

東京大学大学院  
新領域創成科学研究科  
複雑理工学専攻

受 験 番 号					

問題冊子にも受験番号を書きなさい。

## 平成 23 年度大学院入学試験問題

修士課程

### 専門基礎科目

平成 22 年 8 月 24 日 (火)

13:30～15:30 (120 分)

#### 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 本冊子の総ページ数は 17 ページです。落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. 問題は、数学 4 問、物理学 4 問、化学 3 問、合計 11 問出題されます。そのうち 3 問を選択して解答しなさい。解答する 3 問は、1 科目の中からでもよいし、複数科目から選択して解答してもよい。
5. 解答用紙は計 3 枚配られます。各問題ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用しなさい。解答用紙に書ききれない場合は、裏面にわたってもよい。
6. 解答は日本語または英語で記入しなさい。
7. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入しなさい。問題冊子にも受験番号を記入しなさい。
8. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
9. 解答に関係ない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
10. 解答用紙・問題冊子は持ち帰ってはいけません。

(草稿用紙)

(草稿用紙)

(草稿用紙)

第1問 (数学)

関数  $f(x, y)$  を

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 - 2Rxy}{2(1 - R^2)}\right),$$

で定義する. ここで  $\exp(t) = e^t$  であり,  $e$  は自然対数の底である. 以下の問に答えよ.

(問1)  $R = 0$  とする.

(1)  $x = r \cos \theta$  および  $y = r \sin \theta$ , ( $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) と変数変換する. その際のヤコビアンを求めよ.

(2) (1) の変数変換を用いて, 定積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$  を求めよ.

(3) (2) で求めた定積分を用いて, 以下の式を示せ. ただし  $a > 0$  とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(問2)  $-1 < R < 1$  とし,  $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$  とする.

(1)  $g(x)$  を求めよ. また任意に与えられた  $x_0$  に対して  $\int_{-\infty}^{\infty} xg(x - x_0) dx$  を求めよ.

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx$  および  $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 g(x) dx$  を求めよ.

【注意】 必要であれば(問1)の(3)の結果を用いて良い.

(問3)  $-1 < R < 1$  とする.  $f(x, y)$  に関する以下の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} yf(x, y) dx dy$$

【注意】 必要であれば(問1)の(3)の結果を用いて良い.

第2問(数学)

次のように各要素が実数値である行列  $A$  を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 1-a & a & a-1 \\ 0 & b & b+1 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(問1) ある正則行列  $P$  に対し,  $P^{-1}AP$  が対角行列となるとき,  $A$  は対角化可能という.

(1) 行列  $A$  の固有値を求めよ.

(2)  $a=4, b=2$  のとき, 行列  $A$  が対角化可能かどうかを判定せよ.

(3)  $a=3, b=2$  のとき, 行列  $A$  が対角化可能かどうかを判定せよ.

(問2)  $A$  が対角化できないとき,  $a, b$  の存在範囲を  $(a, b)$  座標系に図示せよ.

(問3)  $A$  が対角化できないとき, ある正則行列  $Q$  を用いて

$$Q^{-1}AQ = D + U$$

と変換することができる. ただし,  $D$  は対角行列であり, また,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする.

(1)  $Q$  と  $D$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ.

(2)  $(D+U)^n$  を求めよ. ただし,  $n$  は正の整数であるとする.

(問4)  $A$  が対角化できないとき,  $A^n$  が収束するための  $a$  に関する条件を求めよ.

