# 第６問

ネットワークにおいて，最短経路と最短距離を求めるアルゴリズムを考える．図 1 はネットワークの一例である．図において，○印はノードを表し，ノードとノードを結ぶ直線はリンクを表す．リンクに付与された整数は隣接ノード間の距離を表す．

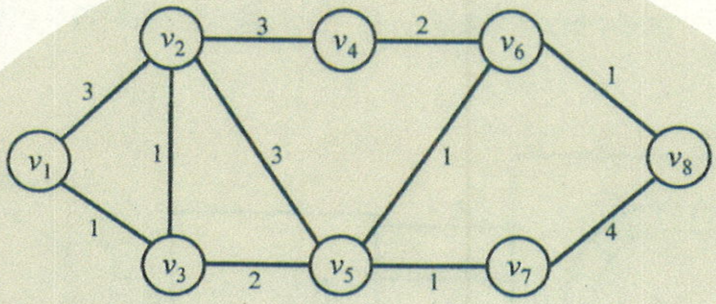


図 1

(1) 図 1 でノード $v_1$ を起点とした場合，ノード $v_8$ に至るまでの最短経路と最短距離を示せ．

(2) ノードの集合を $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，隣接するノード $v_i$ と $v_j$ の間の距離を $c_{ij}$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$，$c_{ij}=c_{ji}$，$c_{ij} \geqq 0$，$c_{ii}=0$，ノード $v_1$ から $v_j$ への距離を $a_j$ とする．$a_j$ が最短距離であることが確定したノードの集合を $P$，$P$ に含まれないノードの集合を $U$ とする．ノード $v_1$ から全てのノードに対する最短距離を求めるアルゴリズムを以下に示す．この場合の，手順(ii), (iii)の空欄(I)，(II)を埋めよ．

手順(i)：　$P=\{v_1\}$，$U=V-P$，$i=1$，$a_1=0$，$a_j=\infty$ $(j=2, \ldots, n)$ とする．

手順(ii)：ノード $v_i$ とその全ての隣接ノード $v_j$ について，

[　　　　　(I)　　　　　] の場合，$a_j=a_i+c_{ij}$ とする．

手順(iii)：[　　　(II)　　　] を満たす $v_k$ を，集合 $U$ から除き，集合 $P$ に加える．

手順(iv)：$U=\varnothing$ ならば終了，そうでなければ $k$ の値を $i$ に代入し，手順(ii)に戻る．

(3) 図 1 のネットワークに対して(2)の手順を適用し，手順(iv) にて $i=5$ となった時点の集合 $P, U$ と $a_j (j=1, 2, \ldots, 8)$ の値を示せ．また，手順が全て終了した時点の $a_j (j=1, 2, \ldots, 8)$ を示せ．

(4) (2)の手順を改良し，最短距離だけではなく最短経路も導出できるようにしたい．改良方法を具体的に述べよ．

(5) (2)の手順によって導出した $a_j (j=2, \ldots, n)$ は，ノード $v_1$ からノード $v_j (j=2, \ldots, n)$ への最短距離になっていることを証明せよ．

## Problem 6

Let us consider an algorithm to find the shortest paths and their distances in a network. Figure 1 shows an example network, in which a circle denotes a node and a line segment between two nodes denotes a link. The integer attached to a link presents the distance between the adjacent nodes.

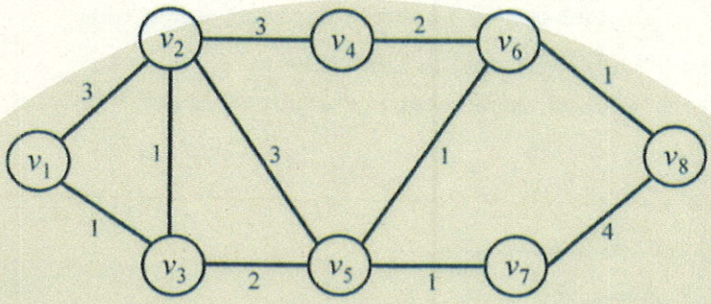


Fig. 1

(1) In Fig. 1, find the shortest path and its distance from $v_1$ to $v_8$.

(2) Let $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be the set of all nodes, $c_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ be the distance between adjacent nodes $v_i$ and $v_j$, where $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ij} \geqq 0$, and $c_{ii} = 0$. Furthermore, let $a_j$ be the distance from $v_1$ to $v_j$. The set $P$ consists of nodes $v_j$ whose shortest distances from $v_1$ are derived as $a_j$. The set $U$ consists of nodes $v_j$ that are not in $P$. We show an algorithm for deriving the shortest distances from $v_1$ to all the other nodes in the following. Fill in (I) and (II) in Step (ii) and Step (iii), respectively.

Step (i) : Let $P = \{v_1\}$, $U = V - P$, $i = 1$, $a_1 = 0$ and $a_j = \infty$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Step (ii) : Regarding nodes $v_i$ and all its adjacent nodes $v_j$, if

[ (I) ], then $a_j = a_i + c_{ij}$.

Step (iii) : Remove $v_k$, which satisfies [ (II) ], from $U$, and add $v_k$ to $P$.

Step (iv) : If $U = \varnothing$, stop, else let $i=k$ and go back to Step (ii).

(3) Applying the algorithm in (2) to the network of Fig. 1, show the members of $P$ and $U$, and the values of $a_j$ $(j=1, 2, \ldots, 8)$ when $i = 5$ in Step (iv). Furthermore, show the final values of $a_j$ $(j=1, 2, \ldots, 8)$ when the algorithm terminates.

(4) Describe in concrete how to improve the algorithm in (2) to find the shortest paths in addition to the shortest distances.

(5) Prove that the distances $a_j$ $(j=2, \ldots, n)$ derived by the algorithm in (2) represent the shortest distances from $v_1$ to $v_j$ $(j=2, \ldots, n)$.