平成 26 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

基礎科目試験問題

（実施時間　９：３０ ～ １２：３０）

【注　意　事　項】

１．問題用紙はこの表紙を除いて１２ページある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，及び，「電気電子回路２」の９題*あり，この順番に綴じられている．このうち，５題を選択し解答すること．但し，選択すべき試験問題は，受験コース毎に下表のように規定されている．

受験コース名	選択すべき試験問題
システム・制御・電力工学コース	「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」の５題から３題，及び，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，「電気電子回路２」の４題から２題，合計５題を選択すること
先進電磁エネルギー工学コース	
量子電子デバイス工学コース	
情報通信工学コース	９題（上記*印）から５題選択すること

３．解答開始前に，別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

４．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【数学1】解答は，白色(1番)の解答用紙に記入すること.

直交座標系 (x, y) において次の式(1)を考える.

$$x^2+10\sqrt{3}xy+11y^2=s \qquad (1)$$

以下の(a)～(e)の設問に答えよ．ただし，s は実数とする.

(a) 式(1)の左辺を $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおいて，対称行列（symmetric matrix）$\mathbf{A}$ を求めよ.

(b) $\mathbf{A}$ の固有値（eigenvalue）を全て求め，それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル（eigenvector）を求めよ.

(c) (b)の結果を用いて，$\mathbf{A}$ を対角化する（diagonalize）直交行列（orthogonal matrix）のうち，回転行列（rotation matrix）となる $\mathbf{U}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ をひとつ求め，$\mathbf{U}$ により $\mathbf{A}$ を対角化せよ.

(d) (c)の結果を用いて，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{U}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ より式(1)の左辺の 2 次形式（quadratic form）を新たな直交座標系（orthogonal coordinate system）(X, Y) での標準形（normal form）に変換せよ.

(e) 座標系 (x, y) と (X, Y) の関係を図示せよ．さらに，$s=0$，$s>0$，$s<0$ の各場合における式(1)の表す図形の概略を，座標系 (X, Y) において図示せよ.

【数学2】解答は，赤色（2番）の解答用紙に記入すること.

次の2階微分方程式(second order differential equation)

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x)+2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)-\nu(\nu+1)y(x)=0$$

の解を求める．ただし，ν は非負の整数(non-negative integer)である．

この微分方程式の一般解(general solution)は,

$$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$$

の級数(series)の形で与えられる．ここで，c_k（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）は定数である．

以下の(a)～(e)の設問に答えよ．

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)$ ならびに $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x)$ を c_k（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）を用いて，級数の形で示せ.

(b) (a) の結果を利用して，c_{k+2} と c_k（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）の関係を示せ.

(c) $c_0=1$，$c_1=0$ のときの解を，級数の形で示せ.

(d) $c_0=0$，$c_1=1$ のときの解を，級数の形で示せ.

(e) $x=0$ における $y(x)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)$ をそれぞれ $y(0)=a$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(0)=b$（$a,b$ は実数）とする．このとき，$y(x)$ を (c)で求めた解 $y_1(x)$ と (d)で求めた解 $y_2(x)$ を用いて表わせ.

【数学３】 解答は，青色(３番)の解答用紙に記入すること.

関数 $f(x,t)$ に関する次の偏微分方程式 (partial differential equation) を考える.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}, \qquad f(x,0) = \delta(x) \qquad (-\infty < x < \infty,\ \ t \geq 0) \tag{1}$$

ただし，$\delta(x)$ は，デルタ関数 (delta function) を表す．以下の (a)~(d) の設問に答えよ.

(a) 関数 $f(x,t)$ の変数 x に関するフーリエ変換 (Fourier transform) $F(u,t)$ を

$$F(u,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, \mathrm{e}^{-iux}\, \mathrm{d}x$$

と定義する．$F(u,t)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(b) 初期条件 $f(x,0) = \delta(x)$ をフーリエ変換し，$F(u,0)$ を求めよ.

(c) $F(u,t)$ が満たす微分方程式を解き，$F(u,t)$ を求めよ.

(d) (c) で求めた $F(u,t)$ を逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform) することにより，式 (1) の解 $f(x,t)$ を求めよ．その際，次の積分公式を用いても良い.

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2y^2} \cos(by)\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

ただし，$a > 0$，b は実数である.

