平 成 ２２ 年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　　門

平成２１年８月１０日（月）
１２：３０～１５：３０

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

2. 試験終了まで退出できない。

3. 外国人留学生は、英語で解答してもよい．さらに，電子辞書以外の辞書（１冊）を持ち込んでもよい。

4. 問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認せよ。

5. 問題は、線形代数、微分積分、離散数学、数理論理学、確率論、統計学、量子力学、アルゴリズム設計法、オートマトン理論、プログラミングの１０題からなる。
このうち３題を選択して解答せよ。

   選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

   ただし，離散数学と数理論理学はともに選択問題であり、それぞれの問題はIとIIからなる。これらの問題を選択する場合は、IまたはIIの一方のみを答えよ。

6. 解答用紙の指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

7. 解答用紙は試験終了後に３枚とも提出せよ。

8. 問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)

(1) 成分がすべて負でない実数で, かつ行ごとの成分の総和がすべて 1 となるような正方行列を確率行列という. 以下の問に答えよ.

  (i) A が確率行列ならば, A は 1 を固有値にもつことを示せ.

  (ii) A, B が次数の等しい確率行列ならば, AB も確率行列であることを示せ.

(2) V を線形空間（ベクトル空間）, W_1 と W_2 を V の部分空間とする. $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間となるためには,

$$W_1 \subseteq W_2 \text{ または } W_2 \subseteq W_1$$

であることが必要十分であることを証明せよ.

問題 2. (微分積分)

以下の問に答えよ.

(1) $f(x, y) = x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 3y^3$ の極値を求めよ.

(2) 放物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ の $z \leq 0$ の部分の面積を求めよ.

問題 3．(離散数学)

離散数学は選択問題である．次の I，II のいずれか一方を選択して答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I.

d 次元空間において，すべての成分が整数である点を格子点という．相異なる n 個の格子点を選び，その中の 2 個の格子点を結んでできる線分の中点を考える．以下の問に答えよ．

(1) $d=2$ とする．

(i) $n=4$ のとき，どの中点も格子点とならないような例を 1 つ挙げよ．

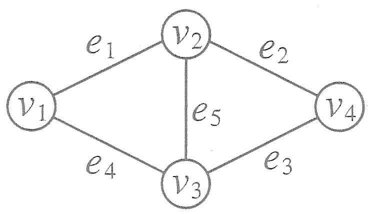
(ii) $n>4$ のとき，n 個の点をどのように選んでも少なくとも 1 つの中点が格子点となることを示せ．

(2) 一般の d に対して，n 個の点をどのように選んでも少なくとも 1 つの中点が格子点となるような最小の n を求めよ．

II.

頂点集合 V, 辺集合 E よりなる無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．G は自己ループを持たないものとする．各辺 $e=(u,v)\in E$ に対し，頂点 u と v を e の端点と呼ぶ．辺集合 $M\subseteq E$ がマッチングであるとは，M の任意の相異なる 2 辺が端点を共有しないことである (すなわち，任意の $e_1=(u_1,v_1), e_2=(u_2,v_2)\in M$，$e_1\neq e_2$ に対し $\{u_1,v_1\}\cap\{u_2,v_2\}=\emptyset$)．また，頂点集合 $C\subseteq V$ が点被覆であるとは，任意の辺 $e\in E$ に対し，その少なくとも一方の端点が C に含まれることである (すなわち，任意の $e=(u,v)\in E$ に対し $u\in C$ または $v\in C$)．以下の問に答えよ．

(1) 下図の無向グラフにおいて，マッチングをすべて挙げ，さらにその中で (集合の包含関係に関して) 極大なものをすべて示せ．また，点被覆をすべて挙げよ．



以下では一般の無向グラフにおけるマッチングと点被覆を考える．

(2) 任意のマッチング M と任意の点被覆 C に対し，$|M|\leq|C|$ が成立する．その理由を説明せよ．

(3) 任意の極大なマッチング M' に対し，M' に含まれる辺の端点すべてからなる集合を $C_{M'}$ とする．$C_{M'}$ が点被覆であることを説明せよ．

(4) 要素数が最小の点被覆を最小点被覆と呼び，その要素数を z^* と記す．上述の点被覆 $C_{M'}$ が $|C_{M'}|\leq 2z^*$ をみたすことを説明せよ．

問題 4. (数理論理学)

数理論理学は選択問題である．次の I，II のいずれか一方を選択して答えよ．解答用紙の指定欄に，どちらの問題を選択したのかはっきり分かるように記入せよ．

I.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は言語 $\{+\}$ に関して同型(注 1) であることを示せ．

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は言語 $\{<,+\}$ に関しては同型(注 2) にならないことを示せ．

(3) 次の 2 条件を同時にみたす K が存在することを示せ．

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は言語 $\{<,+\}$ に関する K の基本部分構造 (elementary substructure) である．

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は言語 $\{<,+\}$ に関する K の部分構造 (substructure) である．

(注 1) A と B が言語 $\{+\}$ に関して同型であるとは，A から B への全単射 f で，$\forall x, y \in A(f(x+y) = f(x) + f(y))$ をみたすものが存在することである．

(注 2) A と B が言語 $\{<,+\}$ に関して同型であるとは，A から B への全単射 f で，(注 1) の条件とさらに，$\forall x, y \in A(x < y \leftrightarrow f(x) < f(y))$ を同時にみたすものが存在することである．

II.

