平成 17 年 8 月 23 日（火）
13:00 〜 16:00

平成18年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

選択科目　先進電磁エネルギー工学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。4 題選択して解答せよ。解答は

問題 1 を（白色）の解答用紙
問題 2 を（赤色）の解答用紙
問題 3 を（青色）の解答用紙
問題 4 を（黄色）の解答用紙
問題 5 を（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 50 点であり、合計 200 点である。

● 問題用紙は表紙を含めて 11 枚である。

問題 1

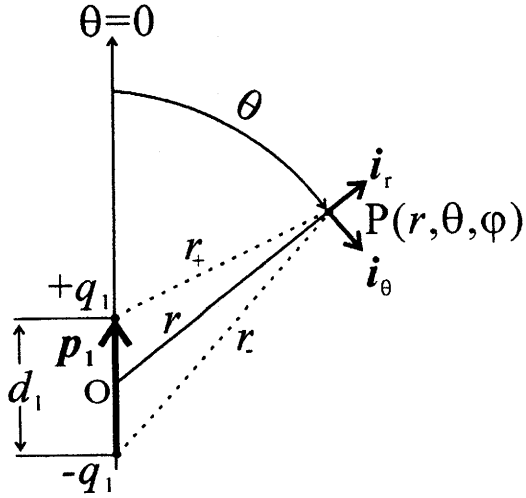


図 1

真空中に図 1 のように近接した 1 組の点電荷の対を考え、その電荷量をそれぞれ $+q_1$ および $-q_1$ とし、間隔を d_1 とする。点電荷対の中心を球座標系 (r, θ, φ) の原点にとり、座標 θ の基準軸 ($\theta = 0$ 方向) を図のように定める。原点から距離 r が点電荷間の間隔 d_1 に比べて十分大きい ($r >> d_1$) ような遠方の点を点 $P(r, \theta, \varphi)$ とする。ここで球座標における基本ベクトルを $\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta, \boldsymbol{i}_\varphi$ とし、ハミルトンの演算子は

$$\nabla = \boldsymbol{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

とする。以下の問に答えよ。

問 1　$+q_1$ および $-q_1$ なる正、負の点電荷から点 P までの距離をそれぞれ r_+ および r_- とし、$(d_1/r)^2$ 以上の高次の微小量を無視する。以下の空欄を埋めよ。

$r_+ =$ (1)

$r_- =$ (2)

したがって、点 P に生ずる電位 ϕ は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_+} - \frac{q_1}{r_-}\right) = \text{(3)}$$

電気双極子能率の大きさを $p_1 = q_1 d_1$ とし、かつ $d_1/r \to 0$ の極限で (3) は

$\phi =$ (4)

となる。

問 2　問 1 で求めた電位 ϕ の等電位線の概略を点線で図示せよ。
またそれをもとに電気力線の概略図を実線と矢印で書き加えよ。

p_1 ↑

問３　点Ｐに新たに電気双極子能率の大きさ $p_2 = q_2 d_2$ である電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ を図２のように中心を点Ｐに、方向を $\boldsymbol{i}_\mathrm{r}$ 方向（または $\boldsymbol{i}_\theta$ 方向）に向けて置く場合、$\boldsymbol{p}_2$ に生ずるトルク $\boldsymbol{T}$ を求める。以下の空欄を埋めよ。

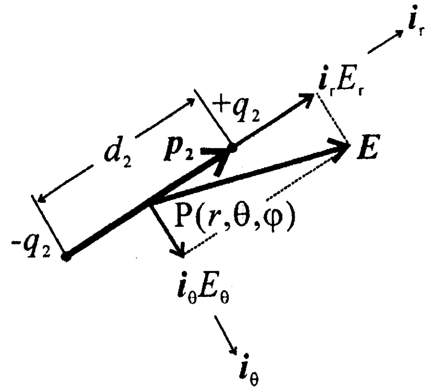


図２

電気双極子 $\boldsymbol{p}_1$ が点Ｐに作る電界 $\boldsymbol{E}$ はハミルトンの演算子∇と (4) を用いて、電界 $\boldsymbol{E}$ の各方向成分を求めると

$$E_r = \boxed{\quad (5) \quad}$$

$$E_\theta = \boxed{\quad (6) \quad}$$

$$E_\varphi = \boxed{\quad (7) \quad}$$

であるから電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ の方向が図２のように $\boldsymbol{i}_\mathrm{r}$ 方向にある場合、トルク $\boldsymbol{T}$ の大きさ T は電気双極子能率の大きさ p_1 と p_2 を用いて

$$T = \boxed{\quad (8) \quad}$$

である。
同様に電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ が $\boldsymbol{i}_\theta$ 方向を向く場合、$\boldsymbol{T}$ の大きさ T は