【数学４】 解答は，黄色 (４番) の解答用紙に記入すること．

以下の (a)~(c) の設問に答えよ．その際に式 (1) の関係を用いてもよい．

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u \quad (n > 0), \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

(a) $\sqrt{t}$ のラプラス変換 (Laplace transform) を求めよ．

(b) $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$ のとき，次の連続関数 $f(t)$ を図 1 の経路 ABCDEFA に沿って積分して求めよ．

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s \quad (t > 0)$$

ただし, $0 < \varepsilon < \gamma$ である．また，弧 BC と弧 FA の経路の積分は $R \to \infty$ のとき 0 となることを用いてもよい．

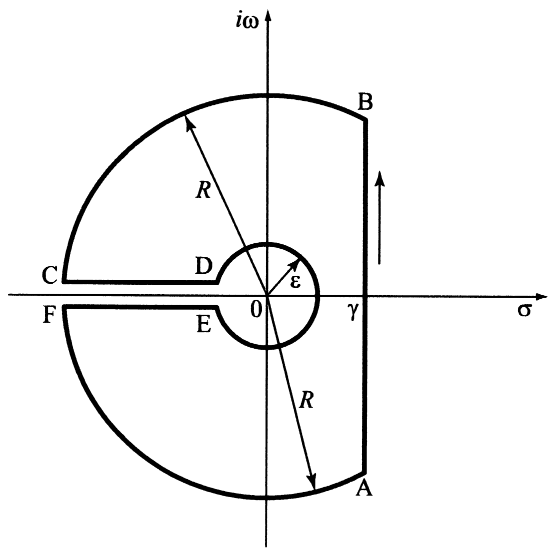


図 1　$s = \sigma + i\omega$平面上の積分路

(c) 次の積分方程式 (integral equation) の解 $x(t)$ を求めよ．ただし，$t > 0$ とする．

$$\int_0^t \frac{x(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} \mathrm{d}\tau = (t+1)^2$$

【数学5】解答は，水色（5番）の解答用紙に記入すること．

連続な確率変数の列 (a sequence of continuous random variables) X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が独立で同一の分布に従う (independent and identically distributed) とする．このとき，X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ の分布関数 (distribution function) を $F(x) = \Pr(X_n \leq x)$ とし，全ての x $(-\infty < x < \infty)$ に対して $1 - F(x) = \Pr(X_n > x) > 0$ であると仮定する．ここで確率変数 N を $N = \min\{k;\ X_k > X_0\ (k = 1, 2, \ldots)\}$ と定義する．すなわち，任意の自然数 (natural number) k に対して

$$N = k \quad \Leftrightarrow \quad X_n \leq X_0\ (n = 1, 2, \ldots, k-1) \text{ かつ } X_k > X_0$$

である．以下の (a)〜(d) の設問に答えよ．

(a) $N = k$ であり，かつ $X_N \leq x$ である結合確率 (joint probability) $\Pr(N = k, X_N \leq x)$ を求めよ．

(b) N の期待値 (expectation) $\mathrm{E}[N]$ を求めよ．

(c) X_N の分布関数 $G(x) = \Pr(X_N \leq x)$ を求めよ．ただし

$$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x < 1)$$

を用いてよい．

(d) ある正数 (positive real) μ に対して

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - \exp(-\mu x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

であるとする．$N \geq 2$ という条件の下での X_1 の条件付き期待値 (conditional expectation) $\mathrm{E}[X_1 \mid N \geq 2]$ を求めよ．

【電磁理論1】 解答は，桃色（6番）の解答用紙に記入すること．

解答用紙に①～⑯の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や語句を解答用紙に記入せよ．

[I]　誘電率ε_0の空間に電荷量Qの点電荷がある．図1に示すように，この点電荷から距離r離れた点Aに向かうベクトルを$\boldsymbol{r}$とすると，点Aにおける電界$\boldsymbol{E}$は，電束に関する $\boxed{\quad ① \quad}$ の法則から

$$\boldsymbol{E} = \boxed{\quad ② \quad}$$

で与えられる．点電荷から無限遠の電位を零電位とすると，点Aにおける電位Vは

$$V = \boxed{\quad ③ \quad}$$

で与えられる．

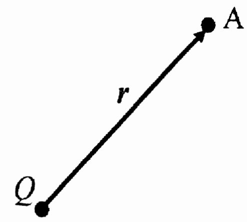


図1

[II]　誘電率ε_0の空間において，近接した1組の点電荷対を考える．図2に示すように，電荷量$+q$ $(q > 0)$および$-q$の点電荷が直角座標系のz軸上で，かつ原点Oから等距離の位置にあるものとする．原点Oから観測点$A(x, y, z)$に向かうベクトルを$\boldsymbol{r}$（大きさr），電荷量$-q$の点電荷の位置から$+q$の点電荷の位置に向かうベクトルを$\boldsymbol{d}$（大きさd）と定義する．rがdに比べて十分に大きい場合，この点電荷対は $\boxed{\quad ④ \quad}$ と見なすことができる．この時，$\boxed{\quad ④ \quad}$ 能率$\boldsymbol{p}$（大きさp）は

