# 京都大学大学院情報学研究科 通信情報システム専攻 修士課程入学者選抜試験問題 (平成22年度10月期入学・平成23年度4月期入学)

Admissions for October 2010 and for April 2011
Entrance Examination for Master's Program
Department of Communications and Computer Engineering
Graduate School of Informatics, Kyoto University
平成22年8月10日 9:00 – 12:00
August 10, 2010 9:00 a.m. - 12:00 noon

### 専門基礎A

### Problem Set A

#### 注意 (NOTES)

- 1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
- 2. これは<u>「専門基礎A」</u>の問題用紙で、表紙共に 14 枚ある。解答開始の合図があった後、枚数を確かめ、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
- 3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。<u>4問を選択して解答すること。</u>答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
- 4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
- 5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
- 6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
- 7. 解答は日本語または英語で行うこと。
- 1. Do not open the pages before a call for starting.
- 2. This is the "Problem Set A" in 14 pages including this front cover.

  After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
- 3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
- 4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating "Over" at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
- 5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
- 6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
- 7. Answer the questions either in Japanese or English.

### 専門基礎A

A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9 の9問から4問を選択して解答せよ。

#### Problem Set A

Choose and answer 4 questions out of A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9

A-1

以下の全ての設問に答えよ.

Answer all the questions below.

(1) 次の積分の結果を求めよ.

Find the following integrals.

(a) 
$$\int x e^{\sin x^2} \cos x^2 dx$$
 (b) 
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^p x}{\cos^p x + \sin^p x} dx$$
 (p: 実数, real)

(2) 次の実関数のx=0での連続性を答えよ.

Examine the continuity at x = 0 of the following real functions.

(a) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{a}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
 (a)  $g(x) = \begin{cases} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 2^{-\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 

(3) (a) 正方行列 A の固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルを  $\alpha$  とする. k を自然数とする と, $\lambda^k$  は  $A^k$  の固有値であり, $\alpha$  は固有値  $\lambda^k$  に対応する  $A^k$  の固有ベクトルであることを証明せよ.

Let x be an eigenvector associated with an eigenvalue  $\lambda$  of a square matrix A, and k be a natural number. Prove that  $\lambda^k$  is an eigenvalue of  $A^k$ , and that x is an eigenvector of  $A^k$  associated with the eigenvalue  $\lambda^k$ .

(b) 行列 A がベキ零行列であるとき、その固有値はすべて 0 であることを証明せ よ、A がベキ零行列であるとは、 $A^m=O$  となる自然数 m が存在することである、O は零行列である.

Let A be a nilpotent matrix. Prove that all the eigenvalues are 0. A is a nilpotent matrix when there exists a natural number m such that  $A^m = O$ , where O is the zero matrix.

(4) 実線形写像 f を考える. ある実ベクトル x と,ある自然数 n に対し, $f^n(x) \neq 0$ , $f^{n+1}(x) = 0$  が成り立つとする.このとき,x,f(x), $f^2(x)$ , $\cdots$ , $f^n(x)$  は一次独立であることを証明せよ.ただし, $f^2(x) = f(f(x))$ , $f^3(x) = f(f(f(x)))$ , $\cdots$  である.

Consider a real linear mapping f. Let  $f^n(x) \neq 0$  and  $f^{n+1}(x) = 0$  for a real vector x and a natural number n. Prove that x, f(x),  $f^2(x)$ ,  $\cdots$ ,  $f^n(x)$  are linearly independent, where  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = f(f(f(x)))$ ,  $\cdots$ .

# A-2

以下の設問 (1), (2), (3) から 2 つを選んで答えよ. Answer two of the following questions (1),(2), and (3).

(1) フーリエ変換に関する下記の問に答えよ.

Answer all the questions below related to a Fourier transform.

(a)  $F(\omega)$  を関数 f(t) のフーリエ変換とするとき、次式を証明せよ. 但し、\* は複素共役、 $i = \sqrt{-1}$  である.

