専門科目 (午前)　　25　大修

数理・計算科学　　時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ．
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

問 1 (基礎問題)

以下では，ベクトルや行列の成分はすべて実数とする．$n \times n$ 対称行列 A が半正定値であるとは，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} \geq 0$ となることである．ただし，$^\top$ はベクトルまたは行列の転置を表す．また，次の命題は証明なしで用いて構わない．

- 対称行列 A は適当な直交行列 U と対角行列 D を用いて $A = U\,D\,U^\top$ と表せる．
- 対称行列 A が半正定値であるための必要十分条件は，その固有値がすべて非負となることである．

(1) 任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^\top$ が半正定値となることを示せ．

(2) $n \times n$ 半正定値対称行列 A に対して $A = B^2$ を満たす半正定値対称行列 B が存在することを示せ (行列 B の一意性は示さなくてよい)．

$n \times n$ 対称行列 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ に対して $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{i,j}$ と定義する．

(3) $n \times n$ 対称行列 A が，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 X に対して $\langle A, X\rangle \geq 0$ を満たすならば，A もまた半正定値となることを示せ．(ヒント: (1) の結果を用いる．)

(4) 逆に $n \times n$ 対称行列 A が半正定値ならば，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 X に対して $\langle A, X\rangle \geq 0$ となることを示せ．(ヒント: (2) の結果を用いる．)

問 2 (基礎問題)

$x \in \mathbb{R}$ に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

と定義する．

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

(2) $f(x)$ は C^1 級であることを示せ．

(3) $f(x)$ は C^∞ 級か否かを述べよ．

問 3 (基礎問題)

以下では正の整数 $\mathbb{Z}^+$ から正の実数 $\mathbb{R}^+$ への関数のみを考える．任意の関数 f, g に対して，

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq n_0\ \ [f(n) \leq c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = O(g(n))$$

と定義する．また，任意の関数 f, g に対して，

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \geq n_0\ \ [f(n) \geq c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

と定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $1 + 3n \log_2 n = O(n^2)$ を定義にしたがって証明せよ．

(2) $f_1(n) = \Omega(g_1(n))$ かつ $f_2(n) = \Omega(g_2(n))$ ならば，$f_1(n) \cdot f_2(n) = \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$ であることを証明せよ．

(3) 次の命題は真であるか偽であるか? 真の場合は証明を与え，偽の場合は反例を挙げ，それが反例であることを説明せよ．

「任意の関数 f, g に対して，$f(n) = O(g(n))$ または $g(n) = O(f(n))$ である．」

問 4 (一般問題)

$\mathbb{Z}$ を整数のつくる加法群とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を位数 9 の巡回群とし，$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を自然な射影とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ について以下の問に答えよ．

(1) $\sigma(p(1)) = p(2)$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の位数を求めよ．

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の元の位数として表れる数を列挙せよ．

問 5 (一般問題)

D は整数を両端点にもつ開区間の全体とする．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相とする．さらに $\mathcal{O}$ の部分集合族 $\mathcal{O}_*$ を

$$\mathcal{O}_* = \left\{ \bigcup_{I \in S} I \;\middle|\; S \subset D \right\}$$

と定義する．つまり $\mathcal{O}_*$ に属する集合は空集合か，あるいは，端点が整数であるような開区間の和集合で表される．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_*$ を示せ．

(2) $\mathcal{O}_*$ は $\mathbb{R}$ の位相を定めることを示せ．

(3) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ はハウスドルフ空間になるか否かを述べよ．但し，与えられた位相空間 X がハウスドルフ空間であるとは，X の任意の相異なる 2 点 x, y に対して，X の開集合 U, V が存在し，$x \in U$ かつ $y \in V$ で，さらに $U \cap V$ が空集合となるとき，をいう．

(4) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_*)$ への連続写像で，$(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への写像とみなすと連続にならないような具体例を挙げよ．

問 6 (一般問題)

X を $C[0,\pi]$ にノルム $\|\phi\| = \max_{0\le s\le\pi}|\phi(s)|$ を導入して得られるバナッハ空間とする．$f \in C[0,\pi]$ に対して，積分方程式

$$x(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)dt = f(s) \qquad (*)$$

の解 x の存在を議論する．そのため，X から X への写像 F を

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \sin(s-t)x(t)dt + f(s) \qquad (x \in X)$$

