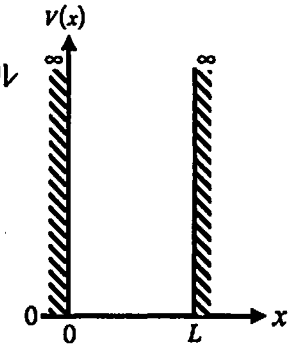
量子物理学

下記の問 1)～10) について解答せよ。解答は，結果だけでなく導出の過程も記すこと．



問題.　電子が右図に示すような無限大の障壁を持つ一次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<L \\ \infty, & x\le 0,\quad x\ge L\end{cases} \quad \text{------- (1)}$$

に閉じ込められているとする．

1) ポテンシャル $V(x)$ 中の電子に対する時間に依存しない一次元シュレディンガー方程式を，ポテンシャル $V(x)$，ディラック定数 $\hbar$ $(=h/2\pi$，h はプランク定数)，電子の質量 m，波動関数 $\phi(x)$，電子の位置座標 x，電子のエネルギー E を用いて書きなさい（結果だけで良い）．

2) 問 1) で書いたシュレディンガー方程式を式 (1) で与えられるポテンシャル分布のもとで解き，エネルギー固有値 E_n を求めなさい．ただし、量子数 n が1（$n=1$）のときに基底状態を表すものとする．

3) 問 2) のエネルギー固有値 E_n に対する波動関数 $\phi_n(x)$ を規格化定数まで含めて求め，それが $\phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ になる事を示しなさい．また，波動関数の次元（単位）を書きなさい．ただし，長さの単位はメートル $[\mathrm{m}]$ とする．　さらに，ここで行った「波動関数の規格化」がなぜ必要であるかについて，文章で説明しなさい．

4) 問 3) で求めた波動関数 $\phi_n(x)$ が，異なるエネルギー固有値 E_m $(\neq E_n)$ の波動関数 $\phi_m(x)$ と直交する事を示しなさい．

5) 問 3) で求めた波動関数のうち，基底状態（$n=1$）と第一励起状態（$n=2$）の波動関数の概略を、横軸を位置座標 x、縦軸を波動関数 $\phi_n(x)$ とするグラフに示しなさい．

6) 問 3) で求めた波動関数 $\phi_n(x)$ に対する電子の位置の期待値 $\langle x\rangle$ 及び位置の二乗の期待値 $\langle x^2\rangle$ を井戸幅 L と量子数 n を用いて求め，さらにそれらの結果を用いて位置の分散 $\left\langle (x-\langle x\rangle)^2\right\rangle$ を求めなさい．次に，その結果をふまえて，量子数 n が増えるに従い分散がどのように変化するかを論述し，n が無限に大きい極限での分散の値を答えなさい．さらに，位置の分散の物理的意味を，それがなぜ $\left\langle (x-\langle x\rangle)^2\right\rangle$ という式で求められるのかを踏まえて文章で説明しなさい．

（２枚目に続く）

7) 式 (1) で与えられるポテンシャル $V(x)$ 中の電子に対する<u>時間に依存する</u>一次元シュレディンガー方程式を，ポテンシャル $V(x)$，ディラック定数 $\hbar$，電子の質量 m，電子の位置座標 x，時間を表す変数 t，時間に依存する波動関数 $\psi(x,t)$ を用いて書きなさい（結果だけで良い）.

8) 初期時刻 $t=0$ における電子の波動関数 $\psi(x,t=0)$ が，問 3) で得られた基底状態の波動関数 $\phi_1(x)$ であったとする．このとき， $t>0$ の任意の時刻における電子の状態を表す波動関数 $\psi(x,t)$ を求めなさい．ただし，問 7) で得られた時間に依存するシュレディンガー方程式から出発して答えを導き，最終的な結果は問 2)，3) で得られたエネルギー固有値と波動関数の結果を用いて答えること.

9) 次に，初期時刻 $t=0$ における電子の波動関数 $\psi(x,t=0)$ が，問 3) で得られた基底状態 $\phi_1(x)$ と第一励起状態 $\phi_2(x)$ の重ね合わせ $\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x)+\phi_2(x)]$ であったとする．このとき，$t>0$ の任意の時刻における電子の状態を表す波動関数 $\psi(x,t)$ を求めなさい．ただし，最終的な結果は問 2)，3) で得られたエネルギー固有値と波動関数の結果を用いて答えること.

10) 問 9) で求めた波動関数 $\psi(x,t)$ を用いて，ある位置座標 x と時刻 $t\ (>0)$ における電子の存在確率密度を求めなさい．さらに，その存在確率密度が時間とともに振動する位置座標での振動の周期 T を求めなさい.