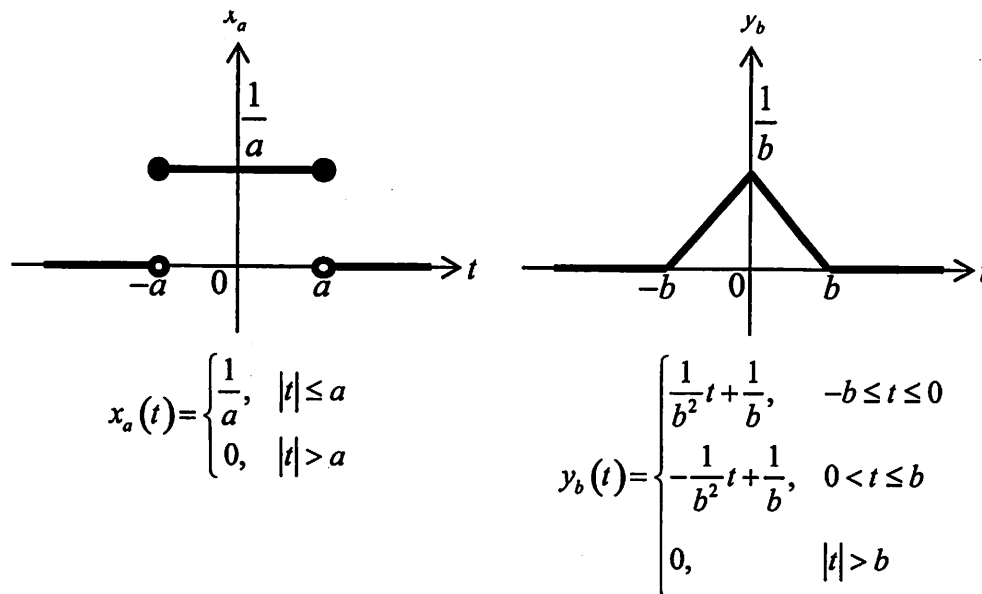
ただし,  $A^n$  が収束するとは, 行列  $A^n$  の  $(i, j)$  成分を  $(A^n)_{ij}$  としたとき, すべての  $i, j$  に対して  $n$  に関する数列  $(A^n)_{ij}$  が収束する, つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^n)_{ij}$  が有限の値となることをさす.

### 第3問 (数学)

$x(t)$  のフーリエ変換  $X(\omega)$  は以下のように定義される.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

ここで,  $e$  は自然対数の底,  $i$  は虚数単位である. 下図に示すように  $x_a(t)$  と  $y_b(t)$  を定義し,  $z_{ab}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) y_b(t-\tau) d\tau$  と定める.



このとき, 以下の問に答えよ.

(問1)  $x_a(t)$ ,  $y_b(t)$  それぞれのフーリエ変換  $X_a(\omega)$ ,  $Y_b(\omega)$  を求め, それらの極限  $X_0(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} X_a(\omega)$  と  $Y_0(\omega) = \lim_{b \rightarrow 0} Y_b(\omega)$  を求めよ.

(問2)  $y_b(t-\tau)$  のフーリエ変換  $Y_{b\tau}(\omega)$  を求めよ.

(問3)  $z_{ab}(t)$  が偶関数となることを示し,  $a=b=1$  のとき  $z_{11}(t)$  の概形を図示せよ.

(問4)  $z_{ab}(t)$  のフーリエ変換  $Z_{ab}(\omega)$  を求めよ.

#### 第4問 (数学)

ある道路における自動車の交通において、測定を開始してから最初に自動車が通過するまでの経過時間を  $u$ (秒) とする。その  $u$  の確率密度関数  $p(u)$  は、測定開始時刻やそれ以前の自動車の通過状況に依存せず、 $e^{-\lambda u}$  に比例しているものとする。ただし、 $e$  は自然対数の底であり、 $\lambda > 0$  は実定数である。このとき、以下の問に答えよ。

(問1)  $u$  の確率密度関数  $p(u)$  および  $u$  の期待値  $\bar{u}$  を求めよ。

(問2) 測定を開始してから  $t$  秒間に通過した自動車の台数を  $A(t)$  で表す。このとき、任意の  $t > 0$  に対して、事象「 $A(t) = 0$ 」の生起確率  $\Pr\{A(t) = 0\}$  を求めよ。

(問3) 測定を開始してから  $n$  台目の自動車が通過するまでの経過時間を  $x$ (秒) とし、 $x$  の確率密度関数を  $p_n(x)$  とする。

