問題２　電磁気学　解答例

I

（１）ガウスの法則より導体球の中心から距離rの位置における電界の大きさは

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

導体球表面での電界強度は$E = Q/4\pi\varepsilon_0 a^2$であるため，導体球表面の単位面積あたりに働く力は

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = Q^2 \Big/ 32\pi^2 \varepsilon_0 a^4$$

（２）導体球の電位は

$$V = \int_\infty^{a+d} -Q/4\pi\varepsilon_0 r^2\, dr + \int_{a+d}^{a} -Q/4\pi\varepsilon r^2\, dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0(a+d)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right)\right\}$$

導体球の持つエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(a+d)}\left(1 + \frac{\varepsilon_0 d}{\varepsilon a}\right)$$

（３）導体球と導体球殻間の電位差は

$$V_{ab} = \int_\infty^{a+d} -Q/4\pi\varepsilon_0 r^2\, dr + \int_{a+d}^{a} -Q/4\pi\varepsilon r^2\, dr - \int_\infty^{b} -Q/4\pi\varepsilon_0 r^2\, dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+d} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right)\right\}$$

よって，静電容量は

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 b(a+d)}{b-a-d(1-\varepsilon_0 b/\varepsilon a)}$$

（４）誘電率をrの関数$\varepsilon(r)$とすると，導体球と導体球殻間の電界は，

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon(r)r^2$$

これが一定となるため，$\varepsilon(r)r^2 =$ 定数

つまり，誘電率$\varepsilon(r)$はr^2に反比例する分布であればよい

問題2　電磁気学　II（解答例）

（1）

問題の図2内左図において，磁性体内部の半径 r の位置にある点Aを通る閉曲線C（半径 r の円）上の磁界の強さベクトル $\boldsymbol{H}$ の周回積分値は，閉曲線Cと鎖交する真電流（コイル電流）との総和と等しく，次式で記せる。

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = NI \qquad (1)$$

環状磁性体の形状は，原点Oに対する同心円形状であるから，閉曲線Cの接線方向の磁界の強さベクトル $\boldsymbol{H}$ の大きさは一様であり，$|\boldsymbol{H}|=H$ とすると，（1）式右辺は，

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = 2\pi r H \qquad (2)$$

となる。（1），（2）式より，磁界の強さの大きさ H は，

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \qquad (3)$$

一方，磁性体内部の磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ と磁界の強さベクトル $\boldsymbol{H}$ の間には，次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{B} = \mu_s \mu_0 \boldsymbol{H} \qquad (4)$$

（4）式から，磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ は磁界の強さベクトルと同一方向のベクトルであるため，$|\boldsymbol{B}|=B$ とすると，両者の大きさは，次式の関係を持つ。

$$B = \mu_s \mu_0 H \qquad (5)$$

（5）式に（3）式を代入して，本問の解答を次式で得る。

$$\therefore B = \frac{\mu_s \mu_0 NI}{2\pi r} \qquad (6)$$

（2）

磁性体内部の磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ と磁界の強さベクトル $\boldsymbol{H}$ と磁化の強さベクトル $\boldsymbol{M}$ の大きさ B, H, $|\boldsymbol{M}|=M$ の間には次式の関係が成り立つ。

$$B = \mu_0 (H + M) \qquad (7)$$

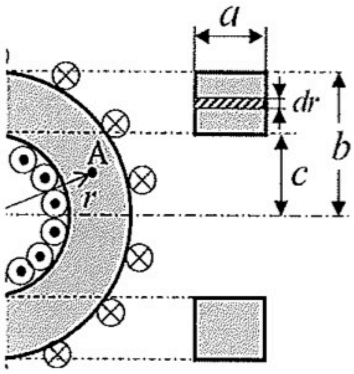
（7）式に（3），（6）式を代入して，本問の解答を以下で得る。

$$\therefore M = \frac{(\mu_s - 1)NI}{2\pi r}\,[\mathrm{A/m}] \qquad (8)$$

（3）

以下の図Aに示すように，環状磁性体の断面における微小断面積 dS $= adr$ を通過する磁束 dΦは，

$$\therefore d\Phi = \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{a\mu_s \mu_0 NI}{2\pi r}dr \qquad (9)$$



図A

ここで，断面形状から r の範囲は $c \le r \le b$ であるので，この範囲で（9）式を定積分して，環状磁性体の断面を通過する総磁束を次式で得る。

$$\Phi = \int d\Phi = \int_c^b \frac{a\mu_s\mu_0 NI}{2\pi r} dr = \frac{a\mu_s\mu_0 NI}{2\pi} \log\frac{b}{c} \tag{10}$$

上記で求めた総磁束Φが環状磁性体に N 回巻かれたコイル電流と鎖交するので，本問の解答は次式で記せる。

$$\therefore \text{全磁束鎖交数 } N\Phi = \frac{a\mu_s\mu_0 N^2 I}{2\pi} \log\frac{b}{c} \tag{11}$$

（4）

コイルのインダクタンス L は，全磁束鎖交数 $N\Phi$ とコイル電流 I を用いて，次式で記せる。

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{12}$$

（１２）式に，（１１）式を代入して，本問の解答を次式で得る。

$$\therefore L = \frac{a\mu_s\mu_0 N^2}{2\pi} \log\frac{b}{c} \tag{13}$$

（5）

コイルのインダクタンスは，コイルの巻数 N とコイルから見た磁気回路の磁気抵抗 $\Re$ を用いて、次式で記せる。

$$L = \frac{N^2}{\Re} \tag{14}$$

（１４）式に，（１３）式を代入して整理して，磁気抵抗 $\Re$ は次式で記せる。

$$\therefore \Re = \frac{2\pi}{a\mu_s\mu_0 \log(b/c)} \tag{15}$$