東京大学大学院
新領域創成科学研究科
複雑理工学専攻

受験番号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい.

平成 27 年度大学院入学試験問題

修士課程

専門基礎科目

平成 26 年 8 月 19 日（火）

13:30～16:00（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません.
2. 本冊子の総ページ数は 17 ページです．落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい.
4. 問題は，必修問題 1 問，選択問題として数学 3 問，物理学 4 問，合計 8 問出題されます．必修問題 1 問（第 1 問）と，選択問題（第 2～8 問）から 2 問を選択して，合計 3 問を解答しなさい．解答する選択問題 2 問は，1 科目の中から選択しても，複数科目から選択してもよい.
5. 解答用紙は計 3 枚配られます． 各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい．解答用紙に書ききれない場合は，裏面にわたってもよい.
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい.
7. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい．問題冊子にも受験番号を記入しなさい.
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと.
9. 解答に関係ない記号，符号などを記入した答案は無効とする.
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません.

(草稿用紙)

(草稿用紙)

（草稿用紙）

第１問（必修問題）

自然数 n と正の実数 a を用いて

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x$$

と定義する．ここで e は自然対数の底である．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) $I_1(a) = \displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ を求めよ．

(問 2) $I_0(a)^2 = \displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4a}$ であることを示せ．

(問 3) 次の積分を求めよ．(問 2) の関係を用いてもよい．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\log_\mathrm{e}\frac{1}{x}\right)^{1/2}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-4x^2+3x}\mathrm{d}x$

(問 4) $n \geq 2$ に対して，$I_n(1) = \displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ であることを示せ．

(問 5) $I_{2n+1}(1) = \displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ を求めよ．(問 4) の関係を用いてもよい．

第２問（数学）

3 次元空間中の点 (x, y, z) と (u, v, w) の間には，以下の関係がある．

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし a, b, c を正の実数とし，d を実数とする．また，点 (x, y, z) の集合 X は，点 P を中心とする半径 1 の球面をなすものとし，X に対応する点 (u, v, w) の集合を U とする．このとき，以下の問に答えよ．

(問 1) 任意の点 (u, v, w) について，式 (1) を満たす (x, y, z) が存在するために，a, b, c, d が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(問 2) P を $(0, 0, 0)$ とする．U が半径 2 の球面となるために，a, b, c, d が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(問 3) P を $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ とする．$(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ および $(1, -1, 0)$ を含む平面を S とし，a, b, c, d が (問 2) の条件を満たすとき，U と S との距離を求めよ．

(問 4) $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, -1)$ とする．式 (1) の 3×3 行列を A とするとき $A^{\mathrm{T}}A$ の固有値を全て求めよ．ただし A^{T} は A の転置行列とする．

(問 5) (a, b, c, d) が (問 4) の値のとき，U に含まれる 2 点間の距離の最大値を求めよ．

第３問（数学）

以下の２つの関数を考える．

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

$$g(t) = \begin{cases} b, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

ここで，ω_1, ω_2, a, b は正の実数であり $\omega_2 > \omega_1$ とする．フーリエ変換を，

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

と定義する．ここで i は虚数単位，e は自然対数の底である．
以下，必要があればデルタ関数 $\delta(\omega)$ は下記を満たすとしてよい．

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

(問 1) $g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ を求めよ．

(問 2) 積 $f(t)g(t)$ のフーリエ変換を $G(\omega)$ を用いて表せ．

(問 3) 関数 $\alpha(t), \beta(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $A(\omega), B(\omega)$ とするとき，以下の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)\beta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

のフーリエ変換が，$A(\omega), B(\omega)$ の積となることを示せ．

(問 4) 関数 $h(t)$ を以下のように定義する．

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$\omega_2 = 2\omega_1$，$h(t) = \cos(\omega_1 t)$ という関係があるとき，これを満たす a の最小値と，そのときの b を，それぞれ ω_1 を用いて表せ．

(問 5) c を正の実数として，関数 $g(t-c)$ を考える．$\omega_2 = \frac{3}{2}\omega_1$ かつ，

$$h(t-c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g((t-c)-\tau)\mathrm{d}\tau = \sin(\omega_2 t)$$

という関係があるとき，これを満たす a の最小値と，そのときの b, c を，それぞれ ω_1 を用いて表せ．

第４問（数学）

非負整数を値にとる確率変数 X が，任意の非負整数 n と $0 < p < 1$ に対して，次式を満たすものとする．

$$\Pr\{X \geq n+1\} = \Pr\{X \geq n\} \times \Pr\{X \geq 1\}$$
$$\Pr\{X \geq 1\} = p$$

