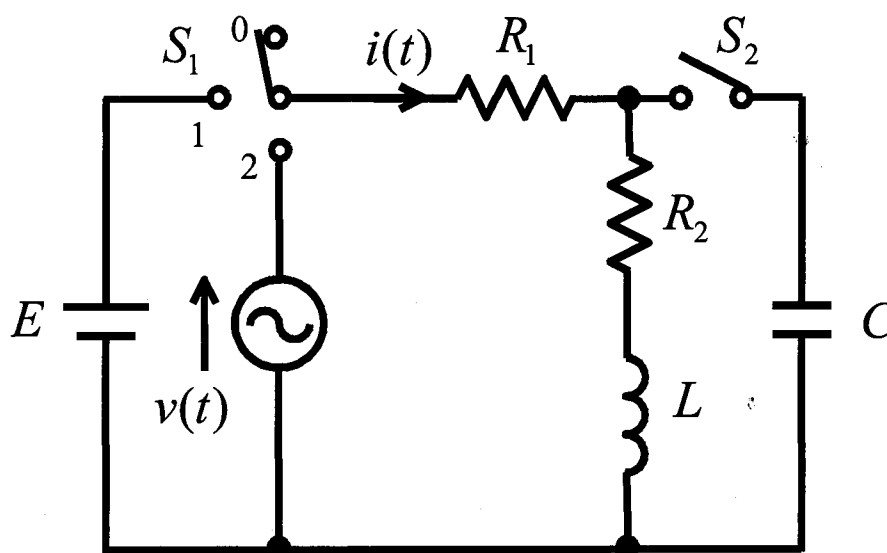


図 1

Ⅱ 図2および図3はオペアンプを用いた増幅回路である。以下の問(1)～(5)について答えよ。ただし、オペアンプに関しては、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロとする。

(1) 図2の回路において、オペアンプの利得 $\mu$ を無限大としたときの電圧増幅率 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

(2) 図2の回路において、利得 $\mu$ を有限としたときの電圧増幅率 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

(3) 図3の回路において、利得 $\mu$ が無限大の場合の節点①における節点方程式を求めよ。ただし、キャパシタンス $C$ のインピーダンス $\frac{1}{j\omega C}$ は、 $\frac{1}{sC}$ と表せ。

(4) 図3の回路において、利得 $\mu$ が無限大の場合の節点②における節点方程式を求めよ。

(5) 問(3)と問(4)の結果から、電圧増幅率 $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

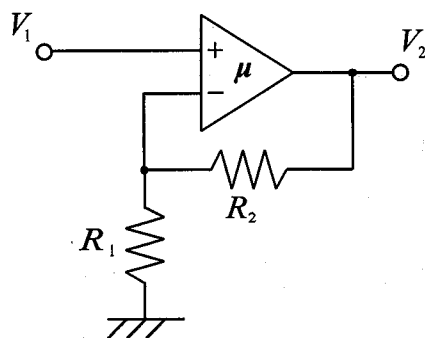


図2

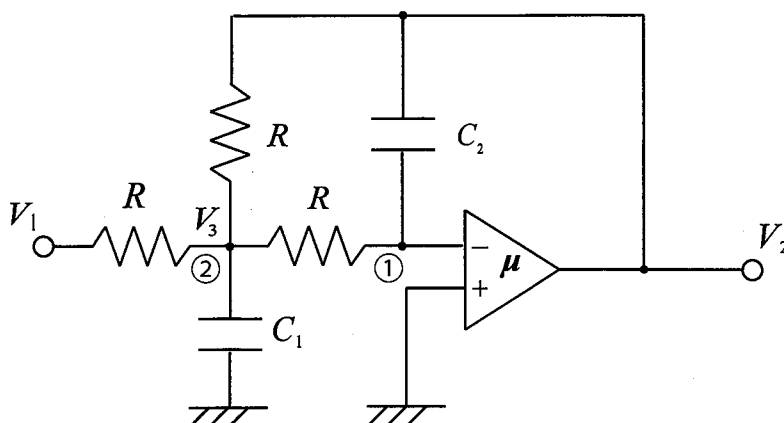


図3

問題 12 計測数理解析 設問すべてについて解答すること。

I 二つの離散的な確率変数  $M, N$  を考える。 $N$  の分布はパラメーター  $\lambda$  のポアソン分布であり,  $\{N = n\}$  に関する  $\{M = k\}$  の条件付き確率  $\mathbf{P}\{M = k|N = n\}$  が次のように与えられている。

$$\mathbf{P}\{N = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{P}\{M = k|N = n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$$

次の (1) ~ (6) の問いに答えよ。

(1)  $\{N = n\}$  に関する  $M$  の条件付き期待値  $\mathbf{E}[M|N = n]$  を以下の計算を続けることで求めよ。

$$\mathbf{E}[M|N = n] = \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}\{M = k|N = n\} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

(2)  $N$  の期待値  $\mathbf{E}[N]$  を求めよ。

(3)  $M$  の期待値  $\mathbf{E}[M]$  を (1) と (2) の結果を用いながら以下の計算を続けることで求めよ。

$$\mathbf{E}[M] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[M|N = n] \mathbf{P}\{N = n\} =$$

(4)  $\mathbf{E}[N^2] = \mathbf{E}[N(N-1)] + \mathbf{E}[N]$  を求め、その後に  $N$  の分散  $\mathbf{Var}[N]$  を求めよ。

(5)  $MN$  の期待値  $\mathbf{E}[MN]$  を次の計算を続けることで求めよ。

$$\mathbf{E}[MN] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[MN|N = n] \mathbf{P}\{N = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{E}[M|N = n] \mathbf{P}\{N = n\} =$$

(6) 共分散  $\mathbf{Cov}(M, N) = \mathbf{E}[(M - \mathbf{E}[M])(N - \mathbf{E}[N])]$  を求めよ。

II 常微分方程式  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  に従う  $y(x)$  について,  $y(x_0) = y_0$  とする. ここで  $f(x, y)$  は, ある与えられた関数である.  $x$  の刻み幅を  $h$  として,  $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots$  での  $y$  値  $y_1, y_2, \dots$  を順に求める数値計算法に関連して, 以下 (1) と (2) に答えよ.

