平成30年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

基礎科目試験問題

（実施時間　９：３０ ～ １２：３０）

【注　意　事　項】

１．問題用紙は，この表紙や白紙を除いて１２頁ある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，及び，「電気電子回路２」の９題*あり，この順番に綴じられている．このうち，５題を選択し解答すること．但し，選択すべき試験問題は，受験コース毎に下表のように規定されている．

３．

受験コース名	選択すべき試験問題
電気工学コース	「数学１」，「数学２」，「数学３」，「数学４」，「数学５」の５題から３題，及び，「電磁理論１」，「電磁理論２」，「電気電子回路１」，「電気電子回路２」の４題から２題，合計５題を選択すること
電子工学コース	
情報通信工学コース	９題（上記*印）から５題選択すること

４．解答開始前に，別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

５．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【数学1】解答は，白色（1番）の解答用紙に記入すること.

行列（matrix）A を $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．以下の設問 (a)～(e) に答えよ．

(a) 行列 A の固有方程式（characteristic equation）の一つの 2 重解（double root）λ_1 ともう一つの解 λ_2 の値を求め，行列 A の固有値（eigenvalue）を示せ．

(b) (a)で求めた行列 A の固有値 λ_1 に対する固有ベクトル（eigenvector）$\boldsymbol{v}_1$，および固有値 λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(c) (b)の結果を用いて，$\boldsymbol{v}_1=(A-\lambda_1 I)\,\boldsymbol{v}_3$ を満たす $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ．ただし，I は単位行列 （identity matrix）を表す．また，行列 $V=(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_3\ \ \boldsymbol{v}_2)$ が正則（regular）であることを示せ．

(d) 行列 $\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}^n$ を計算せよ．ただし，a, b は実数（real number），n は自然数（natural number）である．

(e) (b)～(d) の結果を用いて，A^n を n, λ_1, λ_2, V, V^{-1} により表せ．ただし，n は自然数である．

【数学2】解答は，赤色（2番）の解答用紙に記入すること．

線形常微分方程式（linear ordinary differential equation）について，以下の設問 (a)〜(c) に答えよ．ただし，y は x の関数（function）であり，y'，y''，y''' はそれぞれ x に関する y の 1 階，2 階及び 3 階微分を表す．

(a) 微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ について考える．ただし，a，b は実数（real number）とする．特性方程式（characteristic equation）$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が実数の重根（equal root）λ_1 をもち，$e^{\lambda_1 x}$ が特殊解（particular solution）となるとき，もう一つの解が $xe^{\lambda_1 x}$ となることを示せ．

(b) 微分方程式 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ について考える．ただし，a，b，c は実数とする．特性方程式 $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ が異なる 3 実根（real root）λ_1，λ_2，λ_3 をもつとき，この微分方程式の特殊解 $e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$，$e^{\lambda_3 x}$ が基本解系（fundamental system of solutions）であることを，ロンスキー行列式（Wronskian determinant）を計算することにより示せ．

(c) 微分方程式 $x^3 y''' + 2x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$ の一般解（general solution）を求めよ．

【数学３】解答は，青色（３番）の解答用紙に記入すること．

次の式で定義される複素関数 (complex function) $F_n(z)$ に関する以下の設問 (a)〜(e) に答えよ．ただし，n は自然数 (natural number) とする．

$$F_n(z) = \frac{1}{z^{2n}+1}$$

(a) 複素数 (complex number) z に関する次の方程式 (equation) の根 (root) を求めよ．

$$z^{2n}+1=0$$

(b) $P(z)$, $Q(z)$ を，$z=a$ を含む領域で正則な関数 (holomorphic function) とする．$P(z)$ が $z=a$ に単根 (single root) をもち，$Q(z)/P(z)$ が $z=a$ に 1 位の極 (simple pole) をもつとき，$Q(z)/P(z)$ の $z=a$ における留数 (residue) $\mathrm{Res}\,[Q(z)/P(z),\,a]$ は，

$$\mathrm{Res}\left[\frac{Q(z)}{P(z)},\,a\right] = \frac{Q(a)}{P'(a)} \tag{1}$$

と表せることを示せ．ここで，$P'(z) = \dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}$ である．

