平成２２年度大学院前期課程

電気電子情報工学専攻

システム・制御・電力工学
先進電磁エネルギー工学
情報通信工学
量子電子デバイス工学

電　磁　理　論 入　試　問　題

【注意】

○ 問題は４問ある。配点は各２５点で、合計１００点である。
○ 各問題用紙の第１志望コース欄に○印をつけ、受験番号を必ず記入すること。
○ 解答はすべて問題用紙の ☐ の中に書くこと。

平成２１年８月２５日（火）
１０：００～１２：００実施

1-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に、適切な数式または数値を入れ、文章を完成せよ。また、語句が複数記載されている欄では、適切なものを○で囲め。

[1] 誘電体中の電束密度 $\boldsymbol{D}$ は、誘電率 ε および電界 $\boldsymbol{E}$ を用いて

$$\boldsymbol{D} = \boxed{} \tag{1}$$

と表せる。また、真空の誘電率 ε_0、電界 $\boldsymbol{E}$ および分極 $\boldsymbol{P}$ を用いて

$$\boldsymbol{D} = \boxed{} \tag{2}$$

と表せる。

二つの異なる媒質（それぞれを領域１および領域２とする。領域１の誘電率および電界を ε_1、$\boldsymbol{E}_1$、領域２の誘電率および電界を ε_2、$\boldsymbol{E}_2$ とする）の境界面における電界の垂直成分および接線成分に対する境界条件は、境界面上の自由電荷の面密度 ξ、および境界面に垂直で領域２から領域１の方向を向く単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて

$$\boldsymbol{n} \bullet (\boxed{}) = \xi \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boxed{}) = 0 \tag{4}$$

と表せる。

[2] ２枚の導体平板が、間隔 d で互いに平行に置かれており、導体平板の間には誘電率 ε $(\varepsilon > \varepsilon_0)$ の媒質が満たされている（図１参照）。誘電体に接する導体面の面積を S とする。導体平板は十分に大きく、導体端部における電界の乱れは無視できるものとする。上下の導体平板に、それぞれ $+Q$ $(Q > 0)$ および $-Q$ の電荷が与えられている。直角座標系を用いて、図のように x 軸をとると、系の対称性より電界および分極は x 方向成分のみとなる。x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_x$ とする。$x = d$ における導体平板と誘電体の境界面に式(3)を適用する。領域１を誘電体、領域２を導体平板とすると、$\boldsymbol{n} = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x$、$\boldsymbol{E}_2 = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x$、$\xi = \boxed{}$ となるので

$$\boldsymbol{E}_1 = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x \tag{5}$$

と表せる。これを用いて、分極 $\boldsymbol{P}$ および導体平板間の電圧 V は、$\boldsymbol{P} = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x$、および $V = \boxed{}$ とそれぞれ求まる。導体平板間の静電容量 C は、d、ε、S を用いて

$$C = \boxed{} \tag{6}$$

1-2	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

となり、導体平板間に蓄えられた電気的エネルギーW_eは、d、Q、ε、Sを用いて

$$W_e = \boxed{} \qquad (7)$$

と求まる。

[3] 図2に示すように、誘電体をy方向に半分引き抜く。$x=d$において、導体平板と真空の境界面上の自由電荷の面密度をξ'、導体平板と誘電体の境界面上の自由電荷の面密度をξ''とする。電荷Qは、S、ξ'、ξ''を用いて

$$Q = \boxed{} \qquad (8)$$

となる。また、式(3)を適用して、導体平板と真空との境界面における真空側の電界$\boldsymbol{E}'$は

$$\boldsymbol{E}' = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x \qquad (9)$$

となり、導体平板と誘電体との境界面における誘電体側の電界$\boldsymbol{E}''$は

$$\boldsymbol{E}'' = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x \qquad (10)$$

となる。ここで、$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}''$であることに注意し、式(8)、(9)、(10)より$\boldsymbol{E}''$、ξ'、ξ''を消去すると

$$\boldsymbol{E}' = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_x \qquad (11)$$

