第１志望 コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス

受験番号	

平成１８年度大学院前期課程

電気電子情報工学専攻

システム・制御・電力工学
先進電磁エネルギー工学
情報通信工学
量子電子デバイス工学

電　磁　理　論
入　試　問　題

【注意】
○ 問題は４問ある。配点は各２５点で合計１００点である。
○ 各問題用紙の志望コース欄に○印をつけ、受験番号を必ず記入すること。
○ 解答はすべて問題用紙の $\boxed{}$ の中に書くこと。

平成１７年８月２２日（月）
１３：００～１５：００実施

1－1	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

点電荷の周囲に生ずる静電界に関する以下の記述の空欄に適当な数式を記入せよ。

座標系の原点に電荷量 q の点電荷が置かれているものとする。この点電荷の電荷密度分布は、座標変数 x、y および z を引数とするディラックのデルタ関数 $\delta(x)$、$\delta(y)$ および $\delta(z)$ を用いて、

$$\rho = q\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{1}$$

のように書ける。したがって、この点電荷がつくる電界 $\boldsymbol{E}$ は、次式に示す、電束に関する微分形のガウスの法則

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{2}$$

に式(1)を代入した結果

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{3}$$

を満足する。ただし、点電荷周囲の空間は真空であり、真空の誘電率を ε_0 とする。式(3) を解くことによって、点電荷周囲に生ずる電界を求めることができる。式(3)を解く際には、座標系として図に示すような球座標系を用いることが便利である。なお、一般に、球座標系におけるベクトル界 $\boldsymbol{A}$ の発散は

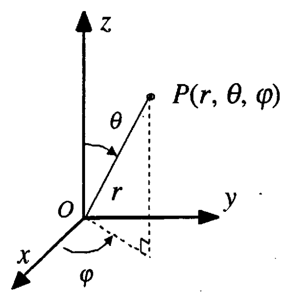


図　1

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{4}$$

で与えられる。ただし r、θ および φ は球座標系の座標変数であり、また A_r、A_θ および A_φ は $\boldsymbol{A}$ の r、θ および φ 方向の成分である。ここで、系の対称性を考慮に入れると、点電荷周囲の電界 $\boldsymbol{E}$ の３つの成分 E_r、E_θ および E_φ のうち、ゼロでない値をもつのは $\boxed{\qquad}$ (5) のみであることがわかる。また、電界成分(5)は、３つの座標変数 r、θ および φ のうち

1－2	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

☐ のみの関数となる。したがって、 式(4)を用いて式(3)を電界成分(5)に関する微分方程式の形に書き換えると

☐ (6)

となる。

式(6)は以下の手順で解くことができる。まず、この点電荷を、電荷の位置（原点）を中心とする半径r_0の球面Sで囲む。Sの外側（$r > r_0$）の領域では式(6)は ☐ となる。この式の解は、cを積分定数として ☐ (7) のように表される。次に、積分定数cを決定するために、Sの内部（$r < r_0$）の領域内で式(3)の両辺を体積積分する。一方の辺では、ガウスの定理を用いて体積積分を面積積分に変換して積分を実行する。他方の辺では、デルタ関数の性質を利用して体積積分を実行する。その結果、Sの表面（$r = r_0$）における電界成分(5)の値が ☐ (8) のように定まる。Sの表面において電界が連続であることから、式(7)および式(8)より積分定数cの値が、$c=$ ☐ のように定まる。この積分定数を式(7)に代入したものが、点電荷周囲に生ずる電界である。

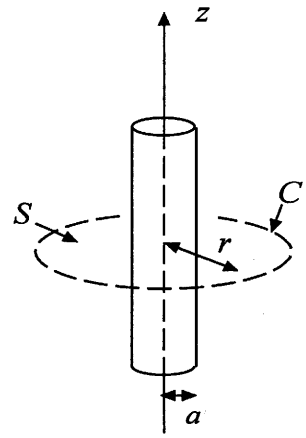
なお、この点電荷がつくる電界に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーw（エネルギー密度）は位置 r において、$w=$ ☐ である。また、点電荷周囲の球殻状の領域 $a<r<b$（ただし、a およびb は$a<b$ を満たす正の定数）内に蓄えられる電界のエネルギーは$W=$ ☐ である。

25点

2－1	第１志望コース	システム制御	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の文章の空欄に適当な語句または数式を入れよ。

