専門科目 (午前)

24　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

2×4 行列 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義する．

(1) 次の条件 (a)，(b) を満たす 4×4 直交行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(a) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ は行列 $\boldsymbol{A}$ が定める写像の核 $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の正規直交基底をなす 4 次元列ベクトル．

(b) $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ は行列 $\boldsymbol{A}^T$ の列ベクトルの張る線形部分空間 $\{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}$ は 2 次元列ベクトル$\}$ の正規直交基底をなす 4 次元列ベクトル．ここで，$\boldsymbol{A}^T$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の転置行列を表す．

(2) 4×4 正方行列 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の 4 つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (重複する場合を含む) を求めよ．

(3) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ に対応し，互いに直交する $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ を求めよ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ.

(1) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

が発散することを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

について，収束値を求めよ．さらに絶対収束しないことを示せ．

問 3 (基礎問題)

計算過程で乱数を用いるアルゴリズムを乱択アルゴリズムという．乱数の出方によっては誤る可能性もあるが，乱数を用いることで通常のアルゴリズムより効率よく計算できる場合があるため，乱択アルゴリズムはアルゴリズムの重要な設計法の一つになっている．次に示すのは，行列積の検算を実際に積を計算することなく効率よく行う乱択アルゴリズム BasicCheck である．

入力：$n \times n$ の整数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.
出力：$\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積になっているか否かの判定.
注）$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ならば yes，$C \neq AB$ ならば no と出力して欲しいが，
　　つねに正しく判断できるとは限らない.
計算手順：
　各 $r_1, \ldots, r_n$ の値として
　　ランダムに 0 か 1 を選び，
　　　ランダム縦ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ と定義する.
　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Br})$ を求める.
　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Cr}$ を求める.
　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ ならば yes，そうでないならば no を出力する.

このアルゴリズムについて以下の問いに答えよ．なお，アルゴリズム中でランダムに 0 か 1 を選んでいるところでは，毎回独立に確率 1/2 で 0 か 1 が選ばれるものとする．また，与えられた入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ とアルゴリズム中のベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し，

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \iff (\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{C})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

が成立するが，解答ではこの事実を利用してもよい．ただし，$\boldsymbol{0}$ はすべての要素が 0 の縦ベクトルである.

(1) この BasicCheck は，ランダムベクトル $\boldsymbol{r}$ の選び方が悪いと誤判定する（正しく検算できない）場合がある．その誤り方は，(i) yes と出力したときのみ誤る場合がある，(ii) no と出力したときのみ誤る場合がある，(iii) yes と出力したときも，no と出力したときも誤る場合がある，のどれであるか，その理由とともに答えよ.

(2) BasicCheck をサブルーチンとして利用して，1/1000 以下の誤判定確率をつねに保証するアルゴリズム Check を示し，その誤判定確率が 1/1000 以下であることを証明せよ．なお，ここでは，任意の入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し，BasicCheck が誤判定する確率は 1/2 以下である，という事実を仮定してもよい.

(3) 任意の入力行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し，BasicCheck が誤判定する確率が 1/2 以下であることを証明せよ.

問 4 (一般問題)

$\mathbb{F}_2$ を二つの元 $\{0, 1\}$ からなる体とする．行列の各成分が $\mathbb{F}_2$ の元であり，行列式が $1 \in \mathbb{F}_2$ となる 2 次正方行列全体を $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2)$ と表す．すなわち，

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{F}_2, ad - bc = 1 \right\}.$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2)$ は行列の積に関して群となる．

(1) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2)$ の元の位数を列挙せよ．

(2) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2)$ と 3 次対称群は同型であることを示せ．

問 5 (一般問題)

X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) Y がハウスドルフ空間であったとする．Y の 1 点からなる集合は閉集合になることを示せ．ただし，位相空間 Z がハウスドルフ空間であるとは，Z の任意の相異なる２点 x, y に対して，Z の開集合 U, V が存在し， $x \in U$ かつ $y \in V$ でさらに $U \cap V$ が空集合となること，をいう．

(2) X はコンパクトとする．A を X の閉集合とすると，A は X のコンパクトな部分集合になることを示せ．ただし，位相空間 Z の部分集合 C がコンパクトであるとは，開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で $C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となるものを任意に与えると，自然数 n と $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda$ が存在して $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$ が成り立つこと，をいう．

(3) X はコンパクトで，Y はハウスドルフ空間とする．B を Y の有限部分集合とすると，$f^{-1}(B)$ は X のコンパクトな部分集合になることを示せ．

問 6 (一般問題)

