2007 年 2 月 27 日

9：30－11：30

大学院工学研究科　　電気・通信工学専攻

電子工学専攻

大学院情報科学研究科

情報・生命系群（物理・情報系）

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良いが，”裏面へ続く”と書くこと．問題は和文と英文を併記してある．

Attention: Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them on a separate answer sheet for each problem. If space of the sheet is shortened, use backside of the same sheet and note “continued to backside”. Problems are written both in Japanese and English.

2007年2月実施
問題1　電磁気学
(1頁目／2頁中)

Fig. 1のように，等方的な媒質中を伝搬する平面電磁波を考え，その電界を $\boldsymbol{E}$，電束密度を $\boldsymbol{D}$，磁界を $\boldsymbol{H}$，磁束密度を $\boldsymbol{B}$，伝導電流密度を $\boldsymbol{i}$，誘電率を ε，透磁率を μ，電荷の体積密度を ρ，波数ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 等方的な媒質中における Maxwell の方程式を微分形で記し，それぞれの式の物理的意味を簡単に説明せよ．

(2) 問(1)で記した方程式を基に次式を導け．ただし，必要なら公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Q})$ を用いよ．

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$$

(3) 問(2)で得た結果を閉曲面Sで囲まれた領域Vで積分することにより次式を導け．次に，エネルギー保存の観点から各項の意味を説明せよ．説明には Poynting ベクトルの定義を明記すること．

$$\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}+\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i})\,dV=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}]\,dV$$

Consider a plane electromagnetic wave in an isotropic medium shown in Fig. 1, where the electric field is $\boldsymbol{E}$, electric flux density is $\boldsymbol{D}$, magnetic field is $\boldsymbol{H}$, magnetic flux density is $\boldsymbol{B}$, current density is $\boldsymbol{i}$, permittivity is ε, permeability is μ, volume density of electric charge is ρ and wave vector is $\boldsymbol{k}$. Answer the following questions.

(1) Show the differential form of Maxwell's equations in an isotropic medium, and explain the physical meaning of each equation briefly.

(2) Derive the following equation using the equations from question (1). Use the formula $\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Q})$, if necessary.

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}$$

(3) Derive the following equation by integrating the equation obtained in question (2) over the volume V surrounded by closed curved surface S. Then explain the meaning of each term from the view point of energy conservation. Include the definition of the Poynting vector in the explanation.

$$\int_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}+\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i})\,dV=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}]\,dV$$

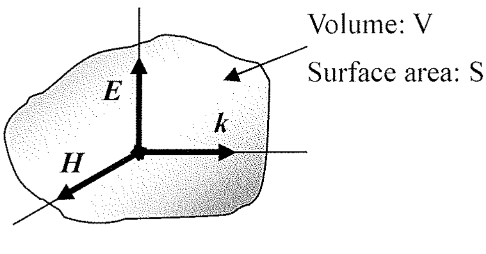

Fig. 1

2007年2月実施
問題2　電気回路
(1頁目／2頁中)

Fig. 2(a) および Fig. 2(b)は，いずれも角周波数ω，内部抵抗R_0の電圧源Eから負荷抵抗Rに給電する回路である．

(1) Fig. 2(a)の回路において，次の問に答えよ．

(a) 2-2'端から電圧源側を見たインピーダンスを求めよ．

(b) Rで消費される電力P_1が最大となるようにX_1, X_2の値を求め，P_1の最大値を求めよ．ただし$R > R_0$，$X_1 > 0$，$X_2 > 0$であるものとする．

(2) Fig. 2(b)の回路において，次の問に答えよ．ただし端子1-1'と2-2'の間に接続された分布定数線路の特性インピーダンスは電圧源の内部抵抗と同じR_0であり，位相定数がβ，長さがLの無損失線路であるものとする．

(a) 電流I_2ならびにRで消費される電力P_2を求めよ．

(b) P_2が最大となるRの値，およびP_2の最大値を求めよ．

Fig. 2(a) and Fig. 2(b) show power delivery circuits from a voltage source E with an internal resistance R_0 and an angular frequency ω to a load resistance R.

(1) Answer the following questions for the circuit shown in Fig. 2(a).

(a) Find the impedance of the circuit seen from the terminal 2-2' toward the voltage source.

(b) Find the value of X_1 and X_2 to maximize the power P_1 consumed in the resistance R and the maximum value of P_1 under the conditions of $R > R_0$, $X_1 > 0$, and $X_2 > 0$.

