平成 27 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

基礎科目試験問題

（実施時間　９：３０ ～ １２：３０）

【注　意　事　項】

１．問題用紙は，この表紙や白紙を除いて１２頁ある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，及び，「電気電子回路２」の９題*あり，この順番に綴じられている．このうち，５題を選択し解答すること．但し，選択すべき試験問題は，受験コース毎に下表のように規定されている．

受験コース名	選択すべき試験問題
システム・制御・電力工学コース	「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」の５題から３題，及び，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，「電気電子回路２」の４題から２題，合計５題を選択すること
先進電磁エネルギー工学コース	
量子電子デバイス工学コース	
情報通信工学コース	９題（上記*印）から５題選択すること

３．解答開始前に，別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

４．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【数学1】解答は，白色（1番）の解答用紙に記入すること.

以下の(a)～(c)の設問に答えよ.

(a) 実数 (real number) x，y，z が $x^2+y^2+z^2=1$ を満たすとき，関数 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ の極値 (extremum) を求めよ.

(b) xyz 直交座標系 (rectangular coordinate system) における曲面 (curved surface) $z=xy$ を考える. この曲面のうち，円柱 (cylinder) $x^2+y^2 \leqq a^2\ (a>0)$ の内部にある部分の曲面積 (curved surface area) を求めよ.

(c) 領域 D (region D) が $x^2+y^2 \leqq a^2\ (x \geqq 0, y \geqq 0, a>0)$のとき，二重積分 (double integral)

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ. また，この結果を利用して，

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

を求めよ.

【数学2】　解答は，赤色（2番）の解答用紙に記入すること.

複素平面（complex plane）上の任意の点 $z = x + i\,y$ で定義された解析関数（analytic function）

$$F = \phi(x, y) + i\,\varphi(x, y)$$

について，以下の(a)~(d)の設問に答えよ．ただし，$\phi(x, y)$，$\varphi(x, y)$ は実関数（real functions）とする．

(a)　x，y 両軸に沿った F の微分 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z$ の値が等しいことを使い，$\phi(x, y)$と$\varphi(x, y)$の間に成立すべき条件を求めよ．

(b)　$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 1$（$A, B, C$ は実定数）とするとき，$\Delta\varphi(x, y) = 0$ となるための条件を求めよ．
ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ はラプラシアン（Laplacian）を表す．

(c)　$\varphi(x, y)$ が (b) で与えられるとき，$\phi(x, y)$を決定せよ．

(d)　(b) において $A = 1$，$y = 0$ とするとき，x 軸に沿った$\varphi(x, y)^{-3}$ の実積分

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$$

の値を求めよ．

【数学３】 解答は，青色 (３番) の解答用紙に記入すること．

以下の (a)~(e) の設問に答えよ.

(a) 次の複素関数 (function of a complex variable) $f(z)$ において，$z = a\,\mathrm{e}^{i\theta}$ とした $f(a\,\mathrm{e}^{i\theta})$ の虚部 (imaginary part) を求めよ．ただし，a と θ は実数 (real number) とする.

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

(b) (a) で定義した関数 $f(z)$ の $z = 0$ を中心とするテイラー展開 (Taylor expansion) を求めよ.

(c) (a), (b) の結果を利用することにより，次の関数 $g(\theta)$ の区間 $[0, 2\pi]$ におけるフーリエ級数 (Fourier series) を求めよ.

$$g(\theta) = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \qquad (0 < a < 1)$$

(d) m, n を自然数 (natural number) として，次の積分 $I_{m,n}$ を求めよ.

