

平成 29 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

専門科目試験問題
(電子工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて21ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、「量子電子物性4」、「制御工学」、及び、「信号処理」、の全部で6題あり、この順番に綴じられている。このうち、3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【量子電子物性1】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること。

次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、電子の質量を m 、素電荷を e 、プランク定数を 2π で割った値を \hbar とする。

ポテンシャル $\Phi(x, y, z) = 0$ の三次元空間を運動する 1 個の自由電子の基底状態を考える。波動関数を $\psi(x, y, z)$ とすると、自由電子の満たす三次元のシュレーディンガー方程式は、エネルギー固有値を ε として、 \hbar 、 m 、 $\psi(x, y, z)$ 、 ε を用いて、次式で与えられる。

$$[\quad \textcircled{1} \quad] \quad (1)$$

この方程式の一般解は、定数 A 、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ および位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を用いて次式で表される。

$$\psi(x, y, z) = A \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\} = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2)$$

ここで、波動関数は以下のように周期 L の周期的境界条件を満たすとする。

$$\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z) \quad (3)$$

これより、 \mathbf{k} は、量子数(整数)のベクトル表示 (n_x, n_y, n_z) を用いて、次式で表される。

$$\mathbf{k} = [\quad \textcircled{2} \quad] \times (n_x, n_y, n_z) \quad (4)$$

一方、エネルギー固有値 ε は、 \hbar 、 m 、 L 、 n_x 、 n_y 、 n_z を用いて、次式で与えられる。

$$\varepsilon = [\quad \textcircled{3} \quad] \quad (5)$$

また、確率密度 $|\psi(x, y, z)|^2$ を全空間(体積 $= V = L^3$)で積分すると 1 とならなければならないので、定数 A は次式のように求まる。

$$A = [\quad \textcircled{4} \quad] \quad (6)$$

次に、直交軸 k_x 、 k_y 、 k_z をもつ三次元波数空間を考える。パウリの排他原理とスピンによる縮退を考慮すると、各々の許された \mathbf{k} は 2 つの電子を収容できるエネルギー準位に対応している。

ここで、 N 個の電子がこれらのエネルギー準位を占有し、絶対零度で電子が占める最高のエネルギー(フェルミエネルギー)まで詰まっているとする。 N は非常に大きいので、 (k_x, k_y, k_z) 空間で電子が占める領域は、フェルミ波数 k_F を半径とする球とみなせる。 (k_x, k_y, k_z) 空間で単位体積あたりに許される \mathbf{k} の数は、 $[\quad \textcircled{5} \quad]$ であるので、球内の \mathbf{k} の許される値の数は、 k_F 、 V を用いて、 $[\quad \textcircled{6} \quad]$ である。したがって、スピンを考慮すると、電子密度 $\bar{n} = N/V$ は、 k_F を用いて、次式で与えられる。

$$\bar{n} = [\quad \textcircled{7} \quad] \quad (7)$$

一方、1 個の自由電子が占める体積を球に置き換えたときの半径を r_s とすると、 \bar{n} は r_s を用いて次式で表される。

$$\bar{n} = [\quad \textcircled{8} \quad] \quad (8)$$

式(7)および式(8)より, k_F は, r_s を用いて, 次式で表される.

$$k_F = [\quad \textcircled{9} \quad] \quad (9)$$

これから, フェルミ速度 v_F は, \hbar , m , r_s を用いて, 次式で与えられる.

$$v_F = [\quad \textcircled{10} \quad] \quad (10)$$

実際の結晶中では, 原子のイオン核による周期ポテンシャル $\Phi(x, y, z)$ が存在する. 格子定数 d の面心立方格子結晶 (図 1-1) について, その逆格子空間における基本逆格子ベクトルを \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* , \mathbf{c}^* とすると, その大きさ $|\mathbf{a}^*|$, $|\mathbf{b}^*|$, $|\mathbf{c}^*|$ は全て d を用いて, [$\textcircled{11}$] となる. 波である電子は周期ポテンシャルによってブラッグ反射を起こす. このとき, 反射前後で電子の \mathbf{k} は逆格子ベクトル \mathbf{G} ($=n_a\mathbf{a}^*+n_b\mathbf{b}^*+n_c\mathbf{c}^*$, n_a, n_b, n_c は任意の整数) だけ変化するが, その大きさは変わらない. この条件を満たすのは \mathbf{k} と \mathbf{G} が以下の関係を満たすときである.

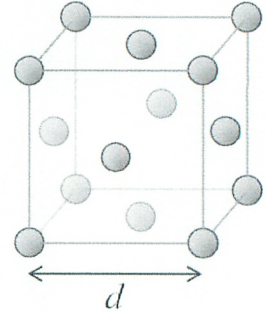


図 1-1

$$|\mathbf{G}|^2 = [\quad \textcircled{12} \quad] \quad (11)$$

ブラッグ反射を受けた電子は定在波となり, その空間分布によって異なるエネルギーを持つ 2 つの状態をとるため, しばしばエネルギーギャップが形成される. これが結晶中のエネルギーバンド構造を決める要因となる.

