問題１１　電気回路・電子回路　［Ｉ］

(1) $Z_1+Z_2=\dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_A}+\dfrac{1}{Z_B+Z_C}}=\dfrac{Z_A\cdot(Z_B+Z_C)}{Z_A+Z_B+Z_C}$　・・・①　　$\therefore \underline{Z_1+Z_2=\dfrac{Z_A\cdot(Z_B+Z_C)}{Z_A+Z_B+Z_C}}$

(2) $Z_2+Z_3=\dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_B}+\dfrac{1}{Z_A+Z_C}}=\dfrac{Z_B\cdot(Z_C+Z_A)}{Z_A+Z_B+Z_C}$　・・・②

$Z_3+Z_1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{Z_C}+\dfrac{1}{Z_A+Z_B}}=\dfrac{Z_C\cdot(Z_A+Z_B)}{Z_A+Z_B+Z_C}$　・・・③

①＋③－②より　$2Z_1=\dfrac{2Z_A\cdot Z_C}{Z_A+Z_B+Z_C}$　　$\therefore \underline{Z_1=\dfrac{Z_A\cdot Z_C}{Z_A+Z_B+Z_C}}$

①＋②－③より　$2Z_2=\dfrac{2Z_A\cdot Z_B}{Z_A+Z_B+Z_C}$　　$\therefore \underline{Z_2=\dfrac{Z_A\cdot Z_B}{Z_A+Z_B+Z_C}}$

(3) $I=\dfrac{E}{\sqrt{(R_2+R_4)^2+(\omega L)^2}}=\dfrac{100}{\sqrt{20^2+15^2}}=4$　　$\therefore \underline{4\ [\mathrm{A}]}$

(4) (2)の結果から $Z_1=\dfrac{Z_A\cdot Z_C}{Z_A+Z_B+Z_C}=\dfrac{j\omega C\cdot R_1\cdot R_5}{1+j\omega C(R_1+R_5)}$,

$Z_2=\dfrac{Z_A\cdot Z_B}{Z_A+Z_B+Z_C}=\dfrac{R_1}{1+j\omega C(R_1+R_5)}$

回路の平衡条件から

$$\frac{R_1}{1+j\omega C(R_1+R_5)}\cdot(R_4+j\omega L)=R_2\left\{\frac{j\omega C\cdot R_1\cdot R_5}{1+j\omega C(R_1+R_5)}+R_3\right\}$$

$$R_1\cdot(R_4+j\omega L)=R_2\{j\omega C\cdot R_1\cdot R_5+R_3\cdot(1+j\omega C(R_1+R_5))\}$$

したがって,

$R_1\cdot R_4=R_2\cdot R_3$　・・・①

$LR_1=CR_2\{R_1R_5+R_3(R_1+R_5)\}$　・・・②

①より $R_3=\dfrac{R_1\cdot R_4}{R_2}=\dfrac{2\times 15}{5}=6$　　$\therefore \underline{6\,[\Omega]}$

②より $C=\dfrac{LR_1}{R_2\{R_1R_5+R_3(R_1+R_5)\}}=\dfrac{0.05\times 2}{5\times\{2\times 1+(2+1)\times 6\}}=1\times 10^{-3}$　　$\therefore \underline{1\times 10^{-3}\ [\mathrm{F}]}$

問題１１　電気回路・電子回路　II　（解答例）

オペアンプの特性は理想的とするので，オペアンプの + 入力端子の電圧と − 入力端子の電圧は等しくなる（仮想短絡）．またオペアンプの二つの入力端子には電流は流れない．

