北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2021 年 8 月 19 日(木) 13:00～15:00

専門科目 2

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと．
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計（計時機能のみのもの）以外の所持品は置くことができない．ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない．
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと．
- 問題冊子は本表紙を含め７枚ある（２枚目は白紙）．試験開始後，問題冊子を確認し，不備（ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など）があれば試験監督員に申し出ること．試験終了後，問題冊子は回収しない．
- 解答用紙の枚数は２枚である．出題された４問から２問を選択して，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること．
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「□裏面を使用」をチェックのこと．
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること．受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと．
- 草案紙の枚数は２枚である．草案紙は回収しない．

（白　紙）

システム情報科学コース　専門科目 2

問 1（力学）

以下の各設問に答えなさい．いずれも，水平にx軸，鉛直上向きにy軸をとり，運動は$x-y$平面内に限られる．鉛直下向きにはたらく重力加速度の大きさを $g\,(>0)$ とし，空気抵抗は無視できるものとする．

1–1) 図 1-1 のように，原点 O を通り$x-y$平面に垂直な回転軸をもつ均一な密度の円板（質量 M，半径 a）に糸がかけられている．糸の一端は地面に固定されたy方向に伸縮するバネ（バネ定数 k）の上端に固定され，もう一端にはおもり（質量 m）がつるしてある．おもりの重力とバネの復元力がつり合う位置を $y=y_0$とする．糸と円板は滑らず，糸とバネの質量は無視できるものとする．次の小問に答えなさい．

(a) 回転軸周りの円板の慣性モーメントIを求めなさい．

(b) バネが自然長で，糸がたるまないように，おもりに手を添えた．ゆっくり手を放したところ，糸はたるまずに，おもりはy方向のみに振動した．おもりの位置をy，速度を$\dot{y}$，加速度を$\ddot{y}$として，バネと円板との間の張力 T_1 とおもりと円板との間の張力 T_2 を求めなさい．

(c) (b)のおもりの振動の運動方程式を立て，その角振動数を求めなさい．

1–2) 図 1-2(a)のように，原点 O を通り$x-y$平面に垂直な回転軸を上端に持つ平板が y 軸下向きに固定されている．これに密度が均一なロープ（長さ l，質量 m）を左右に振り分けてかける．ロープは太さを無視でき，抵抗なく曲げることができ，その両端を P，Q とする．ロープと平板との摩擦，平板の厚さ，回転軸の直径は無視できるものとして，次の小問に答えなさい．

(a) 図 1-2(a) のように，ロープの O-P の長さを $a\ (a>l/2)$ として，静止させた後，静かに手を離したところ，ロープが y方向に動き始めた．端点 Q が原点を通る時のロープの速さ v_a を求めなさい．ただし，ロープは原点だけで曲がり，ほかは y 方向を向くものとする．

(b) 平板を時計回りに 90° 回転させて，図 1-2(b)のように水平に固定した．ロープの O-P の長さを $a\ (a>l/2)$ として，静止させた後，静かに手を離したところ，ロープのつるされている部分が y 方向に動き始めた．端点 Q が原点を通る時のロープの速さ v_b を求めなさい．ただし，ロープは原点のみで曲がり，つるされている部分は y 方向を向き，平板の上のロープは浮かないものとする．

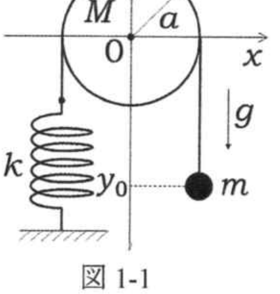


図 1-1

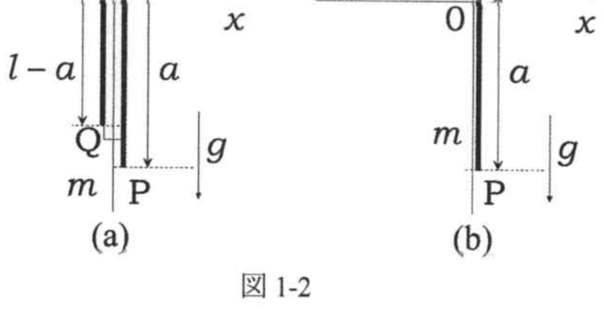


図 1-2

問 1 終わり

システム情報科学コース 専門科目2

問2 (電気回路) 以下の各設問に答えなさい．ただし，j は虚数単位，ω は角周波数，太文字は複素変数を表わす．

2-1) LCR 直列共振回路について，以下の小問に答えなさい．ここで，各回路素子の定数は L，C，R としなさい．

(a) LCR 直列共振回路の複素インピーダンス $\boldsymbol{Z}$ を示し，実効値 V の交流電圧を印加したときに流れる複素電流 $\boldsymbol{I} = Ie^{j\varphi}$ の実効値 I と位相角 φ を求めなさい．

