

Question No. 1: Electromagnetics (1/2)

2013年3月実施 問題1 電磁気学 (1頁目/2頁中)

xyz 直角座標系において，電界 $\mathbf{E} = E_0 e^{-jk_0 \frac{x+y}{\sqrt{2}}} \hat{\mathbf{z}}$ [V/m] の平面波が真空中を伝搬する．ここで， $\hat{\mathbf{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトルであり， k_0 は真空中の平面波の波数で $k_0 = 2\pi$ [1/m] である．また，真空の誘電率と透磁率をそれぞれ $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ [F/m] と $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] とする．以下の問に答えよ．

- (1) この平面波の伝搬方向を示し，角周波数 ω を求めよ．
- (2) マクスウェルの方程式中のファラデーの法則を表す式を示せ．
- (3) ファラデーの法則を用いて，この平面波の磁界 \mathbf{H} を導出し，その固有インピーダンス η_0 を計算せよ．
- (4) この平面波のポインティングベクトルを求めよ．
- (5) この平面波のポインティングベクトルの時間平均を求め，その物理的意味を説明せよ．

Question No. 1: Electromagnetics (2/2)

2013年3月実施 問題1 電磁気学 (2頁目 / 2頁中)

In an xyz Cartesian coordinate system, a plane wave with an electric field $\mathbf{E} = E_0 e^{-jk_0 \frac{x+y}{\sqrt{2}}} \hat{\mathbf{z}}$ [V/m] propagates in a vacuum, where $\hat{\mathbf{z}}$ is a unit vector along the z -axis direction, k_0 is wave number of the plane wave in the vacuum and $k_0 = 2\pi$ [1/m]. The permittivity and permeability of the vacuum are $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ [F/m] and $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m], respectively. Answer the following questions.

- (1) Show the direction of propagation of this plane wave, and derive its angular frequency ω .
- (2) Show the equation of Faraday's law in Maxwell's equations.
- (3) Derive the magnetic field \mathbf{H} of the plane wave, and calculate its intrinsic impedance η_0 using the Faraday's law.
- (4) Derive the Poynting vector of the plane wave.
- (5) Derive the time-averaged Poynting vector of the plane wave and describe its physical meaning.

Question No. 2: Electrical circuits (1/1)

2013 年 3 月実施 問題 2 電気回路 (1 頁目 / 1 頁中)

Fig. 2(a) , Fig. 2(b) に示す回路において, $1/LC > (R/L)^2$ とする.

- (1) Fig. 2(a) に示す回路について次の問に答えよ. ここで, 正弦波交流電圧源 E の角周波数を ω とする.
- (a) 端子 1-1' における入力アドミタンスを求めよ.
 - (b) 電流 I, I_1, I_2 を求めよ. また, 電圧 E と電流 I, I_1, I_2 の関係を示すフェーザ図を描け.
 - (c) 共振周波数, および共振時に抵抗 R で消費される電力を求めよ.
- (2) Fig. 2(b) に示す回路において, 電圧 $e(t)$ を求めよ. ここで, 電流 $i(t)$ は単位インパルス $\delta(t)$ であり, 容量 C の初期電荷をゼロとする.

In the circuits shown in Fig. 2(a) and Fig. 2(b), let $1/LC > (R/L)^2$.

- (1) Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2(a). Here, the angular frequency of the sine wave AC voltage source E is ω .
- (a) Find the input admittance at terminals 1-1'.
 - (b) Find currents I, I_1 and I_2 . Then draw a phasor diagram showing the relationship between the voltage E and the currents I, I_1 and I_2 .
 - (c) Find the resonant frequency and the power dissipated in the resistor R at resonance.
- (2) Find the voltage $e(t)$ in the circuit shown in Fig. 2(b). Here, the current $i(t)$ is a unit impulse $\delta(t)$ and let the initial charge in the capacitor C be zero.

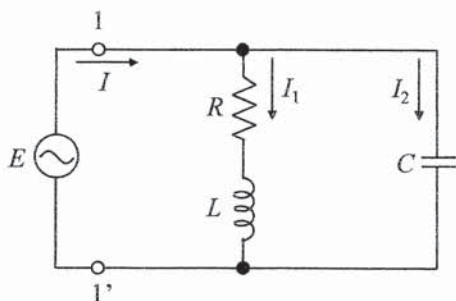


Fig. 2(a)

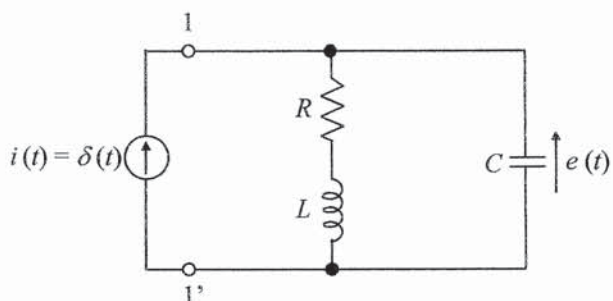


Fig. 2(b)

Question No. 3: Basic information science 1 (1/2)