$P_p(n)$ と $Q_p(n)$ をそれぞれ $P_p(n) = \Pr\{X \geq n\}$, $Q_p(n) = \Pr\{X = n\}$ と定義する．このとき，非負整数 n に対して以下の問に答えよ．

(問 1) $P_p(n)$ と $Q_p(n)$ を求めよ．

(問 2) 毎回独立に 0.1 の確率で生起する事象が初めて生起するまでの試行回数を S とする．$\Pr\{S = n\}$ を $Q_p(n)$ を用いて表せ．

(問 3) X_1, X_2 が X と同じ確率分布をもち，互いに独立であるとする． また，Y を $Y = X_1 + X_2$ と定義する．このとき，$0 \leq m \leq n$ を満たす整数 m と n に対して，$\Pr\{X_1 = m\} \times \Pr\{X_2 = n - m\}$ を求めよ．さらに，$\Pr\{Y = n\}$ を求めよ．

(問 4) $X_1, X_2, \cdots, X_r$ が X と同じ確率分布をもち，互いに独立であるとする．また，Z を $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ と定義する．このとき，$\Pr\{Z = n\}$ を求めよ．

(問 5) 毎回独立に 0.1 の確率で生起する事象が r 回生起するまでに必要な試行回数を U とする．このとき，$\Pr\{U = n\}$ を求めよ．

第５問（物理学）

質点とみなすことのできる質量 m の球 A の運動について考える．重力加速度は g とする．

（問１）図 1 のように 45 度に傾斜した斜面 B が水平な地面に接している．地面から高さ h_0 の位置から球 A を初速 0 で落下させたところ，高さ h_1 の位置で斜面 B に衝突した．以下の問に答えよ．衝突は鏡面反射で，その際の反発係数は 1 とする．

(1) 斜面 B に衝突した直後の球 A の速さを求めよ．

(2) 斜面 B に一度衝突した後，球 A が再び斜面 B に衝突しない条件を求めよ．

(3) 球 A が斜面 B に一度衝突した後に地面に着地した．ある h_0 に対して，着地点が初期位置から水平方向に最も離れる h_1 の条件 と，この条件で着地した時の球 A の速度が地面となす角を求めよ．

（問２）図 2 に示すような $h = \dfrac{1}{a}r^2$ （a は正の定数）という回転放物面で表される壁面の内面に沿って球 A が運動している．以下の問に答えよ．摩擦は無視する．

(1) 球 A が高さ h_2 を保って周回しているとき，球 A の速さを求めよ．

(2) (1)の運動をしている球 A を，その速度方向に背後から叩いて瞬間的に 2 倍の速さまで加速したところ，球 A は壁面の内面を周回しながら上下に振動を始めた．球 A の最高到達点の高さを求めよ．

