平 成 １８年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　門

平成１７年８月９日（火）
１２：３０～１５：３０

注 意 事 項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、日本語から母国語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

４．問題冊子、解答用紙４枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

５．問題は，問題１から問題１１まで１１問ある。このうち４問を選択して解答せよ。１問につき１枚の解答用紙を使用し、選択した問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。
問題３と問題４は Ｉ と II のいずれかを選んで解答せよ。

６．解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙は試験終了後に４枚とも提出せよ。

８．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題１.（微分積分）

以下の各問に答えよ.

（１）条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ の最大値と最小値を求めよ．ただし，a,b,c は定数とする.

（２）$\int\sqrt{e^x-1}dx$ を求めよ.

問題２.（線形代数）

E_n を n 次単位行列，$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$, $A=E_n+\mathbf{a}\,{}^t\mathbf{a}$ とする．ただし，${}^t\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ の転置である．このとき，以下の各問に答えよ.

（１）A の行列式を求めよ.

（２）定数 c,d に対して，$A(E_n-c\mathbf{a}\,{}^t\mathbf{a})=E_n-d\mathbf{a}\,{}^t\mathbf{a}$ が成り立つように d を c で表せ.

（３）A の逆行列を求めよ.

問題３.（離散数学）

次のⅠ，Ⅱのいずれか一つを選択して答えよ.

Ⅰ．$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=\{a+b\sqrt{-5}|a,b\in\mathbb{Z}\}$ において，素元分解が可能であるか否かを答えよ．可能である場合は証明し，可能でない場合は反例を挙げよ．ただし，反例を挙げる場合は，その例が反例になっていることを証明せよ.

Ⅱ．$n,\,m\ (n>m)$ を正整数とする．$a_0=n,\,a_1=m$ とおき，非負整数列 $\{a_k\},\{q_k\}$ を

$$a_k=q_{k+1}a_{k+1}+a_{k+2},\quad 0\leqq a_{k+2}<a_{k+1},\quad k=0,1,\ldots$$

により定める．ただし，$a_k=0$ のとき，便宜上 $i>k$ に対して $a_i=q_i=0$ とする．このとき以下の各問に答えよ.

（１）$a_N>0,\,a_{N+1}=0$ となる正整数 N が存在することを示し，$a_N=\gcd(n,m)$ であることを示せ．ただし，$\gcd(n,m)$ は n と m の最大公約数である.

（２）$x_0=0,\,x_1=1$ とし，

$$x_{k+2}=x_k-q_{k+1}x_{k+1},\quad k=0,1,\ldots$$

とおくと，$k=1,\ldots,N$ に対して，

$$x_km\equiv a_k\pmod{n}$$

となることを示せ．ただし，$s\equiv t\ (\mathrm{mod}\ n)$ は $s-t$ が n で割り切れることを意味する.

（３）$k=0,1,\ldots,N$ に対して，$\bar{a}_k=a_{N-k}$ とすると，$\bar{a}_k\geqq 2^{\frac{k}{2}}$ となることを示し，さらに $N\leqq 2\log_2 n$ となることを示せ.

（４）$\gcd(n,m)=1$ のとき,（２）は何を求めるアルゴリズムか．また,（３）の結果から何がわかるか述べよ.

問題４.（数理論理学）
次のⅠ，Ⅱの いずれか一つを選択して 答えよ.

Ⅰ. 集合の列 $X_0, X_1, X_2, ..., X_n, ..$ が次の条件を満たしているとする.

(*) 任意の n に対し，$|X_n| < |X_{n+1}|$ （ここで $|X_n|$ は X_n の濃度を表している.）

$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$，$Z$ を自然数全体から Y への写像全体の集合とすると，$|Y| < |Z|$ が成立することを示せ.

さらに上の条件 (*) を仮定しないときには，$|Y| < |Z|$ という結論を得られないことを示せ.

Ⅱ. $\mathbf{B}$をブール代数，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を命題論理の恒真(トートロジー)論理式とする．この時，すべての $b_1, \cdots, b_n \in \mathbf{B}$ に対して，$\varphi(b_1, \cdots, b_n) = 1$ となることを証明せよ．ただし，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が恒真(トートロジー) であるとは，すべての $b_1, \cdots, b_n \in \{0, 1\}$ に対して $\varphi(b_1, \cdots, b_n) = 1$ であることをいう.

問題５.（確率論）
以下の各問に答えよ.

（１）$0 < \alpha < \beta < \infty$ とし，ε を $\alpha < \alpha+\varepsilon < \beta$ をみたす任意の正の実数とする．各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ：

$$\varepsilon e^{-\frac{n(\alpha+\varepsilon)^2}{2}} \leqq \int_\alpha^\beta e^{-\frac{n}{2}x^2} dx \leqq (\beta - \alpha) e^{-\frac{n\alpha^2}{2}}.$$

（２）Z_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を平均 0，分散 $1/n$ の 1 次元正規分布に従う確率変数とする．$0 < \alpha < \beta < \infty$ に対して，$\frac{1}{n} \log P(\alpha \leqq Z_n \leqq \beta)$ の $n \to \infty$ としたときの極限を求めよ.

