

システム情報学専攻
修士課程入学試験問題
専門科目 システム情報学

平成22年8月24日（火） 10:00～13:00

出題される6問のうち、3問のみを選択して解答せよ

注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
- (2) 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。ただし試験問題の内容に関する質問に対しては、原則として答えない。
- (3) 答案用紙3枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
- (4) 各答案用紙の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。氏名は書いてはならない。
- (5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
- (6) 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
- (7) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は、適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい。
- (8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

選択した問題番号			
----------	--	--	--

上欄に選択した3つの問題番号を記入すること。

第1問

ランダムに発生する $2N$ 個 ($N > 0$) の実数を 1 周期分のデータとする周期 $2N$ の実数信号 $x[n]$, $-\infty < n < \infty$ を考える. ここで n, N は整数であり, その計測値 $y[n]$ は, $e[n]$ をノイズとして以下のように書かれるものとする.

$$y[n] = \sum_{m=-N+1}^N h[m]x[n-m] + e[n], \quad -N+1 \leq n \leq N$$

ただし $h[n]$, $e[n]$ ($-N+1 \leq n \leq N$) は実数である. 本問題において $x[n]$ の離散フーリエ変換は, j を虚数単位として

$$X[k] \equiv \sum_{n=-N+1}^N x[n] \exp\left(-j \frac{\pi}{N} kn\right), \quad -N+1 \leq k \leq N$$

と定義される. ノイズと信号の間に相関はなく, $X[k]$ の期待値および $e[n]$ の離散フーリエ変換 $E[k]$ の期待値は k によらず 0 であるものとする. また, $|X[k]|^2$ および $|E[k]|^2$ の期待値は, それぞれ k によらない定数 a および b であるものとして以下の問いに答えよ.

- (1) $h[n]$ の離散フーリエ変換が

$$H[k] = \begin{cases} C, & |k| \leq B \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

のとき $h[n]$ をなるべく簡単な式で表せ. ただし B は N 以下の正整数, C は正の実定数である.

- (2) 未知信号 $x[n]$ の計測値 $y[n]$ の一部を含む以下の系列

$$d[n] = \begin{cases} y[n], & n = 3i, i: \text{整数} \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

を考える. ただしこの問いに限り, n によらず $e[n] = 0$ とし, N は 3 の倍数とする. また問い(1)の $h[n]$ を仮定する. 系列 $d[n]$ が与えられたとき, そこから $y[n]$ を一意に決定できるために B がみたすべき必要十分条件を答えよ.

- (3) $h[n]$ の離散フーリエ変換を

$$H[k] = \begin{cases} C \exp(-jak), & |k| \leq B \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

とする．ただし B は N 以下の正整数， C は正の実定数であり， α は 1 より小さい正の実定数である．

$$r = \sum_{n=-N+1}^N y[n]x[n-\beta]$$

の期待値 \bar{r} を最大にする整数 β を求めよ．ただし β を答える際に ± 1 の誤差は許容されるものとする．

- (4) 問い(3)の $h[n]$ を仮定し，周期 $2N$ の実数系列 $p[n]$ ， $-\infty < n < \infty$ を用いて $y[n]$ から

$$s[n] = \sum_{m=-N+1}^N p[n-m]y[m]$$

によって $x[n]$ を推定することを考える．

- (a) $E = \sum_{n=-N+1}^N (s[n] - x[n])^2$ の期待値 \bar{E} を， a , b , $H[k]$, および $p[n]$ の離散フーリエ変換 $P[k]$ を用いて表せ．

- (b) \bar{E} を最小にする $p[n]$ を求めよ．

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第2問

図1, 図2は, コンデンサとスイッチ, ならびに演算増幅器を用いて, 電荷を介した電圧信号の処理や, 電荷の転送を行う回路を示す. 以下の問いに答えよ. ただし, スイッチ切り替え後の電荷の移動は十分に短時間で終了するものとし, 用いられる演算増幅器は理想的と仮定してよい.

