専門科目 (午前)
数理・計算科学

23　大修

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

問 1 (基礎問題)

$\boldsymbol{A}$ を 4×4 行列, $\boldsymbol{b}$ を 4 次元列ベクトル, $\boldsymbol{I}$ を 4×4 単位行列とする．これらを左から順に並べた 4×9 行列 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{I})$ の左側から 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を乗じたとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得た．以下の設問に答えよ．

(1) 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を記せ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算せよ.

(3) 線形方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を計算せよ.

(4) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算せよ.

問 2 (基礎問題)

$\alpha \in (-\infty, \infty)$ に対し

$$f(x) = e^{\alpha x} (1 + \sin x)$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) $x = 0$ を中心に $f(x)$ を Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

する．$a_1 = 0$ となるように α を定めよ．またこのとき a_2 を求めよ．

(2) (1) の α に対し

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx$$

を求めよ．

問 3 (基礎問題)

自己ループ（自分に戻る辺）のない有向グラフを考える．頂点 x に対して，整数

$$(x\text{ に入ってくる辺の本数}) - (x\text{ から出ていく辺の本数})$$

のことを x の**収支**と呼ぶ．たとえば図１のグラフでは㋐の収支は -1，㋘の収支は $+1$ で，他の頂点の収支はすべて 0 である．

有向グラフ G が**連結グラフ**であるとは，辺の向きを無視して無向グラフとして見たときに G が連結グラフである（すなわち任意の２頂点間に無向パスが存在する）ことで定義される．

グラフ G から辺 α を取り除いて（頂点は取り除かずに）できるグラフを $G-\alpha$ と書く．G が連結グラフで $G-\alpha$ が連結グラフでない場合に，α のことを**ブリッジ**と呼ぶ．たとえば図１のグラフでは辺 ㋐→㋓ と辺 ㋔→㋘ がブリッジである．

すべての辺をその向きに従ってちょうど１回ずつ通る経路（つまり「一筆書き」）のことを**オイラー路**と呼ぶ．たとえば図１では

㋐→㋑→㋒→㋐→㋓→㋔→㋕→㋖→㋗→㋓→㋖→㋔→㋘

はオイラー路である．

(1) 連結グラフ G が次の条件を満たしているとする．

> **(∗)** G 内に収支が -1 の頂点がひとつ（この頂点を a とする）と収支が $+1$ の頂点がひとつ（この頂点を b とする）あり，a, b 以外の頂点はすべて収支が 0 である．

このとき，もしも a から出る辺の１本がブリッジであるならば，そのブリッジでつながる二つの部分グラフのうちの a が属さない方に必ず b が属すること（図２）を示せ．

(2) 任意の連結グラフ G に関して次の (i)(ii) が成り立つことを，G の辺の本数に関する帰納法で (i)(ii) 同時に証明せよ．

(i) G のどんな頂点の収支も 0 であるならば，任意の頂点 a に対して，a から出発して a で終わるオイラー路が存在する．

(ii) G が上記の条件 (∗) を満たすならば，a を出発点，b を終点とするオイラー路が存在する．

(次ページに注意あり)

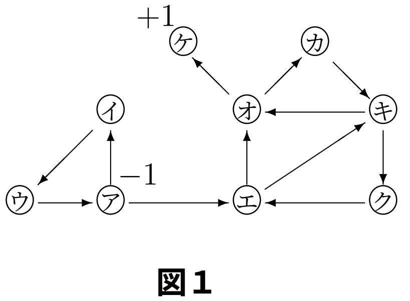

図１

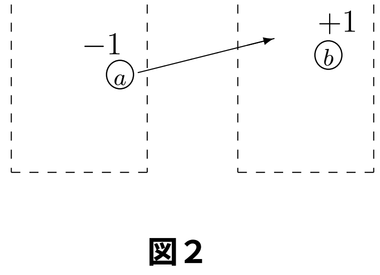

図２

注意：次の事実や記法を解答中で使用してもよい．

(事実 1) 各頂点の収支がどれも 0 であるグラフにはブリッジが存在しない．

(事実 2) どんなグラフもそのすべての頂点の収支を合計すると 0 になる．

(事実 3) 連結グラフからブリッジをひとつ取り除くとちょうど二つの連結グラフに分かれる．

(記法 1) グラフ G の頂点集合を $\mathrm{V}(G)$，辺集合を $\mathrm{E}(G)$ と表記してもよい．

(記法 2) 問題 (1) の状況のときには，ブリッジでつながる二つの部分グラフのうち a が属する方を A，そして b が属する方を B と，それぞれ呼んでよい．

