

問題 1 1 電気回路・電子回路 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 の交流回路について、次の (1) ～ (3) の問いに答えよ。なお、導出過程も記すこと。交流電源 E の電圧は 10 V 一定値でその角周波数 ω は可変である。交流電源 E にインダクタンス $L = 8\text{ H}$ 、静電容量 $C = 0.5\text{ F}$ 、可変抵抗 R が直列に接続されている。ただし、電圧、電流の値は全て実効値である。

- (1) 抵抗 $R = 10\ \Omega$ の場合、電流 I が最大になるときの角周波数 ω と電流 I をそれぞれ求めよ。
- (2) 抵抗 $R = 8\ \Omega$ の場合、電流 $I = 1\text{ A}$ であった。このときの角周波数 ω を求めよ。
- (3) 角周波数 $\omega = 2\text{ rad/s}$ の場合、抵抗 R で消費される電力が最大になるときの抵抗 R と消費電力 P をそれぞれ求めよ。

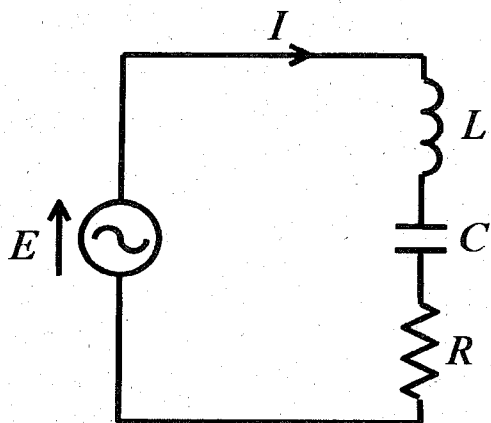


図 1

II 図2はホーランド回路と呼ばれ、 R_L の値に無関係に電流 I_L は一定となる。次の(1)~(3)の設問に従ってそのことを導け。ただし、オペアンプの特性は理想的なもの(利得は無限大、入力インピーダンスは無限大、出力インピーダンスはゼロ)、また a は正の定数とする。

- (1) -入力端子における節点方程式を求めよ。その結果から V_0 と V_2 の関係を求めよ。
- (2) +入力端子における節点方程式を求めよ。
- (3) 以上の2つの結果より、 I_L の値は R_L の値にかかわらず一定となることを導け。

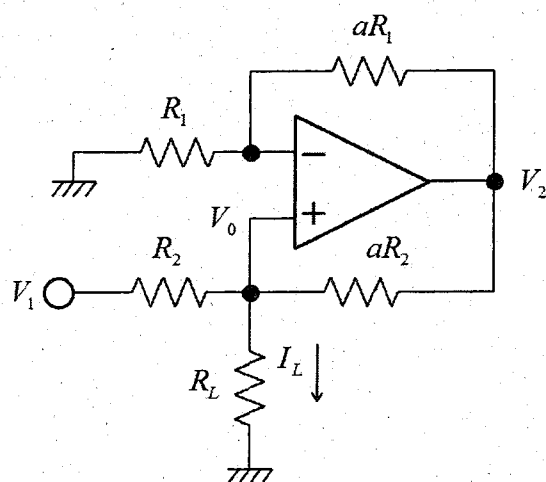


図2

問題 12 計測数理解析 設問すべてについて解答すること。

I 二つの確率変数 X, Y があり、それぞれの密度関数 $f_X(x), g_Y(y)$ は次のように与えられている。 $f_X(x)$ は正規分布, $g_Y(y)$ は指数分布である。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$g_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

μ, σ^2, λ 等を用いて次の (1)~(10) の問いに答えよ。

- (1) X の期待値 $E[X]$ はどのようなものであるか。
- (2) Y の期待値 $E[Y]$ を求めよ。
- (3) $3Y$ の期待値 $E[3Y]$ を定めよ。
- (4) 期待値の線形性を用いて $X + 3Y$ の期待値 $E[X + 3Y]$ を求めよ。
- (5) X の分散 $\text{Var}[X]$ はどのようなものであるか。
- (6) Y の分散 $\text{Var}[Y]$ を求めよ。
- (7) $3Y$ の分散 $\text{Var}[3Y]$ を定めよ。
- (8) X と $3Y$ との共分散が $\text{Cov}[X, 3Y] = a$ で与えられている。 $E[X \cdot 3Y]$ を μ, λ, a を用いて書き表せ。 a は定数であり、共分散は次の様である。

$$\text{Cov}[X, 3Y] = E[(X - E[X])(3Y - E[3Y])]$$

- (9) 問い(8)で求めた $E[X \cdot 3Y]$ を用いて、期待値 $E[X(X + 3Y)]$ を求めよ。
- (10) X と $3Y$ の共分散は問い(8)で与えられている。 $\text{Var}[X + 3Y]$ を求めよ。

II 常微分方程式 $dI(x)/dx = f(x, I(x))$ について、初期値 $I(0)$ として、 $I(x)$ を数値計算で求めることを考える。刻み幅 h を決め、変数 x の離散値 $x_i \equiv hi$ ($i \in \{0, 1, 2, \dots, \}$) での I の値を I_i と書くことにすると、オイラー法では、 f の x_i での値に h をかけた値を I_i に加えて、 I_{i+1} とする。

- (1) $f(x, I) = x$ とし、 $I_0 = 0$ とする。オイラー法で、 I_1 と I_2 を、 h と数字のみで表せ。
- (2) 上記 (1) の解析解 $I(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x, I) = I$ とし、 $I_0 = 1$ とする。オイラー法で、 I_1 と I_2 を、 h と数字のみで表せ。
- (4) 上記 (3) の解析解 $I(x)$ を求めよ。
- (5) 2 階微分方程式 $d^2y/dx^2 = -y$ を解く場合は、2 成分ベクトル $\vec{I} = (I_\alpha, I_\beta)$ および $\vec{f} = (f_\alpha, f_\beta)$ を定義して $d\vec{I}/dx = \vec{f}$ と拡張すると、オイラー法で扱うことができる。この際、 $f_\alpha = I_\beta$ とし、さらに f_β をどのように設定すると、 I_α が解くべき 2 階微分方程式に従うようになるか、その理由を含めて答えよ。

