

問題 1 1 A [静電界・定常電流]

I

- (1) 金属棒を含む同心円の円筒形 (半径 r , 長さ 1) の部分にガウスの法則を適用する。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

ここで, \mathbf{n} は微小面積 dS の法線ベクトルである。この円筒形の上面と下面では, 電界 \mathbf{E} と法線ベクトル \mathbf{n} は直交するので積分はゼロになる。従って,

$$E(r) \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R).$$

- (2) 設問(1)の結果を用いると,

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right).$$

- (3) A, B 間の電位差 ϕ は,

$$\phi = \int_R^{a-R} E(x) dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{a-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{a-R}{R} - \ln \frac{R}{a-R} \right) = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-R}{R}.$$

単位長さあたりの静電容量 C は,

$$C = \frac{\lambda}{\phi} = \pi\epsilon_0 \left(\ln \frac{a-R}{R} \right)^{-1} \quad \text{または, } a \gg R \text{ を考慮して, } C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(a/R)}.$$

II

$$(1) \quad \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right\}.$$

- (2) $r \gg d$ より, 電位 $\phi(x, y, z)$ の中括弧の中の式は以下のように近似できる。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 \mp 2dz}} = r^{-1} \left(1 \mp \frac{2dz}{r^2} \right)^{-1/2}$$

一方, $2dz/r^2 \ll 1$ なので, 近似式として, $\left(1 \mp \frac{2dz}{r^2} \right)^{-1/2} \cong 1 \pm \frac{dz}{r^2}$ が成り立つ。したがって,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d)^2}} = r^{-1} \left(1 \pm \frac{dz}{r^2} \right)$$

$$\therefore \phi(x, y, z) = \frac{2qdz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qdz}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

1/2

問題11 B [電磁誘導・電磁波]

問I. 解答

(1) コイル面が磁界 H の方向と角度 θ をなすとき, コイルの鎖交磁束は

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 H S_0 \cos \theta$$

$$\because \theta = \omega t$$

$$\therefore \Phi = \mu_0 H S_0 \cos(\omega t)$$

(2) (a) コイルに生じる起電力が微小ギャップ AB 間の電圧になる. $H = H_0$ のとき,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 H_0 S_0 \omega \sin(\omega t)$$

(b) $H = H_0 \sin(\omega t)$ のとき,

$$\Phi = \mu_0 H_0 S_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \mu_0 H_0 S_0 \sin(2\omega t)$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 H_0 S_0 \omega \cos(2\omega t)$$

問題11B

2/2

問 II. 解答

(1) 入射波の電界ベクトルは,

$$\mathbf{E}_{i1} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \exp\{-jk_0(-x \cos \theta_{i1} + z \sin \theta_{i1})\}$$

(2) 入射波の磁界ベクトルは, 平面波であることから,

$$\mathbf{H}_{i1} = \frac{1}{\eta_1} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}_{i1} \quad \text{ただし, } \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_{i1} + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_{i1}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

よって,

$$\mathbf{H}_{i1} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (-\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} \cos \theta_{i1} + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \sin \theta_{i1}) \exp\{-jk_0(-x \cos \theta_{i1} + z \sin \theta_{i1})\}$$

$$\therefore \mathbf{H}_{i1} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (-\hat{\mathbf{z}} \cos \theta_{i1} - \hat{\mathbf{x}} \sin \theta_{i1}) \exp\{-jk_0(-x \cos \theta_{i1} + z \sin \theta_{i1})\}$$

(3) 境界において, 電界, 磁界とも, 接線成分が連続なので,

$$\text{電界の境界条件: } \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{E}_{i1} + \mathbf{E}_{r1} - \mathbf{E}_{t1}) = \mathbf{0}$$

$$\text{磁界の境界条件: } \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{r1} - \mathbf{H}_{t1}) = \mathbf{0}$$

(4)

スネルの法則より,

$$\text{面①において, } k_0 \sin \theta_{i1} = k_1 \sin \theta_{t1}$$

$$\text{面②において, } k_1 \sin \theta_{t2} = k_0 \sin \theta_{i2}$$

$$\theta_{i1} = \theta_{i2} \text{ なので,}$$

$$k_0 \sin \theta_{i1} = k_0 \sin \theta_{i2}$$

$$\therefore \theta_{i1} = \theta_{i2}$$

問題 12 A [交流回路・アナログ電子回路]

