大学院情報理工学研究科
博士前期課程　一般入試
入学試験（平成29年4月入学）

【情報・ネットワーク工学専攻】

（必須問題）

※注意事項

1．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

2．必須問題の冊子はこの注意事項を含めて３枚、解答用紙は２枚である。

3．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。

4．必須問題の試験時間は90分である。

5．必須問題は２問である。すべての問題を解答すること。

6．解答は、指定された解答用紙を使用すること。
必要なら裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

7．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

8．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

9．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

このページは問題冊子の枚数には含みません。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（平成 29 年 4 月入学）

必須問題

情報・ネットワーク工学専攻

「線形代数」

1　3 次正方行列 A の固有値は 1, 2, 3 とする．さらに，$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

はそれぞれこの順に A の固有値 1, 2, 3 に対応する固有ベクトルとする．

また，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せ．

(2) 3 次正方行列 P を $P = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \boldsymbol{v}_3]$ とする．このとき，P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $A\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(4) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(5) 自然数 n に対して A^n を求めよ．

3 次正方行列：square matrix of order 3,　固有値：eigenvalue,　固有ベクトル：eigenvector,
1 次結合：linear combination,　逆行列：inverse matrix

必須問題

情報・ネットワーク工学専攻

「微分積分」

2

以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y) = 5x^2y + 10xy^2$ について，次の問いに答えよ.

(i) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ.

(ii) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(1,1,15)$ における 接平面 の方程式と その接平面の 法線ベクトル をそれぞれ求めよ.

(2) 次の重積分の値をそれぞれ求めよ.

(i) $I_1 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \, : \, \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \right\}$

(ii) $I_2 = \iint_D \tan\left(x^2\right) dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \, : \, 0 \leqq y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right\}$

接平面：tangent plane, 法線ベクトル：normal vector

大学院情報理工学研究科
博士前期課程　一般入試
入学試験（平成29年4月入学）

【情報・ネットワーク工学専攻】

（選択問題）

※注意事項

１．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

２．選択問題の問題冊子はこの注意事項を含めて１３枚、解答用紙は３枚である。

３．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。

４．選択問題の試験時間は120分である。

５．選択問題では、８科目の中から３科目を選んで解答すること。
●３「情報通信基礎数学」は、(a)「ベクトル解析」と(b)「確率統計」のいずれか１問を選択すること。

６．解答用紙の科目の番号欄には、選択した科目の番号を記入すること。
（採点は記入された番号についてのみ行う。誤記入、記入もれに注意すること）

７．解答は、科目ごとに別々の解答用紙（各科目ごとに１枚）を使用すること。
必要なら裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

８．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

９．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

１０．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

このページは問題冊子の枚数には
含みません。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（平成29年4月入学）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

1　電気回路

図1の抵抗 R、インダクタ L、キャパシタ C の回路素子からなる回路において以下の問いに答えよ。なお、V_1、V_2、I_R はフェーザ表記の電圧および電流、E は直流電圧源の電圧、E_1、E_2 は各々交流電圧源の実効値電圧、t は時間、ω は角周波数を表すものとし、虚数単位は j で表すこととする。(分数の分子および分母が複素数となる場合は、各々実部および虚部にまとめる (分母を実数化する必要なし)。ただし、分数内にさらに分数が残らないようにする。)

(i) 抵抗 R に流れる電流 I_R を V_1 および各素子記号を用いて表せ。

(ii) 1-1' 間に (a) を接続したとき、抵抗 R での平均消費電力を求めよ。

(iii) 電圧伝達関数 $V_2(s)/V_1(s)$ を求めよ。ただし、$s=j\omega$ である。

(iv) 1-1' 間に (b) の単位インパルス電圧源 $\delta(t)$ を接続したとき、電圧 V_2 の時間波形 $v_2(t)$ を求めよ。ただし、$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ とする。