(2) Answer the following questions for the circuit shown in Fig. 2(b). In this circuit, the terminals 1-1' and 2-2' are connected by a lossless transmission line. The characteristic impedance of the line is R_0, which is the same value as the internal resistance of the voltage source. The phase constant and the length of the line are β and L, respectively.

(a) Find the current I_2 and the power P_2 consumed in the resistance R.

(b) Find the resistance value of R to maximize P_2 and the maximum value of P_2.

2007 年 2 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／2 頁中)

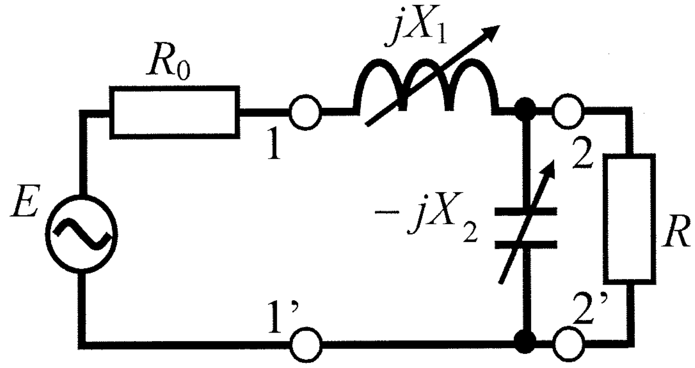

Fig. 2(a)

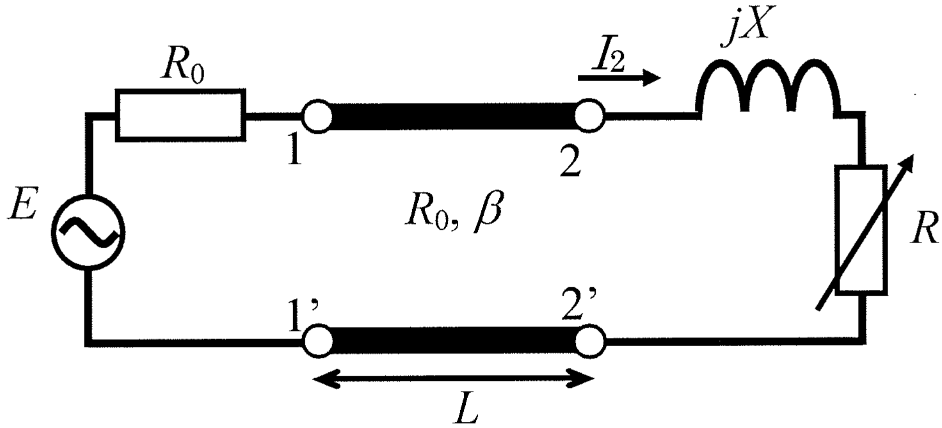

Fig. 2(b)

2007年2月実施
問題3　情報基礎1
（1頁目／1頁中）

4変数論理関数 $T_n(a,b,c,d)$ （nは正整数，$a,b,c,d \in \{0,1\}$）を以下のように定める．

$$T_n(a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & a,b,c,d\text{の値のうち1の個数が}n\text{未満} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

また，4変数論理関数 $R_n(a,b,c,d)$ を $R_n(a,b,c,d)=\overline{T_n(a,b,c,d)}$ と定義する．
ただし，$\overline{}$ はNOT（否定）演算を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $R_2(a,b,c,d)$ を変数 a,b,c,d に関する最簡積和形（最小論理和形）論理式で表せ．
(2) 任意の i について $f(\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots) \le f(\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots)$ であるとき，論理関数fは単調増加関数であるという．任意の正整数 n について，$T_n(a,b,c,d)$ が単調増加関数であることを示せ．
(3) ある n を一つ定めたとき，$T_n(a,b,c,d)$ のみを使って $R_n(a,b,c,d)$ を合成することは不可能であることを示せ．
(4) $R_1(a,b,c,d)$ のみを使って任意の論理関数が合成できることを示せ．

Let $T_n(a,b,c,d)$ (n: positive integer, $a,b,c,d \in \{0,1\}$) be a logic function such that

$$T_n(a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & \text{if the number of 1's among the values of } a,b,c \text{ and } d \text{ is less than } n \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and we define a 4-input logic function $R_n(a,b,c,d)$ as $R_n(a,b,c,d)=\overline{T_n(a,b,c,d)}$, where $\overline{}$ denotes the NOT operator. Answer the following questions.