命題変数と命題定数 $\top, \bot$ と論理結合子 $\rightarrow$ から生成される論理式 P に対し，$\phi(P)$ を以下で定める．

- P が命題変数か命題定数の場合は $\phi(P) = \langle P, \top \rangle$ で定義．
- $P = P_1 \rightarrow P_2$ の場合は，各 i で $\phi(P_i) = \langle l_i, Q_i \rangle$ とし，z を他で使用されていない新しい変数として以下で定義．

$$\phi(P) = \langle z, Q_1 \wedge Q_2 \wedge (z \leftrightarrow (l_1 \rightarrow l_2)) \rangle$$

(1) $P = x \rightarrow (y \rightarrow \bot)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(i) $\phi(P)$ を求めよ．

(ii) $\sigma(x) = \text{false}$, $\sigma(y) = \text{true}$ となる解釈 σ を考える．$\phi(P) = \langle l, Q \rangle$ として，$\sigma'(l \wedge Q) = \text{true}$ かつ各 $x \in \mathcal{V}(P)$ で $\sigma'(x) = \sigma(x)$ となる解釈 σ' を与えよ．
ここで，$\mathcal{V}(P)$ は P 中に出現する命題変数全体からなる集合を表す．

(2) $\phi(P) = \langle l, Q \rangle$ とするとき，以下の性質を証明せよ．

(i) 任意の解釈 σ に対して，$\sigma(Q) = \text{true}$ ならば $\sigma(l) = \sigma(P)$．

(ii) 任意の解釈 σ に対して，$\sigma'(Q) = \text{true}$ かつ $\sigma'(l) = \sigma(P)$ かつ各 $x \in \mathcal{V}(P)$ で $\sigma'(x) = \sigma(x)$ となる解釈 σ' が存在する．

(iii) P が充足可能であることと $l \wedge Q$ が充足可能であることは必要十分である．
(なお，性質 (i),(ii) が証明できなかったとしても，性質 (i),(ii) を用いてよい．)

問題 5. (確率論)

実数 m, $\sigma > 0$ に対して確率変数 X が平均（期待値）m, 分散 σ^2 の正規分布に従うとは, $a < b$ である実数 a, b に対して, 事象 $a \leqq X \leqq b$ の確率 $P(a \leqq X \leqq b)$ が

$$P(a \leqq X \leqq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-(u-m)^2/(2\sigma^2)} du$$

によって表されるときをいう. 以下の問に答えよ.

(1) 確率変数 X が平均 m, 分散 σ^2 の正規分布に従うとき, 確率変数 $\dfrac{X-m}{\sigma}$ は平均 0, 分散 1 の正規分布に従うことを示せ.

(2) 次の不等式がすべての $x > 0$ に対して成り立つことを証明せよ.

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} \leqq \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \leqq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

(3) 確率変数 T が平均 0, 分散 1 の正規分布に従うとするとき, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \log P(T \geqq x)$ を求めよ.

(4) 確率変数 X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が平均 m, 分散 σ^2/n の正規分布に従うとする. このとき $\varepsilon > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(X_n \geqq m + \varepsilon)$ を求めよ.

問題 6. (統計学)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立とし, ともに次の確率密度関数をもつ分布に従うとする.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

ただし $\theta \geq 0$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\log X_1$ の期待値と分散を求めよ.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ から定まる θ の最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ を求めよ.

(3) 最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ が 0 に等しくなる確率を $P(\widehat{\theta}_n = 0)$ と表す. $\theta > 0$ のとき

$$\lim_{n \to \infty} P(\widehat{\theta}_n = 0) = 0$$

を証明せよ. ただしチェビシェフの不等式は証明なしに用いてよい.

問題 7. (量子力学)

I, X, Y, Z を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される 2×2 行列とし，$\vec{\sigma} = (X, Y, Z)$ とする．3 次元実ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$ に対して，$\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ を

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} = xX + yY + zZ$$

で定まる 2×2 行列とする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の 2 次エルミート行列 A は，3 次元実単位ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$ 及び実数 s, t によって，

$$A = sI + t\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$$

と表されることを示せ．

(2) 任意の 3 次元実単位ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$ に対して，$(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$ となることを示せ．

(3) 任意の 3 次元実単位ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$ 及び実数 t に対して，

$$e^{it\vec{x} \cdot \vec{\sigma}} = (\cos t)I + i(\sin t)\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$$

となることを示せ．

(4) 任意の 2 次ユニタリ行列 U は，3 次元実単位ベクトル $\vec{x} = (x, y, z)$ 及び実数 s, t によって，

$$U = e^{is}\left((\cos t)\, I + i\,(\sin t)\, \vec{x} \cdot \vec{\sigma}\right)$$

と表されることを示せ．

問題 8. (アルゴリズム設計法)