図2の回路において以下の問いに答えよ。なお、V、I はフェーザ表記の電圧および電流を表すものとする。

(v) 端子1および1' での電位 (GNDからの電位差) を各々求めよ。

(vi) 交流電圧源を $V=0$ としたとき、1-1' 間のインピーダンスを求めよ。

(vii) 1-1' 間に (c) を接続して短絡したとき、そこを流れる電流 I が零となる場合の R_1、R_2、L_1、L_2 の関係、および、周波数 f の条件を示せ。

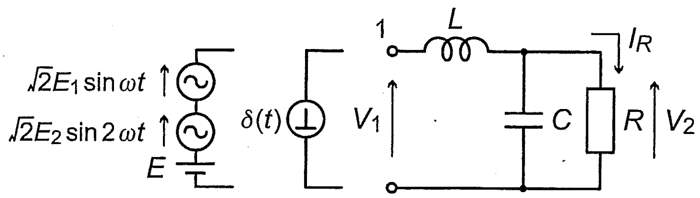

図1

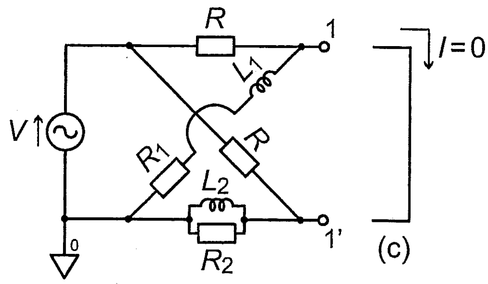

図2

抵抗：resistor, インダクタ：inductor, キャパシタ：capacitor, 回路素子：circuit element, フェーザ表記：Phasor expression, 電圧：voltage, 電流：current, 直流電圧源：DC voltage source, 交流電圧源：AC voltage source, 実効値電圧：RMS voltage, 時間：time, 角周波数：angular frequency, 虚数単位：imaginary unit, 分数：fractional expression, 分子：numerator, 分母：denominator, 複素数：complex number, 実部：real part, 虚部：imaginary part, 平均消費電力：average power consumption, 電圧伝達関数：voltage transfer function, 単位インパルス電圧源：unit impulse voltage source, 時間波形：time-domain waveform, 電位 (GNDからの電位差)：voltage potential (from GND(0 V)), インピーダンス：impedance, 周波数：frequency

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（平成 29 年 4 月入学）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

2　基礎電磁気学

1. 真空中に置いた半径 a [m]の円形線上に線電荷密度 λ [C/m]で電荷が一様に分布している．真空の誘電率を ε_0 [F/m]とし，円周率を π として以下の問に答えよ．

    (1). 円の中心軸上で，円の中心から z [m]離れた点 P の電界の大きさ E [V/m]を求めよ．
    (2). z が a に比べて十分大きいとき，(1)の結果はどのように近似できるか．また，この結果から，z が a に比べて十分大きい場合において，点 P の電界を計算するとき，この円形線電荷は円の中心にある一つの点電荷に置き換えることができる．この点電荷の電荷量 Q [C]を求めよ．

2. 半径 a [m]の円柱内導体と半径 b [m]の薄い円筒状外導体で作れられた無限長の同軸ケーブルがある($a<b$)．外導体の厚みは無視できるとする．導体以外の空間は真空で，真空の誘電率及び透磁率はそれぞれ ε_0 [F/m]，μ_0 [H/m]とし，円周率を π として以下の問いに答えよ．

    (1). 内導体に単位長さ(軸方向)あたり Q [C] ($Q>0$)の電荷，外導体に単位長さあたり $-Q$ [C]の電荷を与えたとき生じる電界の大きさ E[V/m]を同軸ケーブル中心軸からの距離 r [m]の関数として表し，r が 0 から b をこえる範囲までグラフで示せ．
    (2). 問(1) のとき内外導体間の電位差 V [V]を求めよ．
    (3). 同軸ケーブルの単位長さあたりの静電容量 C [F]を求めよ．
    (4). この同軸ケーブルにおいて，内導体の表面に一様な電流 I [A]を軸方向に流し，外導体には一様な電流 $-I$ [A]を軸方向に流す．このとき生じる磁束密度の大きさ B [T]を同軸ケーブル中心軸からの距離 r [m]の関数として表し，r が 0 から b をこえる範囲までグラフで示せ．
    (5). 問(4)の場合における同軸ケーブルの単位長さあたりの磁気エネルギー W_m [J]を求めよ．
    (6). 同軸ケーブルの単位長さあたりの自己インダクタンス L [H]を求めよ．

