

平成 18 年 8 月 29 日

9:30—11:30

平成 18 年度

大学院工学研究科 電気・通信工学専攻
電子工学専攻

大学院情報科学研究科

情報・生命系群(物理・情報系)

大学院入学試験問題用紙

専門科目

注意： 7 設問中， 2 問題を選んで，
答案用紙に解答せよ．

(Choose 2 problems out of the
following 7 problems and solve them.)

2006 年 8 月実施

問題 1 電気工学

(1 頁目 / 2 頁中)

Fig. 1(a)のようなフィードバック制御系がある．ここで， $r(t)$ は目標値， $e(t)$ は偏差， $d(t)$ は外乱， $y(t)$ は制御量である．次の問に答えよ．

- (1) Fig. 1(a)のブロック線図を Fig. 1(b)のように書き換える．このとき， $G_1(s)$ と $G_2(s)$ を $C(s)$ と $G(s)$ を用いて表せ．

- (2) $C(s) = \frac{s+a}{s+1}$ ， $G(s) = \frac{1}{s}$ とする．ただし， $a > 0$ とする．このとき，目標値 $r(t)$ に対する定

常位置偏差 ε_p と定常速度偏差 ε_v をそれぞれ求めよ．

- (3) 問(2)と同じ $C(s)$ と $G(s)$ を与えたとき，外乱 $d(t)$ に対する定常位置偏差の絶対値を 0.2 より小さくするための a の条件を求めよ．

- (4) $C(s) = K$ ， $G(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ ， $d(t) = 0$ とする．ただし， $K > 0$ とする．このフィードバック制御

系の開ループ周波数伝達関数の実部と虚部を求めよ．

- (5) 問(4)の制御系のナイキスト線図の概形を描け．

- (6) 問(5)の結果に基づいて，問(4)の制御系が安定であるための K のとりうる値の範囲を求めよ．

Consider the feedback control system shown in Fig. 1(a), where $r(t)$, $e(t)$, $d(t)$ and $y(t)$ denote the reference input, error, disturbance, and controlled variable, respectively. Answer the following questions.

- (1) Express $G_1(s)$ and $G_2(s)$ in terms of $C(s)$ and $G(s)$, so that the block diagram shown in Fig. 1(b) is equivalent to the one in Fig. 1(a).

- (2) Let $C(s) = \frac{s+a}{s+1}$ ， $G(s) = \frac{1}{s}$ ，and $a > 0$. Calculate the steady-state position error ε_p and the steady-state velocity error ε_v for the reference input $r(t)$.

- (3) Let $C(s)$ and $G(s)$ be the same as in question (2). Find the range of values of the parameter a so that the absolute value of the steady-state position error for the disturbance $d(t)$ is less than 0.2.

2006 年 8 月実施

問題 1 電気工学

(2 頁目 / 2 頁中)

- (4) Let $C(s) = K$, $G(s) = \frac{e^{-s}}{s}$, $d(t) = 0$, and $K > 0$. Calculate the real and imaginary parts of the open-loop frequency transfer function of this feedback control system.
- (5) Sketch the Nyquist diagram of the control system given in question (4).
- (6) Using the result of question (5), find the range of values of the parameter K so that the control system given in question (4) is stable.

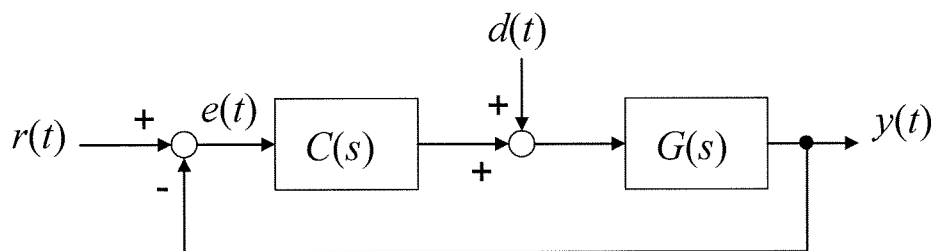


Fig. 1(a)