(c) $F_n(z)$ の極における留数を求めよ．その際，式 (1) の関係を用いてよい．

(d) 図 1 に示した $\mathrm{C}_R+\Gamma$ を正の向きに回る積分路 (contour) に関する関数 $F_n(z)$ の経路積分 (contour integral)

$$\int_{\mathrm{C}_R+\Gamma} F_n(z)\,\mathrm{d}z$$

を計算せよ．ただし，$R>1$ とする．

(e) 次の実積分 (real integral) を計算せよ．

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$$

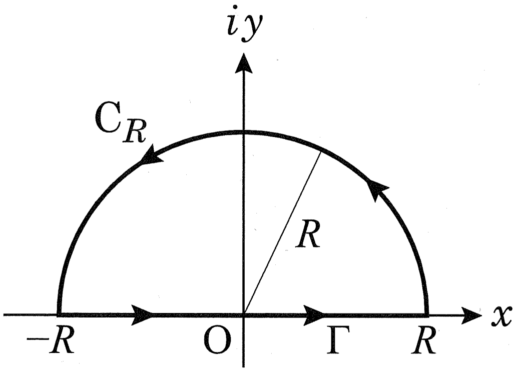

図１：半径 R ($R>1$) の円弧 (arc) に沿った積分路 C_R と，x 軸上の積分路 Γ

【数学4】解答は，黄色（4番）の解答用紙に記入すること.

関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ において，区分的に滑らか（piecewise smooth）であり，有界（bounded）で，絶対積分可能（absolutely integrable）であるとき，フーリエ変換（Fourier transform）$F(\omega)$ とフーリエ逆変換（inverse Fourier transform）は次のように定義される.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega$$

以下の設問 (a)～(d) に答えよ.

(a) 関数 $f(x)$（$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$）の 1 階導関数（1st order derivative）$f'(x)$ のフーリエ変換は,

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega)$$

で与えられる．$\omega \neq 0$ のとき，関数

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t$$

のフーリエ変換が

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(x)] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

となることを示せ.

(b) 次の関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換を導出せよ．ただし，T は正の定数（positive constant）とする.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > T) \\ 1 & (-T \leq x \leq 0) \\ -1 & (0 < x \leq T) \end{cases}$$

(c) 次の関数 $f_2(x)$ のグラフを $-2T \leq x \leq 2T$ の範囲について図示せよ.

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t) \mathrm{d}t$$

(d) 設問 (a)～(c) の結果を利用して，次の定積分（definite integral）を求めよ.

$$S = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x$$

【数学５】解答は，水色（５番）の解答用紙に記入すること．

1 から N までの異なる番号が書かれたカードが各 1 枚，合計 N 枚ある．ただし $N \geq 3$ である．最初に，これら N 枚のカードの中から k 枚のカードを無作為に選んで捨てる．ただし $k \in \{1, 2, \ldots, N-2\}$ である．次に，残りの $N-k$ 枚のカードの中から，書かれた番号が大きな順に ℓ 枚のカードを選んで捨てる．ただし $\ell \in \{1, 2, \ldots, N-k-1\}$ である．この結果，$N-k-\ell$ 枚のカードが手元に残る．以下の設問 (a)〜(c) に答えよ．

(a) 最初に捨てた k 枚のカードの中で，n 以下の番号が書かれたカードの枚数の期待値 (expectation) D_n を求めよ．ただし $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ である．

(b) 手元に残った $N-k-\ell$ 枚のカードの中で，n 以下の番号が書かれたカードの枚数の期待値 R_n を，前問 (a) で与えた D_n を用いて表せ．ただし $n \in \{1, 2, \ldots, N-k-\ell\}$ である．

(c) $k = 1$ の場合について考える．このとき，手元に残った $N-1-\ell$ 枚のカードの中から無作為に選んだ 1 枚のカードに書かれた番号が n 以下である確率 (probability) p_n を求めよ．ただし $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ である．

【電磁理論１】 解答は，桃色（6番）の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～⑯の番号を記し，対応する以下の文中の空欄に当てはまる数式，数値や語句を解答用紙に記入せよ.

[1] 静電界は時間的に変化しない電荷の分布によって生じる．誘電率εの線形，等方，均質な媒質中における静電界$\boldsymbol{E}$に対するマクスウェル方程式は,

$$\boxed{\quad ① \quad} = 0 \tag{1}$$

$$\boxed{\quad ② \quad} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2}$$

と表すことができる．ここで，ρは自由電荷の密度を表す.

静電界は式(1) の関係を満たす保存的なベクトル界であるから，$\boldsymbol{E}$はスカラー・ポテンシャルϕの勾配として,

$$\boldsymbol{E} = \boxed{\quad ③ \quad} \tag{3}$$

と表すことができる．このようなスカラー・ポテンシャルϕは静電界における電位に対応する.

式(3)を式(2)に代入すると,

$$\nabla^2\phi = \boxed{\quad ④ \quad} \tag{4}$$

が得られる．この式(4)は$\rho \neq 0$の場合，$\boxed{\quad ⑤ \quad}$の式と呼ばれる.

