問題1　微分積分・線形代数・常微分方程式　解答例

ここにあげたのは1つの解答の方法である。また I (3), (4) には同等な解がたくさん存在する。

[I] (1) 対称行列

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\-1&2&1&1\\1&1&2&-1\\1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

を用いて $II=\vec{v}A\,{}^t\vec{v}$ と表される。

(2) 固有多項式は

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&1&1\\-1&2-\lambda&1&1\\1&1&2-\lambda&-1\\1&1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda&3-\lambda&3-\lambda&3-\lambda\\-1&2-\lambda&1&1\\1&1&2-\lambda&-1\\1&1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&2-\lambda&1&1\\1&1&2-\lambda&-1\\1&1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&3-\lambda&0&0\\1&0&1-\lambda&-2\\1&1&-2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)^2(1-2\lambda+\lambda^2-4)=(\lambda-3)^3(\lambda+1)$$

となるので、固有値は 3 (重複度 3), -1 である。

-1 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

であるから $a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(a=b=c=0$ ではない$)$

-1 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}3&-1&1&1\\-1&3&1&1\\1&1&3&-1\\1&1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\-1&3&1&1\\3&-1&1&1\\1&1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\0&4&4&0\\0&-4&-8&4\\0&0&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\0&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

問題1

であるから $d\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(d \neq 0)$

(3) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ からシュミットの直交化により直交系を作る。$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

ここで $\vec{v}'_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$ とおく。

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}\vec{v}_1 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}'_2 \rangle}{\langle \vec{v}'_2, \vec{v}'_2 \rangle}\vec{v}'_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

これより

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{とすると} \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) ${}^t(X,Y,Z,W) = {}^tP\,{}^t(x,y,z,w)$ とおくと $II = 3X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 - W^2$ となる。

[II] (1) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

(2) 1) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$ であるから

$g(0) = \sin^{-1} 0 = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0$

2) $(1-x^2)g''(x) - xg'(x) = x(1-x^2)^{-1/2} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

3) $g''(x)\,(1-x^2) - g'(x)\,x = 0$ であるから

$$g^{(n+2)}(x)\,(1-x^2) + ng^{(n+1)}(x)\,(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}g^{(n)}(x)\,(-2) - \left\{g^{(n+1)}\,x + ng^{(n)}(x)\right\} = 0$$

すなわち

$$(1-x^2)g^{(n+2)}(x) - (2n+1)xg^{(n+1)} - n^2 g^{(n)}(x) = 0$$

4) 3) の漸化式で $x=0$ とすると $g^{(n+2)}(0)=n^2g^{(n)}(0)$ となる。$g(0)=0,\ g'(0)=1$ であるから

$$g^{(2m)}(0)=0,\quad g^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2$$

5) $g(x)$ のマクロリン展開は

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2}{(2m+1)!}\,x^{2m+1} \\ &= x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2}{(2m+1)!}\,(x^2)^m \end{aligned}$$

である。ダランベールの商判定を利用すると

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty}\frac{(2m+1)^2(2m-1)^2\cdots 3^2\cdot 1^2}{(2m+3)!}\times\frac{(2m+1)!}{(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{(2m+1)^2}{(2m+3)(2m+2)}=1 \end{aligned}$$

より、収束半径は $\sqrt{\frac{1}{1}}=1$ である。

問題２　基礎力学・基礎電磁気学解答例

(1) 電荷量 CV_0、静電エネルギー $\dfrac{CV_0^2}{2}$

(2) 金属棒に流れる電流（電子）に磁場による力（ローレンツ力）が働いたから。

(3) はじめ、金属棒は磁場による力によって徐々に加速される。そうすると、金属棒を含む回路に誘導起電力がコンデンサーによる電圧とは逆向きに発生する。これらが、等しくなった時に、回路には電流が流れなくなり、金属棒は一定速度で運動し続ける。

(4) $m\dfrac{dv(t)}{dt} = -Bw\dfrac{dQ(t)}{dt}$

(5) $a = -\dfrac{1}{RC}$、$b = \dfrac{Bw}{R}$

(6) $h = -\dfrac{m}{Bw}$、$d = CV_0$

(7) $s = \dfrac{BwV_0}{mR}$、$k = -\dfrac{m + B^2w^2C}{mRC}$

(8) $v(t) = \dfrac{BwCV_0}{m + B^2w^2C}\left(1 - \exp\left[-\dfrac{m + B^2w^2C}{mRC}t\right]\right)$

(9) $v_f = \dfrac{BwCV_0}{m + B^2w^2C}$、$Q_f = \dfrac{B^2w^2C^2V_0}{m + B^2w^2C}$

(10) $F(C, B, w) = B^2w^2C$

(11) $\dfrac{U_0}{2}$

問題19A

1/2

19 A［計算機構造］ 解答例

I

(1) $0.5=8/16$ なので，符号ビット $s=0, n=0, f_1=8, f_2=f_3=f_4=f_5=f_6=0$ である。従って，0.5は00800000と表される。

また，1.0より小さく，1.0に一番近い数値は，$0.999\cdots=15/16+15/16^2+\cdots$ であるので，$s=0, n=0, f_1=f_2=f_3=f_4=f_5=f_6=15$ となり，$00FFFFFF$ となる。