(1) オイラー法では,  $x$  を  $x_i$  から  $x_{i+1}$  に 1 ステップ進める際の  $y$  値を

$$y_{i+1} = y_i + hf_i$$

とする. ここで  $f_i \equiv f(x_i, y_i)$  である.  $x = x_i$  を中心とする  $y$  のテイラー展開を考えることで, オイラー法では  $x$  を 1 ステップ進める際に,  $h$  の何次の誤差が生じるか評価せよ.

(2) 改めて,  $x$  を  $x_i$  から  $x_{i+1}$  に 1 ステップ進める際の  $y$  値を, ある定数  $a$  と  $b$  を用いて

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + ah, y_i + bhf_i)$$

とする計算法を考える. この表式が  $y_{i+1} = y_i + h \left( \frac{dy}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)_i$  と,  $h$  の 2 次までで一致するようにしたい.  $f$  に関する  $(x, y) = (x_i, y_i)$  を中心とするテイラー展開を考えることで,  $a$  と  $b$  をどのように設定する必要があるか答えよ. また, この計算法はオイラー法よりも高精度であるが, その理由を説明せよ.

問題 1 3 制御工学 設問すべてについて解答すること。

- I 図 1 に示す RC 回路において、電圧  $v_i(t)$  を入力信号、電圧  $v_o(t)$  を出力信号とする。ただし  $R$  は抵抗値、 $C$  は静電容量を表わし、 $R=1[\Omega]$ 、 $C=1[F]$  とする。

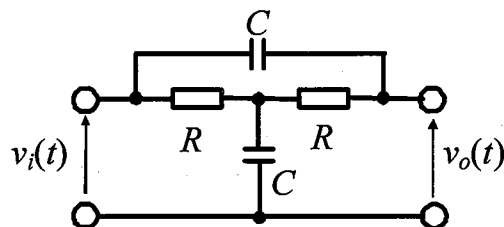


図 1 RC 回路

このとき、回路の伝達関数は  $G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + ds + e}$  であった。伝達関数  $G(s)$  の中の  $(a, b, c, d, e)$  の値を求めよ。

- II 図 2 の制御系について、(1) ~ (5) の問いについて答えよ。ただし、 $R(s)$ 、 $E(s)$ 、 $U(s)$ 、 $D(s)$ 、 $Y(s)$  は、それぞれ目標値  $r(t)$ 、偏差  $e(t)$ 、操作量  $u(t)$ 、外乱  $d(t)$ 、制御量  $y(t)$  のラプラス変換を表わす。(1) ~ (4) の問いについては、 $P(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$  とする。

- (1)  $K_1(s)=0$ 、 $K_2(s)=1$ 、 $K_3(s)=2$ 、 $D(s)=0$  とする。システムの初期状態を零とし、 $R(s)$  を単位インパルス関数としたときの  $y(t)$  を求めよ。
- (2)  $K_1(s)=0.5$ 、 $K_2(s)=1$ 、 $K_3(s)=K\left(1+\frac{5}{s}\right)$  とする。制御系が安定となるゲイン  $K$  の範囲を求めよ。
- (3)  $K_1(s)=2$ 、 $K_2(s)=1$ 、 $K_3(s)=2$ 、 $D(s)=0$  とする。 $R(s)$  を単位ステップ関数としたときの定常偏差と、 $R(s)$  を単位ランプ関数としたときの定常偏差をそれぞれ求めよ。
- (4)  $K_1(s)=2$ 、 $K_2(s)=1$ 、 $K_3(s)=2$ 、 $R(s)=0$  とする。 $D(s)$  を単位ステップ関数としたときの定常偏差を求めよ。
- (5)  $K_2(s)=G_d(s)$  とする。 $R(s)$  から  $Y(s)$  までの伝達関数が、 $G_d(s)$  と一致するための  $K_1(s)$  を求めよ。

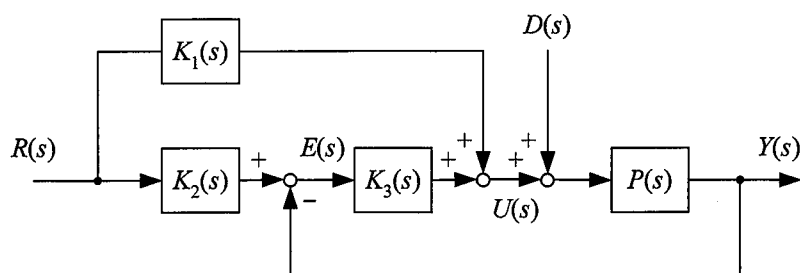


図 2 制御系

Ⅲ 図3は、伝達関数  $G(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+100)}$  を持つシステムのボード線図におけるゲイン特性を折れ線近似で表したものである。図中の(a)の角周波数の値、(b)～(c)のゲインの値と(d)の傾きについて、次の選択肢の中から該当するものを選択し、記号で答えよ。

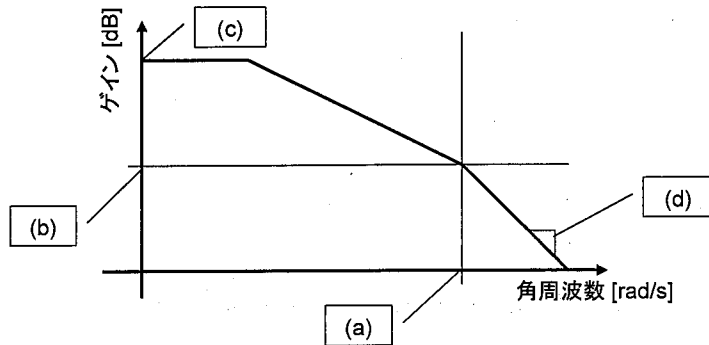


図3 ゲイン特性の折れ線近似

選択肢：

ア:-20 イ:-10 ウ:0 エ:10 オ:20  
 カ:30 キ:40 ク:50 ケ:60  
 コ:0.001 サ:0.01 シ:0.1 ス:1  
 セ:100 ソ:1000 タ:-10dB/dec  
 チ:-20dB/dec ツ:-30dB/dec  
 テ:-40dB/dec ト:該当なし

