平成 18 年 8 月 28 日
9:30－11:30

平成１８年度

大学院工学研究科　電気・通信工学専攻
電子工学専攻

大学院情報科学研究科
情報・生命系群(物理・情報系)

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，
答案用紙に解答せよ.

(Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them.)

２００６年　８月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

(1) 真空中において，真電荷も真電流も存在しなければ，マクスウエル方程式は次式で与えられる．ただし，電界を $\boldsymbol{E}$，磁界を $\boldsymbol{H}$ で表し，ε_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率とする．

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad (1a) \qquad\qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (1b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad (1c) \qquad\qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0. \qquad (1d)$$

これらの式より，$\boldsymbol{H}$ に関する波動方程式が次式で与えられることを証明せよ．

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}. \qquad (1e)$$

ただし，必要ならば次の公式を用いよ．$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$.ここで，∇^2 はラプラシアンである．

(2) 波動方程式(1e)の解の一つとして，z 方向に進む平面波があり，その磁界 $\boldsymbol{H}$ を次式で表す．ここで，x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ とする．

$$\boldsymbol{H} = H_0 \cos(\omega t - kz)\, \hat{y}. \qquad (1f)$$

式(1f)を波動方程式に代入することによって，この平面波の波数 k および速さ v を $\omega, \varepsilon_0, \mu_0$ を用いて表せ．

(3) 問(2)の平面波の電界 $\boldsymbol{E}$ は次式で与えられることを証明せよ．

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 \cos(\omega t - kz)\, \hat{x}. \qquad (1g)$$

(4) 問(2)の平面波に伴うエネルギー流の方向と，単位面積を通過する平均電力を求めよ．

(5) 電磁波の磁界の測定には，一般に，Fig. 1 に示す細い導線の円環に抵抗 R を接続したものを用いる．問(2)の平面波によって円環には電流 $I(t)$が誘起されるため，円環で囲まれた領域内の磁界は平面波の磁界 $\boldsymbol{H}$ と電流 $I(t)$によって生じた磁界 $\boldsymbol{H}_{ind}$ で構成される．このことから円環電流 $I(t)$に関する方程式を導出せよ．ただし，導線の抵抗は無視でき，円環は図のように x-z 面内に置かれており，その中心は原点(0, 0, 0)にある．また，抵抗 R の寸法は無視できるほど小さく，円環が十分小さいため磁界は円環内で一様であると仮定する．なお，円環で囲まれた領域の面積を A，円環の自己インダクタンスを L とせよ．

(1) In vacuum where there is no true charge or true current, Maxwell's equations are written in terms of the electric field $\boldsymbol{E}$ and the magnetic field $\boldsymbol{H}$ as

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad (1a) \qquad\qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (1b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad (1c) \qquad\qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \qquad (1d)$$

where the constants ε_0 and μ_0 denote the permittivity and permeability of vacuum, respectively. Referring to these equations, prove that the wave equation for $\boldsymbol{H}$ is given by

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}. \qquad \text{(1e)}$$

If necessary, use the formula, $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$, where ∇^2 is the Laplacian.

(2) One of the solutions to the wave equation (1e) is a plane wave traveling in the z direction that has the magnetic field $\boldsymbol{H}$ given by

$$\boldsymbol{H} = H_0 \cos(\omega t - kz)\,\hat{y}, \qquad \text{(1f)}$$

where $\hat{x}, \hat{y}$, and $\hat{z}$ are unit vectors parallel to the x, y, and z axes, respectively. Substituting equation (1f) into the wave equation, derive the expressions for the wave number k and the speed v of the wave in terms of ω, ε_0, and μ_0.

(3) Show that the electric field $\boldsymbol{E}$ of the plane wave defined by question (2) is given by

$$\boldsymbol{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x}. \qquad \text{(1g)}$$

(4) Find the direction and time-average power of the energy flow through a unit area that is associated with the plane wave defined by question (2).