線電荷密度(line-charge density)，電荷(charge)，誘電率(permittivity)，円周率(circumference ratio)，電界(electric field)，点電荷(point charge)，同軸ケーブル(coaxial cable)，透磁率(permeability)，単位長さあたり(per-unit-length)，中心軸(central axis)，電位差(difference of electric potential)，静電容量(capacitance)，電流(electric current)，磁束密度(magnetic flux density)，磁気エネルギー(magnetic energy)，自己インダクタンス(self-inductance)

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

3a　情報通信基礎数学（(a) ベクトル解析）

図 3-1 のように，直交座標系による球面 $x^2+y^2+z^2=9$ の xy 平面より上の半球面を S とする．その半球面の正射影である $x^2+y^2=9$ $(z=0)$ の領域を D とし，半球面 S と領域 D で囲まれた領域を V とする．このとき，半球面上の点 P (x,y,z) における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．また，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ (x,y,z) が $\boldsymbol{F}=3x\boldsymbol{i}+3y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$ で与えられるものとする．ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，それぞれ，x,y,z 軸の単位ベクトルを表す．このとき，次の問いに答えよ．

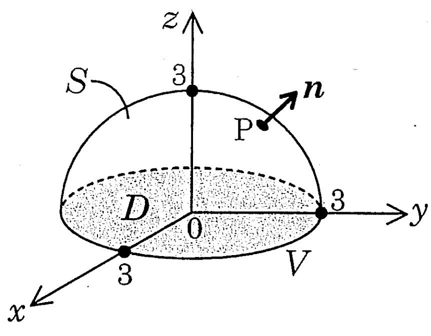

図 3-1

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ (x,y,z) の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$，および，回転 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ を求めよ．

(2) 図の点 P (x,y,z) における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ (x,y,z) と単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積，および，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{k}$ の内積を求めよ．また，それぞれの内積を x と y の関数（z を用いない）で表わせ．

(4) 極座標変換（$x=r\sin\theta,\ y=r\cos\theta$）を用いて，面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．ただし，dS は半球面 S の面積要素を表し，半球面 S の xy 平面への正射影である領域 D において，この積分は $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int\!\!\int_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\frac{dxdy}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}$ で求められるとする．また，この面積分が領域 V の体積積分 $\displaystyle\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV$ と等しくなるガウスの発散定理が成り立つことを示せ．ただし，dV は領域 V の体積要素を表している．

直交座標系: rectangular coordinate，球面: spherical surface，平面: plane，半球面: hemisphere face，正射影: orthogonal projection，領域: region，単位法線ベクトル: unit normal vector，ベクトル場: vector field，軸: axis，単位ベクトル: unit vector，発散: divergence，回転: rotation，内積: inner product，関数: function，極座標変換: polar coordinate transformation，面積分: surface integral，面積要素: surface element，積分: integral，体積積分: volume integral，ガウスの発散定理: Gauss divergence theorem，体積要素: volume element

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（平成 29 年 4 月入学）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

3b　情報通信基礎数学（(b) 確率統計）

偏りのあるコインを投げたとき，確率pで表，確率$1-p$で裏が出るものとする．このコイン投げを繰り返した結果，初めて裏が出たときの回数をN_A，初めて表が出たときの回数をN_Bとする．次に，このコイン投げとは独立に，確率βでN_Aを，確率$1-\beta$でN_Bをとる確率変数N_Cを定める．以下の問いに答えなさい．