$$\boldsymbol{p} = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

で与えられる．$+q$の点電荷のみが作る電位V_+は，x, y, zを用いて

$$V_+ = \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

となる．同じく，$-q$の点電荷のみが作る電位V_-は

$$V_- = \boxed{\quad ⑦ \quad}$$

となる．したがって，点電荷対が観測点Aに作る電位Vは，テイラー展開の1次の項までを用い，近似的にrとzの関数として与えられ，

$$V = \boxed{\quad ⑧ \quad} \qquad (\text{ただし，} r >> d)$$

となる．z軸とベクトル$\boldsymbol{r}$とがなす角をθとすると

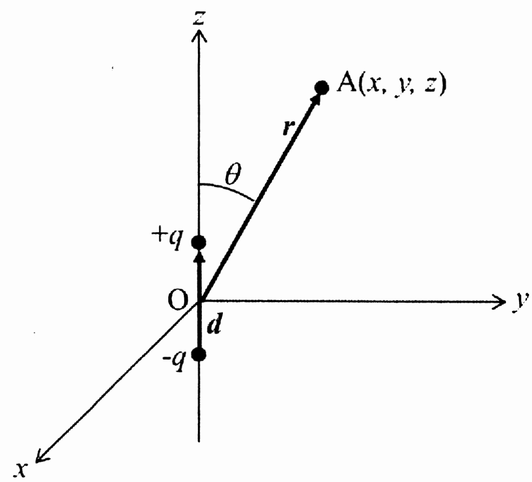


図2

$z =$ $\boxed{\quad ⑨ \quad}$

ゆえ，電位 V は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ の内積を含む式に変形でき，

$V =$ $\boxed{\quad ⑩ \quad}$

となる．

次に，この点電荷対$+q$，$-q$ からなる $\boxed{\quad ④ \quad}$ が作る電界 $\boldsymbol{E}$ を求めよう．一般に，電位 V を与えられたとき電界の x，y および z 成分を E_x，E_y，E_z とすると，

$E_x =$ $\boxed{\quad ⑪ \quad}$

$E_y =$ $\boxed{\quad ⑫ \quad}$

$E_z =$ $\boxed{\quad ⑬ \quad}$

である．ゆえに，図 2 において観測点 A における電界の x，y，z 成分を $E_{x,\mathrm{A}}$，$E_{y,\mathrm{A}}$，$E_{z,\mathrm{A}}$ とすると，

$E_{x,\mathrm{A}} =$ $\boxed{\quad ⑭ \quad}$

$E_{y,\mathrm{A}} =$ $\boxed{\quad ⑮ \quad}$

$E_{z,\mathrm{A}} =$ $\boxed{\quad ⑯ \quad}$

となる．

【電磁理論2】 解答は，緑色（7番）の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～⑬の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式を解答用紙に記入せよ.

自由電荷および自由電流を含まない，無限に広がる等方で均質な無損失媒質（誘電率ε，透磁率μ）の中を角周波数ωで正弦的に時間変化する平面電磁波が，直角座標系における$+z$方向に伝搬しているとする．x，yおよびz方向の単位ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$および$\boldsymbol{i}_z$とする.

kを定数とし，この平面電磁波の電界$\boldsymbol{E}$はx方向を向いているとして，$\boldsymbol{E}$を

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{i}_x E_0 \cos(\omega t-kz) \tag{1}$$

と表す．ここで，E_0は非零の実定数である．このとき，磁界$\boldsymbol{H}$を求めよう．ファラデー・マクスウェルの法則を表す式に式(1)を代入して計算すると，

$$\boxed{\quad ① \quad} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2}$$

を得る．式(2)を時間について積分すると，$\boldsymbol{H}$は

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boxed{\quad ② \quad} \tag{3}$$

となる．また，アンペア・マクスウェルの法則を表す式に式(1)および(3)を代入して計算すると，k，ω，εおよびμの間に成り立つ関係式

$$k^2=\boxed{\quad ③ \quad} \tag{4}$$

が得られる.

