システム情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目　システム情報学

平成１５年８月２６日（火）　　１３：００～１６：００

出題される８問のうち，４問のみを選択して解答せよ

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．ただし試験問題の内容に関する質問に対しては，原則として答えない．

(3) 答案用紙４枚が渡される．１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は，適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい．

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

第１問

(1) 連続時間信号 $x(t) = \cos \omega t$ をサンプリング周期 T でサンプルした離散時間信号を $x[n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とする．$n = N$(ただし N は1以上の整数) において，ちょうど k 周期観測された (たとえば，図1では $N = 256, k = 4$ である)．このとき信号 $x[n]$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$ の離散フーリエ変換 $X[m]$ $(m = 0, 1, \ldots, N-1)$ を求めよ．ただし k は $0 < k < N/2$ をみたす整数である．

(2) 問い (1) で求めた離散フーリエ変換を

$$\tilde{X}[l] = \begin{cases} X[l] & (0 \leqq l \leqq N/2) \\ X[N+l] & (-N/2 < l \leqq -1) \end{cases}$$

として $-N/2 < l \leqq N/2$ の範囲で定義しなおす．このとき，$x(t) = \cos \omega t$ を周期 NT の周期関数として求めたフーリエ級数展開の係数 c_l と $\tilde{X}[l]$ との関係を求めよ．

(3) 連続時間周期信号 $y(t)$ をサンプリング周期 T でサンプルし，1周期分を取り出した信号を $y[n]$ とする．$y[n]$ の離散フーリエ変換が

$$Y[m] = \{1/2, 1+j, 0, 1, 0, 1, 0, 1-j\}$$

であったとき，$y(t)$ を推定せよ．ただし j は虚数単位であり，$T = 0.001$ とする．

(4) 問い (3) の $y[n]$ に対し，データ間に2つの0を挿入して3倍の長さの信号 $z[n]$ $(n = 0, 1, \ldots, 23)$ を作る．つまり，

$$z[n] = \begin{cases} y[l] & (n = 3l,\ ただし\ l = 0, 1, \ldots, 7) \\ 0 & (その他) \end{cases}$$

とする．$z[n]$ の離散フーリエ変換を求めよ．このようにデータ間を補間することをアップサンプリングという．アップサンプリングにより離散フーリエ変換が受ける変化の様子を一般的に議論せよ．さらにアップサンプリングが実際に用いられる例をあげよ．

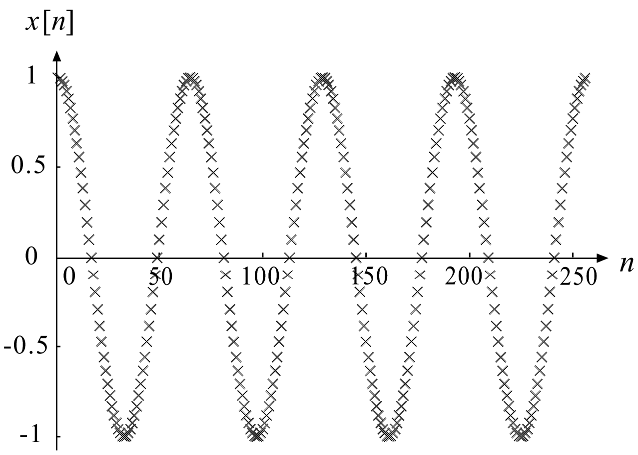


図1

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 2 問

抵抗とスイッチと演算増幅器を用いた回路について以下の問いに答えよ．用いられる演算増幅器は理想的と仮定してよい．

(1) 図 1(a) に示す，抵抗値 R と $2R$ の抵抗で構成された梯子型回路（以下，抵抗梯子回路と記す）の i 番目 $(0 \leqq i \leqq n-1)$ の接続点の電圧 V_i を求めよ．ただし，抵抗梯子回路の左端に供給される電圧を V とする．

