

**問題 1 1 電気回路・電子回路** 設問すべてについて解答すること。

- I 図1の回路について、次の(1)～(4)の問いについて答えよ。なお、導出過程も示すこと。
- 静電容量  $C$ 、可変抵抗  $R$ 、インダクタンス  $L$  の直列回路に、角周波数  $\omega$  の交流電圧  $E$  を印加する。電圧  $E$  を基準（位相角 0）とし、その大きさを  $|E|$  とする。また、端子 AB 間の電圧を  $V$ 、その大きさを  $|V|$  とする。
- (1) 回路に流れる電流  $I$  を求めよ。
- (2) 電圧の大きさの比  $\frac{|V|}{|E|}$  を、 $\omega$ 、 $R$ 、 $L$ 、 $C$  を用いて表せ。
- (3) 抵抗  $R$  の値に関係なく  $\frac{|V|}{|E|}$  が一定となるための条件を求めよ。
- (4) (3) の条件が成立するとき、回路に流れる電流  $I$  を複素数表示した場合の実数部を  $X$ 、虚数部を  $Y$  とする。 $X$  と  $Y$  の間にはどのような関係式が成り立つか。 $\omega$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $|E|$  のうち必要なものを用いて表せ。また、可変抵抗  $R$  の値をゼロから無限大まで連続的に変化させる場合、この関係式を横軸  $X$ 、縦軸  $Y$  として図に表せ。

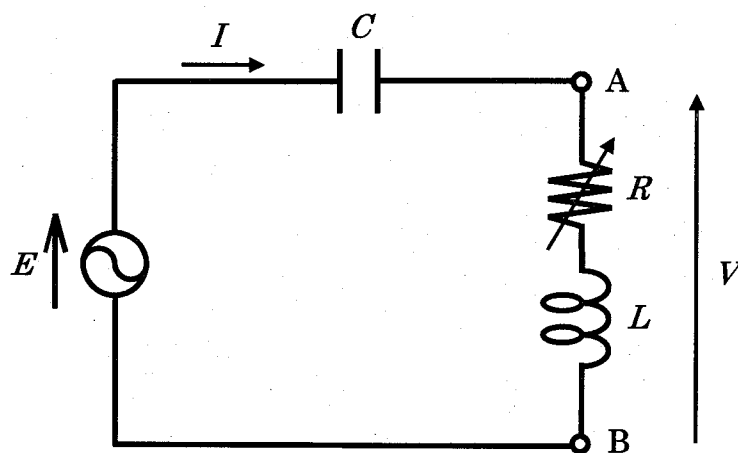


図 1

Ⅱ 図2の回路について、次の(1)～(5)の問いについて答えよ。なお、導出過程も示すこと。  
ただしオペアンプは理想的(利得は無限大、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロ)とし、オペアンプの+入力端子の電圧を $V_+$ 、オペアンプの-入力端子の電圧を $V_-$ とする。

- (1) オペアンプの入力端子には電流は流れないことを利用して、電圧 $V_+$ を入力 $V_2$ を用いて表せ。
- (2) 同様にして、電圧 $V_-$ を入力 $V_1$ および出力 $V_o$ を用いて表せ。
- (3) オペアンプは理想的なので  $V_+ = V_-$  である。このことと問(1)、(2)の結果を利用して、出力 $V_o$ を入力 $V_1$ および入力 $V_2$ を用いて表せ。
- (4) 入力と出力の関係を  $V_o = A_d(V_2 - V_1) + A_c(V_2 + V_1)$  と表したとき、差動利得  $A_d$  および同相利得  $A_c$  を求めよ。
- (5) 入力と出力の関係が  $V_o = A_d(V_2 - V_1)$  で与えられる差動増幅回路となる条件を求めよ。

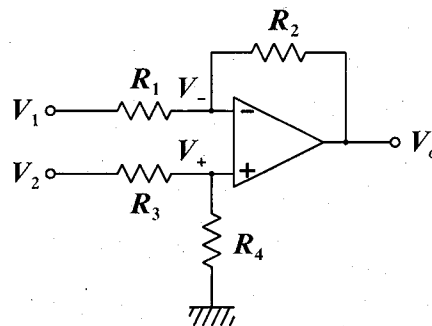


図2

問題 12 計測数理解析 設問すべてについて解答すること。

I 二つの確率変数  $X, Y$  は確率的に互いに独立であり、それぞれの密度関数  $f_X(x), f_Y(y)$  は次のように与えられている。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

$X$  と  $X+Y^2$  について次の (1) ~ (8) の問いに答えよ。

- (1) 確率変数  $X$  の期待値  $E[X]$  はどのようなものであるか。
- (2) 確率変数  $Y^2$  の期待値  $E[Y^2]$  を求めよ。
- (3) 期待値の線形性を用いて  $X+Y^2$  の期待値  $E[X+Y^2]$  を求めよ。
- (4)  $Y^2$  の分散  $\text{Var}[Y^2]$  を求めよ。
- (5)  $X$  の分散  $\text{Var}[X]$  はどのようなものであるか。
- (6)  $\text{Var}[X+Y^2]$  を求めよ。
- (7)  $X$  と  $X+Y^2$  との共分散  $\text{Cov}(X, X+Y^2)$  を求めよ。
- (8)  $X$  と  $X+Y^2$  との相関係数  $\rho(X, X+Y^2)$  を  $\sigma^2$  を用いて書き表せ。