次に，この平面電磁波のポインティング・ベクトル$\boldsymbol{S}$を求めよう．$\boldsymbol{S}$の定義式に式(1)および(3)を代入し，以上に示した結果を用いると，

$$\boldsymbol{S}(z,t)=\boxed{\quad ④ \quad}\ E_0^2\cos^2(\omega t-kz) \tag{5}$$

と書ける．また，式(1)および(3)より，媒質の固有インピーダンスZは

$$Z=\boxed{\quad ⑤ \quad} \tag{6}$$

と表される．Zを用いて式(5)を書き改めると，

$$\boldsymbol{S}(z,t)=\boxed{\quad ⑥ \quad}\ E_0^2\cos^2(\omega t-kz) \tag{7}$$

となる．式(7)の$\boldsymbol{S}$は正弦的に時間変化しているので，$\boldsymbol{S}$の正弦的な時間変化の一周期にわたる平均値$\langle \boldsymbol{S} \rangle$を求めると，

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle=\boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{8}$$

となる．このとき，z方向に対して垂直な面積Ωの平面を$+z$方向に横切る電力の時間平均値Pは

$$P = \boxed{\quad ⑧ \quad} \tag{9}$$

となる．

ところで，式(1)および(3)より，電界および磁界によって蓄えられる単位体積当たりのエネルギー密度w_eおよびw_mは，それぞれ

$$w_e = \boxed{\quad ⑨ \quad} \tag{10}$$

$$w_m = \boxed{\quad ⑩ \quad} \tag{11}$$

となる．よって，これらの時間平均値$\langle w_e \rangle$および$\langle w_m \rangle$はそれぞれ

$$\langle w_e \rangle = \boxed{\quad ⑪ \quad} \tag{12}$$

$$\langle w_m \rangle = \boxed{\quad ⑫ \quad} \tag{13}$$

となる．式(8)，(12)，(13)より，$\langle \boldsymbol{S} \rangle$と$\langle w_e \rangle$および$\langle w_m \rangle$との間に成り立つ関係式は

$$\boxed{\quad ⑬ \quad} \tag{14}$$

となる．

専門用語の英訳

電磁理論１

誘電率	dielectric constant, permittivity
電束	electric flux
電位	electric potential
電界	electric field
点電荷対	a pair of point charges
直角座標系	cartesian coordinates
テイラー展開	Taylor expansion
内積	scalar product, dot product

電磁理論２

電荷	electric charge
電流	electric current
無損失媒質	lossless medium
誘電率	permittivity, dielectric constant
透磁率	magnetic permeability
平面電磁波	plane electromagnetic wave
電界	electric field
磁界	magnetic field
固有インピーダンス	intrinsic impedance
エネルギー密度	energy density

【電気電子回路1】 解答は，灰色（8番）の解答用紙に記入すること．

図1に示す回路について，下記の問いに答えよ．ただし，抵抗 R 及びキャパシタンス C_1, C_2 はすべて正の実数である．

(1) 図示の電圧 $v_{in}(t)$, $v_{out}(t)$ $(t>0)$ のラプラス変換を $V_{in}(s)$, $V_{out}(s)$ とする．回路内部の受動素子の初期電圧，初期電流*1 をゼロとして，伝達関数*2 $G(s)=V_{out}(s)/V_{in}(s)$ を求めよ．

(2) 前問の結果を用いて，$v_{in}(t)=E\ (t>0)$ に対する出力電圧 $v_{out}(t)$ $(t>0)$ を求めよ．ただし，E は正の実数であり，回路内部の受動素子の初期電圧，初期電流をゼロとする．

(3) 入力電圧 $v_{in}(t)$ を角周波数*3 ω [rad/s]の正弦波として，この回路の定常状態*4 を考える．伝達関数の絶対値 $|G(j\omega)|$ が図2に示す周波数特性を持つようにしたい．このとき，$R=1\,\mathrm{k\Omega}$ として C_1, C_2 を求めよ．なお，$C_1 << C_2$ とする．

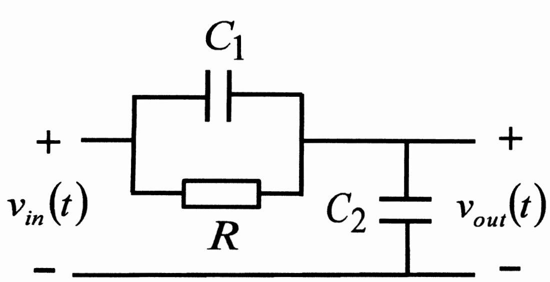


図1

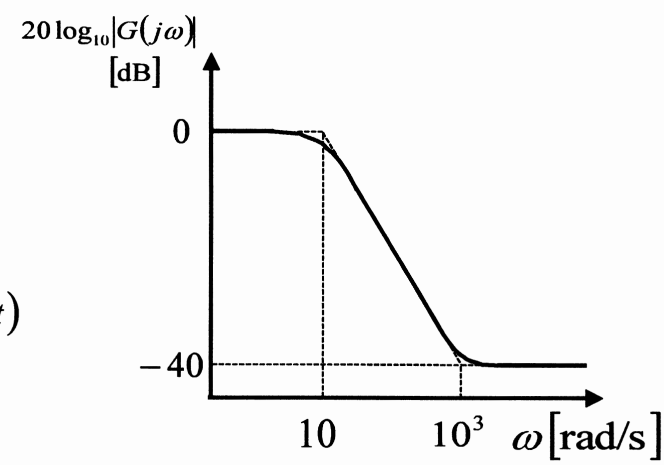
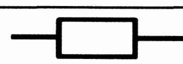