[2] 図 1 に示すように，誘電率εの線形，等方，均質な媒質中に，電荷量q ($q>0$)の点電荷Aと$-q$の点電荷Bが距離sを隔てて存在する．点電荷 A, B の位置の中点を球座標系(r, θ, φ)の原点Oにとり，座標θの基準軸($\theta = 0$の方向)を図のようにとる．これらの点電荷が誘起する点$\mathrm{P}(r, \theta, \varphi)$におけるポテンシャルおよび電界について考察する．点電荷A, Bから点Pまでの距離をそれぞれr_1, r_2とし，点電荷の存在する位置から無限遠におけるポテンシャルを基準にとって，これをゼロとする．また，球座標系の基本ベクトルを$\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta, \boldsymbol{i}_\varphi$とする.

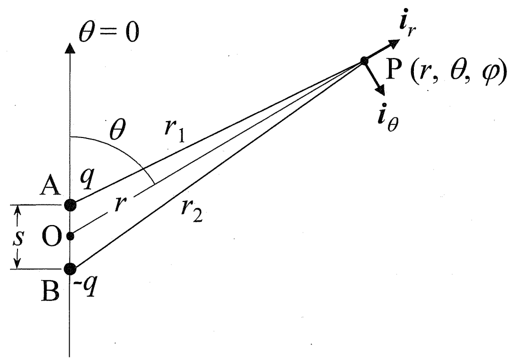

図 1

まず，点電荷Aのみによる点Pにおけるポテンシャルϕ_+は，r_1を用いて,

$$\phi_+ = \boxed{\quad ⑥ \quad} \tag{5}$$

と与えられる．次に，点電荷Bのみによる点Pにおけるポテンシャルϕ_-は，r_2を用いて,

$$\phi_- = \boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{6}$$

で与えられる．点 P における二つの点電荷 A, B によるポテンシャル ϕ は，

$$\phi = \phi_+ + \phi_- \tag{7}$$

となる．

余弦定理を用いて， r_1, r_2 を r, s, θ で表すと，

$$r_1 = \boxed{\quad ⑧ \quad} \tag{8}$$

$$r_2 = \boxed{\quad ⑨ \quad} \tag{9}$$

となる．

ここで， r は s に比べて十分大きい場合を考える． $1/\sqrt{1-\delta} \approx 1 + \delta/2$ $(|\delta| \ll 1)$ と近似できることに注意すると，式(7)は次のように表される．

$$\phi = \boxed{\quad ⑩ \quad} \tag{10}$$

したがって，点 P における電界の r 方向と θ 方向の成分はそれぞれ，

$$E_r = \boxed{\quad ⑪ \quad} \tag{11}$$

$$E_\theta = \boxed{\quad ⑫ \quad} \tag{12}$$

と求められる．

図 1 に示す点電荷対は， $r \gg s$ の場合，電気双極子とみなせ，このモーメント $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} \equiv q\boldsymbol{s}$ (ただし， $\boldsymbol{s}$ は大きさが s で，点電荷 B から点電荷 A に向かうベクトルとする)で与えられる．大きさが r で，原点 O から点 P に向かうベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし， $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}$ を用いて式(10)を表すと，

$$\phi = \boxed{\quad ⑬ \quad} \tag{13}$$

を得る．点 P における電界の r 方向と θ 方向の成分は， $|\boldsymbol{p}|$ を用いて，

$$E_r = \boxed{\quad ⑭ \quad} \tag{14}$$

$$E_\theta = \boxed{\quad ⑮ \quad} \tag{15}$$

とも表される．また，系の対称性により，電界の φ 方向の成分は，

$$E_\varphi = \boxed{\quad ⑯ \quad} \tag{16}$$

となる．

【電磁理論2】解答は，緑色（7番）の解答用紙に記入すること．

解答用紙に①～⑲の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や数値，語句を解答用紙に記入せよ．ただし，⑭については適切な語句を選び，その記号を記せ．

電荷量 q をもち速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する荷電粒子に対して電磁界がおよぼす力 $\boldsymbol{F}$ は $\boxed{\quad\text{①}\quad}$ と呼ばれ，電界を $\boldsymbol{E}$，磁束密度を $\boldsymbol{B}$ とすると

$$\boldsymbol{F} = \boxed{\quad\text{②}\quad}$$

と表される．

図1のように，長さ l，幅 w，厚さ d で σ なる導電率をもつ線形，等方，均質な直方導体の両端を平板電極（完全導体）ではさみ，電極間に大きさ $V\,(>0)$ の電圧を印加する．このとき，電極間には一様な電界が生じるものとする．自由電子の電荷量を $-e\,(e>0)$，導体中の単位体積当りの自由電子数を N，自由電子の質量を m，自由電子の移動速度を $\boldsymbol{v}$ とし，速度の大きさ v は光速に対して十分小さいものとする．直角座標系の各座標軸を図1のようにとり，基本ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$ とする．以下，ベクトル量については基本ベクトルを含む数式で答えよ．