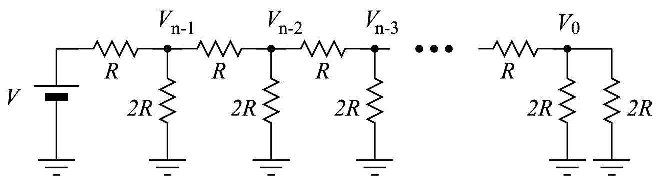
(2) 図 1(b) のように，抵抗梯子回路の抵抗値 $2R$ の抵抗のそれぞれに直列にスイッチを挿入し，接地と演算増幅器の反転入力とのいずれかに切り替えて接続できるようにした．問い (1) で求めた接続点の電圧はスイッチがどちらに接続されるかにかかわらず変化しないことを説明せよ．ただし演算増幅器の帰還抵抗を R_f とする．

(3) i 番目のスイッチの状態を a_i とし，$a_i = 1$ でスイッチが演算増幅器側に接続される状態を，$a_i = 0$ で接地側に接続される状態を表すとすると，演算増幅器の出力電圧 V_{out} は，a_{n-1} を最上位桁とする n ビット 2 進数 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ に比例することを示せ．

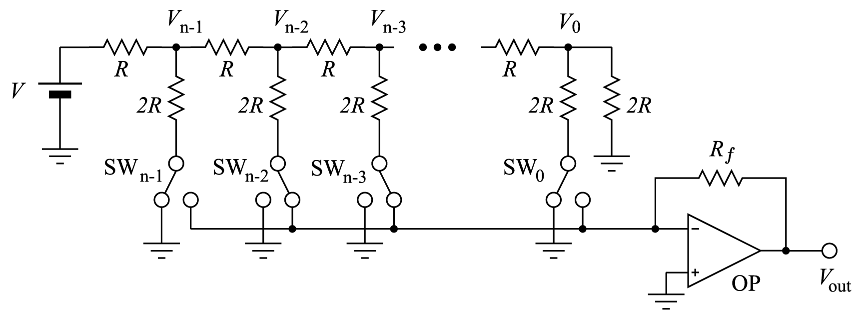
(4) 抵抗梯子回路とスイッチと演算増幅器を図 1(c) のように接続し，入力電圧 V_{in} を供給した回路の機能と動作を，2 進数 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ に関連付けて説明せよ．ただし入力端子と演算増幅器の反転入力との間の抵抗を R_1 とする．

【次のページへ続く】

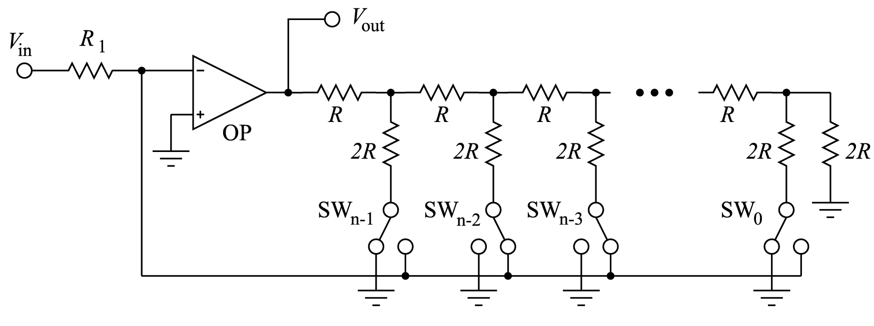
【第 2 問の続き】



(a) 問い(1)の回路



(b) 問い(2)と問い(3)の回路



(c) 問い(4)の回路

図1

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 3 問

図 1 に示されるマス・バネ・ダンパ系を考える．滑らかな床の上に質量 $m > 0$ の剛体があり（床との摩擦はないものとする），壁と剛体が，バネ (バネ係数 $k > 0$)，ダンパ (ダンパ係数 $c > 0$)，および図のように水平方向に力 f を発生させるアクチュエータで接続されている．図のように剛体の水平方向の変位を q とし，バネが自然長であるときの剛体の重心の位置を原点 $q = 0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x_1 = q$，$x_2 = \dot{q}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$u = f$ とする．状態空間表現

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

の行列 A，B を求めよ．

次に，この系に対して状態フィードバック $f = Hx$ を施すことを考える．またスカラ出力を $y = Cx$ とする．このとき系は，

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x, \ \tilde{A} = A + BH \\ y = Cx \end{cases}$$