問題 1 3 制御工学 設問すべてについて解答すること。

- I すべての初期値が零である安定なシステムの単位ステップ応答 $y(t)$ が次式となった。このシステムの伝達関数を求めよ。ただし $u_s(t)$ は単位ステップ関数を表す。

$$y(t) = 2u_s(t) + e^{-2t} - e^{-4t} \quad (t \geq 0)$$

- II 図 1 に示す RLC 回路において、電圧 $v_i(t)$ を入力信号、電圧 $v_o(t)$ を出力信号とする。この回路の伝達関数を R と L と C を用いて表せ。ただし R は抵抗値、 L はインダクタンス、 C は静電容量を表わす。

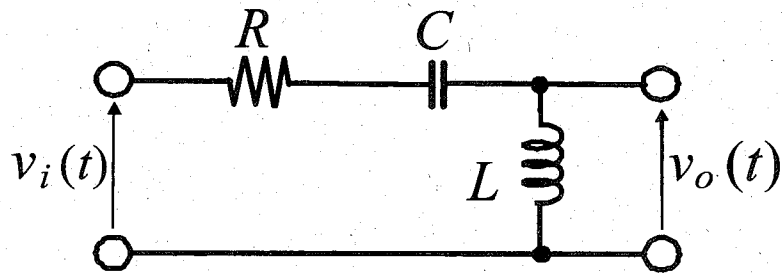


図 1 RLC 回路

- III つぎの伝達関数 $G(s)$ で表されるシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad K=10, T=0.25[\text{sec}]$$

このシステムに振幅 1、角周波数 $\omega = 4[\text{rad/sec}]$ の正弦波信号

$$\sin \omega t$$

を入力したときの出力の定常応答 ($t \rightarrow \infty$ における出力の応答) は、角周波数 $\omega = 4[\text{rad/sec}]$ で、振幅が A 、位相が $\phi[\text{rad}]$ の正弦波信号、すなわち

$$A \sin(\omega t + \phi)$$

であった。上式の振幅 A と位相 $\phi[\text{rad}]$ を求めよ。

IV 図2のフィードバック制御系について考える。 $R(s)$, $Y(s)$, $D(s)$ は、それぞれ目標値 $r(t)$, 制御量 $y(t)$, 外乱 $d(t)$ のラプラス変換を表す。

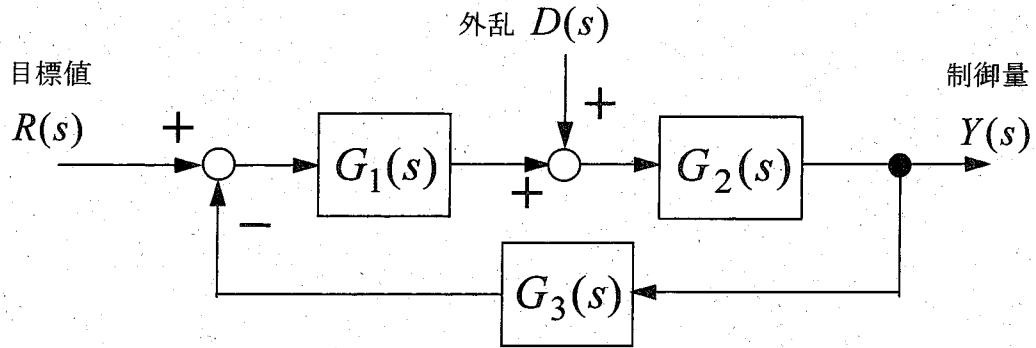


図2 フィードバック制御系

まず、図2において $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+3}$, $G_3(s) = s+a$ とおく。 $a > 0$ とする。外乱を零とする。つぎの(1), (2)の問いに答えよ。

- (1) 目標値がステップ関数であるときの制御量の時間応答が減衰振動し、最終的に一定値に収束するための a の範囲を求めよ。
- (2) $a=3$ とおく。目標値が大きさ 6 のステップ関数であるときの制御量の時間応答を求めよ。

つぎに、図2において $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{10}{s+3}$, $G_3(s) = \frac{1}{bs+1}$ とおく。 $b > 0$ とする。つぎの(3)~(5)の問いに答えよ。

- (3) 図2のフィードバック制御系が安定となる b の範囲を求めよ。
- (4) 外乱を零とする。目標値が単位ランプ関数であるとき、その定常偏差 e_s の絶対値が 0.1 以下 (すなわち $|e_s| \leq 0.1$) となる b の範囲を求めよ。ただし定常偏差 e_s は

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ r(t) - y(t) \}$$

と定義する。

- (5) $b=1$ とおき、目標値を零とする。外乱が単位ランプ関数であるとき、(4)で定義した定常偏差 e_s を求めよ。

問題 14 力学・材料力学 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1), (2)の問いについて, 重力加速度を g , ケーブルの質量は無視できるとして答えよ。

(1) 図1に示すように, 点Aと点Bにより壁に固定されたケーブルAC, BCに質量 m の質点がつり下げられており, 点A, 点B, 点Cは同一の鉛直面内にある。

(a) ケーブルAC, BCの張力 T_{AC}, T_{BC} を求めよ。

(b) 図1の状態ではケーブルBCを点Cの近くで切ったところ, この質点は鉛直面内で運動を始めた。図2のようにケーブルACが鉛直に対して θ の角度になったとき, この質点に関する運動方程式をたてよ。ケーブルACの長さを l , ケーブルACの張力を T とし, 接線方向成分および法線方向成分に分け, それぞれ示せ。

(c) 図2において $\theta=0$ になったときのケーブルACの張力 T'_{AC} を求めよ。

(2) 長さ L , 質量 M の密度一様な剛体棒が, 図3のように, 点Dをピンで, 点EをケーブルEFで支えられている。点D, 点Eは剛体棒の両端から長さ $L/3$ の点で, 点D, 点E, 点Fは同一の鉛直面内にあり, 剛体棒は水平に対し 30° の角度, 剛体棒とケーブルの角度は 90° である。