以下のことに注意せよ。

$Y$  の  $n$  乗の期待値は,

$$E[Y^n] = \int_{-\infty}^{\infty} y^n f_Y(y) dy.$$

一般に、二つの確率変数  $U$  と  $V$  について,

$$\begin{aligned} \text{Var}[U] &= E[U^2] - \{E[U]\}^2, \\ \text{Cov}(U, V) &= E[(U - E[U])(V - E[V])] \\ &= E[UV] - E[U]E[V], \\ \rho(U, V) &= \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}[U]}\sqrt{\text{Var}[V]}. \end{aligned}$$

II 関数  $f(x)$  は与えられているものとする。常微分方程式  $dI(x)/dx = f(x)$  を、初期値  $I(0) = 0$  として数値的に解く。離散点  $x_i \equiv hi$  ( $h$  は刻み幅,  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ) において,  $I_i \equiv I(x_i)$  とする。  $I_0 = 0$  とし、以下3通りのアルゴリズムを考える。

- ケース 1:  $I_{i+1} = I_i + f(x_i)h$  for  $i = 0, 1, 2, \dots$ .
- ケース 2:  $I_{i+1} = I_i + f(x_{i+1})h$  for  $i = 0, 1, 2, \dots$ .
- ケース 3:  $I_{i+1} = I_i + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h$  for  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

$f(x) = x$  とし、上記3通りのアルゴリズムについて  $I_1, I_2, I_3$  を  $h$  を用いて表しなさい。それらの結果と厳密解を比較し、誤差が生じた理由を説明しなさい。

問題 1 3 制御工学 設問すべてについて解答すること。

- I 図 1 に示す質量－バネ－ダッシュポット（ダンパ）系において，質量を  $M$  [kg]，バネ定数を  $K_1, K_2$  [N/m]，粘性抵抗係数（摩擦抵抗）を  $B$  [N・s/m] とする。ただし運動は一直線上に拘束されているものとする。壁は図のように地上に固定されており，動かないものとする。

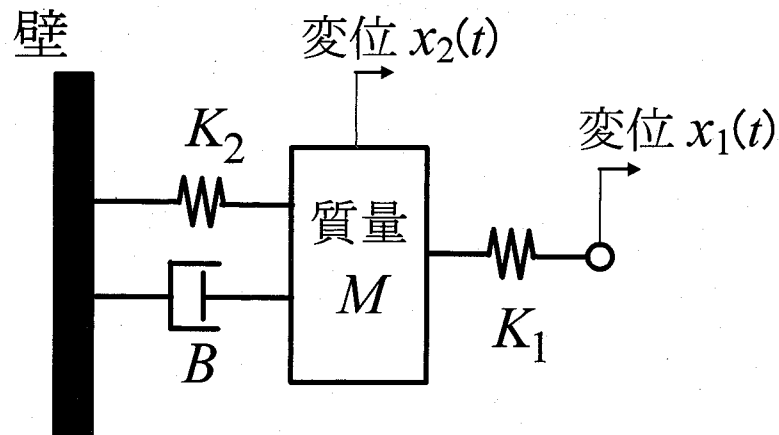


図 1 質量－バネ－ダッシュポット（ダンパ）系

このとき，つぎの(1)～(2)の間に答えよ。

- (1) 図 1 に示す質量－バネ－ダッシュポット（ダンパ）系の運動方程式を求めよ。
- (2) 変位  $x_1$  から変位  $x_2$  までの伝達関数を求めよ。

- II 図2のフィードバック制御系について考える。 $R(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $D(s)$ ,  $E(s)$  は、それぞれ目標値、制御出力、外乱入力、偏差のラプラス変換を表す。