(1) 確率$P(N_A = n)$をnとpを用いて表せ．

(2) N_Aの期待値μ_Aをpを用いて表せ．

(3) N_Aの分散σ_A^2をpを用いて表せ．

(4) 確率$P(N_C = n)$をn，βおよびpを用いて表せ．

(5) N_Cの期待値μ_Cをβとpを用いて表せ．特に，確率pを$1/3$とするとき，μ_Cをβで表せ．

(6) $p = 1/3$のとき，N_Cの分散σ_C^2をμ_Cを用いて表せ．

(7) $p = 1/3$のとき，σ_C^2のβに関する最大値を求めよ．

偏りのあるコイン：biased coin，投げる：toss，確率：probability，表：head，裏：tail，初めて裏が出たときの回数：the number when a tail appears for the first time，独立に：independently，確率変数：random variable，期待値：expectation，分散：variance，最大値：the maximum value

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

4　信号処理

問題 1

(1) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$ をフーリエ変換 $\left(X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt\right)$ せよ．
ここで，$\delta(\ )$ は，ディラックのデルタ関数とする．

(2) $Y(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ の逆フーリエ変換 $y(t)$ を求め，$y(t)$ の波形をグラフで示せ．

(3) $Z(\omega) = \begin{cases} \cos(\omega) & (|\omega| \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{2}) \end{cases}$ の逆フーリエ変換 $z(t)$ を求め，$z(t)$ の波形をグラフで示せ．

問題 2

ディジタルフィルタDF のインパルス応答が $h[n] = \begin{cases} 0.8^n \cos(\frac{\pi}{3} n) & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$ で与えられている．

(1) DF の伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(2) DF を遅延器，定数乗算器，加算器を用いて構成せよ．以下の記号を使って解答すること．

フーリエ変換： Fourier transform，ディラックのデルタ関数：Dirac delta function，逆フーリエ変換：inverse Fourier transform，波形： waveform，ディジタルフィルタ： digital filter，インパルス応答： impulse response，伝達関数： transfer function，遅延器： unit delay，定数乗算器：constant multiplier，加算器： adder.

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

5　オートマトンと離散数学・アルゴリズム基礎

以下の問に答えよ。ただし、$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は 自然数 全体の集合である。N は 0 を含み、0 は 偶数 であることに注意せよ。

1. 関数 $f: N \to N$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & (x \text{が偶数}) \\ x & (x \text{が奇数}) \end{cases}$$

(1) f が 単射 であるか否か、全射 であるか否かをそれぞれ答えよ。その理由も説明せよ。

(2) $f \circ g$ が単射となる関数 $g: N \to N$ が存在することを証明せよ。ただし、$f \circ g(x) = f(g(x))$ である。

2. 集合 $X = \{1, 2, \ldots, 16\}$ 上の 関係 R, S を、それぞれ
$R = \{(x, y) \mid$ ある $k \in N$ に対して $y = 2^k x\}$
$S = \{(x, y) \mid (x, y) \in R$ または $(y, x) \in R\}$
と定義する。

(1) $(x, y) \in R$ となる (x, y) のうち、x, y がともに6以下であるものを全て列挙せよ。

(2) R が 半順序 であることを証明せよ。半順序とは、反射的、推移的、かつ 反対称的 な関係のことである。

(3) S が 同値関係 であるか否かを答えよ。また、同値関係である場合には、X を S による 同値類 に分割せよ。同値関係であることの証明は不要である。同値関係でない場合には、それを証明せよ。

自然数 (natural number), 偶数 (even number), 関数 (function), 奇数 (odd number), 単射 (injection, one-to-one function), 全射 (surjection, onto function), 関係 (relation), 半順序 (partial order), 反射的 (reflexive), 推移的 (transitive), 反対称的 (antisymmetric), 同値関係 (equivalence relation), 同値類 (equivalence class)

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（平成 29 年 4 月入学）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

6　計算機の基本原理

次ページ以降のような C 言語によるプログラムが三つある（プログラム A～プログラム C）。これらのプログラムを、1 ワード長が 4 バイトで、32 ビットのバイトアドレス方式のマルチコアプロセッサで実行した時を考える。オペレーティングシステムとしては Linux 等を考える。この時、以下の問に答えよ。