(1) Determine the minimum sum-of-products expressions of $R_2(a,b,c,d)$ using variables a,b,c and d.
(2) A logic function f is called a monotonically increasing function if $f(\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots) \le f(\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots)$ for all i. Prove that $T_n(a,b,c,d)$ is a monotonically increasing function for any positive integer n.
(3) For a given value of n, prove that $R_n(a,b,c,d)$ cannot be composed using only $T_n(a,b,c,d)$.
(4) Prove that any logic function can be composed using only $R_1(a,b,c,d)$.

２００７年２月実施
問題４ 情報基礎２
(１頁目／１頁中)

N と d を正の整数とする．次のように定義される質問 $Q_d(q)$ を用いて，
未知の整数 x $(1 \leq x \leq N)$ を同定する問題を考える．

> 質問 $Q_d(q)$ は，引数として与えられた整数 q に対し，
> $x \leq q \leq x + d$ のときは **true** を返し，それ以外のときは **false** を返す．

次のそれぞれの場合において，できるだけ少ない回数の質問によって x を正しく同定できるアルゴリズムを示し，質問の回数の最大値のオーダーを N で表せ．
なお，実数 r に対して $\lceil r \rceil$ は r を下回らない最小の整数を表す．例えば $\lceil 3.14 \rceil = 4$ である．

(1) $d = 0$.

(2) $d = N$.

(3) $d = \left\lceil \sqrt{N} \right\rceil$.

Let N and d be positive integers. We consider a problem to identify an unknown integer x $(1 \leq x \leq N)$ via query $Q_d(q)$ defined as follows.

> For any integer q given as an input, the query $Q_d(q)$ returns **true** if $x \leq q \leq x + d$, and returns **false** otherwise.

For each case below, describe an algorithm that identifies x exactly in as few queries as possible, and express the order of the maximum number of queries in terms of N.
For any real number r, let $\lceil r \rceil$ denote the smallest integer greater than or equal to r.
For example, $\lceil 3.14 \rceil = 4$.

(1) $d = 0$.

(2) $d = N$.

(3) $d = \left\lceil \sqrt{N} \right\rceil$.

2007 年 2 月実施
問題 5　物理基礎 1
(1 頁目／2 頁中)

Fig.5 に示すように，質量 m の粒子 1 が同じ質量 m を持つ粒子 2 に弾性衝突（運動エネルギーが保存）する．実験室系と呼ばれる慣性系において，衝突前の粒子 1 の速度は $\boldsymbol{v}_1$ であり，粒子 2 は静止（$\boldsymbol{v}_2=0$）しているものとする．衝突後，粒子 2 は $\boldsymbol{v}_1$ に対して $0 < \phi < \pi/2$ の角度をなす速度 $\boldsymbol{u}_2$ を持つ．衝突後の粒子 1 の速度は $\boldsymbol{u}_1$ である．

(1) $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の大きさを求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{u}_1$ のなす角を求めよ．

(3) 重心系においては，２体系の全運動量はゼロである．衝突前後の重心系における粒子 1 の速度を $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{u}'_1$ 粒子 2 の速度を $\boldsymbol{v}'_2$, $\boldsymbol{u}'_2$ とする． $\boldsymbol{v}'_1$ と $\boldsymbol{u}'_1$ のなす角度 θ' を求めよ．$\boldsymbol{u}'_1$ と $\boldsymbol{u}'_2$ を求めよ．

As shown in Fig.5, particle 1 with mass m makes an elastic (kinetic-energy conserving) collision with particle 2 with the same mass m. Before the collision, particle 1 has a velocity $\boldsymbol{v}_1$ and particle 2 is at rest ($\boldsymbol{v}_2=0$) relative to a certain inertial frame which we shall call the laboratory system. After the collision particle 2 has a velocity $\boldsymbol{u}_2$ making an angle $0 < \phi < \pi/2$ with $\boldsymbol{v}_1$. The velocity of particle 1 after the collision is $\boldsymbol{u}_1$.

(1) Find the magnitudes of $\boldsymbol{u}_1$ and $\boldsymbol{u}_2$.

(2) Find the angle between $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{u}_1$.