(1) 本回路ではオペアンプの + 入力端子が接地されているので − 入力端子の電圧は 0 となる（仮想接地）．したがってオペアンプの − 入力端子の節点においてキルヒホッフの電流則を適用すると

$$\frac{0-V_1}{R_1}+\frac{0-V_2}{R_2}=0$$

これを解いて

$$\frac{V_2}{V_1}=-\frac{R_2}{R_1} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 電圧増幅率を 5 倍とするためには問 (1) の答より

$$\frac{R_2}{R_1}=5$$

と選べば良い．従って $R_1=10$ [kΩ] であるので

$$R_2=50\ [\mathrm{k\Omega}] \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) R_2, R_3, R_4 が接続された節点の電圧を V_3 と置く．問 (1) と同様にオペアンプの − 入力端子の節点においてキルヒホッフの電流則を適用すると

$$\frac{0-V_1}{R_1}+\frac{0-V_3}{R_2}=0$$

節点 V_3 においてキルヒホッフの電流則を適用すると

$$\frac{V_3-0}{R_2}+\frac{V_3-0}{R_3}+\frac{V_3-V_2}{R_4}=0$$

上式より

$$V_3=-\frac{R_2}{R_1}V_1$$

下式より

$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_3=\frac{1}{R_4}V_2$$

この 2 式を整理して

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1} &= -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\frac{R_2R_4}{R_1}=-\left(\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_4}{R_1}+\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\right)\\ &= -\left\{\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)+\frac{R_4}{R_1}\right\}=-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_4}{R_2}+\frac{R_4}{R_3}+1\right) \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(4) 電圧増幅率を 5 倍とするためには問 (3) の答より

$$\left\{\frac{R_2}{R_1}\left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)+\frac{R_4}{R_1}\right\}=5$$

と選べば良い．従って $R_1=10$ [kΩ] であるので例えば

$$R_2=20\ [\mathrm{k\Omega}],\quad R_3=R_4=10\ [\mathrm{k\Omega}] \quad \text{や} \quad R_2=R_3=10\ [\mathrm{k\Omega}],\quad R_4=20\ [\mathrm{k\Omega}] \qquad \cdots(\text{答})$$

問題１３　制御工学　解答例

I

（１）求める伝達関数を$G(s)$と置くと，$G(s)=\dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)+\{P(s)A(s)-B(s)\}F(s)}$。

（２）（１）より$P(s)A(s)-B(s)=0$となる条件を求めればよい。したがって，求める条件は

$B(s)=P(s)A(s)=\dfrac{2}{s+1}$となる。

（３）$G(s)=\dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}=\dfrac{2(1+as)}{s^2(s+3)+2(1+as)}=\dfrac{2(1+as)}{s^3+3s^2+2as+2}$より，フルビッツ行列式を計算すると，$H_1=3$，$H_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2a\end{vmatrix}=2(3a-1)$，$H_3=2H_2$。安定条件はこれらの行列式がすべて正となることなので，求める条件は$a>1/3$となる。

（４）最終値定理を用いると，$R(s)$が単位ステップ信号である場合の定常偏差は

$$\lim_{t\to\infty}\{r(t)-y(t)\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\{R(s)-G(s)R(s)\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\left\{\frac{1}{1+C(s)P(s)}\right\}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3+3s^2}{s^3+3s^2+10s+2}=0$$

となる。また$R(s)$が単位ランプ信号である場合の定常偏差は

$$\lim_{t\to\infty}\{r(t)-y(t)\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\{R(s)-G(s)R(s)\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\left\{\frac{1}{1+C(s)P(s)}\right\}\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2+3s}{s^3+3s^2+10s+2}=0$$

となる。

（５）$D(s)$から$Y(s)$への伝達関数を$G_{yd}(s)$とすると，

$$G_{yd}(s)=\frac{P(s)}{1+P(s)\{C(s)+A(s)F(s)\}\dfrac{1}{1-B(s)F(s)}}=\frac{P(s)\{1-B(s)F(s)\}}{1-B(s)F(s)+P(s)\{C(s)+A(s)F(s)\}}$$

$$=\frac{P(s)\{1-B(s)F(s)\}}{1+P(s)C(s)}=\frac{2s\cdot\dfrac{3s+1}{3s+3}}{s^3+3s^2+10s+2}=\frac{2s(3s+1)}{(s^3+3s^2+10s+2)(3s+3)}$$

となる。したがって，最終値定理を用いると，$R(s)=0$より$D(s)$が単位ランプ信号である場合の定常偏差は

$$\lim_{t\to\infty}\{r(t)-y(t)\}=\lim_{s\to 0}s\cdot\{R(s)-G_{yd}(s)D(s)\}=-\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{2s(3s+1)}{(s^3+3s^2+10s+2)(3s+3)}\cdot\frac{1}{s^2}=-\frac{1}{3}$$