I

$$(1) I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C_x})} \text{ より } |I_1| = \frac{|E|}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C_x})^2}} \text{ となる。}$$

C_x を変えて I_1 の最大値を求めるには上式の分母が最小となる時の C_x を求めればよい。

$$\text{従って, } \omega L - \frac{1}{\omega C_x} = 0 \text{ より } C_x = \frac{1}{\omega^2 L} \text{ となる。}$$

$$(2) I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C_x})} \text{ より } I_1 = \frac{(R_1 + R_2 - j(\omega L - \frac{1}{\omega C_x}))E}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C_x})^2} \text{ である。}$$

$$I_1 \text{ の位相が } E \text{ の位相より } 60^\circ \text{ 進むには, } \tan(60^\circ) = \frac{-(\omega L - \frac{1}{\omega C_x})}{R_1 + R_2} \text{ でなければならない。}$$

$$\text{ゆえに, } C_x = \frac{1}{\omega^2 L + \sqrt{3}\omega(R_1 + R_2)}$$

$$(3) \text{ブリッジの平衡条件より } R_x(R_2 + \frac{1}{j\omega C_x}) = \frac{1}{j\omega C_1}(R_1 + j\omega L_1) \text{ が得られる。}$$

$$\text{整理すると, } R_x R_2 - j \frac{R_x}{\omega C_x} = \frac{L}{C_1} - j \frac{R_1}{\omega C_1} \text{ となり,}$$

$$R_x = \frac{L}{R_2 C_1}, \quad C_x = \frac{R_x}{R_1} C_1 = \frac{L}{R_1 R_2} \text{ を得る。}$$

問題12A

II 解答

2/2

- 1) イマジナリーショートの場合より、電流は $I = V_i/R$

$$V_o = -\frac{R_s + 1/j\omega C}{R} V_i$$
$$G = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_s}{R} + j\frac{1}{\omega CR}$$

- 2) G の実数部が十分小さい、すなわち $R_s/R \ll 1/\omega CR$ より $\omega \ll 1/CR_s$

- 3) 電流は $i = v_i/R$ なので

$$\frac{v_i}{R} = A \exp(-Kv_o)$$
$$-Kv_o = \ln\left(\frac{v_i}{RA}\right)$$
$$v_o = -\frac{1}{K} \{\ln(v_i) - \ln(RA)\}$$

1/5

I

- (1) S オン時の電圧方程式は次式で与えられる。

$$V_s = Ri_C(t) + v_C(t) = Ri_C(t) + \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

上式を $v_C(0) = 0$ の初期条件の下で解けば

$$i_C(t) = \frac{V_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad v_C(t) = V_s \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

- (2) 電力は単位時間当たりの電気エネルギーで定義されているので、 $t=0$ から ∞ で電力を積分すれば、それぞれのエネルギーを計算することができる。

電源から回路へ送った電力 P_s は $P_s(t) = V_s i_C(t)$ であるから、 W_s は

$$W_s = \int_0^{\infty} P_s(t) dt = \int_0^{\infty} V_s i_C(t) dt = \frac{V_s^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = CV_s^2$$

一方、回路で損失したエネルギー W_L は抵抗 R で消費したエネルギーであるから、

$$W_L = \int_0^{\infty} P_L(t) dt = \int_0^{\infty} Ri_C^2(t) dt = R \frac{V_s^2}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} CV_s^2$$

問題 12 B. 電気回路・電子回路 II (解答例)

オペアンプ回路に関する問題で、通常電子回路の範囲では扱われない回路であるため、問題文において解法を導入している。

- (1) オペアンプが理想でありオペアンプの入力端子には電流が流れないことから、 V_+ は V_1 を R と C で分圧した電圧となる。

したがって

$$V_+ = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega CR} V_1 \quad \dots (\text{答})$$

- (2) オペアンプが理想でありオペアンプの入力端子には電流が流れないことから、 V_- の節点でキルヒホッフの電流則を適用すると

$$\frac{V_- - V_1}{R_F} + \frac{V_- - V_2}{R_F} = 0$$

したがってこれを整理すると

$$V_- = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \quad \dots (\text{答})$$

- (3) オペアンプが理想であるため $V_+ = V_-$ が成立する。

したがって問 (1) と (2) の結果より

$$\frac{1}{1 + j\omega CR} V_1 = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$$

