平成２０年度大学院前期課程

電気電子情報工学専攻

システム・制御・電力工学
先進電磁エネルギー工学
情報通信工学
量子電子デバイス工学

電　磁　理　論
入　試　問　題

【注意】

○ 問題は４問ある。配点は各２５点で、合計１００点である。

○ 各問題用紙の志望コース欄に○印をつけ、受験番号を必ず記入すること。

○ 解答はすべて問題用紙の □ の中に書くこと。

平成１９年８月２０日（月）

１０：００～１２：００実施

1－1	第1志望 コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験 番号	

以下の文章の空白を埋めよ。語句の選択肢が示されている箇所については、適切な語句を○で囲め。

図1に示すような、同軸円筒型コンデンサの内側電極にQ、外側電極に$-Q$（$Q>0$）の電荷を与える。ただし、コンデンサの内側電極および外側電極の半径をそれぞれaおよびb、円筒の長さをLとする。なお、円筒の長さは電極の半径よりも十分長く、円筒端面における電界の乱れは無視できるものとする。また、電極間には誘電率εの誘電体が挿入されている。さらに、真空の誘電率をε_0とする。

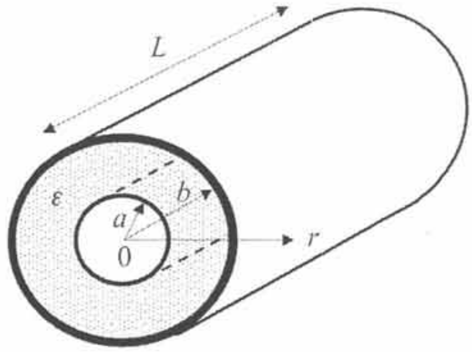


図1

電極間の誘電体内に生ずる電界は、半径方向の座標をr、半径方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{i}_r$とすると

$$\boldsymbol{E} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (1)$$

のように表される。

外側電極を基準とした内側電極の電位は、（1）を積分することによって求まり、

$$V = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (2)$$

となる。（2）より、この同軸円筒型コンデンサの静電容量は

$$C = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (3)$$

であることがわかる。

一般に、誘電率がεの媒質中の電界が$\boldsymbol{E}$であるとき、電界が保有するエネルギー密度（単位体積あたりの電気的エネルギー）は

$$w = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (4)$$

で与えられる。wを体積積分することによって系全体が保有する電気的エネルギーが求まる。図1に示す同軸円筒型コンデンサに蓄えられる電気的エネルギーは

$$W = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad (5)$$

となる。

1－2	第１志望 コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験 番号	

この同軸円筒型コンデンサにおいて、b、L、ε、Qを固定して内側電極の半径aを仮想的にわずか増大させるとすると、コンデンサに蓄えられる電気的エネルギーは [増大する、　減小する]。

このことから、内側電極面には [rの正の方向、　rの負の方向] に力が加わっていることがわかる。内側電極面に加わる力の大きさはWをaに関して偏微分することによって求まり、

$|\boldsymbol{F}|=$ [　　　　] （６）

となる。

ところで、一般に、誘電体中の電束密度ベクトル$\boldsymbol{D}$、電界$\boldsymbol{E}$、真空の誘電率ε_0、および分極ベクトル$\boldsymbol{P}$の間には、$\boldsymbol{D}=$ [　　　　] （７）の関係があり、さらに、誘電率がεの誘電体の場合は、$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$が成立つ。これらの関係を用いることにより、図１に示す同軸円筒型コンデンサの電極間の誘電体中に生ずる分極ベクトルが

$\boldsymbol{P}=$ [　　　　] （８）

のように表されることがわかる。また、図１のコンデンサの電極間の誘電体内部に生ずる分極電荷密度ρ_p、誘電体の内側表面（$r=a$）および外側表面（$r=b$）に生ずる面分極電荷密度$\xi_p(a)$および$\xi_p(b)$は、それぞれ

$\rho_p=$ [　　　　] （９）

$\xi_p(a)=$ [　　　　] （１０）

$\xi_p(b)=$ [　　　　] （１１）

で与えられる。

２５点

2-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の文章の空欄に適当な数式、数値、または語句を入れよ。