金属とは, エネルギーバンドの途中まで電子が詰まっているものとして定義される. 結晶中の電子の速度は群速度のベクトル \mathbf{v}_g として定義され, \mathbf{k} を用いて, 次式で与えられる.

$$\mathbf{v}_g = [\quad \textcircled{13} \quad] \quad (12)$$

この関係から, ニュートンの第 2 法則 $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_g}{dt}$ は, \mathbf{k} を用いて, 次式で与えられる.

$$\mathbf{F} = [\quad \textcircled{14} \quad] \quad (13)$$

次に, ある時刻 t における電子の波数ベクトルを $\mathbf{k}(t)$ とする. 電荷 $-e$ を持つ電子に定電界 \mathbf{E} が時間 t の間かかった場合, 電子の波数ベクトルの変化は次式で与えられる.

$$\mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(0) = [\quad \textcircled{15} \quad] \quad (14)$$

\mathbf{E} のかかった状態で, この電子が時間 τ 毎に散乱体と衝突して元の波数ベクトル $\mathbf{k}(0)$ に戻ると仮定する.

この場合, 電子の波数変化の時間平均 $\delta\mathbf{k} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{\mathbf{k}(t) - \mathbf{k}(0)\} dt$ は次式で与えられる.

$$\delta\mathbf{k} = [\quad \textcircled{16} \quad] \quad (15)$$

結晶内の全電子が等しく $\delta\mathbf{k}$ の波数変化を起こすと考ええると, 全電子の群速度も電界印加前に比べて $\delta\mathbf{v}_g$ だけ増加する. ゆえに結晶内の電子密度を \bar{n} とすると, \mathbf{E} によって発生する電流密度 \mathbf{J} は, m , \bar{n} ,

e , τ , \mathbf{E} を用いて次式で与えられる.

$$\mathbf{J} = [\quad \textcircled{17} \quad] \quad (16)$$

- 問1 文章中の空欄 [$\textcircled{1}$] \sim [$\textcircled{17}$] にあてはまる数式を答えよ. なお, [$\textcircled{1}$] は等式で答えよ.
- 問2 アルミニウムの場合, r_s は 1.1 \AA ($1.1 \times 10^{-10} \text{ m}$) である. アルミニウムの絶対零度でのフェルミ速度を有効数字一桁で求めよ. ただし, 単位は $[\text{m/s}]$ とする. 計算では, $\pi \cong 3.0$, $4^{1/3} \cong 1.6$ とし, 必要であれば, $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ の値を用いよ.
- 問3 絶縁体には電流が流れない理由を, 「エネルギーバンド」, 「電子の波数」をキーワードとして, 50 字程度で述べよ.
- 問4 一次元の半金属におけるフェルミ準位 ε_F 近傍のバンド構造を, 縦軸をエネルギー ε , 横軸を波数 k として図示せよ. 作図の際は, 下記の図 1-2 を解答用紙に写し, そこへバンドを表す曲線を 2 本図示せよ. なお, k_{BR} は第一ブリルアンゾーンの端の波数を示すものとする.
- また, 三次元結晶において一般的に半金属は金属に比べて電気抵抗率が高い理由について, 「エネルギーバンド」, 「キャリア」をキーワードとして 50 字程度で述べよ.

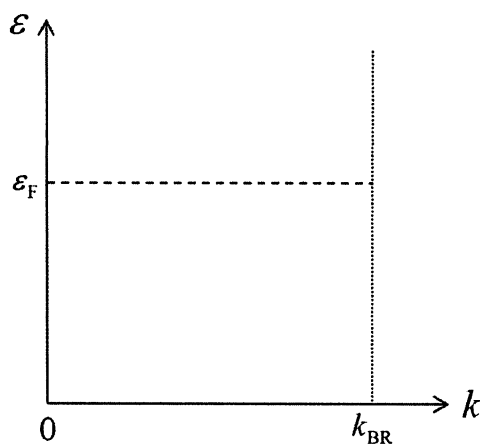


図 1-2

【量子電子物性2】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること。

次の半導体に関する文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、絶対温度を T 、素電荷を e 、ボルツマン定数を k_B で表す。

[I] 半導体に不純物を添加することをドーピングと呼ぶ。一般にIV族(第14族)に属する半導体ではドーパントであるV族(第15族)元素は [㉑] として働く。 [㉒] を一様にドーブしたある温度 T で熱平衡状態にあり、伝導電子の密度を n とし、マックスウェル・ボルツマン統計に従う結晶の異方性が無視できる n 型半導体を考える。有効質量 m_n をもった熱平衡状態における伝導電子の熱エネルギーは、エネルギー等分配の法則から求められる。半導体中の伝導電子は、三次元空間を運動しているため、自由度は3である。したがって、平均の熱速度の大きさを v_{th} とすると

$$v_{th} = [\quad \text{㉓} \quad] \quad (1)$$

となる。

半導体中の伝導電子は熱速度 v_{th} をもって、原子の格子振動や不純物等と衝突し、散乱されながら結晶中を乱雑に [㉔] 運動しており、十分長い時間にわたって時間平均すると、その速度のベクトル平均値を $\langle \mathbf{v}_{n,th} \rangle$ とすると

$$\langle \mathbf{v}_{n,th} \rangle = [\quad \text{㉕} \quad] \quad (2)$$

となる。衝突から衝突まで移動する距離は、 [㉖] と呼ばれる。

半導体に弱い電界 \mathbf{E} が印加されると、伝導電子は加速と衝突を繰り返しながら電界と [㉗] 方向に進む。この電界によって生じる速度成分 $\langle \mathbf{v}_{n,E} \rangle$ は [㉘] 速度と呼ばれ、熱運動に重畳される。 $\langle \mathbf{v}_{n,E} \rangle$ は、電子移動度 μ_e と \mathbf{E} を用いて、