半径aの無限に長い円柱状の導線に定常電流Iが一様に流れているとき、この電流によって生ずる磁界は次のように求められる。



図のように導線の中心軸をz軸とし、中心軸からの半径rの円周CとCよって囲まれる領域Sを考える。

電流密度$\boldsymbol{J}$とその周囲に生ずる磁界$\boldsymbol{H}$とはマクスウェルの方程式 $\boxed{} = \boldsymbol{J}$

で関係付けられているので、この方程式を領域Sで積分すると、右辺は領域Sを貫く電流に等しく、

$$\int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \begin{cases} \boxed{} & (r < a) \\ \boxed{} & (r \geq a) \end{cases}$$

となる。 一方、左辺は $\boxed{}$ の定理とz軸のまわりの対称性により

$$\int_S \boxed{} = \oint_C \boxed{} = \boxed{}\, H_\varphi \text{ と書ける。}$$

ここでH_φは磁界の周方向成分である。

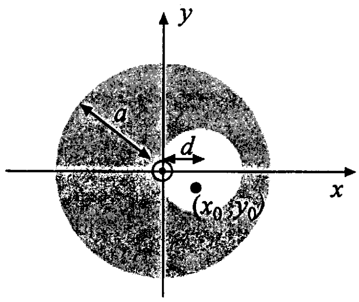
従って、導線の中心軸からrだけ離れた点での磁界は、Iを用いて表わすと

$$H_\varphi = \begin{cases} \boxed{} & (r < a) \\ \boxed{} & (r \geq a) \end{cases}$$

となる。

2－2	第１志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

無限に長い半径aの円柱形の導体に、中心軸からx方向にdだけ離れて半径dの円柱形の穴があいている。ただし$a \geq 2d$とする。この導体に電流密度Jの定常電流がz方向に一様に流れているとき、この導体の内側の磁界$\boldsymbol{H}$は、穴を持たない半径aの導体に大きさ$\pi a^2 J$の電流が流れる場合に生ずる磁界$\boldsymbol{H}_1$と、穴の部分に［　　　　］だけの逆向きの電流が流れる場合の磁界$\boldsymbol{H}_2$の和で与えられる。



導体を流れる電流は紙面の裏から表に向かう方向を持つものとすると、穴の部分の点(x_0, y_0)での$\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$の各成分をJを用いて表わすと

$H_{1x} =$ ［　　　　］　　$H_{1y} =$ ［　　　　］

$H_{2x} =$ ［　　　　］　　$H_{2y} =$ ［　　　　］

となる。従って、導体を流れる電流によって点(x_0, y_0)に生ずる磁界は

$H_x =$ ［　　　　］　　$H_y =$ ［　　　　］

と求められる。

25点

3-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に、適切な数式を記入せよ。平面電磁波が 下図に示す2層の媒質 (I, II) に、真空中から垂直に入射するときの反射を考える。真空中の誘電率及び透磁率は、ε_0 及び μ_0 である。媒質 I は、誘電率が ε_1 であり幅は d である。媒質 II の誘電率は ε_2 であり半無限媒質である。これら2層の透磁率はすべて μ_0 とし、電磁波の損失はないものとする。入射電磁波の角周波数は、ω_0 である。入射電磁波の電界を x 軸に、磁界を y 軸に、進行方向を z 軸にとる。真空中の光の速度 $c = \boxed{\quad\quad}$ を使って、波数ベクトルの絶対値は、 $k_0 = \boxed{\quad\quad}$ である。入射電磁波の電界 $\boldsymbol{E}_I(z,t)$ および磁界 $\boldsymbol{H}_I(z,t)$ は、ω_0 及び k_0 を用いて次式で表せる。

$$\boldsymbol{E}_I(z,t) = \boldsymbol{i}_x E_{I0} \times \exp\{j(\omega_0 t - k_0 z)\}$$
$$\boldsymbol{H}_I(z,t) = \boldsymbol{i}_y E_{I0} \times \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

