2011 年 2 月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig.1(a)に示す様に，２つの同心球導体が真空中にある．以下の問に答えよ．ただし，無限遠の電位をゼロとし，真空の誘電率をε_0とする．

(1) 導体 II が電荷Qで帯電されているとき，２つの同心球導体の中心からの距離r ($0<r<\infty$)の関数として電位Vならびに電界Eを求め，電位Vならびに電界Eを距離rの関数として図示せよ．

(2) 導体 II を電荷Qで帯電した後に導体 I を接地したとき，導体 I と導体 II における電荷分布を求めよ．

(3) 導体 I と導体 II 間の静電容量Cを求めよ．

(4) 導体 I と導体 II が電荷Qで帯電されているとき，導体 I と導体 II に蓄積される全静電エネルギーUを求めよ．

(5) Fig.1(b)に示す様に，導体 II の外側に導体 I と同じ形状の導体 III があるとき，導体 I と導体 III 間の静電的な相互作用を無くすには，導体 II を接地することが有効であることを証明せよ．ただし，導体 I，導体 II，導体 III における電荷と電位をそれぞれQ_1，Q_2，Q_3，V_1，V_2，V_3とし，それらは以下の関係式を満足するものとする．

$$Q_1 = q_{11}V_1 + q_{21}V_2 + q_{31}V_3$$
$$Q_2 = q_{12}V_1 + q_{22}V_2 + q_{32}V_3$$
$$Q_3 = q_{13}V_1 + q_{23}V_2 + q_{33}V_3$$

As shown in Fig.1(a), two concentric spherical conductors are in a vacuum. Answer the following questions. The voltage at infinity is zero and the permittivity of the vacuum is ε_0.

(1) When conductor II is charged with Q, find the voltage V and the electric field E as a function of r ($0<r<\infty$), the distance from the center of two concentric spherical conductors, and draw graphs of the voltage V and the electric field E as a function of the distance r.

(2) When conductor I is grounded after charging conductor II with Q, find the charge distribution in conductor I and conductor II.

(3) Find the capacitance C between conductor I and conductor II.

(4) When both conductor I and conductor II are charged with Q, find the total electrostatic energy U stored in conductor I and conductor II.

2011 年 2 月実施
問題１　電磁気学
（２頁目／２頁中）

(5) As shown in Fig.1(b), when conductor III with the same configuration as conductor I is outside of conductor II, prove that connecting conductor II to the ground is effective to eliminate the electrostatic interaction between conductor I and conductor III. The charges and voltages in conductor I, conductor II, and conductor III are Q_1, Q_2, Q_3, V_1, V_2, and V_3, respectively, which satisfy the following equations:

$$Q_1 = q_{11}V_1 + q_{21}V_2 + q_{31}V_3$$
$$Q_2 = q_{12}V_1 + q_{22}V_2 + q_{32}V_3$$
$$Q_3 = q_{13}V_1 + q_{23}V_2 + q_{33}V_3 .$$

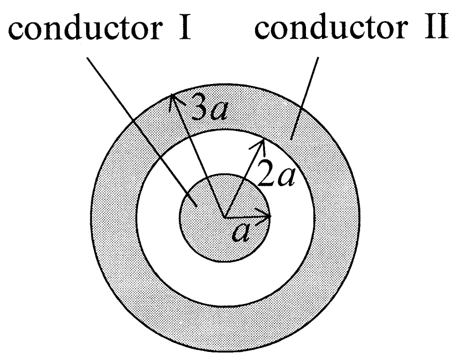

Fig.1(a)

