平成14年度 京都大学大学院情報学研究科
修士課程 通信情報システム専攻入学資格試験問題

専門基礎A

平成13年8月23日(木) 9:00 – 12:00

注意

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「**専門基礎A**」の問題用紙で、表紙共に10枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確かめ、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問 (A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9) ある。**4問を選択して解答すること。**答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語で行うこと。

専門基礎 A　　$\boxed{\text{A-1}}$, $\boxed{\text{A-2}}$, $\boxed{\text{A-3}}$, $\boxed{\text{A-4}}$, $\boxed{\text{A-5}}$, $\boxed{\text{A-6}}$, $\boxed{\text{A-7}}$, $\boxed{\text{A-8}}$, $\boxed{\text{A-9}}$ の 9 問から 4 問を選択して解答せよ。

$\boxed{\text{A-1}}$

以下の全ての問に答えよ。

(1) 実関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について以下の小問すべてに答えよ。

(a) $f(x)$ は $0 < x < 1$ で微分可能であることを示せ。

(b) $f(x)$ は $0 < x < 1$ で一様連続でないことを示せ。

(2) 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$　$(a > 0,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a)$ について以下の小問すべてに答えよ。

(a) この曲線と x 軸、y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(b) この曲線の長さを求めよ。

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{a}_1 = [0,\ 1/2,\ 1/2]$, $\boldsymbol{a}_2 = [1/2,\ 0,\ 1/2]$, $\boldsymbol{a}_3 = [1/2,\ 1/2,\ 0]$ を用いて $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,0]$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1,0]$, $\boldsymbol{e}_3 = [0,0,1]$ を表せ。

(4) n 個の数 $1, 2, \ldots, n$ を並べ替えて得られる任意の順列 $\sigma = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ に対し、i 番目の数 p_i と j 番目の数 p_j を入れ替える操作（関数）を $c_{i,j}$ と表す。すなわち、$i < j$ とすると $c_{i,j}(\sigma) = \langle p_1, \ldots, p_{i-1}, p_j, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, p_i, p_{j+1}, \ldots, p_n \rangle$ である。

順列 σ に対し、符号 $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ を以下のように与える。まず基本順列 $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ の符号を $\varepsilon(\langle 1, 2, \ldots, n \rangle) = 1$ とする。そして、任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $(i \ne j)$ に対し、$\varepsilon(\sigma) = s$ ならば $\varepsilon(c_{i,j}(\sigma)) = -s$ とする。

以上によって、任意の順列 σ に対し符号が与えられることになる。この際、その符号 $\varepsilon(\sigma)$ が一通りに定められることを証明せよ。

ヒント：順列 σ に対し、基本順列に比べて、数の大小の転倒が生じている 2 つの数（すなわち $i < j$ かつ $p_i > p_j$ であるような i, j）の組の総数を転倒数と呼ぶ。転倒数が偶数の順列を偶順列、奇数の順列を奇順列と呼ぶ。

次の３問中２問を選んで答えよ。

(1) 次の各小問に答えよ。

(a) 次の**円筒座標** (cylindrical coordinates)(r,ϕ,z) における**偏微分方程式** (partial differential equation) を**変数分離** (separation of variables) し、r,ϕ,z のそれぞれを変数とする３つの**常微分方程式** (ordinary differential equation) を導け。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

(b) (a) で導いた ϕ および z を変数とする方程式の**固有値** (eigenvalue) をそれぞれ $n^2, -k^2$ とし、それらの解 (**固有関数** (eigenfunction)) を求めよ。また、r を変数とする方程式において、$x=kr$ で変数変換し x を変数とする方程式を導け。

(c) (b) で得られた x を変数とする常微分方程式の解が、$J_n(x)$ で与えられる時、(a) の偏微分方程式の一般解 $f(r,\phi,z)$ を J_n を用いて表せ。

(2) 下記の $|x|\le\pi$ で定義される**関数** (function) を、**周期** (period) 2π で繰り返した関数について各小問に答えよ。

$$f(x)=x^2$$

(a) **フーリエ級数展開** (Fourier series expansion) を求めよ。

(b) 上記の関数とフーリエ級数展開した式の第２項まで、および第３項まで取った結果に対して、$x=0$ および $\pi/2$ における値を比較せよ。$\pi^2=9.87$ としてよい。