(a) ケーブルEFの張力 T_{EF} を求めよ。

(b) 図3の状態ではケーブルEFを点Eで切ったところ, 剛体棒は支点Dを中心に, 鉛直面内で回転運動を始めた。重心Gが支点Dの真下にきた瞬間の剛体の角速度を求めよ。ここで, 剛体の重心Gまわりの慣性モーメントを $I_G = ML^2/12$, 点Dまわりの慣性モーメントを $I_D = ML^2/9$ とする。

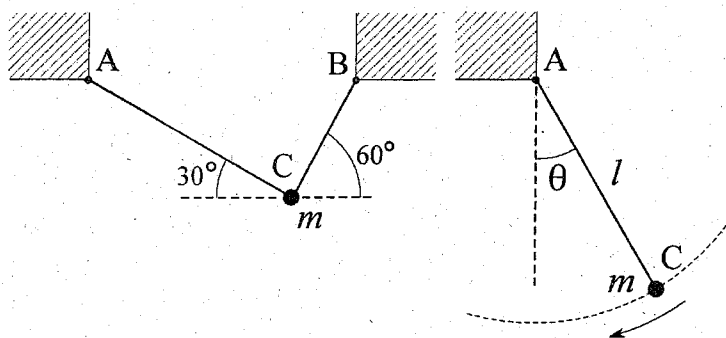


図1

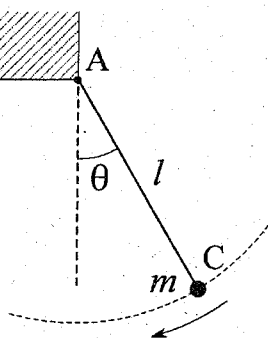


図2

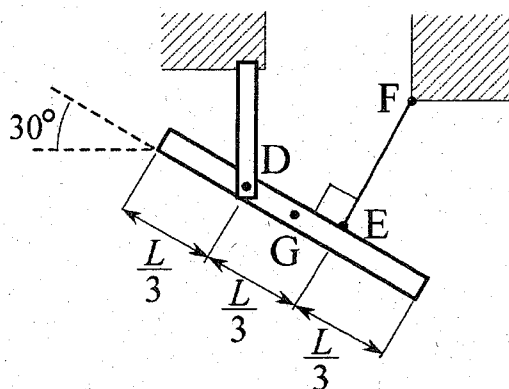


図3

II 次の文章を読み、(1)、(2)の問いについて答えよ。以下のはり(図4、図5)において、はりは弾性体であり、その変形は、はりの長さに対して非常に小さいとする。また、はりの断面形状は、長さ方向に沿って一様であり、はりの自重は無視できるとする。

(1) 支点A、Bで支持されたはりABCを考える(図4参照)。C点に鉛直下向きで大きさ P の集中荷重が作用する。AB、BCの長さは等しく a とする。

- (a) 支点A、Bにおいて、はりが支点から受ける力 R_A 、 R_B を求めよ。力は上向きを正(+)とする。
- (b) ABの中点Dにおけるたわみ(鉛直方向変位)の大きさ(絶対値)を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性を EI とする。

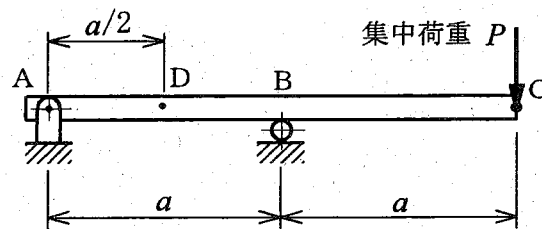


図4

(2) 図4のはりに、長さ a のはりを連結した複合はりを考える(図5参照)。はりABCとはりCEは、C点においてピン継手で連結されている。ピン継手はモーメントを伝達することができない。はりCEには、単位長さ当たり w の大きさの分布荷重が鉛直下向きに作用している。

- (a) 支点A、B、Eにおいて、はりが支点から受ける力 R_A 、 R_B 、 R_E を求めよ。力は上向きを正(+)とする。
- (b) 複合はりABCDEのせん断力図と曲げモーメント図を描け。この場合、せん断力と曲げモーメントを式の形で示す必要はない。なお、せん断力、曲げモーメントの正(+)の方向は、図6のように定義する。
- (c) はりABCに生じる曲げ応力の最大値を σ_1 、はりCEに生じる曲げ応力の最大値を σ_2 とする。それらの比 σ_1/σ_2 を求めよ。
- (d) ABの中点Dにおけるたわみ(鉛直方向変位)の大きさ(絶対値)を求めよ。ただし、はりABCとはりCEの曲げ剛性は等しく EI とする。

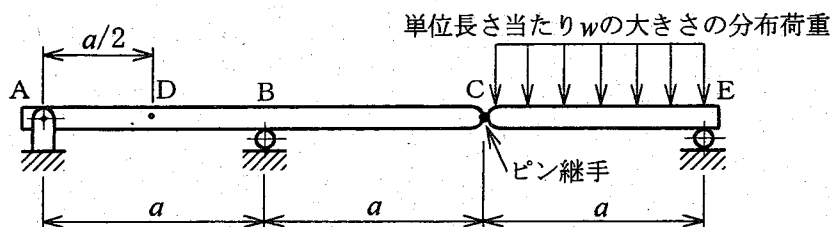


図5

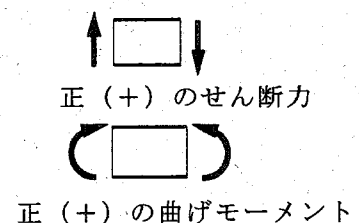


図6

問題 15 流体力学 設問すべてについて解答すること。

I 図1に示すタンク内に空気と水が入っている。タンク下面から H の高さまで水がはいっており、その上の空間は空気で満たされている。タンク上部に取り付けた圧力計の値はゲージ圧力で P_t である。タンクの横にはノズルがあり配管を通じタンク下部と繋がっている。ノズル出口は下面から h の高さにあり鉛直上方に速度 V_n で水を噴出している。ノズル出口直径は d である。ノズル出口の断面積 S_n はタンクの断面積 S_t にくらべ十分小さい ($S_n/S_t \ll 1$) とする。重力加速度を g とする。また水、空気の密度を ρ_w, ρ_a とする。以下の問いに答えよ。ただし、流体の運動において各種流動損失はないものとする。