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

(e) m を自然数として，(c) で定義した関数 $g(\theta)$ に関する次の積分 J_m を求めよ.

$$J_m = \int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a\ \sin\theta\ \sin(m\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta$$

【数学４】 解答は，黄色 (４番) の解答用紙に記入すること．

以下の (a)~(c) の設問に答えよ．ただし，$y'(t) = \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$， $y''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}$ である．

(a) 次式のラプラス変換 (Laplace transform) を求めよ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-n)^n}{n!} H(t-n) \qquad \text{ただし，} H(t) = \begin{cases} 0: & t < 0 \\ 1: & 0 \le t \end{cases} \text{ とする．}$$

(b) (a) の結果を参考にして， 次の方程式の解 $y(t)$ を求めよ． ただし，$t \le 0$ のとき $y(t) = 0$ とする．

$$y'(t) + y(t-1) = t^3, \qquad t > 0$$

(c) 次の方程式の解 $y(t)$ を求めよ．ただし，$y(0) = 1$，$y'(0) = 1$ とする．

$$y''(t) - ty'(t) + 2y(t) = t - 1$$

【数学５】解答は，水色（５番）の解答用紙に記入すること．

箱の中に赤色と黒色の玉がそれぞれ r 個，b 個，合計 $r+b$ 個の玉が入っている．このとき，箱の中からでたらめに玉を１個取り出し，取り出した玉にそれと同じ色の玉を c 個加えて再び箱の中に戻す，という試行を繰り返す．したがって，この試行を n 回 $(n=1,2,\ldots)$ 完了した後には，箱の中に $(r+b+nc)$ 個の玉がある．ただし，r，b，c は全て自然数（natural number）である．X_n $(n=1,2,\ldots)$ を n 回目の試行において取り出された玉が赤色なら 1，黒色なら 0 の値を取る確率変数（random variable）とする．さらに Y_n $(n=1,2,\ldots)$ を次式で定義する．

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Y_n は最初の n 回の試行において赤色の玉が取り出された回数を表す確率変数である．以下の (a)〜(d) の設問に答えよ．

(a) 確率（probability）$\Pr(Y_k = k, Y_n = k)$ $(n=2,3,\ldots,\ \ k=1,2,\ldots,n-1)$ を求めよ．

なお,「$Y_k = k, Y_n = k$」は、最初の n 回 $(n=1,2,\ldots)$ の試行において，k 回目までの試行で取り出される玉が全て赤色であり，かつ，その後の $n-k$ 回の試行で取り出される玉が全て黒色である事象を表している．

(b) 確率 $\Pr(Y_n = k)$ $(n=2,3,\ldots,\ \ k=1,2,\ldots,n-1)$ を求めよ．

(c) 確率 $\Pr(X_n = 1)$ $(n=2,3,\ldots)$ を求めよ．なお，任意の n $(n=2,3,\ldots)$ に対して

$$\Pr(X_n = 1) = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{1}\Pr(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 1)$$

が成立することを用いて良い．

(d) $m < n$ なる任意の自然数 m，n に対して確率 $\Pr(X_m = 1, X_n = 0)$ を求めよ．

【電磁理論 1】　解答は，桃色（6番）の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～㉓の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる語句または数式を解答用紙に記入せよ．ただし，⑫に関しては語句を選び，その記号を記し，⑰と㉒はグラフを描け．

真空中の電界 $\boldsymbol{E}$，磁界 $\boldsymbol{H}$ に対するマクスウェルの方程式は，電流密度を $\boldsymbol{J}$，電荷密度をρ，誘電率をε_0，透磁率をμ_0 とすると，次の４つのように記述される．

電束に関するガウスの法則：　$\boxed{\quad ① \quad}$　(1)

磁束に関するガウスの法則：　$\boxed{\quad ② \quad}$　(2)

ファラデー・マクスウェルの法則：　$\boxed{\quad ③ \quad}$　(3)

アンペア・マクスウェルの法則：　$\boxed{\quad ④ \quad}$　(4)

真空中の領域１と領域２を考え，その間の境界面を S とする．それぞれの領域における S 上での電界と磁界をそれぞれ $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ と表し，領域２から１へ向く S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，S 上の面電流密度と面電荷密度をそれぞれ $\boldsymbol{K}$, ξ と表すと，電束に関するガウスの法則とアンペア・マクスウェルの法則から導出される境界条件はそれぞれ，

