平 成 １７年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　門

平成１６年８月１０日（火）
１２：３０〜１５：３０

注 意 事 項

1．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2．試験終了まで退出できない。

3．外国人留学生は、日本語から母国語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

4．問題冊子、解答用紙４枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

5．問題は、問題１から問題１２まで１２問ある。このうち<u>４問を選択して</u>解答せよ。１問につき１枚の解答用紙を使用し、選択した問題番を解答用紙の指定欄に記入せよ。
問題２と問題６と問題１２は I と II のいずれかを選んで解答せよ。

6．解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7．解答用紙は試験終了後に４枚とも提出せよ。

8．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題1（微分積分）

領域 D を $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\}$ と定義し，$\delta > 2$ とする．

(1) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^\delta}\,dxdy$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_D \frac{x^2 \log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^\delta}\,dxdy$ を求めよ．

問題2（線形代数）

次のI，IIのいずれか1つを選択して答えよ．

I. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が次の2条件をみたすとする．

(1) $|a_{ii}| \geqq n - 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) $i \neq j$ ならば $|a_{ij}| < 1$.

このとき，A は正則であることを証明せよ．

II. 次の命題は正しいか？正しければ証明し，間違っていれば反例を挙げよ．ただし以下では行列の成分はすべて実数とする．

(i) 行列 A と B に対して，$AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ である．ただし，O は零行列である．

(ii) 行列 A に対して，$A^T A = O$ であれば，$A = O$ である．ただし，A^T は A の転置行列である．

(iii) 正則行列 A に対して，$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ が成り立つ．

(iv) $A^2 = A$ を満たす正方行列 A の固有値は0か1である．

(v) 実対称行列の固有値は実数である．

問題3（離散数学）

n を自然数，p を素数とし，以下すべて $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上で考える．

1. 0でない n 次列ベクトルは何通り存在するか．
2. $m_1, \cdots, m_i$ を線形独立な n 次列ベクトルするとき，$m_1, \cdots, m_i$ と線形従属な n 次列ベクトルは何通り存在するか．
3. $m_1, \cdots, m_i$ を線形独立な n 次列ベクトルするとき，$m_1, \cdots, m_i$ と線形独立な n 次列ベクトルは何通り存在するか．
4. $m_1, \cdots, m_n$ を n 次列ベクトルするとき，行列式が p と互いに素となる n 次正方行列 $(m_1\ \cdots\ m_n)$ は何通り存在するか．

問題4（計算論）
整数 x と y $(x > y \geq 0)$ の最大公約数 (greatest common divisor) $\gcd(x, y)$ は以下のように定義することができる。

$$\gcd(x, y) = \begin{cases} x & (y = 0 \text{のとき}) \quad (1) \\ \gcd(y,\ x \bmod y) & (y \neq 0 \text{のとき}) \quad (2) \end{cases}$$

与えられた整数 a, b $(a > b \geq 0)$ の最大公約数を上の定義に従って計算したとき、定義の (2) の適用回数が n であったとする。この計算

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) = \gcd(a_n, a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2, a_1) = \gcd(a_1, 0) = a_1$$

から、$a = a_{n+1} > b = a_n > a_{n-1} > \cdots > a_2 > a_1$ を満たす数列 a_i を定めることができる。このとき，以下の問に答えよ。

1. $a = 42$ かつ $b = 30$ とするとき、n の値と各 a_i の値を求めよ。

2. フィボナッチ数 $\mathrm{fib}(x)$ は以下で定義される。

$$\mathrm{fib}(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0 \text{の場合}) \\ 1 & (x = 1 \text{の場合}) \\ \mathrm{fib}(x-1) + \mathrm{fib}(x-2) & (x > 1 \text{の場合}) \end{cases}$$

このとき、以下の [1] と [2] に答えよ。

[1] 各 i $(1 \leq i \leq n+1)$ について $\mathrm{fib}(i+1) \leq a_i$ が成立することを i に関する帰納法で示せ。

[2] $n \geq 2$ とし、m を b の 10 進桁数とする。このとき、$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対して $\alpha^5 > 10$ と $\alpha^{n-1} < \mathrm{fib}(n+1)$ がなりたつという事実を利用して、$n \leq 5m$ となる事を示せ.