となる。導体平板間の電圧Vおよび静電容量Cは、$V = \boxed{}$、および$C = \boxed{}$とそれぞれ求まる。また、導体平板間に蓄えられた電気的エネルギーW_eは、d、Q、ε_0、ε、Sを用いて

$$W_e = \boxed{} \qquad (12)$$

と求まる。式(7)と比較すると、式(12)では電気的エネルギーW_eは 増えて・減って いる。

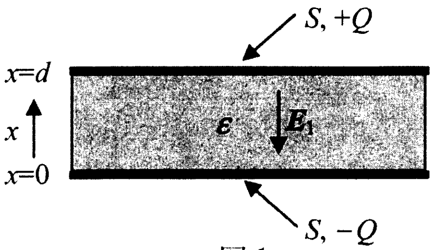


図1

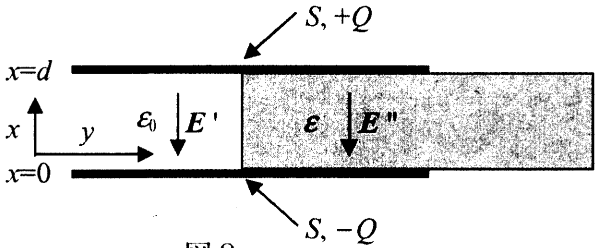


図2

２５点

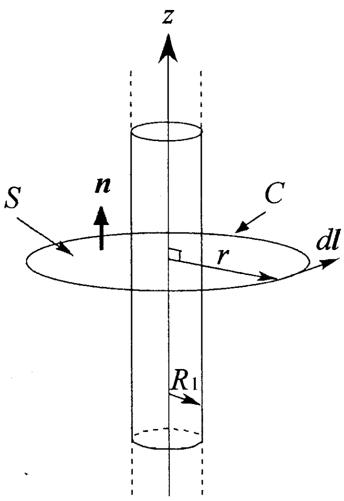
2-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に適切な語句または数式を記入せよ。

右図に示すように、円柱座標系(r,φ,z)において中心軸をz軸とする半径R_1の無限に長い円柱領域を、軸対称な分布を持つ定常電流が流れている。この定常電流の密度$\boldsymbol{J}$が

$$\boldsymbol{J}=\begin{cases}\boldsymbol{i}_z J_0\exp[\rho(r-R_1)] & (0\le r\le R_1)\\ 0 & (r>R_1)\end{cases} \qquad (1)$$

で与えられるとして、この電流によって生じる磁界を求めよう。ここで、$\boldsymbol{i}_z$はz方向の単位ベクトルであり、J_0およびρは正の定数とする。



まず、z軸からの半径がrの円周Cと、Cによって囲まれる平面Sを考える。時間的に変化しない電流密度$\boldsymbol{J}$とその周囲に生じる磁界$\boldsymbol{H}$とは、マクスウェルの方程式より

$$\boxed{\qquad\qquad}=\boldsymbol{J} \qquad (2)$$

と関係づけられている。面Sはz軸と垂直に交わるとし、この方程式の両辺にSに垂直な単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$を乗じて、S上で面積分する。ここでは、$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_z$に選ぶ。右辺は面$S$を貫く電流に等しく、

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\begin{cases}\boxed{\qquad\qquad} & (0\le r\le R_1)\\ \boxed{\qquad\qquad} & (r>R_1)\end{cases} \qquad (3)$$

となる。一方、左辺は$\boxed{\qquad\qquad}$の定理とz軸のまわりの対称性により

$$\int_S(\boxed{\qquad})\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_C\boxed{\qquad}\cdot d\boldsymbol{l}=\boxed{\qquad}H_\varphi \qquad (4)$$

と書ける。ここで、$d\boldsymbol{l}$は円周Cに接し、Cに沿う線積分の方向を向くベクトル微分線素であり、この場合、$\boldsymbol{i}_\varphi$をφ方向の単位ベクトルとして、$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}_\varphi r\,d\varphi$である。また、$H_\varphi$は磁界$\boldsymbol{H}$の$\varphi$方向成分である。

したがって、z軸からrだけ離れた点での磁界$\boldsymbol{H}$は、

$$\boldsymbol{H}=\begin{cases}\boldsymbol{i}_\varphi\boxed{\qquad\qquad\qquad} & (0\le r\le R_1)\\ \boldsymbol{i}_\varphi\boxed{\qquad\qquad\qquad} & (r>R_1)\end{cases} \qquad (5)$$

