

## 基礎数学 I

1

以下の問いに答えよ.

- (i) 三角関数  $\tan x$ ,  $\cot x$  についての加法公式

$$\frac{1}{2} \tan x = \frac{1}{2} \cot x - \cot 2x$$

を用いて  $\frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}$  の無限和と  $\cot x$  に関する等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$$

を示せ.

- (ii) 双曲線関数  $\tanh x$ ,  $\coth x$  についての加法公式を与えよ. さらにこれを利用して,  $\frac{1}{2^k} \tanh \frac{x}{2^k}$  の無限和と  $\coth x$  に関する等式を導出せよ. ただし, これらの双曲線関数は, 実数  $x$  について

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

によって定義される.

An English Translation:

## Basic Mathematics I

1

Answer the following questions.

- (i) Show the equality with respect to  $\cot x$  and the infinite sum of  $\frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x,$$

by using the addition formula

$$\frac{1}{2} \tan x = \frac{1}{2} \cot x - \cot 2x$$

of the trigonometric functions  $\tan x$  and  $\cot x$ .

- (ii) Find an addition formula of the hyperbolic functions  $\tanh x$  and  $\coth x$ . Then, derive an equality with respect to  $\coth x$  and an infinite sum of  $\frac{1}{2^k} \tanh \frac{x}{2^k}$  by using this addition formula, where these hyperbolic functions are defined by

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

for a real number  $x$ .

## アルゴリズム基礎

2

連結単純無向グラフ  $G = (V, E)$  と節点  $s \in V$  が与えられたとき,  $s$  を始点とする幅優先探索により得られる  $G$  の全域木を  $T$  とし,  $T$  上で  $s$  からの距離が  $i$  である節点の集合を  $V_i$  と記す. 以下の問いに答えよ.

- (i)  $s$  を始点として  $G$  の全域木  $T$  を構築する幅優先探索の記述を与えよ.
- (ii)  $j + 2 \leq k$  である  $V_j$  と  $V_k$  の間には枝が存在しないことを証明せよ.
- (iii) どの  $V_i$  も隣接する 2 節点の対を含まないとき,  $G$  は二部グラフであることを証明せよ.
- (iv) ある  $V_i$  が隣接する 2 節点の対を含むとき,  $G$  は奇数長の閉路を持つことを証明せよ.

An English Translation:

## Data Structures and Algorithms

2
---

Given a connected simple undirected graph  $G = (V, E)$  and a vertex  $s \in V$ , let  $T$  be a spanning tree of  $G$  obtained by a breadth-first search starting from  $s$ , and let  $V_i$  denote the set of vertices whose distance from  $s$  in  $T$  is  $i$ . Answer the following questions.

- (i) Give a description of the breadth-first search that starts from  $s$  and constructs a spanning tree of  $G$ .
- (ii) Prove that there is no edge between  $V_j$  and  $V_k$  such that  $j + 2 \leq k$ .
- (iii) Prove that if no  $V_i$  contains a pair of adjacent vertices then  $G$  is a bipartite graph.
- (iv) Prove that if some  $V_i$  contains a pair of adjacent vertices then  $G$  is not a bipartite graph.

## 線形計画

3

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  をパラメータにもつ次の線形計画問題  $P(\mathbf{c})$  を考える.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}) : \quad & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここで, 決定変数は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  であり,  $^\top$  は転置記号を表す.

問題  $P(\mathbf{c})$  の最適解の集合を  $X(\mathbf{c})$  とする. さらに,  $\emptyset$  を空集合,  $\mathbb{Z}$  を整数全体の集合,  $\mathbb{Z}^5 = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$  とする.

以下の問いに答えよ.

- (i) 問題  $P(\mathbf{c})$  の双対問題を書け.
- (ii) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \neq \emptyset$  であることを示せ.
- (iii) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$  であることを示せ.
- (iv) 次の命題 (A) について, 真であれば証明を, 偽であれば反例を与えよ.  
(A) 任意の  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$  に対して  $X(\mathbf{c}) \subseteq \mathbb{Z}^5$  である.

