2005年2月28日

平成１７年度電気系・物理情報系群

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，
答案用紙に解答せよ．

(Choose 2 problems out of the
following 6 problems and solve them.)

半径aの２枚の導体円板をFig. 1 に示すように，真空空間に間隔d ($<< a$)で平行に配置する．電極円板間の空間に起きる現象について以下の問に答えよ．ただし，電荷は円板上を一様に分布し，端効果を無視し，ε_0，μ_0をそれぞれ真空の誘電率と透磁率とする．

(1) 電界を $\boldsymbol{E}$，電束密度を $\boldsymbol{D}$，磁界を $\boldsymbol{H}$，磁束密度を $\boldsymbol{B}$，伝導電流密度を $\boldsymbol{i}$，空間電荷密度をρとしたときの一般のマクスウェル方程式を微分形で記述し，各方程式の意味するところを簡単に述べよ．

(2) 変位電流の式を書き，その意味を簡単に説明せよ．

(3) 電荷が$Q(t)=Q_0(1-e^{-t/\tau})$の割合で電源から電極へ加えられたとき，電極円板間の空間の中心軸Ｃから半径rの位置における変位電流の大きさを求めよ．ただし，τ は時定数である．

(4) ポインティングベクトルの式を書き，その意味を簡単に説明せよ．

(5) 電極円板間の空間の中心軸Ｃから半径aの円筒側面でのポインティングベクトルを求めよ．

Two circular conducting plates with radius a are placed in parallel and separated by a distance d ($<< a$) in vacuum, as shown in Fig.1. Answer the following questions about phenomena in the space between the plates. It is assumed that the charges are homogeneously distributed on the plates and edge effect is neglected. Here, ε_0 and μ_0 are permittivity and permeability of vacuum, respectively.

(1) Describe Maxwell equations in differential form, where electric field is $\boldsymbol{E}$, electric flux density is $\boldsymbol{D}$, magnetic field is $\boldsymbol{H}$, magnetic flux density is $\boldsymbol{B}$, current density is $\boldsymbol{i}$ and volume charge density is ρ. Explain each equation briefly.

(2) Describe the equation of displacement current and explain it briefly.

(3) When the charges $Q(t)=Q_0(1-e^{-t/\tau})$ on the plates are supplied from a power source, calculate magnitude of the displacement current density at radius r from the center axis C of the space between the circular plates. Here, τ is the time constant.

(4) Describe the equation of Poynting vector and explain it briefly.

(5) Calculate the Poynting vector on the side surface of a cylinder with radius a from the center axis C of the space.

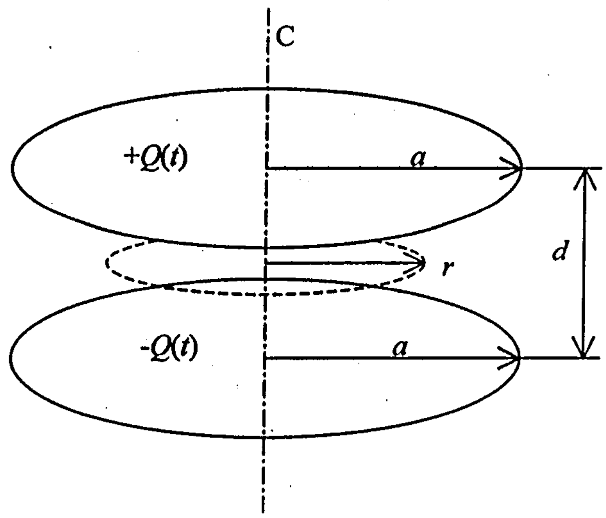

Fig. 1

問題2（1頁目／3頁中）

Fig. 2 の電気回路に関して以下の問に答えよ．なお，答案には考えの過程が分かるように記述せよ．

(1) 角周波数ω_0の交流に対して，Fig. 2(a)の回路のインピーダンスとFig. 2(b)の回路のインピーダンスが等しくなった．このときの抵抗R_xの値及びコンデンサC_xの値を求めよ．また，交流の角周波数を0から∞に変化させたときの両方の回路のインピーダンスの変化の様子をω_0との関係を示しつつ複素平面上に記せ．

(2) Fig. 2(c)の 1－1'間に Fig. 2(a)の回路をつないだ．この状態でスイッチを時刻 t=0 に入れ，時刻 t=6 C_0R_0に切った．このときの 1－1'間の電圧波形 $v(t)$を求め，その波形を図示せよ．なお，コンデンサC_0の初期電荷は0とし，コンデンサC_aの値を$3C_0$としてその初期電荷を$3C_0 v_0$とする．

(3) Fig. 2(d)の電源回路に，Fig. 2(a)の回路を接続した．このとき，抵抗R_0で消費する電力を最大にするために必要なR_0の値を求めよ．なお，変成器は巻き線比 1:n の理想変成器とし，電圧源の角周波数をω_0とする．

(4) Fig. 2(e)に示す受電端 4－4'が開放された長さlの無損失線路の受電端からx離れた 3－3'の点に Fig. 2(a)の回路をつないだ．このとき送電端 2－2'における反射波が0になった．このことから，線路の特性インピーダンスZ_0及び，伝送定数β を求めよ．なお，電圧源の角周波数をω_0とする．

Answer the following questions about the electric circuits shown in Fig. 2. Describe the answer with clarifying logical process.

