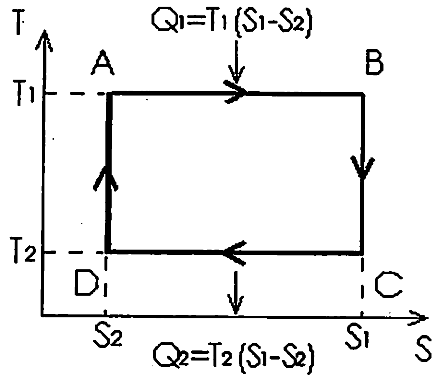
問題16

（1）カルノーサイクルの状態図を温度-エントロピー線図（T－S線図）で示せ。



等温過程はTを一定に保つ過程であり、断熱過程は$dS = 0$の過程である。従って$T - S$線図は左図のようになる。$T - S$線図では、実在気体の状態方程式の形に関わらず、常に左図のように長方形となる。

（2）熱Q_1が与えられる過程において作動物質が吸収したエントロピーと、熱Q_2を放出する過程において作動物質が放出するエントロピーが等しいことををT_1、T_2、Q_1、Q_2、S_1、S_2の全てを用いて表せ。

T-S線図より明らかなように、$S_A = S_D = S_2$、$S_B = S_C = S_1$

従って$\oint TdS = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2)$となる。ここで$T_1$における等温過程で受け取った熱量とエントロピー変化の関係は$Q_1 = T_1(S_1 - S_2)$、T_2における等温過程で受け取った熱量とエントロピー変化の関係は$Q_2 = T_2(S_1 - S_2)$

これより$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = S_1 - S_2$

即ち、温度T_1において作動物質が吸収したエントロピーと温度T_2において放出したエントロピーは等しい。

（3）カルノーサイクルの効率が作動物質のもつ性質を考えることなく得られることを、式を用いて表せ。

式$\oint Tds = \oint dU + \oint pdV$において、右辺の内部エネルギーの積分は1サイクルの後には作動物質の状態が元に戻るから先の図で出発点Aにおける内部エネルギーをU_Aとすると

$$\oint dU = U_A - U_A = 0$$

である。第二項は問1の回答で示したT-S線図に囲まれた面積であり、これは1サイクルの間に作動物質が外部に成した仕事に等しい。この仕事を$\overline{W}$と書くとすると与えられた式は$\oint Tds = \overline{W}$と書ける。次に左辺の積分を考える。断熱過程では$dS = 0$であるから積分には寄与しない。等温過程では温度が一定であるから

$$\oint Tds = T_1\int_A^B dS + T_2\int_C^D dS = T_1(S_B - S_A) + T_2(S_D - S_C) = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2)$$

熱サイクルの効率は作動物質が吸収した熱量と作動物質が熱サイクル時に成した仕事との割合で表される。即ち、効率をηとすると$\eta=\frac{\overline{W}}{Q_1}=\frac{(T_1-T_2)(S_1-S_2)}{T_1(S_1-S_2)}=1-\frac{T_2}{T_1}$が得られる。この効率を得る際、作動物質の比熱や容積、圧力などは用いておらず、カルノーサイクルの効率が作動環境の温度だけで決定されている。

問題１６　熱力学　問題Ⅱの正答例

(1) 作動流体の定圧比熱 c_p[J/(kg・K)] を R, κ のすべてを用いて表せ．

解答例

理想気体であるのでマイヤーの関係 $c_p - c_v = R$ と $\kappa = \dfrac{c_p}{c_v}$ とを使う．

$c_v = \dfrac{1}{\kappa} c_p$ であるので，マイヤーの関係式は $c_p - \dfrac{1}{\kappa} c_p = R$ となり，これを変形すれば，

$c_p \left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right) = R$ であるので，解答は $c_p = \boxed{\dfrac{R}{\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)}}$ である．

(2) 状態 3 での温度 T_3 [K] を p_1, p_2, κ, T_4 のすべてを用いて表せ．

解答例

状態 3 と状態 4 とは断熱過程で結ばれているので次の関係にある． $\dfrac{T_3}{T_4} = \left(\dfrac{p_3}{p_4}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$

この問題では p_1，p_2，κ，T_4 で T_3 を表す．状態 2 と状態 3 での圧力は等しく，状態 4 と状態 1 の圧力も等しいので，

$\dfrac{T_3}{T_4} = \left(\dfrac{p_3}{p_4}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$ となるので，正答は $\boxed{T_3 = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} T_4}$

(3) 熱量 Q_L [J] と熱量 Q_H [J] の比 $\frac{Q_L}{Q_H}$ を p_1, p_2, κ のすべてを用いて表せ.

解答例

$Q_L = mc_p(T4 - T_1)$ であり，$Q_H = mc_p(T_3 - T_2)$ であるので，

$$\frac{Q_L}{Q_H} = \frac{mc_p(T_4 - T_1)}{mc_p(T_3 - T_2)} = \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p2}{p1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} = \left(\frac{p3}{p4}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} = \frac{T_3}{T4}$$ でもあるので，

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T4} = \frac{T_3 - T_2}{T4 - T_1} = \left(\frac{p2}{p1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$$

であるので，正答は $\frac{Q_L}{Q_H} = \boxed{\left(\frac{p1}{p2}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}}$

(4) 状態 4 のエントロピー S_4 [J/K] と状態 1 のエントロピー S_1 [J/K] の差 $\Delta S_{41} = S_4 - S_1$ [J/K] を m, c_p, V_3, V_2 のすべてを用いて表せ.

解答例

状態 4 から状態 1 に至る過程は等圧変化である．ここでの等圧変化でのエントロピーの差は $\Delta S_{41} = mc_p \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right)$ である.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)} = \frac{T_3}{T_4}$$ であるので，次の関係がある．$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$

状態 2 から状態 3 は等圧変化であるので，$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)$ の関係にある.

よってこれらの関係式から正答は $\Delta S_{41} = \boxed{mc_p \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}$ である.

(5) 状態 1 の温度 T_1 [K] である低温熱源と状態 2 の温度 T_2 [K] である高温熱源との間で作動するカルノーサイクルを新たに考える．このカルノーサイクルの熱効率 η を p_1, p_2, κ のすべてを用いて表せ．

<u>解答例</u>

カルノーサイクルの熱効率は $\eta_c = 1 - \dfrac{Q_{LC}}{Q_{HC}} = 1 - \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)$ である．

ここでのサイクルはブレイトンサイクルとも呼ばれている．その熱効率は

$$\eta_b = \frac{Q_{HB} - Q_{LB}}{Q_{HB}} = 1 - \frac{Q_{LB}}{Q_{HB}} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$$ である．

状態 1 から状態 2 に至る過程は断熱圧縮過程であるので，$\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right) = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$ の関係にある．

よって，正答は $\eta_c = 1 - \dfrac{Q_{LC}}{Q_{HC}} = \boxed{1 - \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}}$ である．