(3) 次の各小問に答えよ。但し、定数 a は実数で、$0<a<1$ とする。

(a) 複素関数

$$f(z)=1+\mathrm{e}^z$$

を $|z-i\pi|>0$ の領域で**ローラン展開** (Laurent expansion) せよ。

(b) 複素平面上の点 $z=i\pi$ を反時計方向に回る経路に沿って、次の周回積分を計算せよ。

$$\oint\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z$$

(c) 定積分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

を求めよ。
(ヒント：　$z=0,2\pi i$ を通る平行な２直線に沿って複素積分する。)

A-3

下記の設問に答えよ

(1) 真空中で yz 平面($x=0$)上に電位 0 の完全導体(perfect conductor)の無限平面板があり、距離 d 離れた点 $A(d,0,0)$ に点電荷 Q が置かれているとする(図 a)。

導体板と同じ作用をする点電荷（point charge） Q' を考え(図 b)、図 a と $x \geq 0$ の範囲で同電位、同電界となるものとする。このとき、Q' を Q で表し、Q' により yz 平面($x=0$)で電位が 0 になることを示せ。

(2) 図 a の導体板上に誘導される電荷の表面電荷密度を求めよ。

(3) 図 c のように $(x,y)=(0,0)$ で導体板を直角に折り曲げ、$x=y$ 平面と $x=-y$ 平面に重なるように配置した。このとき、x 軸上(ただし、$x>0, x \neq d$) での電界 E を求めよ。

(4) 図 d のように真空中で平面導体板に直角に、電界 $\bar{E}_1=(0,E_y,0)$ (ただし、$E_y = E_0 e^{j(\beta x+\omega t)}$)を持つ平面電磁波(plane electromagnetic wave)を $-x$ 方向に入射する。このとき、(1)と同様の考えかたを導入し、x 軸上($y=0, z=0$) の電界 E および磁界 H を x および時刻 t の関数で表し、電界および磁界のそれぞれの大きさが最大となる位置 x を示せ。ただし、真空の固有インピーダンス(intrinsic impedance)を Z とする。