Ⅳ 図4中の(イ)～(ニ)は、異なるシステムのゲイン特性を表している。(イ)～(ニ)のゲイン特性を持つ伝達関数を下の選択肢から選び記号で答えよ。

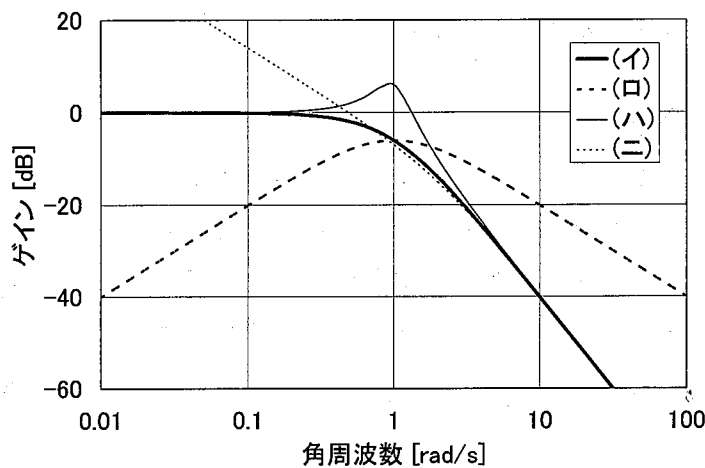


図4 システムのゲイン特性

選択肢

- (a)  $G(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}$  (b)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$  (c)  $G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1}$  (d)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$   
 (e)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$  (f)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$  (g)  $G(s) = \frac{5s + 1}{s^2 + 2s + 1}$  (h)  $G(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 2s + 1}$   
 (i)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10}$  (j)  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 20s + 100}$  (k)  $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 1}$  (l)  $G(s) = \frac{s}{2s + 1}$   
 (m)  $G(s) = \frac{1}{2s + 1}$  (n)  $G(s) = \frac{s^2}{2s + 1}$  (o)  $G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$  (p) 該当なし

**問題 1 4 力学・材料力学** 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (2) の間について答えよ。ただし、重力加速度は  $g$  で一定とし、空気抵抗などは無視できるものとする。

- (1) 断面が半径  $a$  の四分円 (中心点  $O$ ) となる斜面を持った高さ  $a$  の台が水平面上に固定具で固定されている。この台の斜面の上端  $A$  に質点を置き静かに手を離したときの、点  $O$  からみた斜面上の質点の運動について、以下の間に答えよ。質点の位置は図 1 の角  $\theta$  で指定する。摩擦は考えない。

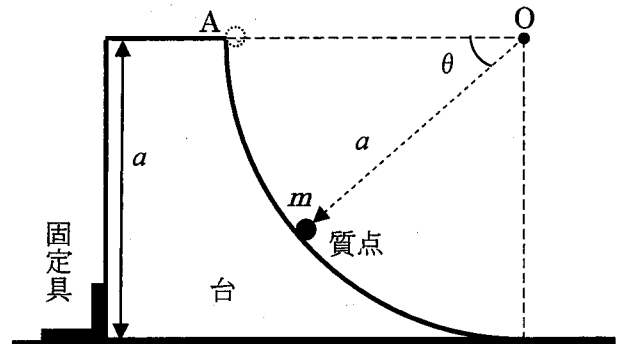


図 1

- 角速度を  $\omega$  として、質点の力学的エネルギーを求めよ。ただし、点  $A$  を位置エネルギーの基準点とする。
- 質点の角速度と角運動量を  $\theta$  の関数として求めよ。
- 角速度を  $\omega$  として、質点の角度方向の運動方程式を書き下せ。
- 質点に働く垂直抗力を角  $\theta$  の関数として求めよ。
- 台の固定具に働く水平方向の力の最大値を求めよ。

- (2) 図 2 のように、質量  $M$ 、半径  $a$  の円板の周囲に伸び縮みしない軽い糸を巻き付け、糸の一端を持って円板を鉛直面内で運動させる。このとき、糸はすべらないものとする。運動を始める前の円板の重心の座標を原点として、鉛直下向きに  $x$  軸、時計回りに回転角  $\theta$  を取って以下の問いに答えよ。ただし、円板のこの運動における慣性モーメントは  $I = \frac{Ma^2}{2}$  である。また、糸の張力を  $F$  とする。

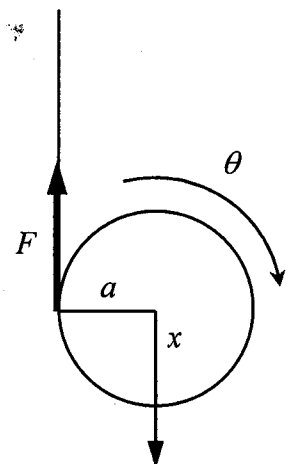


図 2

- 糸の一端を固定した場合、円板は重力で落下する。この運動を解析するのに必要な 3 本の方程式を書き出せ。
- この時、円板の角加速度  $\beta$  と糸の張力  $F$  を求めよ。
- 円板の重心が動かないように糸を上を引き上げるときの糸の張力  $F_s$  を求めよ。
- (c) の時の円板の角加速度  $\beta_s$  を求めよ。

II 次の(1), (2)の問いについて答えよ。

(1) 図3に示す長さ  $3a$ , 直径  $d$ , 断面二次極モーメント  $I_p$ , 横弾性係数  $G$  の真直な丸棒がある。棒の両端を剛体壁に固定し, 左端から距離  $a$  の位置にねじりモーメント  $T$  を作用させる。このとき以下の各問いに答えよ。