(5) In general, the magnetic field of an electromagnetic wave is measured using a circular loop of thin conducting wire connected to a resistor R as shown in Fig. 1. Since the plane wave of question (2) induces a loop current $I(t)$, the magnetic field inside the region encircled by the loop consists of the plane wave magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the magnetic field $\boldsymbol{H}_{ind}$ produced by $I(t)$. Considering this fact, derive an equation for the loop current $I(t)$, where the resistance of the wire is assumed to be negligible and the loop is placed in the x-z plane with the center at the origin (0, 0, 0), as illustrated in the figure. It is also assumed that the size of the resistor R is negligibly small and the magnetic field inside the loop is uniform because the loop is sufficiently small. Let the area and self-inductance of the loop be A and L, respectively.

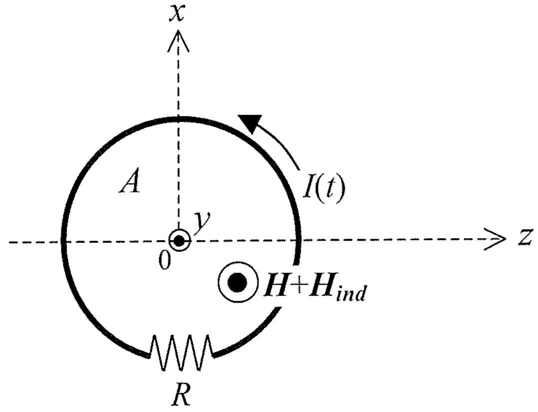

Fig. 1

2006 年 8 月実施
問題２　電気回路
（１頁目／３頁中）

(1)　Fig. 2(a)のように，インピーダンス Z_1 および Z_2 ($Z_1 \neq Z_2$)を用いて回路を構成した．この回路において，1-1'間を入力端，2-2'間を出力端として，以下の問に答えよ．

(a) 出力端を短絡した場合の回路の入力インピーダンス Z_{short} を求めよ．

(b) 出力端を開放した場合の回路の入力インピーダンス Z_{open} を求めよ．

(c) 出力端にインピーダンス Z_L を接続したとき，回路の入力インピーダンスが Z_L に等しくなった．このときの Z_L を Z_1 および Z_2 を用いて表せ．

(2)　Fig. 2(b)は，1-1'間を入力端，2-2'間を出力端とする無損失分布定数線路であり，この線路の特性インピーダンスは Z_0，位相定数はβ，線路長さは L である．以下の問に答えよ．

(a) 無損失分布定数線路の波動方程式の解は時間項を無視して(2a)式で与えられる．

$$V_x = K_1 e^{j\beta x} + K_2 e^{-j\beta x}, \qquad I_x = \frac{K_1}{Z_0} e^{j\beta x} - \frac{K_2}{Z_0} e^{-j\beta x} \quad . \qquad (2a)$$

ここで V_x, I_x は出力端から距離 x 離れた点における電圧と電流であり，K_1, K_2 は境界条件により定まる定数である．V_0, I_0 をそれぞれ出力端での電圧と電流とするとき，V_x, I_x は(2b)式で表されることを示せ．

$$V_x = V_0 \cos\beta x + jZ_0 I_0 \sin\beta x \ , \quad I_x = j\frac{V_0}{Z_0}\sin\beta x + I_0 \cos\beta x \quad . \qquad (2b)$$

(b) 出力端を短絡した場合の入力インピーダンスを Z_{short}，出力端を開放した場合の入力インピーダンスを Z_{open} とした場合に，$Z_0 = \sqrt{Z_{\mathrm{short}} \cdot Z_{\mathrm{open}}}$ が成り立つことを示せ．

(c) Fig. 2(a)に示す回路の縦続行列(K 行列，または F 行列)と Fig. 2(b)に示す回路の縦続行列が等しいとき，Z_0 と $\tan \beta L$ を Z_1 および Z_2 を用いて表せ．

(1) Fig. 2(a) shows a circuit with impedances Z_1 and Z_2 ($Z_1 \neq Z_2$). 1-1' and 2-2' are input terminals and output terminals, respectively. Answer the following questions.