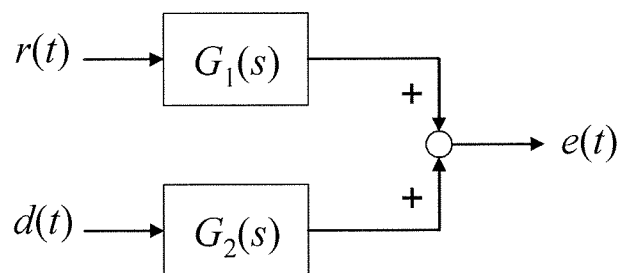


Fig. 1(b)

2006 年 8 月実施
問題 2 通信工学
(1 頁目 / 3 頁中)

直交振幅変調 (QAM) 方式は、周波数利用効率を高めた振幅変調方式の 1 つである。QAM 方式では、正弦波と余弦波が直交することを利用して、通常の搬送波抑圧振幅変調 (DSB-SC) 方式の 1 チャンネル分の周波数帯域で、理論上 2 チャンネル分の伝送が実現できる。Fig. 2 に示す QAM 方式の送信機と受信機を考える。送信機では、周波数が f_c で等しく、かつ位相が 90 度異なる $\cos(2\pi f_c t)$ と $-\sin(2\pi f_c t)$ の 2 つの搬送波を、独立した入力信号 $s_1(t)$ と $s_2(t)$ でそれぞれ搬送波抑圧振幅変調して DSB-SC 信号 $f_{1D}(t)$ と $f_{2D}(t)$ とを生成し、さらにこれらを加算して送信機出力信号 $f_{QAM}(t)$ を生成する。一方、受信機では、受信機入力信号 $f_{QAM}(t)$ を局部搬送波 $\cos(2\pi f_c t)$ と $-\sin(2\pi f_c t)$ で並列に復調し、受信機出力信号 $g_1(t)$ と $g_2(t)$ を得る。

送信機と受信機の低域通過フィルタ (LPF) は、ともに周波数応答 $H_{LPF}(f)$ が次式で与えられる理想低域通過フィルタとする。

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

ただし、 $f_0 < f_c$ とする。次の問に答えよ。

- (1) 周波数が $f_m < f_0$ なる単一余弦波信号 $s_1(t) = \cos(2\pi f_m t)$ を送信機に入力した場合の DSB-SC 信号 $f_{1D}(t)$ とその周波数スペクトル $F_{1D}(f)$ を求めよ。次に、求めた $F_{1D}(f)$ の概略を図示せよ。
- (2) 単位インパルス信号 $s_2(t) = \delta(t)$ を送信機に入力した場合の DSB-SC 信号 $f_{2D}(t)$ を求めよ。
- (3) 周波数帯域が f_0 以下の信号 $s_1(t), s_2(t)$ を送信機に入力した場合の受信機出力信号 $g_1(t), g_2(t)$ を求め、その復調過程を簡潔に説明せよ。
- (4) 問(3)において、局部搬送波が位相誤差 ε を含み $\cos(2\pi f_c t + \varepsilon)$ と表される場合について、受信機出力信号 $g_1(t)$ を計算せよ。さらに、位相誤差 ε が十分小さい場合について、 ε が $g_1(t)$ に及ぼす影響を簡潔に説明せよ。

2006 年 8 月実施
問題 2 通信工学
(2 頁目 / 3 頁中)

The quadrature amplitude modulation (QAM) method is an amplitude modulation method to increase frequency efficiency. Using a relation of a cosine wave being orthogonal to a sine wave, the QAM method can theoretically realize transmission of two channels in the frequency band of a single channel of a normal double-side-band suppressed-carrier amplitude modulation (DSB-SC) method. Consider the QAM method transmitter and receiver shown in Fig. 2. In the transmitter, two carrier waves of $\cos(2\pi f_c t)$ and $-\sin(2\pi f_c t)$ having an identical frequency of f_c and a phase difference of 90 degrees are independently modulated in DSB-SC by the two input signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$, respectively, generating DSB-SC signals $f_{1D}(t)$ and $f_{2D}(t)$. $f_{1D}(t)$ and $f_{2D}(t)$ are finally summed to generate a transmitter output signal $f_{QAM}(t)$. In the receiver, on the other hand, the receiver input signal $f_{QAM}(t)$ is demodulated in parallel, by local carrier waves $\cos(2\pi f_c t)$ and $-\sin(2\pi f_c t)$, yielding receiver output signals $g_1(t)$ and $g_2(t)$.

