平成１６年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
第２次募集入学試験問題

専　　　門

平成１６年2月１２日（木）
１２：３０～１５：３０

注意事項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。
2. 試験終了まで退出できない。
3. 問題冊子、解答用紙４枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。
4. 問題は、問題１から問題１０まで１０問ある。このうち<u>４問を選択して</u>解答せよ。１問につき１枚の解答用紙を使用し、選択した問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。
5. 解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。
6. 解答用紙は試験終了後に４枚とも提出せよ。
7. 問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題1.

(1) $x \geqq 0$ のとき，$\log(1+x) \leqq x$ を示せ.

(2) 正の数列 $\{a_n\}$ に対して，$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ が $n \to \infty$ のとき収束するための必要十分条件が，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束であることを示せ.

問題2. $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$ とする.

(1) W の正規直交基底を一組求めよ.

(2) $(0, 3, 1, 3)$ から W への距離を求めよ.

問題3. $x^3 + y^3 = 6xy$ によって定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ.

問題4. $\mathbb{N}$ を自然数の集合、$P(\mathbb{N})$ を $\mathbb{N}$ の部分集合の集合とする. $\{f | f$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数$\}$ と $P(\mathbb{N})$ は同じ濃度をもつことを示せ。

問題5. $x(t)$ に関する微分方程式の固有値問題

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0 \quad (0 < t < 1), \qquad x(0) = x'(1) = 0$$

を考える.

(1) $\lambda \leq 0$ のとき，固有関数はどうなるか答えよ.

(2) $\lambda > 0$ のとき，固有値・固有関数を求めよ.

(3) 上の (2) で求められた固有関数系の直交性を述べよ.

問題6. X を標準正規分布に従う確率変数，つまり，$a \leqq X \leqq b$ の確率が，

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

によって与えられるとする.

(1) X^2 の平均が 1 であることを示せ.

(2) X^2 の確率密度関数を求めよ.

問題７．情報システムの歴史的発展過程で，MIS と SIS と呼ばれる概念が提唱された．それぞれについて，以下の内容を含めて説明せよ．

・正しい名称の英文名と和文名は何か．

・広く知られるようになったおおよその年代はいつか．

・システムの主たる目的は何か，その利用主体は誰か．

・システムのもつ主要な特徴は何か．２つ以上，挙げよ．

・結果として成功したか，あるいは失敗したか．成功のばあいはその概要がわかる成功事例を２件，挙げよ．逆に，失敗のばあいは，その主要な理由を２件，挙げよ．

問題８．以下のアルゴリズムで，無向グラフ $G = (V, E)$ は隣接リスト表現で与えられるものとする．

(1) 与えられた G が連結であるか否かを判定する線形時間アルゴリズムを述べよ．(注：プログラムではなく、読んで解りやすいアルゴリズムを記述すること)

(2) グラフ G において，路 p に含まれる辺の本数を p **の長さ**，2頂点 $u, v \in V$ を結ぶ路のなかで最短なものの長さを u, v **間の距離**と定義する．G と2頂点 $u, v \in V$ が与えられたとき，u, v 間の距離を計算する線形時間アルゴリズムを述べよ．(1. の注に同じ)

(3) グラフ G の頂点集合 V を二つの集合 V_1, V_2 に分割して，G のどの辺も一方の端点は V_1 に，他方の端点は V_2 に属するようにできるとき，G を**２部グラフ**という．

　(a) G が２部グラフであれば，G 内のどの閉路も偶数長であることを示せ．

　(b) G 内のどの閉路も偶数長であるならば，G は２部グラフであることを示せ．

問題９．以下の問いに答えよ．なお，商 (quotient) と剰余 (remainder) を求める演算をそれぞれ div と mod と記し，最大公約数 (greatest common divisor) をもとめる演算を gcd で記す．

(1) 自然数 a と b から定まる数列 r_i を次のように与える．

$$\begin{cases} r_0 &= a \\ r_1 &= b \\ r_{i+2} &= \begin{cases} r_i \bmod r_{i+1} & (r_{i+1} \neq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (r_{i+1} = 0 \text{ の場合}) \end{cases} \end{cases}$$

また，N を $r_{N+1} = 0$ となる最小の自然数とする．(mod の定義より $r_{i+1} \neq 0$ のときはいつでも $r_{i+1} > r_{i+2}$ となることから，この整数 N の存在は保証されている．

このとき，自然数のの集合 A_i を以下で定義すると，任意の i $(< N)$ に対し，$A_i = A_{i+1}$ が成立することを証明せよ．

$$A_i = \{d \mid d \text{ は } r_i \text{ と } r_{i+1} \text{ の公約数 (common divisor)}\}$$

(2) 数列 r_i を用いて，数列 q_i, x_i, y_i を次のように与える．このとき，任意の i $(\leq N)$ に対し，$ax_i + by_i = r_i$ が成立することを i に関する帰納法で証明せよ．

$$q_i = \begin{cases} r_i \operatorname{div} r_{i+1} & (i < N \text{ の場合}) \\ 0 & (i \geq N \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_{i+2} &= x_{i+1} - q_i x_i \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 &= 0 \\ y_1 &= 1 \\ y_{i+2} &= y_{i+1} - q_i y_i \end{cases}$$

(3) (1) の結果を用いて，任意の i $(< N)$ に対し，$\gcd(r_i, r_{i+1}) = \gcd(r_{i+1}, r_{i+2})$ となることを示すことによって，次の関係が成立することを導け．

$$ax_N + by_N = \gcd(a, b)$$

問題10. L_{eq} を、同数の a と b を持つ文字列からなる $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語とする。このとき，以下の問いに答えよ.

(1) L_{eq} が正規言語 (Regular Language) でないことを以下の反復補題 (Pumping Lemma) を用いて証明せよ.

> L を正規言語とするとき、以下の性質を満たす定数 n が存在する.
>
> $$\forall w \in L \left(|w| \geq n \implies \exists x, y, z \left(\begin{array}{l} w = xyz \\ \wedge\ y \neq \varepsilon \\ \wedge\ |xy| \leq n \\ \wedge\ \forall k \geq 0\ (xy^k z \in L) \end{array} \right) \right)$$

(2) L_{eq} を生成する文脈自由文法 (Context Free Grammar) を与えよ.

(3) L_{eq} を受理するプッシュダウンオートマトン (Pushdown Automata) を設計せよ.