- 左右の剛体壁から受けるねじりモーメント  $T_L$ ,  $T_R$  の大きさを求めよ。
- ねじりモーメント  $T$  を作用した横断面のねじれ角  $\phi$  を求めよ。
- 丸棒に生じるせん断応力の最大値  $\tau$  を求めよ。

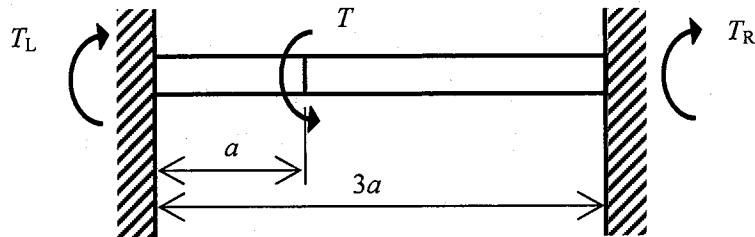


図3

(2) 図4に示す長さ  $5a$ , 一辺の長さ  $c$  ( $c \ll a$ ) の正方形断面の真直なはり ABC を考える。左端 A から出た腕に荷重  $P$  を負荷する。座標軸, せん断力  $F$ , 曲げモーメント  $M$  は図に示す方向を正とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- 支点反力  $R_B$ ,  $R_C$  (上向き正) を求めよ。
- せん断力図, 曲げモーメント図を描け。
- 支点 B でのはりに働く曲げ応力の大きさ  $\sigma_B$  を求めよ。

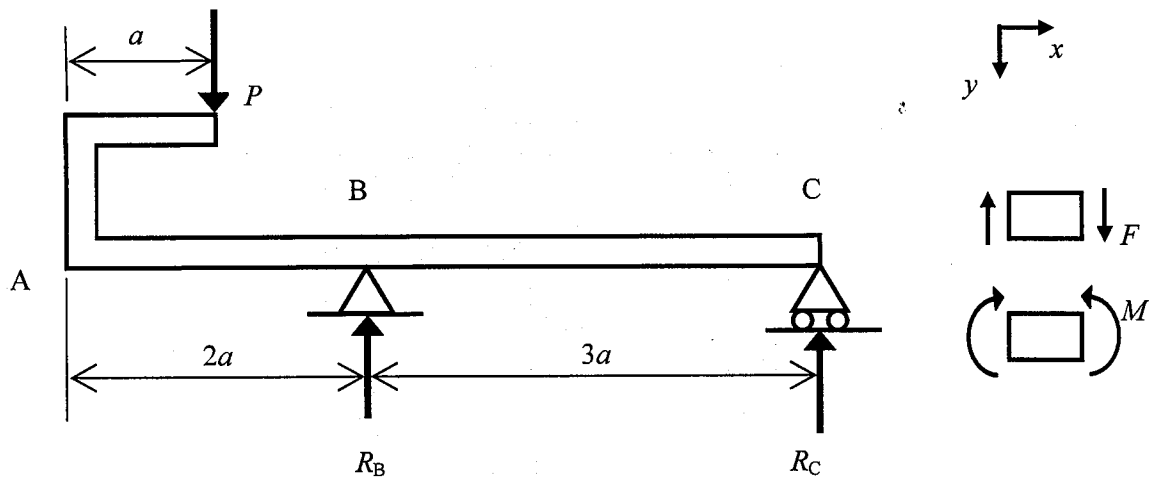


図4

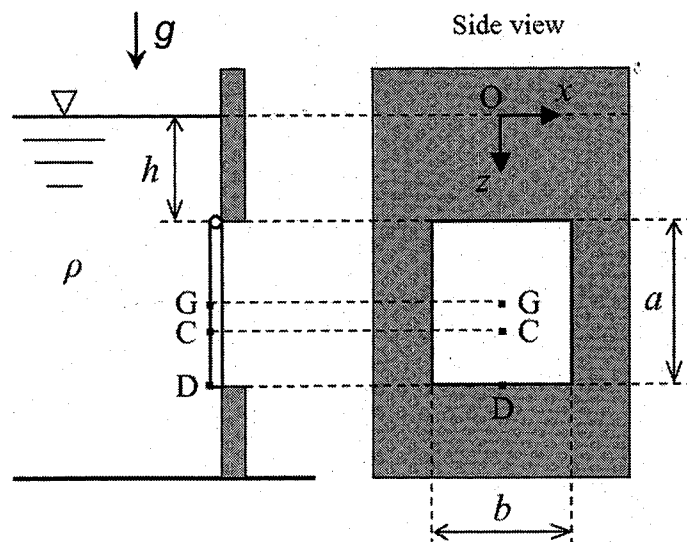


**問題 15 流体力学** 設問すべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙について，設問Ⅰを表面，設問Ⅱを裏面に記入すること。また，各設問の小問について，たとえば (1)  $x=y+z$  のように，最終的な解答に小問の番号を付して下線で明記すること。

Ⅰ 図のように，高さ  $a$ ，幅  $b$  の長方形板の蓋を用いて，同じ大きさの長方形の孔から左側の液体（密度  $\rho$ ）が右側へ流出するのをせき止めている。長方形板は液体の自由表面から深さ  $h$  の上辺で蝶番（ちょうつがい）によって固定されており，鉛直な固定壁にすき間なく接している。また，図のように固定壁上にデカルト座標  $(x, z)$  をとる。このとき，次の（１）～（６）の問いに答えよ。ただし，重力加速度を  $g$ ，長方形板の蓋の重さは無視できるものとし，解答には図中の記号  $(a, b, h, \rho, g)$  を用いること。

- （１）長方形板の図心  $G$ （液体側）における静圧（ゲージ圧） $\bar{p}$  を求めよ。
- （２）長方形板全体に作用する全圧力  $F$  を求めよ。
- （３）長方形板に関し，図心  $G$  を通り  $x$  軸に平行な軸まわりの断面二次モーメント  $I_G$  を求めよ。
- （４）長方形板の圧力中心  $C$  の液面からの深さ  $z_C$  を求めよ。
- （５）長方形板の蓋の下端  $D$  を直角に引いて液体を流すために必要な力  $F_D$  を求めよ。
- （６）長方形板の蓋を跳ね上げた場合に，長方形の孔から流出する液体の体積流量  $Q$  を求めよ。ただし，各種損失や縮流の影響は無視する。ヒント：理想的なせきの体積流量と同様に計算できる。