The low pass filters (LPFs) used in the transmitter and receiver are assumed to be ideal low pass filters having the identical frequency response $H_{LPF}(f)$ given by the following equation:

$$H_{LPF}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

Suppose that $f_0 < f_c$. Answer the following questions:

- (1) Derive the DSB-SC signal $f_{1D}(t)$ and its frequency spectrum $F_{1D}(f)$ when a cosine-wave signal $s_1(t) = \cos(2\pi f_m t)$ with frequency $f_m < f_0$ is input to the transmitter. Then, provide a sketch of $F_{1D}(f)$.
- (2) Derive the DSB-SC signal $f_{2D}(t)$ when a unit impulse signal $s_2(t) = \delta(t)$ is input to the transmitter.
- (3) Derive the receiver output signals $g_1(t)$ and $g_2(t)$ when signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$ with frequencies lower than or equal to f_0 are input to the transmitter. Then, briefly describe its demodulation process.

2006 年 8 月実施
問題 2 通信工学
(3 頁目 / 3 頁中)

- (4) In question (3), suppose that the local carrier wave has a phase error ε and is expressed as $\cos(2\pi f_c t + \varepsilon)$. Calculate the receiver output signal $g_1(t)$. Then briefly discuss the effect of the phase error ε on $g_1(t)$ when ε is sufficiently small.

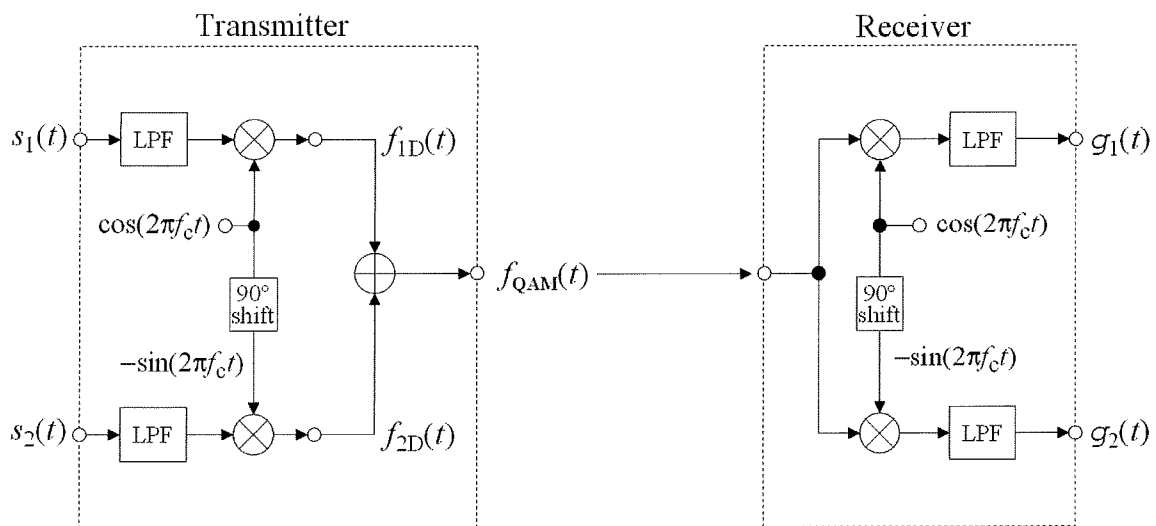


Fig. 2

2006 年 8 月実施
問題 3 電子工学
(1 頁目 / 3 頁中)

nnp バイポーラ接合トランジスタについて以下の間に答えよ.

- (1) エミッタ接地電流増幅率 β をベース接地電流増幅率 α で表せ.
(2) Fig. 3(a)は微小信号に対するベース接地 T 型モデルを示している.

ベース・エミッタ接合を pn ダイオードと考えたとき、電流(I)-電圧(V)特性は次式で与えられる.

$$I = I_0 \left(\exp \frac{qV}{kT} - 1 \right)$$

ここで、 I_0 は逆方向飽和電流、 q は素電荷、 k はボルツマン定数、 T は温度である. I - V 曲線の局所的な傾きが $1/r_E$ に等しいとおくことによって、順バイアス $V = V_0$ における r_E を求めよ.