と表される．以下の問い (2)，(3)，(4) に答えよ．

(2) $H = [0 \ \ -h]$，$C = [0 \ \ \alpha]$ のときの，系の可観測性を調べよ．

(3) 状態フィードバック $f = Hx$ により系は漸近安定であるとする．

(a) 次式が成り立つことを示せ．

$$y^2(t) = -\frac{d}{dt}\left(x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\right)$$

ただし P は次の行列方程式

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C = 0, \ P = P^{\mathrm{T}}$$

の解である．なお X^{T}，x^{T} はそれぞれ行列 X，ベクトル x の転置を表す．

(b) 次式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^\infty y^2(t)dt = x^{\mathrm{T}}(0)Px(0)$$

【次のページへ続く】

【第 3 問の続き】

(4) 状態フィードバック $f = Hx = [0 \quad -h]x$ (ただし $h > 0$ とする) により系は漸近安定であるとする．また，$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．問い (3) の結果を用い，時刻 $t = 0$ から $t = \infty$ でのダンパで消費されるエネルギ，アクチュエータの行う仕事量，およびバネのポテンシャルエネルギの増減の関係について論ぜよ．

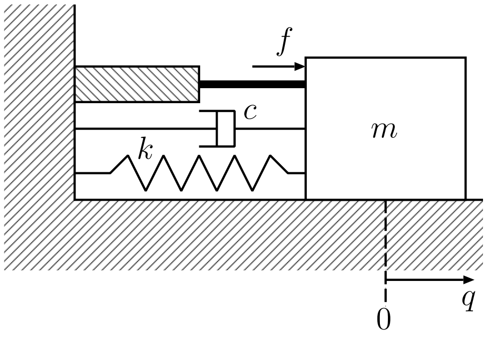


図 1

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 4 問

図 1 に示す 2 自由度平面マニピュレータの先端 P を直線 $x = a(a > 0)$ 上で速度 v にて等速直線運動を行わせたい. そのために関節 1, 2 の角速度 $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ を求めたい. 図 1 に示されるようにリンク 1 の長さは l_1, リンク 2 の長さは l_2 であり, 各関節に取り付けられた回転センサによって関節 1 の角度 θ_1, 関節 2 の角度 θ_2 は計測可能とする (なお角度, 角速度に関しては反時計回りを正とする). 以下の問いに答えよ.

(1) このマニピュレータのヤコビアン J を求めよ.

(2) 機構の特異点はどこか. ヤコビアン J を用いて説明せよ. また, 特異点においてはどのような現象が生じるか.

(3) ある時刻における先端 P の位置を (a, y) としたとき, $\sin\theta_1$ と y の関係, および $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ と y の関係を式で示せ. ただし, 関節 2 は関節 1 と先端 P を結ぶ直線上かその下側に存在すると仮定する.

(4) $\dot{\theta}_1$,$\dot{\theta}_2$ を θ_1,θ_2 の関数として表せ.

