

平成11年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成10年8月26日(水) 9時30分～13時30分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用すること。
3. 問題は全部で8問ある。8問からから4問を選んで解答しなさい。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布してあるから、確実に配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに所定の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるから、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙に絶対使用しないこと。計算用紙は別に配布する。

問題 1

井戸型ポテンシャルの中に置かれた電子系の運動を考える。電子の運動は x 軸方向のみを考えればよく、それに直行する方向の運動は考えない。ポテンシャルは $-a < x < a$ (a は正の定数) では 0 で、 $x = -a$ および $x = +a$ に無限に高い壁をもつ。 i 番目 ($i = 1, 2, \dots$) の電子の座標を x_i とし、そのスピンを \vec{s}_i と表わす。またその電子のスピン波動関数については、上向きを $u_{\uparrow}(i)$ 、下向きを $u_{\downarrow}(i)$ とする。電子の質量を m とし、以下の設問に答えよ。

1. 1 個の電子をこの井戸型ポテンシャルの中に入れた時のエネルギー固有値を求めよ。ただし、下から n 番目 ($n = 1, 2, \dots$) のものを E_n とせよ。
2. 電子はフェルミ粒子である。この事実は、この井戸型ポテンシャル内に 2 個の電子を入れた時に、それらの波動関数にどのような条件を課すか、述べよ。
3. 2 個の電子をこの井戸型ポテンシャル内に入れたところ、最も低いエネルギー固有状態が実現された。この時の系のエネルギー固有値を求め、その状態での電子系の波動関数を、スピン部分まで含めて示せ。さらに、電子の合成スピン演算子

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

に対して、この状態での $(\vec{S} \cdot \vec{S})$ の期待値を求めよ。以後、 (\cdot) は内積を表わす。

4. 設問 3 と同じ場合で、2 番目に低いエネルギー固有状態が実現されていたとする。このエネルギー固有値に属する系の固有状態には、どのようなものがあり得るか。スピン部分まで含め、それらの波動関数を示せ。
5. ここで電子間に

$$V = f \times (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) \times \delta(x_1 - x_2)$$

という相互作用が働くとする。ただし f は結合定数で、十分に小さい正の値をとるものとし、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数を表わす。この相互作用が加わったとき、設問 3 で求めた状態のエネルギー固有値の変化を計算せよ。

6. 設問 5 の相互作用 V が働いたとき、設問 3 の状態と、設問 4 で考えた状態 (複数でもいい) は、どのように混ざるか答えよ。

問題 2

一様な磁場の中に置かれた強磁性体の、次のような模型を考える。3次元立方格子の各格子点 i に磁気モーメント σ_i が存在し、その磁場方向の成分は、 $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$ の離散的な値をとる。隣り合う格子点 i, j の磁気モーメントは、相互作用のエネルギー $-J\sigma_i\sigma_j$ (J は正の定数) を持つ。磁場を h とするとき、系のハミルトニアンは、

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで和 (i, j) は最近接の格子点の間のみをとるものとし、3次元立方格子のサイズは十分に大きいものとする。

1. 系の温度を T として、以下の問に答えよ。

- (a) $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、系の磁気モーメントの配位の様子を述べよ。
- (b) 同じく $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、1格子点あたりのエントロピーを求めよ。
- (c) (a) の結果を、自由エネルギー $F(T)$ の振る舞いにより説明せよ。

2. 磁気モーメントの熱力学的平均を近似的に求める（厳密解は求められていない）。そのため、原点の磁気モーメント σ_0 とその最近接格子点の磁気モーメントからなる部分系を考え、そのハミルトニアンを $H(\sigma_0)$ とする。

- (a) $H(\sigma_0)$ において、原点以外の格子点の磁気モーメントを近似的に定数 m で置き換える。このとき、 $H(\sigma_0)$ によって決まる、磁気モーメントの熱力学的平均 $\langle \sigma_0 \rangle$ を求めよ。
- (b) $\langle \sigma_0 \rangle$ を m に等しいと置く事により、 m の満たす方程式を求めよ。
- (c) 磁場が0（すなわち $h = 0$ ）のとき、 m を温度 T の関数として定性的にグラフに描け。ここで設問 1 (a) の結果を考慮すること。
- (c) $m(T)$ が特異点となる温度 T_c を求めよ。