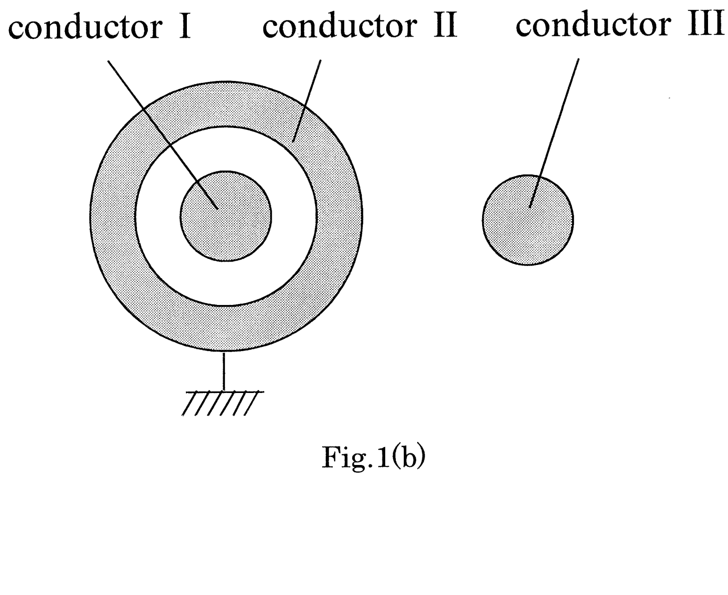

Fig.1(b)

2011 年 2 月実施
問題２　電気回路
(1 頁目／1 頁中)

Fig.2 の回路において次の問に答えよ.

(1) S_2 を開いた状態における，回路の共振角周波数を求めよ.

(2) S_2 を閉じたとき，電流計 A を流れる電流がゼロとなる平衡条件を求めよ.

(3) 問(2)の平衡時に端子 a - a'間を流れる電流が電源の角周波数に無関係になる条件を示せ.

(4) S_2 を開き，十分時間が経過してから，時刻 $t = 0$ で S_1 を開いた．このとき，$t > 0$ における b - a'間の電圧のラプラス変換を求めよ．ただし，S_2 を開いた直後におけるキャパシタ C の電荷およびインダクタ L を流れる電流はともに 0 とする.

Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2

(1) Find the resonance angular frequency of the circuit when S_2 is opened.

(2) When S_2 is closed, obtain the condition for balance, where no current flows through the current meter A.

(3) In the case of question (2) at the balanced condition find the condition such that the current flowing between a - a' is independent of the angular frequency of the voltage source.

(4) S_2 was opened and enough time has passsed. Then, S_1 is opened at the time t = 0. Find the Laplace transformation of the voltage between b and a' for $t > 0$. Suppose that right after S_2 is opened the electric charge in the capacitor C and the current flowing through the inductor L are zero.

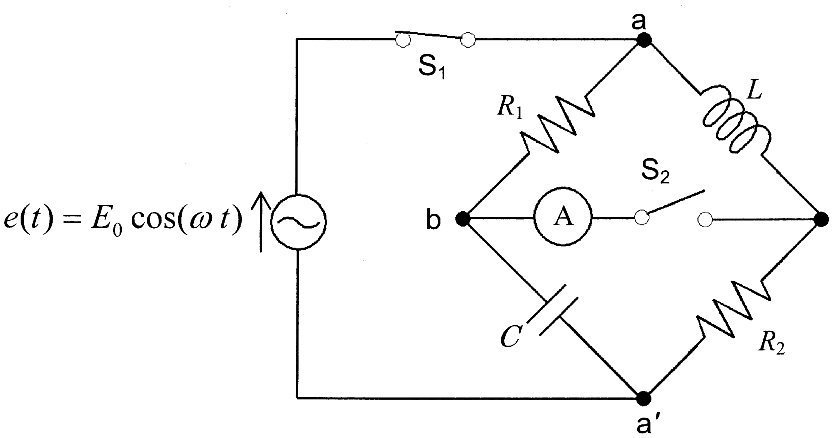

Fig.2

2011 年 2 月実施
問題 3　情報基礎 1
（1 頁目／2 頁中）

$2n$ 変数論理関数 $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ を次のように定義する．

$$f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{cases} 1 & (a_1 a_2 \ldots a_i) < (b_1 b_2 \ldots b_i) \text{のとき} \\ 0 & (a_1 a_2 \ldots a_i) \geq (b_1 b_2 \ldots b_i) \text{のとき} \end{cases}$$

ここで，i は $1 \leq i \leq n$ の固定された整数とする．$(a_1 a_2 \ldots a_i)$ および $(b_1 b_2 \ldots b_i)$ はそれぞれ a_i, b_i を最下位ビットとする i 桁の 2 進数とする．また，二つの n 変数論理関数 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において，$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ となる全ての入力 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対し，$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ が成立するとき，$g \subseteq h$ と書く．以下の問に答えよ．