(a) Calculate the input impedance Z_{short} when the output terminals are shorted.

(b) Calculate the input impedance Z_{open} when the output terminals are opened.

(c) When the output terminals are terminated by an impedance Z_L, the input impedance also shows Z_L. Express Z_L in terms of Z_1 and Z_2.

(2) Fig. 2(b) shows a lossless transmission line with input terminals 1-1' and output terminals 2-2'. The characteristic impedance of this line is Z_0, the phase constant is β, and the length is L. Answer the following questions.

(a) Solutions of wave equations of lossless transmission lines are given by the equations (2a) with abbreviation of term for time.

$$V_x = K_1 e^{j\beta x} + K_2 e^{-j\beta x}, \qquad I_x = \frac{K_1}{Z_0} e^{j\beta x} - \frac{K_2}{Z_0} e^{-j\beta x}, \qquad \text{(2a)}$$

where V_x and I_x are voltage and current at a distance x from the output terminals, respectively, K_1 and K_2 are constants determined by the boundary conditions. Show that V_x and I_x can be expressed by the equations (2b) when V_0 and I_0 are the voltage and current at the output terminals, respectively.

$$V_x = V_0 \cos\beta x + jZ_0 I_0 \sin\beta x \;, \quad I_x = j\frac{V_0}{Z_0}\sin\beta x + I_0 \cos\beta x \qquad \text{(2b)}$$

(b) Show that $Z_0 = \sqrt{Z_{\text{short}} \cdot Z_{\text{open}}}$, where Z_{short} and Z_{open} are the input impedances when the output terminals are shorted and opened, respectively.

(c) Express Z_0 and $\tan\beta L$ in terms of Z_1 and Z_2 when the circuit shown in Fig. 2(a) and the transmission line shown in Fig. 2(b) have the same cascade matrix (K matrix, F matrix, or chain matrix).

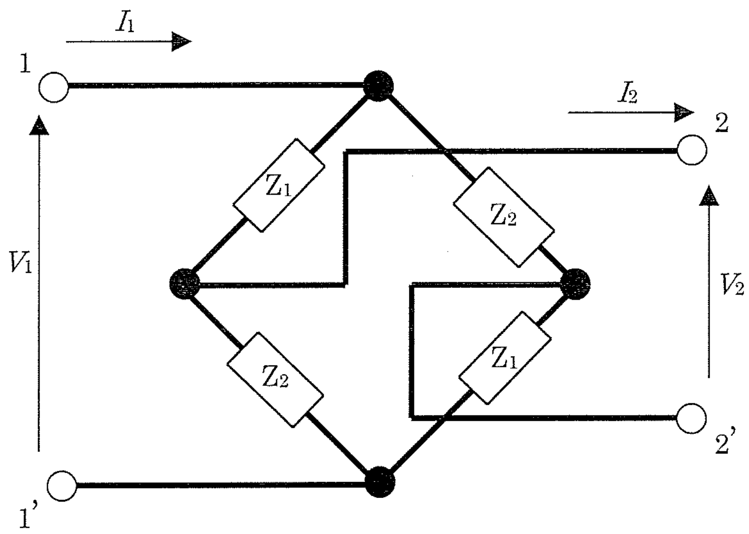

Fig. 2(a)

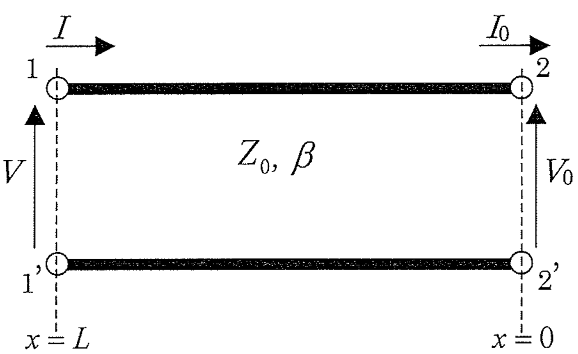

Fig. 2(b)