An English Translation:

## Linear Programming

3

Consider the following linear programming problem  $P(\mathbf{c})$  with a vector  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  of parameters:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}) : \quad & \text{Minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ & \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$  represents decision variables, and the superscript  $^\top$  denotes the transposition of a vector.

Let  $X(\mathbf{c})$  be the set of solutions to problem  $P(\mathbf{c})$ . Moreover, let  $\emptyset$  denote the empty set, let  $\mathbb{Z}$  denote the set of all integers, and  $\mathbb{Z}^5 = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \mid z_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)\}$ .

Answer the following questions.

- (i) Write out a dual problem of problem  $P(\mathbf{c})$ .
- (ii) Show that  $X(\mathbf{c}) \neq \emptyset$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .
- (iii) Show that  $X(\mathbf{c}) \cap \mathbb{Z}^5 \neq \emptyset$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .
- (iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.  
 (A)  $X(\mathbf{c}) \subseteq \mathbb{Z}^5$  for any  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ .

## 線形制御理論

4

フィードバック制御系が図1で与えられているとする。ここで  $G(s)$  は伝達関数,  $r$  は参照入力,  $d$  は外乱,  $y$  は出力である。以下の問いに答えよ。

(i)

$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

とする。  $r$  を単位階段関数,  $d = 0$  とするときの出力  $y$  を計算せよ。

(ii)  $a, b, c$  を実定数として

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b}$$

とする。フィードバックループを安定化し, かつ  $r = 0, d = \sin 4t$  に対して  $y$  の定常値が 0 となる値  $(a, b, c)$  の集合を求めよ。

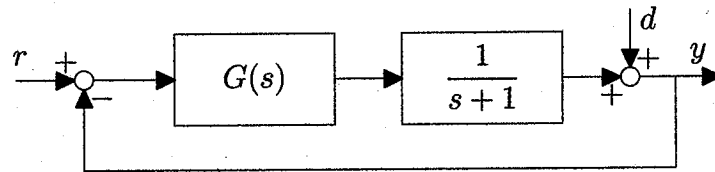


図1: 制御系

An English Translation:

## Linear Control Theory

4

A feedback control system is given by the block diagram shown in Figure 1, where  $G(s)$  is a transfer function,  $r$  is the reference input,  $d$  is the disturbance, and  $y$  is the output. Answer the following questions.

(i) Let

$$G(s) = \frac{2}{s+3}.$$

Calculate the output  $y$  when  $r$  is the unit step function and  $d = 0$ .

(ii) Let

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + as + b},$$

where  $a$ ,  $b$ , and  $c$  are real constants. Determine the set of values of  $(a, b, c)$  for which the feedback loop is stable and the steady state value of  $y$  becomes zero when  $r = 0$  and  $d = \sin 4t$ .

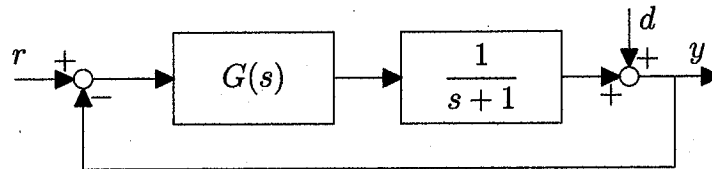


Figure 1: Control System



## 基礎力学

5

質量  $m$  の粒子が力  $\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^3} \mathbf{r}$  だけを受けて運動している。ここで、 $\mathbf{r}$  は粒子の原点からの位置ベクトル、 $r := |\mathbf{r}|$  は  $\mathbf{r}$  の長さであり、 $\mu > 0$  とする。粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する。 $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}}$  ( $\dot{\mathbf{r}} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ) は粒子の運動量とし、 $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  は粒子の原点に関する角運動量とする。ここで、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{p}$  のベクトル積 (外積) であり、任意のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  に対して  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ 、及び  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$  であり、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  はベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{c}$  のスカラー積 (内積) とする。また  $\mathbf{e} := \frac{1}{\mu m^2}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$  とする。以下の問いに答えよ。