- (1) 図1の回路において, V_{in} は時間的にゆるやかに変化する電圧で, SW_1 は常に1側に接続し, SW_4 は常にOFFとする. この回路は周期的に動作し, 1) 周期の開始直前では SW_2 がON状態, SW_3 がOFF状態, 2) 周期の開始と同時に SW_2 をOFF, 3) 次に SW_3 をONし, 電荷の移動がなくなった後OFF, 4) 次に SW_2 をON, という一連の動作を時間周期 T で繰り返す. 第 n 周期の最初の時刻 $t = nT$ において C_2 の上側電極に蓄えられた電荷を Q_n とするとき, 上記の一連の動作後(次周期の開始時)の電荷 Q_{n+1} を $Q_n, V_{in}(t), n, T, C_1, C_2$ を用いて表せ.
- (2) 図1の回路において, この問いにおいてのみ, コンデンサの容量は $C_1 = C_2$, V_{in} は時間的に一定で, SW_1 は各周期の開始より十分に前に1側に接続するか2側に接続するかが外部信号によって切り替わるとする. 第0周期の直前では, SW_4 によって C_2 上の電荷はリセットされている. 第 i 周期開始時における SW_1 の接続を, 1に接続されるとき $a_i = 1$, 2に接続されるとき $a_i = 0$ のように表すものとする. 第 n 周期 ($n \geq 0$) の開始時における出力電圧 $V_{out}[n]$ を $V_{in}, n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ を用いて表せ.
- (3) 図2の回路において, スイッチ SW_1 がOFF状態にある時に, コンデンサ C_1 には, 通常は開放端である入力端子 Q_{in} から流入した電荷 q が蓄えられている. この電荷を同軸ケーブル CX を通して出力端子 Q_{out} 側のコンデンサ C_2 に転送したい. 同軸ケーブルには, 心線と外側導体の間に全体で C_{CX} の容量がある. 転送に際しては, まず SW_2 と SW_3 をONし, SW_4 を1側に接続し, 十分な時間の後で SW_2 をOFFし, 次に SW_1 をONした. 十分な時間後における出力電圧 V_{out} を求めよ.
- (4) 図2の回路において転送された電荷を読み出すため, 問い(3)に示した転送動作に続けて SW_3 をOFFし, 次に SW_2 をONし, 次に SW_4 を2側に接続した. 端子 Q_{out} を接地電位に短絡した際に流出する電荷量を求めよ. また, C_1 の電荷を零に初期化し, 次の Q_{in} からの電荷の流入に備えるには, SW_1 から SW_4 をどのように操作すればよいか.

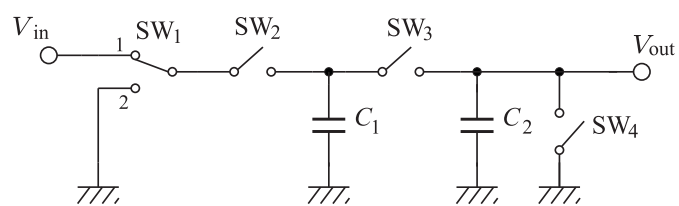


図 1

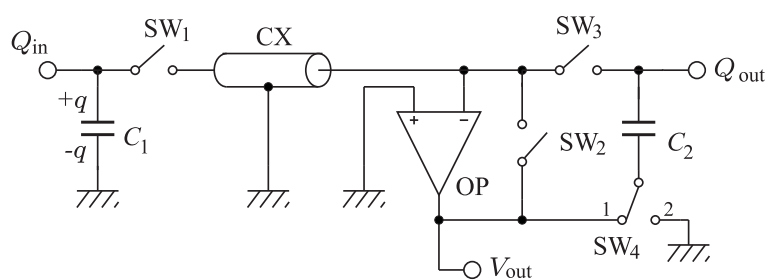


図 2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第3問

- (1) 図1の線形フィードバック系を考える．ただし
- P
- の伝達関数を

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

とし，また $C = K$ (K は正の実定数) とする．一巡伝達関数のナイキスト線図を描け．

- (2) 図1の線形フィードバック系を考える．ただし
- P
- の伝達関数を

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 2}$$

とし，また $C = K$ (K は正の実定数) とする．このとき閉ループ系は K の値に応じて安定，不安定の場合に分けられる．それぞれの場合における一巡伝達関数のナイキスト線図を描け．また閉ループ系が安定限界となる K の値を求めよ．