- (1) タンク下面の圧力 (ゲージ圧力) P_b を求めよ。
- (2) ノズル出口での噴流の速度 V_n と流量 Q_n を求めよ。
- (3) ノズルからの噴流が到達できる高さ L はいくらか求めよ。
- (4) 噴流の途中 (下面から X_p の位置) に、噴流の中心軸と小円板の中心が一致するように小円板を流れに直角においた (図2: ノズル部のみ示す)。噴流は平板に衝突後、小円板から水平方向に流出した。噴流のよどみ点圧力を水柱マノメーターで測定した。マノメーターの高さは h_m であった。 h_m を求めよ。
- (5) 小円板が流体から受ける力 (鉛直方向上向き) f を求めよ。

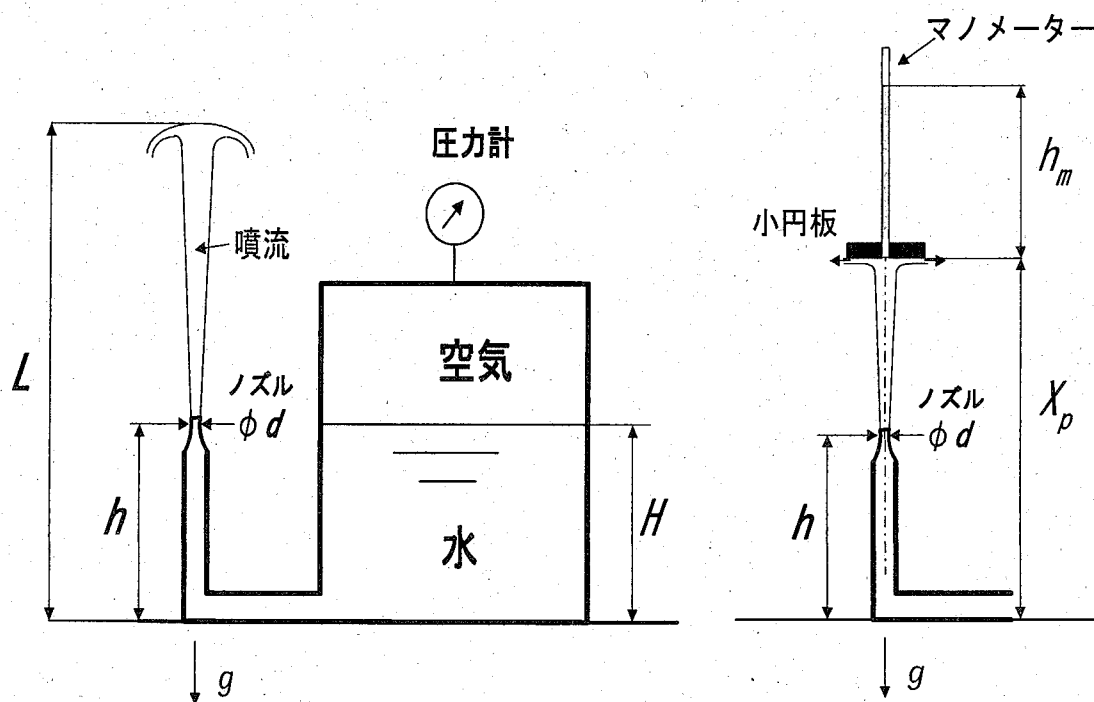


図 1

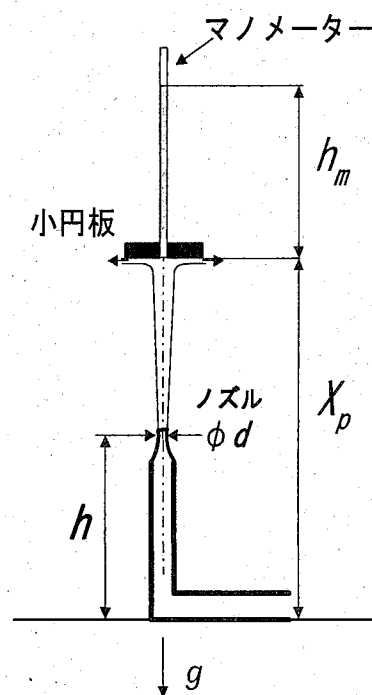
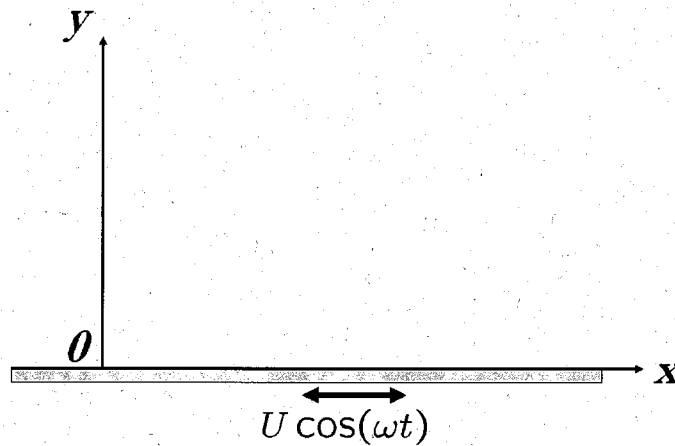


図 2

II 半無限に広がった空間 ($y > 0$) を静止した非圧縮性流体 (密度 ρ , 粘性率 μ) が占めている。
 $y = 0$ にある無限に長い平板が $t = 0$ よりその面内に平行に速度 $U \cos(\omega t)$ で単振動を始めた
 (U, ω は正の定数)。図のように振動方向に x 軸、それに垂直な方向に y 軸をとる。以下の (1)
 から (5) の問いに答えよ。