- (i)  $\mathbf{L}$  が保存されることを証明せよ。
- (ii)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3}$  が成立することを示せ。
- (iii)  $\mathbf{e}$  が保存されることを証明せよ。
- (iv)  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{L} = 0$  を証明せよ。
- (v)  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{L^2}{m^2 \mu}$  を証明せよ。ただし、 $L := |\mathbf{L}|$  は  $\mathbf{L}$  の長さとする。

An English Translation:

## Basic Mechanics

5

A particle of mass  $m$  is moving under the action of a force  $\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\mathbf{r}$ , where  $\mathbf{r}$  denotes the position vector of the particle from the origin,  $r := |\mathbf{r}|$  stands for the length of  $\mathbf{r}$  and  $\mu > 0$ . It is assumed that the particle is never at the origin. Let  $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}}$  be the momentum of the particle where  $\dot{\mathbf{r}} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  and  $\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  be the angular momentum of the particle about the origin, where  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  denotes the vector or cross product of  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ . Here  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  and  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$  hold for arbitrary vectors  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  and  $\mathbf{c}$ , where  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  stands for the scalar or dot product of  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{c}$ . Let  $\mathbf{e}$  be defined as  $\mathbf{e} := \frac{1}{\mu m^2}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Answer the following questions.

- (i) Prove that  $\mathbf{L}$  is conserved.
- (ii) Prove that  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3}$ .
- (iii) Prove that  $\mathbf{e}$  is conserved.
- (iv) Prove that  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{L} = 0$ .
- (v) Prove that  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} + r = \frac{L^2}{m^2 \mu}$ , where  $L := |\mathbf{L}|$  stands for the length of  $\mathbf{L}$ .

## 基礎数学 II

6

複素数を成分とする  $n \times n$  行列  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  と  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  は, それぞれ, 非対角成分が全て非零の三重対角行列と対角行列である. すなわち, 行列成分  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$  は

$$a_{i,j} = 0 \ (|i-j| > 1), \quad a_{i,j} \neq 0 \ (|i-j| = 1), \quad b_{i,j} = 0 \ (|i-j| \geq 1)$$

を満たす. ここで, 同一の正則行列  $P$  を用いた相似変換  $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$  によって行列  $A$  と  $B$  は, それぞれ, 対角行列と非対角成分が全て非零の三重対角行列に変換されるものとする. 行列  $A$  の固有値を  $\lambda_i$ , 単位行列を  $I$ , 零行列を  $O$  で表す. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i)  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  を定数とする.

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = O$$

が成立するのは  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$  のときのみであることを示せ.

(ii) 行列  $A$  の固有値は全て相異なることを示せ.

(iii)  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  とし, 行列  $E_i$  を

$$E_i = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} (A - \lambda_k I)$$

で定める. このとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E_k &= I, & E_i E_j &= \delta_{i,j} E_i \\ E_i B E_j &= O \ (|i-j| > 1), & E_i B E_j &\neq O \ (|i-j| = 1) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$  とする.

An English Translation:

## Basic Mathematics II

6

Let  $n \times n$  complex matrices  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  and  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  be a tri-diagonal matrix whose off-diagonal entries are non-zero and a diagonal matrix, respectively. Equivalently, the entries  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$  of  $A$  and  $B$  satisfy

$$a_{i,j} = 0 \ (|i - j| > 1), \quad a_{i,j} \neq 0 \ (|i - j| = 1), \quad b_{i,j} = 0 \ (|i - j| \geq 1).$$

Suppose that  $A$  and  $B$  can be converted into a diagonal matrix and a tri-diagonal matrix whose off-diagonal entries are non-zero, respectively, by a similarity transformation with a common regular matrix  $P$ :  $A \mapsto P^{-1}AP, B \mapsto P^{-1}BP$ .

Let  $\lambda_i$  be the eigenvalues of  $A$ . Hereafter,  $I$  denotes the identity matrix, and  $O$  denotes the zero matrix. Answer the following questions.

(i) Let  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  be constants. Show that

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = O$$

holds only when  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ .

(ii) Show that all the eigenvalues of  $A$  are mutually distinct.