$$\langle \mathbf{v}_{n,E} \rangle = [\quad \text{㉙} \quad] \quad (3)$$

となる。SI単位系では μ_e の単位は [㉚] で表される。このとき、伝導電子による電流密度 \mathbf{J}_e は、 $\langle \mathbf{v}_{n,E} \rangle$ を用いて、

$$\mathbf{J}_e = [\quad \text{㉛} \quad] \quad (4)$$

となる。

イオン化した不純物と格子振動による伝導電子の散乱が同時に存在する場合、 n 型半導体の電子移動度 μ_e は、 [㉜ 低温, 高温] では、前者が支配的となり、 [㉝ 低温, 高温] では、後者が支配的となる。理論的には、イオン化不純物散乱による移動度は、 [㉞ $T^{-3/2}$, $T^{3/2}$] に比例し、格子散乱による移動度は、 [㉟ $T^{-3/2}$, $T^{3/2}$] に比例する。

半導体に添加した [㊱] に濃度勾配がある場合、熱励起された伝導電子はその密度勾配を解消するために移動し、拡散電流が流れる。一方、この伝導電子の移動で生じた内部電界に応じて逆方向

に [㊸] 電流が流れるが、ある温度 T では2つの電流が互いに打ち消し合い、電気が流れない熱平衡状態となる。伝導電子がマックスウェル・ボルツマン統計に従うと仮定すると、半導体中の拡散係数 D_e と μ_e との関係式

$$D_e = [\text{㊹}] \times \mu_e \quad (5)$$

が導かれる。この式 (5) は一般に [㊺] の関係式と呼ばれている。

[II] 禁止帯幅 ε_g をもつ真性半導体において、その基礎吸収端近傍のフォトンエネルギー ($\cong \varepsilon_g$) をもつ光が吸収される場合を考える。光吸収によって価電子帯の電子が伝導帯に励起されるが、このときの電子の励起のされ方には、半導体のバンド構造に依存して [㊻] 遷移型と [㊼] 遷移型の二つのタイプがある。

下線 A [㊻] 遷移型の半導体では、バンド構造において伝導帯の下端と価電子帯の上端の [㊽] が等しく、1つのフォトンがこの半導体に吸収されると1つの電子が励起される。一方、下線 B [㊼] 遷移型の半導体ではこれらの [㊽] が異なるため、[㊽] が小さいフォトンのみでは [㊾] の法則が成り立たず、電子の励起は不可能である。しかしながらこの光吸収過程で、[㊿] に必要な [㊽] を供給してくれる [㊽] との相互作用が実現すれば、伝導帯への電子の励起は可能となる。このため光吸収による電子の遷移の確率は、一般に [㊻] 遷移型半導体の方が [㊼] 遷移型半導体より大きくなる。

このように電子が伝導帯に励起されると、価電子帯には正孔が生成され、励起された電子と正孔がつくる [㊿] 場によって電子-正孔対が形成される。下線 C このような [㊿] 束縛力によって形成される電子-正孔対のことを [㊿] とよぶ。

またこのときの束縛エネルギー ε_B は、以下の式で与えられる。

$$\varepsilon_B = \frac{m_{e-h}}{m} \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 \varepsilon_H \quad (6)$$

ここで、 m_{e-h} は電子-正孔対を形成する質量 m_e の電子と質量 m_h の正孔の換算質量、 m は自由電子の質量、 κ は比誘電率、また ε_H は水素原子の第一イオン化エネルギーの大きさ 13.6 eV である。

問1 文章中の空欄 [㉞] ～ [㉟] にあてはまる語句，および空欄 [①] ～ [⑦] にあてはまる数式または数値を答えよ。ただし， [㊦]， [㊧]， [⑤]， [⑥] は適切な語句または数式を一つ選ぶこと。

問2 室温における Si と GaAs の電子移動度が正孔移動度より大きい理由を簡潔に述べよ。

問3 下記に代表的な真性半導体をいくつか示している。この中から，下線 A および B に該当するものをそれぞれ全て選び出せ。またこの下線 A に対応する半導体の中から，禁止帯幅 ε_g が最も大きな半導体と最も小さな半導体を示せ。

[InAs, Ge, GaP, GaAs, GaN, Si]

問4 $m_e = 0.05m$ ， $m_h = 0.10m$ ， $\kappa = 10$ の半導体において， ε_B を有効数字2桁で求めよ。

問5 図2-1 に温度 21 K で観測された GaAs の光吸収スペクトルを示す。文中の下線 C のような電子－正孔対を励起するのに関係している吸収は， ①， ②および③の点線で囲まれた測定データのどれに該当するか答えよ。

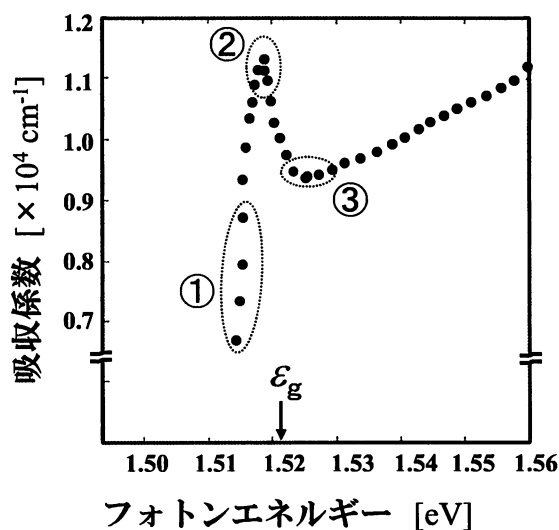


図 2-1

問6 問5と同様の観測を室温で行なった場合，文中の下線 C のような電子－正孔対による光吸収スペクトルの観測結果はどのようにになると考えられるか，その理由も述べて答えよ。