- (1) 2次元の速度成分を (u, v) , 圧力を p として, 非圧縮粘性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を書け。
- (2) 問題の対称性より $v = 0$, x 軸方向の圧力勾配も 0 としてよい。 x 軸方向の速度 u の方程式を求めよ。また、 $y = 0, y = \infty$ での u の境界条件を示せ。
- (3) $u = A \exp(-ky) \cos(ky - \omega t)$ において k と ω の関係式を求めよ。ただし、 $t > 0$ で A は定数である。
- (4) $t > 0$ の時の速度 u を求めよ。
- (5) 平板に働く単位面積当たりの粘性摩擦力を求めよ。



問題 16 熱力学 設問すべてについて解答すること。

- I カルノーサイクルは等温過程と断熱過程から構成されている。等温過程は温度 T を一定に保つ過程であり、断熱過程はエントロピー S を一定に保つ過程である。今、カルノーサイクルを駆動する際、高温部と低温部の温度はそれぞれ T_1 及び T_2 であった。 T_1 において熱 Q_1 が与えられ、等温過程で体積膨張を伴い外部に仕事を行った。その際、系のエントロピーは S_2 から S_1 に変化した。その後、系の温度が T_2 となるまで断熱膨張させた。次に T_2 においてカルノーサイクルを圧縮し、低熱源に熱 Q_2 を放出させた。更に断熱的に圧縮し温度を T_2 から T_1 に上昇させた。ところで、熱力学の第一法則を系の状態量のみで示すと、温度 T 、エントロピー S 、圧力 p 、体積 V 、内部エネルギー U を用いて、1 サイクルの後に作動物質の状態が元に戻ることを

$$\oint TdS = \oint dU + \oint pdV$$

と表すことが出来る。

次の (1) ～ (3) の問いについて答えよ。

- (1) カルノーサイクルの状態図を温度－エントロピー線図 ($T-S$ 線図) で示せ。
- (2) 熱 Q_1 が与えられる過程において作動物質が吸収したエントロピーと、熱 Q_2 を放出する過程において作動物質が放出するエントロピーが等しいことを T_1 , T_2 , Q_1 , Q_2 , S_1 , S_2 の全てを用いて表せ。
- (3) カルノーサイクルの効率が作動物質のもつ性質を考えることなく得られることを、式を用いて表せ。

II 質量 m [kg] の理想気体 (比熱比 κ , 気体定数 R [J/(kg·K)]) を作動流体とした閉じた系のサイクルについて考える. このサイクルは次のような状態変化からなっており, p - V 線図を図 1 に示した.

状態 1 → 状態 2: 温度 T_1 [K], 圧力 p_1 [Pa], 体積 V_1 [m³] である状態 1 から断熱変化によって温度 T_2 [K], 圧力 p_2 [Pa], 体積 V_2 [m³] である状態 2 に到達する.

状態 2 → 状態 3: 状態 2 から圧力 p_2 [Pa] のままで等圧変化することで, 温度 T_3 [K], 圧力 p_3 [Pa], 体積 V_3 [m³] である状態 3 に到達する. この状態変化で系は熱量 Q_H [J] を受け取る.

状態 3 → 状態 4: 状態 3 から断熱変化することで, 温度 T_4 [K], 圧力 p_4 [Pa], 体積 V_4 [m³] である状態 4 に到達する.

状態 4 → 状態 1: 状態 4 から等圧変化によって状態 1 に到達する. この状態変化で系は熱量 Q_L [J] を捨てる.

次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ.

(1) 作動流体の定圧比熱 c_p [J/(kg·K)] を R, κ のすべてを用いて表せ.

(2) 状態 3 での温度 T_3 [K] を p_1, p_2, κ, T_4 のすべてを用いて表せ.

(3) 状態 4 のエントロピー S_4 [J/K] と状態 1 のエントロピー S_1 [J/K] の差 $\Delta S = S_4 - S_1$ [J/K] を m, c_p, V_3, V_2 のすべてを用いて表せ.

(4) 熱量 Q_L [J] と熱量 Q_H [J] の比 $\frac{Q_L}{Q_H}$ を p_1, p_2, κ のすべてを用いて表せ.

(5) 状態 1 の温度 T_1 [K] である低温熱源と状態 2 の温度 T_2 [K] である高温熱源との間で作動するカルノーサイクルを考える. このカルノーサイクルの熱効率 η を p_1, p_2, κ のすべてを用いて表せ.

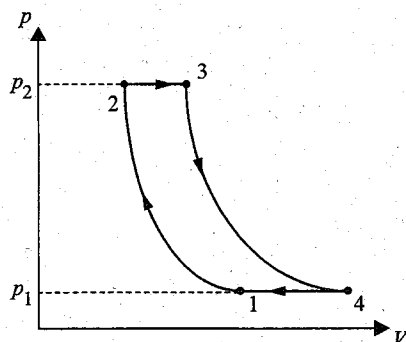


図 1 p - V 線図

問題 17 生産加工 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1)～(4)の問いについて答えよ。

図1はFe-C系平衡状態図の模式図を示している。このとき、状態図中の α 相、 γ 相および Fe_3C 相は、それぞれフェライト相、オーステナイト相およびセメンタイト相である。

- (1) Fe-0.45mass%C を 1000℃ からゆっくりと冷却したときの組織変化について説明しなさい。また、共析温度(A_1 点)直下で得られる組織の量比も算出せよ。
- (2) Fe-0.77mass%C を 1000℃ からゆっくりと冷却すると、フェライト相とセメンタイト相の層状組織であるパーライト組織が形成する。パーライト組織が層状組織になる過程を、オーステナイト相、フェライト相およびセメンタイト相における炭素濃度および炭素原子の拡散の観点から説明しなさい。ただし、セメンタイト相の炭素濃度は 6.69mass% とする。
- (3) 図2は共析鋼の等温変態線図(TTT 線図)の模式図を示している。共析鋼に、次の①から③の熱処理を施したときに形成する組織の種類を、それぞれ答えなさい。なお、熱処理は、800℃において十分な時間保持し、完全にオーステナイト化した状態から開始することにする。
 - ① 800℃ から 400℃ まで急冷した後、400℃ で 10^4 秒間保持し、室温まで焼入れする熱処理。
 - ② 800℃ から 600℃ まで急冷した後、600℃ で 3 秒間保持して 400℃ まで急冷する。さらに、400℃ で 1000 秒間保持した後に室温まで焼入れする熱処理。
 - ③ 800℃ から室温まで焼入れする熱処理。ただし、マルテンサイト変態開始温度(M_s)で生じるマルテンサイト変態は室温に到達するまでに完了するものとする。
- (4) 前問(3)③の熱処理で得られた組織における機械的性質の特徴を強度と延性の両面から答えなさい。

