平成２５年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　　礎

（平成２４年８月２１日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．６問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

以下の問いに答えよ．

（１）不定積分 $I=\int \frac{29x}{(2x+1)(9x^2-6x+2)}dx$ を求めよ．

（２）n を 0 以上の整数とする．以下の問いに答えよ．

１）定積分 $A_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ の値を求めよ．

（ヒント：$A_{n+2}-A_n$ を計算するとよい．）

２）定積分 $B_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$ の値を求めよ．

（ヒント：$B_{n+1}-B_n$ を計算するとよい．また，１）の答えを用いてもよい．）

2

a, b, c を定数として，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ を定義する．以下の問いに答えよ．

（1）$\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ．

（2）3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$ の組が線形独立であるために，a と b，b と c，c と a のそれぞれの間に成り立つべき条件を求めよ．

（3）$a = 1$，$b = -1$，$c = 0$ とする．

1）$\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．

2）行列方程式 $\boldsymbol{A}^3 + p\boldsymbol{A}^2 + q\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ を満たす定数 p，q，r を求めよ．ここで，$\boldsymbol{E}$ は単位行列，$\boldsymbol{O}$ は零行列を表す．

3）逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

4）行列 $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{A}^5 - \boldsymbol{A}^4 - 4\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ を求めよ．

（4）$a = 1$，$b = 1$，$c = 0$ とする．このとき，3 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対応させる線形写像について，その核空間の基底を一組求めよ．

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-2}{x-y+1}$$

$x-y=u \qquad \frac{du}{dx} = 1-y'$

$y' = \frac{u-2}{u+1} = 1-u'$

$u' = \frac{3}{u+1}$

$\frac{1}{2}u^2+u=3x$

よって $\frac{1}{2}(x-y)^2+x-y=3x$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-x}\cos x$$

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 1$$

（ヒント：$y=x$ は，$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ の解である．）

$\boxed{4}$

(1) 連続値をとる確率変数 X が区間 [-1, 1] 上の一様分布Uに従っているものとする．X の分散 σ_X^2 を求めよ．

(2) 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で X と同一の分布に従っているものとし，$S(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ と定義する．$n = 2$ のとき，確率変数 $S(2) = X_1 + X_2$ の確率密度関数を図示し，分散 $\sigma_{S(2)}^2$ を求めよ．

(3) X の特性関数 $\varphi_X(t)$ を求めよ．

(4) $S(n)$ の特性関数 $\varphi_{S(n)}(t)$ を求めよ．

(5) $\hat{S}(n)$ を

$$\hat{S}(n) = \frac{S(n)}{\sqrt{n}\sigma_X}$$

と定義したとき，$\hat{S}(n)$ の特性関数 $\varphi_{\hat{S}(n)}(t)$ を求めよ．

(6) $\varphi_{\hat{S}(n)}(t)$ において $n \to \infty$ の極限 $\varphi_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\hat{S}(n)}(t)$ を求めよ．必要であれば，$\sin x$ のテイラー展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

および

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

を用いてよい．

5

以下の問いに答えよ．なお，下記における電荷Qはすべて正の値であり，また，真空の誘電率をε_0とする．

(1) 総電荷Qである半径aの導体球が真空中に置かれている．導体球の中心からの距離をrとする．このとき，導体球によって生じる電場の大きさEおよび電位φをrの関数としてそれぞれ求めよ．また，電場の大きさEおよび電位φを縦軸に，距離rを横軸として，それぞれ図示せよ．なお，導体球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする．

(2) 内部に電荷が一様に分布している半径aの球を考える．球は真空中に置かれており，その総電荷はQである．

1) 球の電荷密度を求めよ．

2) 球の中心からの距離をrとする．このとき，球によって生じる電場の大きさEおよび電位φをrの関数としてそれぞれ求めよ．また，電場の大きさEおよび電位φを縦軸に，距離rを横軸として，それぞれ図示せよ．なお，球中心から無限遠の位置の電位をゼロとする．

(3) 総電荷Qである半径aの導体球Aを，半径b（$b > a$）の導体球殻Bを用いて中心が一致するように囲んだコンデンサーを考える（図1）．導体球殻Bは接地されている．また，導体球Aおよび導体球殻Bともに真空中に置かれており，導体球殻Bの厚みは無視できるものとする．