【量子電子物性3】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること。

次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、絶対温度を T ，ボルツマン定数を k_B ，素電荷を e とする。

金属／酸化膜／半導体型電界効果トランジスタ (MOSFET) について考える。ただし、接合界面の界面準位、および酸化膜中の固定電荷や捕獲電荷の影響は無視できるとする。図 3-1 は MOSFET を構成するゲート電極(金属)、酸化膜、p 型 Si 基板(p-Si)のそれぞれが電荷中性を保ち、お互いに電荷の移動がない場合のエネルギーバンド図である。酸化膜/p-Si 界面を原点($x=0$)とし、p-Si が $x \geq 0$ の領域にある。図中の ϵ_i は Si の真性フェルミ準位、 ϵ_{FS} 、 ϵ_C 、 ϵ_V はそれぞれ p-Si のフェルミ準位、伝導帯の下端および価電子帯の上端のエネルギーであり、 ϵ_{FM} は金属のフェルミ準位のエネルギーである。また、 $\epsilon_{g,S}$ は

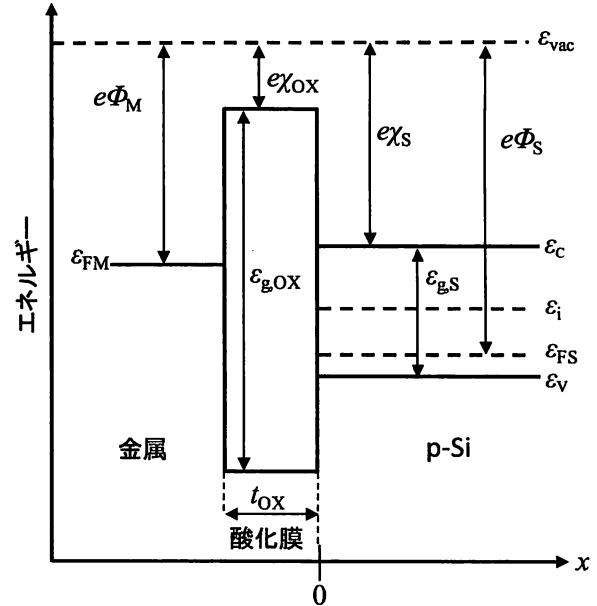


図 3-1

p-Si のバンドギャップエネルギー、 ϵ_{vac} は真空準位、 t_{OX} 、 $\epsilon_{g,OX}$ はそれぞれ酸化膜の厚さおよびバンドギャップエネルギーである。このとき、図中の $e\chi_S$ 、 $e\chi_{OX}$ はそれぞれ p-Si および酸化膜の [⑦] であり、 $e\Phi_M$ 、 $e\Phi_S$ はそれぞれ金属および p-Si の [①] である。

下線 A ゲート電極と p-Si を電氣的に接触させ熱平衡状態に達したとき、p-Si 界面に空乏層が形成された。ここで、空乏層幅 w 、p-Si のアクセプタ密度 N_A 、Si の誘電率 κ_S とする。ガウスの法則より電束密度 $D(x)$ 、電荷密度 $\rho(x)$ には

$$\frac{dD(x)}{dx} = \rho(x) \quad (1)$$

の関係が成り立つ。よって空乏層内部の電位 $V(x)$ に対して

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = [\quad \text{①} \quad] \quad (2)$$

が成り立つ。これは空乏層内部におけるポアソンの式である。ただし、空乏層内のキャリアによる電荷は無視でき、p-Si 中でアクセプタは一様に分布し、かつすべてイオン化しているものとする。境界条件として $V(w)=0$ 、 $dV/dx|_{x=w}=0$ を仮定して式(2)の微分方程式を解くと

$$\frac{dV(x)}{dx} = [\quad \text{②} \quad] \quad (3)$$

$$V(x) = [\quad \text{③} \quad] \quad (4)$$

となる．ここで，p-Si の表面電位を $V(0) = \phi_s$ とすると， w は ϕ_s ， κ_s ， e ， N_A を用いて

$$w = [\quad \textcircled{4} \quad] \quad (5)$$

と書ける．また，空乏層に蓄積された単位面積当たりの電荷量 Q_d は w ， e ， N_A を用いて

$$Q_d = [\quad \textcircled{5} \quad] \quad (6)$$

となる．よって酸化膜の誘電率を κ_{ox} とすると，ガウスの法則より酸化膜にかかる電圧の大きさ V_{ox} は ϕ_s ， κ_s ， e ， N_A ， κ_{ox} ， t_{ox} を用いて

$$V_{ox} = [\quad \textcircled{6} \quad] \quad (7)$$

と表すことができる．

次に，p-Si 基板を接地し，電極にゲート電圧 V_G を印加する． V_G に正の電圧を印加し徐々に増加させる
と p-Si 界面に [$\textcircled{7}$] が形成され，電子密度が急激に増加する．正孔密度および電子密度をそれぞれ x の関数として $p(x)$ ， $n(x)$ とすると，真性フェルミ準位も電位分布 $V(x)$ の影響を受け $\varepsilon_i - eV(x)$ と書けるので， $p(x)$ ， $n(x)$ はそれぞれ，真性キャリア密度 n_i ， $V(x)$ ， e ， ε_i ， ε_{FS} ， k_B ， T を用いて