Prove the equation below, where  $F(\omega)$  is the Fourier transform of the function f(t). Superscript \* denotes complex conjugation and  $i = \sqrt{-1}$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x-t) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega$$

(b) 次式で定義された関数 f(t) のフーリエ変換を求めよ.

Derive the Fourier transform of the function f(t) defined in the following equation.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(1-i)t} & t \ge 0\\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(c) 次式で定義する関数  $R(\omega)$  の逆フーリエ変換を求めよ.

Derive the inverse Fourier transform of the function  $R(\omega)$  defined in the following equation.

$$R(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega - 1)^2}$$

(2) 微分方程式に関する下記の問に答えよ.

Answer all the questions below related to differential equations.

(a) 下記の微分方程式の一般解を求めよ.

Derive the general solution of the following differential equation.

$$\left(x^2 - 1\right) x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

continued on next page 次 頁 へ 続 く (b) 特解 y=x をもつ下記の微分方程式の一般解を求めよ. Derive the general solution of the following differential equation, using the fact that y=x is the particular solution of

tion, using the fact that 
$$y = x$$
 is the particular solution of the differential equation.

 $\left(x^2 - 1\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$ 

(3) 下記の問に答えよ.

Answer both the following questions.

(a) 有理関数 f(z) が多項式 p(z), q(z) により下式で表され,  $z_0$  に 1 位の極を持つ場合, その留数を p(z), q(z) を用いて示せ.

Consider rational function f(z) expressed in the following equation, where p(z) and q(z) are polynomial functions. When f(z) has a first order pole at  $z_0$ , derive the residue of f(z).

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

(b) 次の定積分を, (a) の結果を用いて求めよ.

Calculate the following finite integral by applying the answer of (a).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} \mathrm{d}x$$

以下の全ての設問に答えよ.

Answer all the questions below.

(1) 図(a)のように、真空中に半径rの導体球と、球の中心 O を原点とするx軸上のx = l(>r)の点 P に点電荷 q が置かれている. x 軸上のx = r の点を  $R_1$ , x = -r の点を  $R_2$  とし、以下の問に答えよ.

As shown in Figure (a), a spherical conductor of radius r and a point electric charge q on point P of x = l(>r) on the x-axis whose origin is spherical center O are put in the vacuum. Assume  $R_1$  and  $R_2$  are the points of x = r and x = -r, respectively, on the x-axis. Answer the questions below.

(a) 導体球が接地されている場合、x軸上の点 P'に影像電荷 q'を置き、点  $R_1$ ,  $R_2$ 上での境界条件を満たすように、P'の位置及び電荷量 q'を求めよ.

Assume that an image electric charge q' is put at point P' on the x-axis, when the spherical conductor is grounded. Derive the position P' and electric charge q' so as to satisfy the boundary condition on points  $R_1$  and  $R_2$ .

(b) 間(a)において、x軸上の点  $R_3$  における電位をxの関数として求め、導体球表面の点  $R_1$  に誘起される電荷の面密度を求めよ.

In the case of Question (a), derive the electric potential at point  $R_3$  on the x-axis as a function of x, and the surface density of the electric charge generated on point  $R_1$  of the surface of the spherical conductor.

(c) 導体球がqに帯電した状態で絶縁されている場合, 問(a)の影像電荷の他にもう一つ中心 O に影像電荷q''を置くことによって球外での電位を求めることができる. 電荷量q''を求めよ.

Electric potential outside the sphere can be derived by putting the image electric charge q'' on the spherical center O in addition to the image charge of Question (a), when the spherical conductor is being electrified by q and insulated. Derive the electric charge q''.

(d) 問(c)において、点 R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>における電位を求めよ.

In the case of Question (c), derive electric potential at points R<sub>1</sub> and R<sub>2</sub>.

(2) 次の語を簡潔に説明せよ

Explain the meanings of the words described below.