と定義する．

(1) F が線形写像となるための f の条件を求めよ．

(2) F は連続写像となるか否かを述べよ．

(3) 積分方程式 $(*)$ に解は存在するか否か，また，存在する場合には，その解はただ一つか否かを述べよ．

問 7 (一般問題)

地域 A および地域 B でそれぞれ 14 単位と 10 単位のガレキがあり，それらを受入れ自治体 C，D，E，F まで輸送して処理することを考える．受入れ自治体の処理能力は C が 3 単位，D が 6 単位，E が 10 単位，F が 5 単位である．地域 A, B でのガレキ総量と受入れ自治体 C，D，E，F での処理能力の総量が同じであることに注意せよ．地域 A, B から受入れ自治体 C，D，E，F への輸送コストは単位当たり次の表で与えられているとする．

		受入れ自治体			
		C	D	E	F
地	A	5	8	7	6
域	B	7	6	9	7

以下の問に答えよ．

(1) 全体の輸送コストを最小にするためにはこの問題をどのような線形計画問題として定式化しなければならないか.

(2) この問題の最適値および最適解を求めよ.

(3) (2) で求めた最適輸送ルートに基づき，それぞれの地域と受入れ自治体は個別にガレキの搬送と受入れの契約を結んだ．しかし，その後の調査で新たに地域 B のガレキが 10 単位から $10+\alpha$ 単位に増加することが分かり，自治体 C が処理能力を 3 単位から $3+\alpha$ 単位に増加できることを申し出た．地域・受入れ自治体間に新たな契約を結ぶことなく（輸送量 0 のルートは 0 を保ったまま）,（それぞれの）搬送量・受入れ量だけを変更しても全体の輸送コストが最適であり続けるためには最大で α は何単位まで増加できるかを求めよ.

問 8 (一般問題)

自然数 n と実数 $T > 0$ に対して，実数 s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n \leq T$$

となるように選ぶ.

(1) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を区間 $[0, T]$ 上の一様分布に従う互いに独立な n 個の確率変数とし，それらを小さい順に並べたものを $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ とする．次の確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < X_{(1)} \leq t_1, s_2 < X_{(2)} \leq t_2, \ldots, s_n < X_{(n)} \leq t_n\big) \qquad (*)$$

を n, T, s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ.

(2) 任意に固定した $t \geq 0$ に対して，$N(t)$ は以下の (a), (b), (c) を満たす確率変数であるとする.

(a) $N(0) = 0$.

(b) 任意の $0 \leq s \leq t$ に対して，$N(t) - N(s)$ は平均 $t - s$ のポアソン分布に従う．すなわち，

$$\mathsf{P}\big(N(t) - N(s) = k\big) = \frac{(t-s)^k}{k!} e^{-(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(c) 任意の $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots$ に対して，$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \ldots$ は互いに独立.

$Y_1, Y_2, \ldots$ を $Y_k = \inf\{t > 0 \mid N(t) \geq k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ と定めるとき，次の確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < Y_1 \leq t_1, s_2 < Y_2 \leq t_2, \ldots, s_n < Y_n \leq t_n\big)$$

を n, s_i, t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ.

(3) (2) において，$N(T) = n$ が与えられたときの条件付き確率

$$\mathsf{P}\big(s_1 < Y_1 \leq t_1, s_2 < Y_2 \leq t_2, \ldots, s_n < Y_n \leq t_n \bigm| N(T) = n\big)$$

が (1) の確率 (*) と等しいことを示せ.