(1) このとき、 $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  を求めよ。

(2) 任意の整数  $n \geq 1$  に対して、 $p_n(x)$  を求めよ。

(問4) 任意の  $t > 0$  に対して、事象「 $A(t) = n$ 」の生起確率  $\Pr\{A(t) = n\}$  を求めよ。



### 第5問 (物理学)

地面に固定された円弧状の断面を持つ台の上の中空円筒の振動運動を考える (図1). 点Oを中心とした円弧の半径は $a$ であり, 中空円筒の半径, 質量をそれぞれ $b, m$ とし, 重力加速度を $g$ とする. 中空円筒の中心軸Pを角度 $\theta_0$ の位置に静止させ, 静かに離れたところ, 中空円筒は台上を滑らずに運動し始めた. 以下の問いに答えよ.

(問1) 中空円筒の中心軸Pの周りの慣性モーメントを求めよ. ただし, 円筒の肉厚は十分薄く無視できるものとする.

(問2) 図2に示すように $\phi$ は中空円筒の中心軸Pの周りの回転角を表し時計回りを正とする.  $\theta$ は中空円筒の中心軸の位置を表す角度であり反時計回りを正とする.  $\phi$ と $\theta$ との関係式を求めよ. ただし, 中空円筒が円弧の最下点Aに接する時,  $\phi=0, \theta=0$ とする.

(問3) 中空円筒の重心の $\theta$ 方向の運動方程式と中空円筒の重心周りの回転を表す運動方程式を導け. ただし, 中空円筒が台から受ける摩擦力を $F$ とせよ.

(問4) 中空円筒が円弧の最下点Aにきた時の中空円筒の重心の運動エネルギーと重心周りの回転エネルギーを $m, g, \theta_0, a, b$ を用いて表せ.

(問5) 中空円筒の中心軸が位置 $\theta$ に達した時, 台が中空円筒から受ける力の水平成分の大きさを $m, g, \theta, \theta_0$ を用いて表せ.

(問6)  $\theta_0 \ll 1$ で,  $\sin\theta$ を $\theta$ と近似できるとき, 中空円筒の台上の運動は単振動とみなすことができる. この時の単振動の角周波数を $g, a, b$ を用いて表せ.

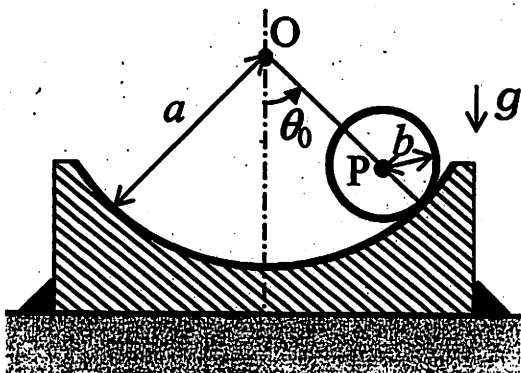


図1

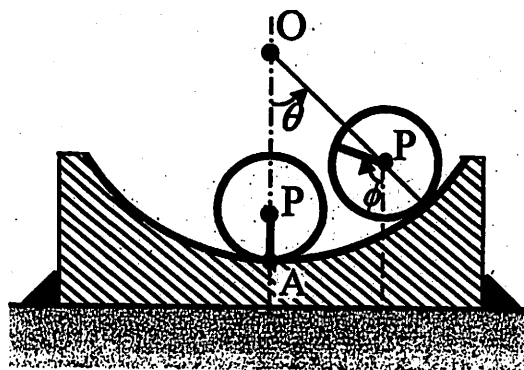


図2

## 第6問 (物理学)

図のような断面積  $S[\text{m}^2]$  で比透磁率  $\mu$  の磁性体にコイルが  $n$  回巻かれたソレノイドがある。エアギャップの長さは  $x[\text{m}]$ 、磁性体の部分の長さは図のように  $l-x[\text{m}]$  とする。また真空の透磁率を  $\mu_0[\text{H/m}]$  とし、磁性体およびエアギャップ以外に磁束は漏れ出ないものとする。以下の問いに単位をつけて答えよ。ただし、磁性体は磁気飽和していないものとし、 $\mu$  は一定であるものとする。また、空気の比透磁率を1とする。