2013 年 3 月実施 問題 3 情報基礎 1 (1 頁目/2 頁中)

- (1) アルファベット $\Sigma = \{2, 3\}$ 上の記号列 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) を a_1 から a_n の順に入力する決定性有限状態オートマトンを考える。以下の問に答えよ。
- (a) Fig.3 (a), (b) に示す状態遷移図で表される決定性有限状態オートマトンが受理する言語を正規表現でそれぞれ示せ。
- (b) 記号列 w を 10 進数と見なした整数を $(w)_{10}$ と記す。 $\{w \mid (w)_{10} \equiv 0 \pmod{3}\}$ を受理する決定性有限状態オートマトンの状態遷移図を示せ。
- $(a_1 \cdots a_l a_{l+1})_{10} \equiv (a_1 \cdots a_l)_{10} + (a_{l+1})_{10} \pmod{3}$ であることに注意せよ。
- ここで、 $x \equiv y \pmod{3}$ は、 x を 3 で割った余りと y を 3 で割った余りが等しいことを表す。
- (c) 問(b)で求めた決定性有限状態オートマトンの受理する言語を正規表現で示せ。
- (2) アルファベット $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の記号列 $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) を a_1 から a_n の順に入力する決定性有限状態オートマトンを考える。 $\{w \mid (w)_{10} \equiv 0 \pmod{3}\}$ を受理する決定性有限状態オートマトンの状態遷移図を示せ。
- (1) Consider a deterministic finite state automaton that receives a string $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) over the alphabet $\Sigma = \{2, 3\}$ in order from a_1 to a_n . Answer the following questions.
- (a) Describe the languages accepted by the deterministic finite state automata represented by the state transition diagrams in Figs. 3 (a) and (b) with regular expressions, respectively.
- (b) $(w)_{10}$ denotes an integer of the string w when w is regarded as a decimal number. Show the state transition diagram of a deterministic finite state automaton which accepts $\{w \mid (w)_{10} \equiv 0 \pmod{3}\}$. Note that $(a_1 \cdots a_l a_{l+1})_{10} \equiv (a_1 \cdots a_l)_{10} + (a_{l+1})_{10} \pmod{3}$. Here, $x \equiv y \pmod{3}$ means that the remainder of x divided by 3 and the remainder of y divided by 3 are equal.
- (c) Describe the language accepted by the deterministic finite state automaton in question (b) with a regular expression.
- (2) Consider a deterministic finite state automaton that receives a string $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) over the alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ in order from a_1 to a_n . Show the state transition diagram of a deterministic finite state automaton which accepts $\{w \mid (w)_{10} \equiv 0 \pmod{3}\}$.

Question No. 3: Basic information science 1 (2/2)

2013 年 3 月実施
問題 3 情報基礎 1
(2 頁目 / 2 頁中)

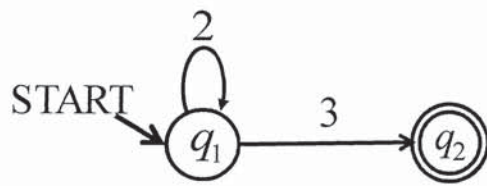


Fig. 3 (a)

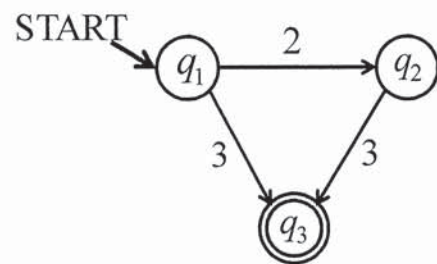


Fig. 3 (b)

Question No. 4: Basic information science 2 (1/1)

2013 年 3 月実施 問題 4 情報基礎 2 (1 頁目 / 1 頁中)

n 個の整数からなる配列 A と、整数 k が入力として与えられるとき、次の問に答えよ。

- (1) A の要素で k と一致するものがあるかどうかを判定する問題 P を考える。
 - (a) P を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムの概略を示せ。
 - (b) 配列 A の要素があらかじめ昇順に並んでいると仮定したとき、 P をより効率的に解くアルゴリズムの概略を示し、その時間計算量を与えよ。
- (2) A の二つの要素で、その和が k になるものがあるかどうかを判定する問題 Q を考える。
 - (a) 配列 A の要素があらかじめ昇順に並んでいると仮定したとき、 Q を $O(n \log n)$ 時間で解くアルゴリズムの概略を示せ。
 - (b) 一般の場合、すなわち配列 A の要素の並び方には何も仮定をおかない場合に対して、 Q を効率的に解くアルゴリズムの概略を示し、その時間計算量を与えよ。

Given an array A of n integers and an integer k as inputs, answer the following questions.