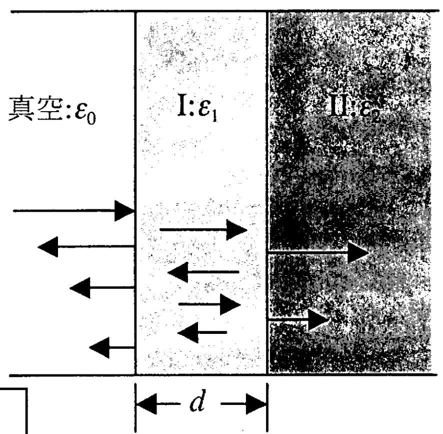
真空中を $-z$ 方向に進む電磁波の電界 $\boldsymbol{E}_R(z,t)$ および磁界 $\boldsymbol{H}_R(z,t)$ は、ω_0 及び k_0 を用いて次式で表せる。

$$\boldsymbol{E}_R(z,t) = \boldsymbol{i}_x E_{R0} \times \exp\{j(\omega_0 t + k_0 z)\}$$
$$\boldsymbol{H}_R(z,t) = \boldsymbol{i}_y E_{R0} \times \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

同様に、媒質 I における電磁波の速度 $v_1 = \boxed{\quad\quad}$ を使って、媒質 I における波数ベクトルの絶対値は、 $k_1 = \boxed{\quad\quad}$ である。媒質 I 中を z 方向へ進む電磁波の電界 $\boldsymbol{E}_T(z,t)$ 及び磁界 $\boldsymbol{H}_T(z,t)$ は、ω_0 及び k_1 を用いて次式で表せる。

$$\boldsymbol{E}_T(z,t) = \boldsymbol{i}_x E_{T0} \times \exp\{j(\omega_0 t - k_1 z)\}$$
$$\boldsymbol{H}_T(z,t) = \boldsymbol{i}_y E_{T0} \times \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

ここで、E_{I0} 、E_{R0} 及び E_{T0} は、それぞれ入射波、反射波、及び透過波の電界の振幅である。真空と媒質 I の境界面において、電界および磁界の接線成分は連続であるから、次の二つの方程式が得られる。



$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$
$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

これより、真空と媒質 I の境界面における電界の反射係数および透過係数は

$$R' = E_{R0} / E_{I0} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$
$$T' = E_{T0} / E_{I0} = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

と表せる。

真空の屈折率 1 と、媒質 I の屈折率 $n_1 =$ ［　　　］ を用いて以下の様に表わせる。

$R' = E_{R0} \ / E_{I0} \ =$ ［　　　］

$T' = E_{T0} \ / E_{I0} \ =$ ［　　　］

同様にして、媒質 I と媒質 II の境界面における電界の反射係数および透過係数は、媒質 I の屈折率 n_1 と媒質 II の屈折率 $n_2 =$ ［　　　］ を用いて以下の様に表わせる。

$R'' =$ ［　　　］

$T'' =$ ［　　　］

次に媒質 I における多重反射を考える。媒質 I と媒質 II の境界面で反射された電磁波が、媒質 I と真空の境界に達する。このとき、媒質 I と真空の境界面における電界の反射係数および透過係数は、媒質 I の屈折率 n_1 と真空の屈折率 1 を用いて以下の様に表わせる。

$R''' =$ ［　　　］

$T''' =$ ［　　　］

媒質 I を往復することによる位相差 δ は、

$\delta \ =$ ［　　　］

である。$\exp(j\delta) = -1$ のとき、多重反射を考えた反射係数 R は、以下の様に表わせる。

$R \ =$ ［　　　］

したがって、以下の条件で反射が無くなる。d については、最小の値を示せ。

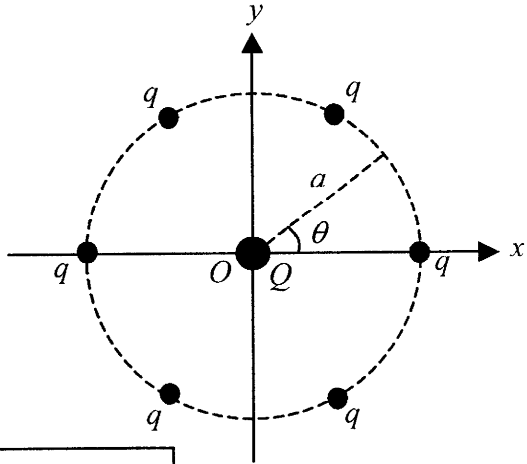
$d \ =$ ［　　　］

$n_1 \ =$ ［　　　］

25 点

4-1	第1志望コース	システム制電	先進電磁	情報通信	量電デバイス	受験番号	

以下の空欄に適切な数式を記入せよ。ただし、直角座標系におけるxおよびy方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}_x$および$\boldsymbol{i}_y$とする。また、点電荷の運動により発生する電磁界は無視できるものとする。