$u \in C^2([0,\pi] \times \mathbb{R})$ が，与えられた関数 f に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = 0,\ \ u(\pi,t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < \pi \end{cases}$$

を満たしているとする．以下の設問に答えよ．

(1) いかなる f についても

$$\int_0^\pi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

が t によらないように定数 k を定めよ．

(2) $f \equiv 0$ ならば $u \equiv 0$ を示せ．

(3) $f(x) = \sin 2x + \sin 5x$ のとき $u(x,t)$ を求めよ．

問 7 (一般問題)

以下の数理計画問題の最適解および最適値を求めよ．

$$
\begin{array}{lll}
\text{目的} & : & \frac{1}{3}x_1 - x_2 - \frac{5}{12}x_3 + \max(y_1 - y_2, 3y_1 - 2y_2) \ \to \ \text{最小化} \\
\text{条件} & : & \begin{array}{rrrcr}
x_1 & +x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & \le & \frac{1}{5} \\
\frac{3}{2}y_1 & +y_2 & & \le & 3 \\
\frac{1}{2}y_1 & +y_2 & & \ge & -1 \\
-2y_1 & +y_2 & & \le & \frac{19}{4} \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, y_2 \ge 0, \quad y_1 \le 0}
\end{array}
\end{array}
$$

ただし，$\max(a, b)$ は a と b の最大値を表す．

問 8 (一般問題)

$X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立に平均 μ^{-1} $(\mu > 0)$ の指数分布 (密度関数 $f_X(x) = \mu\, e^{-\mu x}$ $(x \geq 0)$) にしたがう確率変数の列とする．a を正の実数として以下の設問に答えよ．ただし P は確率，E は期待値を表す．

(1) $X_n > a$ となる最小の n を表す確率変数を N とする．すなわち，$\{N = n\} = \{X_1 \leq a, X_2 \leq a, \ldots, X_{n-1} \leq a, X_n > a\}$ である ($X_n > a$ となる n がない場合は $N = +\infty$ とする)．$N = n$ である確率 $\mathsf{P}(N = n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を a, μ, n を用いて表せ．

(2) $X_i > a$ が与えられたときの X_i の条件付き期待値 $\mathsf{E}(X_i \mid X_i > a)$，および $X_i \leq a$ が与えられたときの X_i の条件付き期待値 $\mathsf{E}(X_i \mid X_i \leq a)$ をそれぞれ a, μ を用いて表せ．

(3) (1) の N に対して $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$ を a, μ を用いて表せ．

問 9 (一般問題)

データ $D = \{(y_1, x_1), (y_2, x_2), \ldots, (y_n, x_n)\}$ は 2 次の関係

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \epsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を持つとする．ここで ϵ_i は観測誤差である．データ D から未知パラメータ a, b, c の推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ を誤差の自乗和を最小化すること (最小自乗法) で求めたい．ただし (一般性を失うことなく)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \quad S_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

を仮定する．次の量を定義する．

$$S_{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3, \quad S_{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4, \quad S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad S_{x^2y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i.$$

(1) 最小自乗推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ が満たす線形方程式を S_{x^3}, S_{x^4}, S_{xy}, S_{x^2y} を用いて表せ．

(2) 最小自乗推定量 $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ をそれぞれ S_{x^3}, S_{x^4}, S_{xy}, S_{x^2y} を用いて表せ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ 上の言語を考える．奇数長の文字列 $\alpha = x_1 x_2 \cdots x_{2n} x_{2n+1}$ （ただし $x_i \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$）に対して，

$$\mathrm{skip}(\alpha) = x_1 x_3 x_5 \cdots x_{2n-1} x_{2n+1}$$

とする．つまり $\mathrm{skip}(\alpha)$ は α の奇数番目の文字だけを読んだ結果である．言語 L に対して

$$\mathrm{skip}(L) = \{\beta \mid \exists \alpha \in L \ \big(\alpha \text{ は奇数長で } \mathrm{skip}(\alpha) = \beta\big)\}$$

とする．

(1) 言語 $\{(\mathsf{aa})^n(\mathsf{bb})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が正規でないことを，ポンピング補題を用いて示せ．ただし $\mathbb{N}$ は 0 を含んだ自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ である．

(2) L_1 は正規でないが $\mathrm{skip}(L_1)$ は正規になる言語 L_1 の具体例を示せ．

(3) 一般に言語 L が正規ならば $\mathrm{skip}(L)$ も正規であることを証明せよ．

(注意１：ポンピング補題) 言語 X が正規であるならば，X に対して以下の条件を満たす自然数 p（ポンピング長）が存在する．

$$\forall \sigma \Big[\Big(\sigma \in X \text{ かつ } |\sigma| \geq p \Big) \text{ ならば}$$
$$\exists \alpha, \exists \beta, \exists \gamma \Big(\sigma = \alpha\beta\gamma,\ |\alpha\beta| \leq p,\ |\beta| > 0,\ \text{かつ } (\forall n \in \mathbb{N})(\alpha\beta^n\gamma \in X) \Big) \Big].$$