$$p(x) = [\quad \textcircled{7} \quad] \quad (8)$$

$$n(x) = [\quad \textcircled{8} \quad] \quad (9)$$

と表すことができる．式(8)と式(9)から

$$p(x) \times n(x) = [\quad \textcircled{9} \quad] \quad (10)$$

が成り立っており，これは [$\textcircled{9}$] の法則と呼ばれる．よって式(9)，(10)より，[$\textcircled{7}$] における電子密度 $n(0)$ は n_i ， e ， k_B ， T ， N_A ， ϕ_s を用いて

$$n(0) = [\quad \textcircled{10} \quad] \times \exp\left(\frac{e\phi_s}{k_B T}\right) \quad (11)$$

と書ける．また，p-Si における真性フェルミ準位とフェルミ準位とのエネルギー差を $\varepsilon_i - \varepsilon_{FS} = eV_B$ とおくと， V_B は n_i ， e ， k_B ， T ， N_A を用いて

$$V_B = [\quad \textcircled{11} \quad] \quad (12)$$

と書ける．下線 B [$\textcircled{7}$] に蓄積した電子密度 $n(0)$ が N_A となるときのゲート電圧を閾値電圧 V_T と呼び，このとき ϕ_s は V_B の [$\textcircled{12}$] 倍となる．また， V_T は V_f ， V_B ， V_{ox} を用いて

$$V_T = [\quad \textcircled{12} \quad] \quad (13)$$

と表すことができる．ただし， V_f は半導体界面のバンドが平坦になる，すなわち $\phi_s = 0$ となるときのゲート電圧で [$\textcircled{12}$] 電圧と呼ばれる．

- 問 1 文章中の空欄 [㉞] ～ [㉟] にあてはまる語句または数値を答えよ.
- 問 2 文章中の空欄 [①] ～ [⑫] にあてはまる数式を答えよ.
- 問 3 文中の下線 A および下線 B の状態の MOSFET のエネルギーバンド図を, 図 3-1 に倣って描け. ただし, 下線 A の状態の図には ε_i , ε_{FS} , ε_c , ε_v , ε_{FM} の位置関係を明示し, 下線 B の状態の図にはこれらに加えてゲート電圧および表面電位によるエネルギー変化 eV_G および $e\phi_s$ も明示せよ.
- 問 4 $e\Phi_M = 4.2 \text{ eV}$, $e\chi_s = 4.0 \text{ eV}$, $\varepsilon_{gs} = 1.1 \text{ eV}$, $N_A = 1.0 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ とする. このとき, Si の真性フェルミ準位と p-Si のフェルミ準位のエネルギー差 eV_B , および半導体の表面電位 $\phi_s = 0$ となるとき, ゲート電圧 V_f を有効数字 2 桁で求めよ. ただし, ボルツマン定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$, 素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 温度 $T = 300 \text{ K}$, 真性キャリア密度 $n_i = 1.0 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, 自然対数 $\ln(10) = 2.3$ とする.

【量子電子物性4】 解答は、青色の解答用紙に記入すること。

次の磁性に関する文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 、ボルツマン定数を k_B 、ボーア磁子を $\mu_B = e\hbar/(2m)$ で表す。ここで、 \hbar はプランク定数を 2π で割った定数、 e は素電荷、 m は電子の質量である。

電子は軌道角運動量とスピン角運動量をもつ。孤立した多電子原子を考え、それがもつ各電子について前者を合成した軌道角運動量を $\hbar\mathbf{L}$ と、後者について合成したスピン角運動量を $\hbar\mathbf{S}$ とし、さらにそれらをベクトル的に合成した全角運動量を $\hbar\mathbf{J}$ とすると、この原子の軌道角運動量のみとスピン角運動量のみの場合の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は、 \mathbf{L} 、 \mathbf{S} 、 μ_B の中から必要なものを用いて書くと、それぞれ [①] と [②] となる。ただしこのときスピンの g 因子は 2 とする。全角運動量による磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は \mathbf{J} とランデの g 因子 g_L を用いると、[③] と表される。

軌道角運動量量子数 $L=0$ 、スピン角運動量量子数 $S=1/2$ の状態の原子 X のイオンを単位体積あたり N 個含んでいる 3 種類のイオン結晶 A、B、C について考える。以後、原子 X のイオンが持っている磁気モーメントの大きさを μ とする。イオン結晶 A では、磁気モーメント間に相互作用がなく、各スピンは独立に熱振動で揺らいでいる。イオン結晶 A に磁束密度の大きさ B の外部静磁界を印加すると、磁気モーメントが磁界により配向しようとすることで磁化が発生する。この時、イオンのエネルギー準位は 2 つに分裂して [④] のエネルギー差が生じ、高いエネルギー状態の磁気モーメントの向きは磁界と [⑤] となる。絶対温度 T の熱平衡状態における低いエネルギー状態と高いエネルギー状態の占有率は、 μ 、 B 、 k_B 、 T を用いて

$$N_L/N = [\text{⑥}], \quad N_H/N = 1 - N_L/N \quad (1)$$

と書き表される。ここで、 N_L と N_H は、それぞれ、低いエネルギー状態と高いエネルギー状態の単位体積あたりのイオン数である。磁界方向の磁化 M は、 μ 、 N_L 、 N_H を用いて、 $M = [\text{⑦}]$ と表されるので、式(1)を代入して、