(a) ガウスの定理

Gauss' theorem

(b) ヒステリシス損

Hysterisis loss

(c) 静電遮蔽

Electrostatic shielding

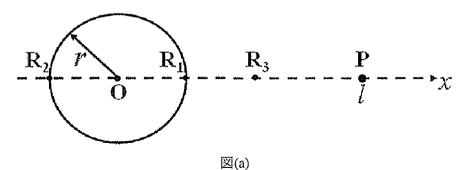


Figure (a)

# A-4

以下の全ての設問に答えよ.

Answer all the following questions.

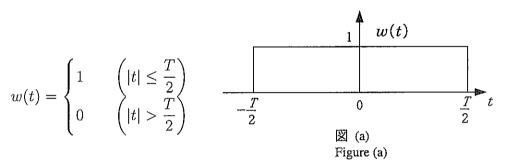
(1) 窓関数に関する以下の問に答えよ.

Answer the following questions related to a window function.

(a) 図 (a) に示す窓関数 w(t) をフーリエ変換し、周波数スペクトル  $W(\omega)$  を導出せよ。 また周波数スペクトル  $W(\omega)$  を図示せよ。

Derive the Fourier transform  $W(\omega)$  of the window function w(t) given by the following equation and Figure (a).

Draw the frequency spectrum  $W(\omega)$ .



(b) 関数  $f(t) = \cos \omega_0 t$  をフーリエ変換し, 次式を用いて周波数スペクトル  $F(\omega)$  を 導出せよ. また  $F(\omega)$  を図示せよ.

Derive the Fourier transform  $F(\omega)$  of the function  $f(t) = \cos \omega_0 t$  by using the following equation.

Draw the frequency spectrum  $F(\omega)$ .

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

(c) f(t) に窓関数 w(t) を乗算した時間領域の関数  $f(t) \cdot w(t)$  の周波数スペクトル $G(\omega)$  を導出せよ. また  $2\pi/T = \omega_0/10$  として周波数スペクトル  $G(\omega)$  を図示せよ.

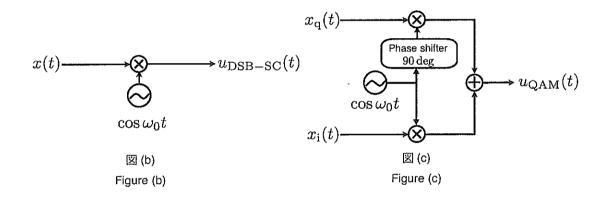
Derive the frequency spectrum  $G(\omega)$  of the time domain function  $f(t) \cdot w(t)$  which is given by multiplication of f(t) and the window function w(t).

Draw the frequency spectrum  $G(\omega)$  in the case of  $2\pi/T = \omega_0/10$ .

continued on next page 次 頁 へ 続 く (2) 変調に関する以下の問に答えよ.

Answer the following questions related to modulation techniques.

- (a) 図(b) は DSB-SC(double side band with suppressed carrier) 変調信号を生成する変調器のブロック図である. 対応する復調器のブロック図を示せ. Figure (b) shows the block diagram of a DSB modulator. Show the block diagram of a DSB demodulator.
- (b) 図 (c) は QAM (quadratic amplitude modulation) 変調信号を生成する変調器のブロック図である. 対応する復調器のブロック図を示せ. Figure (c) shows the block diagram of a QAM modulator. Show the block diagram of a QAM demodulator.
- (c) 問 (b) の  $x_i(t)$ ,  $x_q(t)$  が正しく分離できるための条件を導け. Derive the condition for the two signals  $x_i(t)$ ,  $x_q(t)$  to be separated at the demodulator in Question (b).