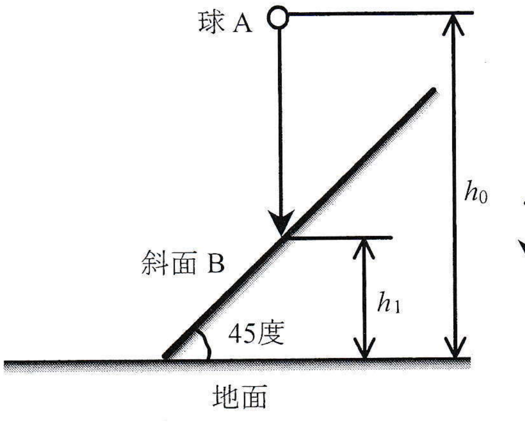


図 1

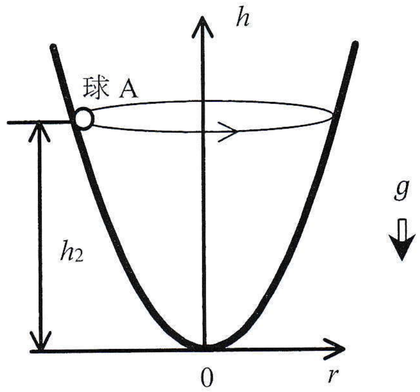


図 2

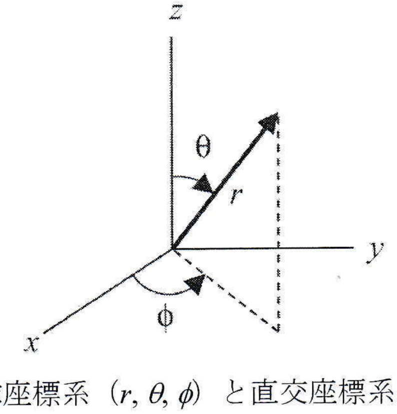
第６問（物理学）

ガウスの法則は，電気変位（電束密度とも呼ばれる）を $\boldsymbol{D}$，真電荷（自由電荷とも呼ばれる）による体積電荷密度を ρ_{f} として，$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}}$ と表される．電気変位は電場（電界とも呼ばれる）$\boldsymbol{E}$ を用いて $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ と書ける．ただし ε は物質の誘電率であり，ここでは物質中で定数としてよい．ε_0 は真空の誘電率である．$\boldsymbol{P}$ は分極と呼ばれ，物質中で分子に束縛されている電荷（束縛電荷と呼ばれる）が正負に分極する効果を表す．真空中では分子が存在しないので，$\boldsymbol{P} = 0$ である．以下の導体球または誘電体球に関する問に答えよ．座標系は図の球座標系を用いること．ただし原点は導体球または誘電体球の中心とする．

（問１）　真電荷 q をもつ半径 R の導体球が無限に広い真空中にある系を考える．このとき導体球内外の静電ポテンシャル Φ および電場 $\boldsymbol{E}$ の空間分布を求めよ．ただし静電ポテンシャルは無限遠でゼロとする．またこの系のもつ静電エネルギー $W_{\mathrm{e}} = \int (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} / 2)\, \mathrm{d}V$ を求めよ．ただし $\mathrm{d}V$ は微分体積要素であり，積分は系の全領域にわたるものである．

（問２）　半径 R で誘電率 ε $(> \varepsilon_0)$ の誘電体球内に，真電荷 q を一様な密度で分布させたとき，誘電体球内 $(r < R)$ の電場 $\boldsymbol{E}$ および分極 $\boldsymbol{P}$ の空間分布を求めよ．

（問３）　（問２）の誘電体球（ただし真電荷はもたないとする）を，$+z$ 方向（球座標系では $\theta = 0$ の方向）の一様電場 $\boldsymbol{E}_0$ がある，無限に広い真空中に置いたとき，誘電体球内の電場は分子の分極により弱まり，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}} = [3\varepsilon_0 / (\varepsilon + 2\varepsilon_0)]\, \boldsymbol{E}_0$ の一様電場となる．この事実を用いて誘電体内の分極 $\boldsymbol{P}$ を $\boldsymbol{E}_0$，ε，ε_0 を使って表せ．さらに，求めた分極 $\boldsymbol{P}$ から，束縛電荷の分極により誘電体内部 $(r < R)$ に誘起される体積電荷密度 ρ_{b} および誘電体表面 $(r = R)$ に誘起される表面電荷密度 σ_{b} の空間分布を求めよ．



図：　球座標系 (r, θ, ϕ) と直交座標系 (x, y, z)

第７問（物理学）

標準圧力 P_o において，ある物質 A の比熱を様々な温度 T に対して測定したところ，固体状態および気体状態の定圧モル比熱はそれぞれ一定であった．この物質Aに関する以下の設問に答えよ．ただし，気体定数は R とし，標準温度を T_o とする．また，圧力，温度がそれぞれ P_o, T_o である状態を標準状態と呼ぶ．

（問１）気体状態にある物質 A の，標準圧力 P_o および温度 T における１モルあたりのエントロピー $S_g(P_o, T)$を，以下の設問にしたがって求めよ．

(1) 標準圧力 P_o，温度 T において，気体状態にある１モルの物質 A に熱平衡を保ちつつ微少量の熱 δQ を与えたとき，1 モルあたりのエントロピーの増加量 δS_g を求めよ．

(2) このとき生じる温度上昇が δT であるとき，δQ を定圧モル比熱 C_{pg} と δT を用いて表せ．

(3) (1)と(2)の結果を用いて δS_g と δT の関係を求めよ．

(4) (3)で求めた関係を T について積分して，$S_g(P_o, T)$を T，T_o, S_{go}，C_{pg} を用いて表せ．ただし S_{go} は，気体状態にある物質 A の，標準状態 (P_o, T_o) における１モルあたりのエントロピーである．

（問２）気体状態にある物質 A の，標準圧力 P_o および温度 T における１モルあたりのギブズ自由エネルギー $G_g(P_o, T)$を，以下の設問にしたがって求めよ．

(1) 一般に，ある熱力学ポテンシャルは，他の熱力学ポテンシャルと熱力学状態量の組み合わせで表現できる．ギブズ自由エネルギー G をエンタルピー H と熱力学状態量を用いて表せ．ただし，熱力学状態量として，温度 T, 圧力 P, 体積 V，エントロピー S の中から必要なものを選んで用いてよい．