$$M = [\text{⑧}] \quad (2)$$

が得られる。外部磁界が小さい時、 $\tanh x \approx x$ と近似できることを用いて、磁化率 χ_{PM} は、

$$\chi_{PM} = \frac{\mu_0 M}{B} \approx [\text{⑨}] \quad (3)$$

と求まり、絶対温度 T と [⑩] の関係にあることが分かる。

イオン結晶 B では、原子 X のイオンの磁気モーメント間にその向きを揃える相互作用が働いている。そのモデルとして、ワイスの分子場を適用して磁化 M を考える。このモデルでは、個々の磁気モーメントには、周囲から磁化 M に比例した平均的な磁界 ηM が働いていると見なしている。ここに、 η はその比例定数である。外部磁界 H を考慮すると、各磁気モーメントには $H + \eta M$ なる有効磁界が作用してい

ることとなる．このときの磁化を与える式は，式(2)にこの有効磁界を代入して，

$$M = [\quad \text{⑪} \quad] \quad (4)$$

となる．式(4)から磁化率 χ_m を求めよう． H と M が小さい（つまり， $\tanh x \approx x$ ）として近似を行い，両辺を整理すると

$$\chi_m = [\quad \text{⑫} \quad] \quad (5)$$

が得られる．式(5)から，イオン結晶 B の磁化率 χ_m がイオン結晶 A のそれと同様な温度依存性を示す温度領域は， $T > [\quad \text{⑬} \quad]$ であることが分かる．以後，この温度 $[\quad \text{⑬} \quad]$ を T_c とおく．一方，下線式(4)は $H = 0$ でも成立し，温度領域 $T < T_c$ においては $M \neq 0$ なる解も存在しうること示している．このことは，イオン結晶 B は $T < T_c$ で $[\quad \text{⑭} \quad]$ を持つ物質であることを示している．

次に，イオン結晶 C について考える．その実空間格子は体心立方格子である．以後，議論の簡単化のため原子 X についてのみ考える．その場合，図 4-1 に示したように，単純立方格子(格子定数 a)の角の格子点と体心の格子点にそれぞれ 1 個の原子 X がある結晶構造をとっている． $T < T_N$ なる温度領域では，図 4-1 に示した磁気構造をとる．図 4-1 から，おのおの(001)面内では向きを揃えて磁気モーメントが並んでいるのに対して，隣り合う(001)面間では逆向きの配列となっている．X 線回折では磁気構造の知見は得られず，結晶構造を反映した回折が現れる．体心立方格子の逆格子は $[\quad \text{⑮} \quad]$ であるから，波長 λ の X 線が(001)面と角度 θ をなして入射した場合， $\lambda = [\quad \text{⑯} \quad]$ なる条件式を満たす角度 θ_{002} で(002)回折が生じる．一方，磁気構造を調べる手法として中性子回折がある．中性子は波の性質(物質波)を付随する量子的粒子であり，結晶に入射した中性子は回折し，その回折条件は X 線回折と同様の条件を満たすときである．また，中性子は磁気モーメントを持っているため，磁気モーメントの向きが異なる原子は種類の異なる原子として，中性子は回折を生じる．したがって，中性子回折から原子の磁気モーメントの配列と向きの知見が得られることとなる．このことを理解するために，図 4-1 で，磁気モーメントの向きが異なる原子は，異なる種類の原子 α , β とみなして X 線回折の生じる条件を求めよう．この結晶の実空間格子は $[\quad \text{⑰} \quad]$ ，格子定数は $[\quad \text{⑱} \quad]$ となるため， $\lambda = [\quad \text{㉑} \quad]$ なる条件式を満たす角度 θ_{001} で(001)回折が生じる．X 線回折の場合，体心立方格子では(001)回折の構造因子は 0 であるため，中性子回折により磁気構造の知見が得られることとなる．

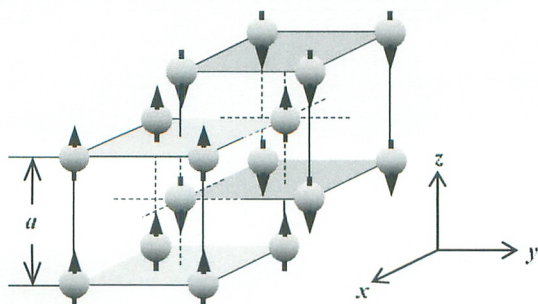


図 4-1 イオン結晶 C の結晶構造と磁気構造．球は原子 X のイオン，矢印はその磁気モーメントを表す．

- 問 1 文章中の空欄 [①] ~ [⑱] にあてはまる語句または数式を答えよ.
- 問 2 イオン結晶 A, $T < T_C$ でのイオン結晶 B, $T < T_N$ でのイオン結晶 C の示している磁性の名称をそれぞれ答えよ.
- 問 3 文章中の下線で述べたように, イオン結晶 B では, 外部磁界がないときでも式(4)は成立し, 温度領域 $T < T_C$ においては $M \neq 0$ なる解も存在しうる. このことを, グラフを用いて説明せよ.
- 問 4 文章中では $L = 0$, $S = 1/2$ の状態の原子 X のイオンを含む結晶の磁化を求めたが, $L \neq 0$ の場合には全角運動量子数 J も知る必要がある. フントの規則を適用して, $\text{Cr}^{3+} (3d^3)$ の基底状態での S , L , J の値を答えよ.