- (3) 時間に関する信号
- $f(t)$
- のラプラス変換
- $F(s)$
- が，

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

と表されているものとする．ただし $a(s)$, $b(s)$ は s の実数係数多項式で互いに既約であり， $a(s)$ の次数は n ， $F(s)$ は漸近安定で厳密にプロパーかつ重複する極を持たないとする． $F(s)$ の部分分数展開を

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - \alpha_i}$$

と表すとき (ただし α_i , β_i は定数) ，

$$\beta_i = \frac{b(\alpha_i)}{a'(\alpha_i)}$$

となることを用いて，次の式が成り立つことを示せ．ただし $a'(s)$ は $a(s)$ の s に関する1階微分を表す．

$$\int_0^{\infty} \{f(t)\}^2 dt = \sum_{i=1}^n \frac{b(\alpha_i)b(-\alpha_i)}{a'(\alpha_i)a(-\alpha_i)}$$

- (4) 問い(2)において，閉ループ系が漸近安定となる $C = K$ (K は正の実定数) の場合を考える． $v(t)$ から $y(t)$ までの伝達関数の，時刻 $t = 0$ からのインパルス応答 $\tilde{y}(t)$ を用いて

$$V = \int_0^{\infty} \{\tilde{y}(t)\}^2 dt$$

と定義する．閉ループ系の特性方程式が重根を持たない場合について， V を K を用いて表せ．またこのとき， V が最小となる K を求めよ．

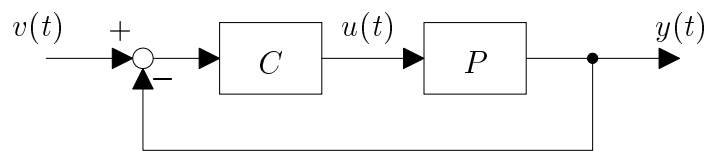


図 1

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第 4 問

順序回路に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 図 1 は状態遷移図であり, q_1, q_2 は状態を, 状態間の有向枝は状態遷移を, 有向枝のラベルは状態遷移時の入力/出力を, それぞれ表す. この状態遷移図を図 2 に示す順序回路で実現し, 状態 q_1, q_2 で D フリップフロップ(D-FF) が 0 と 1 をそれぞれ出力するようにしたい. d_{in} と z を, x および d_{out} を用いた論理式で表せ.

- (2) ミーリー型の順序回路は以下の 5 項の組 $(X, Q, Z, \delta, \omega)$ で定義される.

X : 入力値の集合

Q : 状態の集合

Z : 出力値の集合

$\delta: X \times Q \rightarrow Q$; 状態遷移関数

$\omega: X \times Q \rightarrow Z$; 出力関数

例えば, 問い(1) で用いた順序回路を $M_0(X_0, Q_0, Z_0, \delta_0, \omega_0)$ とすると, δ_0, ω_0 は表 1 で示される. これを参考に, 図 3 に示す順序回路 $M_1(X_1, Q_1, Z_1, \delta_1, \omega_1)$ の δ_1 と ω_1 を示せ. ただし $X_1 = \{x \mid 0, 1\}$, $Q_1 = \{q_{11}, q_{12}\}$, $Z_1 = \{z_1 \mid 0, 1\}$ であり, D-FF の出力 d_{out} は, 状態 q_{11} のとき 0, 状態 q_{12} のとき 1 であるとする.