(b) 電流の実効値 I が最大となる角周波数 ω_0 とその最大値 $I_{\max}$ を求めなさい．

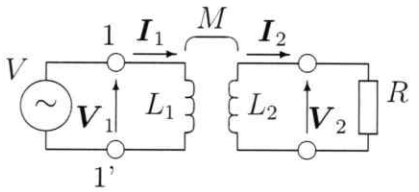
(c) 角周波数を小問 (b) で求めた ω_0 から増加し ω_1 となったとき，電流の実効値が $I_{\max}/\sqrt{2}$ となった．このときの条件式を，ω_0，ω_1，Q のみを用いて表しなさい．ここで，Q は次式のように表される．

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

(d) 小問 (c) の条件式から，ω_1 を求めなさい．ここで，$Q^2 \gg 1$ の条件を満足していると仮定して，近似計算しなさい．

(e) 角周波数を ω_0 から減少して実効値電流が $I_{\max}/\sqrt{2}$ となる角周波数 ω_2 も同様に求め，ω_0 に対する ω_1，ω_2 の差の比率 $(\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$ を求めなさい．

2-2) 図 2.1 で示す変圧器について，以下の小問に答えなさい．ここで，$L_1 L_2 = M^2$ としなさい．



$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1 = j\omega L_1 \boldsymbol{I}_1 - j\omega M \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{V}_2 = j\omega M \boldsymbol{I}_1 - j\omega L_2 \boldsymbol{I}_2 \end{cases}$$

図 2.1 変圧器

(a) 一次巻線端子 1-1' から見た変圧器側のアドミタンス $\boldsymbol{Y}$ を求めなさい．

(b) 小問 (a) のアドミタンスの実部と虚部の結果から，端子 1-1' から右側の等価回路を描きなさい．

(c) 一次側から実効値 V の交流電圧を印加した場合に負荷抵抗 R で消費される電力 P を求めなさい．

2-3) 交流電気回路網の 2 端子間において，開放電圧が実効値 V_0 の交流電圧で，内部インピーダンスが $\boldsymbol{Z}_0 = R_0 + jX_0$ であった．以下の小問に答えなさい．

(a) 端子にインピーダンスが $\boldsymbol{Z} = R + jX$ の負荷を接続した．この負荷に流れる複素電流 $\boldsymbol{I}$ とその実効値 I を求めなさい．

(b) インピーダンス $\boldsymbol{Z}$ で消費する電力 P を求めるとともに，P が最大となる $\boldsymbol{Z}$ の条件を示しなさい．

問2終わり

システム情報科学コース 専門科目 2

問 3（電磁気学） 以下の各設問に答えなさい．ただしすべての設問において，媒質を真空とし，誘電率をε_0 [F/m]，透磁率をμ_0 [H/m]とする．

3-1) 図 3-1 のように半径 a[m], b[m] の 2 つの導体球面を考える($0 < a < b$)．半径 b の導体に電荷Q_0 [C]を与え，半径 a の導体を接地した．このとき半径 aの導体球面に誘導される電荷 Q [C]を求めなさい．

3-2) 図 3-2 のように半径a [m]，単位長当り N 巻きの無限長円形断面コイルと，半径b [m]の円形の閉曲線 c がある($0 < a < b$)．コイルと閉曲線 c の中心軸は共通である．コイルに振幅 I_0 [A]，角周波数ω [rad/s]の交流電流を流した．このとき，閉曲線 c の起電力 u [V]を求めなさい．

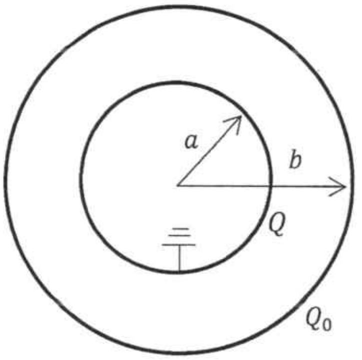


図 3-1

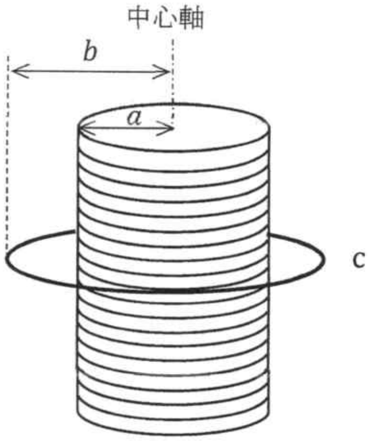


図 3-2

次ページに続く

3-3) 真空中の電磁界に対するマクスウェル方程式(複素振幅表示)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{3a}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{3b}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{3c}$$

$$\mathrm{div}(\mu_0\boldsymbol{H}) = 0 \tag{3d}$$

を考える．ただし j, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, ω はそれぞれ虚数単位，磁界[A/m]，電界[V/m]，角周波数[rad/s]を表す．このとき次の各小問に答えなさい．必要ならスカラー関数 f，ベクトル関数 $\boldsymbol{u}$ に関するつぎの公式を用いてよい．