(iii) Let  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  and let  $E_i$  be the matrix defined by

$$E_i = \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} (A - \lambda_k I).$$

Show that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E_k &= I, & E_i E_j &= \delta_{i,j} E_i, \\ E_i B E_j &= O \ (|i - j| > 1), & E_i B E_j &\neq O \ (|i - j| = 1), \end{aligned}$$

$$\text{where } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

## 応用数学

1

$R > 0$  とし、図のように複素平面において、 $C_1(R)$  を  $iR$  を始点とし  $0$  を終点とする線分、 $C_2(R)$  を  $0$  を始点とし  $(1+i)R$  を終点とする線分、 $C_3(R)$  を  $(1+i)R$  を始点とし  $iR$  を終点とする線分とする。  $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) とおき、

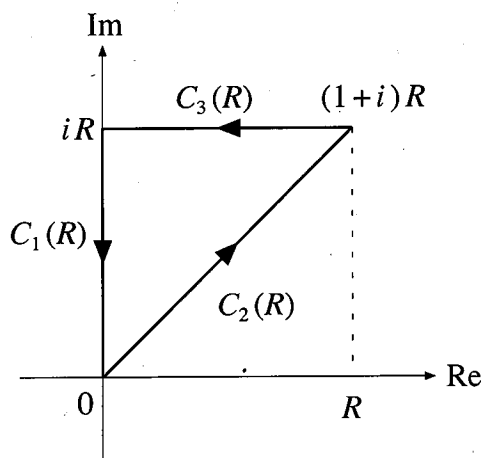
$$A = \int_0^\infty \cos(t^2) dt, \quad B = \int_0^\infty \sin(t^2) dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。なお、

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

は用いてよい。

- (i)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_1(R)} f(z) dz$  を求めよ。
- (ii)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2(R)} f(z) dz$  を  $A$  と  $B$  とを用いて表せ。
- (iii)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_3(R)} f(z) dz = 0$  を示せ。
- (iv)  $A$  と  $B$  を求めよ。



An English Translation:

## Applied Mathematics

1

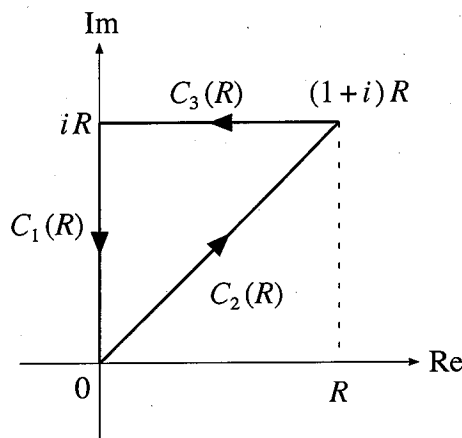
Let  $R > 0$  and let  $C_1(R)$ ,  $C_2(R)$  and  $C_3(R)$  be the paths from  $iR$  to 0, from 0 to  $(1+i)R$ , and from  $(1+i)R$  to  $iR$ , respectively, in the complex plane, as shown in the figure. Define  $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) and let

$$A = \int_0^\infty \cos(t^2) dt, \quad B = \int_0^\infty \sin(t^2) dt.$$

Answer the following questions. Here you can use the equality

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- (i) Obtain  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_1(R)} f(z) dz$ .
- (ii) Write  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2(R)} f(z) dz$  in terms of  $A$  and  $B$ .
- (iii) Show that  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_3(R)} f(z) dz = 0$ .
- (iv) Obtain  $A$  and  $B$ .



## グラフ理論

2

$\mathbb{R}_+$  を非負実数の集合とし,  $N = [G, w]$  を単純連結無向グラフ  $G = (V, E)$ , 枝重み  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  からなるネットワークとする.  $|V| = n \geq 2$  とする.  $V$  の分割  $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$  に対し, 異なる節点集合  $V_i, V_j \in \pi$  間をつなぐ枝の集合を  $E(\pi)$  と記す.  $V$  のすべての分割の集合を  $\Pi$  と記す.