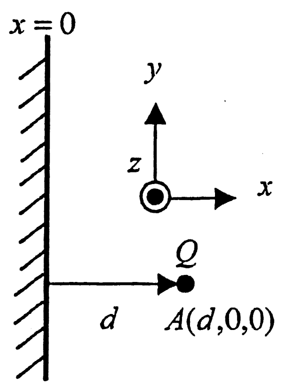


図 a

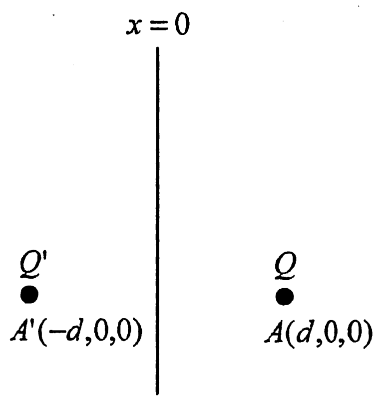


図 b

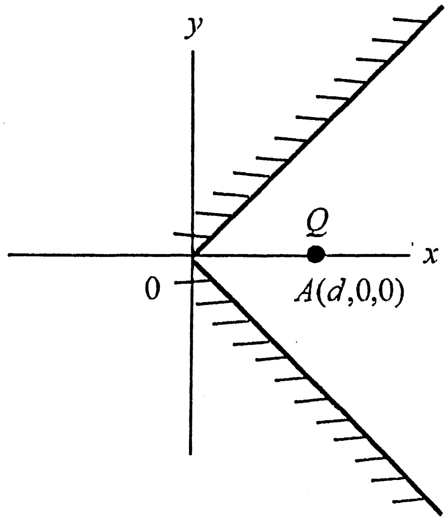


図 c

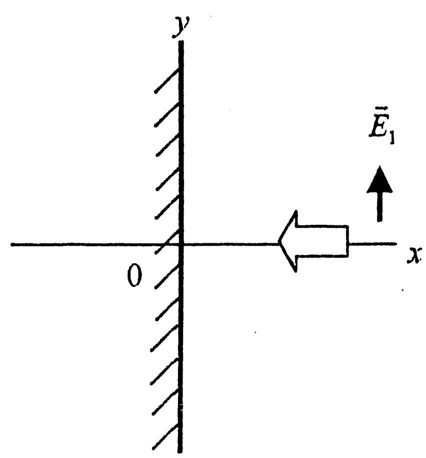


図 d

A-5

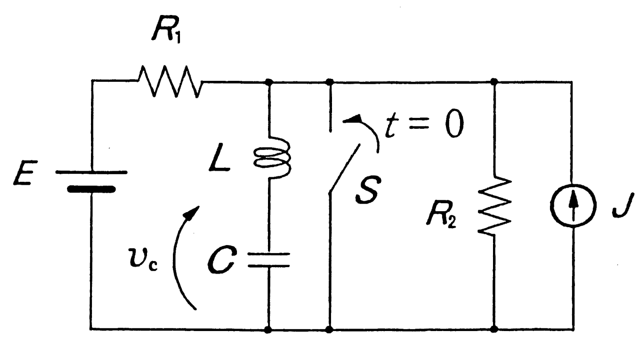
以下の4問に答えよ。

(1) 図(a)の回路においてスイッチSが開いた**定常状態** (steady state) における、コンデンサ C の両端の電圧 v_c を求めよ。

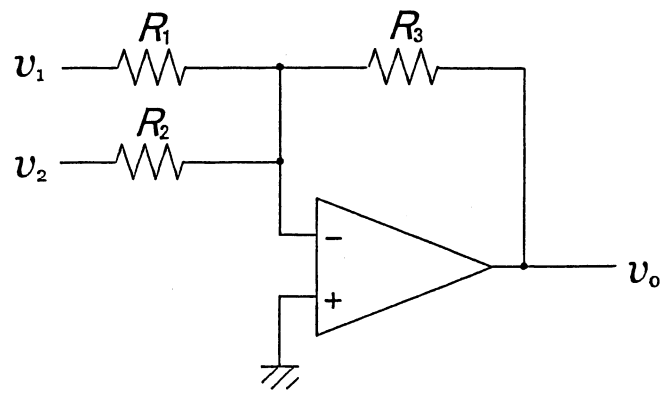
(2) 図(a)の回路において定常状態から時刻 $t=0$ にスイッチSを閉じた後のコンデンサ C の両端の電圧 v_c の変化について論じよ。

(3) 理想的な特性を持つ**演算増幅器** (operational amplifier) を用いた図(b)の回路について、電圧 v_1、v_2 と v_o の関係を求めよ。

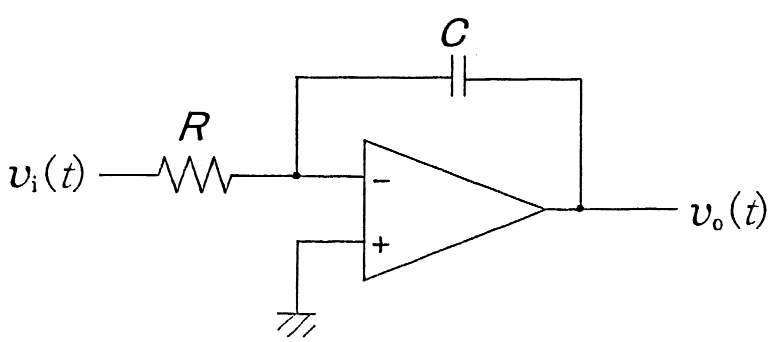
(4) 理想的な特性を持つ演算増幅器を用いた図(c)の回路に、図(d)に示すような方形波電圧 $v_i(t)$ を入力した際の電圧 $v_o(t)$ を、$v_i(t)$ と対比させて図示せよ。ただし $t=0$ において $v_o(0)=0$ とする。