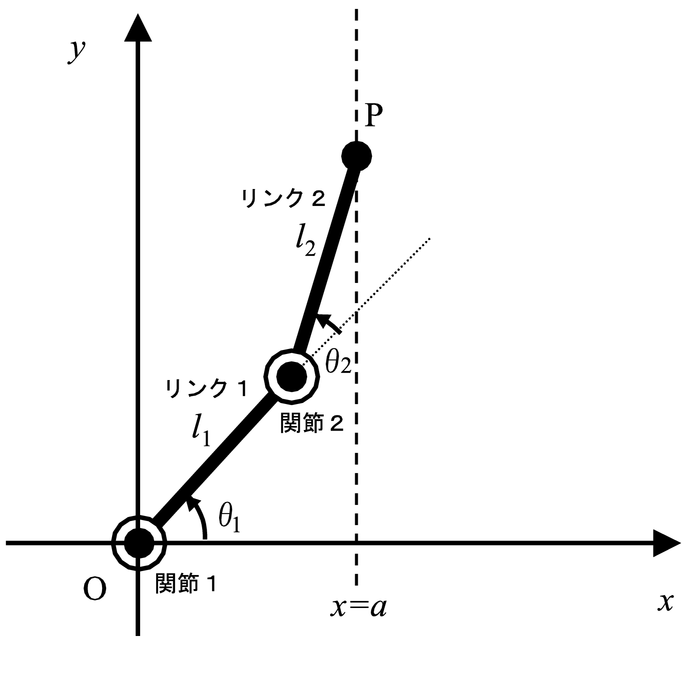


図 1

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 5 問

論理代数方程式 $ax + b = c$ の解が存在するための必要十分条件と，この必要十分条件のもとで，解 x を表す論理式を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 論理代数において等式 $X = Y$ と等式 $XY + \overline{X}\,\overline{Y} = 1$ は同値であることを証明せよ．

(2) 任意の論理関数 $F(x, a, b, c)$ は論理変数 x に関して次のように展開できることを証明せよ．

$$F(x, a, b, c) = xF(1, a, b, c) + \overline{x}F(0, a, b, c)$$

(3) 論理代数方程式 $Ax + B\overline{x} = 1$ を満たす解 x が存在するための必要十分条件を論理定数 A, B に関して求めよ．

(4) 問い(1)，(2)，(3)の結果を用いて，論理代数方程式 $ax + b = c$ の解 x が存在するための必要十分条件を最も簡単な積和型論理式で求めよ．この必要十分条件のもとで，一般解 x を表す論理式を求めよ．

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 6 問

図 1 に示すように 2 つの地点 A，B があり，A→A の経路あるいは B→A の経路を通るたびに硬貨を 1 枚獲得し，A→B の経路あるいは B→B の経路を通るたびに硬貨を 2 枚獲得する．地点 A からスタートして硬貨を N 枚だけ獲得して地点 A に戻る経路が何通りあるかを求めたい．$C(p,n)$ （p は A または B，n は非負の整数）を，A から出発し硬貨を n 枚だけ獲得して地点 p に到達する経路の場合の数とする．例えば $C(\mathrm{A},4)$は，A→A→A→A→A，A→A→B→A，A→B→A→A の 3 通り存在するので 3 となる．また $C(\mathrm{A},0)$ は 1，$C(\mathrm{B},0)$ は 0 である．

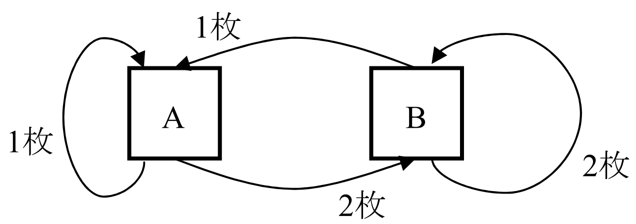


図 1

(1) $C(\mathrm{A},1)$ と $C(\mathrm{B},1)$ の値を求めよ. また, $n \geqq 2$ のときの $C(\mathrm{A},n)$ と $C(\mathrm{B},n)$ を，$C(\mathrm{A},n-1)$，$C(\mathrm{A},n-2)$，$C(\mathrm{B},n-1)$，$C(\mathrm{B},n-2)$ を用いて表せ．

(2) $C(p,n)$ を求めるプログラムとして，関数 path(p,n) を C 言語で以下のように作成した．この関数 path は，空欄 3 で，再帰的に path 自身を呼び出す．空欄を完成させよ. ただし, この関数 path の引数 p は ’A’ または ’B’ であり，引数 n は非負の整数であることが保証されているものとせよ．なお，空欄は C 言語以外のプログラミング言語を指定して完成させても良い．

```
path(p,n)
char p; int n;{
  int r;
  if ((n==0)||(n==1)){
    if (p=='A'){ 空欄 1 }
    if (p=='B'){ 空欄 2 }}
  if (n>=2){
    空欄 3 }
  return r;}
```