(1) The impedance of the circuit in Fig. 2(a) and that of the circuit in Fig. 2(b) show the same values for the AC signal when the angular frequency is ω_0. Give a resistance value R_x and a capacitance value C_x. Moreover, sketch the impedance diagram of both circuits on the complex plane when the angular frequency changes from 0 to ∞ with showing the relation of the angular frequency ω_0.

(2) The circuit in Fig. 2(a) is connected between the terminals $1-1'$ in Fig. 2(c). Find the voltage $v(t)$ between the terminals $1-1'$ in the Fig. 2(a) and sketch it where the switch is turned on at $t=0$ and is turned off at $t=6\,C_0\,R_0$. The initial charge in capacitor C_0 is 0, the capacitance value of C_a is $3C_0$ and the initial charge in capacitor C_0 is $3C_0\,v_0$.

(3) The circuit in Fig. 2(a) is connected to the power source circuit in Fig. 2(d). Find a resistance value of R_0 to maximize the power consumption in the resistor R_0. The transformer is an ideal transformer with a turns ratio of $1:n$ and the angular frequency of the voltage source is ω_0.

(4) The circuit in Fig. 2(a) is connected to the port $3-3'$ at distance x away from the load port $4-4'$ in the lossless transmission line with the length l as shown in Fig. 2(e). The line is terminated with open circuit and the angular frequency of the voltage source is ω_0. The reflected wave at the sending port $2-2'$ vanishes with these conditions. Derive the characteristic impedance Z_0 and the phase constant β of this line.

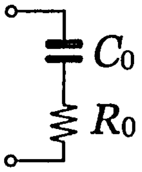

Fig. 2(a)

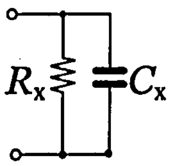

Fig. 2(b)

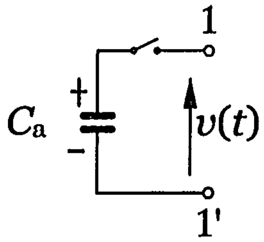

Fig. 2(c)

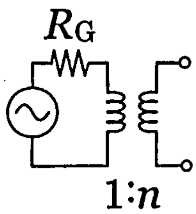

Fig. 2(d)

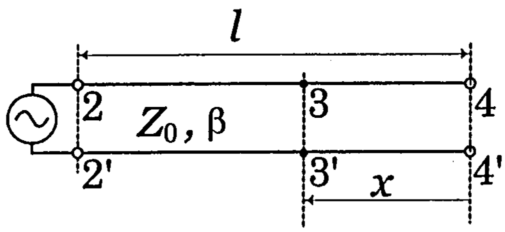

Fig. 2(e)

問題3

$\wedge$ は論理積，$\vee$ は論理和，$\oplus$ は排他的論理和，$^-$ は否定を表すとする．3 変数論理関数 f および g を次のように定義する．

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus (x_2 \vee x_3)) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

以下の問に答えよ．

(1) 論理関数 f および g をそれぞれ真理値表で表現せよ．

(2) $f \geq g$ であることを示せ．

(3) 論理関数 $h = f \oplus g$ を積和形で表せ．

(4) n 変数論理関数 f_1，f_2 および f_3 は，$f_1 \geq f_2$ かつ $f_1 \geq f_3$ を満足するとする．次の命題それぞれについて，真か偽かを判定せよ．ただし，判定の根拠となる証明を与えること．

   (a) $f_1 \oplus f_2 = f_1 \wedge \bar{f}_2$ である．

   (b) $f_2 \geq f_3$ あるいは $f_3 \geq f_2$ である．

Let $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ and $^-$ denote the AND Boolean operator, the OR Boolean operator, the Exclusive-OR Boolean operator and the NOT operator, respectively. Let f and g be 3-variable Boolean functions defined as follows:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus (x_2 \vee x_3)) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3); \text{ and}$$
$$g(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Answer the following questions.

(1) Write truth tables for the Boolean functions f and g, respectively.

(2) Show that $f \geq g$.

(3) Find a sum-of-products expression for the Boolean function $h = f \oplus g$.