マクスウェル方程式のうち、空間に分布した定常的な電流密度 $\boldsymbol{J}$ により生じる静磁界 $\boldsymbol{H}$ に対するアンペア・マクスウェルの法則を表す式は $\boxed{} = \boldsymbol{J}$ である。透磁率を μ として、磁束密度はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて $\mu\boldsymbol{H} = \boxed{}$ と表わされるので、$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ が満たされているものとすると、$\boldsymbol{A}$ の満たす方程式は $\nabla^2\boldsymbol{A} = \boxed{}$ となり、その解は電流の分布する領域 V での積分により $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\boldsymbol{J}}{r}dV$ で与えられる。この表式から静磁界の強さは $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \left(\boxed{}/r^2\right)dV$ と表わされる。ただし、電流の分布する点からベクトルポテンシャルを求める点の方向を向く単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_r$、それらの間の距離を r とする。

半径 a の円形ループ電流によりその中心軸上に生じる磁界の強さを求める。電流の大きさを I とし、円形電流は図1のように、その中心を点Oとして xy 平面内を流れている。

ビオ・サバールの法則を用いると、円周上の微小ベクトル線素 $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}_l dl$ 上の電流によりOから距離 b 離れた z 軸上の点に生じる磁界の強さは $d\boldsymbol{H} = \dfrac{I}{4\pi(a^2+b^2)}d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{i}_r$ と表わされる。$\boldsymbol{i}_r$ と $d\boldsymbol{l}$ が互いに垂直なので $dH_z = |d\boldsymbol{H}|\sin\theta = \dfrac{I\sin\theta}{4\pi(a^2+b^2)}dl$ と表わされることに注意して、$\displaystyle\oint_C dl = \int_0^{2\pi} a\,d\varphi$ を用いて $d\boldsymbol{H}$ を円周に沿って積分すると、磁界の強さは $\boldsymbol{H} = \boxed{}\,\boldsymbol{i}_z$ と求められる。ただし $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。答えは θ を使わずに書くこと。

2-2	第1志望 コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

中心軸を同じくし、等しい半径 a を持つ 2 つの円形ループ電流が、図 2 に示すように距離 $2b$ だけ離れて配置されている。それぞれのループに同じ方向に大きさ I の電流が流れているとき、中心軸上での磁界の強さを求める。

2 つのループから等距離だけ離れた点 (この点を Q とする) での磁界の強さの z 成分は $H_z =$ $\boxed{\qquad\qquad}$ である。また点 Q から z 方向に距離 Δ だけ離れた点 P での磁界の z 成分は $H_z =$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ である。

Δ がループ間の距離に比べて十分小さいとき、展開公式 $(1+x)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \ldots$ を用いると、点 P での磁界の大きさは近似的に $H_z \simeq$ $\boxed{\qquad\qquad}$ $+$ $\boxed{\qquad\qquad}$ $\Delta +$ $\boxed{\qquad\qquad}$ Δ^2 と表わされる。この表式の Δ^2 の項は、a と b の間に $\boxed{\qquad\qquad}$ という関係があるときにゼロとなり、近似的に z 方向に一様な磁界が得られる。

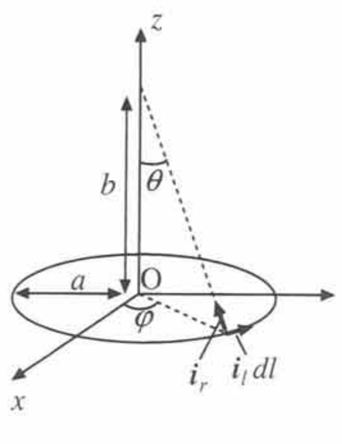


図 1

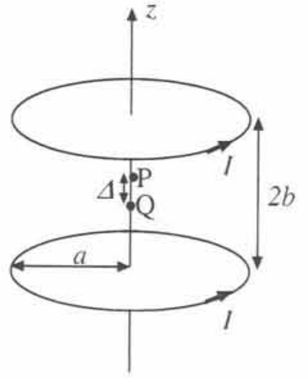


図 2

25 点

3－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の記述において、空欄に適切な式あるいは語句を記入せよ。

閉回路を貫く磁束が時間的に変化すると、閉回路に沿って電流を流そうとする力、すなわち［　　①］が誘起される。この［①］とは、磁界の変化が無視できる程度に速やかに電荷を閉回路に沿って一周させるときに、電界と磁界がその電荷に対してなす単位正電荷あたりの仕事のことである。［①］の単位は［　　②］である。閉回路に誘起される［①］の大きさは、閉回路を貫く磁束の時間的変化率に等しく、その方向は磁束の変化を妨げようとする方向を向く。一般に、閉回路は静止していても、運動していても良く、また、任意の変形を行っても良い。このような法則は