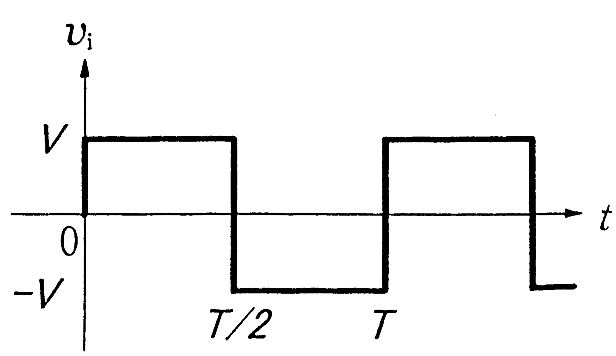
図(a)



図(b)



図(c)



図(d)

A-6

以下の3問の中から2問を選び解答せよ。

(1) 情報源符号化(source coding)に関する以下の問に答えよ。

(a) 必要な記号を用いてクラフトの不等式(Kraft's inequality)を示せ。ただし、記号はすべて定義してから用いること。また、クラフトの不等式はどのような条件を表しているか簡潔に要領よく説明せよ。

(b) シャノン(Shannon)によって導かれた情報源符号化定理(source coding theorem)（シャノンの第1定理とも言う）について簡潔に要領よく説明せよ。(証明は不要である。)

(2) 通信路符号化(channel coding)に関する以下の問に答えよ。

(a) $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $1+x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$ のグラフを描け。情報理論ではこのグラフは何を意味するか？思い浮かぶものを一つ挙げよ。

(b) シャノン(Shannon)によって導かれた通信路符号化定理(channel coding theorem)（シャノンの第2定理とも言う）について簡潔に要領よく説明せよ。(証明は不要である。)

(3) 以下の問に答えよ。

(a) 生成多項式(generating polynomial)$G(x)=x^3+x+1$ で与えられる(7,4)ハミング符号(Hamming code)を考える。

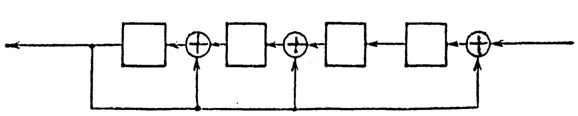
(i) 情報ビット(1, 0, 0, 1)が与えられたとき、その検査ビットを求めよ。

(ii) 受信符号語が (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)であった。誤りの発生の有無を判定せよ。

(b) kビットの情報ビットがある。これを2元ハミング符号化したい。必要な検査ビット数mはどのようにして求めればよいか。

(c) 100ビットの情報ビットが与えられたとき、2元ハミング符号化するために必要な検査ビット数を求めよ。

(d) 図示のシフトレジスタ(shift register)回路はどのような動作を行うか。簡潔に説明せよ。ただし、□はフリップフロップを意味し、⊕はmod2の加算を意味する。



A-7

英文小文字 26 文字と空白から構成される長さ l の文字列 (string) が、1 次元配列 (array of one dimension) に格納されている。

1	2	3	4	5	$\cdots$	l
					$\cdots$	

このとき次の問いに答えなさい。

設問 1 先頭から連続した部分を除いて残った『後尾部分文字列』 (いわゆる *tail*) を表現する効率のよいデータ構造 (data structure) を定めなさい。

たとえば、文字列 “`some string`” の後尾部分文字列には、“`some string`”, “`ome string`”, “`me string`”, $\cdots$, “`g`” などがある。

設問 2 文字列中のすべての後尾部分文字列を辞書式順序 (lexicographical order) で整列 (sorting) するための効率のよいアルゴリズムをデータ構造とともに示しなさい。また、整列に必要な領域計算量 (space complexity) を求めなさい。

設問 3 与えられた文字列に複数回出現する部分文字列のうち、長い順に上位 10 位を求めるためのデータ構造とアルゴリズムを示しなさい。また、その処理で必要な領域計算量を求めなさい。

設問 4 2 つの文字列が与えられた時に、両方の文字列に共通に出現する最大長の部分列を求めるためのデータ構造とアルゴリズムを示しなさい。

A-8

図に示す実体関連図から、どのような従属性が成立するかを考え、関係データベースを設計せよ。