問題 3

Maxwell は、いくつかの実験事実から 4 つの方程式 (Maxwell 方程式)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots (1) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (3) \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots (4)$$

を与え、電磁気学を完成させた。ただし、 \vec{E} は 電場、 \vec{B} は 磁束密度、 ρ は 電荷密度、 \vec{j} は 電流密度、 ϵ_0 は 真空の誘電率、 μ_0 は 真空の透磁率で、以下では真空中の電磁場のみを考える。

1. 式 (1) は Gauss の法則を表す。

(a) 閉じた中空の導体があると、導体の外部にある電荷が作る電場は、導体に囲まれた中空の空間には侵入できない。このことを、式 (1) を用いて証明せよ。ただし中空の空間には、もともと電荷は存在しなかったものとする。

(b) R_1 および R_2 ($R_1 > R_2$) の半径をもつ 2 個の同心の中空導体球を用いて、Gauss の法則を実験的に検証したい。原理的にどのような手順で何を測定すれば良いか、答えよ。

2. Maxwell 方程式から電磁波の存在が予言される。

(a) 電荷の保存則を用いて、Ampère の法則、すなわち、「ある閉曲線が囲む定常電流 I によって生じる磁場 \vec{B}/μ_0 をその閉曲線に沿って線積分すると、 I に等しい」を非定常電流の場合に一般化し、式 (4) を導け。

(b) ある瞬間に電流密度 \vec{j} が局所的に発生し、短時間で消滅したとする。その後の \vec{B} と \vec{E} はどのように変動するか。式 (3) と (4) を用いて、直観的に説明せよ。

(c) 電荷や電流の分布が無い場合、真空中を伝播する電磁波が存在することを導け。またその速度を、設問に与えられた量を用いて示せ。

3. 適当なスカラー場 (スカラーポテンシャル) ϕ とベクトル場 (ベクトルポテンシャル) \vec{A} を導入することにより、

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

と表わせることを示せ。

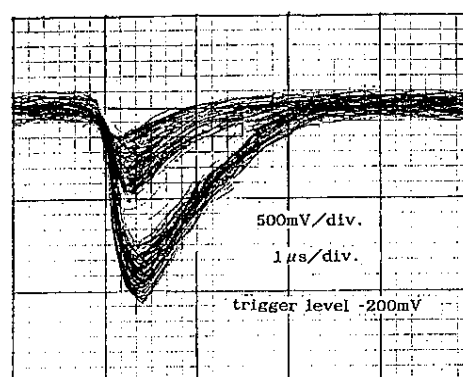
問題 4

電磁波は光速で伝わる波でありながら、粒子（光子）としても振る舞う。波長（またはエネルギー）帯によって、電磁波はいくつかの異なる名前と呼ばれ、またその検出法も異なる。

1. 下の表にある A、B、C それぞれの電磁波（光子）について、対応する波長、周波数、エネルギーなどを求め、空欄を埋めた表を解答用紙に記せ。ただしプランク定数は $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{sec}$ 、光速度は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。

	波長	周波数	エネルギー	名称
A		80 MHz		
B	500 nm			
C			100 keV	

2. 上の B 近辺の波長帯の光子を発生する現象を 1 つ挙げ、その基本過程を簡単に説明せよ。
3. 実験室に、C のエネルギーを持った光子をランダムに発生する微弱な源がある。この光子を検出し、そのエネルギーを精度よく測定したい。この実験の全体の構成と、その中心となる検出器の原理を、図を用いて説明せよ。
4. 上の実験あるいは他の精密測定を行なおうとしたところ、同じ建物のどこかから来る、A の近辺の周波数を持った電磁波が、どうやらノイズとなって精密な計測を困難にしているらしい。この電磁波の源をなるべく早くつきとめたい。物理系の実験室によくあるような装置、あるいは簡単に製作または借用できるような道具だてを使って、この電磁波の源がどこにあるか探し出すような方法を考案し、説明せよ。複数の方法が考えられれば、それらを説明せよ。
5. この源をつきとめたところ、それを停止または撤去することは不可能とわかった。この状況でなお、目的とする精密計測を実験室で行なうには、どのような対策を施せばよいか。具体的な方法と原理を説明せよ。
6. 設問 5 で施した対策が効き、この電磁波からのノイズは抑えられた。そこで設問 3 の実験を再開したが、まだエネルギーの精密測定が困難であった。検出器からの信号をオシロスコープで多数重ねて見たところ、図のスケッチのように見えた。本来どのように見えるべきか、解答用紙にスケッチを示せ。またこの問題を引き起こしている原因として、どのようなものが考えられ、どんな対策がありうるか、列挙せよ。