$N$  に対しクラスカルのアルゴリズムを用いて求めた最小木を  $T = (V, \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$  とする. ここで,  $a_i$  は木の枝として  $i$  番目に選ばれた枝とする. 森  $T_0 = (V, \emptyset)$ ,  $T_i = (V, \{a_1, a_2, \dots, a_i\})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  に対し,  $\pi_i \in \Pi$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  を森  $T_i$  の連結成分が作る節点集合  $V$  の分割と定める.  $\pi_{n-1} = \{V\}$  である. 各分割  $\pi \in \Pi$  に対する実数値  $y(\pi)$  を以下のように定める.

$$y(\pi_0) = w(a_1),$$

$$y(\pi_i) = w(a_{i+1}) - w(a_i), i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$y(\pi) = 0, \forall \pi \in \Pi - \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}\}.$$

以下の問いに答えよ.

(i)  $N$  に対する最小木を求めるクラスカルのアルゴリズムを記述せよ.

(ii) 各枝  $e \in E$  に対し次を満たす添え字  $j(e) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  が存在することを証明せよ.

$$e \in E(\pi_i), \forall i \leq j(e),$$

$$e \notin E(\pi_i), \forall i > j(e).$$

(iii) 各  $i = 1, 2, \dots, n-1$  に対し  $w(a_i) \leq w(e), \forall e \in E(\pi_{i-1})$  が成り立つことを証明せよ.

(iv) 各  $i = 1, 2, \dots, n-1$  に対し  $\sum_{j=0,1,\dots,i-1} y(\pi_j) = w(a_i)$  が成り立つことを証明せよ.

(v) 各枝  $e \in E$  に対し  $\sum_{\pi \in \Pi: e \in E(\pi)} y(\pi) \leq w(e)$  が成り立つことを証明せよ.

An English Translation:

## Graph Theory

2

Let  $\mathbb{R}_+$  be the set of non-negative reals, and  $N = [G, w]$  be a network that consists of a simple connected graph  $G = (V, E)$  and an edge weight  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , and let  $|V| = n \geq 2$ . For a partition  $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$  of  $V$ , let  $E(\pi)$  denote the set of edges between distinct vertex subsets  $V_i, V_j \in \pi$ . Denote by  $\Pi$  the set of all partitions of  $V$ .

Let  $T = (V, \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$  be a minimum spanning tree obtained from  $N$  by Kruskal's algorithm, where  $a_i$  is added to  $T$  as the  $i$ -th tree edge. For forests  $T_0 = (V, \emptyset)$  and  $T_i = (V, \{a_1, a_2, \dots, a_i\})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , let  $\pi_i \in \Pi$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  be the partition formed by the connected components of forest  $T_i$ , where  $\pi_{n-1} = \{V\}$ . Choose a real value  $y(\pi)$  for each partition  $\pi \in \Pi$  as follows.

$$\begin{aligned} y(\pi_0) &= w(a_1), \\ y(\pi_i) &= w(a_{i+1}) - w(a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ y(\pi) &= 0, \quad \forall \pi \in \Pi - \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-2}\}. \end{aligned}$$

Answer the following questions.

- (i) Give a description of Kruskal's algorithm to find a minimum spanning tree of  $N$ .
- (ii) Prove that each edge  $e \in E$  admits an index  $j(e) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  which satisfies the conditions:
 
$$\begin{aligned} e &\in E(\pi_i), \quad \forall i \leq j(e), \\ e &\notin E(\pi_i), \quad \forall i > j(e). \end{aligned}$$
- (iii) Prove that  $w(a_i) \leq w(e)$ ,  $\forall e \in E(\pi_{i-1})$  holds for each  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .
- (iv) Prove that  $\sum_{j=0,1,\dots,i-1} y(\pi_j) = w(a_i)$  holds for each  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .
- (v) Prove that  $\sum_{\pi \in \Pi: e \in E(\pi)} y(\pi) \leq w(e)$  holds for each edge  $e \in E$ .



## オペレーションズ・リサーチ

3

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, \dots, n)\}$  とする. さらに, 関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は次の不等式を満たす連続的微分可能な関数とする.

$$\begin{aligned} & \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \\ & \geq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + \alpha(1 - \alpha)(x - y)^\top(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

ただし,  $^\top$  は転置記号である.