となる。伝達関数は入力電圧と出力電圧の比であるので、伝達関数 $T_2(j\omega)/T_1(j\omega)$ は上式を整理して

$$\frac{T_2(j\omega)}{T_1(j\omega)} = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad \dots (\text{答})$$

- (4) 問 (2) の解答の伝達関数の振幅特性および位相特性を求めればよい。

振幅特性は

$$\left| \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} \right| = \frac{|1 - j\omega CR|}{|1 + j\omega CR|} = 1 \quad \dots (\text{答})$$

位相特性は

$$\begin{aligned} \angle \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} &= \angle (1 - j\omega CR) - \angle (1 + j\omega CR) \\ &= \tan^{-1}(-\omega CR) - \tan^{-1}(\omega CR) \\ &= -2 \tan^{-1}(\omega CR) \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

平成 19 年度大学院工学研究科（博士前期課程）専門試験問題解答例

問題 14 計測・制御・数理 I

【出題のねらい】

制御工学の基礎知識である制御対象の特性の把握に関して、微分方程式によるモデル化、ラプラス変換による表現、伝達関数の導出などの理解度を確認する。

- I 図 1 に示す機械系について考える。図中、質量 M_1 [kg] の物体は、ばね定数 K_1 [N/m] のばねで壁面と、粘性摩擦係数 B [N・s/m] のダンパによって質量 M_2 [kg] の物体と結合されている。また、図中の質量 M_2 [kg] の物体は、ばね定数 K_2 [N/m] のばねで壁面にも結合されており、 $f(t)$ [N] は質量 M_1 [kg] の物体に働く外力をあらわす。さらに、質量 M_1 [kg] の物体の変位を $y_1(t)$ [m]、質量 M_2 [kg] の物体の変位を $y_2(t)$ [m] とする。

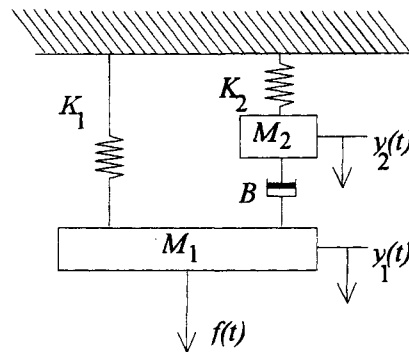


図 1

- (1) 機械系の運動を物体の変位 y_1, y_2 に関する連立微分方程式で書け。ただし、物体に加わる外力 f 、物体の変位 y_1, y_2 （ばねの自然長からの伸縮）は図中の矢印の方向（重力の作用方向）を正とし、物体の回転、ばね、ダンパの質量は無視するものとする。

【解答例】

物体 M_1 と物体 M_2 には図中の矢印の方向（重力の作用方向）に重力が働くことを考慮する。そこで、重力加速度を $g[m/s^2]$ とする。これを用い、以下で物体 M_1 と物体 M_2 に働く力の釣り合いから運動方程式を作成すると、物体 M_1 に関して

$$M_1 \ddot{y}_1 + B (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_1 y_1 = M_1 g + f \quad (a)$$

を得る。同様に物体 M_2 に関して

$$M_2 \ddot{y}_2 + K_2 y_2 = B (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + M_2 g \quad (b)$$

を得る。

なお、表記の簡単化のため、単位や、時間関数の(t)を省略した。

問題14

2/5

(2) 上の設問1で求めた機械系の運動方程式をラプラス変換した式を書け。さらに、運動に関する初期値を零として、系に働く力と変位 y_1, y_2 との関係を示すブロック線図を作成せよ。

【解答例】

物体 M_1 と物体 M_2 に作用する重力は一定（ステップ関数）であることに注意する。
さらに、微分に関するラプラス変換の公式

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = s\mathcal{L}[x] - x(0) \quad (c)$$

を先に得られた(a),(b)式に適用すると、
(a)式より

$$M_1(s^2 Y_1 - s y_1(0) - \dot{y}_1(0)) + B(s Y_1 - y_1(0) - s Y_2 + y_2(0)) + K_1 Y_1 = M_1 g \frac{1}{s} + F \quad (d)$$

となる。また(b)式をラプラス変換すると

$$M_2(s^2 Y_2 - s y_2(0) - \dot{y}_2(0)) = B(s Y_1 - y_1(0) - s Y_2 + y_2(0)) + M_2 g \frac{1}{s} \quad (e)$$