【次のページへ続く】

【第 6 問の続き】

(3) 次に，$C(p,n)$を求める関数 pathNR(p,n) を，再帰呼び出しを用いずに C 言語で以下のように作成した．空欄を完成させよ．ただし，この関数の引数 p は 'A' または 'B' であり，引数 n は非負の整数であることが保証されているものとせよ．なお，空欄は C 言語以外のプログラミング言語を指定して完成させても良い．

```
pathNR(p,n)
char p; int n;{
  int i,a1,a0,b1,b0,a,b;
  a0=a1=1;
  b0=b1=0;
  if (n==0) {a=a0;b=b0;}
  if (n==1) {a=a1;b=b1;}
  for(i=2;i<=n;i++){
     [空欄 4]   }
  if(p=='A') return a;
  if(p=='B') return b;}
```

(4) ある非負の整数 k に対し，path('A', k) を実行したときに空欄 3 が実行される回数を a_k とする．ただし，再帰的に呼ばれた関数内で空欄 3 が実行される回数も含むこととする．$k \geqq 4$ のときに a_k が満たす漸化式を導出し，$k \geqq 4$ のときには， pathNR('A', k) で空欄 4 が実行される回数よりも a_k の方が大きいことを示せ．

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 7 問

図 1 は，固定された 4 本の柱に水平なバネで結合された質量 m の質点を上方から見下ろしたものである．質点は水平な平面上を運動する．平面との摩擦，バネの質量は無視できる．4 本のバネ（K_1，K_2，K_3，K_4）の特性は理想的であり，バネ定数をそれぞれ k_1，k_2，k_3，k_4 とする．4 本のバネのつりあいの位置を原点として，図 1 のように平面に固定された直交座標系を考え，質点の位置を (x, y) と表す．4 本の柱は図 1 のように座標軸上に位置する．質点の変位は微小であり，K_1 と K_2 の伸びは y に依存せず，K_3 と K_4 の伸びは x に依存しない．また，質点に対して，K_1 と K_2 は x 軸方向の力だけを与え，K_3 と K_4 は y 軸方向の力だけを与える．質点にはその速度に比例した大きさの抵抗力（比例定数 λ）が働いている．

(1)　$\lambda = 0$ である場合の質点の運動方程式とその一般解を x 軸について求めよ．

(2)　$\lambda > 0$ である場合の質点の運動方程式とその一般解を x 軸について求めよ．

(3)　$\lambda > 0$ とする．$t = 0$ において $x = y = 0, dx/dt > 0, dy/\mathrm{d}t > 0$ という状態にある質点が，$t > 0$ において，領域「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$」の外に出ないために，λ，m，k_1，k_2，k_3，k_4 が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(4)　$\lambda = 0$ とする．$t = 0$ において速度（p, q）で原点を通過した質点が，$t > 0$ において，図 2 の斜線領域 $(x - y)(x + y) \leqq 0$ の外に出ないために，m，k_1，k_2，k_3，k_4，p，q が満たすべき必要十分条件を求めよ．