$\boxed{\quad ⑤ \quad}$　(5)

$\boxed{\quad ⑥ \quad}$　(6)

となる．

以下では，直角座標系（ x，y，z ）において，基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$，$\boldsymbol{E}$ のそれぞれの成分を E_x，E_y，E_z とする．電束に関するガウスの法則を表す式(1)の直角座標系での成分を考えると，

式(1)の空間微分の項 ＝ $\boxed{\quad ⑦ \quad}$　(7)

となる．

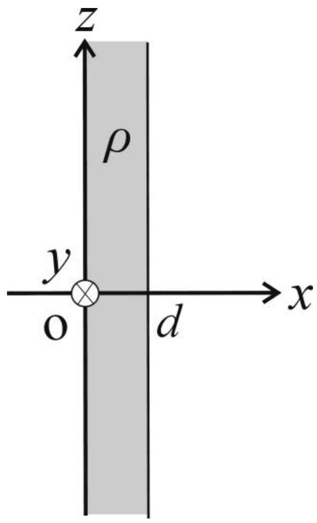


図１

図１のように，y-z 平面に平行な厚さ d の無限平板状領域において，一様な電荷密度$\rho\,(\rho > 0)$の静止正電荷が存在している．この場合，式(1)及び式(7)において，電界 $\boldsymbol{E}$ は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ 成分のみとなるから，電界を求めるために解くべき微分方程式は

$$\boxed{\quad ⑨ \quad} = \begin{cases} \boxed{\quad ⑩ \quad} & (x < 0) \\ \boxed{\quad ⑪ \quad} & (0 < x < d) \\ \boxed{\quad ⑩ \quad} & (x > d) \end{cases} \qquad (8)$$

となる．式(8)を積分して電界 $\boldsymbol{E}$ を求める場合，面電荷密度$\xi = 0$ として式(5)の境界条件を適用すると，電界 $\boldsymbol{E}$ の $\boxed{⑫\ (イ)法線,(ロ)接線}$ 成分，すなわち $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ 成分は連続となるから，これらを用いて

積分定数を求めて式(8)を解くと，

⑬ = { ⑭ $(x<0)$
⑮ $(0 \le x < d)$
⑯ $(x \ge d)$　　(9)

となる．この解から電界の分布を x 軸が横軸のグラフに図示すると ⑰ のようになる．

　更に，図２に示すように，図１の電荷に加えて同様な無限平板状領域に一様な電荷密度$-\rho$の静止負電荷が距離 d を隔てて，互いに平行に存在する場合，式(9)を利用して電界を求めると次のようになる．

⑬ = { ⑱ $(x<0,\quad x \ge 3d)$
⑲ $(0 \le x < d)$
⑳ $(d \le x < 2d)$
㉑ $(2d \le x < 3d)$　　(10)

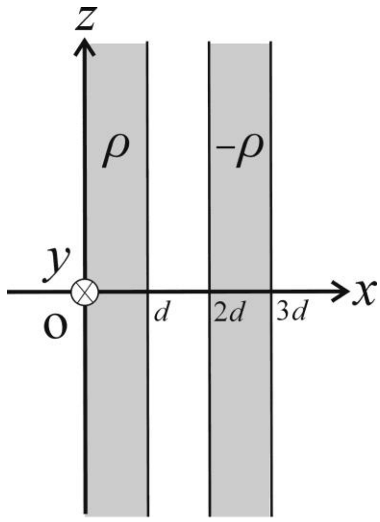


図２

したがって，電界の分布を x 軸が横軸のグラフに図示すると ㉒ のようになる．
この場合，$0 \le x \le 3d,\ 0 \le y \le d,\ 0 \le z \le d$ で表される空間に蓄えられる電界のエネルギーW_eを，ε_0, ρ, d で表すと

$W_e =$ ㉓　　(11)