Ⅱ 水平面に対して角度 $\theta$  傾いた斜面上を流れ落ちる厚さ $H$ の2次元・定常・非圧縮の完全に発達した粘性流体(粘度 $\mu$ , 密度 $\rho$ )の流れ(層流)について考える。図のように斜面上にデカルト座標系 $(x, y)$ をとり, それぞれの方向の速度成分を $(u, v)$ とする。流体は鉛直下向きに重力(重力加速度 $g$ )を受け, さらに斜面からの摩擦力を受ける。そのため, 流れは完全に発達した2次元の定常流となる。 $y=H$ は自由表面となり, そこでの圧力 $p$ は大気圧( $p_a$ )となる。このとき, 次の(1)～(7)の問いに答えよ。

(1) 2次元・定常・非圧縮流れの連続の式を示せ。

(2) 境界条件として, 底面上( $y=0$ )での速度 $u, v$ を示せ。

(3) この流れ場において,  $v(x, y)=0$ であることを示せ。

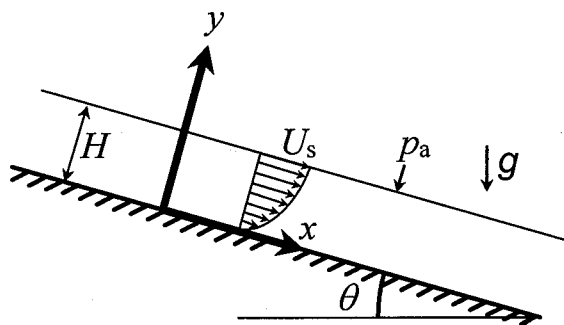
(4) 2次元・定常・非圧縮流れのナビエ・ストークス方程式の $y$ 成分を示せ。

(5) 自由表面上( $y=H$ )での圧力を $p_a$ とし, 圧力 $p$ を $p_a, \rho, g, \theta, H, y$ を用いて示せ。

(6) 2次元・定常・非圧縮流れのナビエ・ストークス方程式の $x$ 成分を示せ。

(7) 自由表面上( $y=H$ )で大気から受けるせん断応力 $\left(\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\right)$ を零とする。このとき,

自由表面上( $y=H$ )の速度 $U_s$ を用いて正規化された $x$ 方向速度成分 $u/U_s$ を示せ。



**問題 1 6 熱力学** 設問すべてについて解答すること。

I 低温熱源（温度  $T_0$  [K]）と高温熱源（温度  $2T_0$  [K]）を用いる再生ガスサイクル（準静的過程）について考えよう。このサイクルでは、まず状態 1 から状態 2 まで低温熱源下（温度  $T_0$ ）で等温圧縮した後、状態 2 から状態 3 まで等積加熱し、次に状態 3 から状態 4 まで高温熱源下（温度  $2T_0$ ）で等温膨張させ、状態 4 から等積冷却で状態 1 に戻る。このサイクルの特徴は、等積冷却で放出する熱をそのまま等積加熱で吸収する熱に再生利用することで、熱効率を実質的に向上できる点にある。なお、作動ガスは、質量  $m$  [kg]、ガス定数  $R$  [J/(kg·K)]、定積比熱  $c_v$  [J/(kg·K)] の理想気体とし、サイクルにおけるシリンダの最小体積は  $V_0$  [m<sup>3</sup>]、最大体積は  $6V_0$  [m<sup>3</sup>] とする。また、熱の符号は、熱が系に入る場合を正、出る場合を負と定義する。仕事の符号は、系が仕事をする場合を正、仕事をされる場合を負とする。

- (1) このサイクルの  $p$ - $V$  線図（圧力-体積線図）と  $T$ - $S$  線図（温度-エントロピ線図）を示せ。なお、定性的で良いので各状態変化の特徴が分かるような図とし、各状態を図中に点と番号で記すこと。
- (2) 状態 1 から状態 2、状態 2 から状態 3、状態 3 から状態 4、状態 4 から状態 1 の各過程で出入りする熱量  $Q_{12}$ ,  $Q_{23}$ ,  $Q_{34}$ ,  $Q_{41}$ （単位は全て [J]）およびエントロピの変化  $\Delta S_{12}$ ,  $\Delta S_{23}$ ,  $\Delta S_{34}$ ,  $\Delta S_{41}$ （単位は全て [J/K]）を求めよ。ただし、 $T_0$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $c_v$  の中から必要なものを用いて示すこと。
- (3) このサイクルの仕事  $W$  [J] および実質的な熱効率  $\eta$  を求めよ。ただし、 $T_0$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $c_v$  の中から必要なものを用いて示すこと。
- (4) 次に、状態 2 から状態 3 の等積加熱過程が、状態 2 から状態 3' の等圧加熱過程に変わり、状態 3' から状態 4 まで高温熱源下（温度  $2T_0$ ）で等温膨張する場合を想定する。このとき等圧加熱での吸収熱を等積冷却での放出熱のみでは補えないため、不足する熱量を外部から供給する必要がある。この不足する熱量  $Q'$  [J] を求めよ。ただし、 $T_0$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $c_v$  の中から必要なものを用いて示すこと。
- (5) (4) で示したサイクルの仕事  $W'$  [J] および実質的な熱効率  $\eta'$  を求めよ。ただし、 $T_0$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $c_v$  の中から必要なものを用いて示すこと。

II 理想気体からのずれを近似的に表すことができる、次のファン・デル・ワールスの状態方程式を満足する実在気体を考える。

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

ここで、 $p$  [Pa]、 $v$  [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]、 $T$  [K] は、それぞれ圧力、比体積、温度であり、 $a$  [ $\text{Pa} \cdot \text{m}^6/\text{kg}^2$ ]、 $b$  [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ]、 $R$  [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ] は気体によって異なる定数である。

