# 1

1．以下の不定積分を求めよ．

（1）$\int\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}\,dx$　　（ただし $x>5$ とする.）

（2）$\int a^x\cos 2x\,dx$　（ただし $a$ は正の定数であり $a\neq 1$ とする.）

2．以下の問いに答えよ．

（1）$f(x)=\sin x$ を $x=0$ において $x$ についてテイラー展開せよ．ただし $x$ の4次以上の項は省略し，3次の項まで求めよ．

（2）上の問（1）の結果を用いて，次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

（3）$f(x,y)=\cos(x-5y+2xy)$ を $x=0$，$y=0$ において $x$，$y$ についてテイラー展開せよ．ただし $x$，$y$ の3次以上の項は省略し，2次の項まで求めよ．

$\boxed{2}$

1．行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

（1）$\mathbf{A}$ の固有値をすべて求めよ．

（2）$\mathbf{A}$ は直交行列 $\mathbf{P}$ によって対角行列 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{AP}$ に変換される．$\mathbf{P}$ を求めよ．ただし，$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ は $\mathbf{P}$ の転置を表わす．$\mathbf{P}$ として二つ以上の表現が可能なときは，そのうちの一つを答えよ．

（3）$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}=a$ という式によって定義される図形が楕円面であることを示せ．また，この楕円面で囲まれる立体の3つの軸の半径を求めよ．ただし $a$ は正の定数であり，$\mathbf{x}$ は実数を成分とする3次元列ベクトルである．$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

2．ある物質はAとBという2つの状態のどちらかをとる．光を1回照射すると，Aの状態にあった物質がBの状態に移る確率は30パーセント，Bの状態にあった物質がAの状態に移る確率は40パーセントである．最初にAの状態にある確率を$a_0$，Bの状態にある確率を $b_0$ とし，$n$ 回光を照射したあとAの状態にある確率を $a_n$，Bの状態にある確率を $b_n$ とする．以下の問いに答えよ．

（1）$a_1$，$b_1$ を $a_0$，$b_0$ を用いて

$$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=\mathbf{W}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$$

とするとき，行列 $\mathbf{W}$ を書け．

（2）行列 $\mathbf{W}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

（3）上の問（2）の結果を用いて $a_n$，$b_n$ を $a_0$，$b_0$ を用いて表せ．

（4）$n\to\infty$ としたときの $a_n$ と$b_n$ の比の極限を求めよ．

$\boxed{3}$

1．以下の問いに答えよ．

(1) 常微分方程式 $xy\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ を解け．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y=2xy^2e^x$ を $u=\dfrac{1}{y}$ とおいて解け．

2．二階常微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x-x^3=0$ の解の性質を以下の手順に従って調べよ．

(1) $y\equiv\dfrac{dx}{dt}$ で $y$ を定義すると，上記二階常微分方程式は次のような連立一階常微分方程式により表される：

$$\frac{dx}{dt}=F(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt}=G(x,y).$$

$F(x,y),G(x,y)$ の式を示し，$F$=$G$=0 を満足する $xy$ 平面上の点の座標をすべて挙げよ．

(2) 前問 (1) で求めた $xy$ 平面上の点のうち，$x>0$ なる点の座標を $(x_c, y_c)$ とする．$F,G$ をこの点において次のように展開する：

$$\frac{dx}{dt}=F=a_1(x-x_c)+b_1(y-y_c)+F_2(x-x_c,y-y_c),$$
$$\frac{dy}{dt}=G=a_2(x-x_c)+b_2(y-y_c)+G_2(x-x_c,y-y_c).$$

ただし $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ は定数であり，$F_2(x-x_c,y-y_c)$，$G_2(x-x_c,y-y_c)$ は $(x-x_c),(y-y_c)$ の二次以上の多項式である．$a_1, a_2, b_1, b_2$ を求め，$F_2=G_2=0$ と近似した場合の連立一階常微分方程式を導け．

(3) 前問 (2) で導いた連立一階常微分方程式を解くことにより，$x$ についての一般解を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた一般解に対し，次のような初期条件を課する：

$$t=0 \text{ において } x=x_c,\ \frac{dx}{dt}=1.$$

このとき $x=x(t)$ のグラフの概形を描け．

$\boxed{4}$

2つの粒子の速度が互いに独立でランダムな確率変数 $V_1, V_2$ で表されるものとする．$V_1, V_2$ の確率密度関数がそれぞれ次式で与えられるとき，以下の問に答えよ．

$$f_1(v_1) = \begin{cases} \alpha v_1 & (0 \leq v_1 \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

$$f_2(v_2) = \begin{cases} \beta v_2(1-v_2) & (0 \leq v_2 \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{2}$$

ここで $\alpha$ および $\beta$ は定数である．

1) $\alpha$ および $\beta$ を求めよ．
2) $V_2$ の平均と分散を求めよ．
3) $V_1 \leq V_2$ となる確率を求めよ．
4) 2つの粒子のうち，速い方の粒子の速度 $v$ の確率分布関数を求めよ．
   ヒント：
   $$P(\max(V_1, V_2) \leq v) = P(V_1 \leq v, V_2 \leq v)$$
   ここで $P$ は確率を表す．
5) 2つの粒子のうち，速い方の粒子の速度 $v$ の期待値を求めよ．