# A-5

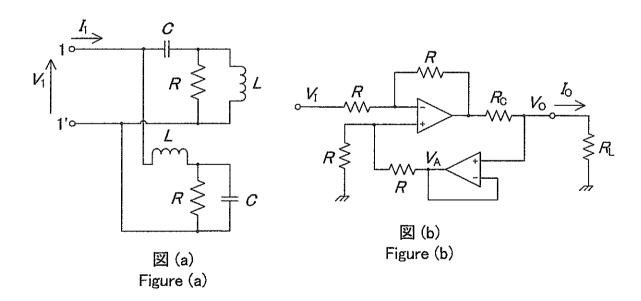
以下の全ての設問に答えよ.

Answer all the following questions.

(1) 図(a) に示す交流回路について、端子 1-1'から見たインピーダンス $Z_1 = V_1/I_1$ が 周波数に関係なく一定になる条件と、そのときの $Z_1$ を求めよ.

For the AC circuit shown in Figure (a), find the condition at which the impedance  $Z_1 = V_1 / I_1$  seen from terminal 1-1' becomes constant regardless of frequency. Also find  $Z_1$  at this condition.

- (2) 図(b)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について, 以下の問に答えよ. For the circuit with ideal operational amplifiers shown in Figure (b), answer all the questions.
  - (a) 電圧 $V_{\rm o}$ と $V_{\rm A}$ の関係を求めよ. Find the relationship between the voltages  $V_{\rm o}$  and  $V_{\rm A}$ .
  - (b) 電圧 $V_1$ と電流 $I_0$ の関係を求めよ. Find the relationship between the voltage  $V_1$  and the current  $I_0$ .
  - (c) 回路の入力インピーダンスと出力インピーダンスを求めよ. Find the input impedance and the output impedance of the circuit.
  - (d) 負荷  $R_L$  を開放したときの回路の動作を説明せよ. Explain how the circuit works when the load  $R_L$  is opened.



以下の全ての設問に答えよ、

Answer all the following questions.

(1) 記憶のない情報源について問に答えよ.

Answer the questions below related to the memoryless information source.

(a) 次式で示される確率 p を持つ情報源 S に対する 2 元及び 3 元ハフマン符号を構成せよ

Find the binary and ternary Huffman codes for the information source S with probabilities p shown below.

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}\right)$$

(b) 前の問で構成した 2元ハフマン符号の平均符号長を計算しSの 1次エントロピーと比較せよ.  $(\log_2$  は次の値を用いよ.  $\log_2(3)=1.59,\log_2(5)=2.32,\log_2(6)=2.59)$ 

Calculate the average code length of the binary Huffman code in Question (a), and compare it with the entropy of S.

(use following values for  $\log_2$  :  $\log_2(3) = 1.59, \log_2(5) = 2.32, \log_2(6) = 2.59$ )

(2) 次に示すパリティ検査行列 H で与えられる 2元 (7,4) ハミング符号から導かれた (5,2) 短縮化ハミング符号について,以下の問に答えよ.

Answer all the following questions for a (5, 2) shortened Hamming code as defined by the following parity check matrix H, derived from that of a (7,4) binary Hamming code.

$$H = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(a) すべての符号語を列挙せよ.

List all the codewords.

- (b) この短縮化ハミング符号の最小ハミング距離はいくらか. 理由とともに述べよ. What is the minimum Hamming distance of the code? Justify your answer.
- (c) 限界距離復号法を用いて誤り訂正を行いたい. このとき、それぞれの符号語について、それを中心とする復号領域に含まれるベクトルをすべて列挙せよ.

"Bounded distance decoding" is assumed to correct errors. For each codeword, list all the vectors contained in a respective decoding sphere centered with that codeword.

- (d) どの復号領域にも含まれないベクトルが存在する. それらをすべて列挙せよ. There exist vectors not contained in any decoding sphere. List all such vectors.
- (e) 誤り率がpの2元対称通信路を仮定して上記の(5,2)短縮化ハミング符号を伝送する. この時,正しく復号される確率  $P_c$ ,復号誤り率(誤訂正確率) $P_e$ ,訂正不可能な誤りが検出される確率  $P_d$  を求めよ.