問題5（数理論理学）
$f(x_1, \cdots, x_n)$ を $\{0, 1\}^n$ から $\{0, 1\}$ への関数とする.
(1)　f が $\wedge, \vee, 0, 1$ と変数だけで書かれた命題論理の論理式ならば、単調増加であることを示せ.
(2)　f が単調増加であるならば $\wedge, \vee, 0, 1$ と変数だけを使った命題論理の論理式で書けることを示せ.
(定義. $f(x_1, \cdots, x_n)$ が単調増加 $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x'_1 \cdots \forall x_n \forall x'_n (x_1 \leq x'_1, \cdots, x_n \leq x'_n \rightarrow f(x_1, \cdots, x_n) \leq f(x'_1, \cdots, x'_n))$

問題6（確率論）

次のI，IIのいずれか1つを選択して答えよ．

I. X を標準正規分布に従う確率変数とする．つまり，X は $\mathbf{R}$ に値をもつ確率変数で，$\alpha \leqq X \leqq \beta$ の確率 $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ が

$$P(\alpha \leqq X \leqq \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

で与えられるとする．

(1) X^2 の平均を求めよ．

(2) X^2 の確率密度関数を求めよ．

(3) e^X の確率密度関数を求めよ．

II. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ は分布が $P(X_k = 1) = p_k$, $P(X_k = 0) = 1 - p_k$ $(0 \leqq p_k \leqq 1)$ で与えられている確率変数列とし，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して確率変数 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ を考える．

(1) $n = 2, 3, \cdots$ に対して α_n，β_n を次のように定義する：

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k, \quad \beta_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqq j < k \leqq n} p_{jk}$$

ここで $p_{jk} = P(X_j = 1, X_k = 1)$ とする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$E[S_n/n] = \alpha_n, \quad \mathrm{Var}[S_n/n] = \beta_n - \alpha_n^2 + \frac{\alpha_n - \beta_n}{n}.$$

(2) $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ が独立かつ同分布に従うとき，$\beta_n - \alpha_n^2 = 0$ (ただし $n \geqq 2$) となることを示せ．

問題７（数値解析）
バナッハ (Banach) 空間 $\mathcal{B}$ で写像 $F: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ が縮小写像の条件

$$x, y \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (0 \leq L < 1)$$

をみたしているとき，反復法

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots; \quad x_0 \in \mathcal{B})$$

による列 $\{x_k\}$ は収束し，その極限は方程式 $x = F(x)$ の解である．

このことを参考にして，以下の問に答えよ．
　1 変数のスカラー方程式 $f(x) = 0$ の解 $\hat{x}$ をニュートン (Newton) 法で求める．

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

f は２回連続微分可能で，$f'(\hat{x}) \neq 0$ と仮定する．

(1) ニュートン法における反復写像 $F(x)$ を決めよ．

(2) その写像が，$\hat{x}$ の近傍では必ず縮小写像となることを示せ．

(3) さらに，$\hat{x}$ のある近傍では，正定数 K が存在して

$$|F(x) - \hat{x}| \leq K|x - \hat{x}|^2$$

が成り立つことを示せ．

問題８（微分方程式）
任意の実数 x に対して

$$u(x) = 2x + \int_0^x u(t)\sinh(x - t)\mathrm{d}t$$

をみたす連続関数 $u(x)$ を求めよ．ここで，sinh は $\sinh(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ で与えられる関数（双曲線正弦関数）である．

問題９（情報システム）

次の２つの成熟度モデルについて答えよ.

１）CMM (Capability Maturity Model) の目的と特徴（各段階のプロセスの要件を含む）を説明せよ. また, CMM による成熟度モデルの具体例を２つ挙げよ.

２）COBIT (Control Objectives for Information and related Technology) の目的と, プロセス, IT 資源, 情報基準, モニタリング, 成熟度レベルからみた特徴を説明せよ. また, 上記１）の CMM との相違点を挙げよ.