次の非線形計画問題 P を考える.

$$\begin{aligned} \text{P: Minimize} \quad & -f(x) \\ \text{subject to} \quad & x \in \Omega \end{aligned}$$

さらに, パラメータ  $z \in \Omega$  をもつ次の凸 2 次計画問題  $Q(z)$  を考える.

$$\begin{aligned} Q(z): \text{Minimize} \quad & -\nabla f(z)^\top x + \frac{1}{2}(x - z)^\top(x - z) \\ \text{subject to} \quad & x \in \Omega \end{aligned}$$

ただし, 問題  $Q(z)$  の決定変数は  $x \in \mathbb{R}^n$  である. 任意の  $z \in \Omega$  に対して, 問題  $Q(z)$  は唯一の最適解  $\bar{x}(z)$  をもつ.

以下の問いに答えよ.

(i) 任意の  $x, y \in \mathbb{R}^n$  に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)^\top(x - y) + (x - y)^\top(x - y)$$

(ii) 問題  $Q(z)$  のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け.

(iii) 任意の  $z \in \Omega$  に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$f(z) - f(\bar{x}(z)) \leq -(\bar{x}(z) - z)^\top(\bar{x}(z) - z)$$

(iv) 次の命題 (A) について, 真であれば証明を, 偽であれば反例を与えよ.

(A)  $z \in \Omega$  かつ  $\bar{x}(z) = z$  であれば,  $z$  は問題 P の局所的最適解である.

An English Translation:

## Operations Research

3

Let  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, \dots, n)\}$ , and let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuously differentiable function satisfying

$$\begin{aligned} & \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)f(\mathbf{y}) \\ & \geq f(\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) + \alpha(1 - \alpha)(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

where the superscript  $\top$  denotes the transposition of a vector.

Consider the following nonlinear programming problem P.

$$\begin{aligned} \text{P: Minimize} \quad & -f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem  $Q(\mathbf{z})$  with a vector  $\mathbf{z} \in \Omega$  of parameters:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{z}): \text{ Minimize} \quad & -\nabla f(\mathbf{z})^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{z})^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  represents decision variables of  $Q(\mathbf{z})$ . For any  $\mathbf{z} \in \Omega$  problem  $Q(\mathbf{z})$  has a unique optimal solution  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ .

Answer the following questions.

- (i) Show that the following inequality holds for any  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \geq \nabla f(\mathbf{y})^\top(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

- (ii) Write out Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem  $Q(\mathbf{z})$ .

- (iii) Show that the following inequality holds for any  $\mathbf{z} \in \Omega$ .

$$f(\mathbf{z}) - f(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) \leq -(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \mathbf{z})^\top(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \mathbf{z}).$$

- (iv) Prove or disprove the following proposition (A), giving a proof or a counterexample.

(A) If  $\mathbf{z} \in \Omega$  and  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ , then  $\mathbf{z}$  is a local optimal solution to problem P.

## 現代制御論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

により与えられる線形システムを考える。ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^3$  は状態ベクトル、 $u(t) \in \mathbb{R}$  は制御入力、 $x_0 \in \mathbb{R}^3$  は初期状態とする。また、

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とし、 $^T$  は転置をあらわす。以下の問いに理由とともに答えよ。

- (i)  $A$  のすべての実固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。
- (ii) このシステムの可制御性を判定せよ。
- (iii)  $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$  とする。このとき、 $x(\tau) = -2x_0$  を満たす  $\tau > 0$  および  $u(t)$  が存在するか判定せよ。
- (iv) 状態フィードバック  $u(t) = k^T x(t)$  がシステムを内部安定化するような  $k \in \mathbb{R}^3$  が存在するか判定せよ。

An English Translation:

### Modern Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

where  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  is a state vector,  $u(t) \in \mathbb{R}$  is a control input, and  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  is an initial state. Let

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

and  $^\top$  denotes the transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

- (i) Find all the real eigenvalues of  $A$  and their corresponding eigenvectors.
- (ii) Determine the controllability of the system.
- (iii) Let  $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^\top$ . Then, determine whether there exist  $\tau > 0$  and  $u(t)$  for which  $x(\tau) = -2x_0$  holds.
- (iv) Determine whether there exists  $k \in \mathbb{R}^3$  such that the state feedback control  $u(t) = k^\top x(t)$  internally stabilizes the system.