- (3) 図 4 に示すように, 問い(2) で用いた M_1 と別の順序回路 $M_2(X_2, Q_2, Z_2, \delta_2, \omega_2)$ が並列に動作する順序回路 $M(X, Q, Z, \delta, \omega)$ がある. $X_2 = \{x \mid 0, 1\}$, $Q_2 = \{q_{21}, q_{22}, q_{23}\}$, $Z_2 = \{z_2 \mid 0, 1\}$, $X = \{x \mid 0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$, $Z = \{z \mid 0, 1\}$ であり, z は z_1 と z_2 の排他的論理和である. このとき, δ, ω が表 2 で与えられるような δ_2 と ω_2 を 1 つ示せ. ただし M の状態が q_1, q_2, q_3 のとき M_1 の状態は q_{11} であり, M の状態が q_4, q_5, q_6 のとき M_1 の状態は q_{12} であることは分かっているものとする.

- (4) 順序回路において, 2 つの状態 q_i と q_j に同じ入力系列を加えたときの出力系列が異なれば, その入力系列は状態 q_i と q_j を区別するという. 2 つの状態 q_i と q_j を区別する長さ s (s は自然数) または s 未満の入力系列が存在しないとき q_i と q_j は s 次等価であり, 2 つの状態 q_i と q_j を区別するいかなる入力系列も存在しないとき q_i と q_j は等価である.

- (a) s 次等価な状態が全て判明しているときに, s 次等価である 2 つの状態が $(s+1)$ 次等価であるか否かを判定する方法を示せ.
- (b) s 次等価な状態が全て判明しているときに $(s+1)$ 次等価な状態を全て求める方法が存在することを利用して, 与えられる 2 つの状態が等価であるか否かを判定するアルゴリズムを示せ.

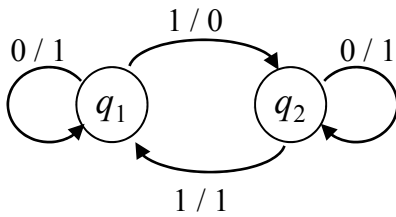


図1

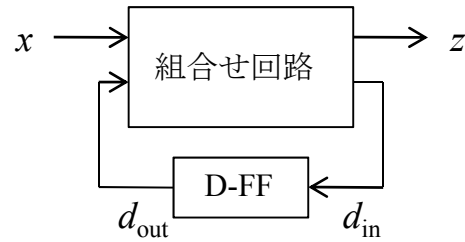


図2

δ_0			ω_0		
状態	入力 x		状態	入力 x	
	0	1		0	1
q_1	q_1	q_2	q_1	1	0
q_2	q_2	q_1	q_2	1	1

表1

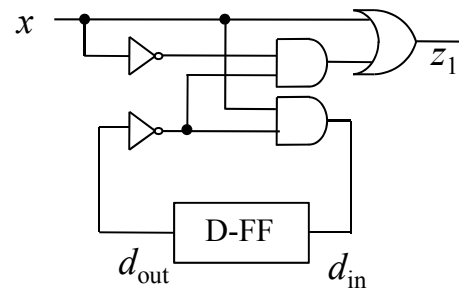


図3

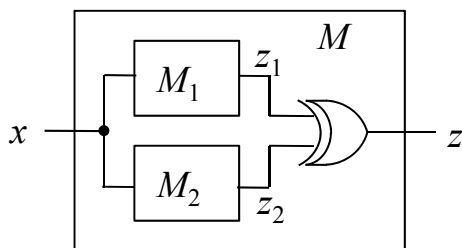


図4

δ			ω		
状態	入力 x		状態	入力 x	
	0	1		0	1
q_1	q_2	q_6	q_1	0	1
q_2	q_3	q_4	q_2	1	0
q_3	q_1	q_5	q_3	1	1
q_4	q_2	q_3	q_4	1	1
q_5	q_3	q_1	q_5	0	0
q_6	q_1	q_2	q_6	0	1

