$\boxed{1}$

1．次の定積分を求めよ。

1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}dx$

2) $\int_0^{2e} \log_e x dx$

2．以下の問に答えよ。ただし，$a>0$，$a \neq 1$とする。

1) $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\log_e a}$　であることを，導関数の定義と　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　より導け。

2) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$　であることを，1）の結果を用いて導け。

3．自然数 n に対して　$I_n = \int (\cos^{-1} x)^n dx$　とおく。

1) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)^n$　を求めよ。　ただし，$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$　である。

2) 3以上の自然数 n に対して，　$I_n = x(\cos^{-1} x)^n - n\sqrt{1-x^2}(\cos^{-1} x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$　であることを示せ。

$\boxed{2}$

1．連立１次方程式 $Ax=b$ を考える。ただし，

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。次の問に答えよ。

1) $|A|=0$ となるような定数 a の値を求めよ。

2) $|A|=0$ のとき，行列 A の階数を求めよ。

3) $|A|=0$ のとき，$Ax=b$ が解をもつような b，およびそのときの解を求めよ。また，解全体はどのような図形を表すか。

2．A を n 次実対称行列とする。A の固有値を λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，λ_i に対応する正規化された固有ベクトルを u_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とし，n 次正方行列 P を

$$P=(u_1\ u_2\ \cdots\ u_n)$$

とする。また，線形変換 $v\to Av$ および $v\to Pv$ を考える。このとき，以下の問に答えよ。

1) P によって，原点が不変であること，および任意の２点間の距離が不変であることを示せ。

2) 1) の結果より，$n=2$ のとき P はどのような操作を表すか。

3) $n=2$ のとき A はどのような操作を表すか。

$\boxed{3}$

1. 次の問に答えよ。

1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}(x^2-1)=2y$ の一般解を求めよ。

2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}-y=x$ の一般解を求めよ。

2. 次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - \omega y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x - y \end{cases}$$

ここで ω は正の実数である。次の問に答えよ。

1) 一般解を求めよ。

2) $t=0$ で $(x,y)=(1,0)$ とする。$\omega=2\pi$ の場合，$t=0$ から始まり，t が増加するときの x-y 平面上での解曲線の概形を図示せよ。

3. 円群

$$(x+a)^2+y^2=a^2-1 \quad (a>1) \tag{1}$$

に直交する曲線群を次の手順で求めよ。

1) 式 (1) からパラメータ a を消去し，円群の満たす 1 階の常微分方程式を求めよ。

2) 円群 (1) に直交する曲線群の満たす常微分方程式が

$$2xy+(-x^2+y^2+1)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

で与えられることを示せ。

3) 常微分方程式 (2) を

$$2xy\,dx+(-x^2+y^2+1)\,dy=0 \tag{3}$$

と書く。これに $\dfrac{1}{y^2}$ をかけた方程式が完全微分方程式になることを示せ。また，この完全微分方程式を解いて直交曲線群の方程式を求めよ。

4

真空中の静電場に関する以下の問いに答えよ。ただし，真空中での誘電率をε_0とする。

1) 半径 a の球内に電荷が一様に分布している。球内の電荷密度をρ, 球の中心を原点とした位置ベクトルを$\vec{r}$（大きさr）とする。位置$\vec{r}$における電場を$a, r, \rho, \vec{r}, \varepsilon_0$を用いて表わせ。

2) 1)の場合の電位（静電ポテンシャル）を$a, r, \rho, \varepsilon_0$を用いて表わせ。ただし，無限遠での電位を 0 とする。

3) 一様な電荷密度ρで電荷が分布している半径 a の 2 つの球が，図 1 に示すような位置にある。z 軸上の任意の点 P(0, 0, b)における電場と電位を$a, b, \rho, \vec{k}, \varepsilon_0$を用いて表わせ。ただし，$\vec{k}$は z 軸正方向の単位ベクトルとする。

4) 図 2 に示すように一様な電荷密度ρで電荷が分布している半径 a の球内に電荷を帯びていない半径 $a/2$ の球形の空洞がある。空洞の内部の電場を$a, \rho, \vec{k}, \varepsilon_0$を用いて表わせ。

5) 図 2 の点 Q(0, 0, $-a$)と点 R(0, 0, a)での電場の大きさの比 E_Q/E_Rを求めよ。

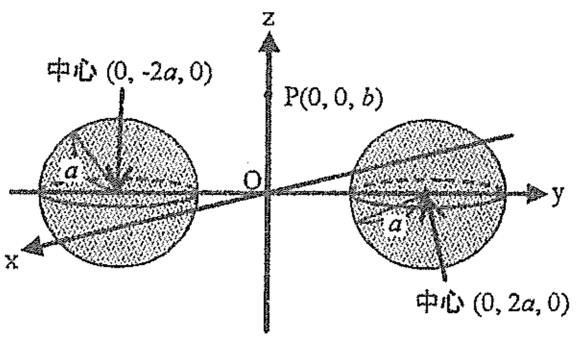


図 1

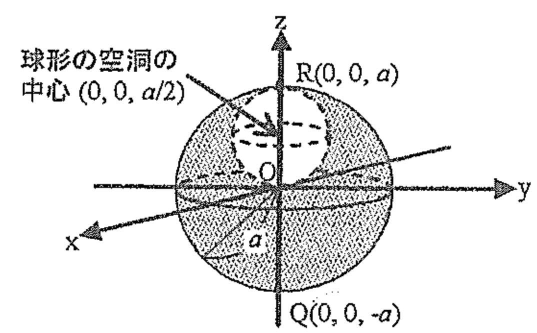


図 2

5

図のように真空（厚さ d_0）と誘電体（厚さ d_1）を $y=0$ と $y=d_0+d_1$ の位置にある２枚の無限平面電極で挟んだ試料がある。下部電極の電位は０であり，紙面に向かって垂直方向（$-z$ 軸方向）に磁束密度 $\vec{B}=(0,0,-B)$ が一様に印加されている。真空，誘電体の誘電率をそれぞれε_0，ε_1，素電荷を e，電子の質量を m とする。以下の問いに答えよ。