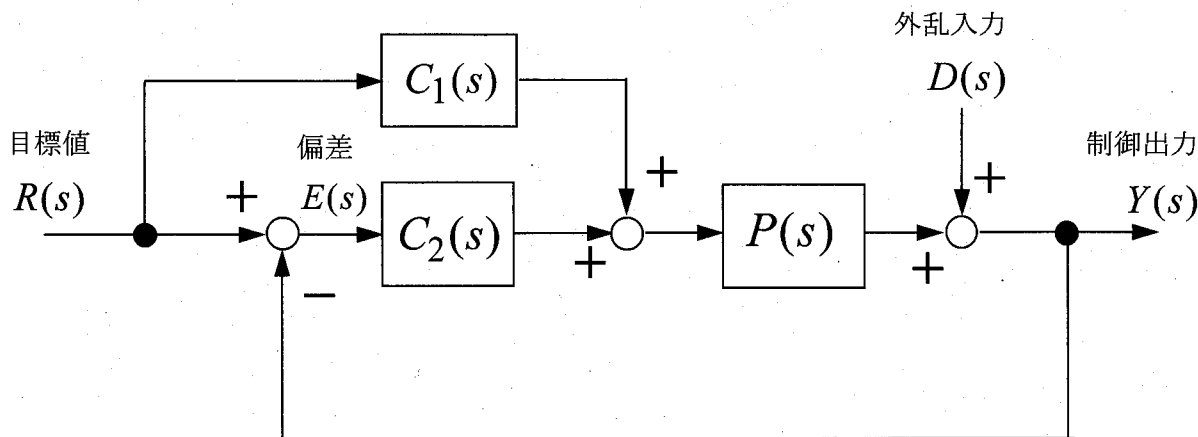


図2 フィードバック制御系

まず、図2において、つぎの(1)～(2)の問いに答えよ。

- (1)  $R(s)$  から  $Y(s)$  までの伝達関数を求めよ。
- (2)  $D(s)$  から  $Y(s)$  までの伝達関数を求めよ。

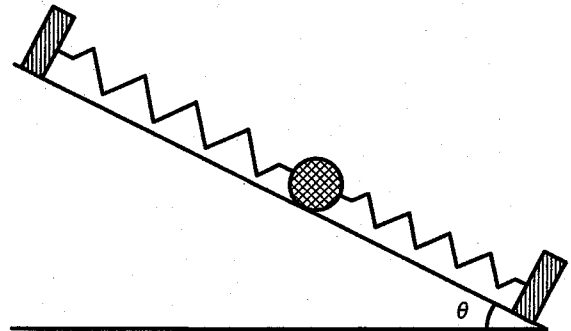
つぎに、図2において  $P(s) = \frac{k}{(s+1)^2}$ ,  $C_1(s) = k_1$ ,  $C_2(s) = \frac{k_2(11s+17)}{s+7}$  とおく。ただし、 $k, k_1, k_2$  はすべて実数とする。つぎの(3)～(7)の問いに答えよ。

- (3) 図2のフィードバック制御系が安定となる  $k, k_1, k_2$  の条件を求めよ。
- (4)  $k_1 = 0, k = k_2 = 1$  とおく、外乱入力を零とする。目標値が単位インパルス関数であるときの制御出力の時間応答を求めよ。
- (5)  $k_1 = 0, k = k_2 = 1$  とおき、外乱入力を零とする。目標値が単位ステップ関数であるときの定常偏差を求めよ。
- (6)  $k_1 = 0, k = k_2 = 1$  とおき、目標値を零とする。外乱入力が単位ステップ関数であるときの定常偏差を求めよ。
- (7)  $k = k_2 = 1$  とおき、外乱入力を零とする。目標値が単位ステップ関数であるとき、定常偏差が零となるための  $k_1$  の条件を求めよ。

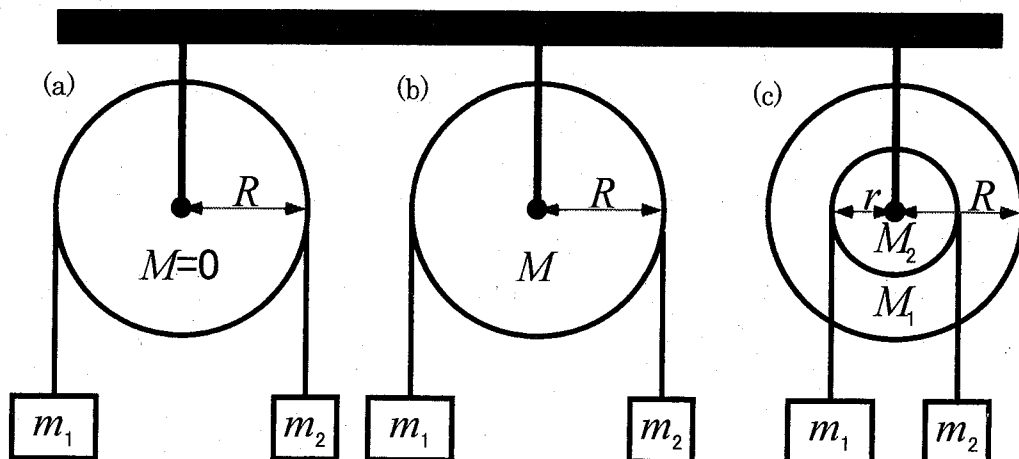
問題 14 力学・材料力学 設問のすべてについて解答すること。

I 図に示すように、傾斜角  $\theta$  の滑らかな斜面上に、2 本のばねで支えられた質量  $m$  のおもりがある。ばねは、ばね定数  $k$ 、自然長の長さ  $l_0$ 、質量が無視でき、それぞれ一端が壁に固定されている。重力加速度を  $g$  として、次の (1) ~ (4) の間に答えよ。

- (1) ばねとおもりがつり合っておもりが静止しているとき、上側と下側のばねの長さがそれぞれ  $l_1$ 、 $l_2$  であったとし、力のつり合いの式を求めよ。
- (2) おもりのつり合いの位置を原点とし、斜面に沿って下向きに  $x$  軸をとる。おもりをわずかに  $x$  方向に移動させ、静かに放すとおもりは単振動をした。この運動方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた運動方程式から、その振動の周期  $T$  を計算せよ。
- (4) 図の装置全体を油の中に入れておもりを振動させた場合、おもりは速度に比例した抵抗 (比例定数  $b$ ) を受けた。油による浮力は無視し、ばねの変形は油の影響を受けないものとして、運動方程式を求めよ。