となる。

なお、ラプラス変換された変数の (s) を省略した。

(d),(e)式で初期値を零におき、ブロック線図で表すため、式を変形する。

(d)式より

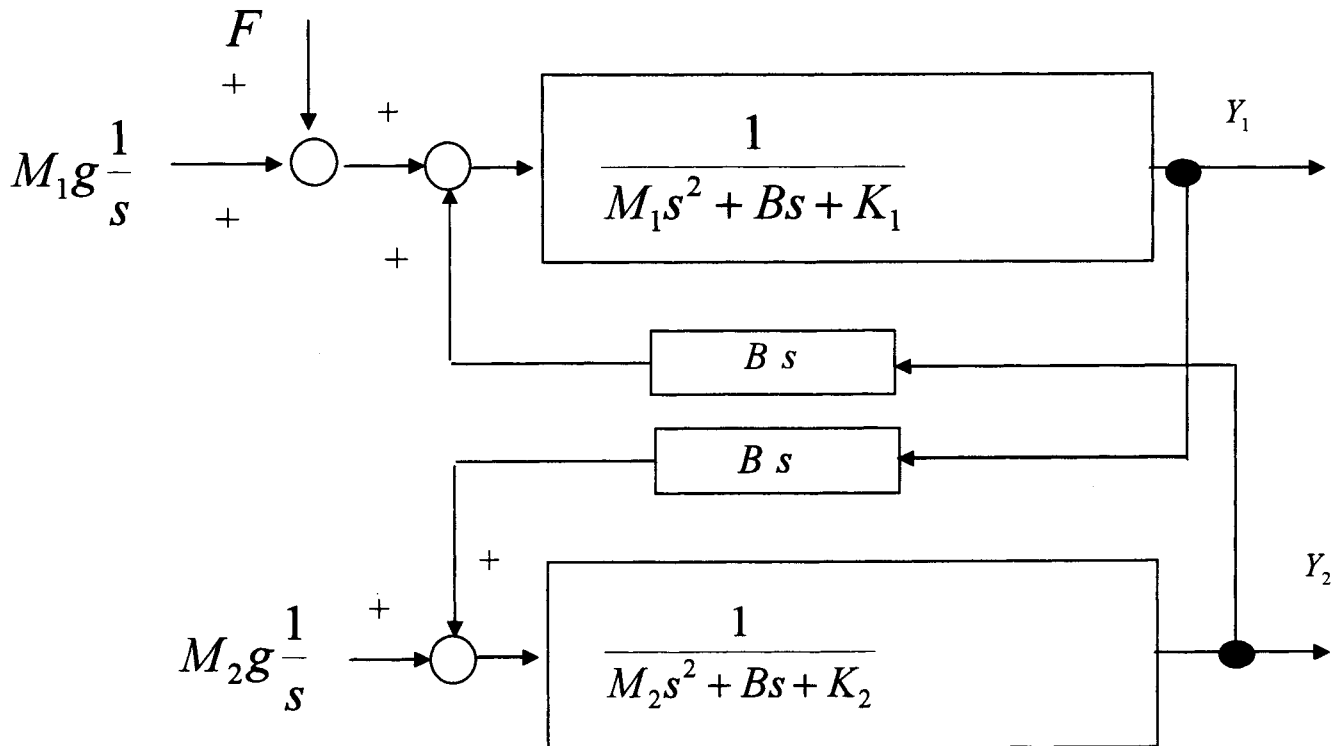
$$Y_1 = \frac{1}{M_1 s^2 + B s + K_1} (B s Y_2 + M_1 g \frac{1}{s} + F) \quad (f)$$

(e)式より

$$Y_2 = \frac{1}{M_2 s^2 + B s + K_2} (B s Y_1 + M_2 g \frac{1}{s}) \quad (g)$$

を得る。(f),(g)式はそれぞれ、 Y_2 と $M_1 g \frac{1}{s}$, F , Y_1 と $M_2 g \frac{1}{s}$ を入力とする伝達関数により出力 Y_1 と Y_2 が定まる特性を表している。これをブロック線図で表すと、図 2 のようになる。

なお、ラプラス変換された変数の (s) を省略した。



- (3) 質量 M_1 の物体に加わる外力 $f(t)$ [N]を入力，質量 M_1 の物体の変位 $y_1(t)$ [m]を出力とする伝達関数 $G(s)$ を求めよ。