1）上部電極に電圧 V を印加したときの定常状態における真空中の電場 $\vec{E}_0=(0,-E_0,0)$，誘電体中の電場 $\vec{E}_1=(0,-E_1,0)$ を求めよ。

2）初速度 $\vec{v}=(v,0,0)$ の電子を真空中で電極と平行に直進させるために必要な電圧 V を求めよ。

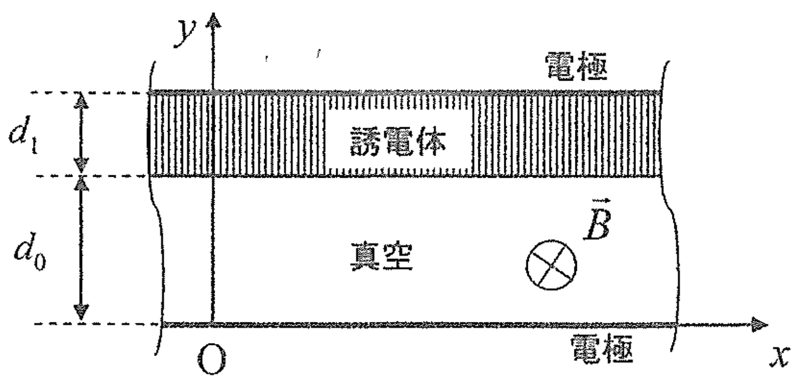
3）上部電極に正の電圧 V を印加し，$t=0$ において下部電極の位置 O (0, 0, 0)にある初速度０の電子が真空中を運動する軌跡 (x, y, z) を考える。なお，必要であれば$\omega=eB/m$ を用いて良い。

a) 電子の速度 $\vec{v}$ (v_x, v_y, v_z)に関する運動方程式を示し，初期条件より xy 平面内の運動であることを示せ。

b) $v'_x=v_x-E_0/B$ とおくと，$v'^2_x+v^2_y=$定数 になることを導け。

c) 電子の軌跡（x, y, z）を時間の関数として表せ。

4）3）において誘電体表面に電子が衝突しない電圧 V の条件を求めよ。



図

6

質量がともに m の物体①，②を質量の無視できるひもでつなぎ，水平との傾きが θ_1，θ_2（$\theta_2 > \theta_1$）の十分に長い斜面にのせた。θ_1 と θ_2 はそれぞれ 90 度より小さい。ひもは斜面の上端に設置したなめらかな丸棒にかけてあり，ひもの張られた方向と斜面は平行である。斜面と物体との間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' および重力加速度を g として以下の問いに答えよ。ただし，物体①の先端は，初めに斜面の上端から L_0 の位置に置いたとする。

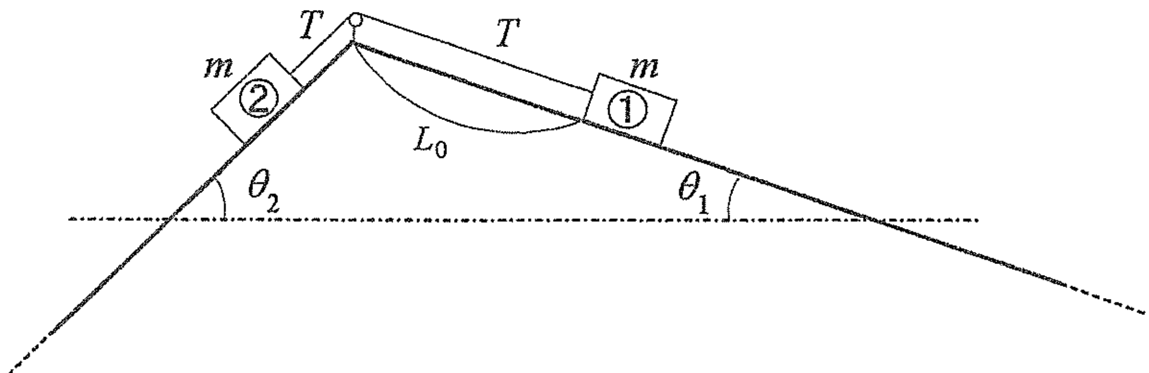
1） 物体がまさにすべり始まる瞬間に成り立つ水平との傾きと摩擦係数の関係を示せ。

2） 物体がすべり出してから成り立つこの系の運動方程式をひもの張力を T として示せ。

3） 斜面に沿ってすべっている物体につながれたひもの張力 T を求めよ。

4） 物体①がすべり始めてから斜面に沿って距離 s 進んだ場合の物体の速度 v を求めよ。ただし，物体①の先端は斜面の上端に達しないとする。

5） 斜面に沿って距離 s'（$s' < L_0$）進んだ後で，物体をつないでいるひもを切る。ひもを切った後も物体①の先端が，斜面の上端に達しないための s' の条件を示せ。



図