(3) In the center of mass system, the total momentum of the two-body system is zero. Let the velocities of particle 1 be $\boldsymbol{v}'_1$ and $\boldsymbol{u}'_1$ and those of particle 2 be $\boldsymbol{v}'_2$ and $\boldsymbol{u}'_2$ before and after the collision in the center of mass system. Find the scattering angle θ' between $\boldsymbol{v}'_1$ and $\boldsymbol{u}'_1$. Find $\boldsymbol{u}'_1$ and $\boldsymbol{u}'_2$.

2007年2月実施
問題5　物理基礎1
(2頁目／2頁中)

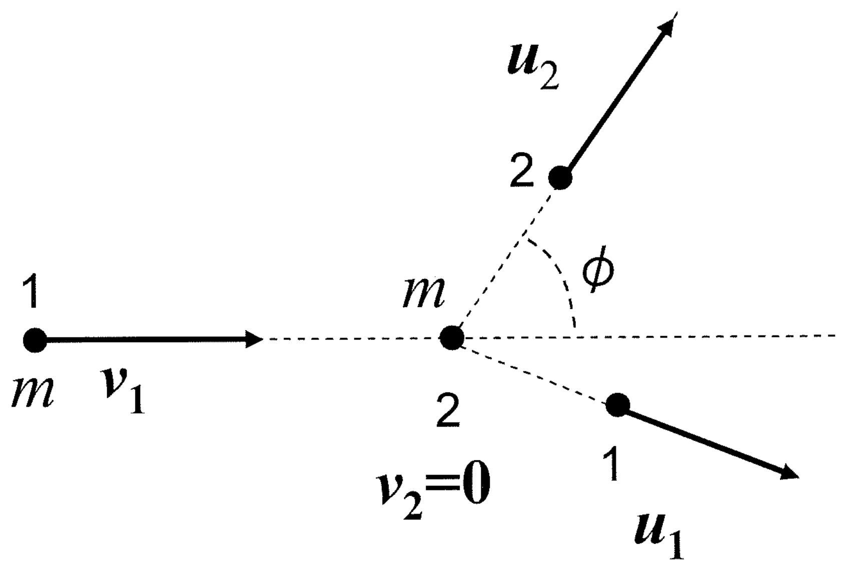

Fig.5

2007年2月実施
問題6 物理基礎2
(1頁目／2頁中)

実対称行列

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の問に答えよ．ただし，任意の行列 B および任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，その転置をそれぞれ ${}^tB, {}^t\boldsymbol{x}$ と表す．

(1) 行列 A は(重複度も含めて)3つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (ただし $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) をもつことが知られている．固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を計算せよ．

(2) 各 $i = 1, 2, 3$ について，固有値 λ_i に対する A の固有空間を W_i とおく．各 W_i に対してその正規直交基底を求めよ．

(3) 対角行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

により定義する．行列 A に対して，${}^tPAP = \Lambda$ を満たす直交行列 P が存在することが知られているが，そのような直交行列 P を求めよ．

(4) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\lambda_1 \leq \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^2} \leq \lambda_3$$

が成り立つことを示せ．ここで，$||\boldsymbol{x}||$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ を表す．

(5) $A = QQ$ を満たす実対称行列 Q が存在することを証明せよ．

2007年2月実施
問題6 物理基礎2
(2頁目／2頁中)

Let A be a real symmetric matrix given by

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Answer the following questions. In the following, the transposes of a matrix B and a vector $\boldsymbol{x}$ are denoted by ${}^tB$ and by ${}^t\boldsymbol{x}$, respectively.

(1) It is known that the matrix A has three eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (including multiplicity), where $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Compute the eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(2) For $i = 1, 2, 3$, let W_i be the eigenspace of A corresponding to the eigenvalue λ_i. Compute an orthonormal basis for each W_i.

(3) Let Λ be a diagonal matrix defined by

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

It is known that for the matrix A there exists an orthogonal matrix P such that ${}^tPAP = \Lambda$. Obtain such an orthogonal matrix P.

(4) Prove that

$$\lambda_1 \leq \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^2} \leq \lambda_3$$

holds for any real vector $\boldsymbol{x}$. Here, $||\boldsymbol{x}||$ denotes the norm of $\boldsymbol{x}$, i.e., $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(5) Prove that there exists a real symmetric matrix Q satisfying $A = QQ$.