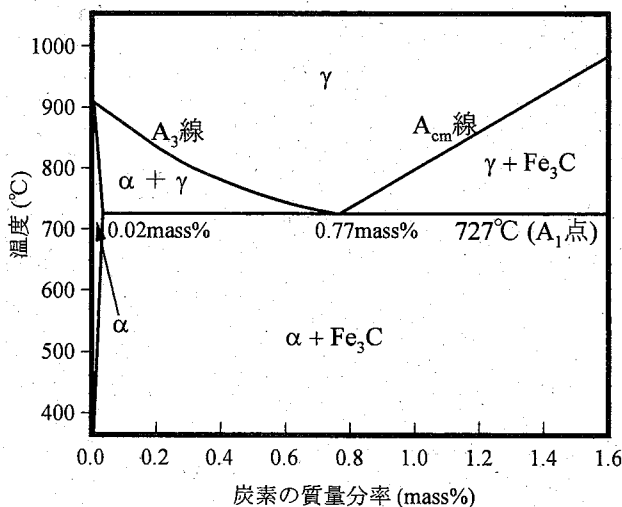


図1 Fe-C系平衡状態図の模式図

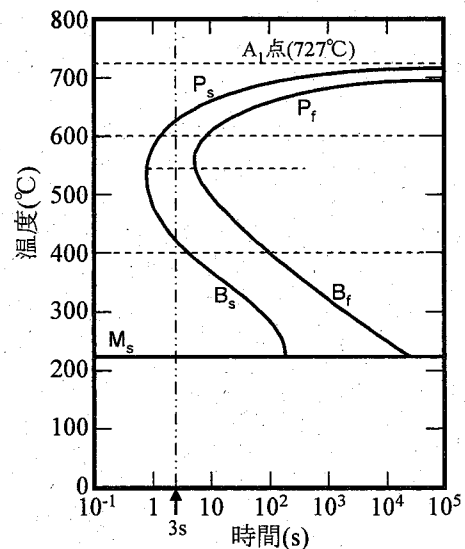


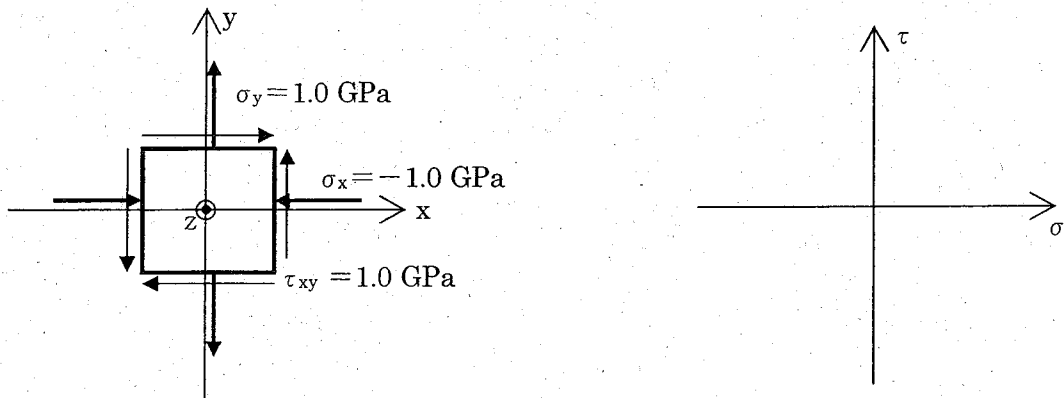
図2 共析鋼における等温変態線図(TTT 線図)の模式図

P_s : パーライト変態開始温度
 P_f : パーライト変態終了温度
 B_s : ベイナイト変態開始温度
 B_f : ベイナイト変態終了温度
 M_s : マルテンサイト変態開始温度

II 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

(1) 等方性金属材料中の微小要素の x 軸に垂直な面, y 軸に垂直な面に下の左図のような応力が作用している (ベクトルは応力が実際に作用している方向を表している). これを 2 次元問題であるとして,

(a) 応力状態を示すモールの応力円を描け. 解答用紙には下の右図に示すように右方向に正の垂直応力 σ , 上方向に正のせん断応力 τ (モール円では右回りのせん断応力を正とする) を座標軸に取って描け.



(b) 主応力 (σ_1, σ_2) の値を計算せよ. ただし, σ の添え字の順番は値の大小とは無関係でよい.

(c) 解答用紙に上の左図と同じ微小要素を描き, その中に最大せん断応力 τ_{\max} が作用する面を, 原点を通る直線で描き, さらにその作用方向を $\uparrow \downarrow$ の様に記入せよ.

(2) 上記の応力状態に, さらに垂直応力 $\sigma_z = 2.0$ GPa が z 軸垂直面 (紙面) に瞬間的に加わる時,

(a) その応力を表す 3 軸応力のモール円を (1) (a) と同様に描け.

(b) この等方性金属材料の降伏応力が $\sigma_y = 3.3$ GPa であるとする, Mises の降伏条件ではこの微小要素は降伏状態にあるか否か, 計算で確かめよ. ただし $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{5} = 2.24$ とし計算せよ.

(c) また Tresca の降伏条件ではこの微小要素は降伏状態にあるか否か, 計算で確かめよ.

(3) 塑性流動中の金属材料のある一点の応力が次の応力テンソル $\{\sigma_{ij}\}$ で表されるとき, 各座標軸方向の伸びひずみ増分と各座標面のせん断ひずみ増分 ($d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}$) の間にはどのような関係があるかを式で示せ.