- (3) コレクタ電流は、エミッタから注入された電子のうち、ベース領域を横切って拡散し、空乏層に到達する電子の数で決まる. ベース・コレクタ接合に加わる逆バイアスの増加による空乏層幅および実効的ベース幅の変化を考慮して、 r_C の起源について簡単に説明せよ.
(4) Fig. 3(b)は微小信号に対するエミッタ接地 T 型モデルを示している.

$r_C(i_C - \alpha i_E) = r_C'(i_C - \beta i_B)$ であることを考慮して、 r_C' を r_C および α で表せ.

- (5) Fig. 3(c)は微小信号に対する高周波 T 型モデルを示している.

角周波数 ω におけるベース接地電流増幅率 α は次の式で与えられる.

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}}$$

ここで α_0 は直流動作時の電流増幅率、 ω_α は α 遮断角周波数である. r_E を流れる電流を i_E' とすると

$$r_E i_E' = \frac{1}{j\omega C_D} (i_E - i_E')$$

であり、また $\alpha i_E = \alpha_0 i_E'$ であることを考慮して、 ω_α を C_D および r_E で表せ.

2006 年 8 月実施
問題 3 電子工学
(2 頁目 / 3 頁中)

Answer the following questions on an npn bipolar junction transistor.

- (1) Express the common-emitter current gain β in terms of the common-base current gain α .
(2) Fig. 3(a) shows the common-base T model for small signals. When the base-emitter junction is considered as a pn diode, the current (I)-voltage (V) characteristic is given by

$$I = I_0 \left(\exp \frac{qV}{kT} - 1 \right),$$

where I_0 is the reverse saturation current, q is the elementary charge, k is the Boltzmann constant, and T is the temperature. Calculate r_E for a forward bias $V = V_0$ by equating the local slope of the I - V curve with $1/r_E$.

- (3) The collector current is determined by the number of electrons among those injected from the emitter that diffuse across the base region and reach the depletion layer. Briefly explain the origin of r_C , considering the changes of the depletion layer width and the effective base width in response to the increase of the reverse bias applied to the base-collector junction.
(4) Fig. 3(b) shows the common-emitter T model for small signals. Express r_C' in terms of r_C and α , considering that $r_C(i_C - \alpha i_E) = r_C'(i_C - \beta i_B)$.
(5) Fig. 3(c) shows the small-signal T model at high frequencies. The common-base current gain α at an angular frequency ω is given by

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}},$$

where α_0 is the DC current gain and ω_α is the α cutoff angular frequency. Considering that

$$r_E i_E' = \frac{1}{j\omega C_D} (i_E - i_E'),$$

and that $\alpha i_E = \alpha_0 i_E'$, where i_E' is the current that flows through r_E , express ω_α in terms of C_D and r_E .

2006 年 8 月実施
問題 3 電子工学
(3 頁目 / 3 頁中)

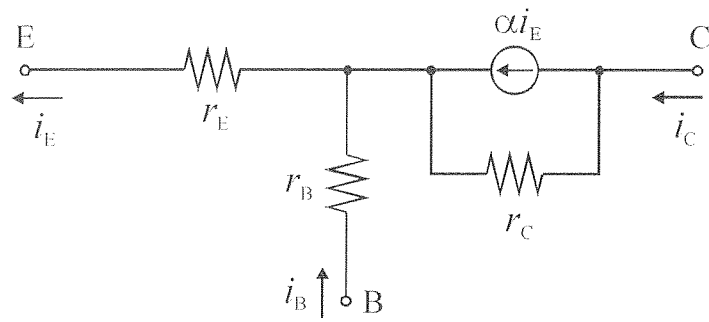


Fig. 3(a)

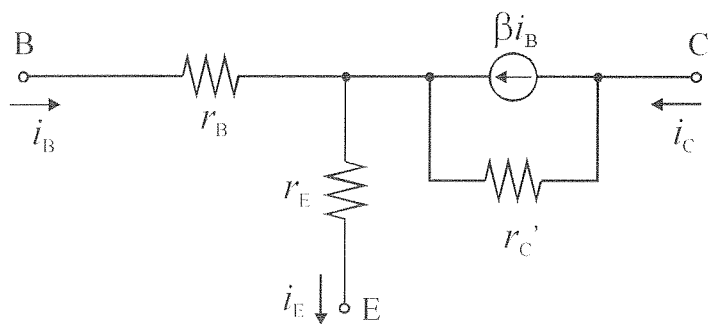


Fig. 3(b)