問 4 (一般問題)

H を実ヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$，$\| \cdot \|$ はそれぞれ H の内積，ノルムを表すとする．H の点列 $\{a_n\}$ が $a \in H$ に弱収束するとは，任意の $h \in H$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \langle a_n, h \rangle = \langle a, h \rangle$$

となるときをいう．以下の設問に答えよ．

(1) $a_n \in H$ が $a \in H$ に収束するならば，$\|a_n\|$ は $\|a\|$ に収束することを示せ．

(2) $a_n \in H$ が $a \in H$ に収束するならば，a_n は a に弱収束することを示せ．

(3) $a_n \in H$ が $a \in H$ に弱収束し，かつ $\|a_n\|$ が $\|a\|$ に収束するならば，a_n は a に収束することを示せ．

(4) (2) の逆が成立しない例をあげよ．

問 5 (一般問題)

$\mathbb{F}$ を体 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする.

(1) 多項式 $X^2 + X + 1$ は $\mathbb{F}[X]$ で既約であることを示せ.

(2) $\mathbb{F}[X]/(X^2 + X + 1)$ は体である. 元 $[2X^3 + 4X^2 + 4] \in \mathbb{F}[X]/(X^2 + X + 1)$ について, 乗法に関する逆元と位数を求めよ.

問 6 (一般問題)

以下の設問に答えよ．

(1) C^2 級関数 $u(x, y)$ に対し，$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ がすべての (x, y) で成立するとき，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

を示せ．ここで，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で，$f(r)$ は r のみの関数とし，$f'(r) = \dfrac{df}{dr}(r)$，$f''(r) = \dfrac{d^2 f}{dr^2}(r)$ である．

(2)

$$\begin{cases} -g''(r) - \dfrac{1}{r} g'(r) = 1 & (0 < r < 1) \\ \qquad\qquad g(1) = 0 & \end{cases}$$

をみたす有界な C^2 級関数 $g(r)$ を求めよ．

問 7 (一般問題)

次の線形計画問題を (P) と呼ぶ.

$$
\begin{array}{lrrcr}
\text{maximize:} & 3x_1 & -\,5x_2 & & \\
\text{subject to:} & -x_1 & +\,3x_2 & \leq & \frac{3}{2} \\
 & 2x_1 & -\,3x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & +\,x_2 & \leq & -1 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

以下の設問に答えよ.

(1) この問題の双対問題 (D) を示せ.

(2) 線形計画問題 (D) に対してシンプレックス法を適用し，最適値および最適解を求めよ.

(3) 上記 (2) で求まった双対問題 (D) の最適解と問題 (P) との間に成り立つ相補性定理の条件を用いて問題 (P) の最適解を求めよ.

(4) 次の連立不等式を同時に満す z_1, z_2 が存在しないことを示せ.

$$
\left\{
\begin{array}{rrcr}
-z_1 & +\,3z_2 & \leq & 0 \\
2z_1 & -\,3z_2 & \leq & 0 \\
-z_1 & +\,z_2 & \leq & 0 \\
3z_1 & -\,5z_2 & > & 0
\end{array}
\right.
$$

問 8 (一般問題)

X, Y を密度関数 $f(x)$ を持つ連続分布に従う互いに独立な二つの確率変数とし，$Z = X - Y$ とする．Z の 3 次モーメントは存在すると仮定する．

(1) Z の密度関数は $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z+t)f(t)dt$ であること，そして g は原点に関して対称なことを示せ．

(2) 共分散 $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$ はゼロになることを示せ．

(3) Z と Z^2 は独立でないことを示せ．

問 9 (一般問題)

n 組の確率変数 (A_t, B_t), $t = 1, \ldots, n$, は独立に同一分布に従い，各 A_t, B_t は $\{0, 1\}$ の値を取る．ただし A_t と B_t が独立とは限らない．$A_t = B_t$ となる回数を表す確率変数を M, その観測値を m とする $(0 \le m \le n)$．$P(A_t = 1) = P(B_t = 1) = 1/2$ を仮定して以下の設問に答えよ．