1) コンデンサーの静電容量を求めよ．

2) 導体球Aと導体球殻Bの間の空間を比誘電率ε_1の物質で満たすことによる静電エネルギーの変化量を求めよ．

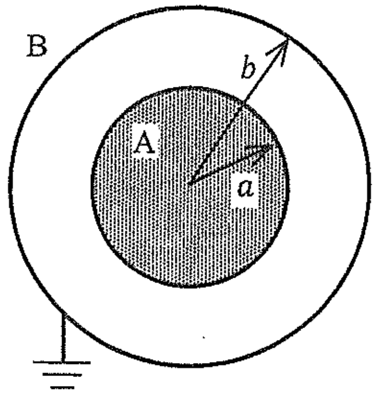

図1

6

(1) z軸に平行でz軸の正方向に向かう磁場がある．この磁場はz軸に関して対称で，その磁束密度の大きさはz軸からの距離rを用いて$B(r)$と書ける．質量m_e，電荷$-e\ (e > 0)$の電子が，図 1 に示すように，ア<u>z軸を中心としてz軸に垂直な半径Rの円軌道上を等速運動している</u>．ある時刻より，イ<u>磁束密度の大きさを時間tとともに増加させて，電子を加速した</u>．電子の描く円軌道内を貫く磁束を$\phi(t)$とする．

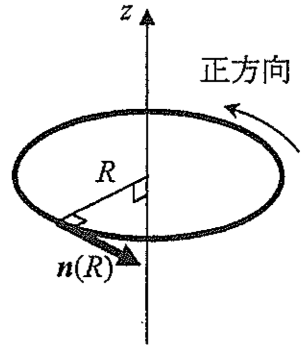

図1

また，図 1 に示すように，z 軸の正の向きから負の向きに円軌道を見て反時計回りを回転運動および起電力，電場の正方向とし，円軌道の接線方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}(R)$とする．

1) 下線部アについて，電子の速度$\boldsymbol{v}$の大きさと回転運動の向きを答えよ．

2) 下線部イについて，円軌道上に生じる誘導起電力Vと$\phi(t)$の関係を式で示せ．さらに，誘導電場$\boldsymbol{E}$の大きさと向きを答えよ．ただし，誘導電場$\boldsymbol{E}$は円軌道に沿って一様であるとする．

3) 下線部イについて，電子が半径Rの円軌道を保ちながら加速される場合を考える．円軌道の周方向について，電子の加速度を$\boldsymbol{a}$として運動方程式を記し，円軌道内での磁束密度の平均値$\bar{B}$と$B(R)$の関係を式で示せ．

(2) 図 2 に示すように，z軸上の点 O を中心としてz軸に垂直な半径R_1の円形回路 1 を，強さIの定常電流が図の向きに流れている．真空の透磁率をμ_0として，以下の問いに答えよ．

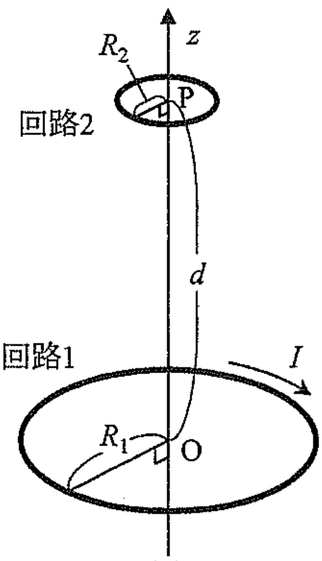

図2

1) z軸上で，点 O からz軸の正方向に距離dの位置にある点 P において，回路 1 を流れる電流がつくる磁場$\boldsymbol{B}$の大きさと向きを答えよ．

2) 点 P を中心として半径R_2の円形回路 2 が，回路 1 に平行に設置されている．R_1はR_2よりも十分大きく，また，dはR_1よりも十分大きいものとする．このとき，回路 2 内を貫く磁束の磁束密度は一様とみなせるとして，回路 1 と 2 との相互インダクタンスを，μ_0，d，I，R_1，R_2を用いて式で示せ．