2006年8月実施
問題3　情報基礎1
（１頁目／２頁中）

3ビットの2進数 $x_2x_1x_0$ を，3ビットの2進数 $y_2y_1y_0$ に変換する論理関数を考える $(x_i, y_i \in \{0,1\})$．$0 \le k \le 7$ なる整数 k を1つ定めた時,

$$y_i = f_i^k(x_2, x_1, x_0) \quad (0 \le i \le 2)$$

$$f_i^k(x_2, x_1, x_0) = \begin{cases} \bar{x}_i & [x_2x_1x_0]_2 = k \text{ または } [\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0]_2 = k \text{ のとき} \\ x_i & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．ただし，$\bar{\ }$ はNOT（否定）演算を表し，$[\alpha]_2$ は2進数 α の値を表す．このとき，次の問に答えよ．以下の問では，$\cdot$ はAND（論理積）演算を，$+$ はOR（論理和）演算を，$\oplus$ はEXOR（排他的論理和）演算をそれぞれ表すものとする．

(1) $k=0$ とするとき，y_0, y_1, y_2 の真理値表を書き，y_0, y_1, y_2 を x_0, x_1, x_2 の最簡積和形（最小論理和形）論理式で表せ.

(2) $k=0$ とするとき，x_0, x_1, x_2 を入力とし，y_0 を出力とする論理回路をAND, OR, NOTゲートで構成せよ.

(3) $h(z_1, \ldots, z_n) = \bar{h}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ であるとき，論理関数 h は自己双対関数であるという．f_i^k が自己双対関数であることを示せ.

(4) 二つの関係式 $[x_2x_1x_0]_2 = k$ と $\overline{(x_2 \oplus k_2)} \cdot \overline{(x_1 \oplus k_1)} \cdot \overline{(x_0 \oplus k_0)} = 1$ が等価であることを示せ．ただし，$k = [k_2k_1k_0]_2$ とする.

(5) f_i^k が

$$f_i^k(x_2, x_1, x_0) = x_i \oplus \left\{(x_2 \oplus k_2) \cdot (x_1 \oplus k_1) \cdot (x_0 \oplus k_0) + \overline{(x_2 \oplus k_2)} \cdot \overline{(x_1 \oplus k_1)} \cdot \overline{(x_0 \oplus k_0)}\right\}$$

と表せることを示せ.

2006年8月実施
問題3　情報基礎1
（2頁目／2頁中）

Consider logic functions that convert a three-bit binary number $x_2 x_1 x_0$ to a three-bit binary number $y_2 y_1 y_0$ $(x_i, y_i \in \{0,1\})$. Given an integer k $(0 \le k \le 7)$, we assume

$$y_i = f_i^k(x_2, x_1, x_0) \quad (0 \le i \le 2) \quad \text{and}$$

$$f_i^k(x_2, x_1, x_0) = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{if } [x_2 x_1 x_0]_2 = k \text{ or } [\bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0]_2 = k \\ x_i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $^{-}$ denotes the NOT operator and $[\alpha]_2$ denotes the value of a binary number α. Answer the following questions. In the following questions, $\cdot$, $+$ and $\oplus$ denote the AND operator, OR operator and EXOR (Exclusive OR) operator, respectively.

(1) When $k=0$, write the truth table of y_0, y_1, y_2, and determine the minimum sum-of-products expressions of y_0, y_1, y_2 using x_0, x_1, x_2.

(2) When $k=0$, draw a logic circuit with inputs x_0, x_1, x_2 and output y_0 using AND, OR and NOT gates.

(3) A logic function h is called a self-dual function if $h(z_1, \ldots, z_n) = \bar{h}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$. Prove that f_i^k is a self-dual function.

(4) Prove that the two equations $[x_2 x_1 x_0]_2 = k$ and $\overline{(x_2 \oplus k_2)} \cdot \overline{(x_1 \oplus k_1)} \cdot \overline{(x_0 \oplus k_0)} = 1$ are equivalent, where $k = [k_2 k_1 k_0]_2$.