まずコイルを電源に接続し、流れる電流が一定値  $I[\text{A}]$  に保たれているものとする。

(問1) 磁性体内の磁束を求めよ。

(問2) コイルのインダクタンスを求めよ。

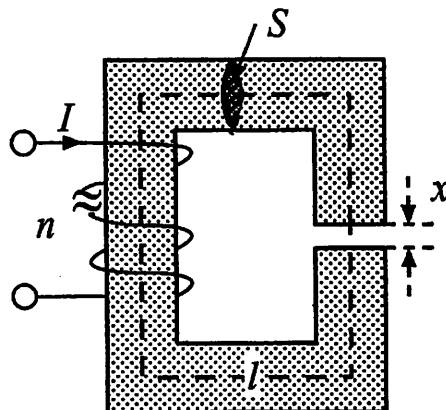
(問3) ソレノイドとエアギャップからなる系に蓄えられる磁気的エネルギーを求めよ。

(問4) エアギャップの長さが  $\Delta x[\text{m}]$  仮想的に増加したとき、電源から供給されるエネルギーを求めよ。ただし、 $\Delta x$  は  $x$  に対して十分に小さいものとする。

(問5) エアギャップの両端の磁性体間に働く力を求めよ。ただし、その符号は吸引方向を負にとる。

次に、電流  $I[\text{A}]$  が流れた状態でコイルを短絡する。コイルの抵抗が無視できるものとする。エアギャップの長さが  $\Delta x[\text{m}]$  仮想的に増加したとき、磁性体内の磁束は一定値に保たれる。

(問6) エアギャップの両端の磁性体間に働く力を求めよ。ただし、その符号は吸引方向を負にとる。



## 第7問 (物理学)

気体のジュール・トムソン効果について、以下の問いに答えよ。なお、 $P$ 、 $V$ 、 $T$ 、 $H$ 、 $S$ の記号はそれぞれ気体の圧力、体積、温度、エンタルピー、エントロピーを表す。

- (問1) ジュール・トムソン効果について説明した次の文章の ( A )、( B )、( C )、( D ) に当てはまる適切な語句を語群より選べ。

「多孔質性の膜を通して高圧部から低圧部に断熱的に気体を押し出して膨張させる際に、気体が受け取る ( A ) はゼロであるから、気体の ( B ) の変化量は気体が受け取る ( C ) に等しくなる。すなわち、この過程においては気体の ( D ) が保存され、温度が変化する。」

(語群) 内部エネルギー、エンタルピー、エントロピー、仕事、熱量

- (問2) この過程は不可逆であることを示せ。
- (問3) 気体の圧力変化に対する温度変化の割合をジュール・トムソン係数  $\mu$  と呼ぶ。 $\mu$  は、定圧比熱  $C_p$  を用いて