となる．

【電磁理論2】 解答は，緑色（7番）の解答用紙に記入すること．

解答用紙に①～⑯の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式または語句を解答用紙に記入せよ．

図１に示す線Ｌ上を大きさが I なる線電流が流れている．このとき，線Ｌ上の点Ｑにおける微小ベクトル線素 $\boldsymbol{dl}=\boldsymbol{i}_l\,dl$ の部分を流れる微小電流要素によって点Ｐに生じる微小磁界の強さ

$$d\boldsymbol{H}=\frac{Idl}{4\pi R^2}\left(\boldsymbol{i}_l\times\boldsymbol{i}_R\right) \qquad (1)$$

を線Ｌに沿って積分することによって，点Ｐに生じる磁界の強さを求めることができる．ここで，$\boldsymbol{i}_l$ は点Ｑで線Ｌに接し，線電流の方向を向く単位ベクトル，$\boldsymbol{i}_R$ は点Ｑから点Ｐの方向を向く単位ベクトル，R は点Ｑから点Ｐまでの距離である．式(1)は［　①　］の法則とよばれている．

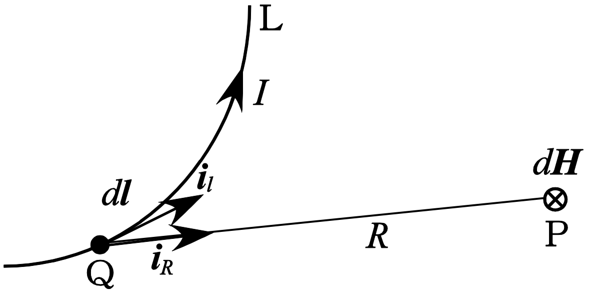


図１

次に，図２に示す長さ l の線分ＡＢ上を流れる大きさが I なる線電流によって，線分ＡＢの垂直二等分面上にあり，線分からの距離が r_0 の点Ｐに生じる磁界の強さを求めよう．系の対称性から，線分ＡＢを二等分する点を原点Ｏとする円柱座標系 (r, φ, z) を考え，線電流は z 軸上を z の正の方向に流れているものとする．z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_z$ とすると，線電流上の z 座標が z' の点Ｑにおける微小ベクトル線素 $\boldsymbol{i}_z\,dz'$ の部分を流れる微小電流要素によって点Ｐに生じる微小磁界の強さを，I，dz'，$\boldsymbol{i}_z$，$\boldsymbol{i}_R$，R を用いて表すと，式(1)より

$$d\boldsymbol{H}=\boxed{\quad ② \quad} \qquad (2)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{i}_R$ は点Ｑから点Ｐの方向を向く単位ベクトル，R は点Ｑから点Ｐまでの距離である．線分ＰＯと線分ＰＱのなす角を θ とし，φ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_\varphi$ として，式(1)を，$\boldsymbol{i}_\varphi$，I，dz'，R，θ を用いて表すと，

$$d\boldsymbol{H}=\boxed{\quad ③ \quad} \qquad (3)$$

となる．また，r_0 と，R，θ との関係は，

$$r_0=\boxed{\quad ④ \quad} \qquad (4)$$

となる．図２に示す点Ｑ’の z 座標を $z'+dz'$ とし，∠ＱＰＱ’を $d\theta$ とおく．このとき，$Rd\theta$ を，dz' と θ を用いて表すと，

