

問題 1 1 電気回路・電子回路

I 解答

- (1) 直流電源 E を接続したときの電圧方程式は次式で得られる。

$$E = (R_1 + R_2)i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$i(0) = 0$ として、ラプラス変換をし、電流のラプラス変換値 $I(s)$ について解く。

$$\frac{E}{s} = (R_1 + R_2)I(s) + sLI(s), \quad I(s) = \frac{E}{Ls \left(s + \frac{R_1 + R_2}{L} \right)} = \frac{E}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1 + R_2}{L}} \right)$$

ラプラス逆変換をして、電流 $i(t)$ は次式で得られる。

$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right) \right\} = \underline{10(1 - e^{-8t}) \text{ A}}$$

- (2) 電流実効値 I_1 、力率角 φ は定常状態の関係から次式で得られる。

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}} = 5\sqrt{2} = \underline{7.07 \text{ A}}, \quad \varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R_1 + R_2} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

したがって、時刻 $t = t_1$ の電流 $i(t_1)$ が問 (1) の定常状態の 10 A になれば過渡項を発生しないので、電源位相角 ωt_1 は次式で得られる。

$$i(t_1) = 10 = 10 \cos(\omega t_1 - \frac{\pi}{4}), \quad \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \text{ または、 } \omega t_1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ rad } (n \text{ は任意の自然数})$$

- (3) 抵抗 R_2 、インダクタンス L 、キャパシタンス C の合成アドミタンス Y は次式で得られる。

$$Y = \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} \right)$$

力率 1 より合成アドミタンス Y の虚部が零になることから、キャパシタンス C は次式で得られる。

$$C = \frac{\omega L}{\omega \{ R_2^2 + (\omega L)^2 \}} = \underline{0.01 \text{ F}}$$

このとき、抵抗 R_2 、インダクタンス L 、キャパシタンス C の合成インピーダンス Z を求め、電流実効値 I_2 は次式で得られる。

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{R_2^2 + (\omega L)^2}{R_2} = \frac{50}{3}, \quad I_2 = \frac{V}{R_1 + Z} = \frac{30}{7} = \underline{4.29 \text{ A}}$$

問題 11 II 解答

(1) μ が無限大なので+端子と-端子の電圧は等しく V_I となる。したがって、

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \quad \text{これより、} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

(2) μ が有限なので仮想短絡は成り立たない。+端子と-端子との間の電位差を V_a とすると、

$$V_a = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2 \quad (a)$$

一方、入力と出力の関係は、

$$V_2 = \mu \times (V_1 - V_a) \quad (b)$$

式(a)(b)より V_a を消去すると次式が得られる。

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{\mu}}$$

(3) ①の点における節点方程式は、

$$V_2 s C_2 + \frac{V_3}{R} = 0 \quad (c)$$

(4) ②の点における節点方程式は、

$$\frac{(V_1 - V_3)}{R} - V_3 s C_1 + \frac{(V_2 - V_3)}{R} - \frac{V_3}{R} = 0 \quad (d)$$

(5) 式(c)、(d) より V_3 を消去すると、以下の式が得られる。

$$\frac{V_2}{V_1} = - \frac{1}{1 + 3sC_2R + s^2C_1C_2R^2} = - \frac{\frac{1}{C_1C_2R^2}}{s^2 + \frac{3}{C_1R}s + \frac{1}{C_1C_2R^2}}$$

問題 13 制御工学 の解答例

I 左の抵抗に流れる電流を $i_1(t)$ ，右の抵抗に流れる電流 $i_2(t)$ とおくと

$$v_i(t) = Ri_1(t) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1(\tau) + i_2(\tau)) d\tau, \quad v_o(t) = Ri_2(t) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1(\tau) + i_2(\tau)) d\tau$$

$$Ri_1(t) = Ri_2(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau$$

となる。 $v_i(t), v_o(t), i_1(t), i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $V_i(s), V_o(s), I_1(s), I_2(s)$ とおき， $R=1[\Omega], C=1[F]$ を代入し，初期値を零として上式をラプラス変換すると

$$V_i(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) + \frac{1}{s} I_2(s), \quad V_o(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_2(s) + \frac{1}{s} I_1(s), \quad I_1(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_2(s)$$