量子電子物性 単語の英訳

量子電子物性 1

プランク定数：	Planck constant
素電荷：	elementary charge
三次元空間：	three-dimensional space
自由電子：	free electron
基底状態：	ground state
波動関数：	wave function
シュレーディンガー方程式：	Schrödinger equation
エネルギー固有値：	energy eigenvalue
一般解：	general solution
波数：	wavenumber
ベクトル：	vector
周期的境界条件：	periodic boundary condition
量子数：	quantum number
整数：	integer
確率密度：	probability density
直交軸：	orthogonal axis
パウリの排他原理：	Pauli's exclusion principle
スピン：	spin
縮退：	degeneracy
許された：	allowed
収容できる：	accommodate
エネルギー準位：	energy level
占有する，占める：	occupy
絶対零度：	absolute zero temperature
フェルミエネルギー：	Fermi energy
フェルミ波数：	Fermi wavenumber
半径：	radius
球：	sphere
単位体積あたり：	per unit volume
電子密度：	electron density
置き換えた：	replaced
フェルミ速度：	Fermi velocity
結晶：	crystal
原子：	atom
イオン核：	ion nucleus

周期ポテンシャル：	periodic potential
格子定数：	lattice constant
面心立方格子：	face-centered cubic lattice
逆格子空間：	reciprocal lattice space
基本逆格子ベクトル：	unit vector of reciprocal lattice
ブラッグ反射：	Bragg reflection
定在波：	standing wave
エネルギーギャップ：	energy gap
エネルギーバンド：	energy band
金属：	metal
群速度：	group velocity
ニュートンの第 2 法則：	Newton's second law
電界：	electric field
散乱体：	scattering body
衝突する：	come into collision
時間平均：	time average
電流密度：	current density
アルミニウム：	aluminum
有効数字一桁：	one digit accuracy
絶縁体：	insulator
半金属：	semimetal
フェルミ準位：	Fermi level
バンド構造：	band structure
第一ブリルアンゾーン：	first Brillouin zone
電気抵抗率：	electrical resistivity
キャリア：	carrier

量子電子物性 2

半導体：	semiconductor
絶対温度：	absolute temperature
素電荷：	elementary charge
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
不純物：	impurities
ドーパント：	dopant
電子：	electron
密度：	density
マックスウェル・ボルツマン統計：	Maxwell-Boltzmann statistics
有効質量：	effective mass

熱平衡：	thermal equilibrium
熱エネルギー：	thermal energy
熱速度：	thermal velocity
散乱：	scattering
移動度：	mobility
電流密度：	current density
拡散：	diffusion
禁止帯幅：	band gap
フォトンエネルギー：	photon energy
吸収：	absorption
価電子帯：	valence band
伝導帯：	conduction band
励起：	excitation
遷移：	transition
正孔：	hole
束縛エネルギー：	binding energy
換算質量：	reduced mass
比誘電率：	relative permittivity

量子電子物性 3

絶対温度：	absolute temperature
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
素電荷：	elementary charge
金属：	metal
酸化膜：	oxide film
半導体：	semiconductor
電界効果トランジスタ：	field effect transistor
界面準位：	interface state
固定電荷：	fixed charge
捕獲電荷：	trapped charge
ゲート電極：	gate electrode
真性フェルミ準位：	intrinsic Fermi level
フェルミ準位：	Fermi level
伝導帯：	conduction band
価電子帯：	valence band
バンドギャップエネルギー：	band gap energy
真空準位：	vacuum level
熱平衡状態：	thermal equilibrium state

空乏層：	depletion layer
誘電率：	permittivity
ガウスの法則：	Gauss's law
電束密度：	electric flux density
電荷密度：	charge density
電位：	electric potential
ポアソンの式：	Poisson's equation
境界条件：	boundary condition
微分方程式：	differential equation
表面電位：	surface potential
電子密度：	electron density
正孔密度：	hole density
真性キャリア密度：	intrinsic carrier density
閾値電圧：	threshold voltage

量子電子物性 4

ボーア磁子：	Bohr magneton
素電荷：	elementary charge
磁気モーメント：	magnetic moment
軌道角運動量：	orbital angular momentum
スピン角運動量：	spin angular momentum
全角運動量：	total angular momentum
量子数	quantum number
g 因子	g-factor
イオン結晶：	ionic crystal
磁界：	magnetic field
磁束密度：	magnetic flux density
磁化：	magnetization
磁化率：	susceptibility
分子場	molecular field
X 線回折：	X-ray diffraction
中性子回折：	neutron diffraction
体心立方格子：	body-centered cubic lattice
逆格子：	reciprocal lattice
実空間格子：	real space lattice
磁性：	magnetism
フント則：	Hund's rules

【制御工学】解答は、白色の解答用紙に記入すること。

以下の 1.~3. に答えよ。

1. 伝達関数 $G(s)$ が次式で表される線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。ただし、 a は実数値をとるパラメータである。

$$G(s) = \frac{s+3}{s^3 + 5s^2 + 8s + a + 1}$$

- (i) $a = 3$ としたときのステップ応答を時間 t の関数として表せ。
(ii) この線形時不変システムが安定となるための a に関する必要十分条件を求めよ。

2. 図 1 のフィードバックシステムについて、以下の問いに答えよ。ただし、ゲイン K は正の実数値である。

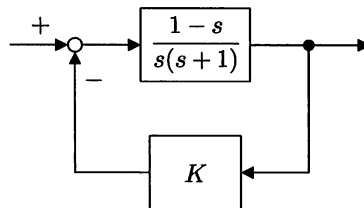


図 1

- (i) フィードバックシステムのゲイン余裕が 10 dB となる K の値を求めよ。
(ii) フィードバックシステムの位相余裕が 30° となる K の値を求めよ。

3. 以下の状態方程式と出力方程式で与えられる線形時不変システム Σ_1 を考える.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{v}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

ただし, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル, $u(t)$ は入力変数, $y(t)$ は出力変数, $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$ は外乱ベクトルとする. また, $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はそれぞれ次のように与えられている.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) $u(t)$ と $y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $U(s), Y(s)$ とする. 外乱がない場合, すなわち, $\mathbf{v}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる場合の $U(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数を求めよ.