**5**

図1～図3に示すように，半径$a$の導体球A（以下導体Aとよぶ）をそれと同心の内半径$d$の導体球殻B（以下導体Bとよぶ）が包んでいる．導体Aの中心を原点とし，原点からの距離を$r$とする．導体Aの表面上（$r=a$）には電荷$+Q$が，そして導体Bの内面上（$r=d$）には電荷$-Q$が与えられ，電荷はそれぞれの球面上で一様に分布しているものとする．

(1) 導体AとBの間に，内半径$b$，外半径$c$の球殻を同心状におく．導体AとBの間で何も挿入されていない領域は真空（誘電率$\varepsilon_0$）とする．

1) 図1に示すように，球殻が導体の場合について，ガウスの法則を用いて導体AとBの間における真空部分の電界の大きさと，挿入した導体内部の電界の大きさをそれぞれ求め，原点からの距離$r$の関数で示せ．

2) 図2に示すように，球殻が誘電体（誘電率$\varepsilon$）の場合について，ガウスの法則を用いて導体AとBの間の電束密度$D$，及び導体AとBの間の真空部分の電界の大きさと誘電体内部の電界の大きさを求め，原点からの距離$r$の関数で示せ．

3) 2)について，導体AとBの間の電位差$V$と静電容量$C$を求めよ．また，導体AとBの間を全て誘電体（誘電率$\varepsilon$）で満たしたときの導体AとBの間の電位差$V_f$と静電容量$C_f$を求めよ．

(2) 図3に示すように，導体AとBの間を誘電体1（誘電率$\varepsilon_1$）と誘電体2（誘電率$\varepsilon_2$）とで満たした場合を考える．

1) 導体AとBの間で原点からの距離$r$に対する電界の大きさ$E$の変化を$\varepsilon_1>\varepsilon_2$と$\varepsilon_1<\varepsilon_2$のそれぞれの場合について，電界の大きさ$E$を縦軸，距離$r$を横軸として図示せよ．なお，図中には$r=a,h,d$それぞれに対応する電界の大きさを示せ．

2) 図3を答案用紙に書き写し，$\varepsilon_1=2\varepsilon_2$と$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon_2}{2}$の場合について，導体Aと導体Bの間における電気力線を矢印で示せ．ただし，それぞれの場合について，電気力線の最大本数は8本とする．

(3) 導体AとBの間を誘電体内部の電界の大きさがあらゆる点で同一となるような誘電体で満たすとする．このとき誘電率$\varepsilon(r)$を原点からの距離$r$の関数で示せ．

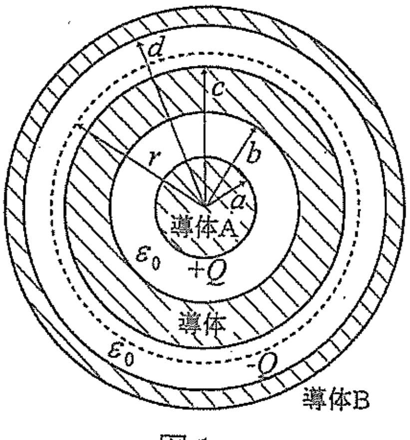

図1

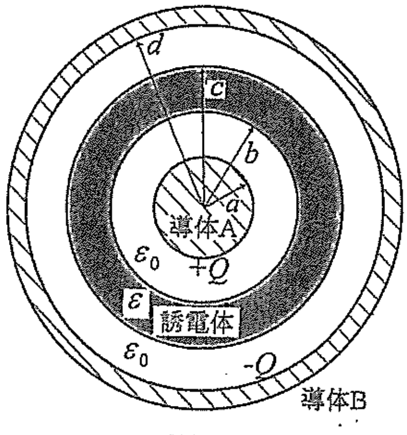

図2

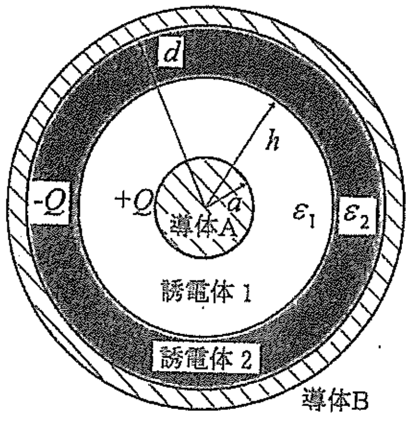

図3

## 6

(1) 半径 $a$ の無限長円柱導体が図1のように $x$ 軸上に設置されている．その中を流れる電流は，$x$ 軸の正の向きで電流密度 $J$ が中心軸からの距離 $r$ の関数 $J=Kr$ ($K$ は定数，$0 \leq r \leq a$)で与えられる．以下の問いに答えよ．ただし，解答には変数 $J$ を用いてはならない．