$$\mu = -\frac{1}{C_p} \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$$

と表せることを示せ。

- (問4) エントロピー  $S$ 、エンタルピー  $H$  が完全微分であることを用いて、

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

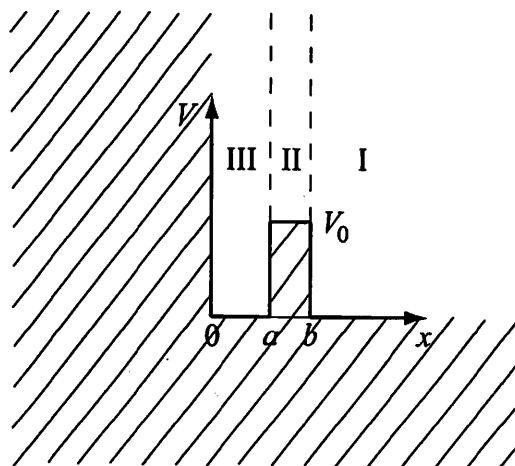
が成立することを示せ。

- (問5) 理想気体のジュール・トムソン係数  $\mu$  の値を求めよ。
- (問6) ファン・デル・ワールスの状態方程式  $(P + a/V^2)(V - b) = RT$  に従う1モルの気体について、ジュール・トムソン係数  $\mu$  を温度  $T$ 、体積  $V$  および定圧比熱  $C_p$  の関数として表せ。ただし、 $a$ 、 $b$ 、 $R$  は正の定数である。
- (問7) 問6における定数  $a$ 、 $b$  が十分小さいと仮定してジュール・トムソン係数  $\mu$  を温度  $T$  の関数として表し、ジュール・トムソン効果を用いて効率的に気体の冷却を行うための条件を述べよ。ただし、定圧比熱  $C_p$  は定数とする。

第8問 (物理)

図に示すポテンシャル障壁の右方無限遠から粒子ビームが入射してくる. ポテンシャル  $V(x)$  は  $x \leq 0$  では  $+\infty$ ,  $a \leq x \leq b$  では  $V_0$ , その他では  $0$  であるとする. 粒子の質量を  $m$ , 運動エネルギーを  $E$  (但し  $E < V_0$ ), プランク定数を  $h = 2\pi\hbar$  として以下の設問に答えよ.

- (問1) 粒子の波動関数を  $u(x)$  とすると, ポテンシャル  $V(x)$  のもとでの定常シュレディンガー方程式は, 一般にどう表されるか.
- (問2) 図に示す領域 I ( $x \geq b$ ), II ( $a \leq x \leq b$ ), III ( $0 \leq x \leq a$ ) それぞれにおける波動関数の一般解を  $\beta = \sqrt{2mE}/\hbar$  および  $\gamma = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$  を使って表せ.
- (問3) 波動関数は  $x = 0$  ではどのような境界条件を満たされなければならないか. また  $x = a$  および  $x = b$  での波動関数の接続条件はどう表されるか. これらを用いて入射してきた粒子が反射される確率を求めよ.
- (問4)  $E = V_0/2$  であり, 領域 II における波動関数が  $x$  と共に減少する指数関数のみで表せる場合を考える. このとき  $a$  はどのような条件を満たさなければならないか.
- (問5) 問4の場合, 領域 III における波動関数の振幅の, 領域 I における振幅に対する比  $R$  を求め, 障壁幅  $b - a$  を増やしていったとき, この振幅比  $R$  がどう変化するか説明せよ.



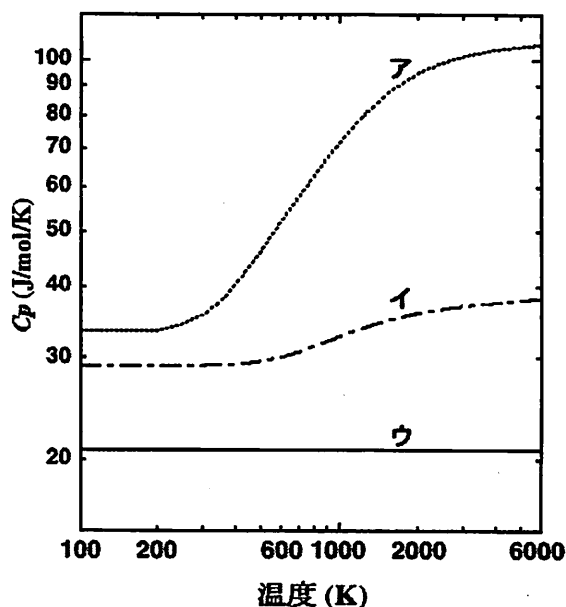
図

# 第9問 (化学)

気体の比熱、膨張圧縮および相変化に関する以下の問に答えよ。ただし、気体定数は  $R$  であるとする。

(問1) 1気圧における3種類の気体(アルゴン、メタン、窒素)の定圧モル比熱  $C_p$  の温度変化を右図に示す。

- (1) 図中の曲線ア、イ、ウは、それぞれの気体に対応するか、理由とともに答えよ。
- (2) 曲線アとイは、温度が上昇すると共に定圧モル比熱が上昇している。この上昇の理由を説明せよ。



