平成２６年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　　礎

（平成２５年８月２７日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　　意

１．５問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

2 次元直交デカルト座標系上の曲線 C: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) は，$x = a\cos^3 t$，$y = a\sin^3 t$ $(0 \leq t < 2\pi)$ と表すことができる．原点 $(0, 0)$ から曲線 C までの距離が最短となる t の値を $0 \leq t < 2\pi$ の範囲ですべて求め，最短距離を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 (x, y) における接線の傾き dy/dx を t の関数として求めよ．また，曲線 C 上で接線の傾きが 0 になる点 (x, y) および $\pm\infty$ となる点 (x, y) をそれぞれ求め，それをもとに x 軸，y 軸と曲線 C の概形を図示せよ．

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ．

(4) 曲線 C によって囲まれる面積 S を求めよ．

$\boxed{2}$

R^n は n 次元実数ベクトル空間を表す．実数を成分にもつ列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^2$, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^3$, $\boldsymbol{z} \in \mathrm{R}^2$ に対して，次式が成り立っている．

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = \mathrm{B}\boldsymbol{y}$$

ここで

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\|\boldsymbol{x}\| \leq 2$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|\boldsymbol{y}\|$ の最大値を求めよ．また，$\|\boldsymbol{y}\|$ が最大となるときの $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ．ここで $\|\boldsymbol{x}\|$ は $\boldsymbol{x}$ のノルムを表し，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ である．また $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

なお，$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $d_1 > d_2 > 0$ とすると，$\mathbf{0}$ でない任意の $\boldsymbol{x}$ に対して不等式 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\boldsymbol{x} \leq d_1\|\boldsymbol{x}\|^2$ が成り立ち，さらに等号が成立する $\boldsymbol{x}(\neq \mathbf{0})$ が存在する．この不等式を用いてよい．

(2) $\mathrm{M} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\mathrm{A}$ とおく．行列 M の固有ベクトルを求め，相異なる固有ベクトルが互いに直交することを示せ．なお固有ベクトルのノルムは 1 に正規化するものとする．

(3) 行列 M の固有ベクトルを列に並べてできる行列を U とおく．なお固有ベクトルは対応する固有値が大きいものから順に並べるものとする．このとき，$\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{U}$ を計算せよ．

(4) $\|\boldsymbol{x}\| \leq 2$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|\boldsymbol{z}\|$ の最大値を求めよ．また，$\|\boldsymbol{z}\|$ が最大となるときの $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ．

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$xy\frac{dy}{dx} = x^2 + 2y^2$$

(2) 次の常微分方程式は完全微分形である．完全微分形であることを示した上で，この常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(y^2 + x^2)\frac{dy}{dx} = e^x \cos x - 2xy$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = \sin 2x$$

(4) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$$

（ヒント：$xy = u$ とおく．）

4

電極面積 S, 電極間距離 d の平行平板コンデンサにおいて，一方の電極が直流電圧 V_0 (>0) の電源に接続され，他方の電極が接地され（その電位を 0 [V]とする），コンデンサが十分に充電されている．このとき，以下の各問いに答えよ．ただし，電極間の電気力線は一様であり，電極に対して垂直成分のみを有するものとする．また，真空の誘電率を ε_0 とする．

(1) 図 1 のように電極間が空気（比誘電率 $\varepsilon_r=1$）で満たされている場合，電極間の電界 E_1，静電容量 C_1，電極上の電荷 Q_1，電極間に蓄えられている静電エネルギー U_1 をそれぞれ求めよ．

(2) 電極と同じ形状と面積の断面を持ち，厚さ d の固体誘電体（$\varepsilon_r=4$）で電極間が満たされている場合（図 2），電極間の電界 E_2 を E_1 を用いて表せ．同様に，静電容量 C_2 を C_1，電極上の電荷 Q_2 を Q_1，電極間に蓄えられている静電エネルギー U_2 を U_1 を用いてそれぞれ表せ．

(3) 電極間が空気で満たされている場合，コンデンサを直流電源から外した後，コンデンサの電極間距離を $d/2$ に縮めたとき，電極間の電位差 V_3 を V_0，電界 E_3 を E_1，静電容量 C_3 を C_1，電極上の電荷 Q_3 を Q_1，電極間に蓄えられている静電エネルギー U_3 を U_1 を用いてそれぞれ表せ．

(4) 電極間が空気で満たされた平行平板コンデンサに直流電源が接続された状態で，電極と同じ形状と面積の断面を持ち，厚さ $d/4$ の固体誘電体（$\varepsilon_r=4$）が図 3 に示す位置 A－B 間に電極に平行に挿入されている場合，電極間の電位分布と電界分布を直流電源が接続された電極からの距離 x の関数としてそれぞれ図示せよ．また，電極間の静電容量 C_4 を C_1 を用いて求めよ．

(5) (4)において，固体誘電体の代わりに同じ形状の金属導体が A－B 間に挿入されている場合，電極間の電位分布と電界分布をそれぞれ図示せよ．また，A－B 間に挿入されている金属導体の電位 V_5 を V_0 を用いて求めよ．