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) - \nabla^2\boldsymbol{u} \tag{3e}$$

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}f \cdot \boldsymbol{u} + f\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \tag{3f}$$

$$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}f \times \boldsymbol{u} + f\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \tag{3g}$$

(a) (3a)-(3d)から(3h)の形の方程式が導けることを示しなさい．また定数 k の物理的意味を述べなさい．

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + k^2\boldsymbol{E} = 0 \tag{3h}$$

(b) 以下，電界として(3i)を仮定する．このとき電界は(3h)を満たすことを示しなさい．ただし $\boldsymbol{E}_0$は定ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル，$\boldsymbol{k}$ は$|\boldsymbol{k}| = k$ を満たすベクトルである．

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{3i}$$

(c) (3c), (3i)より $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直であることを示しなさい．

(d) (3b),(3i)より(3j)の形の式が得られることを示しなさい．また定数Z の物理的意味を述べなさい．ただし $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$.

$$\boldsymbol{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}}{Z} \tag{3j}$$

問 3 終わり

システム情報科学コース 専門科目 2

問 4 (線形制御理論)

以下の各設問に答えなさい．ここで，$\dot{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ の時間微分を表すものとする．

4-1) 伝達関数 $G_1(s) = \dfrac{as+1}{s^2+s+1}$ に入力 $\cos(t)$ を加えた．ここで，a はある実定数である．十分時間が経過した後の出力は，入力に対し 45° 位相が遅れ，振幅は A となった．a と A の値を求めなさい．

4-2) 図 4.1 の制御系を考える．ここで，$r(t)$ は参照入力，$e(t)$ は追従誤差，$u(t)$ は $G_p(s)$ への入力，$y(t)$ は $G_p(s)$ の出力であり，それぞれスカラー値である．制御対象 $G_p(s)$ の状態空間表現は，

$$\text{状態方程式:}\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}_p u(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} u(t)$$

$$\text{出力方程式:}\quad y(t) = \boldsymbol{c}_p\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} q & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

で表されるとする．ここで，$\boldsymbol{x}(t)\,(\in \mathbb{R}^2)$ は $G_p(s)$ の状態，p, q はある実定数である．また，フィードフォワード制御器 $G_f(s)$ はある安定な伝達関数であり，前置補償器 $G_c(s)$ を $G_c(s) = \dfrac{k_1 s+1}{s}$ の形で設計するものとする．ただし，k_1 はある実定数である．次の各小問に答えなさい．

(a) 制御対象 $G_p(s)$ の状態空間表現が，可制御かつ可観測となるような p, q の条件を求めなさい．

(b) この小問以降，$p = 0, q = 4$ と仮定する．制御対象 $G_p(s)$ の伝達関数を求めなさい．

(c) $G_f(s) = 0$ としたときに，閉ループ系が安定となる k_1 の値の範囲を求めなさい．

(d) $G_f(s) = 0, k_1 = 2$ としたとき，参照入力 $r(t) = 1\ (t > 0)$ に対し，定常誤差 $\lim_{t\to\infty} e(t)$ を求めなさい．

(e) $G_f(s) = \dfrac{-5(k_2 s + k_3)}{17(s^2+s+1)}, k_1 = 2$ とする．参照入力 $r(t) = \cos(t)$ に対し，$e(t) \to 0\ (t \to \infty)$ となる実定数 k_2, k_3 を求めなさい．

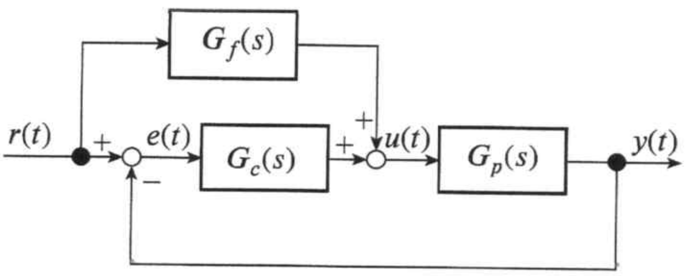


図 4.1

4-3) システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$ に対し，評価規範 $J = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + u^2\,dt$ を考える．ただし，$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ である．代数 Riccati 方程式の正定対称解を用いて，この評価規範を最小とする最適レギュレータを求めなさい．

問 4 終わり