- (1) 定積比熱  $c_v$  [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ] が比内部エネルギー  $u$  [ $\text{J}/\text{kg}$ ] を用いて次式で表されることを説明せよ。

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

- (2) 比内部エネルギー  $u$  を温度  $T$  と比体積  $v$  を独立変数とする関数  $u(T, v)$  と考える。 $T$  と  $v$  をそれぞれ微少量  $dT$ 、 $dv$  だけ準静的に変化させたとき、この気体の比内部エネルギーの変化量  $du$  を (1) と以下の関係を利用して求めよ。ただし、 $dT$ 、 $v$ 、 $dv$ 、 $c_v$ 、 $a$  を用いて示すこと。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

- (3) 比エントロピ  $s$  [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ] を温度  $T$  と比体積  $v$  を独立変数とする関数  $s(T, v)$  と考える。 $T$  と  $v$  をそれぞれ微少量  $dT$ 、 $dv$  だけ準静的に変化させたとき、この気体の比エントロピの変化量  $ds$  を求めよ。ただし、以下に示す熱力学第1法則と (2) の結果を利用し、 $T$ 、 $dT$ 、 $v$ 、 $dv$ 、 $c_v$ 、 $R$ 、 $b$  を用いて示すこと。

$$T ds = du + p dv$$

- (4) 定積比熱  $c_v$  が一定のとき、この気体の準静的な断熱変化過程 ( $ds = 0$ ) では、次式が成立することを示せ。

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b)^\kappa = \text{const.}$$

ここで、 $\kappa = (c_v + R)/c_v$  である。

**問題 17 生産加工** 設問すべてについて解答すること。

I 図1は、元素Aおよび元素Bからなる二元系状態図である。図中の点線は、解答のために付加した線である。次の(1)～(6)の問いについて答えよ。

- (1) 元素Aは、密度が小さく、耐食性に富み、電気伝導度がよい金属である。また、元素Bは地球の主要な構成元素のひとつであり、用途として、半導体部品がある。鉄に少量の元素Bを加えた合金は、透磁率が比較的高く、安価であることから変圧器やモーターの鉄心用磁性材料として多く用いられている。元素Aと元素Bは何かを答えよ。
- (2) Xの領域では、いかなる相が存在するかを答えよ。
- (3) 自動車・二輪車のピストンは、元素Bが12.6質量%含まれたA-B合金の鑄造により作られている。この合金が使われている理由を答えよ。
- (4) 元素Bが80質量%含まれたA-B合金を1500℃からゆっくりと冷却する。1300℃以下ではどのような現象が生じるか。この時のギブスの相律を考えた場合、自由度はどうか。
- (5) 元素Bが80質量%含まれたA-B合金を1500℃からゆっくりと900℃まで冷却した。この時、いかなる相があらわれるか。また、これらの相の量比を求めよ。
- (6) 元素Bが80質量%含まれたA-B合金を1500℃からゆっくりと577℃まで冷却した。577℃直上および直下の温度において、組織はどのように変化するか。図を描き、答えよ。