［　　　　③］とよばれる。

図１のような閉回路 C を考える。電界の強さを $\boldsymbol{E}$、閉回路 C の運動速度を $\boldsymbol{v}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、閉回路 C を周辺とする任意の開いた曲面を S、C に沿う線積分の方向を向くベクトル微分線素を $d\boldsymbol{l}$、時間を t、閉回路 C に沿う線積分の方向と右ネジの関係にあり、面 S に垂直である単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ で表す。このとき［③］は数学的には次のように表される。

$$\oint_C \boxed{\qquad\qquad \text{④}} = -\frac{d}{dt}\int_S \boxed{\qquad\qquad \text{⑤}} \qquad (1)$$

閉回路 C が静止している場合には、$\boldsymbol{v}=0$ であるので

$$\oint_C \boxed{\qquad\qquad \text{⑥}} = -\frac{d}{dt}\int_S \boxed{\qquad \text{⑤} \qquad} \qquad (2)$$

と表せ、さらに右辺において面積分と時間微分の演算順序は入れ替えることができるので、

$$\oint_C \boxed{\qquad \text{⑥} \qquad} = -\int_S \boxed{\qquad\qquad \text{⑦}} \qquad (3)$$

と表せる。

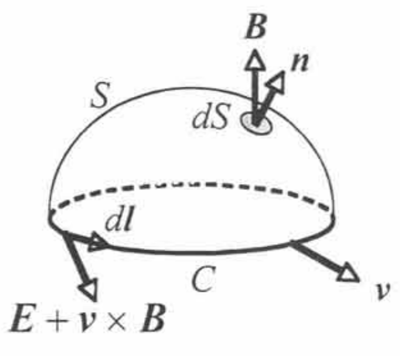


図１　閉回路 C と磁界

3−2	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

$r\varphi z$ 円柱座標で表される空間(透磁率μ_0)の z 軸上に細い無限長導体線があり、一定の角周波数ω (ω>0)で正弦的に変化する電流 $\boldsymbol{I}(t)=\boldsymbol{i}_z I_0\cos\omega t$ (I_0>0)（t は時間、t>0）が流れている(図２参照)。また、$\varphi=0$ で表される平面上に巻き数１の方形コイル abcd がある。辺 ab と辺 cd は z 軸に平行であり、その長さは l_1 である。辺 bc と辺 da は z 軸に垂直であり、その長さは l_2 である。この方形コイルは辺 ab と辺 cd を導体線に平行に保ったまま一定速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}_r u_0$ (u_0>0)で導体線より遠ざかっており、導体線に近い方の辺 ab から導体線までの距離は u_0t である。角周波数ω、速度の大きさ u_0 は系が準静的とみなし得る程度に小さいとする。方形コイルに生じる ① の大きさを次の手順で求める。なお、$\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\varphi$, $\boldsymbol{i}_z$ はそれぞれ r, φ, z 軸方向の単位ベクトルを表す。方形コイルにおける線積分は a→b→c→d の方向で行う。

電流 $\boldsymbol{I}(t)$により生じる磁界 $\boldsymbol{H}(r,t)$、磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,t)$はつぎのように表される

$\boldsymbol{H}(r,t)=$ ［　　⑧　　］ $\boldsymbol{i}_\varphi$ (4)

$\boldsymbol{B}(r,t)=$ ［　　⑨　　］ $\boldsymbol{i}_\varphi$ (5)

式(5)を面積分することで、時刻 t に方形コイルを貫く磁束$\Phi(t)$が次のように求まる。

$\Phi(t)=$ ［　　⑩　　］ (6)

従って、方形コイルに生じる ① は、次のようになる。

$e(t)=$ ［　　⑪　　］ (7)