## 物理統計学

5

質量  $m$  の粒子が  $-m\gamma V(t)$  の抵抗力を受けて 1 次元の自由なブラウン運動をしているとする。ここで、 $\gamma$  は正の定数、 $V(t)$  は時刻  $t$  における粒子の速度とする。 $V(t)$  はオルンシュタイン・ウーレンベック過程で表される。 $V(t_0) = v_0$  という条件付きの  $V(t)$  の確率密度関数（遷移確率）は

$$p(v, t|v_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(v - v_0 \exp(-\gamma(t-t_0)))^2}{2\rho(t-t_0)}\right)$$

となる。ここで、 $t > t_0$ ,  $\rho(t) := \frac{D}{\gamma} (1 - \exp(-2\gamma t))$ ,  $D$  は正の定数である。 $V(t)$  の関数  $f(V(t))$  に対して、 $\langle f(V(t)) \rangle_{v_0, t_0}$  は  $f(V(t))$  の  $V(t_0) = v_0$  という条件付きの平均とする。オルンシュタイン・ウーレンベック過程は定常マルコフ過程である。 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$  を用いてよい。以下の問いに答えよ。

(i)  $t \rightarrow \infty$  のとき  $p(v, t|v_0, t_0)$  が、温度  $T$  の平衡状態での速度の分布であるマックスウェル分布と一致するときの  $D$  を定めよ。ここで、ボルツマン定数を  $k_B$  とする。

(ii)  $V(t_0) = v_0$  の条件のもとでの粒子のエントロピー生成は

$$\sigma_{v_0, t_0}(t) := -\langle \ln p(V(t), t|v_0, t_0) \rangle_{v_0, t_0} - \frac{\gamma}{2D} \langle (V(t))^2 \rangle_{v_0, t_0}$$

と定義する。ここで、 $t > t_0$ ,  $\ln A$  は  $A$  の自然対数である。エントロピー生成率  $\frac{d\sigma_{v_0, t_0}(t)}{dt}$  が正であることを示せ。

(iii)  $n$  を正の整数、 $\tau$  を正として、 $a_n(v_0, \tau)$  を

$$a_n(v_0, \tau) := \langle (V(t_0 + \tau) - v_0)^n \rangle_{v_0, t_0}$$

とし、 $A_n(v) := \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{a_n(v, \tau)}{\tau}$  とすると、 $t > t_0$  のとき

$$\frac{\partial p(v, t|v_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j} (A_j(v) p(v, t|v_0, t_0))$$

となる。 $A_n(v)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を求めよ。

An English Translation:

## Physical Statistics

5

Consider a particle with mass  $m$  executing free Brownian motion under the influence of a friction force  $-m\gamma V(t)$ , where  $\gamma$  is a positive constant and  $V(t)$  the velocity of the particle at time  $t$ .  $V(t)$  is described by an Ornstein-Uhlenbeck process with the conditional probability density function, or the transition probability, of  $V(t)$  given that  $V(t_0) = v_0$ ,

$$p(v, t|v_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(v - v_0 \exp(-\gamma(t-t_0)))^2}{2\rho(t-t_0)}\right),$$

where  $t > t_0$ ,  $\rho(t) := \frac{D}{\gamma}(1 - \exp(-2\gamma t))$ , and  $D$  is a positive constant.  $\langle f(V(t)) \rangle_{v_0, t_0}$  denotes the conditional average of  $f(V(t))$  given that  $V(t_0) = v_0$ , where  $f(V(t))$  is a function of  $V(t)$ . The Ornstein-Uhlenbeck process is a stationary Markov process. Let  $k_B$  be Boltzmann's constant. You may use the equality  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$  without proof. Answer the following questions.