(5) Prove that the function f_i^k can be described as

$$f_i^k(x_2, x_1, x_0) = x_i \oplus \{(x_2 \oplus k_2) \cdot (x_1 \oplus k_1) \cdot (x_0 \oplus k_0) + \overline{(x_2 \oplus k_2)} \cdot \overline{(x_1 \oplus k_1)} \cdot \overline{(x_0 \oplus k_0)}\}.$$

２００６年８月実施
問題４ 情報基礎２
（１頁目／２頁中）

下記の再帰的なアルゴリズムは**マージソート**として知られており，入力として与えられた配列 A に対し，その要素を昇順に並び替えた配列 A' を計算する．次の問に答えよ．
なお，実数 x に対し，$\lceil x \rceil$ は $m \geq x$ を満たす最小の整数 m を表す．

Step 1. A の要素数を n とする．
　$n \leq 1$ のときは，$A' = A$ として終了．

Step 2. $n \geq 2$ のときは，$k = \lceil n/2 \rceil$ とする．

Step 3. A の前半部 k 個の要素からなる配列 $A[1..k]$ を B とおき，
　その残り $A[k+1..n]$ を C とおく．
　B と C に対して再帰的にマージソートを行い，
　それぞれソートされた配列 B' と C' を得る．

Step 4. B' と C' を**マージ**することによって，昇順にソートされた配列 A' を求める．

(1) Step 4 のマージ手続きを述べ，その実行時間が $O(n)$ であることを示せ．

(2) 入力として $A = [8, 10, 2, 15, 6, 1, 9, 7, 4, 11, 5]$ が与えられたときのマージソートアルゴリズムの動作の概要を示せ．

(3) このマージソートアルゴリズムの実行時間が $O(n \log n)$ であることを示せ．

(4) Step 2 を「 $n \geq 2$ のときは，$k = 1$ とする．」と変更したときのアルゴリズムの実行時間を n に関するオーダーで示し，その理由を説明せよ．

(5) Step 2 を「 $n \geq 2$ のときは，$k = \lceil n/3 \rceil$ とする．」と変更したときのアルゴリズムの実行時間を n に関するオーダーで示し，その理由を説明せよ．

２００６年８月実施
問題４ 情報基礎２
（２頁目／２頁中）

The recursive algorithm below is known as the *merge sort* which, for a given array A as the input, computes A' consisting of the elements of A in increasing order. Answer the following questions. For a real number x, $\lceil x \rceil$ denotes the minimum integer m satisfying $m \geq x$.

Step 1. Let n be the number of elements in A.
If $n \leq 1$, then let $A' = A$ and terminate.

Step 2. If $n \geq 2$, then let $k = \lceil n/2 \rceil$.

Step 3. Let B be the head part $A[1..k]$ of A with k elements,
and let C be the remainder $A[k+1..n]$.
Recursively apply the merge sort to B and C,
and get the sorted arrays B' and C', respectively.

Step 4. Compute the sorted array A' in increasing order by *merging* B' and C'.

(1) Describe a merge procedure in Step 4 and show its running time is $O(n)$.

(2) Sketch the behavior of the merge sort algorithm when the input is
$A = [8, 10, 2, 15, 6, 1, 9, 7, 4, 11, 5]$.

(3) Show that the running time of the merge sort algorithm is $O(n \log n)$.

(4) Modify Step 2 to "If $n \geq 2$, then let $k = 1$."
Show the order of the running time of the modified algorithm in terms of n, and explain the reason.

(5) Modify Step 2 to "If $n \geq 2$, then let $k = \lceil n/3 \rceil$."
Show the order of the running time of the modified algorithm in terms of n, and explain the reason.