質量 M_1 の物体に加わる外力 $f(t)$ [N]を入力，質量 M_1 の物体の変位 $y_1(t)$ [m]を出力とする伝達関数を求めるには，(f),(g)式において重力に関する力を無視し，変数 Y_2 を消去すれば良い。

そこで，(f)式に，(g)式を代入して Y_2 を消去してまとめると，伝達関数 $G(s)$ は次式のように求まる。

$$G(s) = \frac{M_2 s^2 + Bs + K_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1 + M_2)Bs^3 + (M_1 K_2 + M_2 K_1)s^2 + (K_1 + K_2)Bs + K_1 K_2} \quad (h)$$

なお，以上の記述で枠はそれぞれの問いに対する解をあらわす。

問題 1 4 計測・制御・数理

II 解答例

$$(1) U(s) = L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_1^2 e^{-st} dt = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s})。よって L\{y(t)\} = G(s)U(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(3s+1)}。 \square$$

$$(2) R(s)から Y(s)への伝達関数は $G_{yr}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$ 。 $D(s)から Y(s)への伝達関数は $G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}$ 。$$$

$$\text{システムの線形性より、} Y(s) = G_{yr}(s)R(s) + G_{yd}(s)D(s) = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}\{C(s)R(s) + D(s)\}。 \square$$

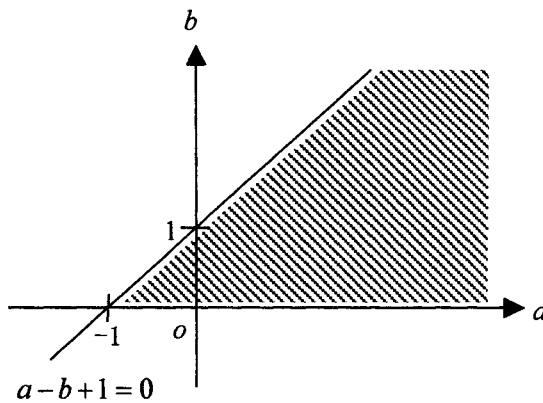
$$(3) E(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)}R(s) = \frac{1}{1+\frac{as+b}{s} \cdot \frac{1}{s^2+s+1}}R(s) = \frac{s^3+s^2+s}{s^3+s^2+(a+1)s+b}R(s)。被制御量が時刻とともに目$$

標値に収束するための必要十分条件は、偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$ が時刻とともに 0 に収束することである。そのための必要条件として、この閉ループシステムが安定でなければならない。フルビッツの安定判別法を用いると、伝達関数の分母多項式の最高次の係数が正であるので、安定となる条件は

$$H_1 = 1 > 0 \text{ かつ } H_2 = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = a-b+1 > 0 \text{ かつ } H_3 = \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = bH_2 > 0。よって a-b+1 > 0 \text{ かつ } b > 0。$$

また、 $b \neq 0$ のとき、 $R(s) = \frac{r_0}{s}$ とすると閉ループシステムが安定であれば $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$ とな

り、 $e(t)$ は時刻とともに 0 に漸近する。したがって求める条件は $a-b+1 > 0$ かつ $b > 0$ となる。この範囲を図示すると次の図の斜線部分となる。ただし、境界は含まない。



□

問題14

5/5

問題 14 III 解答例

出題意図：平均，分散，相関係数などの基本的な量を計算出来るかどうか，また，確率変数間の確率的な独立性の定義と使い方を了解しているかどうかを問う．

[1]

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} 2y dy = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^1 2y dy = \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

[2]

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} 2y dx = 2y \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ が成立するため， X と Y とは確率的に独立である．

[3]

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot 2y dy = \frac{2}{3} \\ \text{Var}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y)dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

[4] X と Y とが確率的に独立であることに注意する．

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + aY] &= \text{Var}[X] + a^2 \text{Var}[Y] \\ \text{Cov}[X + aY, Y] &= E[(X + aY - E[X + aY])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X] + a(Y - E[Y]))(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])(Y - E[Y]) + a(Y - E[Y])^2] \\ &= a \cdot \text{Var}[Y] \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \rho(X + aY, Y) &= \frac{a \cdot \text{Var}[Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] + a^2 \cdot \text{Var}[Y]} \sqrt{\text{Var}[Y]}} = a \cdot \sqrt{\frac{\text{Var}[Y]}{\text{Var}[X] + a^2 \cdot \text{Var}[Y]}} \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{\lambda^2}{18 + a^2 \lambda^2}} \end{aligned}$$