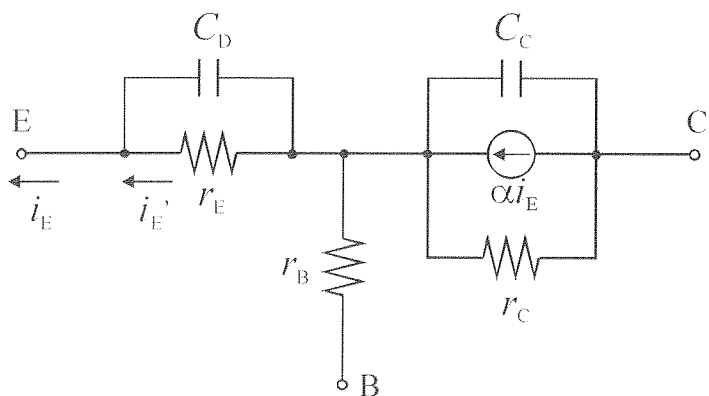


Fig. 3(c)

2006年8月実施

問題4 計算機1

(1 頁目 / 1 頁中)

グレイコード $G = (g_{n-1}, \dots, g_2, g_1, g_0)$ ($g_i \in \{0, 1\}$) を通常の 2 進数 $B = (b_{n-1}, \dots, b_2, b_1, b_0)$ ($b_i \in \{0, 1\}$) に変換する方法について考える. この変換は $b_i = P_{n-i}(g_{n-1}, \dots, g_i)$ で与えられる. ここで, P_{n-i} は $(n-i)$ 入力のパリティ関数 (1 の数が奇数の時に 1, 偶数の時は 0) である. 以下の問に答えよ.

- (1) 4 ビットのグレイコード $(1, 0, 1, 1)$ を 4 ビットの 2 進数に変換せよ.
- (2) 4 入力のパリティ関数 $P_4(x_3, x_2, x_1, x_0)$ を積和形の論理式で表せ.
- (3) 4 ビットのグレイコードを 4 ビットの 2 進数に変換する組み合わせ論理回路を 4 入力パリティ回路を組み合わせて構成せよ. ただし, 4 入力パリティ回路は, 4 入力のパリティ関数 $P_4(x_3, x_2, x_1, x_0)$ を実現するものとする.
- (4) 4 ビットのグレイコードを 4 ビットの 2 進数に変換する 1 入力 1 出力の同期式順序回路を考える. この回路は, クロックサイクルごとに, 1 ビットの入力 g_i に対して 1 ビットの出力 b_i が $i = 3, 2, 1, 0$ の順で得られる. この 1 入力 1 出力の順序回路を 1 つの D フリップフロップと適当な論理ゲートを用いて構成せよ. D フリップフロップの初期状態も示すこと.

Consider a method of converting a Gray-coded number $G = (g_{n-1}, \dots, g_2, g_1, g_0)$ ($g_i \in \{0, 1\}$) to an ordinary binary number $B = (b_{n-1}, \dots, b_2, b_1, b_0)$ ($b_i \in \{0, 1\}$). This conversion is given by $b_i = P_{n-i}(g_{n-1}, \dots, g_i)$, where P_{n-i} is the $(n-i)$ -input parity function which gives 1 when the number of 1's is odd and gives 0 when the number of 1's is even. Answer the following questions.

- (1) Convert the four-bit Gray-coded number $(1, 0, 1, 1)$ to a four-bit binary number.
- (2) Represent the four-input parity function $P_4(x_3, x_2, x_1, x_0)$ by a logical expression in the sum-of-products form.
- (3) Design a combinational logic circuit to convert a four-bit Gray-coded number to the corresponding four-bit binary number using four-input parity circuits, where the four-input parity circuit realizes the four-input parity function $P_4(x_3, x_2, x_1, x_0)$.
- (4) Consider a one-input one-output synchronous sequential circuit which converts a four-bit Gray-coded number to the corresponding four-bit binary number. In every clock cycle, the circuit receives a one-bit input g_i and produces a one-bit output b_i , in the order of $i = 3, 2, 1, 0$. Design the one-input one-output sequential circuit using a D flip-flop and adequate logic gates. Specify the initial state of the D flip-flop.