- (i) Determine  $D$  when, as  $t \rightarrow \infty$ ,  $p(v, t|v_0, t_0)$  tends to the Maxwell distribution, that is, the equilibrium distribution of the velocity at temperature  $T$ .
- (ii) The entropy production of the particle under the initial condition that  $V(t_0) = v_0$  is defined as

$$\sigma_{v_0, t_0}(t) := -\langle \ln p(V(t), t|v_0, t_0) \rangle_{v_0, t_0} - \frac{\gamma}{2D} \langle (V(t))^2 \rangle_{v_0, t_0},$$

where  $t > t_0$ , and  $\ln A$  denotes the natural logarithm of  $A$ . Show that the entropy production rate  $\frac{d\sigma_{v_0, t_0}(t)}{dt}$  is positive.

- (iii) Let

$$a_n(v_0, \tau) := \langle (V(t_0 + \tau) - v_0)^n \rangle_{v_0, t_0},$$

where  $n$  is a positive integer and  $\tau$  is positive, and let  $A_n(v) := \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{a_n(v, \tau)}{\tau}$ . For  $t > t_0$ , the following equation is satisfied:

$$\frac{\partial p(v, t|v_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j} (A_j(v) p(v, t|v_0, t_0)).$$

Find  $A_n$  for  $n = 1, 2, \dots$ .

## 力学系数学

6

$f(t), g(t), h(t)$  を  $\mathbb{R}$  上の連続関数として,

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ g(t) & h(t) \end{pmatrix}$$

とおき,  $\mathbb{R}$  上において 2 元連立線形微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

を考える.  $I$  を 2 次単位行列,

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

として, 以下の問いに答えよ. ただし,  $t \neq 0$  のとき  $F(t) \neq H(t)$  が成立するものとする.

- (i)  $\Phi(0) = I$  を満たす式 (1) の基本行列  $\Phi(t)$  を求めよ. ここで, 基本行列  $\Phi(t)$  とは, 正則かつ  $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$  を満たす 2 次正方行列のことをいう.
- (ii)  $t \neq 0$  のとき, 行列  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ G(t) & H(t) \end{pmatrix}$  の対角化を行って, 指数関数  $\exp \Psi(t)$  を求めよ.
- (iii)  $k \in \mathbb{R}$  をある定数として  $\mathbb{R}$  上で  $G(t) = k(F(t) - H(t))$  が成立するとき, (ii) で求めた指数関数  $\exp \Psi(t)$  が式 (1) の基本行列となることを示せ.
- (iv) (i) と (ii) を用いて, 指数関数  $\exp \Psi(t)$  が式 (1) の基本行列とならない  $f(t), g(t), h(t)$  の例をあげよ.

An English Translation:

## Mathematics for Dynamical Systems

6

Let  $f(t)$ ,  $g(t)$  and  $h(t)$  be continuous functions on  $\mathbb{R}$  and let

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ g(t) & h(t) \end{pmatrix}.$$

Consider the two-dimensional linear system of differential equations

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

on  $\mathbb{R}$ . Let  $I$  be the  $2 \times 2$  identity matrix, and let

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds.$$

Assume that  $F(t) \neq H(t)$  for  $t \neq 0$ . Answer the following questions.

- (i) Obtain the fundamental matrix to equation (1) satisfying  $\Phi(0) = I$ . Here a  $2 \times 2$  matrix  $\Phi(t)$  is called a fundamental matrix if it is nonsingular and satisfies  $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$ .
- (ii) When  $t \neq 0$ , obtain the exponential function  $\exp \Psi(t)$  of  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} F(t) & 0 \\ G(t) & H(t) \end{pmatrix}$  by diagonalizing  $\Psi(t)$ .
- (iii) Assume that  $G(t) = k(F(t) - H(t))$  on  $\mathbb{R}$  for some constant  $k \in \mathbb{R}$ . Show that the exponential function  $\exp \Psi(t)$  obtained in (ii) becomes a fundamental matrix to equation (1).
- (iv) Give an example of  $f(t)$ ,  $g(t)$  and  $h(t)$  such that  $\exp \Psi(t)$  is not a fundamental matrix to equation (1), using (i) and (ii).