表2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第5問

図1のように、段差が b の上段・下段の2つの水平面があり、その間は半径 b の円筒形の4分の1の形のスロープとなっている。

このスロープの最急傾斜線（円弧）に沿って、半径 a 、質量 m の一様な質量分布の球を転がす事を考える（ただし $a < b$ とする）。なお、重力加速度を g とし、スロープ面と球との間の静止摩擦係数は μ_s であるとする。

このスロープを球が転がる円弧の曲率中心と転がす球の中心とを結ぶ直線が鉛直線方向と成す角を θ とし、初期状態として $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \leq \pi/2$) の位置のスロープ上に球を置いて静かに手を離すとき、以下の問いに答えよ。

ただし、半径 a 、質量 m の一様な質量分布の球の重心まわりの慣性モーメントの値は $2ma^2/5$ である。また、球がすべらずに転がる際には、転がり摩擦は0と考えて良いとする。

- (1) 球がすべらずに転がったとすると、球がスロープの最下点 A に達した際の球の重心の移動速度、および、重心まわりの回転の角速度の大きさを求めよ。
- (2) 上記のように球がすべらずに転がるためには、 θ_0 と μ_s はどのような関係を満たす必要があるか。

図1のように、スロープを下った先の下段は A から B までは表面は完全になめらかな水平面で球との間での摩擦は生じないものとする。B の位置には球が転がってくる進行方向と直交する垂直な壁があるが、この壁も完全になめらかで球との間に摩擦は生じず、また、この壁と球との間の衝突は反発係数 $e = 1$ の完全弾性衝突になるものとする。

球が B の壁に衝突して戻ってくる際に、その通りに球との間の運動摩擦係数が μ_k の敷物を敷いておき、球にその上を通過させる（敷物は床と固定され、相互に滑らず、また、厚さは無視できて長さは十分に長いものとする）。

- (3) 球がこの敷物の上に乗った時刻を $t = 0$ とし、その後の球の、a) 重心の移動速度、b) 重心まわりの回転の角速度、c) すべり速度、の時間変化を1つのグラフにまとめて概略を示し、球の挙動について説明せよ。
- (4) 球がこの敷物の上に乗ってからすべりがなく転がるようになるまでに要する時間、および、その際の球の中心の移動速度を求めよ。