1) 内径 $r$ で外径 $r+dr$ ($0 \leq r \leq a$) の円筒に流れる電流を求めよ．ただし，$dr$ は微小量とする．

2) 半径 $r$ ($0 \leq r \leq a$) の円柱に流れる電流を求めよ．

3) 点Pが導体内と導体外のいずれかにあるとき，点Pの磁界の強さ $H$ を中心軸からの距離 $r$ の関数としてそれぞれ求めよ．磁界の強さ $H$ を縦軸，距離 $r$ を横軸として図示せよ．なお，図中 $r=a$ における磁界の強さを示せ．

4) $z$ 軸の負の向きで円柱導体の中心軸から距離 $b$ ($b>a$) だけ離れた場所に，電流 $I$ が流れている単位長さあたりの質量 $m$ の無限長導線を $xz$ 平面内で $x$ 軸と平行に置く．支えがなくなったときに無限長導線が落下しないための電流 $I$ の大きさの範囲と向きを求めよ．ただし，真空中の透磁率は $\mu_0$，重力は $z$ 軸の負の向きに作用し重力加速度は $g$ とする．

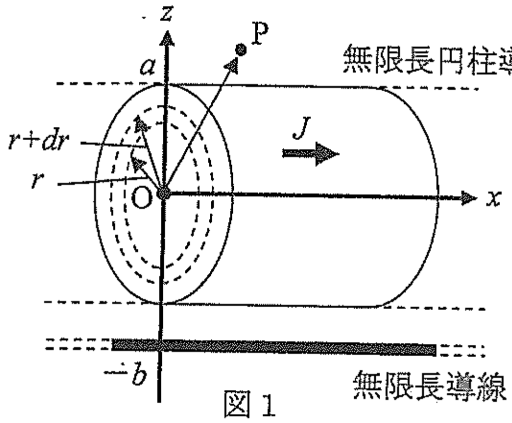

図1

(2) 電流 $I$ が流れる有限長の直線導線が作る磁界について以下の問いに答えよ．

1) 図2のように長さ $L\,(=b+c)$ の直線導線上の点Oから距離 $a$ だけ離れた点Pにおける磁界 $\boldsymbol{H}$ の強さを $I,a,b,c$ を用いて示し，向きを求めよ．ただし，直線導線上の線素 $d\boldsymbol{x}$ が点Pに作る磁界 $d\boldsymbol{H}$ は，ビオ・サバールの法則から $d\boldsymbol{H}=I\left(d\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{r}\right)/\left(4\pi r^3\right)$ で与えられる．また，線素 $d\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{r}$ のなす角を $\theta$ とする．微分公式 $(\tan\theta)'=1/\cos^2\theta$，$(\cot\theta)'=-1/\sin^2\theta$，$(1/\sin\theta)'=-\cos\theta/\sin^2\theta$，$(1/\cos\theta)'=\sin\theta/\cos^2\theta$ を用いても良い．

2) 図3のように2辺の長さが $2e$ と $2f$ の長方形回路ABCDに電流 $I$ が流れている．長方形回路の中心Oから，回路の作る面に垂直に距離 $d$ だけ離れた点をQとする．導線ABと導線CDが点Qに作る磁界の強さをそれぞれ $H_{AB}$ と $H_{CD}$ とするとき，加え合わせた磁界の強さ $H_{AB,CD}$ を $H_{AB}$ と $H_{CD}$ を用いて示せ．次に，問い(2)-1)の結果を用いて磁界の強さ $H_{AB}$ と $H_{CD}$ を求めよ．長方形回路ABCDが点Qに作る磁界の強さ $H_{AB,BC,CD,DA}$ を求めよ．

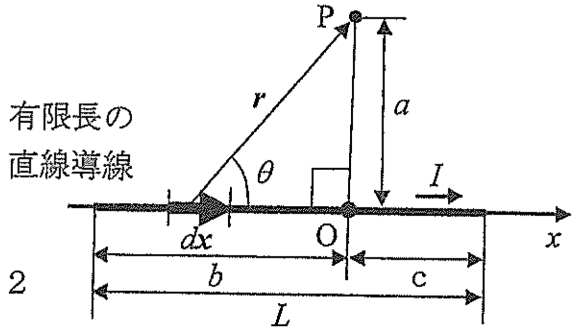

図2

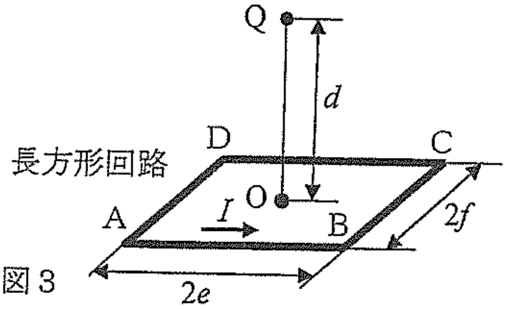

図3