となる。式を整理すると回路の伝達関数は次式で与えられる。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 3s + 1}$$

したがって， $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 1, 3, 1)$ である。

問題 1 3 制御工学 の解答例

II あらかじめ設問に必要な伝達関数を求めておく.

$$Y(s) = \frac{(K_1(s) + K_2(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)}R(s) + \frac{P(s)}{1 + K_3(s)P(s)}D(s)$$

$$E(s) = \frac{K_2(s) - K_1(s)P(s)}{1 + K_3(s)P(s)}R(s) + \frac{-P(s)}{1 + K_3(s)P(s)}D(s)$$

(1) インパルス応答を $y(t)$ とすると, $y(t)$ は以下の計算から求まる.

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{(K_1(s) + K_2(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} R(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K_3(s)P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} R(s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 3s + 4} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 3s + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2 \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \right\} = \frac{4}{\sqrt{7}} e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \end{aligned}$$

(2) 閉ループ伝達関数を $G_{yr}(s)$ とすると, $G_{yr}(s)$ は次式となる.

$$G_{yr}(s) = \frac{(K_1(s) + K_2(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} = \frac{(K + 0.5)s + 5K}{s^3 + 3s^2 + (K + 2)s + 5K}$$

安定となるゲイン K は, フルビッツ行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 5K & 0 \\ 1 & K+2 & 0 \\ 0 & 3 & 5K \end{bmatrix} \text{より, } 3(K+2) - 5K > 0, 5K(3(K+2) - 5K) > 0 \text{を用いて次式として求まる.}$$

$$0 < K < 3$$

ただし, $K = 0$ の場合, 制御器は $K_1(s)$ によるフィードフォワード制御のみとなり安定であるので, 安定となるゲイン K の範囲は次式となる.

$$0 \leq K < 3$$

(3) 外乱が零の時の偏差は次式で与えられる.

$$E(s) = \frac{K_2(s) - K_1(s)P(s)}{1 + K_3(s)P(s)}R(s) = \frac{1 - 2P(s)}{1 + 2P(s)}R(s)$$

単位ステップ関数の目標値に対する定常偏差は以下の計算から求まる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 3s}{s^2 + 3s + 4} \frac{1}{s} = 0$$

単位ランプ関数の目標値に対する定常偏差は以下の計算から求まる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 3s}{s^2 + 3s + 4} \frac{1}{s^2} = \frac{3}{4} (= 0.75)$$

(4) 目標値が零の時の偏差は次式で与えられる.

$$E(s) = \frac{-P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} D(s) = \frac{-P(s)}{1 + 2P(s)} D(s) = \frac{-1}{s^2 + 3s + 4} D(s)$$

単位ステップ関数の外乱に対する定常偏差は以下の計算から求まる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1}{s^2 + 3s + 4} \frac{1}{s} = -\frac{1}{4} (= -0.25)$$

(5) 目標値から制御量までの伝達関数は次式で与えられる.

$$Y(s) = \frac{(K_1(s) + K_2(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} R(s) = \frac{(K_1(s) + G_d(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} R(s)$$

これが $Y(s) = G_d(s)R(s)$ となるためには, 次式を満足すればよい.

$$\frac{(K_1(s) + G_d(s)K_3(s))P(s)}{1 + K_3(s)P(s)} = G_d(s)$$

よって, $K_1(s)$ は以下の計算から求まる.

$$K_1(s)P(s) + G_d(s)K_3(s)P(s) = G_d(s) + G_d(s)K_3(s)P(s),$$

$$K_1(s) = \frac{G_d(s)}{P(s)} = G_d(s)P^{-1}(s)$$

問題 13 制御工学 解答例

Ⅲ (a)セ (b)ア (c)オ (d)テ

Ⅳ (イ)(b) (ロ)(o) (ハ)(d) (ニ)(e)

問題 18 量子力学

I

(1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \phi = E\phi$$

(2)

$$A = \frac{m\omega}{2\hbar}, \quad E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

(3)

$$C = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{1/4}$$

(4)

$$\langle x \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4A}$$

(5)

$$\langle p \rangle = 0, \quad \langle p^2 \rangle = \hbar^2 A$$

(6)