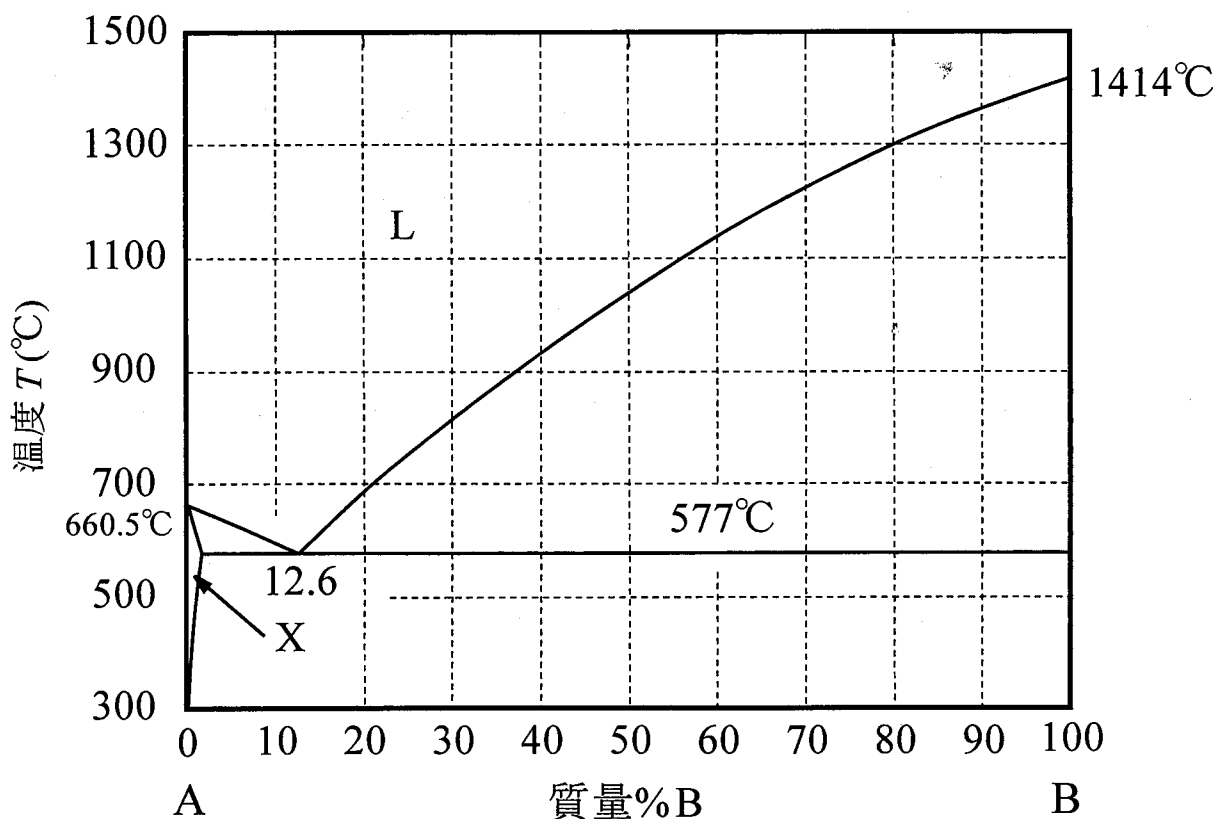


図1 元素Aおよび元素Bからなる二元系状態図。

II 降伏点が  $1 \text{ GPa}$  の剛完全塑性体で、材料内部に直交する  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸を取り、各軸を法線に持つ  $X$  面,  $Y$  面,  $Z$  面を取る。図 1 のように、 $X$  面には大きさ  $700 \text{ MPa}$  の圧縮応力と  $y$  方向にせん断応力が生じている。同時に、図 2 のように、 $Y$  面には  $100 \text{ MPa}$  の引張応力と  $x$  方向にせん断応力が生じている。 $Z$  面には応力は生じていないとする。このような応力状態のときに、この材料は塑性変形を開始した。次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

- (1) トレスカの降伏条件を用いて、 $X$  面と  $Y$  面に作用しているせん断応力の大きさを求めよ。
- (2) この応力状態に対する 3 個のモール円を示し、その図に  $X$  面,  $Y$  面,  $Z$  面の位置を書き込め。
- (3) この応力状態における最大主応力, 中間主応力, 最小主応力の値を求めよ。
- (4) この応力比で塑性変形が進み、 $z$  方向の真ひずみ  $\varepsilon_z$  が 1 になった時の相当ひずみは、 $\varepsilon_z$  の何倍になるか答えよ。ただし、少数点以下は切り捨てよ。

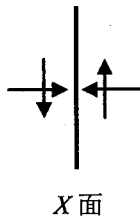


図 1  $X$  面上の垂直応力とせん断応力の方向

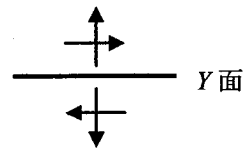


図 2  $Y$  面上の垂直応力とせん断応力の方向

**問題 18 量子力学** 設問すべてについて解答すること。

I 以下の (1)～(6) の問いに答えよ。

一次元調和振動子ポテンシャル  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  中の粒子の量子力学を考える。ここで  $x$  は一次元空間座標、また  $m$  は粒子の質量、 $\omega$  は正の定数である。

- (1) 波動関数  $\phi(x)$  が満たす時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。ただし、エネルギー固有値を  $E$  とし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 、 $h$  はプランク定数とする。

- (2) 関数  $\phi_0(x) = Ce^{-Ax^2}$  が上で求めたシュレーディンガー方程式の解 ( $\phi(x) = \phi_0(x)$ ) となる正の定数  $A$  を求めよ。また、この量子状態のエネルギー固有値を求めよ。ただし、 $C$  は正の実数とする。

以下では、必要ならば公式  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{a\sqrt{a}}$ ,  $a > 0$  を用いよ。  
また、解答には  $A$  を用いてよい。

- (3) 上の問 (2) で求めた波動関数  $\phi_0(x)$  を規格化して正の実数  $C$  を求めよ。

- (4) この量子状態で位置の測定を行った。位置の期待値  $\langle x \rangle$  を求めよ。また、 $\langle x^2 \rangle$  を求めよ。

- (5) 運動量演算子  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  を用いて、この量子状態での運動量  $p$  の期待値  $\langle p \rangle$  および  $\langle p^2 \rangle$  を求めよ。

- (6)  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ ,  $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$  とおく。 $(\Delta x)(\Delta p)$  は  $m, \omega$  に依存しない定数となる。その値を求めよ。

II 以下の (1)~(7) の問いに答えよ。

一次元空間 (座標  $x$ ) の原点にデルタ関数型ポテンシャル  $V(x)=V_0\delta(x)$  (ただし  $V_0$  は正の定数) がある。 $x$  の値が負の領域から、 $x$  軸の正の向きに向かって正のエネルギー  $E$  を持つ質量  $m$  の粒子が入射する。デルタ関数  $\delta(x)$  は

$$\delta(x)=\begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0) \end{cases},$$

$\varepsilon$  を正の定数として、 $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx=1$  という性質を持つ。また、任意の連続関数  $f(x)$  にデルタ関数をかけて、 $x=-\varepsilon$  から  $x=\varepsilon$  まで定積分すると結果は  $f(0)$  になる。すなわち次式のようにになる。

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)f(x)dx=f(0)$$

- (1) 粒子の波動関数  $\psi(x)$  が満たす時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。  
ただし、プランク定数  $h$  ではなく、それを  $2\pi$  で割った量である  $\hbar$  を用いること。

波動関数は  $x$  が負の領域では、入射波  $Ae^{ikx}$  と反射波  $Be^{-ikx}$  の重ね合わせで  $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ 、 $x$  が正の領域では透過波で、 $\psi(x)=Ce^{ikx}$  と表される。 $A, B, C$  は、それぞれの振幅である。

- (2)  $k$  を  $m, E, \hbar$  だけを用いて表せ。

- (3) 波動関数  $\psi(x)$  が原点で連続であることから、振幅  $A, B, C$  間に成り立つ関係式を導け。

- (4) ポテンシャルがデルタ関数型の場合、波動関数  $\psi(x)$  は  $x=0$  で連続である。しかし、波動関数の微分  $\psi'(x)$  は  $x=0$  で連続ではないので、それが満たす境界条件を考えよう。

問 (1) のシュレーディンガー方程式を、 $\varepsilon$  を非常に小さな定数として、 $x=-\varepsilon$  から  $x=\varepsilon$  まで定積分して、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとる。波動関数は連続関数で有界なので、

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\psi(x)dx=\psi(0) \text{ と } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x)dx=0 \text{ が成り立つ。}$$

それを用いて、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)]$  の値を求めよ。

結果は、 $\psi(0), \hbar, m, V_0$  を用いて表せ。

- (5) 波動関数の微分の境界条件 (問 (4) の結果) から得られる  $A, B, C$  の関係式を書け。

- (6) 問 (3) と問 (5) の結果より、 $\frac{B}{A}$  および  $\frac{C}{A}$  の値を求め、それぞれ  $\hbar, m, V_0, k$  を用いて表せ。