となる。

次に、$\rho R_1 << 1$の場合について考えてみよう。一般に、$|x| << 1$のとき、xについての関数$e^{\pm x}$を$x=0$のまわりでテイラー展開し、近似式

$$e^{\pm x} = 1 \pm \boxed{}\, x + \boxed{}\, x^2 \tag{6}$$

を得る。$r > R_1$の場合について、式（6）を式（5）に適用し、$\rho R_1 << 1$であることを用いると、

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}_\varphi \boxed{} \quad (r > R_1) \tag{7}$$

となる。

ところで、$\rho R_1 << 1$のとき、$r \le R_1$の円柱領域を流れる全電流Iの大きさは式（3）より、

$$I = \boxed{} \tag{8}$$

と表される。式（8）より、電流Iを用いて式（7）を書き直すと、

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}_\varphi \boxed{} \quad (r > R_1) \tag{9}$$

となり、この結果は、z軸に沿って線電流Iが流れているときに生じる磁界に一致する。

最後に、定常電流が流れる円柱領域を囲むように、内側半径が$R_2 (> R_1)$の完全導体中空円筒を、その中心軸がz軸と一致するように置き、その内側表面$r = R_2$に式（8）で表される電流Iとは等量、逆符号の電流を一様に流すと、この完全導体中での磁界は0となる。このとき、内側表面$r = R_2$に流れる電流の面電流密度$\boldsymbol{K}$を求めよう。完全導体表面での磁界を$\boldsymbol{H}_s$とし、完全導体表面に垂直で、完全導体表面からz軸に向かう方向の単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}_s$とすると、$\boldsymbol{K}$は$\boldsymbol{n}_s$と$\boldsymbol{H}_s$を用いて

$$\boldsymbol{K} = \boxed{} \tag{10}$$

と表される。式（9）、式（10）から、

$$\boldsymbol{K} = \boxed{}\ \boldsymbol{i}_z \tag{11}$$

を得る。

25点

3－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の文章の空欄に適当な数式、語句または数値を入れよ。

真空中に電流が存在するとき、その周囲の空間には磁界が生じる。電流密度や電磁界が時間的に変化しない場合には、電流密度 $\boldsymbol{J}$ と磁界の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ との関係は微分表示のアンペアの法則

$$\frac{1}{\mu_0}\boxed{} = \boldsymbol{J}$$

で与えられる。ここで μ_0は真空の透磁率である。

しかし、この式は時間的な変化がある場合には使えない。そのことは、両辺の発散をとると$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = \boxed{}$ となり、電荷の保存を表わす連続の式が成り立たないことからも分かる。この点は、アンペアの法則を

$$\frac{1}{\mu_0}\boxed{} = \boldsymbol{J} + \boxed{}$$

と拡張することにより連続の式が満たされるように修正できる。これをアンペア・マクスウェルの法則といい、この式に付け加えられた項は $\boxed{}$ を表わす。実際、上のアンペア・マクスウェルの法則を表わす式で両辺の発散をとり、マクスウェルの方程式のひとつである $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \boxed{}$ を用いると、連続の式が$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = \boxed{}$ と正しく導かれることがわかる。ただし、電荷密度をρ、真空の誘電率をε_0とする。

3－2	第１志望コース	システム制御	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下では、$|J| = \rho = 0$ すなわち電流も電荷も存在しない領域を考える。このときアンペア・マクスウェルの法則を表わす式の両辺の回転をとり、ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ を用いると、$-\nabla^2 \boldsymbol{B} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\boxed{}\right)$ となる。ここにファラデー・マクスウェルの法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}$ を用いて、真空中での電磁波の伝搬速度をvと書くと、磁束密度についての波動方程式