図：オシロスコープで見た信号波形。

問題5

- 金属の内部に電場 \vec{E} が存在すると、 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ に従う電流密度 \vec{j} が生じる。ここで σ は導電率である。しかし $\vec{E} = 0$ の場合にも、金属内部の温度 T に勾配 $\text{grad } T$ が存在すると電子は高温部から低温部へ流れ、そのとき生じる電流密度は、 $\vec{j}_{th} = \kappa \sigma \text{grad } T$ と表わされる。この電流は熱電流、係数 κ は熱電能と呼ばれる。 κ は金属の種類ごとに異なるが、近似的には温度によらない定数とみなせる。以下の設問に答えよ。
 - 1種類の金属導線の両端に温度差 ΔT を与えても、持続的な電流は流れず、その代わりにその両端に熱起電力と呼ばれる電位差 ΔV が発生する。このときの ΔV と ΔT の関係を求めよ。また、この熱起電力が発生する理由を、電子の挙動を念頭において定性的に説明せよ。
 - 種類の異なる金属 (M と N) の導線を用いて図1のような閉回路を作り、それらの金属の接合部 P_1 と P_2 に温度差を与えると、この閉回路には持続的な電流が発生する。その理由を定性的に説明せよ。
- 図1のような閉回路は、熱電対と呼ばれ、温度測定の子として広く使われている。この子を使った温度の測定法について、以下の設問に答えよ。
 - 図1の点Qに、図2で示す回路の端子Q1、Q2を挿入することで、 P_1 と P_2 の温度差を精度よく測定できる。ここで R は抵抗値の大きな標準抵抗、 V_R は可変抵抗、 E は電池、 G は検流計、 A は電流計である。いま、 P_1 を試料に接触させた状態で、 V_R を変化させて検流計を流れる電流をゼロに調整した。このとき電流計に流れる電流の値から、試料の温度と P_2 における温度との差が求められる。この測定法の原理と利点を述べよ。ただし、金属MとNの組み合わせに対して、熱起電力と温度差との関係は既知とせよ。
 - いま、以上の方法で試料の絶対温度を求めたい。どうすればよいか、要点を概念図に基づいて説明せよ。
 - こうして測定した試料の温度の正しさを左右すると考えられる要因を列挙せよ。

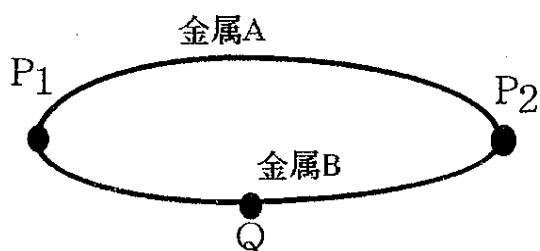


図1：熱電対の概念図。

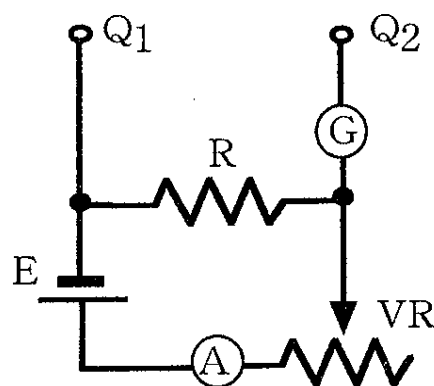


図2：熱起電力の測定系の回路図。

問題 6

真空中では点電荷の間の静電相互作用はクーロンの法則に従うので、互いに 3\AA 離れた一価の電荷の間には、約 460 kJ/mol ($= 110\text{ kcal/mol}$) もの静電エネルギーが働く。しかし核酸や蛋白質などの生体分子は水中に存在するので、() のために、静電エネルギーは真空中の約 $1/80$ に減少する。また生理的条件の下では、水中に多くの電解質イオンが存在するため、静電ポテンシャルはこれらのイオンの遮蔽効果により、さらに減少する。Debye-Hückel の理論によれば、このようなイオンの遮蔽効果を考慮したとき、位置 r における静電ポテンシャル $\phi(r)$ は