1. 16 進数で 1058a7bc と表せる数を 32 ビットの 2 進数で表せ。16 進数表現では、0～9 の他に a～f までの文字を 10～15 を表すために使う事で、1 桁辺り 4 ビットの情報を表すことが出来る。

2. プログラム A を実行したところ、プログラム A の右に示される結果が標準出力に表示された。ここでプログラムの printf 文内の「%08x」は整数を 8 桁の 16 進数で表示すること、「%d」は整数を 10 進数で表示することを意味する。（ア）に入る数字を答えよ。

3. プログラム A の 8 行目を実行した直後において、16 進数で表したメモリのアドレスの 1058a7bc ～ 1058a7c7 の範囲について、1 バイト毎に内容を 16 進数で表現するものが次々ページの表「メモリの内容」である。メモリ上に配置されたワード中の各バイトの順序を定めたビッグ・エンディアン方式とリトル・エンディアン方式のそれぞれの場合についてこの表の空欄を埋めて完成した表を書け。ただし負数には 2 の補数表現を用いている。int は 32 ビットの整数であることに注意しなさい。

4. プログラム A の計算部分を並列処理により高速化させたい。一般に複数のプロセスを生成して並列計算させる場合はプロセス間で変数の内容を共有できないが、複数のスレッドを生成して並列計算させる場合はスレッド間で変数の内容が共有できる。プログラム B は別のプロセスを生成する方法で並列処理を行ったもの、プログラム C は別のスレッドを生成する方法で並列処理を行ったものである。実行結果である（イ）と（ウ）の数値はどちらも（ア）と同一であった。
　ここで、プログラム B の 30 行目を「sum = sum1 + sum2;」に修正して実行した場合には（イ）の数字が、プログラム C の 19 行目を「sum += a[i];」に修正して実行した場合には（ウ）の数字が、（ア）とは異なるものになった。（イ）や（ウ）にどんな数字が表示される可能性があるか具体的な例を示せ。また、なぜその数字になるか、プログラムの挙動を詳しく説明せよ。

C 言語: C language, ワード長: word length, バイト: byte, ビット: bit, バイトアドレス方式: byte addressing, マルチコアプロセッサ: multi-core processor, オペレーティングシステム: operating system, 16 進数: hexadecimal number, 2 進数: binary number, 標準出力: standard output, 10 進数: decimal number, ビッグ・エンディアン: big endian, リトル・エンディアン: little endian, 2 の補数表現: two's complement representation, 並列処理: parallel processing, プロセス: process, スレッド: thread

【次ページに続く】

【前ページから続く】

```c
#include <stdio.h>

int a[10]={-1, 23, -34, 45, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

int main(void)
{
  int i, sum=0;
  printf("a=%08x¥n",a);
  for (i=0; i<10; i++){
    sum += a[i];
  }
  printf("sum=%d¥n",sum);
  return 0;
}
```

```
> ./a.out
a= 1058a7bc
sum= (ア)
>
```

プログラムA（左）とその実行結果（右）

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <unistd.h>

int a[10]={-1, 23, -34, 45, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
int sum = 0, sum1 =0, sum2 =0;

int calc(int start, int end)
{
  int i, s=0;
  for(i=start; i<=end; i++){
    s += a[i];
  }
  return s;
}

int main(void)
{
  pid_t pid;
  int status;
  printf("a=%08x¥n",a);
  pid = fork();                          // create process
  if (pid == 0){                         // child process
    sum1 = calc(0,4);
    _exit(sum1);
  }
  else{                                  // parent process
    sum2 = calc(5,9);
    waitpid(pid, &status, 0);            // wait for process termination
    sum = WEXITSTATUS(status) + sum2;
    printf("sum=%d¥n",sum);
    exit(0);
  }
  return 0;
}
```