$$T = \boxed{\quad (9) \quad}$$

である。したがって、電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ が点Ｐで電界 $\boldsymbol{E}$ より受けるトルク $\boldsymbol{T}$ は、ベクトル表記すると、いずれの場合も以下のように表現でき、一般化される。

$$\boldsymbol{T} = \boxed{\quad (10) \quad}$$

問題２

以下の文章を読んで、問１～問３に答えよ。

熱平衡状態にある気体中の粒子（以下、原子と仮定）の速度分布関数fは以下のように表される。ただし、速度$\mathbf{v}$のx、y、z成分をそれぞれ、v_x、v_y、v_zとする。

$$f(v_x, v_y, v_z) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

ここで、nは原子密度、kはボルツマン定数、Tは温度、mは原子の質量である。この時、$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) = n$である。この関数$f$を $\boxed{\quad(1)\quad}$ の速度分布関数と呼ぶ。速度の大きさ v を、$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ と定義し、v に関する速度分布関数 $F(v)$を求めると**(a)** $F(v) =$ $\boxed{\quad(2)\quad}$ となる（ただし、$\int_0^{\infty} F(v)dv = n$）。

速度の大きさ v の平均値<v>は、積分の形で表すと<v> = $\boxed{\quad(3)\quad}$ となり、この式を解くと、<v> = $\boxed{\quad(4)\quad}$ となる。また原子の運動エネルギーE（$= \frac{1}{2} m v^2$）を変数とするエネルギー分布関数 $G(E)$ は、$G(E) =$ $\boxed{\quad(5)\quad}$ と表される（ただし、$\int_0^{\infty} G(E) dE = n$）。

次にこの気体が壁に及ぼす圧力Pについて考察する。壁は、x方向に垂直に存在すると仮定し（図参照）、気体中の原子は壁表面で鏡面反射し、また壁との衝突は弾性衝突であると仮定する。この場合に、x方向の速度の大きさ v_x（>0）で壁に入射した原子が壁に与えるx方向の力積I_xは、$I_x =$ $\boxed{\quad(6)\quad}$ である。また、x方向に垂直な壁に、単位面積、単位時間あたり衝突する原子数（フラックス）Γは以下の式で表される。

$$\Gamma = \int_0^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z) v_x$$

これを解いて、Γを求めると**(b)** $\Gamma = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ となる。１個の原子が壁に与える力積

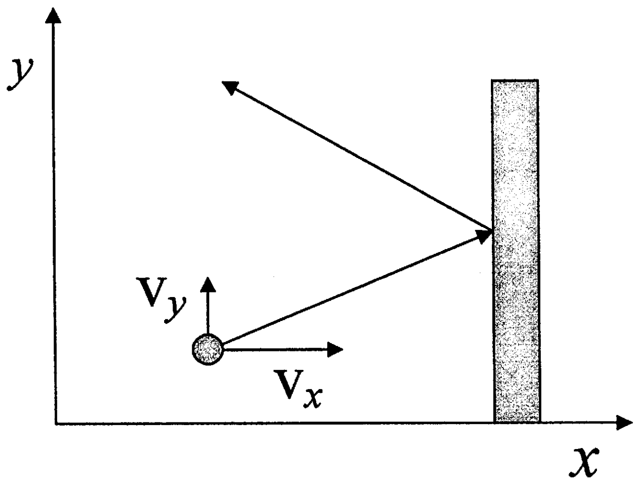
I_xを考慮すると壁に与えられる圧力P（単位面積、単位時間に壁に与えられる力積の総和）は、積分の形で表すと P ＝ $\boxed{\quad(7)\quad}$ となり、この式を解くと P ＝ $\boxed{\quad(8)\quad}$ となる。この気体の温度Tを下げると、液相と気相が混在する平衡状態となった（気相中では原子で存在すると仮定)。この時、液相からの蒸発フラックス（単位面積、単位時間あたりの蒸発原子数）をΦ_Eとする。この時の気相の圧力PをΦ_Eと温度Tを含む式で表すと、P＝ $\boxed{\quad(9)\quad}$ となる。ただし、原子が気相から液相に入射する際の反射率は０とする。

問１　(1)から(9)までに、適当な語句、もしくは数式を入れよ。

問２　下線部(a)のF(v)の関数形の概略をグラフで示せ。

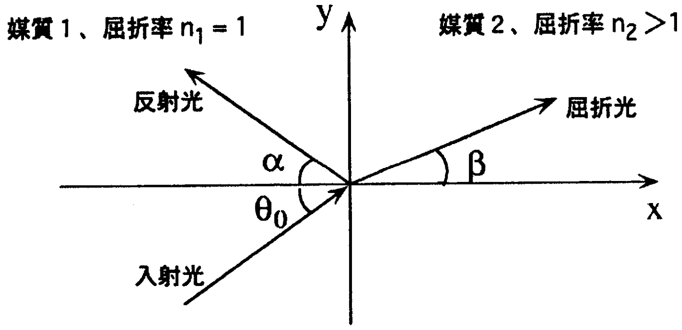
問３　フラックスΓが下線部(b)の様に表されることを示せ。

必要ならば $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$、$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ の公式を用いても良い。