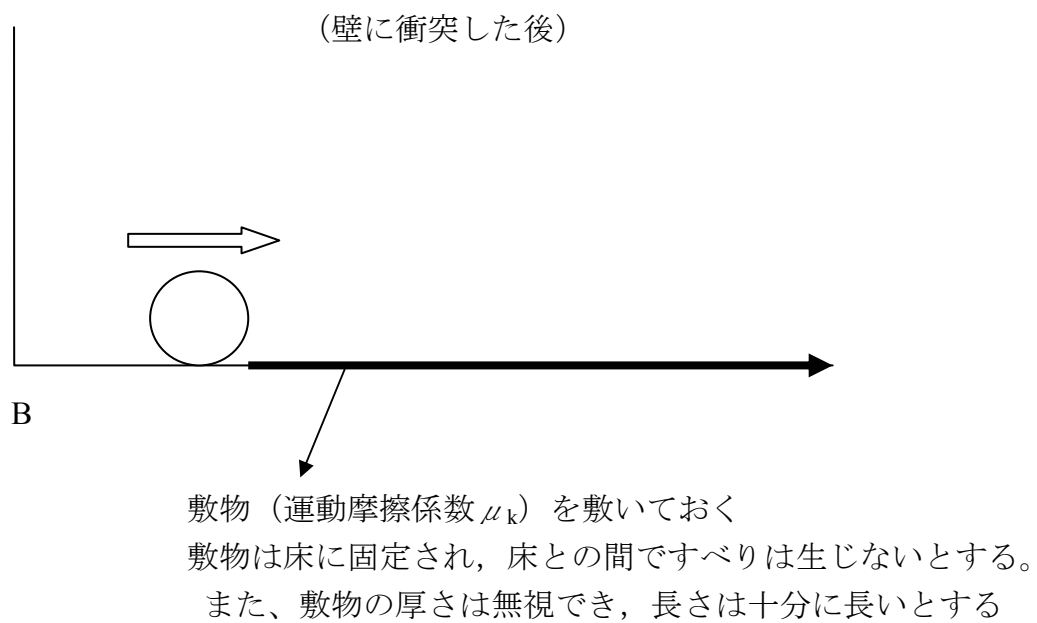
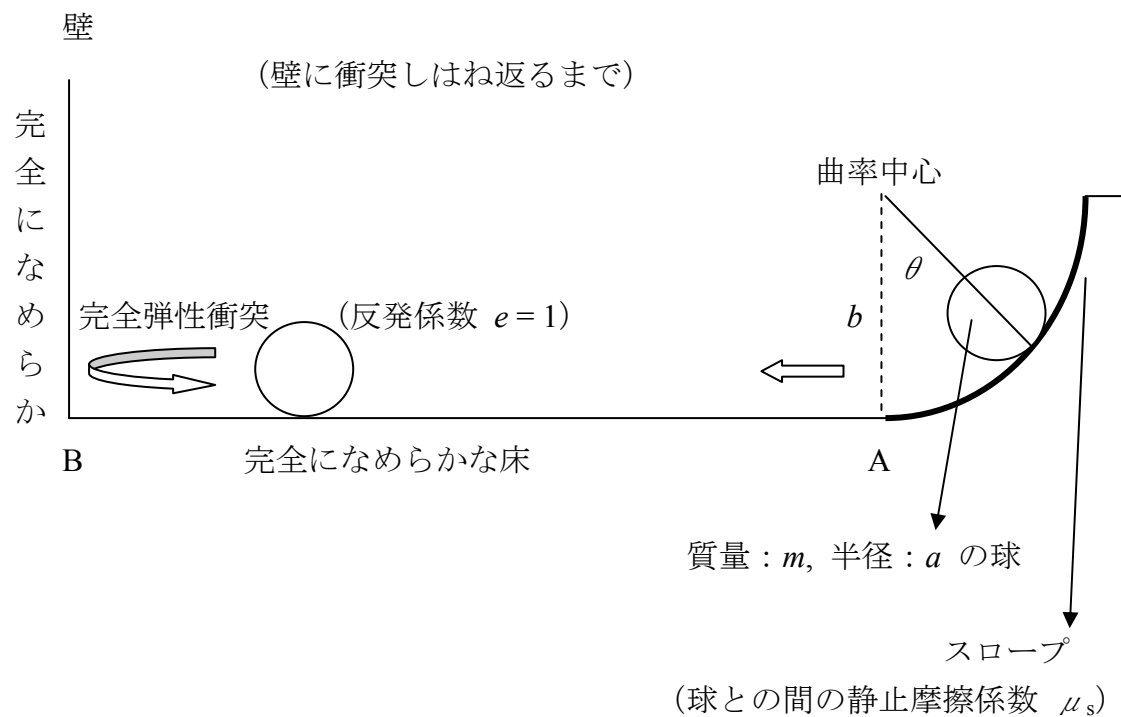