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon} \sum_i n_i Z_i q \cdot \exp \left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT} \right] \quad (1)$$

で与えられる。ここに和は異なるイオン種についてとるものとし、 ϵ は電解質溶液の誘電率、 q は素電荷、 k は Boltzmann 定数、 T は絶対温度、そして n_i と Z_i はそれぞれ第 i 種イオンの濃度 (数密度) と電荷数 (イオン価) を表わす。以下の問いに答えよ。

1. 上の () の中を埋めよ。
2. 上の式 (1) は、Poisson-Boltzmann の方程式と呼ばれる。この式はどのようにして導かれるかを説明せよ。
3. 静電エネルギーが熱エネルギーよりも十分に小さいときは、式 (1) は線形微分方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = \kappa^2 \phi(r) \quad (2)$$

で表わされることを示せ。ただし $\kappa^2 \equiv (q^2/\epsilon kT) \sum_i n_i Z_i^2$ とする。

4. 原点に電荷数 Z_0 の中心イオンを置き、他のイオンはその周りに球対称に分布していると仮定したとき、式 (2) の解を求めよ。またイオン濃度をゼロに近づけたとき、その解はどのようなになるか。ただし、各イオンの大きさは無視できるほど小さいとする。
5. 設問 4 で、イオン濃度がゼロのときの静電ポテンシャルを $\phi_0(r)$ とする。 $\phi(r)$ が $\phi_0(r)$ の $1/e$ ($e=2.7183\dots$) となるときの r を、Debye 長 (またはイオン雰囲気の高さ) という。温度が 25°C で、イオン強度 ($= \frac{1}{2} \sum_i n_i Z_i^2$) が生理的条件下の値 $8.4 \times 10^{25}\text{ m}^{-3}$ ($= 0.14\text{ mol/liter}$) に等しい電解質の Debye 長を求めよ。ただし水溶液の誘電率を $\epsilon = 7.0 \times 10^{-10}\text{ F m}^{-1}$ とし、 $q = 1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$ および $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$ を用いてよい。
6. 二本の鎖よりなる DNA は、負に帯電したリン酸基をもち、リン酸基どうしの間隔は約 10 \AA である。これらの電荷が水溶液中のイオンにより遮蔽されることは、DNA の二重螺旋構造を安定化する上で重要である。いま DNA 水溶液中のイオン強度を生理的条件下の値よりさらに小さくしていったとき、DNA が熱融解する温度は、どのように変化すると期待されるか。理由を付して述べよ。
7. 簡単な Debye-Hückel の理論だけでは、核酸や蛋白質など生体分子のもつ立体構造の安定性を、定量的に説明できないことが知られている。これらの生体分子の立体構造安定性に大きく寄与している他の要因を二つ以上あげ、それらについて知るところを述べよ。

問題 7

高分子の稀薄溶液をごく少量だけ、試験管に入れた溶媒の上に静かに積層する。高分子は重力により試験管の底に向かって沈降を始めるが、十分に時間がたつと、試験管内の全体に一樣な濃度で分布するようになる。これは高分子が、熱運動する溶媒分子との衝突により、重力よりはるかに大きな揺動力を受けるためである。しかし、試験管を高速に回転するなどして、実効的に重力加速度の大きさを非常に大きくすると、高分子の濃度分布は一樣ではなくなり、試験管の上部では薄く、底部では濃くなる。この現象から、高分子の分子量を求めることができる。問題を簡単にするために、一定で強い実効重力加速度 g が鉛直下向きに働くとして、以下の設問に答えよ。ただし高分子は球形をもつとし、高分子の分子量を M 、アボガドロ数を N_A とする。

