

問題2 電磁気学 I

<解答>

$$(1) \quad D = \frac{Q}{a^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon_0 e^{\frac{z}{d}} a^2}$$

$$(2) \quad V = \int_0^d E \, dz = \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 e^{\frac{z}{d}} a^2} \, dz = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2} \int_0^d e^{-\frac{z}{d}} \, dz = -\frac{Qd}{\epsilon_0 a^2} \left[ e^{-\frac{z}{d}} \right]_0^d = \frac{Qd}{\epsilon_0 a^2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$(3) \quad C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{a^2}{d \left( 1 - \frac{1}{e} \right)}$$

$$(4) \quad \Delta C = \epsilon \frac{a \Delta y}{d} = \epsilon_0 e^{\frac{y}{a}} \frac{a \Delta y}{d}$$

$$(5) \quad C = \int_0^a \epsilon_0 e^{\frac{y}{a}} \frac{a}{d} \, dy = \epsilon_0 \frac{a}{d} \int_0^a e^{\frac{y}{a}} \, dy = \epsilon_0 \frac{a^2}{d} \left[ e^{\frac{y}{a}} \right]_0^a = \epsilon_0 \frac{a^2}{d} (e - 1)$$

解答例

- (1) 媒質 1 と媒質 2 の境界面にまたがった微小な長方形 (長辺:  $l$ , 短辺:  $\Delta\delta$ ) の閉ループ  $C$  をとる。このとき,  $\text{rot } \vec{E} = 0$  から,  $\Delta\delta \rightarrow 0$  として

$$\int_{\text{Surface}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_1 \sin \theta_1 - E_2 \sin \theta_2) \cdot l = 0$$

$$\therefore E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

- (2) 媒質 1 と媒質 2 の境界面を含む円柱体 (上下面積:  $S$ , 高さ:  $\Delta\delta$ ) の微小な閉領域  $V$  をとる。このとき,  $\text{div } \vec{J} = 0$  から,  $\Delta\delta \rightarrow 0$  として

$$\int_V \text{div } \vec{J} dv = \int_{\text{Surface}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = (-J_1 \cos \theta_1 + J_2 \cos \theta_2) \cdot S = 0$$

$$\therefore J_1 \cos \theta_1 = J_2 \cos \theta_2$$

- (3) (1) (2) と  $J_1 = \sigma_1 E_1, J_2 = \sigma_2 E_2$  から,

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{\sigma_1 E_1 \cos \theta_1} = \frac{E_2 \sin \theta_2}{\sigma_2 E_2 \cos \theta_2} \quad \therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

別解: 両媒質の定常電流の法線成分と静電界の接線成分はそれぞれ相等しいので,  $J_1 \cos \theta_1 = J_2 \cos \theta_2$ ,  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$ 。これらと  $J_1 = \sigma_1 E_1, J_2 = \sigma_2 E_2$  から (3) を得る。

- (4) (1) と同じ閉領域  $V$  で  $\Delta\delta \rightarrow 0$  のとき, 単位面積あたりに蓄積される電荷密度を  $\rho_s$  として,

$$\int_V \text{div } \vec{D} dv = S \cdot \rho_s = \int_{\text{Surface}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = (-\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 + \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2) \cdot S$$

$$\therefore \rho_s = -\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 + \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$\therefore \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

- (1) から,

$$\frac{\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1}{J_1 \cos \theta_1} = \frac{\epsilon_2 E_2 \cos \theta_2}{J_2 \cos \theta_2} \quad \therefore \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

別解: 静電界の接線成分は相等しく, 境界面に真電荷がないときは電束密度の法線成分も相等しいので,  $E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$ ,  $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$  よって,  $D_1 = \epsilon_1 E_1, D_2 = \epsilon_2 E_2$  から

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1} = \frac{E_2 \sin \theta_2}{\epsilon_2 E_2 \cos \theta_2} \quad \therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (3) \text{ から } \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad \therefore \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$