図 1

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第6問

図1, 図2, 図3のように, 真空中に z 軸負方向を向いた磁束密度 B の一様な静磁場があり, 2組の平板間距離 w の平行導体平板対 C_R と C_L が yz 平面を挟み, 互いに微小距離 d だけ離れて並べて置かれている. これらの平板の電氣的抵抗は無視してよい. 各平板は xy 平面に平行であり, C_{RU} と C_{RD} は $x \geq d/2$ の領域に, C_{LU} と C_{LD} は $x \leq -d/2$ の領域に, C_{RU} と C_{LU} は $z = w/2$ の平面上に, C_{RD} と C_{LD} は $z = -w/2$ の平面上に置かれている. C_{LU} と C_{LD} は電氣的に接続された上, 接地されており, C_{RU} と C_{RD} は電氣的に接続された上, その電位は電源装置により $V(t)$ となっている. 原点に置かれたイオン源から荷電粒子 P (電荷量 $q > 0$, 質量 m)が発生して x 軸正方向に進み, 平板対 C_R の内部に入った瞬間の時刻を $t = 0$, 速度を $\mathbf{u}(0) = (u_0, 0, 0)$ (ただし $u_0 > 0$)とし, 以後, P は速度 $\mathbf{u}(t)$ で運動するものとする. P は yz 平面の近傍(C_R と C_L の間隙)を通過するたびに, C_R と C_L の電位差に応じて生じる電場によって加速(または減速)されるものとする. この電場は z 軸方向には力を及ぼさず, また, d および w は十分に小さな値であり, P が C_R と C_L の間隙を通過する時間は無視できるものとする. また, C_R と C_L の各平板は十分に大きく, 重力の影響は無視でき, $|\mathbf{u}(t)|$ は光速に比べて十分に小さいものとして, 以下の問いに答えよ.

- (1) $V(t) = 0$ としたとき, P はどのような運動をするか, その軌道を図示せよ.
また, P が yz 平面を n 回目通過した瞬間の時刻 T_n , P の位置 \mathbf{p}_n , 通過した直後の速度 \mathbf{u}_n を求めよ.
- (2) $V(t) = V_0$ ($V_0 > 0$)としたとき, P はどのような運動をするか, その軌道を図示せよ. また, P が yz 平面を n 回目通過した瞬間の時刻 T_n , P の位置 \mathbf{p}_n , 通過した直後の速度 \mathbf{u}_n を求めよ.
- (3) $V(t) = V_1 \cos(2\pi ft)$ としたところ, P は図4のように, yz 平面を通過するたびに, その回転半径を少しずつ増大させた. 回転半径の2乗を h ずつ増大させるために V_1 と f が満たすべき条件を求めよ. また, P が yz 平面を n 回目通過した瞬間の時刻 T_n , P の位置 \mathbf{p}_n , 通過した直後の速度 \mathbf{u}_n を求めよ.
- (4) 以上は古典的サイクロトロンの基礎原理を示すものであるが, 実際の装置では, 上でおいた仮定のうちのどれが厳密には成立せず, どのような問題が生じ得るかを簡潔に説明せよ. また, それらの問題に対してどのような対策が講じ得るかも簡潔に説明せよ.