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$$

$$\text{II-(1)} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\delta(x)\psi = E\psi$$

$$\text{II-(2)} \quad \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\text{II-(3)} \quad A + B = C$$

$$\text{II-(4)} \quad \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$\text{II-(5)} \quad ik(C - A + B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}C$$

$$\text{または, } ik(C - A + B) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}(A + B)$$

$$\text{II-(6)} \quad \frac{B}{A} = \frac{mV_0}{i\hbar^2k - mV_0}, \quad \frac{C}{A} = \frac{i\hbar^2k}{i\hbar^2k - mV_0}$$

$$\text{II-(7)} \quad R = \frac{(mV_0)^2}{(\hbar^2k)^2 + (mV_0)^2}, \quad T = \frac{(\hbar^2k)^2}{(\hbar^2k)^2 + (mV_0)^2}$$

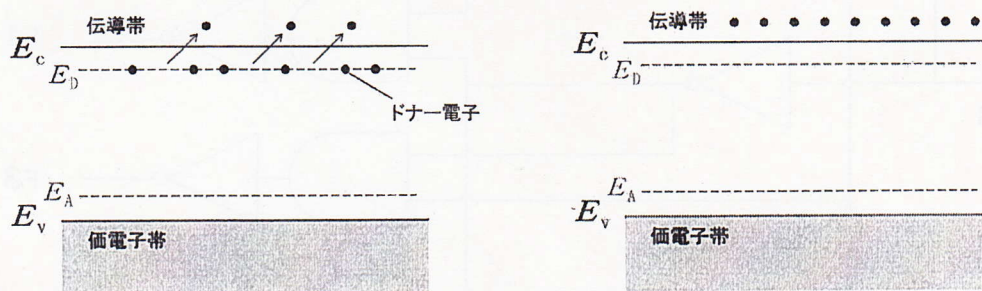
問題 19 電子物性・固体物性

(1) (a)固有（あるいは真性）領域、(b)出払い（あるいは飽和）領域、(c)不純物領域

(2) n 型

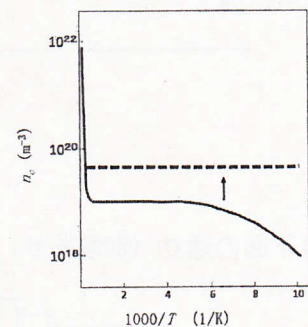
$N_D \gg N_A$ であるので、ドナーが支配的に導電に寄与することから半導体性は n 型になる。

(3) エネルギーバンド図において、伝導帯の下端を E_c 、価電子帯の上端を E_v 、ドナー準位を E_D 、アクセプター準位を E_A とする。不純物領域から Si 結晶の温度を上げていく。左図のように、温度が上昇すると、ドナー準位 E_D にある電子はエネルギーが上がり、伝導帯に上がるので、伝導電子が増えて n_c が上昇する。しかしながら、さらに温度が上がると、右図のように、ドナー準位にある電子は無くなり、新たにドナー準位から伝導帯に入り込む電子も無く、固有（もしくは真性）領域までは、価電子帯から伝導帯への電子の励起も無いので、 n_c は上がらなくなる。すなわち、出払い領域での温度変化に対する、 n_c の変化は小さくなる。なお、図にはアクセプター準位 E_A にある電子は、描いていない。



(4) 右図破線のように変化することが予想される。

理由：波長 $1\mu\text{m}$ の光のエネルギーは 1.24eV とエネルギーバンドギャップ $E_g = 1.1\text{eV}$ より大きいので、光が照射されている間は、価電子帯から伝導帯に電子が励起され、伝導電子密度が一様に増加することが考えられるから。



(5) 右図破線のように変化することが予想される。

理由：波長 $10\mu\text{m}$ の光のエネルギーは 0.124eV とドナーのイオン化エネルギー 0.1eV より少し大きいだけであるので、ドナー準位に電子がある領域（不純物領域）では、ドナー準位から伝導帯へ電子が励起され伝導電子密度は増加するが、ドナー準位から電子の無くなる出払い領域では、伝導電子密度の増加は見込まれないから。