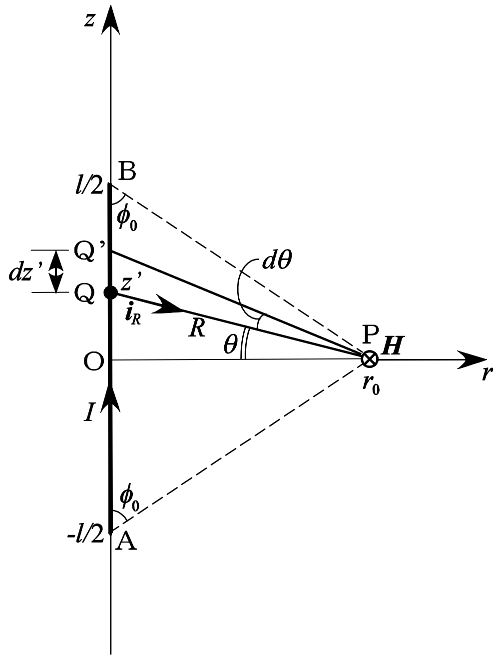


図２

$$Rd\theta=\boxed{\quad ⑤ \quad} \qquad (5)$$

となる．式(4)および(5)より，式(3)を，$\boldsymbol{i}_\varphi$，I，r_0，θ，$d\theta$ を用いて表すと，

$$d\boldsymbol{H}=\boxed{\quad ⑥ \quad} \qquad (6)$$

となる．

$\angle$ＯＡＰ=$\angle$ＯＢＰ=ϕ_0とすると，式(6)で表される$d\boldsymbol{H}$ を，θ について ⑦ から ⑧ まで積分することによって，長さlの線電流によって点Ｐに生じる磁界の強さ$\boldsymbol{H}$ を求めることができる．$\boldsymbol{H}$ を$\boldsymbol{i}_\varphi$，I，r_0，ϕ_0を用いて表すと，

$$\boldsymbol{H} = \boxed{⑨} \tag{7}$$

となる．ところで，$\cos\phi_0$を，r_0とlを用いて表すと，

$$\cos\phi_0 = \boxed{⑩} \tag{8}$$

となる．式(8)より，式(7)を，$\boldsymbol{i}_\varphi$，I，r_0，lを用いて表すと，

$$\boldsymbol{H} = \boxed{⑪} \tag{9}$$

となる．$l \to \infty$とすると，式(9)で表される$\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \boxed{⑫} \tag{10}$$

となる．

上記の結果を用いて，図３に示す点Ｃを中心とする半径aの円に内接する正N角形$(N \geq 3)$上を流れる線電流Iによって，点Ｃに生じる磁界の大きさ$\left|\boldsymbol{H}\right|$を求めよう．正$N$角形の一辺を線分ＡＢとし，線分ＡＢの長さ$l$および点Ｃと線分ＡＢとの距離$r_0$を，$a$と$N$を用いて表すと，

$$l = \boxed{⑬} \tag{11}$$

$$r_0 = \boxed{⑭} \tag{12}$$

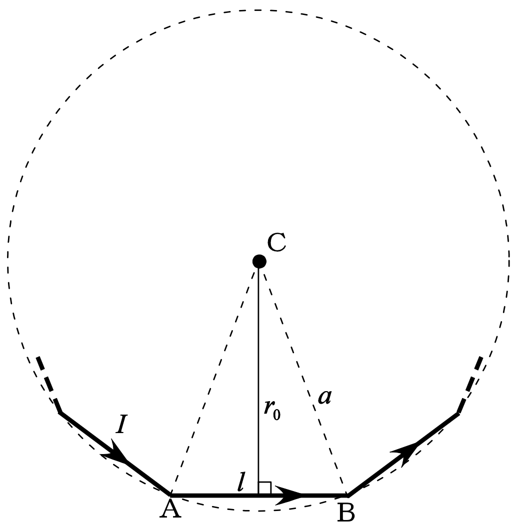


図３

となる．よって，式(9)，(11)，(12)より，点Ｃに生じる磁界の大きさ$\left|\boldsymbol{H}\right|$を，$I$，$a$，$N$を用いて表すと，

$$\left|\boldsymbol{H}\right| = \boxed{⑮} \tag{13}$$

となる．$N \to \infty$とすると，式(13)で表される$\left|\boldsymbol{H}\right|$は

$$\left|\boldsymbol{H}\right| = \boxed{⑯} \tag{14}$$

となり，半径aの円形ループ電流によって，その中心に生じる磁界の大きさに等しくなる．

専門用語の英訳

電磁理論１

電界	electric field
電束	electric flux
磁界	magnetic field
磁束	magnetic flux
電流密度	electric current density
電荷密度	charge density
誘電率	permittivity, dielectric constant
透磁率	magnetic permeability
法線ベクトル	normal vector
面電流密度	surface current density
面電荷密度	surface charge density
直角座標系	cartesian coordinates
境界条件	boundary condition