2006年8月実施

問題5 計算機2

(1 頁目 / 3 頁中)

Fig. 5(a)と Fig. 5(b)に示すプログラムについて、次の問に答えよ。ただし、プログラムの構文と意味は下の通りとする。

- (1) Fig. 5(a)の関数 fib について、fib(4)の戻り値を求めよ。計算の過程も説明すること。
- (2) Fig. 5(b)の関数 fib2 について、fib2(3)を呼び出し、関数 loop が最後に呼び出されるとき引数 a, b, n の値を求めよ。計算の過程も説明すること。
- (3) 任意の非負整数 j, k について、 $\text{loop}(\text{fib}(j), \text{fib}(j+1), k)$ の戻り値と、 $\text{fib}(j+k)$ の戻り値が等しいことを、 k に関する数学的帰納法で示せ。

プログラムの構文と意味			
プログラム	P	::= D ₁ ... D _n	定義の列
定義	D	::= function f(x ₁ , ..., x _n) { S }	関数定義 *1
文	S	::= if (E ₁ > E ₂) then S ₁ else S ₂	条件分岐 *2
		return E	リターン文 *3
式	E	::= f(E ₁ , ..., E _n)	関数呼び出し *4
		E ₁ + E ₂	整数の加算
		E ₁ - E ₂	整数の減算
		x	変数
		i	整数の定数

*1 引数 x₁, ..., x_nを受け取ったら文 S を実行する、という関数 f を定義する。

*2 式 E₁ の値が式 E₂ の値より大きいければ文 S₁ を、そうでなければ文 S₂ を実行する。

*3 式 E の値を関数の戻り値として返す。

*4 式 E₁, ..., E_n の値を計算し、それらの値を引数として関数 f を呼び出す。

2006年8月実施

問題5 計算機2

(2頁目／3頁中)

Answer the following questions about the programs shown in Fig. 5(a) and Fig. 5(b), where the syntax and semantics of programs are given below.

- (1) For the function `fib` in Fig. 5(a), calculate the return value of `fib(4)`. Explain the process of the calculation.
- (2) For the function `fib2` in Fig. 5(b), calculate the values of the arguments `a`, `b`, `n` when the function `loop` is called for the last time after a call to `fib2(3)`. Explain the process of the calculation.
- (3) Show by mathematical induction on k that, for any non-negative integers j and k , the return value of `loop(fib(j), fib($j+1$), k)` is equal to that of `fib($j+k$)`.

Syntax and Semantics of Programs			
program	P	::= D ₁ ... D _n	sequence of definitions
definition	D	::= function f(x ₁ , ..., x _n) { S }	function definition * ¹
statement	S	::= if (E ₁ > E ₂) then S ₁ else S ₂ return E	conditional branch * ² return statement * ³
expression	E	::= f(E ₁ , ..., E _n) E ₁ + E ₂ E ₁ - E ₂ x i	function call * ⁴ integer addition integer subtraction variable integer constant

*¹ Define the function f that executes the statement S upon receiving the arguments x_1, \dots, x_n .

*² If the value of the expression E_1 is greater than that of the expression E_2 , then execute the statement S_1 . Otherwise, execute the statement S_2 .

*³ Return the value of the expression E as the return value of the function.

*⁴ Calculate the values of the expressions E_1, \dots, E_n , and call the function f with these values as the arguments.

2006年8月実施
問題5 計算機2
(3頁目／3頁中)

```
function fib(n) {  
  if (n > 1) then  
    return fib(n-1) + fib(n-2)  
  else  
    return n  
}
```

Fig. 5(a)

```
function loop(a, b, n) {  
  if (n > 0) then  
    return loop(b, a+b, n-1)  
  else  
    return a  
}
```

```
function fib2(n) {  
  return loop(0, 1, n)  
}
```

Fig. 5(b)

**2006年8月実施
問題6 物理専門1
(1頁目／3頁中)**

- (1) 幅 a の、無限に深い1次元井戸型ポテンシャルに質量 m の粒子が束縛されている (Fig. 6(a)). 以下の問いに答えよ. 必要に応じて $\hbar = (h/2\pi) = 1.0 \times 10^{-34}$ Js (h はプランク定数) 及び電荷素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C を用いよ.
- (a) 粒子の n 番目の固有エネルギー E_n を求めよ. 井戸の底をエネルギーの基準とせよ.
- (b) $a = \sqrt{5}\pi$ nm, $m = (1/1.6) \times 10^{-31}$ kg とするとき, E_1 および E_2 を eV 単位で求めよ.
- (c) E_1 と E_2 の状態に対応する波動関数を図示せよ.