問 9 (一般問題)

確率変数列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は共通の平均 μ を持ち，その共分散を $\mathrm{Cov}\{X_i, X_j\} = \sigma_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ とする．共分散 $\sigma_{i,j}$ はすべて既知として，未知の平均 μ をデータの線形結合（但し $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ とする）

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

で推定したい．以下の問に答えよ．

(1) 制約条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ の下で平均二乗推定誤差 $\mathbf{E}\{(\hat{\mu} - \mu)^2\}$ を最小化する解 $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)$ が満たすべき線形方程式は，ラグランジュ未定乗数 λ を用いて

$$R \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \\ \lambda \end{pmatrix} = b$$

と表すことができる．共分散 $\sigma_{i,j}$ のみに依存する行列 R とベクトル b を求めよ．

(2) 上の線形方程式で定まる $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n$ を用いた $\hat{\mu}$ を $\hat{\mu}_0$ とする．$\hat{\mu}_0$ と μ の素朴な推定量 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の間には，等式

$$\mathbf{E}\{(\bar{X} - \hat{\mu}_0)(\hat{\mu}_0 - \mu)\} = 0$$

が成立することを証明せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix} \right\}$$

からなる言語を考える．例えば $w_1 = \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}$ や，$w_2 = \begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{b} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{a} \\ \mathtt{a} \end{bmatrix}$ は Σ 上の文字列である．ここで，Σ 上の文字列は a と b からなる上下二つの行を与えると考える．すなわち，w_1 の上の行は “ab” であり，w_2 の下の行は “babaa” である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 言語

$$A = \{w \mid w \text{ の上の行は } \mathtt{a} \text{ で始まり}, w \text{ の下の行は } \mathtt{b} \text{ で終わる }\}$$

とする．言語 A を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．

(2) 言語

$$B = \{w \mid w \text{ の上の行は高々二つの } \mathtt{a} \text{ を含み}, w \text{ の下の行はちょうど二つの } \mathtt{b} \text{ を含む }\}$$

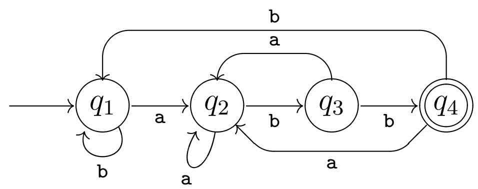
とする．言語 B を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．

(3) 言語

$$C = \{w \mid w \text{ の下の行は，上の行の逆文字列 }\}$$

とする．上の例では $w_1 \in C$ であり $w_2 \notin C$ である．言語 C が正規でないことを，ポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

注 1: **決定性有限オートマトン**　以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w \text{ は } \mathtt{abb} \text{ で終わる }\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: **ポンピング補題**　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する:

s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように三つの部分 $s = xyz$ に分割できる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$

3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字をひとつも含まない文字列) となる．

問 11 (一般問題)

次のような算術式の文法を考える.

E → E '+' T | E '-' T | T

T → T '*' F | T '/' F | F

F → '(' E ')' | i

ここで，→と | と ' はメタ記号である．' ' で囲まれたものと i は終端記号，E と T と F は非終端記号である．開始記号は E である．i（一般には i_1, i_2, ...）は識別子を表す.

(1) (i_1 + i_2) ∗ i_3 の構文解析木を書け.

(2) (i_1 + i_2) ∗ i_3 の抽象構文木を書け．ちなみに，抽象構文木は構文木とも呼ばれ，節として演算子，節の子供として節の演算子のオペランドが来るようにした木である.

(3) (i_1 + i_2) ∗ i_3 の前置記法と後置記法（逆ポーランド記法）を書け．ちなみに,「i_1 + i_2」の前置記法は「+ i_1 i_2」，後置記法は「i_1 i_2 +」である．また，算術式の抽象構文木が与えられたとき，そこから前置記法および後置記法の式を作る方法のあらましを簡単に述べよ.

(4) 上の文法の再帰降下構文解析器を作りたい．しかし，上の文法には左再帰性があるため，そのままでは再帰降下構文解析器を作ることができない．そこで，同じ言語を受理する次の正規右辺文法というものに書き換える.

E → T (('+' | '-') T)* (#)

T → F (('*' | '/') F)*

F → '(' E ')' | i

ここで，→と | と ' と (と) と * はメタ記号である．正規右辺文法では，生成規則の右辺に文法記号の正規表現が書ける．たとえば，(#) の右辺は，T のあとに「+ か - が来て次に T が来る」が 0 回以上繰り返したものを表す.