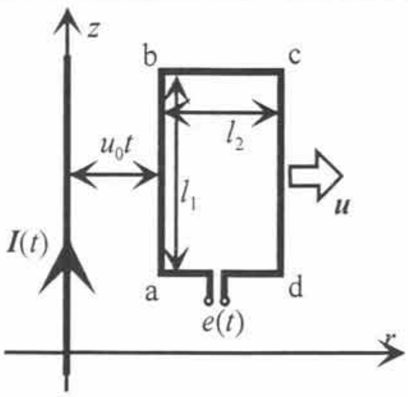


図２　φ=0 で表される平面において導体線から遠ざかる方形コイル

２５点

4-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に適切な数式または語句を記入せよ。

質量m、電荷量$-e\ (e>0)$の電子が、電界$\boldsymbol{E}$および磁束密度$\boldsymbol{B}$の電磁界中を速度$\boldsymbol{v}$で運動しているとする。$|\boldsymbol{v}|$が真空中の光速度cに比べて十分小さいとき、電子の運動方程式は、ニュートンの運動の法則と［　　　　］を表現する式から、次式で表される。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (1)$$

直角座標系において、静電界は存在せず、空間的に一様な$+x$方向の静磁界が存在するとし、その磁束密度を$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)=(B_0,0,0)$（ただし、$B_0>0$）とする。このとき、電子の速度を$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$とすると、式(1)は

$$m\frac{dv_x}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (2a)$$

$$m\frac{dv_y}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (2b)$$

$$m\frac{dv_z}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (2c)$$

と表される。電子は、時刻$t=0$において、座標原点$(x,y,z)=(0,0,0)$を速度$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)=(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta, 0)$で通過するものとする。ただし、$v_0>0$である。
時刻$t\,(\geq 0)$における電子の速度$\boldsymbol{v}$は、式(2a)-(2c)を解き、以下のように表される。なお、式(3b)および(3c)の空欄中の数式では、サイクロトロン角周波数$\omega_c \equiv eB_0/m$を用いよ。

$$v_x(t)=\frac{dx}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (3a)$$

$$v_y(t)=\frac{dy}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (3b)$$

$$v_z(t)=\frac{dz}{dt}= \boxed{\qquad\qquad} \quad (3c)$$

次に、時刻$t\,(\geq 0)$における電子の位置は、式(3a)-(3c)を解き、以下のように表される。なお、式(4b)および(4c)の空欄中の数式では、ω_cを用いよ。

$$x(t)= \boxed{\qquad\qquad} \quad (4a)$$

$$y(t)= \boxed{\qquad\qquad} \quad (4b)$$

$$z(t)= \boxed{\qquad\qquad} \quad (4c)$$

4-2	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

式(4a)と(4b)から時刻t を消去し、xとyの関係式を求めると、

$$y = \boxed{\quad\quad} \sin\left(\boxed{\quad\quad\quad} x \right) \qquad (5)$$

となる。よって、yはxについての周期関数となり、その周期L_pは

$$L_p = \boxed{\quad\quad\quad\quad} \qquad (6)$$

と表される。

次に、式(4b)と(4c)から時刻t を消去し、yとzの関係式を求めると、

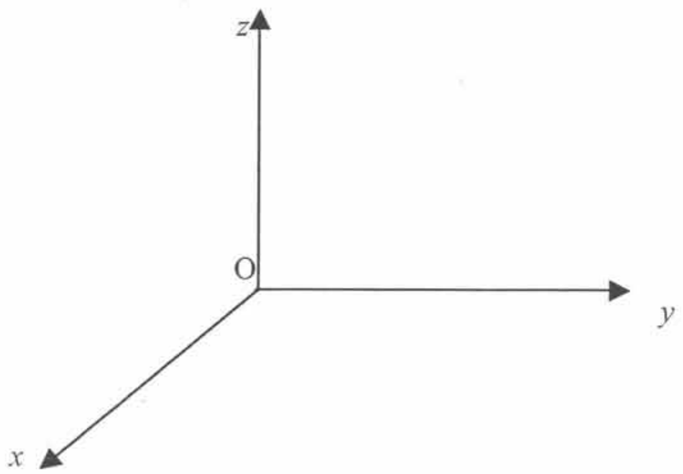
$$y^2 + (z - \boxed{\quad\quad\quad})^2 = \boxed{\quad\quad\quad} \qquad (7)$$

となる。よって、$y-z$面に投影した電子の運動は円運動となり、その円運動の半径Rは

$$R = \boxed{\quad\quad\quad\quad} \qquad (8)$$

と表される。

以上の結果より、時刻$0 < \omega_c t < 4\pi$の範囲内での、電子の運動の軌跡を次の図中に描け。ただし、$0 < \theta < \pi/2$とする。また、軌跡と座標軸との接点の座標をω_c、v_0、θを用いて明示せよ。



25点