図2

注　右記の記号は抵抗を示す．



*1 初期電圧，初期電流：initial voltage, initial current
*2 伝達関数：transfer function
*3 角周波数：angular frequency
*4 定常状態：steady state

【電気電子回路2】 解答は，橙（だいだい）色（9番）の解答用紙に記入すること．

図 1 に示す MOSFET について，以下の問いに答えよ．なお，図中の G，S，D は，それぞれ MOSFET のゲート，ソース，ドレイン[*1]を示す．ゲート-ソース間の電圧は，その直流成分[*2]をV_{GS}，V_{GS} の値に比べて非常に小さな振幅値を持つ小信号交流成分[*3]をv_{gs}とする．同様に，ドレイン-ソース間の電圧の直流成分をV_{DS}，小信号交流成分をv_{ds}とし，ドレイン電流の直流成分をI_D，小信号交流成分をi_dとする．

(1) 飽和領域[*4]で動作している MOSFET のドレイン電流が下式で与えられ（但し β，V_T，λ は定数），そのときの小信号交流等価回路[*5]が図 2 で近似できるときの λ および相互コンダクタンス[*6] g_mを導出せよ．

$$I_D = \frac{\beta}{2}(V_{GS} - V_T)^2(1+\lambda V_{DS})$$

$$i_d \approx \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \cdot v_{gs} + \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \cdot v_{ds}$$

(2) 図 2 の小信号交流等価回路が成り立つものとして，図 3 の回路の小信号交流等価回路を図示せよ．なお，図 3 のZ_D，Z_L はインピーダンスを示し，V_{DD} には直流電圧が印加されているものとする．

(3) 図 3 の回路において，小信号電圧利得[*7] $A_v = v_{ds}/v_{gs}$を，g_m，Z_D，Z_L を用いて表せ．なお，ここでは g_m，Z_D，Z_L を定数として扱ってよい．

(4) 図 3 の回路において，Z_D を抵抗 R，Z_L をキャパシタ C とする．角周波数[*8] ω [rad/s]の正弦波定常状態[*9]における小信号電圧利得 $A_v(\omega)$ および遮断角周波数[*12] ω_{cut} を g_m，R，C，ω を用いて表せ．

(5) 上記(3)で求めた小信号電圧利得のボード線図[*10]（ゲイン線図[*11] のみでよい）を，横軸は $\log_{10}\omega$，縦軸は $20\log_{10}|A_v(\omega)|$ [dB] として描け．但し，図中には適宜，遮断角周波数，各軸上の主要な値や数式，漸近線[*13]やその傾きを書き入れること．

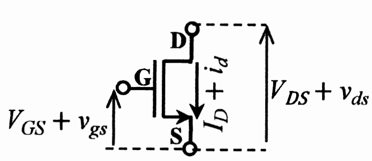


図 1

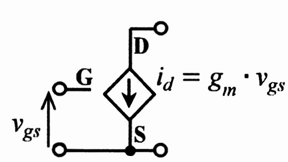


図 2

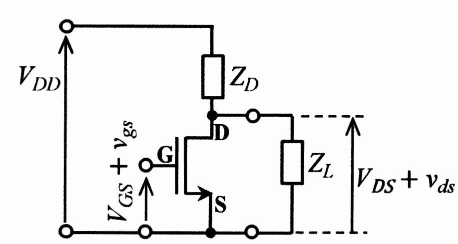


図 3

*1 ゲート，ソース，ドレイン：gate, source, drain
*2 直流成分：DC (Direct Current) component
*3 小信号交流成分：small-signal AC (Alternating Current) component
*4 飽和領域：saturation region
*5 小信号交流等価回路：small- signal AC equivalent circuit
*6 相互コンダクタンス：mutual conductance
*7 小信号電圧利得：small-signal voltage gain
*8 角周波数：angular frequency
*9 正弦波定常状態：sinusoidal steady state
*10 ボード線図：Bode plot
*11 ゲイン線図：Bode magnitude plot
*12 遮断角周波数：angular cut-off frequency
*13 漸近線：asymptotic line