問題６.（数値解析）
x 軸上の相異なる離散点 $\{x_i\}(i = 0, 1, 2, ..., n)$ と，その点での未知関数 f の値の組 $\{(x_i, f_i)\}$ ($f(x_i)$ を f_i と記す) が与えられたとき，関数 f を近似する多項式 $P(x)$ を

$$P(x_i) = f_i \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

となるよう構成することを，多項式補間という．このとき，以下の各問に答えよ.

（１）$n = 2$ で，$\{(x_i, f_i)\} = \{(1, 3), (2, 5), (4, -1)\}$ であるとき，2 次補間多項式を求めよ.

（２）一般の n の場合，$\ell_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ を

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

と定めると，

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x)$$

は n 次補間多項式であることを示せ.

（３）n 次補間多項式は一意であることを示せ.

問題７.（微分方程式）

$x(t)$ は実数全体で定義された正値関数であって，定数 $a > 0$ について，

$$\frac{dx}{dt} = x \log \frac{a}{x}$$

の微分方程式をみたすものとする．このとき，以下の問に答えよ．

（１）$y(t) = \log x(t)$ のみたす微分方程式を求めよ．

（２）$x(t)$ を $x(0)$ と t を使って表せ．

（３）$\lim_{t \to \infty} x(t)$ を求めよ．

問題８.（情報システム）

以下の各問に答えよ．

（１）Business Intelligence の目的，特徴，用途を説明せよ．

（２）Data Warehouse とは何か．それ以前の基幹系業務データベースとの違いがわかるように説明せよ．

（３）Data Warehouse に格納されたデータの分析手段として Online Analytical Processing（通称 OLAP）がある．これを，“Slice”，“Dice”，“Drill down” という言葉を用いて説明せよ．また，それ以前の Decision Support System との違いを示せ．

問題９.（アルゴリズム）

以下の各問に答えよ．

（１）S を n 個の相異なる整数の集合とする．S の要素 x で，x^2 も S の要素であるものをすべて見つける $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを与えよ．

（２）行列の積 $M_1M_2M_3$ の計算では，$(M_1M_2)M_3$ と $M_1(M_2M_3)$ では演算コストが変わりうる．n 個の行列の積 $M_1M_2 \cdots M_n$ の最小の演算コストを求める，時間計算量が $O(n^3)$ のアルゴリズムを与えよ．ただし，各 M_i のサイズは $p_i \times q_i$ (p_i 行 q_i 列) で，$q_i = p_{i+1}$ $(1 \leqq i < n)$ である．また，$p \times q$ 行列と $q \times r$ 行列の積を計算するときの演算コストは pqr とする．

問題１０．（オートマトン理論）

以下の各問に答えよ．

（１）アルファベット $\{0,1\}$ 上の言語 L を，1 で始まりかつ 2 進数として見たときの値が 3 の倍数となる全ての文字列からなる集合とする．このとき，L を受理する有限オートマトンを図示せよ．

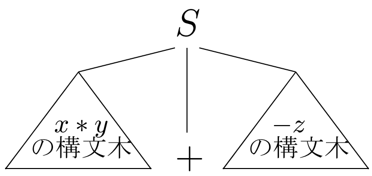
（２）以下の生成規則によって与えられる文脈自由文法 G を考える．

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & A \mid S+S \mid S*S \mid -S \mid (S) \\
A & \to & 0 \mid 1 \mid x \mid y \mid z
\end{array}
$$

ただし，S を開始記号とする．

(i) $x*y+-z$ の全ての構文木を示せ．

(ii) 生成する言語が G と一致する文脈自由文法で，曖昧でないものを一つ与えよ．ただし，$x*y+-z$ の構文木は下図の構造を持つようにせよ．



問題１１.（プログラミング）
最後にある図のように定められるプログラミング言語 subsetC でのプログラミングに関する以下の問に答えよ.

［１］次の関数定義に関する問 1), 2) に答えよ.

```
int f(int a){ a := a + 1;
              { int b; b := 2;
                { int a; a := 3; b := a + b + 4; }
                return a + b;
              }
            }
```

1) 式　`f(5)`　を評価したときの値を答えよ.
2) 変数の名前替えだけが許されるという条件の下で，関数 `f` の働き（すなわち，引数 (argument) と戻り値 (return value) の関係）を変えずに，上記の関数定義の３行目

   { <u>`int a;`</u> `a := 3; b := a + b + 4;` }

   の下線部分を `int b;` に変更したい．必要最小限の変数の名前替えを施した関数定義を書け.

［２］subsetC には含まれない構文として，次のような repeat 文を考える.

`repeat` ⟨ブロック文⟩ `until` (⟨論理式⟩)

repeat 文の実行を次のように定める.