- (2) 有限高さの二重障壁に囲まれた幅 a の1次元井戸型ポテンシャル (量子井戸) がある (Fig. 6(b)). 以下の問いに答えよ. ただし i は虚数単位とする.

- (a) 1 個の粒子が左の障壁に左側から入射し, これを透過し, N 回の内部往復反射を経た後, 右の障壁を透過して井戸を出るものとする. 粒子に付随する波数 k の波が左の障壁を透過する確率振幅を t_L , 右の障壁で内部反射される確率振幅を $r_R = |r_R| \exp(i\rho_R)$, 左の障壁で内部反射される確率振幅を $r_L = |r_L| \exp(i\rho_L)$, 右の障壁を透過する確率振幅を t_R とする. ここに ρ_R, ρ_L は井戸の右端及び左端での反射に際しての位相変化である. $N=0, 1, 2, 3, \dots$ に対応する部分波をすべて足し合わせることで, 粒子が二つの障壁を透過する確率振幅 t が

$$t = \frac{t_L t_R \exp(ika)}{1 - r_L r_R \exp(2ika)} \quad (1)$$

で与えられることを示せ.

- (b) 井戸の内部を一往復した波が, 元の波と強め合う干渉を起こす時, 量子井戸の共鳴状態が生じる. この井戸における共鳴状態の位相条件を記せ.
- (c) 粒子が二つの障壁を透過する確率が

$$T = \frac{|t_L|^2 |t_R|^2}{(1 - |r_L| |r_R|)^2 + 4 |r_L| |r_R| \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2)$$

で与えられることを示せ. ただし $\phi = \rho_L + \rho_R + 2ka$ である.

- (d) (2)式において, $\sin \frac{\phi}{2} = 0$ となる位相条件の時, 透過率 T は極大を示す. この位相条件は, 粒子の入射エネルギーが量子井戸の共鳴状態のエネルギーの一つに一致する時に満たされることを示せ.

**2006年8月実施
問題6 物理専門1
(2頁目／3頁中)**

(e) 前問の条件が満たされる時, さらに $|t_L|^2 = |t_R|^2 = 1 - |r_L|^2 = 1 - |r_R|^2$ であれば, $T=1$ となることを示せ.

(1) Consider a particle with mass m confined within a one-dimensional potential well of width a and infinite depth (Fig. 6(a)). Answer the following questions. Use the reduced Planck's constant $\hbar = (h/2\pi) = 1.0 \times 10^{-34}$ Js and the electron charge $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, if necessary.

(a) Obtain the n_{th} energy eigenvalue E_n for this particle. Let the bottom of the well be the reference of the energy.

(b) Obtain E_1 and E_2 in units of eV for $a = \sqrt{5}\pi$ nm and $m = (1/1.6) \times 10^{-31}$ kg.

(c) Sketch the wavefunctions for the states E_1 and E_2 .

(2) Consider a one-dimensional potential well (quantum well) of width a , which is surrounded by a pair of barriers with finite heights (Fig. 6(b)). Answer the following questions. Let i be the imaginary unit.

(a) Assume that a particle is incident on the left barrier from the left, penetrates the barrier, experiences N internal round-trip reflections between the right and the left barriers, penetrates the right barrier and leaves the well. Let the probability amplitude for a wave with wave number k associated with the particle to penetrate the left barrier into the well be t_L , the probability amplitudes to be reflected by the right and the left barriers inside the well be $r_R = |r_R| \exp(i\rho_R)$ and $r_L = |r_L| \exp(i\rho_L)$, and the probability amplitude to penetrate the right barrier out of the well be t_R . Here, ρ_R and ρ_L are the phase shifts upon reflections at the right and the left boundaries, respectively. By summing up all the partial waves corresponding to $N=0,1,2,3,\dots$, show that the probability amplitude t for the particle to be transmitted across both barriers is given by

$$t = \frac{t_L t_R \exp(ika)}{1 - r_L r_R \exp(2ika)}. \quad (1)$$

(b) A resonant state within a quantum well occurs when a wave constructively interferes with itself after making a round trip within the well. Write down the phase condition for the resonant state in this well.