The above (5,2) shortened Hamming code is transmitted over a binary symmetric channel with bit error probability p. Calculate the probability of correct decoding  $P_c$ , probability of incorrect decoding (mis-correction)  $P_e$  and probability of decoding failure  $P_d$ , respectively.

(ヒント:線形符号では、どの符号語から見ても、他の符号語までの距離の 構造は変わらないので、どの符号語を送っても、上記の確率は一致する.)

(Hint: In linear codes, the Hamming distance structure from any specific codeword to the other remaining codewords is known to be the same. Accordingly, the above probabilities remain the same even if you select any codeword for transmission.)

A を n 要素(A[1], A[2], ..., A[n])の未ソートの配列とする. A の 2 つの要素の比較(A[i]  $\geq$  A[j] と表記)は O(1) 時間を要するとする. 以下の全ての設問に答えよ。

Assume A is an unsorted array of n elements:  $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ . Assume a comparison between two elements of A (denoted by  $A[i] \ge A[j]$ ) requires O(1) time. Answer all the questions below.

(1) A の要素を入れ替えることで A 中に 2 分ヒープを構築するアルゴリズムに関して、下記の全ての間に答えよ.

2分ヒープとは、完全2分木で、ヒープ特性「すべてのノードは、その子ノードより大きいか等しい」を満たすものである。A 中にノード数nの完全2分木を構築するにあたっては、ノードA[i] が子ノードとしてA[2i] ( $2i \le n$  のとき)とA[2i+1] ( $2i+1 \le n$  のとき)を持つようにする。Tree(i,n) でA[i] をルートとする木を表すものとする。

Answer the following questions related to an algorithm for building a binary heap in A by permuting elements of A.

A binary heap is a complete binary tree that satisfies the heap property: every node is greater than or equal to each of its children. Build the complete binary tree with n nodes in A so that node A[i] has children A[2i] (if  $2i \le n$ ) and A[2i + 1] (if  $2i + 1 \le n$ ). Let Tree(i, n) denote the tree whose root is A[i].

- (a) Tree(1,n) がヒープ特性を満たすなら、A において A[1] はどのような役割を持つか? If the heap property holds on Tree(1,n), what role does A[1] play in A?
- (b) ヒープ特性が( $2i \leq n$  のとき) ${\rm Tree}(2i,n)$  と( $2i+1 \leq n$  のとき) ${\rm Tree}(2i+1,n)$  とで満たされているとする. ${\rm Tree}(i,n)$  に対応する配列要素を入れ替えることで, ${\rm Tree}(i,n)$  においてヒープ特性を成立させるアルゴリズム downheap(A, i, n) を示せ. Assume the heap property holds on  ${\rm Tree}(2i,n)$  (if  $2i \leq n$ ) and  ${\rm Tree}(2i+1,n)$  (if  $2i+1 \leq n$ ). Describe an algorithm downheap(A, i, n) which establishes the heap property on  ${\rm Tree}(i,n)$  by permuting array elements for  ${\rm Tree}(i,n)$ .
- (c) downheap を繰り返すことで O(n) 時間で  $\mathrm{Tree}(1,n)$  においてヒープ特性を成立させる アルゴリズム buildheap(A, n) を示せ.
  - Describe an algorithm buildheap(A, n) which establishes the heap property on Tree(1, n) in O(n) time by using downheap repeatedly.
- (d) buildheap(A, n) を O(n) 時間で実行できる理由を説明せよ. Explain why buildheap(A, n) runs in O(n) time.
- (2) A において k 番目に大きいあるいは k 番目に小さい要素を選択するアルゴリズムに関して、下記の全ての間に答えよ.

Answer the following questions related to algorithms for selecting the kth largest or the kth smallest element in A.