まず⟨ブロック文⟩を１回実行し，その後，⟨論理式⟩が成り立たない間は⟨ブロック文⟩を繰り返し実行し，成り立ったらこの文の実行を終る.

次のブロック文を subsetC の範囲で書き直せ.

```
{int i; i := 0;
 repeat {i := g(i,y); x := h(x);} until (x <= 0)
 z := i; }
```

ただし，変数 `x`，`y`，`z` はこのブロックを通用範囲に含む位置で宣言されており，また，関数 `g`，`h` の定義は，subsetC の関数定義として別途与えられているとする.

［3］次の関数定義を考える．

```
int f(int x)
 {if (x > 0) {return x * f(x-1);} else {return 1;} }
```

この関数 f と働き（すなわち，引数と戻り値の関係）が同じで再帰呼出 (recursive call) を使わない関数 g を subsetC で定義せよ．ただし，オーバーフロー (overflow) については考慮しなくてよい．

［4］次の if 文を実行すると，それぞれ，どのような状況になるかを述べよ．

1) `if (0 == 0) { y := 1; } else { y := loop(0); }`

2) `if (1 == 0) { y := 1; } else { y := loop(0); }`

3) `if (loop(0) == 0) { y := 1; } else { y := 0; }`

ただし，関数 loop の定義は次の通りとする．

```
int loop(int x) { while (x == x) { x := -x; }  return 0; }
```

subsetC のプログラムは，以下の変数宣言 (variable declaration) および関数定義 (function definition) を並べたものである．subsetC で使えるデータ型 (data type) は整数型（`int` 型）だけとする．subsetC は，代入文 (assignment) で`=` の代わりに`:=`を使っていることを除いて C 言語のサブセットであり，各構文の意味は C 言語のそれと同じとする．変数宣言の通用範囲（scope）も C 言語のそれと同じで，ブロック文 (block statement) の先頭にある変数宣言の通用範囲はそのブロック文とする．

- ⟨ 変数宣言 ⟩ の構文は次の通りである．

  構文　`int` ⟨ 変数 ⟩ `;`

  例　`int x;`

- ⟨ 関数定義 ⟩ の構文は次の通りである．

  構文　`int` ⟨ 関数名 ⟩ `(` `int` ⟨ 変数 ⟩ `, ... , int` ⟨ 変数 ⟩ `)` ⟨ ブロック文 ⟩

  例
  ```
  int max(int x,int y)
   {int z; if (x > y){z := x;} else {z := y;} return z;}
  ```

- ⟨ 文 ⟩ は次の 5 つからなる．

  – ⟨ ブロック文 ⟩

    構文　`{`⟨ 変数宣言 ⟩ $\cdots$ ⟨ 変数宣言 ⟩⟨ 文 ⟩ $\cdots$ ⟨ 文 ⟩`}`

    例　`{int i; x := x + i; y := y - i;}`

    例　`{x := x + i;}`

  – ⟨ 代入文 ⟩

    構文　⟨ 変数 ⟩ `:=` ⟨ 式 ⟩ `;`

    例　`x := y + z;`

  – ⟨ if 文 ⟩

    構文　`if (` ⟨ 論理式 ⟩ `)`⟨ ブロック文 ⟩ `else` ⟨ ブロック文 ⟩

    例　`if (x > y) {z := x - y;} else {z := y - x;}`

  – ⟨ while 文 ⟩

    構文　`while (`⟨ 論理式 ⟩`)`⟨ ブロック文 ⟩

    例　`while (x > 0){ z := z + y; x := x - 1;}`

  – ⟨ return 文 ⟩

    構文　`return` ⟨ 式 ⟩`;`

    例　`return x * y;`

- ⟨ 式 ⟩ の構文は次の通りである．

  構文　⟨ 変数 ⟩ または ⟨ 定数 ⟩ または ⟨ 関数名 ⟩`(`⟨ 式 ⟩`, ... ,`⟨ 式 ⟩`)` または
  ⟨ 式 ⟩⟨ 算術演算子 ⟩⟨ 式 ⟩ または `(`⟨ 式 ⟩`)`
  ただし，⟨ 算術演算子 ⟩ は `+, -, *, /` である．

  例　`3*x + y - max(x,y)`

- ⟨ 論理式 ⟩ の構文は次の通りである．

  構文　⟨ 式 ⟩⟨ 関係演算子 ⟩⟨ 式 ⟩ または ⟨ 論理式 ⟩`&&`⟨ 論理式 ⟩ または
  ⟨ 論理式 ⟩`||`⟨ 論理式 ⟩ または `!(`⟨ 論理式 ⟩`)` または `(`⟨ 論理式 ⟩`)`
  ただし，⟨ 関係演算子 ⟩ は `==, != ,>, <, >=, <=` である．

  例　`(x > y || x == y) && !(y*y < y)`

図：プログラミング言語 subsetC