となる。

Ⅱ　抵抗に流れる電流を $i_R(t)$，コイルに流れる電流を $i_L(t)$ とおくと

$$v_i(t) = \frac{1}{C}\int_0^t (i_L(\tau)+i_R(\tau))d\tau + v_o(t),\quad v_o(t) = Ri_R(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$$

である。 $v_i(t), v_o(t), i_L(t), i_R(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $V_i(s), V_o(s), I_L(s), I_R(s)$ とおき，全ての初期値を零として上式をラプラス変換をすると

$$V_i(s) = \frac{1}{Cs}(I_L(s)+I_R(s))+V_o(s),\ V_o(s) = RI_R(s) = LsI_L(s)$$

となる。したがって，入力電圧から出力電圧までの伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{LCRs^2}{LCRs^2+Ls+R}$$

Ⅲ　質量 M の速度を $v(t)$ とおく。質量－バネ－ダッシュポット（ダンパ）系の運動方程式は

$$Kx(t)+B(\tfrac{d}{dt}x(t)-v(t)) = 0,\quad M\tfrac{d}{dt}v(t) = f(t)-B(v(t)-\tfrac{d}{dt}x(t))$$

である。 $x(t), v(t), f(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $X(s), V(s), F(s)$ とおき，全ての初期値を零として上式をラプラス変換をすると

$$(Bs+K)X(s) = BV(s),\quad (Ms+B)V(s) = F(s)+BsX(s)$$

となる。よって外力から変位までの伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{B}{MBs^2+MKs+BK}$$

Ⅳ　$H(s) = \dfrac{6}{s^2+4s+3}$ とおく。システム $H(s)$ の単位ステップ応答 $y_1(t)$ は

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)\times\frac{1}{s}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+3}] = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2-3e^{-t}+e^{-3t} & (t\geq 0)\end{cases}$$

である。したがって，システム $G(s)$ の単位ステップ応答 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\times\frac{1}{s}] = y_1(t-2) = \begin{cases} 0 & (t<2) \\ 2-3e^{-(t-2)}+e^{-3(t-2)} & (t\geq 2)\end{cases}$$

（解答例おわり）

問題 18　量子力学　(解答例)

I.

(1)
$$\psi(x) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\frac{\pi}{a}x} - \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\frac{\pi}{a}x}\right)$$
$$= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) - \phi_2(x)\right)$$

(2)

・ $$\int_0^a \phi_1^*(x)\,\phi_1(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a e^{-i\frac{\pi}{a}x}\, e^{i\frac{\pi}{a}x}\,dx = 1$$

・ $$\int_0^a \phi_2^*(x)\,\phi_2(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a e^{i\frac{\pi}{a}x}\, e^{-i\frac{\pi}{a}x} = 1$$

・ $$\int_0^a \phi_1^*(x)\,\phi_2(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a e^{+i\frac{\pi}{a}x}\, e^{-i\frac{\pi}{a}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^a e^{i\frac{2\pi}{a}x}\,dx = 0$$

・ $$\int_0^a \phi_2^*(x)\,\phi_1(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a e^{i\frac{\pi}{a}x}\, e^{i\frac{\pi}{a}x}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^a e^{i\frac{2\pi}{a}x}\,dx = 0$$

$$\left[\ \left(\int_0^a \phi_1(x)^*\,\phi_2(x)\,dx\right)^* = \int_0^a \phi_2^*(x)\,\phi_1(x)\,dx = 0\ \right]$$

(3) $-i\hbar \frac{d}{dx}\phi_1(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{i\frac{\pi}{a}x}$

$$= \frac{\hbar\pi}{a}\phi_1(x)$$

• $p_1 = \frac{\hbar\pi}{a} = \frac{h}{2a}$ である.

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\phi_2(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-i\frac{\pi}{a}x}$$

$$= -\frac{\hbar\pi}{a}\phi_2(x)$$

• $p_2 = -\frac{\pi\hbar}{a} = -\frac{h}{2a}$ である.