ただし σ, α などは文字列を表す変数で，$|\sigma|$ は文字列 σ の長さである．

(注意２) 有限オートマトンを式で表記する場合は，決定性／非決定性を明記した上で，状態集合 Q，遷移関数 T，初期状態 s，受理状態集合 A を並べて (Q, T, s, A) というように表記すること．ただし $s \in Q$, $A \subseteq Q$ であり，決定性の場合には T は $Q \times \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ から Q への関数，非決定性の場合には T は $Q \times \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ から $\mathcal{P}(Q)$ への関数である（$\mathcal{P}(Q)$ は Q のベキ集合）．

(注意３) 言語 X が正規であることを証明するには，X を受理する有限オートマトンまたは X を表す正規表現を示せばよい．たとえば前者の場合は，(Q, T, s, A) が明確に記述されていれば,「これが X を受理すること」の証明は不要である．

問 11 (一般問題)

フィボナッチ数とは次のようなものである．

$\mathrm{fib}(n) = 1$ 　　　　　　　　　　$n = 0$ または 1 のとき

$\mathrm{fib}(n) = \mathrm{fib}(n\text{-}1)+\mathrm{fib}(n\text{-}2)$ 　　$n \geq 2$ のとき

これをそのまま再帰呼出しを用いて計算するプログラムにすると次のようになる．n が負の場合は考えなくてよいとする．また言語は Java 風であるが，文法の細部は気にしなくてよい．

［プログラム］

```
int fib(int n) {
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

(1) $\mathrm{fib}(n)$ の呼び出し回数に基づく時間計算量は $\mathrm{O}(\mathrm{fib}(n))$ であることを示せ．

(2) ある計算機で上のプログラムを実行させたところ，

fib(30)=1346269

実行時間 0.25 秒（有効数字 2 桁，以下同じ）

fib(31)=2178309

実行時間 0.30 秒

fib(32)=3524578

実行時間 0.39 秒

fib(33)=5702887

実行時間 0.52 秒

であった．

これらの実行時間は $\mathrm{fib}(n)$ の定数倍ではない．その理由を推測して述べよ．

また，この推測をもとに $\mathrm{fib}(n)$ の計算にかかる時間を有効数字 2 桁で予想して，簡単な式で記せ．

さらに，fib(34) の計算にかかる時間を予想せよ．

問 12 (一般問題)

プログラミング言語における手続き p について，次の条件を満たすことを T $\rightsquigarrow$ U のように表すことにする．ここで T と U は集合である．

- p を任意の引数 i $\in$ T とともに呼ぶと，そのときの p の計算は正常に停止して U の要素が戻り値になるか，p の計算は停止しない．
- p を引数 i $\notin$ T とともに呼んだときの動作は何も保証されない．

(1) 次のような手続き proc1 を考える．

```
proc1(i) { return f(i); }
```

proc1 は引数 i とともに手続き f を呼び，f の戻り値を自身の戻り値として返す．ここで f が次の (a), (b), (c) であるとき，手続き proc1 を任意の引数 i $\in$ I とともに呼ぶと，proc1 の計算が停止する場合の戻り値は常に I の要素であるといえるか否か，それぞれの場合について答えよ．理由は示さなくてよい．

(a) I $\rightsquigarrow$ I

(b) L $\rightsquigarrow$ I ただし I $\subset$ L

(c) B $\rightsquigarrow$ I ただし B $\subset$ I

(2) 引数の集合 S と T の間の次のような関係を S $\prec$ T のように表すことにする．なお U も集合である．

- 任意の T $\rightsquigarrow$ U である手続き p について，任意の引数 i $\in$ S とともに p を呼ぶと，p の計算は正常に停止して U の要素が戻り値になるか，p の計算は停止しない．

例えば S $\subset$ T ならば，明らかに S $\prec$ T である．

さらに，要素に代入できる値が $v \in$ T である配列の集合を T[] と表す．配列 a $\in$ T[] の要素に $v \notin$ T を代入すると，エラーとなり，プログラム全体はそこで異常停止する．

(i) S $\prec$ T ならば T[] $\prec$ S[] である，は成り立たない．反例を示せ．

(ii) S $\prec$ T ならば S[] $\prec$ T[] である，は成り立たない．反例を示せ．