２００６年８月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／２頁中）

Fig.5 に示すように，半径 R，質量 M のヨーヨーが床の上に静止しており，その重心が $x = 0$ の位置にある．ヨーヨーの軸（半径 r）には，重さのない柔らかな糸が巻きつけてある．時刻 $t = 0$ にこの糸を一定の力 $\boldsymbol{F}$ で水平に引き始めると，ヨーヨーは時計方向に回転し，$x > 0$ の方向に進んだ．以下の問いに答えよ．ただし，床とヨーヨーとの摩擦は非常に大きく，滑らないものとする．またヨーヨーの二枚の円板は同一で均一な材質の剛体であるとし，円板間の間隔は無視できるものとする．

(1) このヨーヨーの中心軸の周りの慣性モーメントは $MR^2/2$ で与えられることを示せ．

(2) 時刻 $t = T$ におけるヨーヨーの重心の x 軸方向の速さ v と中心軸の周りの角速度の大きさ ω を求めよ．

(3) 時刻 $t = T$ における回転運動の運動エネルギーと並進運動の運動エネルギーをそれぞれ求めよ．

(4) 問(3)で求めた両エネルギーの和が，$t = 0 \sim T$ の間に力 $\boldsymbol{F}$ のした仕事に等しく，エネルギー保存則が成り立っていることを証明せよ．

As shown in Fig.5, a yo-yo with radius R and mass M sits on a floor and the position of the center of mass is at $x = 0$. A weightless flexible string is wrapped around the axis (radius r). When a constant force $\boldsymbol{F}$ is applied to the string at $t = 0$ along the horizontal direction, the yo-yo starts to rotate clockwise and moves in the direction of $x > 0$. Answer the following questions. Assume that the friction between the yo-yo and the floor is sufficiently large that the yo-yo rolls without slipping on the floor. The two disks of the yo-yo are identical and are homogeneous rigid bodies. The gap between them is negligibly small.

(1) Show that the moment of inertia of the yo-yo about its axis is given by $MR^2/2$.

(2) Calculate the velocity v of the center of mass along the x direction and the magnitude of the angular velocity ω along the axis of rotation, both at $t = T$.

(3) Calculate the kinetic energy of rotational motion and the kinetic energy of translational motion at $t = T$.

(4) Show that the energy conservation law is satisfied by proving that the work done by $\boldsymbol{F}$ from $t = 0$ to $t = T$ is equal to the sum of the kinetic energies obtained in question (3).