(2) $s=1, n=1, f_1=6, f_2=8, f_3=f_4=f_5=f_6=0$ であるので，$-16\times(6/16+8/16^2)=-6.5$ となる。

(3) $s=0$ で，n の最大値は0111111である。仮数部の全てのビットが1のときに最大値となるので，$3FFFFFFF$ と表される。

最小値については，$s=0, n=1000000$ で，$f_1=1, f_2=f_3=f_4=f_5=f_6=0$ のときであるので，40100000と表される。

(4) $16^8\times(1/16^4+4/16^5+8/16^6)=16^5\times(1/16+4/16^2+8/16^3)$ であるので，16進数表示すると，05148000となる。

II

(1) 真理値表は以下のようになる。

x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

この真理値表より，$(x_2+x_1+\overline{x_0})(x_2+\overline{x_1}+x_0)(\overline{x_2}+x_1+x_0)(\overline{x_2}+\overline{x_1}+\overline{x_0})$ を得る。

問題19A

2/2

(2)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1							1
01			1	1		1		
11			1	1		1		
10	1							1

$BCE + \overline{A}BE + \overline{B}\overline{C}\overline{E}$

問題２２A［制御工学］（解答例）

1．rからyまでの伝達関数は$\dfrac{PC}{1+P(H+C)}$

dからyまでの伝達関数は$\dfrac{P}{1+P(H+C)}$

2．問１の結果よりRおよびDからYまでの伝達関数は以下のようになる．

$$Y(s)=\frac{K_C}{(1+K_PT_D)s^2+(1+K_P)s+K_C}\frac{R_0}{s^2}+\frac{s}{(1+K_PT_D)s^2+(1+K_P)s+K_C}\frac{D_0}{s}$$

したがって，最終値の定理より定常偏差は以下のようになる．

$$e_v=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s(R(s)-Y(s))=\frac{1+K_P}{K_C}R_0$$

3．$s^2+4s+4=s^2+\dfrac{1+K_P}{1+K_PT_D}s+\dfrac{K_C}{1+K_PT_D}$ より

$T_D=0.1$として,$K_C=6,K_P=5$となる。

外来応答については，外乱として単位ステップ入力$1/s(D_0=1)$を仮定すると，

$$Y(s)=\frac{s}{(1+K_PT_D)s^2+(1+K_P)s+K_C}\frac{1}{s}=\frac{s/(1+K_PT_D)}{s^2+(1+K_P)/(1+K_PT_D)s+K_C/(1+K_PT_D)}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1/1.5}{s^2+4s+4}$$

となる．したがって，ラプラス逆変換により，

$y(t)=1/1.5\times t\times \exp(-2t)$

4．図２よりRからYまでの伝達関数を求めると；

$Y/R=\dfrac{P(G_f+F)}{1+PF}$　となる．これと問１の結果より，$F=H+C,G_f=-H$となる．

したがって，

$$G_f(s)=-K_P(1+T_Ds),F(s)=\frac{K_C}{s}+K_P(1+T_Ds)$$

5．rからyまでの伝達関数は$\dfrac{K_C}{\varepsilon s^3+(1+\varepsilon+K_PT_D)s^2+(1+K_P)s+K_C}$

であるので、特性多項式$\varepsilon s^3+(1+\varepsilon+K_PT_D)s^2+(1+K_P)s+K_C$よりラウス列は、

$$\begin{array}{llll}
s^3 & \varepsilon & 1+K_P & 0\\
s^2 & 1+\varepsilon+K_PT_D & K_C & 0\\
s^1 & \dfrac{(1+\varepsilon+K_PT_D)(1+K_P)-\varepsilon K_C}{1+\varepsilon+K_PT_D} & 0 & \\
s^0 & K_C & &
\end{array}$$

となる。これより、

$$0<K_C<\frac{(1+\varepsilon+K_PT_D)(1+K_P)}{\varepsilon}$$

志望専攻	受験番号
専攻	

平成１９年度　大学院工学研究科（博士前期課程）外国語

［解答用紙］

— 英　語 —

得点

I.

1.

1)	2)	3)	4)	5)
a	h	g	c	j
6)	7)	8)	9)	10)
i	e	b	f	d

2.

b

3.

d

志望専攻
専攻

受験番号

平成１９年度　大学院工学研究科（博士前期課程）外国語

［解答用紙］

— 英　　語 —

得点

II.

1.

①	②	③	④	⑤
d	c	b	c	b

2.

a

III.

1.

A	B	C	D
c	b	a	d

2.

a

志望専攻
専攻

受験番号

平成１９年度　大学院工学研究科（博士前期課程）外国語

［解答用紙］

— 英　　語 —

得点

IV.

1.

①	②	③	④	⑤
b	a	d	c	d

2.

a

3.

a)	environmental	refugees
b)	power	generation
c)	developing	world

志望専攻	専攻

受験番号

平成１９年度　大学院工学研究科（博士前期課程）外国語

［解答用紙］

— 英　　語 —

得　点

V.

1.

A

1)	2)	3)	4)	5)
e	g	i	c	d
6)	7)	8)	9)	
a	f	h	b	

B

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
a	f	g	b	c	e	d

2.

a)	b)	c)	d)
T	F	T	F