(1) $n = 2$ のとき，f_2 の真理値表と最簡積和形（最小論理和形）を示せ．

(2) 任意の論理関数 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ において，全ての入力 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet \overline{h(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0$ のときかつそのときに限って $g \subseteq h$ が成り立つことを示せ．ここで，$\bar{}$ は否定（NOT）演算子，$\bullet$ は論理積（AND）演算子を表す．

(3) $f_{i-1} \subseteq f_i \quad (2 \leq i \leq n)$ であることを示せ．

2011 年 2 月実施
問題 3　情報基礎 1
(2 頁目／2 頁中)

A $2n$-variable Boolean function $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ is defined as

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{cases} 1 & \mathit{if}\ (a_1 a_2 \dots a_i) < (b_1 b_2 \dots b_i), \\ 0 & \mathit{if}\ (a_1 a_2 \dots a_i) \geq (b_1 b_2 \dots b_i), \end{cases}$$

where i is a fixed integer with $1 \leq i \leq n$. $(a_1 a_2 \dots a_i)$ and $(b_1 b_2 \dots b_i)$ are i-digit binary numbers, where a_i and b_i are the least significant bits. Let $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ be n-variable Boolean functions, and we write $g \subseteq h$ if $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ for all the inputs $x_1, x_2, \dots, x_n$ such that $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Answer the following questions.

(1) When $n = 2$, give the truth table and a minimum sum-of-products expression of f_2.

(2) Prove that for any given Boolean functions $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $g \subseteq h$ if and only if for all the inputs $x_1, x_2, \dots, x_n$ it holds that $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \overline{h(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$, where $\bar{\ }$ denotes the NOT operator and $\cdot$ denotes the AND operator.

(3) Prove $f_{i-1} \subseteq f_i$ $(2 \leq i \leq n)$.

2011年2月実施
問題4　情報基礎2
(1頁目／2頁中)

n 個の頂点の集合 V と正の重みが付いた m 個の辺の集合 E からなる連結無向グラフ $G=(V, E)$ に対し，最小全域木を求める問題を考える．G の最小全域木は，G のすべての頂点を含む，重み最小の連結部分グラフと定義される．次のアルゴリズムは，最短路問題を解く Dijkstra 法と同様に，一つの頂点から始めて訪問済み頂点の集合 P を徐々に拡大しながら最小全域木を構成する辺を集合 M に蓄えていく．

1. 任意に選んだ開始頂点だけからなる頂点集合を P，空の辺集合を M とする．
2. P の頂点 u と $V-P$ の頂点 v を結ぶ重み最小の辺 (u, v) を選ぶ．
3. v を P に追加し，(u, v) を M に追加する．
4. すべての頂点が P に移るまで手順2と3を繰り返す．
5. V と M からなるグラフは G の最小全域木である．

次の問に答えよ．

(1) 上のアルゴリズムを Fig. 4 のグラフに適用し，最小全域木を1つ求めよ．アルゴリズムの手順1で頂点 a を選ぶとすると，探索はどのように進むか？ 手順2で選ばれる辺の順番を $(a, b)\to\cdots\to(e, f)$ のような形式で示せ．

(2) 上のアルゴリズムが必ず最小全域木を出力することを示すには，次の命題が成り立つことを証明できればよい．この命題を証明せよ．

　上のアルゴリズムの手順2において，辺集合 M を含む最小全域木が存在するなら，M と辺 (u, v) をともに含む最小全域木が存在する．

(3) E を $n\times n$ の2次元配列で表現するとき，このアルゴリズムの時間計算量を O 記法で示せ．またその理由を述べよ．

2011 年 2 月実施
問題 4　情報基礎 2
(2 頁目／2 頁中)

Given a connected undirected graph $G=(V, E)$, where V is a set of n nodes and E is a set of m edges with positive weights, consider the problem of finding a minimum spanning tree. A minimum spanning tree of G is defined as a lowest-weight, connected sub-graph that contains all the nodes of G. The algorithm below, analogously to Dijkstra's algorithm for solving the shortest path problem, starts from a single node and incrementally expands the set P of visited nodes, recording the edges composing a minimum spanning tree in set M.