- (a) 最初に A が  $O(n \log n)$  時間でソートされているものとして、ソート済の配列 A において k 番目に小さい要素を選択する操作の実行時間を O() 記法で示せ.
  - Assuming A is sorted in  $O(n \log n)$  time first, give O() notation for the running time of the operation for selecting the kth smallest element in the sorted array A.
- (b) buildheap と downheap を用いて A において k 番目に大きい要素を選択する  $O(n+k\log n)$  時間のアルゴリズムを示せ. 記号  $-\infty$  を,A のどの要素よりも小さいものとして使用して構わない.
  - Describe an algorithm in  $O(n + k \log n)$  time which selects the kth largest element in A by using buildheap and downheap. You may use a symbol  $-\infty$  that is less than any element of A.
- (c) 平均 O(n) 時間で A において k番目に小さい要素を選択するアルゴリズム quickselect (A, k, 1, n) を示せ.
  - Describe an algorithm quickselect (A, k, 1, n) which selects the kth smallest element in A and runs in expected O(n) time.
- (d) quickselect(A, k, 1, n) を平均 O(n) 時間で実行できる理由を説明せよ. Explain why quickselect(A, k, 1, n) runs in expected O(n) time.

以下の設問に答えよ.

Answer all the questions below.

(1) 2の補数表示の2進表現について、以下の問に答えよ.

Answer the following questions related to the 2's complement binary number system.

(a) +19 および -19 を6 ビットの2の補数表示の2進表現で表せ.

Express +19 and -19 in the 6-bit 2's complement binary representation.

(b) 次の6ビットの2の補数表示の2進数の加算の結果を示せ.

Show the results of the following additions in the 6-bit 2's complement binary number system.

- (i) 001101+110101 (ii) 101101+110101 (iii) 101101+101101
- (c) 2の補数表示の2進数の加算におけるオーバーフローの検出法を示せ.

Show an overflow detection method for an addition in the 2's complement binary number system.

(2) Wallace 木乗算器について、配列型乗算器と比較して説明せよ。

Explain a Wallace-tree multiplier by comparing it with an array multiplier.

Scheme に関する下記のすべての問に答えよ.

Answer all the following questions about Scheme.

#### (1) let 式

(let 
$$((v_1 e_1) \cdots (v_n e_n))$$
 body)

を引数として受け取り、それと等価な関数呼び出し式

((lambda 
$$(v_1 \cdots v_n) body) e_1 \cdots e_n$$
)

を生成して返す Scheme 関数 let->call を定義せよ。ここで、各 $v_i$  は任意の変数名、各 $e_i$  は任意の式,body は任意の式の並びとする。ただしn=0 の場合、let->call は、

(begin body)

を返すものとする。let->call の定義中に標準的でない関数を使用する場合は、それらの関数も定義し、簡単な説明を加えること。

Define a Scheme function let->call which receives as an argument a let expression

(let 
$$((v_1 e_1) \cdots (v_n e_n))$$
 body)

and returns the equivalent function call expression

((lambda 
$$(v_1 \cdots v_n) body) e_1 \cdots e_n$$
)

Here, each  $v_i$  is an arbitrary variable name, each  $e_i$  is an arbitrary expression, and body is a sequence of arbitrary expressions. As an exceptional case, when n = 0, let->call returns

If you use non-standard functions in the definition of let->call, give their definitions together with brief explanations.

### (2) let\* 式

$$(let* ((v_1 e_1) \cdots (v_n e_n)) body)$$

を引数として受け取り,それと等価な関数呼び出し式を生成して返す Scheme 関数 let\*->call を定義せよ。let\*->call が返す式には,lambda 式以外に変数を束縛する式(let や let\*など)は含んではならない。等価な式が let 式の場合と異なること以外は,問(1)の諸条件をそのまま適用する。

Define a Scheme function let\*->call which receives as an argument a let\* expression

(let\* (
$$(v_1 e_1) \cdots (v_n e_n)$$
) body)

and returns an equivalent function call expression. The returned values of let\*->call may not include binding expressions other than lambda expressions. In particular, let or let\* may not be included in the returned values. Except that the equivalent expressions are different from those of let expressions, the conditions given in the previous problem (1) apply.