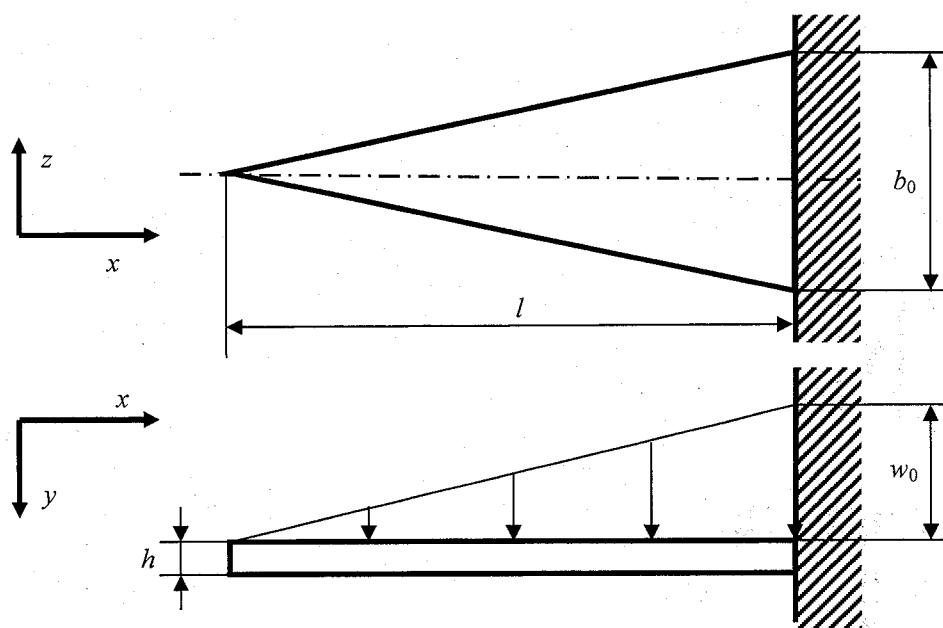


II 半径  $R$  の定滑車がある。この滑車に質量の無視できる伸縮しないケーブルを介して質量  $m_1$  および  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) の物体 1 と物体 2 をつり下げて、静かに放す。このとき下図に示すような (a) ~ (c) の 3 つ場合それぞれについて、放した直後の物体の加速度  $a$  を求めよ。ただし、(a) は滑車の質量が無視できる場合、(b) は滑車の質量が  $M$  で無視できない場合、(c) は質量  $M_1$ 、半径  $R$  の滑車に質量  $M_2$ 、半径  $r$  の滑車を接着し、半径  $r$  の滑車の方にケーブルを介して物体をつり下げた場合である。なお、重力加速度を  $g$  とし、質量  $M$ 、半径  $R$  の円板の中心に関する慣性モーメントは  $MR^2/2$  で与えられる。ただし、滑車はスムーズに回転し、滑車中心で摩擦は生じない。また、ケーブルとケーブルを巻きつけている滑車の面とは相対的にすべらないものとする。



Ⅲ 図に示す片持はりを考える。はり厚さ  $h$ 、長さ  $l$ 、固定端側の幅が  $b_0$  の二等辺三角形の板である。このはりの上面に単位面積当たり等分布荷重、すなわち単位長さ当たりでは固定端で  $w_0$  の三角形状分布荷重が作用する。このとき、以下の設問 (1) ~ (3) について答えよ。ただし、座標軸は図の矢印の方向を正とし、はりの幅  $b_0$  は長さ  $l$  に対して十分小さい。はりの変形は小さく、はりの自重と、応力集中との影響は無視できるものとする。なお、解答は、導出の過程が判るように記述せよ。

- (1) せん断力図(SFD)と曲げモーメント図(BMD)を描け。
- (2) 曲げ応力が最大となる位置と、その最大曲げ応力の値を答えよ。なお、幅  $b$ 、高さ  $h$  の長方形断面の断面 2 次モーメントは  $I_z = bh^3/12$  である。
- (3) はりの縦弾性係数を  $E$  として、たわみ曲線を求めよ。

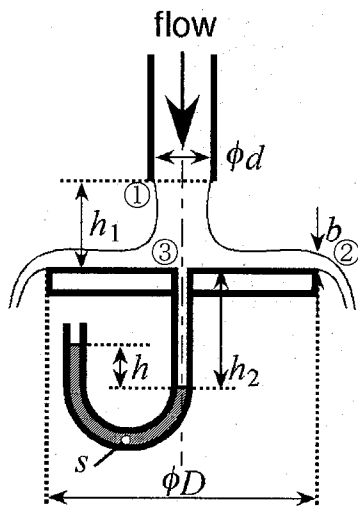




**問題 15 流体力学** 設問すべてについて解答すること。

I 図に示すように、内直径  $d$  の鉛直円管の出口①から鉛直下向きに噴射される水（密度  $\rho$  の非圧縮性流体）が、①から  $h_1$  だけ下にある外直径  $D$  の水平円板の表面の中心部に衝突して放射状（軸対称）にひろがり、円板の外周部②では水の厚さが  $b$  となって流れ去っている。このとき、円板の中心③に設置した水銀（比重  $s$ ）のマノメータは図のようになり、左右の水銀の液面差は  $h$  であった。流れは定常で、重力加速度は  $g$ 、大気圧は  $p_a$  とし、流体損失（流体摩擦）は無視できるものとして、次の（１）～（７）の問いに順番に答えよ（あとに出てくる問いの答えを用いて答えてはいけない）。