4. $$\langle \hat{p} \rangle = \int_0^a \psi(x) \hat{p}\, \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (\phi_1^* \hat{p}\, \phi_1 + \phi_2^* \hat{p}\, \phi_2 - \phi_1^* \hat{p}\, \phi_2 - \phi_2^* \hat{p}\, \phi_1)\, dx$$

$\hat{p}\,\phi_1 = \frac{\hbar\pi}{a}$、 $\hat{p}\,\phi_2 = -\frac{\hbar\pi}{a}$ であるから

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{2}\frac{\hbar\pi}{a}\int_0^a (\phi_1^* \phi_1 - \phi_2^* \phi_2 + \phi_1 \phi_2 - \phi_2^* \phi_1)\, dx$$

$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$ の規格直交性より

$$\langle \hat{p} \rangle = 0$$

（別解）

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_0^a \psi^*(x)\, \hat{p}\, \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{a}\frac{\hbar}{i}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx$$

$$= 0$$

5. $\hat{H}\psi = E\psi$

$$\frac{1}{2m}\hat{p}^2\psi = \frac{1}{2m}\frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{p}^2\phi_1 - \hat{p}^2\phi_2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2\frac{1}{i\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2\psi$$

$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{a}\right)^2$, $\left[\frac{h^2}{8ma^2}\right]$ である

（別解）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\psi_1(x)$$

$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, $\left[\frac{h^2}{8ma^2}\right]$ である.

問題 18

II

(1) $$k = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$$

(2) $$\alpha = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$$

(3) $$1 + A = B + C$$

$$ik(1 - A) = \alpha(B - C)$$

(4) $$B e^{\alpha L} + C e^{-\alpha L} = D e^{ikL}$$

$$\alpha(B e^{\alpha L} - C e^{-\alpha L}) = ikD e^{ikL}$$

(5) $$|A|^2$$

(6) $$\frac{C}{B} = -i \, e^{2\alpha L}$$

(7) $$T = \frac{1}{\cosh^2(\alpha L)}$$

問題１９電子物性・個体物性

解答例

Ⅰ　（配点目安　各 10 点）

（１）加速度 $a = -qE/m^*$

（２）有効質量　（あまり使わないが実効質量も正解とする）

（３）$v_{max} = -qE\tau_c/m^*$

（４）$v_d = v_{max}/2$ もしくは $-qE\tau_c/2m^*$

（５）電気伝導率 $\sigma = qn\mu$　（電気伝導率に負号を付けるのは違和感があるが $-qn\mu$ も正解とする）

Ⅱ

（１）$+x$ 方向（もしくは x 方向）　vqB_z　（配点目安　10＋10 点）

（２）加速度 a_x, a_y, a_z および速度 v_x, v_y, v_z を定義した場合

x 方向　$m^*a_x = v_yqB_z$

y 方向　$m^*a_y = -v_xqB_z$

z 方向　$m^*a_z = 0$

定義しない場合

x 方向　$m^*d^2x/dt^2 = qB_z\,dy/dt$

y 方向　$m^*d^2y/dt^2 = -qB_z\,dx/dt$

z 方向　$m^*d^2z/dt^2 = 0$

（配点目安　5＋5＋5 点）

（３）（２）で求めた式を積分して

x 方向　$m^*dx/dt = yqB_z + c_1$

y 方向　$m^*dy/dt = -xqB_z + c_2$

z 方向　$m^*dz/dt = c_3$

ただし c_1，c_2，c_3 は積分定数

z 方向に速度成分はなく，$dx/dt \propto y$，$dy/dt \propto x$ という形となっているので運動は等速円運動である。よって，速度の絶対値は初期値と変わらず常に v なので

$v^2 = ((yqB_z + c_1)/m^*)^2 + ((-xqB_z + c_2)/m^*)^2$

定数 C_1, C_2 を定義しなおせば

$(x + C_2)^2 + (y + C_1)^2 = (m^*v/qB_z)^2$

となり，伝導電子は半径 $r = m^*v/qB_z$ を有する円運動をすることがわかる。

（配点目安　円運動であることが示されていれば 5 点，r が求まっていればさらに 10 点）