2006年8月実施
問題6 物理専門1
(3頁目／3頁中)

- (c) Show that the probability for the particle to transmit the pair of barriers is given by

$$T = \frac{|t_L|^2 |t_R|^2}{(1 - |r_L||r_R|)^2 + 4|r_L||r_R|\sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (2)$$

where $\phi = \rho_L + \rho_R + 2ka$.

- (d) In equation (2), the phase condition $\sin \frac{\phi}{2} = 0$ gives the maxima of T . Show that this condition is satisfied when the energy of the incident particle coincides with one of the energies of the resonant states within the well.

- (e) Assume that the previous condition is satisfied. Show that $T=1$ when

$$|t_L|^2 = |t_R|^2 = 1 - |r_L|^2 = 1 - |r_R|^2.$$

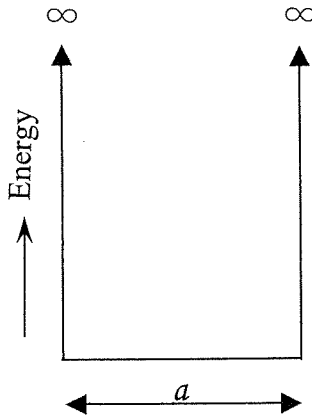


Fig. 6(a)

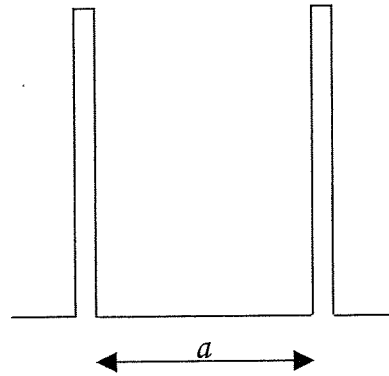


Fig. 6(b)

2006 年 8 月実施
問題 7 物理専門 2
(1 頁目 / 1 頁中)

複素変数 z の関数 $f(z) = \frac{\cos z}{(z - \pi)^2}$ を考え、次の間に答えよ。ただし、単一閉曲線 $z = 4e^{i\theta}$

($0 \leq \theta < 2\pi$) 上を正の向きにまわる積分路を C とし、 i は虚数単位である。

- (1) 関数 $\frac{f(z)}{z - \pi}$ の $z = \pi$ のまわりのローラン展開を求めよ。
- (2) 関数 $\frac{f(z)}{z - \pi}$ の孤立特異点 $z = \pi$ での留数を求めよ。
- (3) 複素積分 $\int_C \frac{f(z)}{z - \pi} dz$ を求めよ。
- (4) 関数 $f(z) \sin z$ の $z = \pi$ のまわりのローラン展開を求めよ。
- (5) 関数 $f(z) \sin z$ の孤立特異点 $z = \pi$ での留数を求めよ。
- (6) 複素積分 $\int_C f(z) \sin z dz$ を求めよ。

Consider a function $f(z) = \frac{\cos z}{(z - \pi)^2}$ of a complex variable z . Let C be a positively oriented contour $z = 4e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$). The imaginary unit is denoted by i . Answer the following questions.

- (1) Find the Laurent expansion of the function $\frac{f(z)}{z - \pi}$ about $z = \pi$.
- (2) Find the residue of the function $\frac{f(z)}{z - \pi}$ at the isolated singular point $z = \pi$.
- (3) Find the value of the contour integral $\int_C \frac{f(z)}{z - \pi} dz$.
- (4) Find the Laurent expansion of the function $f(z) \sin z$ about $z = \pi$.
- (5) Find the residue of the function $f(z) \sin z$ at the isolated singular point $z = \pi$.
- (6) Find the value of the contour integral $\int_C f(z) \sin z dz$.