1. Let P be a set of nodes containing only an arbitrarily chosen starting node and let M be an empty set of edges.
2. Choose an edge (u, v) with minimal weight such that u is in P and v is in $V-P$
3. Add v to P and (u, v) to M.
4. Repeat steps 2 and 3 until P contains all the nodes.
5. The graph represented by V and M is a minimum spanning tree of G.

Answer the following questions.

(1) Give a minimum spanning tree of the graph in Fig. 4 by applying the above algorithm to it. If node a is chosen in step 1, how does the search proceed? Show the order of the edges chosen in step 2 in a form like $(a, b) \to \cdots \to (e, f)$.

(2) To prove that the above algorithm always gives a minimum spanning tree, it is sufficient to prove the following proposition. Prove this proposition.

> In step 2 of the above algorithm, if there exists a minimum spanning tree that includes the set M of edges, there exists a minimum spanning tree that includes both M and edge (u, v).

(3) Give in O notation the time complexity of the algorithm when E is represented by a two dimensional array of $n \times n$. Explain your reasoning.

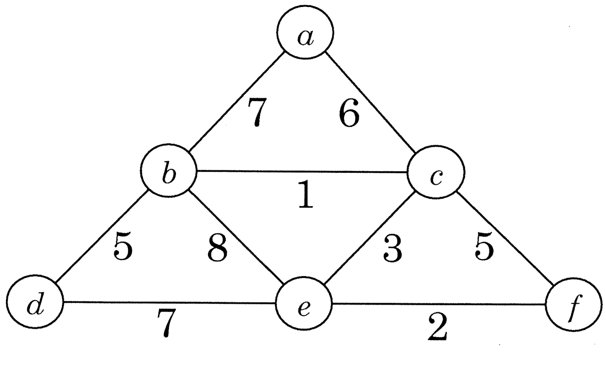

Fig. 4

２０１１年２月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／３頁中）

バネにつながれた粒子の水平な平面上での振動を考える．以下の問では，すべてのバネは同じ弾性定数 k および同じ自然長 ℓ をもつ．すべての粒子は同じ質量 m をもつ．粒子の大きさ，バネの質量，摩擦，空気抵抗は無視できる．バネは曲がらないと仮定して，以下の問に答えよ．

(1) Fig. 5(a) のように，二つのバネにつながれた一つの粒子が，点 P と Q を結ぶ直線に沿って，点 O を中心に振動している．PQ 間の距離は 2ℓ である．

(a) Fig. 5(a) のように，粒子の点 O からの変位を x とするとき，二つのバネの弾性エネルギーの和を求めよ．粒子にはたらく力を求めよ．

(b) 粒子の振動の周期を求めよ．

(2) Fig. 5(b) のように，PQ 間の距離を $2(\ell+a)$ $(a>0)$ に引き伸ばした場合を考える．粒子の振動の周期を求めよ．

(3) Fig. 5(c) のように，三つのバネにつながれた二つの粒子が，点 P と Q を結ぶ直線に沿って，点 O_1, O_2 を中心に振動している．PQ 間の距離は 3ℓ である．

(a) Fig. 5(c) のように，粒子の点 O_1, O_2 からの変位を x_1 および x_2 とするとき，三つのバネの弾性エネルギーの和を求めよ．各粒子にはたらく力を求めよ．

(b) 粒子の連成振動の角振動数を ω とし，変位 x_1 と x_2 に対する連立線形方程式を求めよ．

(c) 問(3) (b)で求めた方程式が自明でない解をもつ必要十分条件を用いて，固有角振動数を求めよ．それぞれの固有角振動数に対する x_1 と x_2 の比を求めよ．

２０１１年２月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／３頁中）

Consider oscillations of particles connected by springs on a horizontal plane. In the following questions, all the springs have the same elastic constant k and the same natural length ℓ. All the particles have the same mass m. The size of the particle, the mass of the spring, the friction, and the air resistance can be neglected. Assuming no bending of the springs, answer the following questions.