(問2) 定積モル比熱  $C_v$  と定圧モル比熱  $C_p$  を持つ1モルの理想気体Aを考える。ここで、 $C_v$ 、 $C_p$  のいずれも温度によらず一定であるとする。

- (1) 理想気体について成り立つ  $C_v$  と  $C_p$  との間の関係を記せ。
- (2) 圧力  $p$  でピストンに封入した気体Aの体積を微少量  $\delta V$  だけ準静的かつ断熱的に増加させたとき生じる内部エネルギーの変化量  $\delta U$  を求めよ。
- (3) この気体Aの内部エネルギー変化  $\delta U$  は、温度変化  $\delta T$  とどのような関係式で結ばれるか。
- (4) 上の(2)(3)の結果を用いて、断熱膨張過程における圧力  $p$  と温度  $T$  の間の関係式を求めよ。ただし、断熱膨張を始める前の初期温度と圧力をそれぞれ  $T_0$  と  $p_0$  とする。解答に際しては、導出の手順も示すこと。

(問3) 蒸発のモル気化熱  $\Delta H$  が温度によらず一定であるような純物質Bの蒸気圧曲線について考える。

- (1) 一般に、熱平衡状態にある気相と液相が共存する温度圧力条件  $(T, p)$  では、ギブスの自由エネルギーが気相と液相で同一である。このことを用いて、純物質の気相液相境界線の傾きが以下の式で与えられることを示せ。

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

ただし、 $\Delta S$ と $\Delta V$ は、それぞれ蒸発のモルエントロピー変化と蒸発のモル体積変化である。

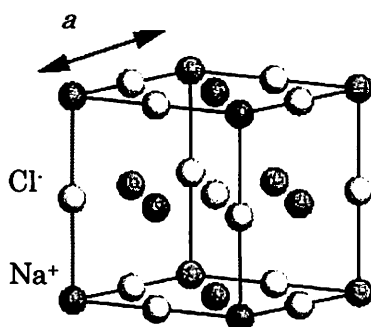
- (2) 純物質 B の温度  $T$  における蒸発のモルエントロピー変化  $\Delta S$  を求めよ。
- (3) 純物質 B の液相のモル体積が気体のモル体積に比べて無視できるほど小さく、かつ気相が理想気体と見なせるとき、 $\Delta V$  を  $p$  と  $T$  の関数として表せ。
- (4) 上の (2) と (3) の結果を用いて、気相液相境界線の傾き  $dp/dT$  を  $p$  と  $T$  の関数として表せ。
- (5) (4) を  $T$  について積分して、純物質 B の蒸気圧曲線を与える式を求めよ。  
ただし、基準となる温度  $T_0$  における蒸気圧は  $p_0$  であるとする。

第10問 (化学)

(問1) 次の問に答えよ.

- (a) コバルト錯体  $[\text{CoCl}_2(\text{NH}_3)_4]^+$  と  $[\text{CoCl}_3(\text{NH}_3)(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2)]$  についての異性体をすべて図示せよ. 光学異性体が含まれる場合には, それも説明せよ.
- (b) 中心金属の d 軌道の電子数が  $d^4$  から  $d^7$  の遷移金属錯体に関して, スピンクロスオーバー錯体が報告されている. 八面体配位子場の場合の  $d^6$  錯体を例にとり, d 軌道の電子配置に関する模式図も含めて, スピンクロスオーバー錯体について簡単に説明せよ.

(問2) 塩化ナトリウムの結晶構造を図1に示す. また, 格子定数を  $a$  と表すことにする. なお, 以下では, 緩和や表面再構成は起こらないとし, 表面構造は, 第1層を考えればよいものとする. また, ナトリウムイオン ( $\text{Na}^+$ ), 塩化物イオン ( $\text{Cl}^-$ ) を区別して扱うこと.