1. まず最初に、熱運動する溶媒分子との衝突により高分子が受ける揺動力を無視した場合を考える。
 - (a) 個々の高分子には、重力、浮力、およびストークスの法則による速度に比例した粘性抵抗力（比例定数 β ）が働く。1 個の高分子に対する運動方程式を求めよ。ただし、着目している高分子の液面からの距離を x （下向きを正とする）、比容（単位質量の物体が占める体積）を V 、溶媒の密度を ρ とする。また稀薄溶液であることから、着目している高分子が他の高分子から受ける浮力は無視できる。
 - (b) 粘性抵抗力が大きいために、高分子は一定の速度 s で試験管の底部に向かって沈降する。沈降速度 s を求めよ。
2. 次に、揺動力も考慮した場合を考える。この場合、高分子は重力により沈降すると同時に、揺動力により拡散する。拡散により単位時間に単位面積を法線方向に通過する高分子の数は、その方向の濃度勾配の大きさに比例する。その比例定数が高分子の拡散定数 D である。
 - (a) 液面から x の距離にある水平な単位面積を、試験管の上部から底部に向かって単位時間に通過する高分子の数 $j(x, t)$ を求めよ。ただし、 x の位置での高分子の濃度は $C(x, t)$ である。
 - (b) 高分子の濃度 $C(x, t)$ の時間変化とその流れ $j(x, t)$ との関係を求めよ。
 - (c) 設問 (a) と (b) の結果から、高分子の沈降現象を記述する方程式を求めよ。
 - (d)十分に時間が経つと、試験管内での高分子の濃度分布は時間に依存しない定常状態に達する。その理由を定性的に説明せよ。
 - (e) 定常状態に達したとき、 $x = x_1$ での濃度 C_1 と $x = x_2$ での濃度 C_2 の比 C_1/C_2 を測定すると、沈降速度と拡散定数の比 s/D が求められることを示せ。
 - (f) 拡散定数 D と粘性係数 β は、アインシュタインの関係式 $D = k_B T / \beta$ で結ばれている。ただし、 k_B はボルツマン定数、 T は溶液の温度である。 s/D から生体高分子の分子量 M が求められることを示せ。

問題 8

金属中の電子には、固体内をほぼ自由に動き回る価電子と、原子核近傍に局在する内殻電子がある。このうち価電子の状態を、自由電子模型により近似する。温度が十分低いとして、以下の問いに答えよ。

1. 価電子の状態を特徴づける物理量に、フェルミエネルギー ε_F がある。自由電子模型において、 ε_F がどのような物理的理由で決まるかを説明し、 ε_F と電子密度 n の関係式を導け。
2. ナトリウム (Na) の ε_F を eV 単位で概算せよ。ただし 1 価金属である Na (平均原子量 23) の比重は 0.97 であり、計算には以下の数値を用いても良い。

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ \AA}, \quad \frac{me^4}{\hbar^2} = 27.2 \text{ eV}.$$

ここで m 、 e はそれぞれ電子の質量と素電荷である。

適当な入射エネルギーで金属固体に打ち込まれた陽電子は、短時間に運動エネルギーを失って静止した後、電子と対消滅を起こす。このとき放出される 2 個の光子 (γ 線) の角度分布から、価電子の運動量分布についての情報が得られる。以下では、この陽電子消滅実験の原理について考えよう。

3. 陽電子が金属中で運動エネルギーを失う理由として、どのようなものが考えられるか。重要と思われる理由を 3 つあげよ。
4. 静止した陽電子が速さ v の電子と対消滅する場合、2 つの光子は重心系では正反対の方向に放出されるが、実験室系では 180 度から $\Delta\theta$ だけずれた方向に放出される。重心系で電子の初速度方向と光子 (光速を c とする) の放射方向のなす角を θ としたとき、 v 、 $\Delta\theta$ 、 θ の関係式を、 v/c ($\ll 1$) の 1 次の精度で求めよ。
5. $\Delta\theta$ を測定することによって、金属のフェルミエネルギーを知ることができる。その理由を説明せよ。
6. 実際の金属には内殻電子もあるが、金属中に陽電子を打ち込んでも、上の方法で内殻電子に関する情報を得ることは難しい。その理由を簡単に説明せよ。

問題 8 補足

上から10行目

「..... 電子の質量と素電荷
である。」

の後に

「また、アボガドロ数は
 $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ である。」
を補足する.