(1) As shown in Fig. 5(a), a particle connected by two springs oscillates around the point O along the line connecting points P and Q. The distance between P and Q is 2ℓ.

(a) Letting the displacement of the particle from the point O be x as shown in Fig. 5(a), obtain the sum of the elastic energies of the two springs. Obtain the force acting on the particle.

(b) Obtain the period of the oscillation of the particle.

(2) Consider the case when the distance between P and Q is expanded to $2(\ell + a)$ $(a > 0)$ as shown in Fig. 5(b). Obtain the period of the oscillation of the particle.

(3) As shown in Fig. 5(c), two particles connected by three springs oscillate around the points O_1 and O_2 along the line connecting points P and Q. The distance between P and Q is 3ℓ.

(a) Letting the displacements of the particles from the points O_1 and O_2 be x_1 and x_2 as shown in Fig. 5(c), obtain the sum of the elastic energies of the three springs. Obtain the force acting on each particle.

(b) Letting the angular frequency of the coupled oscillation of the particles be ω, obtain simultaneous linear equations for the displacements x_1 and x_2.

(c) By using the necessary and sufficient condition for the equations obtained in question (3) (b) to have non-trivial solutions, obtain the characteristic angular frequencies. Obtain the ratio of x_1 and x_2 for each characteristic angular frequency.

２０１１年２月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

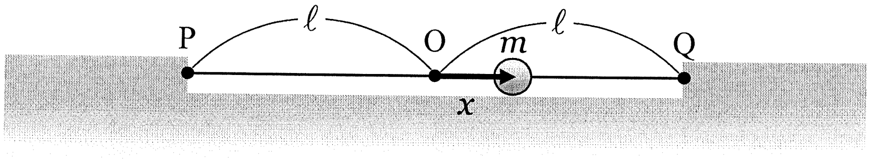

Fig. 5 (a)

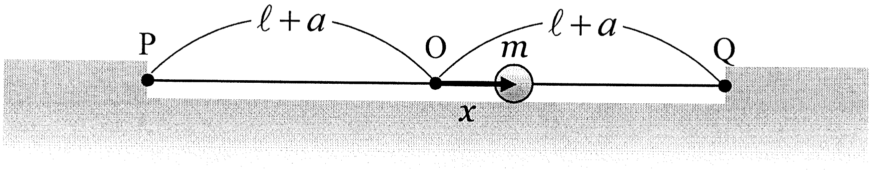

Fig. 5 (b)

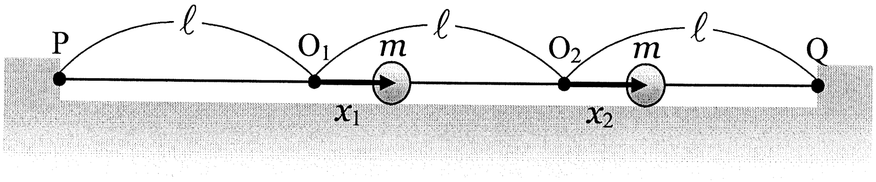

Fig. 5 (c)

2011 年 2 月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／１頁中）

4 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ のなす角を求めよ．

(2) 互いに直交しているベクトルの組をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の張る $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を $\boldsymbol{W}_1$ とする．$\boldsymbol{W}_1$ の正規直交基底を求めよ．$\boldsymbol{x}_3$ をその基底の一つの元として用いよ．

(4) $\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{x}_6$ の張る部分空間を $\boldsymbol{W}_2$ とする．共通空間 $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$ の次元を求めよ．

(5) 共通空間 $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$ の基底を一つ求めよ．

We consider the following members of the four-dimensional real vector space $\boldsymbol{R}^4$:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Find the angle between $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$.

(2) Find all pairs of vectors that are mutually orthogonal.

(3) When $\boldsymbol{W}_1$ is a subspace of $\boldsymbol{R}^4$ spanned by $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, find an orthonormal basis of $\boldsymbol{W}_1$. Use $\boldsymbol{x}_3$ as a member of the basis.

(4) $\boldsymbol{W}_2$ is defined as a subspace spanned by $\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_5$, $\boldsymbol{x}_6$. Find the dimension of common space $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$.

(5) Find a basis of common space $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$.