電磁理論２

微小ベクトル線素	differential vector element
電流要素	electric current element
線電流	line electric current
磁界	magnetic field
円柱座標系	circular－cylindrical coordinates
垂直二等分面	perpendicular bisector
円に内接する正 N 角形	regular N－sided polygon inscribed in circle
円形ループ電流	circular loop electric current

【電気電子回路1】解答は，灰色（8 番）の解答用紙に記入すること.

図1の回路についてつぎの問いに答えよ．ただし，$L = 1$ H，$R = 1\ \Omega$，$r = 2\ \Omega$とする．

(1) インダクタに流れる初期電流を0 A としたとき，端子対①－①'に現れる電圧 $v(t)$のラプラス変換[*1] $V(s)$を求めよ．ただし，電源電圧 $e(t)$のラプラス変換を $E(s)$とする．

(2) 端子対①－①'より見た回路の s-領域[*2] におけるテブナン等価回路[*3] を求め図示せよ．

(3) $e(t)$として，振幅 1 V のステップ電圧[*4] $1_{+}(t)$ [V]を印加した．このとき，$v(t)$ ($t > 0$)を求めよ．ただし，インダクタに流れる初期電流は 0 A とする．

(4) $e(t)$として，振幅1 V，角周波数ω [rad/s]の正弦波電圧[*5] を印加した．このとき，定常状態[*6] における$v(t)$の振幅をωの関数として表せ.

(5) (4)において，さらに端子対①－①'にキャパシタを接続した．$\omega = 1$ rad/s のとき，$v(t)$の位相を $e(t)$の位相に対し$\pi/4$ rad だけ遅らせるためのキャパシタ容量 C [F]の値を求めよ．ただし，回路は正弦波定常状態にあるものとする．

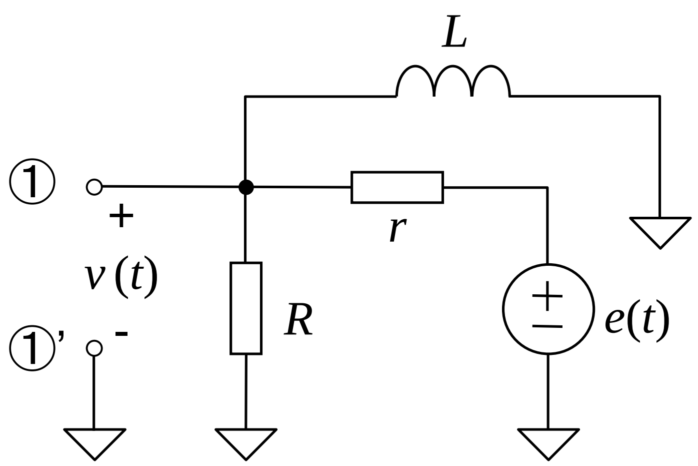
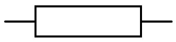
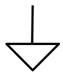


図 1

注　右記の記号は抵抗を示す.



右記の記号は接地を示す.



[*1] ラプラス変換：Laplace transform

[*2] s-領域：s-domain

[*3] テブナン等価回路：Thévenin equivalent circuit

[*4] ステップ電圧：step voltage

[*5] 正弦波電圧：sinusoidal voltage

[*6] 定常状態：steady state

【電気電子回路2】解答は，橙（だいだい）色（9番）の解答用紙に記入すること.