問題15

1/4

I

解答例

A1. 出題の意図：Lagrange 形式と力学の基礎知識の理解を試験する。

- (1) 運動エネルギーは $K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ 、ポテンシャルエネルギーは $U = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} bx^3$ であるから、ラグランジアン L は次式で与えられる。

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} bx^3.$$

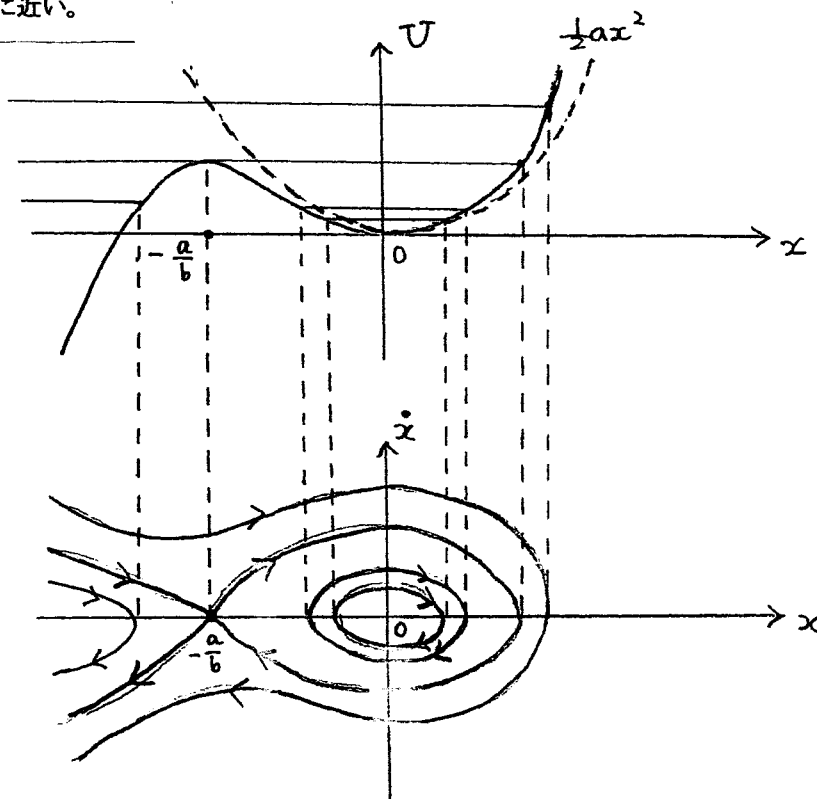
ラグランジュの方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

より運動方程式は次のように与えられる。

$$m \ddot{x} = -ax - bx^2.$$

- (2) $x=0$ の付近では、フックの法則に従う線型の復元力のみを考えればよい。したがって、質点は、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$ の単振動を行う。
- (3) つぎの図のような、初期条件によって決まる軌道を描く。上で見たように、原点近くでは、軌道は楕円軌道に近い。



問題15

2/4

I

A2. 出題の意図：剛体の力学の基礎知識の理解を試験する。

- (1) 円板の中心を通る軸に関する慣性モーメントは

$$\int_0^R r^2 M \frac{2\pi r}{\pi R^2} dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2$$

である。したがって、取り付けられた軸に関する慣性モーメント I は以下ようになる。

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + Mh^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + h^2 \right).$$

- (2) 運動方程式は次式で与えられる。

$$I \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta.$$

ここで θ はつりあいの位置からの回転角である。

- (3) 微小振動の場合の運動方程式は

$$I \ddot{\theta} = -Mgh \theta$$

と書けるので、周期 T は以下の式で与えられる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{R^2}{2h} + h \right)}.$$