2つの文字列 α と β の編集距離 (edit distance) とは，α に対し文字の挿入・削除・置換の3種類の操作を繰り返して α を β に変換するときの最小の操作回数のことである．たとえば，α=TCGATAT は次のようにして3回の操作で β=ATCAGAT に変換できる．

α =TCGATAT	
→ ATCGATAT	(先頭に A を挿入した)
→ ATCATAT	(G を削除した)
→ ATCAGAT=β	(T を G に置き換えた)

2回以下の操作では α から β へ変換できないので α と β の編集距離は3である．
2つの文字列 $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_m$ と $\beta = b_1 b_2 \cdots b_n$ が与えられたとき，編集距離を求める多項式時間のアルゴリズムを次のようにして構成せよ．

(1) $\mathrm{dist}(i, j)$ を，$a_1 \cdots a_i$ と $b_1 \cdots b_j$ の編集距離と定義する．$a_i = b_j$ のときと $a_i \neq b_j$ のときのそれぞれについて，$\mathrm{dist}(i, j)$ を $\mathrm{dist}(i-1, j-1)$, $\mathrm{dist}(i, j-1)$, $\mathrm{dist}(i-1, j)$ で表せ．

(2) 上の漸化式に基づいて $\mathrm{dist}(m, n)$ を動的計画法を用いて求めるアルゴリズムを書け．

(3) このアルゴリズムの時間計算量はいくらか．

問題 9. (オートマトン理論)

以下の問に答えよ.

(1) $\Sigma = \{0, 1\}$ とするとき，次の言語を認識する決定性有限オートマトンを図示せよ.

(i) $L_1 = \{w \mid w \in \Sigma^*,\ w$ は 01 で終る $\}$

(ii) $L_2 = \{w \mid w \in \Sigma^*,\ w$ は 01 または 10 で終る $\}$

(2) 決定性有限オートマトン $A = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_f \rangle$ が認識する言語を L とするとき，次の言語を認識する有限オートマトンの構成法を述べよ．ここで，$v < w$ は $vu = w$ をみたす非空列 u が存在することを表す.

(i) $L_{\mathrm{inv}} = \{w \mid w \in \Sigma^* - L\}$

(ii) $L_{\min} = \{w \mid w \in L,\ \forall v \in \Sigma^* (v < w \Rightarrow v \notin L)\}$

(3) R, S を言語とする．言語の連接 RS，クリーネ閉包 R^* は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} RS &= \{rs \mid r \in R,\ s \in S\} \\ R^* &= \textstyle\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i \end{aligned}$$

ここで，$R^0 = \{\varepsilon\}$, $R^{i+1} = R^i R\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ であり，ε は空列を表す.

このとき，次式がそれぞれ成立するか答えよ．成立する場合には証明し，成立しない場合には反例を示せ.

(i) $(R \cup S)^* \subseteq (R^* S)^*$

(ii) $(R \cup S)^* \supseteq (R^* S)^*$

問題 10. (プログラミング)

最小値 N、最大値 M の n 個 (n > 0)の整数を昇順に整列して格納した一次元配列がある。N≦k≦M を満たす整数 k がこの配列の中に存在するかどうかを探索する C 言語の関数 search を以下のように書いた。この関数は k が存在する場合は 1、そうでない場合は 0 を返す。また、そのテストのための main 関数を以下のように書いた。なお左端の番号は行番号を示すものでプログラムの一部ではない。

```
1   #include <stdio.h>
2
3   int search( [ (a) ] n, [ (b) ] , [ (c) ] k ){
4      int i,j,p;
5      i = [ (d) ] ;
6      j = [ (e) ] ;
7      while( i <= j ){
8         p = (i + j) / 2;
9         if ( b[p] <= k ){
10           i = p + 1;
11        } else {
12           j = p - 1;
13        }
14     }
15     if( [ (f) ] ){
16        return 1;
17     } else {
18        return 0;
19     }
20  }
21
22  int main(){
23     int a[]={ 3,6,7,10,13,15,19 };
24     if( search( 7, a, 14 )){
25        printf( "14 is found in array a[].\n" );
26     } else {
27        printf( "14 is not found in array a[].\n" );
28     }
29     return 0;
30  }
```

このプログラムについて以下の問いに答えよ。

(1) $\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(f)}}$ を埋めてプログラムを完成せよ。

(2) この探索法はどのような名前で呼ばれるか。

(3) このプログラムの実行において、行番号 8 は複数回実行される。それぞれ実行した後の i, j, p はどのような値になるか示せ。

(4) 行番号 7 の while 文の b, i, j, k に関するループ不変式(loop invariants)を示せ。
(ヒント：最小値 N の左隣に−∞、最大値 M の右隣に+∞が存在するものと考える。)

(5) k が配列要素中の最小値から最大値の間の値であるという前提がない場合にはどのような問題が生じるか。また、それに対処するには $\boxed{\text{(f)}}$ をどのように変更すれば良いかを示せ。

(6) この探索法の計算量のオーダーを示せ。

(7) 高速な探索法としてハッシュ探索がある。これはどのようなものか 300 文字以内(or in 100 English words)で説明せよ。