２００６年８月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／２頁中）

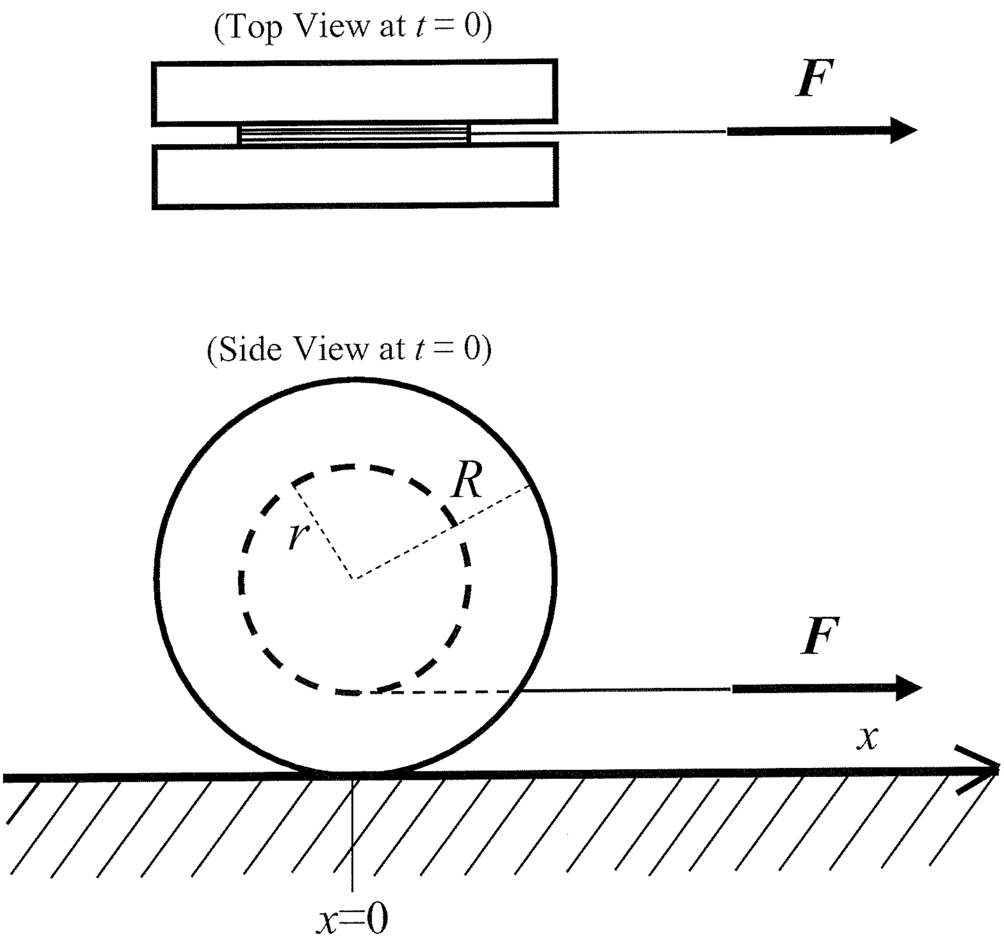

Fig.5

２００６年８月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ が循環正方行列であるとは, 各行ベクトルがその上の行を一つ右に循環シフトしたベクトルであることを言う. すなわち, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $a_{i+1,j+1} = a_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ かつ $a_{i+1,1} = a_{i,n}$ が成立することである.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C(z) = \begin{pmatrix} 1/2 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & z \\ z & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ４次の循環正方行列である. また, 複素数 ρ に対して n 次元ベクトル $\mathbf{v}(\rho) = {}^t(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})$ を定義する. ここで ${}^t\mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{b}$ の転置ベクトルである. 下記の問に答えよ.

(1) ρ が方程式 $x^n = 1$ の根であるとき, $\mathbf{v}(\rho)$ は任意の n 次循環正方行列の固有ベクトルになる. この事実を行列 $C(z)$ に対して示せ.

(2) $n = 4$ とする. ４次元ベクトル $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(-1)$, $\mathbf{v}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{v}(-\sqrt{-1})$ が１次独立であることを示せ.

(3) 行列 B の全ての固有値及び行列式を求めよ. 問 (1), 問 (2) に提示した事実を証明なしに用いてよい.

(4) 極限 $\lim_{k\to\infty} C(z)^k$ が存在するような複素数 z の絶対値 $|z|$ の範囲を求めよ.

２００６年８月実施
問題６　物理基礎２
（２頁目／２頁中）

An n-dimensional square matrix $A = (a_{i,j})$ is a *circulant square matrix* if each row vector is obtained as the cyclic shift of the previous row by one entry to the right: That is, $a_{i+1,j+1} = a_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ and $a_{i+1,1} = a_{i,n}$ for $i = 1, 2, \ldots, n-1$. The matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C(z) = \begin{pmatrix} 1/2 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & z \\ z & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

are four-dimensional circulant square matrices. We also define the n-dimensional vector $\mathbf{v}(\rho) = {}^t(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})$ for a complex number ρ. Here, ${}^t\mathbf{b}$ is the transposed vector of a vector $\mathbf{b}$. Answer the following questions.

(1) The vector $\mathbf{v}(\rho)$ becomes an eigenvector of any n-dimensional circulant square matrix if ρ is a root of the equation $x^n = 1$. Verify this fact for the matrix $C(z)$.

(2) Let $n = 4$. Show that four-dimensional vectors $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(-1)$, $\mathbf{v}(\sqrt{-1})$, and $\mathbf{v}(-\sqrt{-1})$ are linearly independent.

(3) Find all eigenvalues and the determinant of the matrix B. You can use the facts given in questions (1) and (2) without proofs.

(4) Find the range of the absolute value $|z|$ of a complex number z such that the limit $\lim_{k\to\infty} C(z)^k$ exists.