図 1 に示す演算増幅器*1 を用いた回路について，下記の問いに答えよ．ただし，演算増幅器単体の入力インピーダンスは十分に高く，出力インピーダンスは十分に低いものとし，演算増幅器単体の電圧利得*2 を A とする．ここで，回路は角周波数 ω [rad/s] の正弦波定常状態*3 にあるものとし，2 つの入力電圧のフェーザ*4 をそれぞれ $\dot{V}_{in1}$，$\dot{V}_{in2}$，出力電圧のフェーザを $\dot{V}_{out}$，演算増幅器の反転入力端子*5 の電圧のフェーザを $\dot{V}_n$ とする．また，抵抗値 R_1，R_2，キャパシタ容量 C，演算増幅器の電圧利得 A は全て正の実数である．

スイッチ SW が開放しているものとして，以下の問い(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1) 反転入力端子の電圧 $\dot{V}_n$ を，電圧利得 A と出力電圧 $\dot{V}_{out}$ を用いて表せ.
(2) 出力電圧 $\dot{V}_{out}$ を，入力電圧 $\dot{V}_{in1}$，$\dot{V}_{in2}$，反転入力端子の電圧 $\dot{V}_n$，抵抗値 R_1，R_2 を用いて表せ.
(3) 電圧利得 A が十分に大きい（$A\to\infty$）として，反転入力端子の電圧 $\dot{V}_n$，及び出力電圧 $\dot{V}_{out}$ を求めよ.

スイッチ SW が短絡しているものとして，以下の問い(4)，(5)に答えよ．ここで，電圧利得 A は十分に大きい（$A\to\infty$）ものとし，$\dot{V}_{in1} = \dot{V}_{in}$，$\dot{V}_{in2} = 0$ とする.

(4)この回路の電圧伝達関数*6 $T(j\omega)$ $(=\dot{V}_{out} / \dot{V}_{in})$ を求めよ．ただし，j は虚数単位とする.
(5) $R_1 = 5$ kΩとする．通過帯域*7 における電圧利得が 12 dB，遮断周波数*8（電圧利得が，通過帯域における値の $1/\sqrt{2}$ となる周波数）が 500 Hz となるような，R_2 [Ω]及び C [F]の値を求めよ．また，必要に応じて，$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3$ を用いよ.

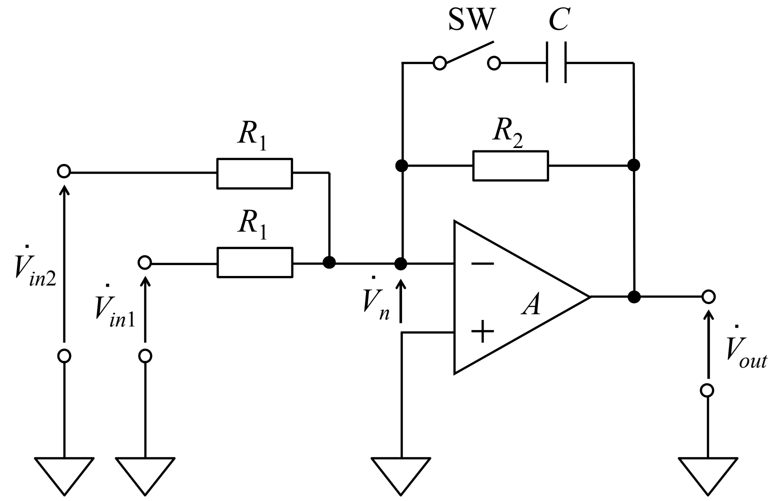
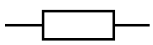


図 1

---

*1 演算増幅器 ：operational amplifier
*2 電圧利得 ：voltage gain
*3 正弦波定常状態 ：sinusoidal steady state
*4 フェーザ ：phasor
*5 反転入力端子 ：inverting input terminal
*6 電圧伝達関数 ：voltage transfer function
*7 通過帯域 ：passband
*8 遮断周波数 ：cut-off frequency

図中，右の記号は抵抗を表す.


図中，右の記号は基準電位 (reference potential) を表す.