(2) 気体状態にある物質 A の，標準圧力 P_o および温度 T における１モルあたりのエンタルピー $H_g(P_o, T)$ を H_{go} および C_{pg}, T, T_o を用いて表せ．ただし H_{go} は，物質 A の標準状態 (P_o, T_o) における１モルあたりのエンタルピーである．

(3) (1)，(2)と（問１）の結果を利用して，$G_g(P_o, T)$ を $T, T_o, S_{go}, C_{pg}, H_{go}$ を用いて表せ．

（問３）気体状態にある物質 A の，圧力 P および温度 T における１モルあたりのギブズ自由エネルギー $G_g(P, T)$ を，以下の設問にしたがって求めよ．ただし，以下では物質 A の気体状態は理想気体として扱ってよい．

(1) $G_g(P,T)$の等温圧力微分 $\left.\dfrac{\partial G_g(P,T)}{\partial P}\right|_T$ を T, P, R を用いて表せ.

(2) (1)と（問２）の結果を利用して，$G_g(P,T)$を $T, T_o, S_{go}, C_{pg}, H_{go}, R, P, P_o$ を用いて表せ.

（問４）標準状態 (P_o, T_o) における物質Ａの昇華に伴う１モルあたりのエンタルピー増加は１モルあたりの昇華の潜熱 L に等しく，１モルあたりのエントロピー増加は L/T_o で与えられる．このとき，温度 T における物質Ａの蒸気圧 P_{vap} を $T, T_o, R, L, P_o, \Delta C_p$ で表せ．ただし，$\Delta C_p = C_{pg} - C_{ps}$ であり，C_{ps} は固体状態での定圧モル比熱である．また，物質Ａの固体状態のモル体積は，無視できるほど小さいとしてよい．

（問５）ΔC_p が無視できるほど小さい場合について，（問４）の結果を利用して以下の設問に答えよ．

(1) 温度 T における物質Ａの蒸気圧 P_{vap} を P_o, T_o, T, R, L で表わせ。また，物質Ａの蒸気圧曲線（蒸気圧 P_{vap} を温度 T の関数として表した曲線）の概略図を描け。

(2) 蒸気圧曲線の計測データから L を求める方法を簡潔に述べよ．

第８問（物理学）

一次元のポテンシャル井戸$V(x)$に束縛された粒子の波動関数$\psi(x)$について，以下の問に答えよ．ただし，粒子の質量をm，エネルギーを$E<0$とし，プランク定数hを2πで割ったものを$\hbar$とする．

（問１）　領域 I $(-L \le x \le L)$では$V(x)=-V_0$，領域 II $(x<-L)$および領域 III $(x>L)$では$V(x)=0$と表される場合について，$x \to \pm\infty$での挙動を考慮した上で各領域の波動関数$\psi(x)$の一般解を$\alpha=\sqrt{2m(V_0+E)}/\hbar$，$\beta=\sqrt{-2mE}/\hbar$を用いて表せ．ただし$-V_0<E<0$であり，解答には任意定数を含んでもよい．

（問２）　（問１）の波動関数$\psi(x)$が偶関数である場合についてα，β，Lが満たすべき条件を求めよ．

（問３）　次に，ディラックのデルタ関数$\delta(x)$を用いて$V(x)=-V_1\delta(x)$と表される場合について，シュレディンガー方程式を記述し，$x<0$および$x>0$のそれぞれの領域での波動関数$\psi(x)$の一般解を$\beta=\sqrt{-2mE}/\hbar$を用いて表せ．ただし$-V_1<0$であり，解答には任意定数を含んでもよい．

（問４）　（問３）のシュレディンガー方程式を$-\varepsilon<x<\varepsilon$の区間で積分し，$\varepsilon \to 0$の極限を考えることで，$x=0$において$d\psi/dx$が満たすべき接続条件を求めよ．得られた条件に基づき，エネルギー固有値Eと波動関数$\psi(x)$をm，V_1および$\hbar$を用いて表せ．

（問５）　（問２）で得られた条件について，$2V_0L=V_1$を満たしながら$L \to 0$の極限をとることによって（問４）のエネルギー固有値Eが得られることを示せ．必要であれば，$|x| \ll 1$において$\tan x \sim x$を用いてもよい．

（問６）　（問４）で得られた波動関数$\psi(x)$によって表される粒子について，その運動量pの不確かさ$\Delta p \equiv \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$を$m$，$V_1$および$\hbar$を用いて表せ．なお，運動量の演算子は$-i\hbar\dfrac{d}{dx}$であり，$\langle a \rangle$は物理量$a$の期待値を表す．

(草稿用紙)

(草稿用紙)

(草稿用紙)

（草稿用紙）