問題３

図のように、媒質１から媒質２に入射角θ_0で入射光を投入した場合を考える。ただし媒質１の屈折率を $n_1 = 1$、媒質１中の光の速さを c、入射光の周波数を f、媒質２の屈折率を $n_2\,(>1)$ とする。



下記の問い (1) ~ (24) に関し、空欄には当てはまるべき適当な数式を、また二択問題には対応する語句・数字を選択し回答せよ。

媒質１での光の波長は ［ (1) ］、

媒質２での光の速さは ［ (2) ］、

媒質２での光の波長は ［ (3) ］ と表せる。

反射光の反射角は $\alpha=$ ［ (4) ］ となる。

屈折光の屈折角βと入射角θ_0とは、$n_1 \sin\theta_0=$ ［ (5) ］ の関係があり、屈折角βは、入射角より (6) {　大きい、　小さい　}。

媒質 (7) {　1、　2　} から、媒質 (8) {　1、　2　} に光を投入した場合には、入射角が、［ (9) ］ 以上になると光は全反射する。

図の屈折光の電場成分が、媒質２中で記述される波動方程式

$$\text{(A)}\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,y,t)-\frac{c^2}{\varepsilon_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,y,t)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}E(x,y,t)\right]=0$$

を満たす平面波解

$$\text{(B)}\quad E(x,y,t)=E_0\cos(k_x x+k_y y-\omega t)$$

によって与えられるものとする。ただし、E_0は電場の振幅で一定、ε_2は媒質２の比誘電率（$\varepsilon_2 > 1$）、また k_x、k_y は、それぞれ平面波の波数 $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ の x 成分と y 成分、ωは角周波数である（k_x、k_y、ωは定数）。

波数 k_y と k_x との比は、屈折角βを用いると、$\dfrac{k_y}{k_x}=$ (10) と表せる。

媒質２の屈折率 n_2 と比誘電率 ε_2 との関係は、$n_2=$ (11) である。また、

屈折光の角周波数ωを入射光の周波数 f を用いて表すとω＝ (12) となる。

上記の平面波解を波動方程式に代入し、媒質２中の角周波数ωと波数ｋとの関係を求めると

(13) となる。

平面波解（B）の位相が一定な波面の速度、すなわち媒質２中の位相速度は、

(14) となる。

平面波解（B）で与えられ、振幅が同じ(E_0)で波数の少しだけ異なるほぼ並行に伝播する２つの波の合成波の包絡線は、空間的にも時間的にもゆっくり変化する。２つの波数を $k_a=\sqrt{k_{ax}^2+k_{ay}^2}$、$k_b=\sqrt{k_{bx}^2+k_{by}^2}$、$|k_a-k_b|\ll|k_a|,|k_b|$ とすると、この包絡線は

(15) cos [((16)) x + ((17)) y - ((18)) t] と表せる。

したがって、比誘電率 ε_2 が、光の周波数によらず一定とすると、合成波の包絡線の伝播速度、すなわち群速度は、 (19) となる。

媒質２中の比誘電率 ε_2 が光の角周波数に依存し、近似的に

(C) $\varepsilon_2=1+\chi\omega$

で与えられるとする。ただし、$\chi>0$、$|\chi\omega|<1$ とする。

比誘電率が（C）式で与えられる媒質での角周波数ωと波数ｋとの関係を求めると

(20) となる。

比誘電率が（C）式で与えられる媒質２中の光の群速度 $\partial\omega/\partial k$ を、光の角周波数ωで表すと、

(21) となる。したがって、この場合には、群速度は位相速度より

(22) ｛ 大きく、 小さく ｝なる。

比誘電率が（C）式で与えられ、位相速度が周波数に依存する分散媒質の境界面に、白色光を入射すると、周波数の高い、すなわち波長の短い光ほど位相速度が、(23) ｛ 大きい、 小さい ｝ため、短波長の光ほど屈折角βは、(24) ｛ 大きく、 小さく ｝、波長によって白色光は分散する。

問題4

次の文章の空欄を埋めて、最後の設問に答えよ。

運動する質量mの自由粒子の波束の位置xと時刻tに関する波動関数$\psi(x,t)$は運動量pによって次のように表せることが知られている。

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dp\, f(p-p_0)\exp\left(\frac{i}{\hbar}(px-W(p)t)\right) \qquad \text{(a)}$$

ここで$W(p)$は運動量pを持つ粒子のエネルギーである。また$f(p-p_0)$は運動量空間における粒子のフーリエ振幅であり、今fはガウス関数として広がりΔpとして

$$f(p-p_0)=a\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2(\Delta p)^2}\right) \qquad \text{(b)}$$