(1) $P(A_t = a, B_t = b) = p_{ab}$ と書き，とくに $p_{11} = \theta$, $0 < \theta < 1/2$ とおく．θ を用いて p_{00}, p_{01}, p_{10} を表せ．

(2) 未知パラメータ θ を最尤法によって観測値 m から推定したい．尤度関数 $L(\theta)$ および最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) 帰無仮説 $\theta = 1/4$，対立仮説 $\theta \neq 1/4$ の仮説検定を有意水準 0.05 で行いたい．ある定数 $c > 0$ を用いて，$|m - n/2| > c$ ならば帰無仮説を棄却する．下記の事実を利用して $n = 10000$ のときの c の近似値を求めよ．

平均 0, 分散 1 の正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ で表すと $\Phi(1.96) \approx 0.975$ である．また成功確率 $0 < p < 1$ の二項分布に従う確率変数 $Z \sim B(p, n)$ に関して，n が十分大きいとき

$$P\left(\frac{Z - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \approx \Phi(x)$$

が任意の実数 x に対して成立する．

問 10 (一般問題)

次のような文脈自由文法によって expr から生成されるプログラミング言語 L を考える．0, 1, -, % は終端記号である．

```
digit : 0 | 1
term  : digit | term digit
expr  : term | expr - term | expr % term
```

(1) 言語 L のプログラム

```
1-1%1
```

の構文解析木を示せ．

(2) 言語 L を表す正規表現を示せ．

(3) 演算子 % が - より高い優先度をもつように言語 L の文法を修正せよ．

(4) 言語 L の最後の規則を

```
expr : term | expr - term | expr % term | ( expr )
```

のように変更する．なお (と) も終端記号である．変更後の言語 L を表す正規表現は存在しないが，その理由をポンピング補題を用いて述べよ．

【正規表現について】 特別な記号として $^+$ (1 回以上の繰り返し), * (0 回以上の繰り返し), | (または) を使ってよい．また括弧はパターンの範囲を明確にするのに使われる．例えば a$^+$ は a，aa，aaa，... と，ab* は a，ab，abb，... と一致する．(a|b)$^+$ は a または b の 1 回以上の繰り返し，例えば a，ab，bba などである．(abc)$^+$ は abc の 1 回以上の繰り返し，abc，abcabc，abcabcabc，... と一致する．

【ポンピング補題について】 言語 L が正規であるならば，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する．

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は ε (空列) である．

問 11 (一般問題)

以下は，〇×ゲーム（三目並べ，tic-tac-toe ともいう）の指し手を調査するためのＣ言語プログラムである．このプログラムについて以下の設問に答えよ．

```
/* ヘッダーファイルは省略 */
int B[9];
int check(){ /* 定義は省略 */ }
int count(int t);
int next(int t);

int main(int argc, char *argv[]) {
   int i, answer;

   for(i = 0; i < 9; i++) B[i] = 0;
   answer = count(1);
   printf("引き分け指し手総数 = %d\n", answer);

   for(i = 0; i < 9; i++) B[i] = 0;
   answer = next(1);
   if(answer == +1) printf("〇必勝\n");
   else if(answer == -1) printf("×必勝\n");
   else printf("その他\n");

   return 0;
}

int count(int t) {
   int d, i, result;

   if(t > 9) {
     if(check() == 0) return 1;  /* （※１）*/
     else return 0;
   }

   if(t % 2 == 1) d = +1; else d = -1;
   result = 0;
   for(i = 0; i < 9; i++) {
      if(B[i] == 0) {
         B[i] = d * t;
         result = result + count(t + 1);
      }
   }
   return result;
}
```

（次ページに続く）

```
int next(int t) {
     /* （※２） */
}
```

補足説明

0	1	2
3	4	5
6	7	8

- 配列 B は，○から始めて○と×の手を交互に打っていく○×ゲームの各時点で盤面を，手の打たれた順も含めて保持するために用いられる．各マスの状態は右図に示した番号の添え字の所に記憶される．
- すべて○か×で埋まっている盤面を「最終盤面」と呼ぶ．check は，配列 B が最終盤面を表しているときに，手の打たれた順も考慮して，○×のどちらが勝っているか，もしくは引き分けかを判定する関数である．その盤面で○が勝っていたときには $+1$ を，×が勝っていたときには -1 を，そして引き分けの場合には 0 を値として返す．
- プログラム中の t % 2 は，t の値を 2 で割った余りを求める演算である．

