問題2　電磁気学 解答例

I

(1) 総電荷が Q，コイルの周長が $2\pi a$ であるので，電荷の線密度 λ は

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$$

(2) 円形コイル状の微小線要素は $ds = ad\phi$ と表される．この微小線要素上の電荷 λds が点Pにつくる電界の z 成分 dE_z は

$$dE_z = \frac{\lambda a d\phi\, z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

故に

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}\, d\phi \\ &= \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

また電位 V は

$$\begin{aligned} V &= -\int_\infty^z E_z\, dz \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}} \end{aligned}$$

※電位 V を直接求め，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ から電界 $\boldsymbol{E}$ の z 成分 E_z を求めても良い．

(3) $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ および $z \geq 0$ より $z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

E_z は，$z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ までは単調に増加し，それを超えると単調に減少する．

(4) 電流 I は単位時間に断面を通過する電荷の総量であるので，

$$I = \lambda a \omega = \frac{\omega Q}{2\pi}$$

(5) ビオ・サバールの法則より

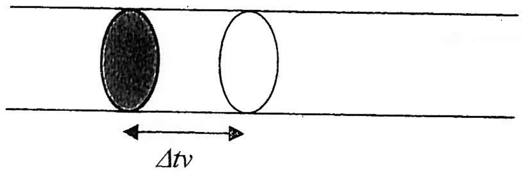
$$\begin{aligned} B_z &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I a d\phi}{4\pi(z^2 + a^2)} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \omega Q a^2}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

解答例

問題２　II

（1）

微小時間Δtの間に自由電子はΔtvだけ移動するから、時間Δtの間に導線の垂直断面を通過するのは、図に示した、垂直断面から距離Δtv内の自由電子である。



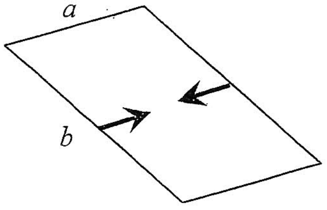
この体積ΔtvSの部分に存在する自由電子の数は$\Delta tvSn$であり、従って、時間Δtの間に導線の垂直断面を通過する電気量は$\Delta Q=-\Delta tvSne$となる。電流の定義により$I=|\Delta Q|/\Delta t=vSne$となる。

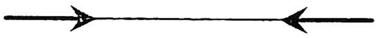
（2）

$\boldsymbol{i}$の定義より自由電子の速度は$\boldsymbol{v}=-v\boldsymbol{i}$となる。従ってひとつの自由電子が磁場から受けるローレンツ力は$\Delta\boldsymbol{F}=(-e)\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=(ev)\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}$となる。長さ$L$の部分には$SnL$個の自由電子が存在するのだから、この部分の自由電子が受ける総力は$\boldsymbol{F}=(evSnL)\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}=IL\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}$となる。

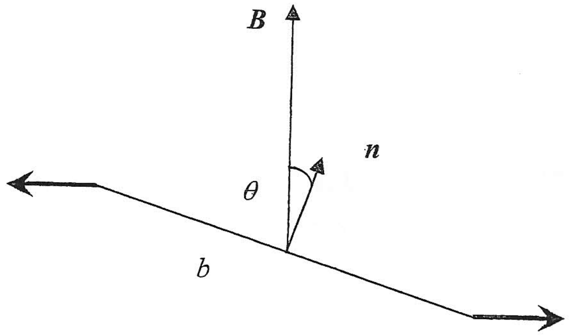
（3）

（2）の結果から、ふたつの長さ a の辺の受ける力は、大きさと方向は同じで向きは逆になっている。ふたつの長さbの辺の受ける力も同じである。
以下の図に示すように長さ b の辺の受ける力の方向は長さ a の辺方向であり、ふたつの長さ b の辺の重心間の変位ベクトルと並行である。そのためこれらはモーメントに寄与しない。





長さaの辺の受ける力の大きさは、長さaの辺と$\boldsymbol{B}$が垂直であることから、IaBとなる。ここで$B=|\boldsymbol{B}|$である。方向と向きは、以下の図に示す方向と向きである。



この偶力によるモーメントの大きさは、長さ b の辺と力のなす角がθであることから、$IaBb\sin\theta$となる。方向、向きは紙面に垂直でこちら向きになる。モーメントは $Iab\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}$ とあらわすことができる。

（4）隣り合うふたつの長方形の境界線では、ふたつの長方形コイルの電流が逆向きに流れて打ち消しあう。したがって、すべての長方形コイルに電流を流した場合は、閉曲線に電流 I を流した場合と同じことになる。

（5）問題（3）の答えより、すべての長方形コイルに作用する力は偶力である。さらに、すべての長方形コイルには、同じ方向、向きのモーメントが作用し、その大きさは $IB\sin\theta$ に長方形の面積をかけたものになる。したがってコイル全体が受けるモーメントはこれらの和である $IS\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}$ となる、ここで S は閉曲線で囲まれた部分の面積である。これより、モーメントは閉曲線で囲まれた部分の面積にのみ依存し、その形状に依存しないことがわかる。