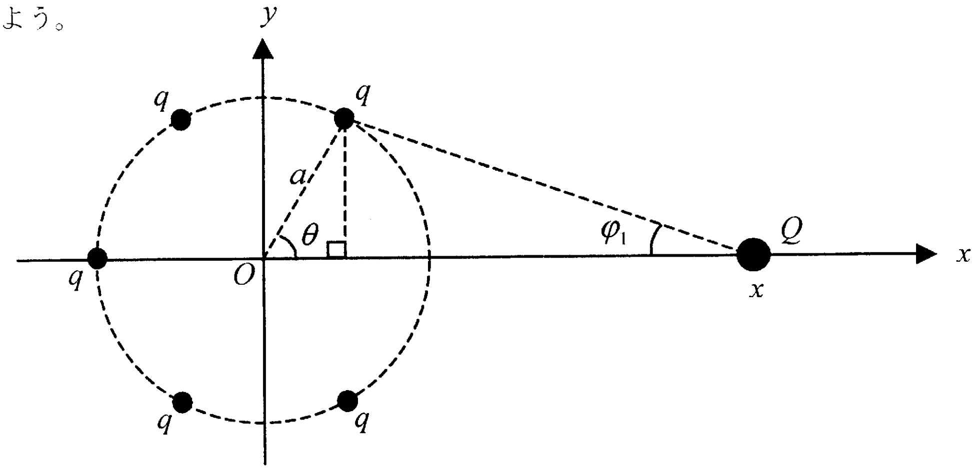
右図に示すように、時刻$t<0$において、$x-y$平面上の原点Oに質量m、電荷量$Q(>0)$の点電荷が静止している。また、半径aの円周上に、電荷量$q(>0)$の6個の点電荷がx軸上を起点として等間隔の位置に固定されている。このとき、電荷量qの一つの点電荷が電荷量Qの点電荷に及ぼす力の大きさをFとすると、

$F=$ $\boxed{}$

である。ここで、電荷は真空中にあるものとし、真空中の誘電率ε_0を用いた。

次に、時刻$t=0$において、$x-y$平面上の点$(a,0)$に置かれた電荷量qの点電荷を取り去るものとする。このとき、$t>0$における電荷量Qの点電荷の運動について考えよう。

まず、下図を参考にして、$x-y$平面上の点$(x,0)$において電荷量Qの点電荷に働く力を求めよう。



$\theta=\pi/3$の位置に置かれた電荷量qの点電荷が点$(x,0)$にある電荷量Qの点電荷に及ぼす力$\boldsymbol{F}_1(x)$を求めよう。まず、

$\cos\varphi_1=$ $\boxed{}$,　$\sin\varphi_1=$ $\boxed{}$

であるから、$\boldsymbol{F}_1(x)$は、

$\boldsymbol{F}_1(x) = \boldsymbol{i}_x$ [ ]

$+\boldsymbol{i}_y$ [ ]

となる。

同様に、$\theta = n\pi/3\ (n = 2,3,4,5)$ の位置に置かれた電荷量 q の点電荷が点 $(x, 0)$ にある電荷量 Q の点電荷に働く力 $\boldsymbol{F}_n(x)$ を求め、その和をとると、電荷量 q の5つの点電荷が点 $(x, 0)$ にある電荷量 Q の点電荷に及ぼす力 $\boldsymbol{F}(x)$ は、

$\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{i}_x$ [ ]

$+\boldsymbol{i}_y$ [ ]

となる。よって、質量 m、電荷量 Q の点電荷の運動方程式は

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} =$ [ ]

$m\dfrac{d^2y}{dt^2} =$ [ ]

である。

上式のうち、x についての方程式を解くことにしよう。x についての方程式の両辺に x 方向に対する速度 $v_x = dx/dt$ を乗じて、積分公式

$$\int \frac{x+d}{(x^2+bx+c)^{3/2}}dx = \frac{2\{(2d-b)x+bd-2c\}}{(4c-b^2)\sqrt{x^2+bx+c}}$$

を用いて積分し、さらに、初期条件 $x(t=0)=0$ において $v_x\ (t=0)=0$ であることを用いると、点 $(x, 0)$ における電荷量 Q の点電荷の x 方向に対する速度 $v_x\ (x)$ は

$v_x\ (x) =$ [ ]

と求まる。よって、$x \to \infty$ における x 方向に対する定常速度は次式となる。

$v_x\ (x \to \infty) =$ [ ]

25点