(4) Assume that n-variable Boolean functions f_1, f_2 and f_3 satisfy $f_1 \geq f_2$ and $f_1 \geq f_3$. Determine whether each of the following assertions is true or false. Justify your answers with proofs.

   (a) It holds that $f_1 \oplus f_2 = f_1 \wedge \bar{f}_2$.

   (b) It holds that either $f_2 \geq f_3$ or $f_3 \geq f_2$.

問題4（1頁目／2頁中）

ある病院に，それぞれ1単位の量の血液製剤を必要とする患者が169名いる．一方，その病院は170単位の血液製剤を有している．下表に，各血液型ごとの血液製剤の単位数と患者数を示す．

血液型	A	B	O	AB
血液製剤	46	34	45	45
患者数	39	38	42	50

A型の患者にはA型とO型のみ，B型の患者にはB型とO型のみ，O型の患者にはO型のみの血液をそれぞれ輸血することができる．AB型の患者にはいずれの型の血液も輸血することができる．

(1) 次の条件を満たすようなネットワーク（辺容量つき有向グラフ）を描け．すなわち，そのネットワークにおける最大フローが，最も多くの患者に輸血を行うための血液製剤の割り当てを表すようにせよ．(ヒント：例えば，次の10頂点からなるネットワークを考えよ．入口点，血液型ごとの供給点，血液型ごとの需要点，出口点.)

(2) 問(1)で与えたネットワークの最大フローを求めよ．

A clinic has 169 patients, each of whom requires a transfusion of one unit of blood product. The clinic has supplies of 170 units. The number of units of blood available in each of the four blood types and the distribution of patients among the types is summarized below.

Blood type	A	B	O	AB
Supply	46	34	45	45
Demand	39	38	42	50

Note that type A patients can only receive type A or O; type B patients can receive only type B or O; type O patients can receive only type O; and type AB patients can receive any of the four types of blood.

(1) Draw a network (i.e., a directed graph with edge capacities) so that a maximum flow in the network determines a distribution that satisfies the demands of a maximum number of patients. (Hint: For example, consider a network with 10 vertices: a source, a supply node for each of the four blood types, a demand node for each blood type, and a sink.)

(2) Show a maximum flow in the network you give in Question (1).

問題5

質量 m をもつ2個の粒子が，それらの間の距離 r のみに依存したポテンシャルエネルギー $U(r)$ の下で xy 面内を運動するとき，以下の問に答えよ．

(1) 粒子の運動エネルギーの和を重心座標 (X, Y) と相対座標 (x, y) を用いて表せ．

(2) 相対運動に関する運動エネルギーを極座標 (r, θ) を用いて表せ．

(3) 重心の運動方程式を求め，それを解いて重心運動の様子を説明せよ．

(4) 極座標で表された相対運動に関する運動方程式を求めよ．

(5) 相対運動の角運動量の表式を求め，これが時間に依存しないことを示せ．

(6) 相対運動の角運動量が 0（ゼロ）の場合を考える．ポテンシャルエネルギーが $U(r) = a(r-b)^2$ と与えられるとき，粒子間の距離 r を時間の関数として求めよ．ただし，a と b は正の定数とする．

Consider the motion of two particles in the xy-plane under the potential energy $U(r)$ that depends only on the distance r between the particles. Each particle has the same mass m. Answer the following questions.

(1) Find the sum of kinetic energies of the particles using the center-of-mass coordinates (X, Y) and the relative coordinates (x, y).

(2) Find the expression of kinetic energy for the relative motion in terms of polar coordinates (r, θ).

(3) Obtain the equation of motion for the center of mass. Solving the equation, describe the motion as a function of time.

(4) Obtain the equation of the relative motion expressed in terms of the polar coordinates.

(5) Prove that the angular momentum of the relative motion is independent of time.

(6) Consider the case when the relative motion has no finite angular momentum. Let the potential energy be given by $U(r) = a(r-b)^2$, where a and b are positive constants. Find the distance r between the particles as a function of time.

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の逆行列を求めよ．

(2) $A^3 - 6A^2 + 8A$ を求めよ．

(3) 行列 A の固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とする．$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．

(4) 次の関係式を満たす直交行列 P を求めよ．

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は問 (3) で求めた行列 A の固有値である．

(5) 関係式

$$\lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 a, b を求めよ．ただし，n は整数である．

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

answer the following questions.

(1) Find the inverse of the matrix A.

(2) Compute $A^3 - 6A^2 + 8A$.

(3) Let $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ denote the eigenvalues of the matrix A. Find the eigenvalues λ_1, λ_2, and λ_3.

(4) Find the orthogonal matrix P that satisfies the following equation:

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

where λ_1, λ_2, and λ_3 are the eigenvalues of the matrix A obtained in Question (3).

(5) Find the real numbers a and b that satisfy the following equation:

$$\lim_{n \to \infty} A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

where n is an integer.