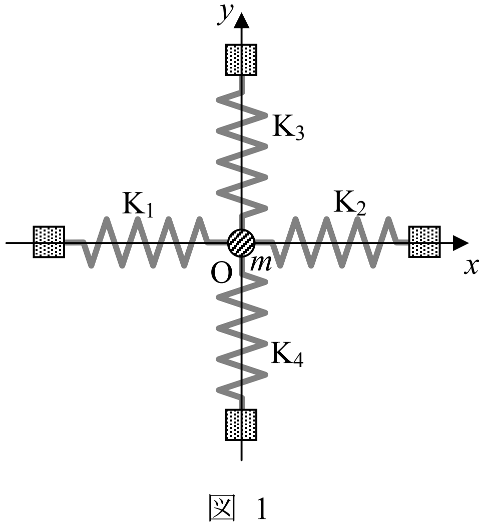


図 1

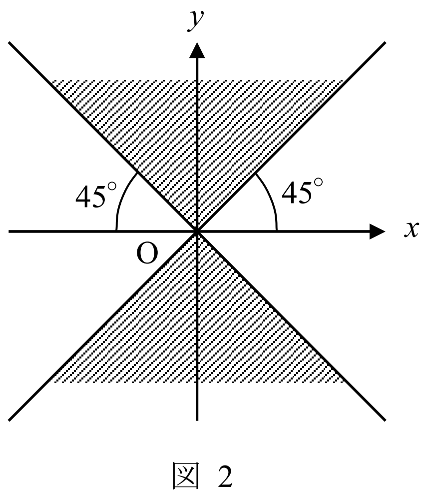


図 2

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 8 問

真空の透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，xy-平面上に固定された半径 a の円形導線 C_1 を考える．中心は原点に一致しているとする．C_1 に反時計回り (z が正の位置から見て．以下同様) に電流 I が流れているとき，z 軸上の磁束密度を求めよ．
(注) 導線上の微小線素ベクトルを $d\boldsymbol{s}$，微小電流ベクトルを $Id\boldsymbol{s}$ とするとき，微小線素位置から $\boldsymbol{r}$ 離れた位置において生じる磁束密度は，ビオサバールの法則

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\boldsymbol{s} \times \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

により与えられる．

(2) 図 2 のように，半径 a の円形導線 C_1 と，半径 b の円形導線 C_2 を xy-平面上に固定する．いずれも中心は原点に一致しているとする．C_1 に反時計回りに電流 I_1 が，C_2 に時計回りに電流 I_2 が流れている．次の (条件 i) を満たすための I_1, I_2 間の関係式を求めよ．
(条件 i) 原点において磁束密度が零になる．

(3) 問い (2) と同じく図 2 において，問い (2) における (条件 i) の代わりに次の (条件 ii) を満たすためには，I_1, I_2 の間にいかなる関係が必要か．
(条件 ii) z 軸上の原点近傍 ($|z| \ll a$) で一様な磁束密度が発生する．ただし，“z 軸上の原点近傍 ($|z| \ll a$) で一様な磁束密度”とは，z 軸上の磁束密度をテイラー展開し，z/a の多項式として表したとき，3 次以上の微小量を無視する近似のもとで一定とみなせる磁束密度であるとする．

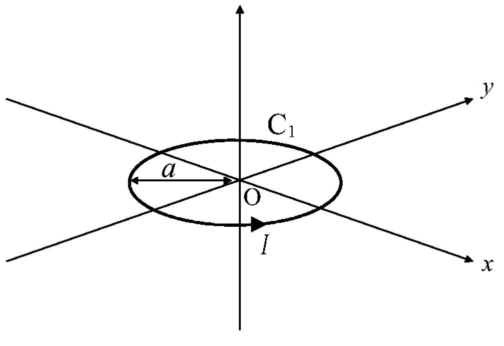


図 1

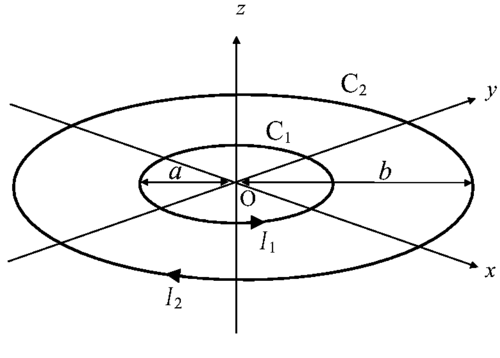


図 2

(4) 図３のように，半径 a の円形導線 C_1 を x 軸まわりに θ $(0 < \theta < \pi/2)$ 傾けて固定し，半径 b の円形導線 C_2 を xy-平面上に固定する．ただし，いずれも中心は原点に一致しているとし，C_1, C_2 に流れる電流 I_1, I_2 は同一方向 (反時計周り) であるとする．また，ここでは $a \ll b$ とし，C_2 を流れる電流 I_2 によって生じる磁場は，C_1 内部で一様であるとしてよい．C_1 に働く x 軸まわりの偶力を求めよ．

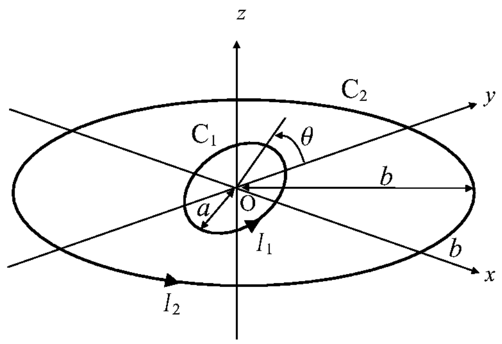


図３