- （１）円管出口①での圧力  $p_1$  並びに円板外周部②での圧力  $p_2$  を求めよ。
- （２）水銀マノメータから知られる円板中心③での圧力  $p_3$  を求めよ。
- （３）この流れにベルヌーイの定理が適用できるか。適用できる場合には、その理由を記せ。
- （４） $p_3$  を用いて円管出口①での速度  $V_1$  を求めよ。また、 $p_3$  を用いて円板外周部②での速度  $V_2$  を求めよ。さらに、これらの結果を用いて  $V_1/V_2$  を求めよ。
- （５）体積流量  $Q$  を用いて  $V_1$  を求めよ。また、 $Q$  を用いて  $V_2$  を求めよ。さらに、これらの結果を用いて、 $V_1/V_2$  を求めよ。
- （６）（４）と（５）で求めた  $V_1/V_2$  を等しいと置いて、 $p_3$  を求めよ。
- （７）（２）と（６）で求めた  $p_3$  を等しいと置いて、 $h$  を求めよ。



II 下図のように無限に長い 2 枚の平行平板が間隔  $H$  で置かれ、その間を一定の密度  $\rho$  と一定の粘性率  $\mu$  の流体が流れている。上の平板はその長手方向に速度  $U$  (定数) で動いており、下の平板は静止している。また、長手方向には一様な圧力勾配 ( $\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta < 0$ ,  $\beta > 0$ ) がかけられている。以下の (1) から (5) の問いに答えよ。

(1) 2 次元の粘性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式は速度成分を  $(u, v)$  とすると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

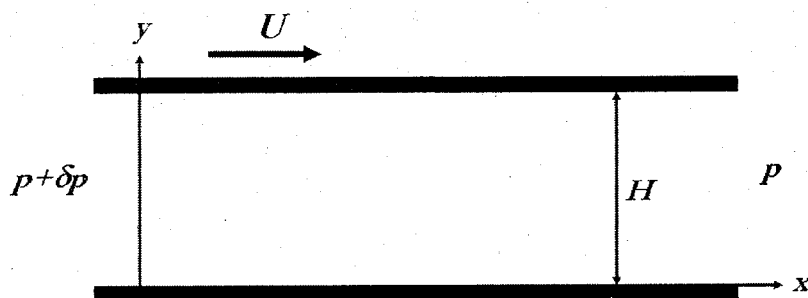
とあらわされる。流れは平板に平行でかつ定常であるとするとき、 $(u, v)$  の従う方程式を書き下せ。

(2) 上の問いの方程式を解き、速度場の各成分を求めよ。

(3) 速度  $u$  の  $y$  軸に沿っての分布を (i)  $U > 0$ , (ii)  $U = 0$ , (iii)  $U < 0$  の場合についてそれぞれ図示せよ。

(4) 紙面に垂直な方向の単位幅あたりの流量を求めよ。

(5) 上の平板に働く接線応力を求めよ。また、この接線応力が 0 になるのは  $U$  がどのようなときか。



## 問題 16 熱力学 設問すべてについて解答すること。

数値での解答は、有効数字 2 桁（例えば、 $1.2 \times 10^5$  あるいは 0.12 の形式）で解答せよ。

数式での解答に際し、質量あるいはモル数を使用する 2 種類の表現が可能な場合、そのいずれか一方の形式で解答せよ。

I 圧力  $p_1 = 0.100$  [MPa]、温度  $T_1 = 300$  [K]、質量  $m = 1.0$  [kg]（すなわち モル数  $n = 34.5$  [mol]）の気体を体積が  $V_1$  [m<sup>3</sup>] から  $V_2$  [m<sup>3</sup>] まで 5 分の 1 になるまで断熱圧縮したところ、圧力  $p_2$  [Pa]、温度  $T_2$  [K] となった。ただし、この気体は、定容比熱  $C_v = 720$  [J/(kg·K)]（すなわち モル定容比熱  $C_{v0} = 21$  [J/(mol·K)]）、ガス定数  $R = 290$  [J/(kg·K)]（すなわち（一般）ガス定数  $R_0 = 8.3$  [J/(mol·K)]）、比熱比  $\kappa = 1.4$  の理想気体であるとする。下記(1)～(4)の問に答えよ。解答に際し、必要であれば、 $(1/5)^{1.4} = 0.105$ ,  $5^{1.4} = 9.52$ ,  $(1/5)^{0.4} = 0.525$ ,  $5^{0.4} = 1.90$ ,  $(1/5)^{(0.4/1.4)} = 0.631$ ,  $5^{(0.4/1.4)} = 1.58$  を用いよ。

- (1) 体積  $V_1$  [m<sup>3</sup>] を  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $R_0$ ,  $R$ ,  $T_1$ ,  $\kappa$  から必要なものを用いて表せ。また、値を算出せよ。
- (2) 断熱圧縮の前後における体積  $V_1$ ,  $V_2$  と圧力  $p_1$ ,  $p_2$  の関係式を記述せよ。
- (3) 断熱圧縮後の圧力  $p_2$  [Pa] を算出せよ。
- (4) 断熱圧縮後の温度  $T_2$  [K] を算出せよ。

II 上問では断熱圧縮をとりあげたが、実機での圧縮過程を考慮するため、本問ではポリトロープ変化での圧縮過程について検討する。ここで、ポリトロープ変化とは、ポリトロープ指数  $N$ （定数）に対して、圧力  $p$  と体積  $V$  が「 $p \cdot V^N = \text{一定}$ 」の関係を満たす変化のことである。