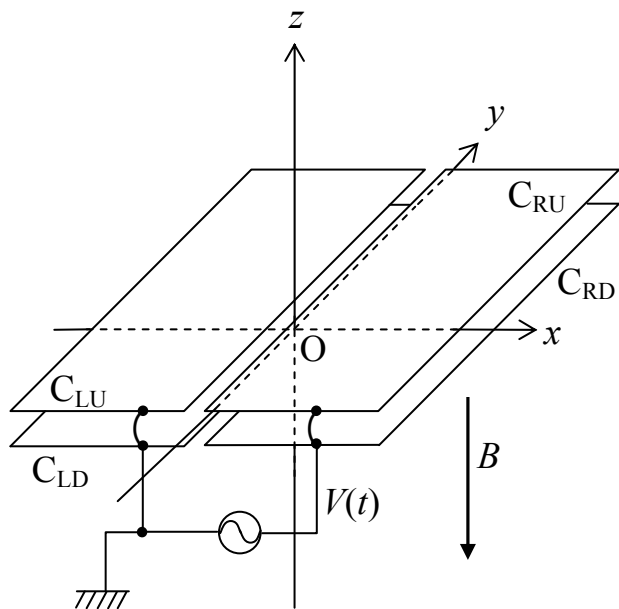


図 1

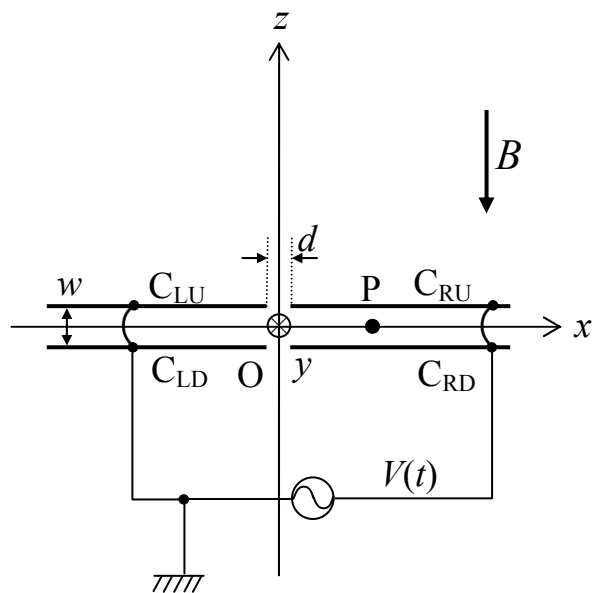


図 2

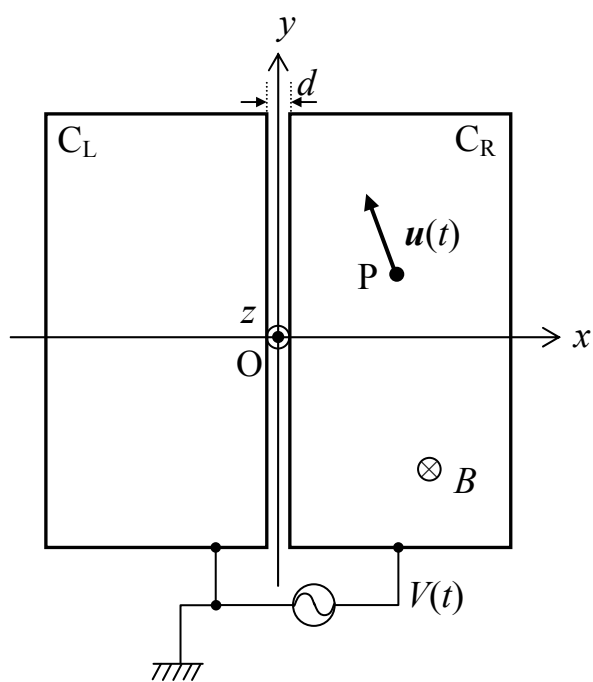


図 3

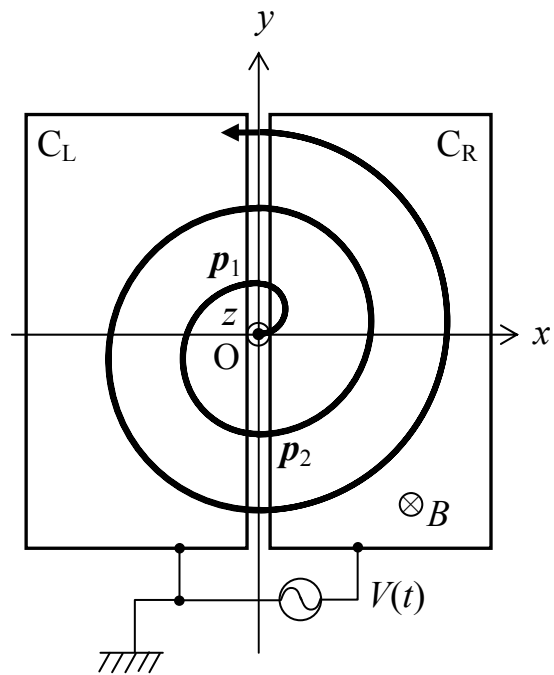


図 4

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