(ii) $r(t)$ を出力 $y(t)$ に対する目標値とする. システム Σ_1 において, $u(t)$ を次式で与えた.

$$u(t) = -\mathbf{f}\mathbf{x}(t) + kz(t)$$

ただし, $z(t)$ は次を満たす変数である.

$$\frac{dz(t)}{dt} = r(t) - y(t)$$

また, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ であり, f_1, f_2, k は定数である. このとき, $z(t)$ を状態変数として含む次の拡大システム Σ_2 を考える.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f} & k\mathbf{b} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}$$

行列 $\hat{\mathbf{A}}$ の固有値が $-1, -1+j, -1-j$ となるように, f_1, f_2, k を定めよ. ただし, j は虚数単位である.

(iii) 問 3. (ii) で求めた f_1, f_2, k の値を持つ拡大システム Σ_2 に, ステップ状の目標値 $r(t) = r_0$ ($t \geq 0$) を印加した. また, ステップ状の外乱ベクトル $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}$ ($t \geq 0$) が与えられているものとする. 変数 $z(t)$ の定常値 $z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$ を r_0, v_{10}, v_{20} を用いて表せ.

専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
安定	stable
ゲイン余裕	gain margin
位相余裕	phase margin
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数	input variable
出力変数	output variable
外乱ベクトル	disturbance vector
ラプラス変換	Laplace transform
目標値	reference
虚数単位	imaginary unit
定常値	steady state value

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

基本周期 T_0 [秒] の周期的な連続時間信号 $x(t)$ (t は時間を表す実数) を入力とし、 $x(t)$ の一部の周波数成分のみを抽出し復元した信号 $x'(t)$ を出力する信号処理システムを次のステップで設計する。ただし、 $x(t)$ の最大周波数は f_{\max} [Hz] とする。また、この信号処理システムに対する入出力は実数の値をとる信号とする。

ステップ 1 $x(t)$ からその一周期分を取り出し、これをサンプリング周期 T_s [秒] (ただし T_0 が T_s の整数倍となるように定める) でサンプリングすることにより、 N 点のデータからなる離散時間信号 $x[n] = x(nT_s)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) を得る。

ステップ 2 $x[n]$ に対し N 点離散フーリエ変換 (N 点 DFT) を適用し、DFT 係数 $X[k]$ を

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

として求める (ただし $j^2 = -1$)。

ステップ 3 $X[k]$ に「一部の周波数成分のみを抽出する処理」を加え、その値を $X'[k]$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) に変更する。

ステップ 4 $X'[k]$ に対し N 点逆離散フーリエ変換 (N 点 IDFT) を適用し、離散時間信号 $x'[n]$ を

$$x'[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X'[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

として得る。

ステップ 5 $x'[n]$ を周期的拡張したのち、連続時間信号 $x'(t)$ を復元し出力する。

以上の信号処理システムについて、以下の問いに答えよ。

- (i) ステップ 1 において、サンプリング定理に従って $x[n]$ から $x(t)$ ($0 \leq t < T_0$) が完全に復元できるようにサンプリングするために T_s が満たすべき条件を数式で表せ。

これ以降の問いでは、問い (i) の条件が満たされるように T_s を設定するものとする。

- (ii) ステップ 2 において、 k 番目の係数 $X[k]$ をサンプリング前の連続時間信号 $x(t)$ における f_k [Hz] の周波数成分に対応させるとき、 f_k を k , T_s , T_0 , N から必要なものを用いて表せ。
- (iii) ステップ 4 において、「 $x'[n]$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) が実数」となるための必要十分条件は「 $X'[0]$ が実数」かつ「 $X'[N-k] = \overline{X'[k]}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$)」であることを証明せよ (\bar{z} は複素数 z の複素共役)。
- (iv) ステップ 3 において、 a [Hz] 以上 b [Hz] 以下の範囲の周波数成分 ($0 < a < b < f_{\max}$) のみを抽出したいとき、 $X[k]$ をどのように変更して $X'[k]$ を生成すればよいか。問い (ii) および問い (iii) の内容を踏まえて答えよ。
- (v) ステップ 5 は理論上どのような操作により実現されるか、簡単に述べよ。

専門用語の英訳	
基本周期	fundamental period
連続時間信号	continuous-time signal
周波数成分	frequency component
最大周波数	maximum frequency
サンプリング周期	sampling period
サンプリング	sampling
離散時間信号	discrete-time signal
N 点離散フーリエ変換	N -point discrete Fourier transform (N -point DFT)
DFT 係数	DFT coefficient
N 点逆離散フーリエ変換	N -point inverse discrete Fourier transform (N -point IDFT)
周期的拡張	periodic expansion
サンプリング定理	sampling theorem
必要十分条件	necessary and sufficient condition
複素共役	complex conjugate