上問と同じ気体（質量  $m = 1.0$  [kg]、モル数  $n = 34.5$  [mol]）に対して、圧力  $p_1 = 0.100$  [MPa]、温度  $T_1 = 300$  [K] の状態から、ポリトロープ指数  $N = 1.33$  のポリトロープ変化により、体積が  $V_1$  [m<sup>3</sup>] から  $V_3$  [m<sup>3</sup>] まで 5 分の 1 になるまで圧縮したところ、圧力  $p_3$  [Pa]、温度  $T_3$  [K] となった。下記(5)～(9)の問に答えよ。必要であれば、 $(1/5)^{1.33} = 0.118$ ,  $5^{1.33} = 8.50$ ,  $(1/5)^{0.33} = 0.588$ ,  $5^{0.33} = 1.70$ ,  $(1/5)^{(0.33/1.33)} = 0.671$ ,  $5^{(0.33/1.33)} = 1.49$  を用いよ。

- (5) 圧力  $p_3$  [Pa] を  $p_1$ ,  $V_1$ ,  $V_3$ ,  $N$ ,  $\kappa$  から必要なものを用いて表せ。また、値を算出せよ。
- (6) 温度  $T_3$  [K] を  $T_1$ ,  $V_1$ ,  $V_3$ ,  $N$ ,  $\kappa$  から必要なものを用いて表せ。また、値を算出せよ。
- (7) 気体が外部に行った仕事  $W_{13}$  [J] を  $p_1$ ,  $p_3$ ,  $V_1$ ,  $V_3$ ,  $N$ ,  $\kappa$  から必要なものを用いて表せ。また、符号に注意して値を算出せよ。
- (8) 内部エネルギー変化  $\Delta U_{13}$  [J] を  $n$ ,  $m$ ,  $C_{v0}$ ,  $C_v$ ,  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $R_0$ ,  $R$  から必要なものを用いて表せ。また、符号に注意して値を算出せよ。
- (9) 気体に外部から加えた熱量  $Q_{13}$  [J] を  $\Delta U_{13}$ ,  $W_{13}$  を用いて表せ。また、符号に注意して値を算出せよ（有効数字 1 桁で可）。

問題 17 生産加工 設問すべてについて解答すること。

I 炭素含有量 0.15% の軟鋼の小片 A および B をそれぞれ焼鈍および焼準する。なお、加熱して均一な組成のオーステナイトとした後で炉冷することを焼鈍、空冷することを焼準という。

- (1) 図 1 に Fe - C 系準平衡状態図を示す。これらの小片を A<sub>3</sub> 温度以上に加熱して組織をオーステナイトにすると、炭素は全て固溶される。さて、フェライトに比べてオーステナイトの炭素の固溶限が非常に大きい理由を説明せよ。
- (2) 小片 A の焼鈍後の組織はフェライト地にパーライトが点在するものである。図 1 を参考に、この組織を定量的に説明せよ。
- (3) 焼準後の小片 B の組織は焼鈍後の小片 A の組織と基本的には同種であるが、両者には少し違いが見られる。どのような違いが見られるか。
- (4) 焼鈍後および焼準後の小片 A および B の組織の違いの理由を述べよ。なお、炉冷と空冷の冷却速度の違いが直接の原因ではないことを、ここでは述べておく。
- (5) 構造材、機械部品など、工業的に用いられる鋼材にはこの程度の、0.1 - 0.2% の低炭素含有量の焼準材が多用される。
  - a) 焼鈍材ではなく、焼準材が多用される理由を述べよ。
  - b) 0.1 - 0.2% の低炭素の鋼材が多用される理由を述べよ。

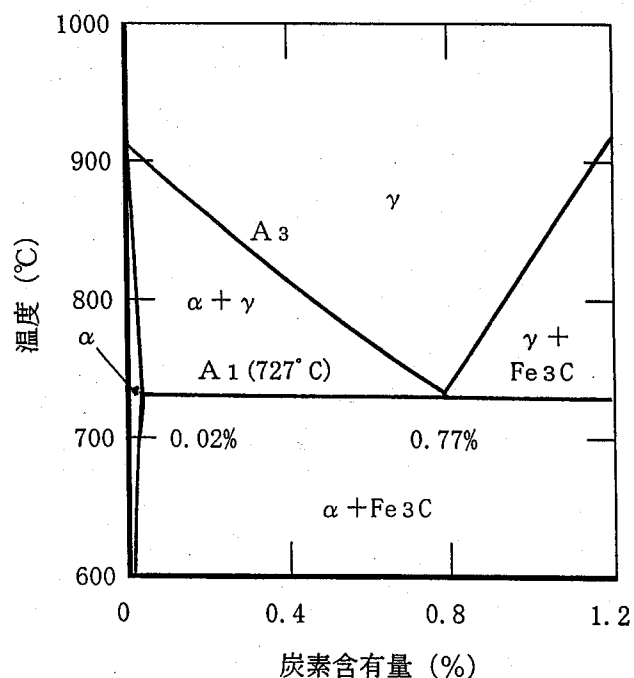


図 1 Fe - C 系準平衡状態図

- II 降伏応力が  $\sigma_Y = 5.0$  の等方性金属材料中で、 $x, y, z$  座標系の 1 点に下記のテンソル  $\sigma_{ij}$  で表される応力が加わっている。以下の問題(1), (2)に答えよ。ただし計算では  $\sqrt{2} = 1.41$ ,  $\sqrt{3} = 1.73$ ,  $\sqrt{5} = 2.24$  とせよ。