- (4) 上で求めた周期 T を最小にする h は、条件 $\frac{dT}{dh} = 0$ より

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

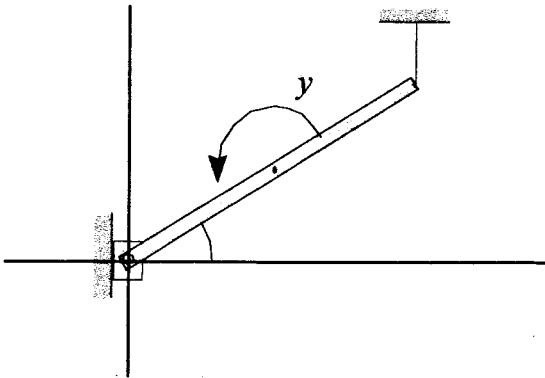
となる。

問題15

【力学 ~~★~~ 解答例】

Ⅱ

1. 糸が切断された直後の支持点 O における反力を O_x, O_y , 重心 G の加速度を a_x, a_y , 重心回りの角加速度を α とすると, 運動方程式は



$$ma_x = O_x,$$

$$ma_y = O_y - mg,$$

$$I_G \alpha = -\frac{1}{2} O_y l \cos \theta + \frac{1}{2} O_x l \sin \theta$$

で表される. 一方, 点 O の加速度に対して

$$a_{Ox} = a_x + \frac{\alpha l}{2} \sin \theta = 0,$$

$$a_{Oy} = a_y - \frac{\alpha l}{2} \cos \theta = 0$$

が成り立たなければならない. よって,

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2} m l g \cos \theta}{I_G + \frac{m l^2}{4}} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta,$$

$$a_x = \frac{3g}{4} \sin \theta \cos \theta, \quad a_y = -\frac{3g}{4} \cos^2 \theta$$

となる.

【別解】点 O の回りの回転を考えると,

$$I_O \alpha = -\frac{1}{2} m g l \cos \theta, \quad I_O = \frac{1}{3} m l^2 \quad \text{より}, \quad \alpha = -\frac{3g}{2l} \cos \theta$$

2. 棒が x 軸を過る時の, 重心の速度を v_G とすると,

$$v_{Oy} = -v_G - \frac{1}{2} \omega l = 0$$

より, 角速度は $\omega = -2v_G / l$ となる. よって, エネルギー保存則

$$\frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} m g l \sin \theta$$

より,

$$v_G = -\sqrt{\frac{3}{4} g l \sin \theta}$$

【別解】点 O の回りの回転を考えると,

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} m g l \sin \theta \quad \text{より}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}, \quad v_G = \frac{\omega l}{2} = \sqrt{\frac{3}{4} g l \sin \theta}$$

問題 15 力学・材料力学

II

問 2

拘束がないとき温度上昇 t に伴い、丸棒と円筒のひずみはそれぞれ $\alpha_b t$, $\alpha_c t$ だけ増加する。

丸棒と円筒は剛体板で一体化されていて、 $\alpha_b > \alpha_c$ なので、丸棒には圧縮、円筒には引張の熱応力が働く。剛体板を介して作用する軸力を W とすると、丸棒と円筒のひずみは、それぞれ次式のようになる。

$$\varepsilon_b = \alpha_b t - \frac{W}{A_b E_b}$$

$$\varepsilon_c = \alpha_c t + \frac{W}{A_c E_c}.$$

丸棒と円筒は剛体板に固定され、一体化して変形する。すなわちひずみが一致すること ($\varepsilon_b = \varepsilon_c$) から、軸力 W は定まる。

$$\alpha_b t - \frac{W}{A_b E_b} = \alpha_c t + \frac{W}{A_c E_c}$$

これを变形して、

$$\left(\frac{1}{A_b E_b} + \frac{1}{A_c E_c} \right) W = (\alpha_b - \alpha_c) t$$

$$\frac{A_b E_b + A_c E_c}{A_b A_c E_b E_c} W = (\alpha_b - \alpha_c) t$$

$$W = \frac{A_b A_c E_b E_c}{A_b E_b + A_c E_c} (\alpha_b - \alpha_c) t.$$

よって、熱応力はそれぞれ、

$$\sigma_b = -\frac{W}{A_b} = -\frac{A_c E_b E_c}{A_b E_b + A_c E_c} (\alpha_b - \alpha_c) t$$

$$\sigma_c = \frac{W}{A_c} = \frac{A_b E_b E_c}{A_b E_b + A_c E_c} (\alpha_b - \alpha_c) t.$$

伸び λ は、

$$\lambda = \left(\alpha_c t + \frac{W}{A_b E_b} \right) L = \frac{A_b E_b \alpha_c + A_c E_c \alpha_b}{A_b E_b + A_c E_c} t L.$$