```
> ./a.out
a= 1058a7bc
sum= (イ)
>
```

プログラムB（左）とその実行結果（右）

【次ページに続く】

【前ページから続く】

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <unistd.h>
#include <pthread.h>

typedef struct {
  int start;
  int end;
} arg_t;

int a[10]={-1, 23, -34, 45, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
int sum = 0;

void *calc(void *arg)
{
  int i, s=0;
  arg_t *argp = (arg_t *)arg;
  for(i=argp->start; i<=argp->end; i++){
    s += a[i];
  }
  return (void *)(unsigned long)s;
}

int main(void)
{
  pthread_t thread;
  arg_t arg1, arg2;
  void *ret;
  printf("a=%08x¥n",a);

  arg1.start=0; arg1.end=4;
  pthread_create(&thread, NULL, calc, &arg1);   // create thread

  arg2.start=5; arg2.end=9;
  sum += (int)(unsigned long)calc(&arg2);
  pthread_join(thread,&ret);                    // wait for thread termination
  sum += (int)(unsigned long)ret;
  printf("sum=%d¥n",sum);
  return 0;
}
```

```
> ./a.out
a= 1058a7bc
sum= (ウ)
>
```

プログラム C（左）とその実行結果（右）

表：メモリの内容

メモリのアドレス（8 桁の 16 進数表現）	ビッグ・エンディアン（2 桁の 16 進数表現）	リトル・エンディアン（2 桁の 16 進数表現）
1058a7c7		
1058a7c6		
1058a7c5		
1058a7c4		
1058a7c3		
1058a7c2		
1058a7c1		
1058a7c0		
1058a7bf	ff	ff
1058a7be	ff	ff
1058a7bd	ff	ff
1058a7bc	ff	ff

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

7　数値解析と最適化

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が与えられているとする．ただし n, m は $n > m$ を満たす正整数である．$A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を用いて，2 つの線形計画問題$\langle P\rangle$, $\langle D\rangle$ を以下のように構成する:

$$\langle P\rangle \begin{cases} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{条　件} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{cases} \qquad \langle D\rangle \begin{cases} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{条　件} & A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}. \end{cases}$$

ここで $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ は変数であり，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトル，^{T} は転置を表す．また，ベクトルに関する不等号は要素ごとの不等号を表す．以下の問いに答えよ．

1. 弱双対定理は $\langle P\rangle$ の許容解 $\boldsymbol{x}$ と $\langle D\rangle$ の許容解 $\boldsymbol{y}$ の間に $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ が成り立つことを主張する．この主張を証明せよ．

2. A が $m \times n$ ゼロ行列であると仮定する．$\langle P\rangle$ と $\langle D\rangle$ が両方とも許容解を持たないとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が満たすべき条件を求めよ．

$A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ として次のデータが与えられたとする．以下の問題に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T.$$

3. $\langle D\rangle$ の許容領域を図示せよ．

4. x_3, x_4 を非基底変数とする辞書を作成せよ．
(辞書を知らない人はタブローを作成しても良い.)

5. $\langle P\rangle$ と $\langle D\rangle$ の最適解と最適値を求めよ．

線形計画問題: linear programming problem, 弱双対定理: weak duality theorem, 許容解: feasible solution, 許容領域: feasible region, 非基底変数: nonbasic variable, 辞書: dictionary, タブロー: tableau, 最適解: optimal solution, 最適値: optimal value.

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

8 アルゴリズムとデータ構造

問題 1

```
void Qsort( int a[], int lo, int hi )
{
  if( lo < hi ){
    int l = lo, r = hi;
    int piv = a[lo]; // ① 軸要素の選択

    // ② 配列の分割と並べ替え
    while( 1 ){
      while( a[l] < piv )    l++;
      while( piv < a[r] )    r--;
      if( l >= r )           break;
      swap( &a[l], &a[r] );
      l++; r--;
    }

    // ③再帰呼び出し
    if( lo < l-1 )      Qsort( a, lo, l-1 );
    if( r+1 < hi )      Qsort( a, r+1, hi );
  }
}
```

クイックソートに関する以下の設問に答えなさい．アルゴリズムの記述は，プログラミング言語，流れ図，もしくは自然言語等を用いて記述してよい．

左コードはクイックソートの C 言語を用いた一実装例である．関数 Qsort(int a[], int lo, int hi) は，与えられた配列 a[lo]～a[hi]（ただし lo < hi）をソートする関数で，大まかに，