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3, & 0, & -2 \\ 0, & -1, & 0 \\ -2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) この 1 点が降伏しているか否かを Tresca の降伏条件と Mises の降伏条件で確かめよ。
- (2) 問題(1)にかかわらず、この 1 点が降伏状態にあり、 $y$  方向の伸びひずみ増分が  $d\varepsilon_y = -0.02$  であると測定されたとする。他のひずみ増分  $d\varepsilon_x$ ,  $d\varepsilon_z$ ,  $d\gamma_{xy}$ ,  $d\gamma_{yz}$ ,  $d\gamma_{zx}$  の値 (例えば  $d\gamma_{xy}$  は  $x, y$  平面のせん断ひずみ増分) を計算せよ。

問題 18 量子力学 設問すべてについて解答すること。

I 1次元空間座標を  $x$  とする。右方向 ( $x$  の増加方向) に進む質量が  $m$ , エネルギーが  $E$  の粒子が, 高さ  $V_0 (> 0)$  の階段型ポテンシャルに入射する問題を考える。ポテンシャルエネルギー  $V(x)$  は以下のように与えられる,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \text{ 領域 I} \\ V_0 & x > 0, \text{ 領域 II} \end{cases}$$

以下,  $E > V_0$  の場合を考える。

(1) 領域 I でのシュレーディンガー方程式を書け。領域 I での波動関数は次の式で与えられる。

$$\psi_I(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

$R$  は定数である。このとき  $k(> 0)$  を  $m, E$  および  $\hbar$  を用いて表わせ。

(2) 領域 II でのシュレーディンガー方程式を書け。領域 II での波動関数は次の式で与えられる。

$$\psi_{II}(x) = Te^{iqx}$$

$T$  は定数である。このとき  $q(> 0)$  を  $m, E, V_0$  および  $\hbar$  を用いて表わせ。

(3)  $x = 0$  での波動関数およびその微分の連続条件より,  $T, R$  についての連立 1 次方程式を求めよ。

(4) 上の連立 1 次方程式を解くことにより, 反射率  $|R|^2$  を求め,  $k, q$  を用いて表わせ。

(5) 透過率  $\frac{q}{k}|T|^2$  を求め,  $k, q$  を用いて表わせ。この結果より, 反射率と透過率の和が 1 であることを示せ。

II 水素原子のエネルギー最低の量子状態の波動関数を  $\psi(r)$  ( $r$  は電子と陽子の距離) とするとその  $r$  倍  $\chi(r) = r\psi(r)$  ( $\chi$  はギリシア文字のカイ) は, 半直線 ( $0 \leq r < \infty$ ) 上のシュレーディンガー方程式,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\chi}{dr^2} + V\chi = E\chi$$

を満足する。ここに,  $m$  は電子の質量,  $V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  は静電ポテンシャルエネルギー,  $e$  は電気素量,  $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。

(1)  $\chi$  は  $r$  の関数で,  $\chi = Cre^{-\kappa r}$  ( $\kappa$  はギリシア文字のカップ) という形になる。これを上のシュレーディンガー方程式の左辺と右辺に代入し, 左辺が右辺に恒等的に等しくなるように,  $\kappa$  と  $E(< 0)$  の値を決めよ。なお,  $\kappa$  は  $m, e, \epsilon_0, \hbar$  を用いて, また  $E$  は  $m, \kappa, \hbar$  を用いて表せ。

(2) 規格化条件  $\int_0^\infty 4\pi\chi^*\chi dr = 1$  (ただしこの場合,  $\chi^* = \chi$ ) より, 規格化定数  $C$  を決め,  $\kappa$  を用いて表せ。

必要に応じて, 定積分の公式,  $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$  を使え。

(3) 運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーの期待値,

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty 4\pi\chi^* \frac{d^2\chi}{dr^2} dr$$