E から導出される終端記号列を構文解析する手続き（関数，メソッド）parseE() を記せ．ここで，次のトークン（終端記号）が入った変数 nexttoken，次のトークンを読んで nexttoken に入れる手続き gettoken()，T から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseT() があるものとして良い.

parseE() や，parseT() や，F から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseF() は，それぞれ，E，T，F から導出される終端記号列の最初のトークンが nexttoken に入れられた状態で呼ばれ，終了時には，それぞれ E，T，F から導出される終端記号列の次のトークンが nexttoken に入れられた状態で終るとする.

parseE() の記述に用いるプログラミング言語は Java 風，C 風，C++風のどれでも良く，プログラミング言語による記述では文法の厳密性はあまり気にしなくて良い.

解答に際して適当な仮定を設けても良い．その場合は仮定を明記せよ.

参考として，F から導出される終端記号列を構文解析する手続き parseF() を次に記す.

```
parseF() {
    switch (nexttoken) {
    case '(':
        gettoken(); parseE(); if (nexttoken == ')') gettoken() else error();
        break;
    case 'i': // 'i' とはトークン i に対する内部表現のこと
        gettoken(); break;
    default:
        error(); break;
    }
}
```

問 12 (一般問題)

メモリ上の値を 1 だけ増やす次のプログラム（アセンブリコード）を考える.

```
load   R1, m1      // R1 = m1
add    R1, R1, 1  // R1 = R1 + 1
store  m1, R1      // m1 = R1
```

プログラム中に現れる命令の形式と意味は，後述の表に示す通りである.

(1) メモリ空間を共有する n 個のスレッドが，それぞれ 1 度だけ，このプログラムを実行するという状況を考える．プログラム作成者の期待は `m1` の値が n だけ増えるというものであるが，n 個のスレッドが並行して走る場合、そうはならないことがある.

プログラム実行前の `m1` の値が 0 だったとすると，n 個のスレッドが並行してプログラムを実行した後に `m1` がとり得る値をすべて示せ.

(2) 上記プログラムにおけるプログラム作成者の期待を達成するためには，ロックを用いることが一般的である．一方で，ロックを用いない方法もある．compare-and-swap 命令を用いると，次の通り書くことができる.

```
increment:
  load      R1, m1           // R1 = m1
  add       R2, R1, 1        // R2 = R1 + 1
  cas       m1, (a), (b)     // compare-and-swap 命令
  jumpne    increment        // 等しくなければ先頭にジャンプ
```

(a) と (b) が何かを答えよ.

(3) compare-and-swap 命令を用いてロックを実装することもできる．以下のプログラムはその例である．プログラム実行前，`m2` の値は 0 であるとする.

```
  move     (a), 0
  move     (b), 1
try:
  cas      m2, (c), (d)
  jumpe    acquired
  jump     try
acquired:
  ⋮  (クリティカルセクション)
  move     R1, 0
  store    m2, R1
```

(a), (b), (c), (d) が何かを答えよ.

(4) (3) のプログラムで，クリティカルセクションを同時に実行するスレッドを 1 つ以下にできる理由を，compare-and-swap 命令の機能に言及しつつ，簡潔に説明せよ.

表：アセンブリコードの命令

命令形式	意味
`load` レジスタ，メモリ	メモリ上の値をレジスタにロードする．
`store` メモリ，レジスタ	レジスタの値をメモリにストアする．
`move` レジスタ 1，レジスタ 2 または値 1	レジスタ 2 の値や値 1 をレジスタ 1 の値とする．
`add` レジスタ 1，レジスタ 2，値 1	レジスタ 2 の値に値 1 を足したものをレジスタ 1 の値とする．
`cas` メモリ，レジスタ 1，レジスタ 2	compare-and-swap 命令．メモリ上の値とレジスタ 2 の値を比較し，等しければメモリにレジスタ 1 の値をストアする．この比較とストアを atomic（不可分）に行う．等しくなければ何もしない．
`jump` ジャンプ先	ジャンプ先にジャンプする．
`jumpne` ジャンプ先	直前の `cas` 命令にて比較結果が等しくなかった場合に，ジャンプ先にジャンプする．等しかった場合にはジャンプしない．
`jumpe` ジャンプ先	直前の `cas` 命令にて比較結果が等しかった場合に，ジャンプ先にジャンプする．等しくなかった場合にはジャンプしない．