(1) 最終盤面までの手の指し方の総数は $9! = 362880$ 通りあるが，その中で引き分けになる指し方の総数を求めたい．その計算のための関数が count である．この関数は B が初期盤面を表しているとき count(1) を実行すると，総引き分け数をその値として返すよう設計したつもりだった．しかし，現在の count のプログラムには欠陥があり，実際に上記のプログラムを実行すると，引き分け指し手総数として 0 が出力されてしまう．そこでチェックのために上記プログラムの（※１）の if 文の前に printf("test\n"); を挿入したところ，この文が計算全体の中で一度しか実行されないことがわかった．どのように修復すればよいのか，正しいプログラムを示し（修正する部分だけでよい），その理由を説明せよ（関数 check のプログラムには間違いがないと仮定してよい）．

(2) ○×ゲームが先手の○必勝か後手の×必勝か，あるいはそのどちらでもないかを調べたい．再帰計算に基づき勝敗を正しく判定できるよう関数 next のプログラムの（※２）の部分を埋めよ．なお，変数は適宜追加してよい．関数 check を利用してもよい．また，完成したプログラムにおいて，任意の t に対し（ただし $1 \leq t \leq 9$），配列 B が $t-1$ 手目までの盤面（と指し手順）を表しているとき，next(t) が計算する値が何かを簡潔に述べよ．

問 12 (一般問題)

複数のスレッドがメモリ空間を共有して並行動作する状況を考える．スレッド間の同期や排他制御のために，ロックを獲得する `acquire` 命令，解放する `release` 命令を使えるとする．

n 個の変数 x_i $(0 \le i < n)$，n 個のロック L_i $(0 \le i < n)$ があるとして，変数 x_i から変数 x_j $(i \neq j)$ へ値を a だけ移す以下のプログラム $P_1 \sim P_4$ を考える．これは例えば，銀行口座 x_i から x_j へ a 円を振り込むといった処理を想定している．ここで，$x_i = x_i - a$ や $x_j = x_j + a$ を不可分 (atomic) に実行することはできないとする．

```
P1(i, j) {
    x_i = x_i - a
    x_j = x_j + a
}

P2(i, j) {
    acquire L_0
    x_i = x_i - a
    x_j = x_j + a
    release L_0
}

P3(i, j) {
    acquire L_i
    acquire L_j
    x_i = x_i - a
    x_j = x_j + a
    release L_j
    release L_i
}

P4(i, j) {
    if (i < j) {
        acquire L_i
        acquire L_j
        x_i = x_i - a
        x_j = x_j + a
        release L_j
        release L_i
    } else {
        acquire L_j
        acquire L_i
        x_i = x_i - a
        x_j = x_j + a
        release L_i
        release L_j
    }
}
```

(1) プログラム $P_1(0,1)$ をひとつのスレッドが 1 回実行すると x_0 の値は a 減り，x_1 の値は a 増える．$P_1(0,1)$ をふたつのスレッドが 1 回ずつ実行したときの実行前後の x_0 と x_1 の値の変化をすべて述べよ．

(2) 競争状態（または競合状態，race condition）を避けることを目的として，プログラム P_1 に対してロックの獲得，解放処理を加えたものがプログラム $P_2 \sim P_4$ である．

プログラム P_2 では，すべてのスレッドが同一のロック L_0 を獲得，解放する．このようなプログラムをマルチプロセッサ上で実行した場合，スレッドの数を増やしても並列度が上がらない可能性がある．それはなぜか，説明せよ．

(3) 複数のスレッドがプログラム P_3 を実行する．i，j は，スレッドごと，プログラムの実行ごとに様々な値をとるとする．

デッドロックが発生し得るか否か，答えよ．デッドロックが発生し得る場合，デッドロックに至るまでの過程を，各スレッドによるロック獲得の手順に着目して述べよ．過程は，i，j の特定の組み合わせについて述べればよい．

(4) プログラム P_4 について，(3) と同様のことを答えよ．