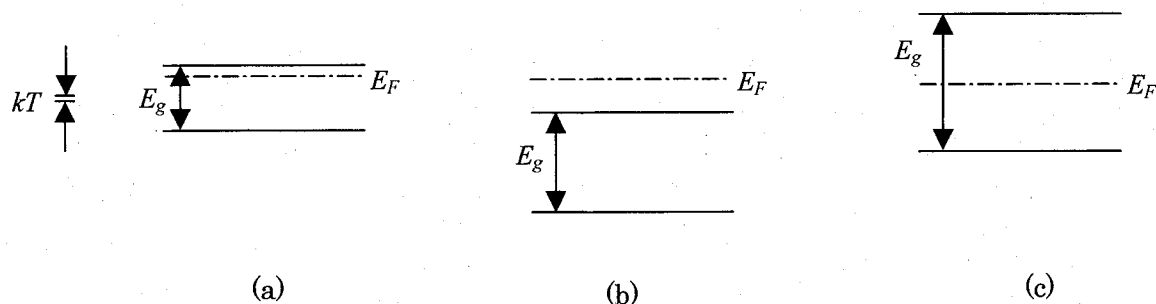
及び

$$\langle V \rangle = \int_0^\infty 4\pi\chi^* V\chi dr$$

を計算し, それぞれ  $m, \kappa, \hbar$  を用いて表せ。

(4) 運動エネルギーの期待値は, ポテンシャルエネルギーの期待値の何倍か。この結果は水素原子では古典力学のビリアル定理が量子力学でも成り立つことを示している。

問題 19 電子物性・固体物性 設問すべてについて解答すること。



- (1) 図 (a), (b), (c) は 3 種類の結晶についてフェルミ準位  $E_F$  付近の電子のエネルギー帯を描いた図である。一点鎖線がフェルミ準位、実線は禁制帯の上端および下端を表しており、禁制帯幅が  $E_g$  である。参考のために記した熱エネルギー  $kT$  の大きさは図 (a), (b), (c) に共通である。

解答用紙に同じ図を描き、その図中に電子を黒丸で記入せよ。また、なぜそのように記入したのか理由を説明せよ。

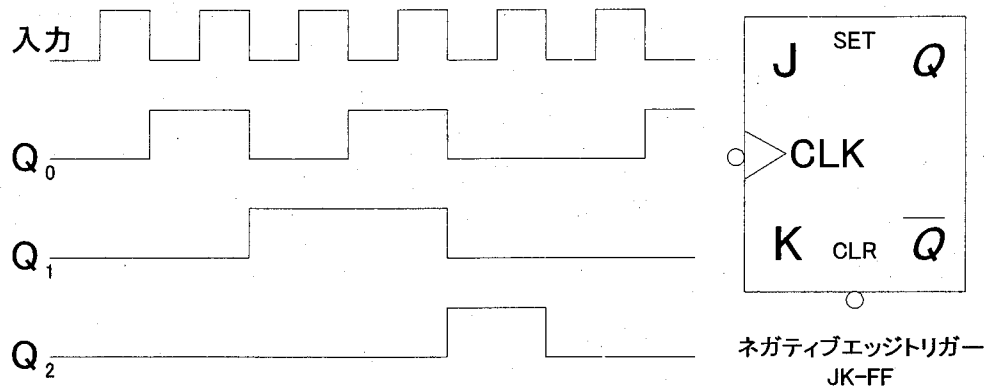
- (2) 図 (a), (b), (c) の中で、温度上昇と共に電気抵抗が増加すると考えられる物質はどれか、(a), (b), (c) の記号で答えよ。また、その理由も併せて説明せよ。
- (3) ドナー密度  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  かつ、アクセプタ密度  $5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  の半導体がある。ドナーおよびアクセプタが全てイオン化しているときのこの半導体の電気抵抗率を求めよ。ただし、真性キャリア数は無視できるとし、電子の移動度を  $2 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 、正孔の移動度を  $1 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  とする。また電子の電荷は  $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  である。



**問題 20 計算機基礎** 設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ~ (3) の問いについて答えよ。

- (1) 論理式  $F=AB+CD$  を, (a) AND, OR ゲート素子 (ゲート数合計 3) のみで, (b) NAND ゲート素子 (ゲート数合計 3) のみで, (c) NOR ゲート素子 (ゲート数合計 5) のみで構成せよ。なお用いるゲート素子の入力数は制限しないが, 括弧内のゲート数で構成すること。
- (2) 下記のタイムチャートのように動作する 5 進カウンタについて考える。
- (2.1) 非同期型カウンタを, ネガティブエッジトリガー JK フリップフロップ 3 個と, 任意個の 2 入力 NAND ゲートを用いて構成しなさい。なお素子の遅延は考慮する必要はない。



- (2.2) 同期型カウンタを, ネガティブエッジトリガー JK フリップフロップ 3 個と, 任意個, 任意入力数の AND, OR, NOT ゲートを用いて構成しなさい。ただし, 反転条件 (トグル条件) を示したカルノー図を用いて構成過程をくわしく説明すること。
- (3) CPU の性能評価について以下の問いに答えなさい。なお 1 命令を実行するに必要なクロックサイクル数を CPI (Clock Per Instruction) と呼び, A, B, C の各命令クラスの CPI をそれぞれ 1, 2, 3 とする。
- (3.1) ある実行コード内に, 命令クラス A に属する命令数が 20, B が 10, C が 20 の場合の実行クロックサイクル数と, 平均 CPI を求めなさい。
- (3.2) C 言語で記述された, あるプログラムをコンパイルし, 実行した結果, 命令クラス A, B, C に属する命令がそれぞれ 50 億回 ( $5 \times 10^9$ ), 10 億回, 10 億回実行された。実行した CPU のクロックが 4GHz の場合, 実行時間を求めなさい。
- (3.3) 計算機の性能を測る指標の一つに MIPS 値 (1 秒あたりにどれだけの命令が実行できるかを, 100 万を単位として数えた値。実行命令数 / (実行時間  $\times 10^6$ )) がある。(3.2) の場合の MIPS 値を求めなさい。
- (3.4) (3.2) と同一の C 言語プログラムを, 別のコンパイラでコンパイルし, 同一 CPU で実行した結果, 命令クラス A, B, C がそれぞれ, 100 億回, 10 億回, 10 億回実行された。この場合の実行時間と MIPS 値を求めなさい。また MIPS 値を性能評価として用いる際の問題点を考察しなさい。