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 4 \\ 3, & 4, & 4 \end{pmatrix} \text{ GPa},$$

問題 18 量子力学 設問すべてについて解答すること。

I 以下の文章を読んで、(1)～(8)の空欄にあう適切な式を解答せよ。

光の粒子性が現れる現象のひとつに Compton 効果がある。電子によって X線が散乱されるとき、入射 X線と同じ波長をもつ散乱 X線のほかに、入射 X線より波長の長い散乱 X線が観測される。後者の散乱は、X線の光子と電子の弾性衝突 (Compton 効果) として理解できる。この Compton 効果における波長の変化を求めよう。

図 1 のような X線の光子と電子の弾性衝突を考える。運動は xy 平面でおこるものとする。衝突前、電子は静止しているとし、衝突前後の X線の振動数を ν と ν' とする。衝突後の電子の運動エネルギーと運動量の大きさを K と p とする。 m, h, c を電子の静止質量、プランク定数、光速とする。

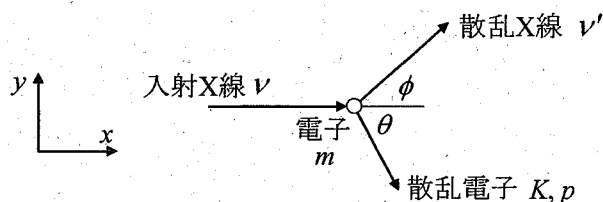


図 1

Einstein の光量子説から、衝突前の X線の 1光子の運動エネルギーは (1) と表され、運動量の大きさは、1光子の運動エネルギーを光速で割ったものなので、(2) と書ける。衝突前後のエネルギー保存則と x, y 方向の運動量保存則は、順に以下のようにあらわされる。

{	(3)	(エネルギー保存則)	(a)
	(4)	(x 方向の運動量保存則)	(b)
	(5)	(y 方向の運動量保存則)	(c)

一方、衝突後の電子の運動エネルギーは、相対論的に扱うと $K = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2$ となることが知られている。この式を p^2 について解いて、 K, c, m で表すと、

$$p^2 = \text{(6)} \quad \text{(d)}$$

と書ける。また、(b) と (c) から θ を消去して、 p^2 を h, ν, ν', c, ϕ で表すと以下ようになる。

$$p^2 = \text{(7)} \quad \text{(e)}$$

(a), (d), (e) から K と p^2 を消去すると、最終的に、Compton 効果における X線の波長の変化 $\Delta\lambda$ (衝突後と衝突前の波長の差) は、 h, m, c, ϕ を用いて、

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \text{(8)} \quad \text{(f)}$$

と求めることができる。

II 次の(1)～(3)の問いについて答えよ。

一次元ポテンシャル $V(x)$ 中の質量 m の粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ がシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \quad (\text{a})$$

に従うとき、粒子の存在確率密度は $\rho(x, t) = \psi^* \psi = |\psi|^2$ 、確率の流れ密度は

$$j(x, t) = \frac{-i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \text{ で与えられる. ここで, } x \text{ と } t \text{ は座標と時間, } i \text{ は虚数単位, } \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

h はプランク定数である. また, $*$ は複素共役を表す. 確率の流れ密度について考えてみよう.

最初に、存在確率密度と確率の流れ密度の関係式(連続の式)を導出しよう.

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ を $\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ を用いて表せ.

(2) 粒子の存在確率密度 $\rho(x, t)$ と確率の流れ密度 $j(x, t)$ が、次の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t) \quad (\text{b})$$

を満たすことを示せ. ここで、シュレディンガー方程式 (a) が成り立つとき、その複素共役の式

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V(x)\psi^* \quad (\text{c})$$

も成り立つことを使ってもよい. また、ポテンシャル $V(x)$ は実関数である.

実際に、ある波動関数が与えられたときの確率の流れ密度を計算しよう.

(3) 質量 m の粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ が、 $V(x)=0$ の領域で、

$$\psi(x, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} (A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}), \quad E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \quad (\text{d})$$

と書くことができる場合を考える. ここで、 A_1 と A_2 は複素数の定数、 E と k は、粒子のエネルギーと波数である. この波動関数に対する確率の流れ密度 $j(x, t)$ を計算せよ.

ただし、答に E を用いてはいけない.

問題 19 電子物性・固体物性 設問すべてについて解答すること。

I 添加した不純物によってキャリア密度が決められている半導体を不純物半導体と呼ぶ。シリコン (Si) は 4 価の元素であり、3 価あるいは 5 価の元素を加え不純物半導体として用いる。図 1 は Si のエネルギーバンド図を示す。図 1 中、 E_c は伝導帯の下端、 E_v は価電子帯の上端を示している。

- (1) 不純物として、燐 (P) を Si に加えたとき、P はドナー、アクセプターのいずれとして働くかを理由とともに述べよ。
- (2) Si のエネルギー・ギャップ $E_g (=E_c - E_v)$ を 1.1 eV、ドナーおよびアクセプターのイオン化エネルギーを 0.1 eV とする。図 1 を参考にして、解答用紙にエネルギーバンド図を描き、その図にドナー準位 E_D 、アクセプター準位 E_A のおよそのエネルギー位置を記入し、それぞれに E_D 、 E_A と印を付けよ。
- (3) Si 結晶中にドナーとアクセプターが両方含まれている場合を考える。ドナー密度を N_D 、アクセプター密度を N_A とする。 $N_D > N_A$ のとき、Si は n 型、p 型いずれの半導体特性を示すか。またその理由を述べよ。説明に図を用いてもよい。
- (4) 図 2 は、Si においてドナー密度 $N_D = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ($N_A / N_D = 0.05$) のときに測定される伝導電子密度 n_c の温度変化を示している。 n_c の変化においては、図中のように、“不純物領域”、“出払い領域”、“固有 (真性) 領域”と呼ばれる 3 つの領域がある。“出払い領域”では、温度変化に対して n_c の変化が小さい理由を、上問 (2) で描いた図を用いて説明せよ。