問題１０（アルゴリズム設計法）

以下の各問に答えよ。

1. 時間計算量が$O(n \log n)$のソーティングアルゴリズムを一つ選び、その原理を述べよ。
2. n 個の整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$. が与えられたとき中央値を $O(n)$ 時間で見つけるアルゴリズムを書け。

問題１１（オートマトン理論）

以下で定義されるアルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語 L_1 と L_2 を考える。

L_1 : a で終り、b の個数が 2 の倍数。
$L_2 : \Sigma^* - L_1$

このとき、言語 L_1 と L_2 を表す正規表現 (regular expression) を、それぞれ求めよ。ただし、答えを導く過程についても簡単に説明せよ。

問題１２（プログラミング）

次のI，IIの<u>いずれか１つを選択して</u>答えよ．

I．（１）関数 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$ （n は整数で $n > 1$, $a_0, \cdots, a_n$ はそれぞれ実係数）の値を数値的に求めるとき，各項の値を乗算で計算した後に合計するよりも，計算効率の良い計算方法を示せ．また，その理由を説明せよ．

（２）２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ の根を，解の公式 $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ を用いて数値的に求めるとき，$b^2 \gg 4ac$ のばあいには２つの解 x_1, x_2 のうち，絶対値の大きい解 x_1 を先に求め，他方の解 x_2 は $x_2 = c/(x_1 a)$ で求める方が良いといわれる．その理由と根拠を示せ．

（３）次のＣプログラムの実行結果を記せ．

```
#include <stdio.h>
int main(void)
{
  int a,b,c,*p;
  a=81;
  b=25;
  c=9;
  p=&a;
  c=*p;
  *p=b;
  p=&c;
  b=*p;
  *p=a-b;
  printf("%d\n",c);
  return 0;
}
```

II. 添字 (index) が 0 から始まる要素 n 個の配列 (array)a 上に，頂点 (node) に値をもつ二分木 (binary tree) を次のように実現する．根 (root) を $a[0]$，$a[i]$ の左の子 (left son) を $a[2i+1]$，右の子 (right son) を $a[2i+2]$ とする．

(1) 以下に示す要素数 10 の配列 a が実現する二分木を図示せよ．

$a[0]$	$a[1]$	$a[2]$	$a[3]$	$a[4]$	$a[5]$	$a[6]$	$a[7]$	$a[8]$	$a[9]$
4	3	13	8	2	11	5	1	16	2

次に，以下のような C 言語プログラムを与える．

```
#include <stdio.h>

int a[]={4,3,13,8,2,11,5,1,16,2};

void proc1(int i,int j) {
  int temp,k;

  k=i;
  if(i*2+1<=j) {
    if(i*2+2<=j) {
      if(a[i*2+1]>a[i]||a[i*2+2]>a[i]) {
        if(a[i*2+1]>a[i*2+2]) k=i*2+1; else k=i*2+2;
      }
    } else if(a[i*2+1]>a[i]) k=i*2+1;
    if(k!=i) {
      temp=a[i]; a[i]=a[k]; a[k]=temp;
      proc1(k,j); }
  }
}

void proc(int i,int j) {
  int k;
  for(k=j;k>=i;k--) proc1(k,j);
}

main() {
  int i;

  proc(0,9);
  for(i=0;i<10;i++) printf("a[%d]=%d\n",i,a[i]);
}
```

(2) 上記プログラムの出力を示せ．さらに，関数 main の実行が終了する時点で，配列 a が実現する二分木を図示せよ．

(3) (2) で得られた二分木において，任意の頂点の値とその子頂点の値との間に成立する関係を述べよ．

(4) 上記プログラムの main() 関数を以下のように変更し，配列 a の内容を小さい順に整列 (sort) するプログラムを作成した．なぜこのような結果が得られるのか，(3) の性質を用いて説明せよ．

```
#include <stdio.h>

int a[]={4,3,13,8,2,11,5,1,16,2};

void proc1(int i,int j) {
  int temp,k;

  k=i;
  if(i*2+1<=j) {
    if(i*2+2<=j) {
      if(a[i*2+1]>a[i]||a[i*2+2]>a[i]) {
        if(a[i*2+1]>a[i*2+2]) k=i*2+1; else k=i*2+2;
      }
    } else if(a[i*2+1]>a[i]) k=i*2+1;
    if(k!=i) {
      temp=a[i]; a[i]=a[k]; a[k]=temp;
      proc1(k,j); }
  }
}

void proc(int i,int j) {
  int k;
  for(k=j;k>=i;k--) proc1(k,j);
}

main() {
  int i,temp;

  for(i=9;i>0;i--) {
    proc(0,i);
    temp=a[i]; a[i]=a[0]; a[0]=temp;
  }
  for(i=0;i<10;i++) printf("a[%d]=%d\n",i,a[i]);
}
```