平成 20 年度神戸大学大学院工学研究科博士課程前期課程 電気電子工学専攻入学試験問題

平成 19 年 8 月 23 日

量子物理学

以下の問について解答せよ。答えだけでなく導出の過程も簡単に記すこと。

問. 一次元調和振動子

1) 古典的な一次元調和振動子のハミルトニアンを記せ。ただし，質点の質量を m，位置座標を x，運動量を p_x，ばね定数を K とせよ。

2) 上の結果から波動関数を $\psi(x)$，エネルギー固有値を E として時間を含まない（定常状態の)Schrödinger 方程式を書け。プランク定数を $\hbar$ $(=\frac{h}{2\pi})$ とする。

3) 角周波数を $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$ として

$$\xi=\alpha x, \qquad \alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \qquad \lambda=\frac{2E}{\hbar\omega} \tag{1}$$

という変数変換を施した時，2) の Schrödinger 方程式はどのような微分方程式に変換されるか。ただし，$\psi(x)=\psi(\xi/\alpha)=\varphi(\xi)$ と記すことにする。

4) 3) で求めた微分方程式の一般解を求めるために $\varphi(\xi)=H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ とおくと $H(\xi)$ は

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2}-2\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi}+(\lambda-1)H(\xi)=0 \tag{2}$$

という微分方程式を満たすことを示せ。

5) 式 (2) は $\lambda=2n+1$ (n は自然数) の時にのみ解を持ち，この時の $H(\xi)$ は

$$e^{\xi^2-(s-\xi)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(\xi)s^n \tag{3}$$

で定義される左辺の母関数を右辺のように，s についてべき級数展開した時の展開係数 $H_n(\xi)$ に等しい。この $H_n(\xi)$ をエルミート多項式と呼ぶ。$n=0$，1，2 に対して $H_n(\xi)$ を求めよ。

6) エルミート多項式には

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n(\xi)H_m(\xi)e^{-\xi^2}d\xi=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm} \tag{4}$$

という直交関係があることが知られている。ただし，δ_{nm} はクロネッカーのデルタである。これを利用して規格化された波動関数 $\psi_n(x)$ を求めよ。

7) 離散化されたエネルギー固有値 E_n を求めよ。

8) 位置と運動量の期待値 $<x>$，$<p_x>$，および位置の 2 乗と運動量の 2 乗の期待値 $<x^2>$，$<p_x^2>$ をそれぞれ求めよ。必要があれば，式 (4) および漸化式

$$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi) \tag{5}$$

を用いてよい。

9) 位置の不確定さを $\Delta x=\sqrt{<x^2>-<x>^2}$, 運動量の不確定さを $\Delta p_x=\sqrt{<p_x^2>-<p_x>^2}$ と定義する。$n=0$ の時に 8) の結果から $\Delta x\cdot\Delta p_x$ はいくらになるか。

10) $n=0$ の時の固有エネルギーを何と呼ぶか。また，このエネルギーの値について 9) の結果との関係について議論せよ。

以上