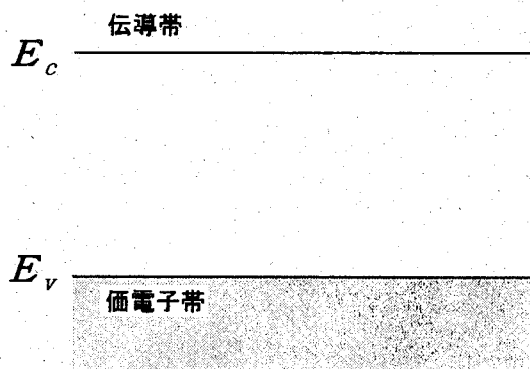


図 1

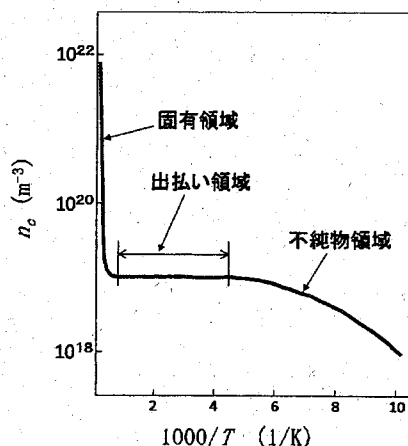
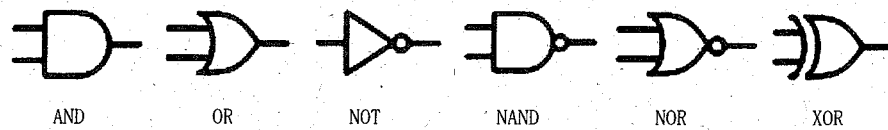


図 2

Ⅱ 異なった不純物をドーピングしたシリコン (Si)，試料①と試料②がある。これらの試料中では、ドナーおよびアクセプタ不純物は全てイオン化し、また真性キャリアは無視できる。以下の設問に答えよ。ただし、素電荷を $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，数値の解答には単位を明示することとする。

- (1) 試料①は不純物として砒素 (As) を $1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ 含んでいる。試料①の導電率 (電気伝導度) を求めよ。ただし、試料①中の伝導電子の移動度を $1 \times 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ，正孔の移動度を $3 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ とする。
- (2) 試料②は不純物として砒素 (As) を $1 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ，硼素 (B) を $9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ 含んでいる。この試料のキャリア密度を求めよ。
- (3) キャリアの散乱機構から試料①と試料②の導電率 (電気伝導度) の大小関係を予想せよ。また、そのように予想した理由を述べよ。

問題 20 計算機基礎 設問すべてについて解答すること。なお、論理回路に用いる素子は、次に示すミル記号を使用せよ。



I 次の(1)～(3)の問いに答えよ。

- (1) ファンイン(fan in), ファンアウト(fan out)について説明せよ。
- (2) D-F, FとT-F, Fについて説明せよ。
- (3) パリティチェックに関する問いに答えよ。

パリティチェックは、データ通信において、データの誤りを検出する手法である。送信側は、パリティビット(1または0)と2進数Nビットの送信データを合わせたN+1ビット中に、1(または0)の個数が偶数(もしくは奇数)になるように調整したN+1ビットを転送する。受信側は、添付されたパリティビットと、2進数Nビットのデータ中に含まれる1(または0)の個数をチェックして、偶数(もしくは奇数)が合わなければデータに誤りがあると判断して、再送を要求する。

ここで、3ビット2進数 $X_2X_1X_0$ に 1 ビットのパリティビット P を付加した 4ビットの 2進信号 $PX_2X_1X_0$ を伝送することを考える。ただし、4ビット中に含まれる1の総個数は偶数とする。このとき Pの論理式と論理回路(可能な限りXOR(排他的論理和)素子を利用せよ)を示せ。必要ならば、以下の真理値表を用いてもよい。

X_2	X_1	X_0	P
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

II 次の(1)～(3)の問いに答えよ。

- (1) 10進数の 2010 を2進数, 8進数, 16進数で示せ。
- (2) 10進数の 17 と 9 をそれぞれ 5ビット2進数 $X=X_4X_3X_2X_1X_0$, $Y=Y_4Y_3Y_2Y_1Y_0$ に変換した後, $X+Y$, $X-Y$, $Y-X$ の計算過程と計算結果を示せ。ただし、減算は2の補数演算で行うものとする。
- (3) 3ビット2進数 $X_2X_1X_0$ の2の補数 $Y_2Y_1Y_0$ を出力する真理値表と出力論理式を示せ。次に、出力論理式を簡単化した回路をOR素子とXOR素子を用いて示せ。必要ならば、以下の真理値表を用いてもよい。

X_2	X_1	X_0	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Ⅲ 次の(1)～(3)の問いに答えよ。

- (1) 2進出力型同期式 8進カウンタ (Q_3, Q_2, Q_1) を3個のJK-F.F(初段F.Fの出力を J_1, K_1 , 2段目F.Fの出力を J_2, K_2 , 3段目F.Fの出力を J_3, K_3 とする)を用いて設計したい。以下の形式で真理値表を完成せよ。真理値表において, J, K の値が 0 または 1 のどちらでも良い場合は, “*”と記述せよ。

	Q_3	Q_2	Q_1	J_3	K_3	J_2	K_2	J_1	K_1
0	0	0	0						
1	0	0	1						
2	0	1	0						
3	0	1	1						
4	1	0	0						
5	1	0	1						
6	1	1	0						
7	1	1	1						
0	0	0	0						

- (2) 簡単化した $J_1, K_1, J_2, K_2, J_3, K_3$ の論理式を示せ。

- (3) (2)の論理式から以下に示す同期式 8進カウンタの回路を完成させよ。なお, 論理式が 1 の場合, 回路は開放(接続なし)とせよ。ここで, CPは Clock Pulse であり, F.Fはクロックの立ち下がりで動作する。 Q_3, Q_2, Q_1 からの計数用引き出し線は, 省略してもよい。