- (1) We consider the problem P to determine whether or not there exists an element in A that is equal to k .
 - (a) Outline an algorithm that solves P in $O(n)$ time.
 - (b) Outline a more efficient algorithm to solve P and give its time complexity, assuming that the array A is sorted in increasing order beforehand.
- (2) We consider the problem Q to determine whether or not there exist two elements in A whose sum is equal to k .
 - (a) Outline an algorithm that solves Q in $O(n \log n)$ time, assuming that the array A is sorted in increasing order beforehand.
 - (b) Outline an efficient algorithm to solve Q and give its time complexity in the general case, i.e. we make no assumptions on the order of the elements in the array A .

Question No. 5: Basic physics 1 (1/2)

2013年3月実施 問題5 物理基礎1 (1頁目 / 2頁中)

質量が m の2つの質点の一次元運動を考える. 質点1, 2の座標をそれぞれ x_1, x_2 , 速度を v_1, v_2 とする時, 重心座標 R , 相対座標 r は以下のように定義される.

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad r = x_1 - x_2$$

質点1, 2には速度に比例する摩擦力 $-\gamma v_1, -\gamma v_2$ ($\gamma > 0$) がそれぞれ作用し, また質点間に大きさ $k|r|$ ($k > 0$) の斥力が作用するとする. 時刻 $t = 0$ における初期条件は以下の通りである.

$$x_1(0) = l_1, \quad x_2(0) = l_2, \quad v_1(0) = u_1, \quad v_2(0) = u_2$$

ただし, l_1, l_2, u_1, u_2 は定数である. 以下の問に答えよ.

- (1) 重心座標 R , 相対座標 r に関する運動方程式をそれぞれ示せ.
- (2) 問(1)の相対座標 r に関する運動方程式を解き,

$$r = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

という形で r の時間変化が与えられることを示せ. また A, B, α, β を求めよ.

- (3) 衝突が起こるために, 問(2)の A, B, α, β が満たすべき条件を示せ.
- (4) 2つの質点が衝突すると仮定して, $\alpha > \beta$ の場合について, 相対座標 r の衝突までの時間変化のグラフを描け.

Question No. 5: Basic physics 1 (2/2)

2013年3月実施 問題5 物理基礎1 (2頁目 / 2頁中)

Consider the one dimensional motions of two particles with mass m . When the coordinates of the particles 1 and 2 are denoted by x_1 and x_2 , respectively, and the velocities are v_1 and v_2 , respectively, the center of mass coordinate R and the relative coordinate r are defined as follows:

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad r = x_1 - x_2.$$

Frictional forces proportional to the velocities $-\gamma v_1, -\gamma v_2$ ($\gamma > 0$) act on the particles 1 and 2, respectively, and a repulsive force whose magnitude is $k|r|$ ($k > 0$) acts between the particles. The initial conditions at time $t = 0$ are given as follows:

$$x_1(0) = l_1, \quad x_2(0) = l_2, \quad v_1(0) = u_1, \quad v_2(0) = u_2,$$

where l_1, l_2, u_1 , and u_2 are constants. Answer the following questions.

- (1) Show the equations of motion for the center of mass coordinate R and the relative coordinate r , respectively.
- (2) Solve the equation of motion for the relative coordinate r in question (1), and show that the time evolution of r is given in the form

$$r = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

Also, derive A, B, α , and β .

- (3) Show the condition which A, B, α , and β in question (2) should satisfy for a collision to occur.
- (4) Supposing that the two particles collide, draw the graph of the time evolution of the relative coordinate r until the collision for the case $\alpha > \beta$.

Question No. 6: Basic physics 2 (1/2)

2013 年 3 月実施 問題 6 物理基礎 2 (1 頁目 / 2 頁中)

(1) 実ベクトル空間 \mathbf{R}^4 のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により生成される部分空間 W

について考える.

(a) 部分空間 W の正規直交基底を求めよ.

(b) 部分空間 W の任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ の成分 x_1, x_2, x_3, x_4 が満たす方程式を求めよ.

(c) 部分空間 W の \mathbf{R}^4 における直交補空間 W^\perp の基底の一つを求めよ.

(d) \mathbf{x} を部分空間 W の任意のベクトルとし, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. ベクトル $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ の長さの最

小値を求めよ.

(2) 任意の実数 a および b に対して, 次の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) $\det(A) \neq 0$ となる条件を求めよ. ただし, $\det(A)$ は A の行列式を表す.

(b) A の階数を求めよ.

Question No. 6: Basic physics 2 (2/2)

2013 年 3 月実施 問題 6 物理基礎 2 (2 頁目 / 2 頁中)

(1) Consider the subspace W spanned by the vectors $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, and $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in real vector space \mathbf{R}^4 .

(a) Find the orthonormal basis of the subspace W .

(b) Find the equation that the components x_1, x_2, x_3, x_4 of any vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ in the subspace W satisfies.

(c) Find a basis for the orthogonal complement W^\perp of the subspace W in \mathbf{R}^4 .

(d) Let \mathbf{x} be any vector in the subspace W , and let $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Find the minimum of the length of the vector $\mathbf{x} - \mathbf{p}$.

(2) Consider the following matrix for any real numbers a and b :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Find the condition for $\det(A) \neq 0$, where $\det(A)$ is the determinant of A .

(b) Find the rank of A .