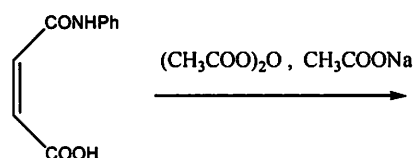
(a) (110)表面の略図を描け. また, この表面のイオン面密度 (単位面積あたりのイオンの個数) を求めよ.

(b) (111)表面は2種類存在する. それぞれの略図を描き, イオン面密度を求めよ. また, この2種類の面の最小面間隔を求めよ.

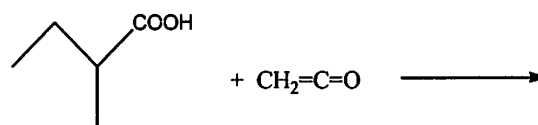
図1 塩化ナトリウムの結晶構造 (格子定数  $a$ ).

(問3) 次の反応の主生成物の構造式を示せ.

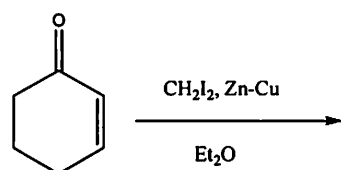
(a)



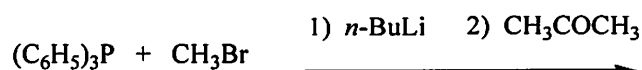
(b)



(c)



(d)



## 第 11 問 (化学)

直鎖共役ポリエンに関する以下の設問に答えよ。計算には末尾にある数値を利用してよい。

(問 1) 炭素数  $n$  の共役ポリエンの  $\pi$  軌道のエネルギーを、ヒュッケル法を用いて求めると式①のようになる。ここで  $\alpha$  はクーロン積分、 $\beta$  は共鳴積分、 $k$  は分子軌道の番号である。

$$E_k = \alpha + 2\beta \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{①}$$

(1)  $n = 2m$  ( $m$  は整数) の分子の最高被占軌道 (HOMO) と最低空軌道 (LUMO) のエネルギーを求めよ。

(2)  $n = 2m$  ( $m$  は整数) の分子の HOMO-LUMO 間のエネルギー差を求め、 $n$  が十分大きい場合の漸近形を  $\kappa n^\gamma$  ( $\kappa$  は定数) とした時の  $\gamma$  を求めよ。

(3) HOMO-LUMO 間のエネルギー差に対応する光の吸収波長は  $n = 4$  のブタジエンでは 217 nm であった。この値を用いて共鳴積分の値を求めよ。答えは kJ/mol で表すこと。

(問 2) 次に炭素数  $n$  の共役ポリエンの  $\pi$  電子を 1 次元の井戸型ポテンシャル(幅  $L$ , 障壁の高さ無限大)中の自由電子で近似する。 $k$  番目の電子軌道のエネルギーは電子質量を  $m_e$  とし式②のように与えられる。

$$E_k = \frac{h^2 k^2}{8m_e L^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{②}$$

(4) 式②を導出せよ。

(5)  $n = 2m$  ( $m$  は整数) の分子の最高被占軌道 (HOMO) と最低空軌道 (LUMO) のエネルギーを求めよ。

(6)  $n = 4$  であるブタジエンの HOMO-LUMO 間のエネルギー差を求めよ。

(7) (6) の結果に基づいて、ブタジエン分子の HOMO-LUMO 間のエネルギー差に対応する光の吸収波長を nm 単位で求めよ。ただし、ポテンシャル幅は  $L = 0.5 \text{ nm}$  とし計算せよ。

(参考数値)

プランク定数  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ , 光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 電子質量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , アボガドロ数  $N_A = 6.0 \times 10^{23}$

$\sin(\pi/5)=0.59$ ,  $\sin(\pi/8)=0.38$ ,  $\sin(\pi/9)=0.34$ ,  $\sin(\pi/10)=0.31$ ,  $\sin(\pi/18)=0.17$



(草稿用紙)