- (7) 反射率  $R$  および 透過率  $T$  をそれぞれ  $\hbar, m, V_0, k$  を用いて表せ。



**問題 19 電子物性・固体物性** 設問すべてについて解答すること。

図1は、シリコン (Si) において、ドナー密度が  $10^{19}\text{m}^{-3}$  のときに測定される伝導電子密度  $n_c$  の温度変化を示している。次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。ここで、Si のエネルギーバンドギャップ  $E_g$  を 1.1eV, ドナーおよびアクセプターのイオン化エネルギーを 0.1eV, ドナー密度を  $N_D$ , アクセプター密度を  $N_A$ ,  $N_A/N_D = 0.05$  とする。

- (1) 伝導電子密度  $n_c$  の温度特性は、図1に示す3つの温度領域(a)~(c)に分類される。これら3つの領域の名称を答えよ。
- (2) この Si 試料の電気伝導の型は p 型, n 型のいずれであるかを答えよ。またその理由を説明せよ。
- (3) 図1において、領域(b)では、 $n_c$  の温度変化が小さいことが解る。その理由を述べよ。図を用いて説明せよ。
- (4) 室温 (300K) で波長  $1\mu\text{m}$  の単色光を照射したとき、この Si 試料で抵抗低下が観測された。この光照射の下、予想される  $n_c$  の温度特性を、解答用紙に図1のグラフを転記して、そこに示せ。またその理由を述べよ。ここで、キャリア寿命の温度依存性は無視できるものとする。
- (5) この Si 試料に、十分に強い波長  $10\mu\text{m}$  の単色光を照射しながら  $n_c$  を測定したとき、予想される  $n_c$  の温度特性を、前問と同様、解答用紙に図1のグラフを転記して、そこに示せ。またその理由を述べよ。

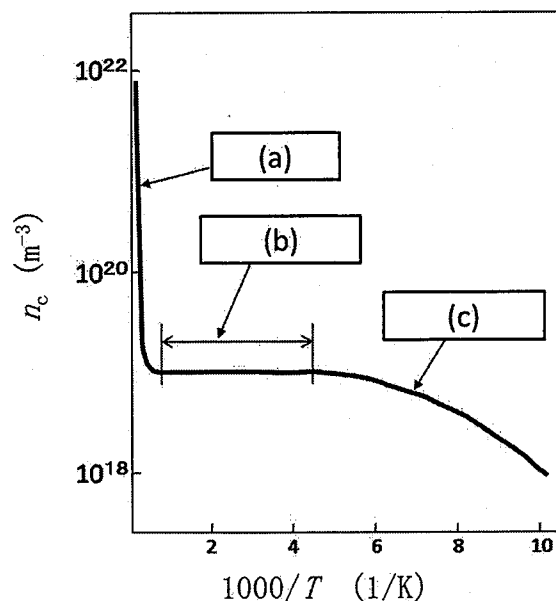


図1

**問題 20 計算機基礎** 設問すべてについて解答すること。

A と B の論理積演算を  $A \cdot B$  もしくは  $AB$ 、論理和演算を  $A + B$ 、排他的論理和演算を  $A \oplus B$ 、A の論理否定演算を  $\bar{A}$  と表すものとする。また必要に応じて 1(真)、0(偽)を論理式、論理回路に用いてもよい。

I 図 1 に示す  $F_0$  から  $F_6$  からなる 7 つの発光素子を用いて、文字列 “JOHOU” を構成する 4 種類の文字を表示する回路を作成する。それぞれの発光素子は入力 A, B に対して表 1 のように発光する。

(1)  $F_0$  から  $F_6$  を入力 A, B を用いて論理式で表しなさい。

(2) 図 2 の論理回路を 2 入力 AND ゲートと、NOT ゲートのみを用いて構成しなさい。ただし用いることのできるゲート数はそれぞれ最大 4 ゲートとする。

(3) 図 2 の論理回路を 2 入力 NAND ゲートのみを用いて構成しなさい。ただし用いることのできるゲート数は最大 9 ゲートとする。

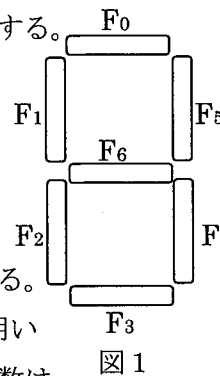


図 1

A	B	発光表示
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

表 1

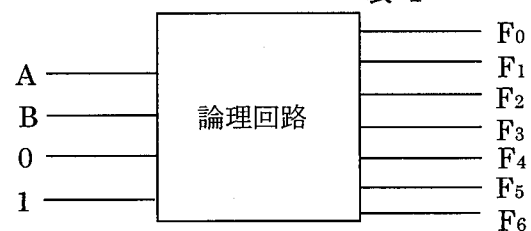


図 2

II 表 2 に示す真理値表に対して以下の問に答えなさい。

(1) 出力 F を完全積和標準形 (ABC 3 つを必ず含む基本積 (例えば  $ABC$  や  $ABC$ ) を論理和で結合した表現) で表しなさい。

(2) 論理式内で用いる演算子 (積、和、排他的論理和、否定) が 5 以下の式に (1) の式を変形しなさい。変形過程も省略せずに必ず記述すること。カルノー図の利用は不可とする。

(3) (2) の式を排他的論理和と論理積のみを用いた式に変形しなさい。変形過程も省略せずに必ず記述すること。

入力			出力
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

表 2

Ⅲ 2ビット2進乗算回路 ( $(X_1X_0) \times (Y_1Y_0) = (C_3C_2C_1C_0)$ ) を2入力ANDゲート(5個以内)と4ビット全加算器(表記は図3)1つを用いて構成しなさい。全加算器の全入力端子( $A_0 \sim A_3, B_0 \sim B_3$ )に必ず信号を入力すること。なお入力は符号無し整数とする。