で与えられるとする。ところで$W(p)$は自由粒子の場合$W(p)=\boxed{(1)\qquad}$と書けるので、$\left.\frac{dW}{dp}\right|_{p=p_0}=\boxed{(2)\qquad}=v_g$、$\left.\frac{d^2W}{dp^2}\right|_{p=p_0}=\boxed{(3)\qquad}=\alpha$と書ける。

ここでv_gは実数、αは正の定数となる。着目している粒子は運動量p_0を中心に微小な幅Δpだけ考えればよいので$(p-p_0)$に対して2次の項までテーラー展開すると、v_gとαを用いて

$$W(p)=\boxed{(4)\qquad}+(p-p_0)\cdot\boxed{(5)\qquad}+\frac{(p-p_0)^2}{2}\cdot\boxed{(6)\qquad}$$

と書ける。これを式(a)に代入し、$p-p_0=k$とおいて整理し、k、v_g、及びαを用いてψを書くと、

$$\psi(x,t)=a\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\boxed{(7)\qquad}\right)\right)\times\int_{-\infty}^{+\infty}dk\exp\left(\boxed{(8)\qquad\qquad}\right)$$

と表すことができる。この式の積分記号の外側は正弦波動を表している。この積分を実行し$|\psi(x,t)|^2$を求めると

$$|\psi(x,t)|^2 = 2\pi|a|^2(\Delta p)^2 \frac{\exp\left(-\left(\dfrac{x-v_g t}{\dfrac{\hbar}{\Delta p}\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 t^2}{\hbar^2}\Delta p^4}}\right)^2\right)}{\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2 t^2}{\hbar^2}\Delta p^4}}$$

となる。この式は式(a)と式(b)により与えられた質量mの自由粒子の確率密度である。この式から自由粒子の空間的広がりが、時間と共にどのように変化していくかを定性的に説明せよ。

説明：

(9)

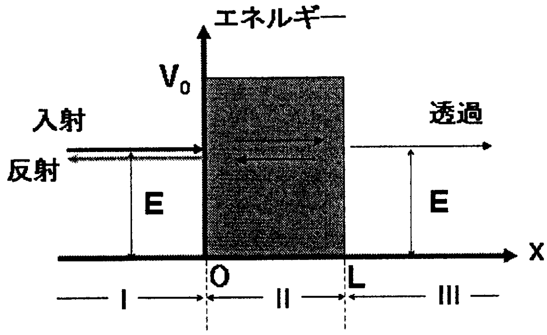
問題5

1次元のポテンシャル V(x)が与えられたとき、質量mの粒子に対する波動関数を与えるシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V(x)\Psi$$

である。V(x)=0(一定)のときの自由粒子の波動関数は $\Psi(x,t)=e^{i(px-Et)/\hbar}$ で与えられる。但し p は運動量、E は一定のエネルギー、$\hbar$ はプランク定数とする。

今、右図のように幅が L, 高さが V_0 の一次元ポテンシャル障壁を考える。障壁の左側から一定のエネルギーE（$<V_0$）の粒子（入射波）が進行し障壁に衝突し、一部がはじき返され一部は障壁を通り抜けて領域 III に達して透過波になるとする。以下の問に答えよ。



問1． エネルギーE が一定状態（定常状態）の一般的な波動関数Ψ(x, t)の空間部分ψ(x)を決定する時間に依存しないシュレディンガー方程式を示せ。

(1)

問2． 障壁のポテンシャルエネルギーより小さな粒子エネルギーでも障壁を透過することができる現象または効果を何と言うか。

(2)

問3． それぞれの領域（I, II, III）における波動関数ψ(x)を示せ。但し領域 I にける入射、反射波の振幅定数は A, と B、領域 III における透過波の振幅定数を C、領域 II における振幅定数を F と G とせよ。

領域 I ： $\psi_{I}(x)=$ (3)

領域 II： $\psi_{II}(x)=$ (4)

領域 III： $\psi_{III}(x)=$ (5)

問４．領域ＩとII(x=0)及びIIとIII(x=L)における境界条件（関数と導関数の値の連続性）よりA, B, C, F, Gの間に成り立つ４つの関係式を示せ。

(6)

(7)

(8)

(9)

問５．上記４つの関係式よりＦとＧを消去して、障壁ポテンシャルに於ける反射率$|B|^2/|A|^2$と透過率$|C|^2/|A|^2$を求めよ。但し$\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$

$|B|^2/|A|^2 =$ (10)

$|C|^2/|A|^2 =$ (11)

問６．元素がα粒子を放出して別の元素に変わるα崩壊の半減期は、α粒子のエネルギーに依存することを定性的に説明せよ。（図等を使って説明してもよい。）

(12)