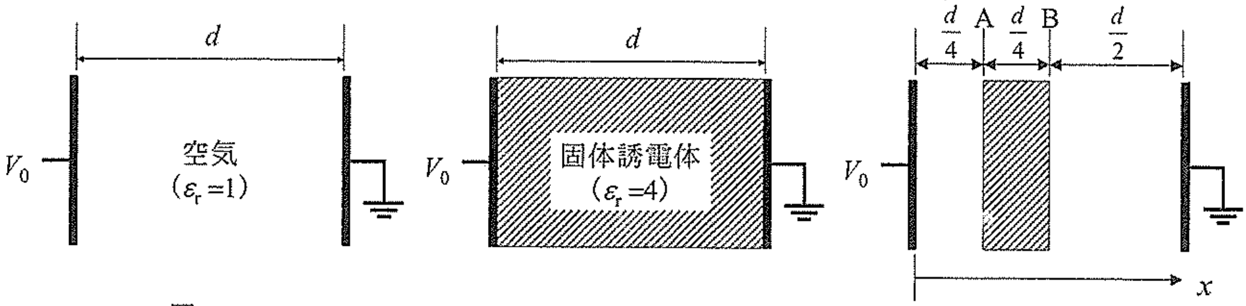

図1　図2　図3

5

以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，有限長の直線状の導線 AB があり，B から A の方向に電流 I が流れている．導線 AB の垂直二等分線上の点 P における磁界の大きさを求めよ．ただし，導線 AB の中心 Q と点 P の距離を l，$\angle PAQ = \angle PBQ = \theta_1$ とし，解答には I, l, θ_1 のみを用いること．また，補足 1 に示すビオ・サバールの法則を用いてもよい．

(2) 図 2 のように，n 本の直線状導線により正 n 角形を作り，電流 I を流した．図中の点 P は，正 n 角形の中心 O を通り正 n 角形と垂直な線上にある．点 P における磁界の大きさを求めよ．ただし，中心 O と点 P の距離を x，中心 O と正 n 角形の頂点の距離を a とし，解答には x, a, n, I のみを用いること．

(3) (2)の解答を用いて，半径 a の円電流 I が中心軸上の点 P に作る磁界の大きさは，

$$H = \frac{Ia^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$

で与えられることを示せ．ただし，x は円電流の中心と点 P との距離である．

図 3 のように，多層に巻かれたソレノイドに電流 I が流れている．ソレノイドの内径と外径はそれぞれ a_1，a_2，長さは h，全巻数は N である．ソレノイドの中心軸を z 軸とし，ソレノイドの中点を原点 O とする．以下の問いに答えよ．

(4) 図中に示すように，原点 O から距離 z にある微小線分 dz とソレノイドの中心軸から距離 a にある微小線分 da とで作られる微小断面積 $dz \cdot da$ を考える．これに含まれる導線の巻数 dN を求めよ．

(5) 微小断面積 $dz \cdot da$ に含まれる導線が原点 O に生ずる磁界の大きさを求めよ．

(6) ソレノイド全体が原点 O に生ずる磁界の大きさを求めよ．なお，必要であれば補足 2 に示す積分公式を用いてもよい．

[補足 1]　ビオ・サバールの法則: 電流 I が流れているとき，その電流素分 $I d\boldsymbol{s}$ によって $\boldsymbol{r}$ だけ離れた点 P に生ずる磁界 $d\boldsymbol{H}$ は $d\boldsymbol{H} = \dfrac{I}{4\pi}\dfrac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ で与えられる．

[補足 2]　$\displaystyle\int \frac{r^2 dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

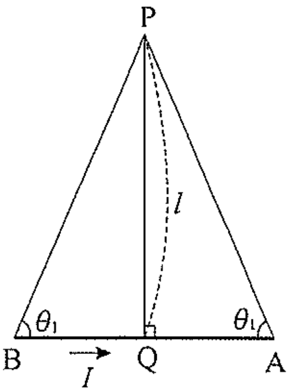

図 1

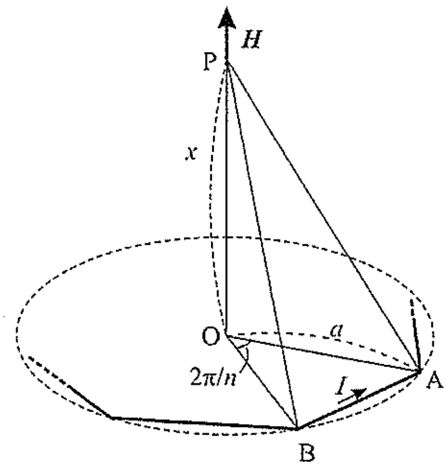

図 2

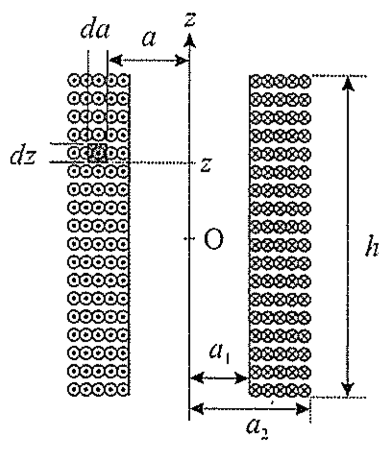

図 3