①軸要素の選択，

②配列の分割と並べ替え，

③分割配列各々に対する再帰呼び出し

の 3 つの部分に分けて考えることができる．左コードでは各部分をそれぞれ四角で括っている．

また関数 swap(int *x, int *y) は，*x, *y のそれぞれの値を入れ替える関数を表すものとする．

以下の問に答えなさい．なお説明には必要に応じて図などを用いても良いものとする．

(1-1) 配列を A[] = {4, 7, 6, 1, 0, 3, 2, 5} とし，Qsort(A, 0, 7)として呼び出したとき，“②配列の分割と並び替え”部分直後の(③の直前)の配列 a[] の状態を表しなさい．

(1-2) 配列を A[] = {4, 7, 6, 1, 0, 3, 2, 5} とした時の，Qsort(A, 0, 7) の再帰動作の様子を，配列の分割位置を示しながら説明しなさい．

(1-3) 同様に配列 B[] = {7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0} とした時の，Qsort(B, 0, 7) の再帰動作の様子を，配列の分割位置を示しながら説明しなさい．また，この時の時間計算量は，問(1-2) で考えた配列 A の時と比べて多いか少ないかを理由と共に答えなさい．

(1-4) 配列 B[] = {7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}に関して，“① 軸要素の選択”の部分を，a[lo], a[(lo+hi)/2], a[hi] の 3 値の中央値を選択するように変更した場合，Qsort(B, 0, 7) の時間計算量が，どのように変わるかを理由と共に答えなさい．ただし軸要素として中央値を選択する際の計算量は，a[lo] を選択する計算量と同等と扱って良いものとする．

【次ページに続く】

【前ページから続く】

問題 2

ヒープを用いた処理を考える．ヒープは完全２分木と呼ばれる特別な形をした２分木を配列で表現し，ノードの持つ値が親子間で一定の順序関係が成り立つように値を格納したものである．その操作には，図のプログラムに示した処理が用いられる．ここで，k 番目の配列要素に対応するノードについて，

- 親のノードの配列の添字を par(k) で表し，
- 左の子のノードの配列の添字を lch(k) で表し，
- 右の子のノードの配列の添字は lch(k)+1 とする．

配列 X には X[1], …, X[1023] に 1023 個の値が入っているとし，X[1], …, X[15] の 15 個の値は

15, 7, 14, 3, 6, 10, 13, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12

とする．

```
void tdown( int T[], int k, int m){
    /* T[1]…T[m] がヒープの領域 */
    int c = lch( k );   /* 左の子 */
    if( c > m )   return;
    int r = c+1;          /* 右の子 */
    if( r <= m && T[r] < T[c] ) c = r;
    if( T[k] <= T[c] )   return;
    int v = T[k]; T[k] = T[c]; T[c] = v;
    tdown( T, c, m );
}
```

```
void tup( int T[], int c ){
    if( c <= 1 )   return;
    int p = par( c );   /* 親 */
    if( T[p] <= T[c] )   return;
    int v = T[p]; T[p] = T[c]; T[c] = v;
    tup( T, p );
}
```

(2-1) tdown(X, j, 15) を j = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 の順に実行して，根のノード X[1] にその最小値を保持するヒープを構成する．その結果の X[1],…,X[15] の値を示せ．

(2-2) X[1], …, X[1023] の値のうち 15 番目に大きい値を求めるための方法を，前問(2-1) の処理に続けてどのような操作を行うか，具体的な配列操作の手順として説明せよ．配列に対する操作としては，要素の値の読み出しと設定（交換も可）及び図の tdown と tup を用いてもよいが，「要素を大きい順に並べ直す」というような未定義の方法は使用できない．

クイックソート: quick sort，プログラミング言語: programming language，流れ図: flow chart，自然言語: natural language，配列: array，軸要素の選択: pivot selection，配列の分割: partition of array，再帰呼び出し: recursive call，ヒープ: heap，（完全）２分木: (complete) binary tree，ノード: node，親: parent，子: child，配列要素: array element，配列の添字: array index