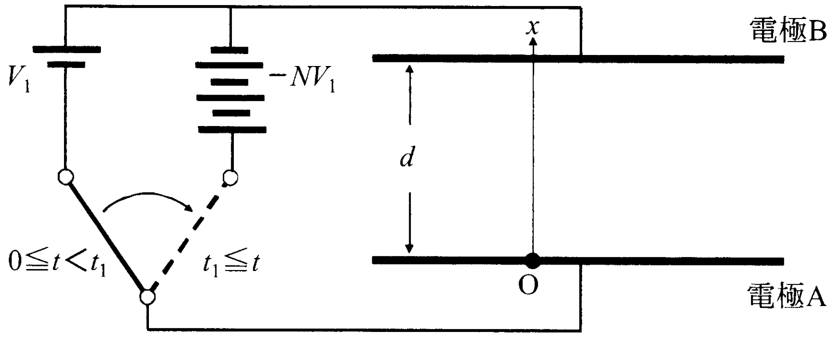
$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{v^2}\boxed{} = 0$$

が得られる。vは、真空の誘電率と透磁率を使って $v = \boxed{}$ と表わされ、MKSA(SI)単位系ではその値は $\boxed{}$ である。また、vの値と $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m から、ε_0 は $\varepsilon_0 = \boxed{}$ と求められる。vとε_0の数値は有効数字二桁で良い。単位を付けること。

25点

4－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

真空中の電界中を運動する電子に関する以下の記述の空欄に適当な数式を記入せよ。



図に示すような距離dを保った平行平面の電極 A と電極 B の間に、電圧が印加されている状況を考える。電子が電極 A 上の原点 O から電極 B に向かって、時刻$t=0$において初速度ゼロで出発する。電圧は、電子が電極 B に到達する前のある時刻をt_1として、$0 \leqq t < t_1$ではV_1（$V_1>0$）、$t_1 \leqq t$では$-NV_1$（$N>0$）と変化する。図のように電極 A から電極 B の方向にx軸をとると、電子はx軸に沿った一次元運動をすることになる。なお、電子の質量はm、電荷は$-e$（$e>0$）とする。

$0 \leqq t < t_1$において、電極 B に向かって加速される電子の運動方程式は、x方向の速度をv_xとすると

$$m\frac{dv_x}{dt} = \boxed{} \qquad (1)$$

となる。また、$0 \leqq t < t_1$における電子の速度v_xは、e、m、V_1、d、tを用いて表すと

$$v_x = \boxed{} \qquad (2)$$

となる。時刻$t=t_1$に電圧が$-NV_1$に変化した後、両電極へ到達する以前における電子の速度v_xは、e、m、V_1、N、d、t_1、tを用いて表すと

$$v_x = \boxed{} \qquad (3)$$

となる。

次に、電子が電極 B に到達する場合を考える。時刻$t=t_1$における電子の位置をx_1とすると、電子が位置x_1に到達するまでに電界により加速されることで得た運動エネルギーE_1と、x_1から電極 B に到達するまでに電界により減速されることで失った運動エネルギーE_2を、エネルギー保存則を考慮して電界中の位置エネルギーから計算すると、e、V_1、N、d、x_1の中から必要なものを用いて、

$$E_1 = \boxed{} \qquad (4)$$

$$E_2 = \boxed{} \qquad (5)$$

となる。

4－2		第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス		受験番号	

式(4)、(5)から、電子が電極 B に速度ゼロで到達する条件を x_1、N、及び d の関係式で表すと、

$$x_1 = \boxed{} \qquad (6)$$

となる。この条件を満たす時の t_1 は、e、m、V_1、N、d を用いて、式(7)のように表せる。

$$t_1 = \boxed{} \qquad (7)$$

また、この電子が電極 B に速度ゼロで到達する時刻を $t = t_2$ とすると、式(3)から

$$t_2 = \boxed{}\, t_1 \qquad (8)$$

となる。

その後、電子が電極 B から電極 A に向かって引き返す運動を考える。
この電子が x_1 を再び通過する時刻を $t = t_3$ とすると、

$$t_3 = \boxed{}\, t_1 \qquad (9)$$

となる。その時の電子の速度 v_{x3} は、e、m、V_1、N、d、t_1 の中から必要なものを用いて表すと、

$$v_{x3} = \boxed{} \qquad (10)$$

となる。

さらに、電子が電極 A に到着するが、その時の電子の速度 v_{x4}、及び到達時刻 t_4 は、それぞれ、e、m、V_1、N、d、t_1 の中から必要なものを用いて表すと、

$$v_{x4} = \boxed{} \qquad (11)$$

$$t_4 = \boxed{} \qquad (12)$$

となる。

２５点