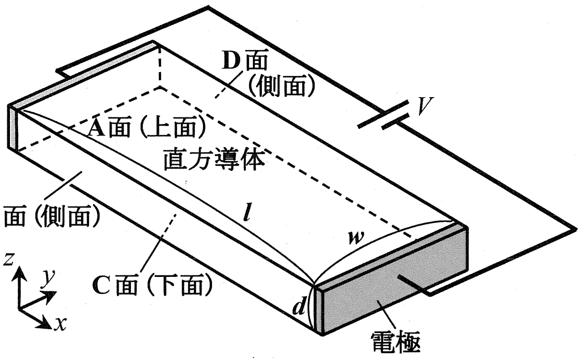

図1

導体中の自由電子には

$$\boldsymbol{F} = \boxed{\quad\text{③}\quad}$$

なる $\boxed{\quad\text{①}\quad}$ が働き，自由電子の運動により電流が流れる．このとき自由電子は運動を妨げられながら進むため，比例定数を $k\,(>0)$ とすると，移動速度の大きさ v に比例する抵抗力 kv が自由電子に働く．したがって定常状態では，自由電子は

$$\boldsymbol{v}_0 = \boxed{\quad\text{④}\quad}$$

なる速度で $\boxed{\quad\text{⑤}\quad}$ 運動する．このとき電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，$\boldsymbol{v}_0$ の大きさ v_0 を用いて

$$\boldsymbol{J} = \boxed{\quad\text{⑥}\quad}$$

と表され，オームの法則より，k は σ を用いて

$$k = \boxed{\quad\text{⑦}\quad}$$

と表される．

ここで電界から導体中の全自由電子に与えられる単位時間当りのエネルギーPは，σを用いて

$$P = \boxed{\quad ⑧ \quad}$$

と表される．このエネルギーは上記の抵抗力によって失われ，結局Pは導体内で$\boxed{\quad ⑨ \quad}$として失われる消費電力を表すことになる．

次に，磁束密度の大きさが$B(>0)$なる磁界をz軸正の方向に一様に印加する場合を考える．上記の抵抗力を考慮すると，磁界を印加した直後，導体中を流れる自由電子の運動方程式はv_0，k，Bを用いて

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i}_x\boxed{\quad ⑩ \quad} + \boldsymbol{i}_y\boxed{\quad ⑪ \quad} + \boldsymbol{i}_z\boxed{\quad ⑫ \quad}$$

と表される．磁界の印加により，自由電子は$\boxed{\quad ⑬ \quad}$方向にも力を受け移動する．これにより直方導体の$\boxed{⑭\ （イ）A面，（ロ）B面，（ハ）C面，（ニ）D面}$は負に帯電し，電位差が生じる．この電位差が生む電界は$\boxed{\quad ⑮ \quad}$方向を向き，定常状態ではその電界による力と磁界による力が相殺している．このとき$\boldsymbol{v}$は，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}_x\boxed{\quad ⑯ \quad} + \boldsymbol{i}_y\boxed{\quad ⑰ \quad} + \boldsymbol{i}_z\boxed{\quad ⑱ \quad}$$

である．磁界印加によって新たに生じた電位差V_Hは

$$V_\mathrm{H} = \boxed{\quad ⑲ \quad}$$

であり，ホール電圧と呼ばれている．ただし，ホール電圧は，直方導体両端の電極の存在が影響を与えない領域で考えるものとする．

＜専門用語英訳＞

【電磁理論１】

静電界	electrostatic field
誘電率	dielectric constant; permittivity
線形，等方，均質な媒質	linear, isotropic, and homogeneous medium
自由電荷	free charge
電位	electric potential
球座標	spherical coordinates
基本ベクトル	base vector
点電荷	point charge
電気双極子	electric dipole
余弦定理	law of cosines
系の対称性	symmetry of system

【電磁理論２】

電磁界	electromagnetic field
電荷	charge
荷電粒子	charged particle
磁束密度	magnetic flux density
導電率	conductivity
線形，等方，均質な直方導体	linear, isotropic, and homogeneous rectangular conductor
平板電極	parallel electrode
自由電子	free electron
光速	speed of light
直角座標系	cartesian coordinates
比例定数	proportional constant
抵抗力	resistive force
消費電力	power consumption
運動方程式	equation of motion
ホール電圧	Hall voltage
帯電する	to charge
相殺する	to cancel

【電気電子回路１】　解答は，灰色（８番）の解答用紙に記入すること．

図 1 に示す回路において，$R_1 = 4$ [Ω], $R_2 = 6$ [Ω], $R_3 = 1$ [Ω], $R_4 = 2$ [Ω], $L_1 = 9$ [H], $L_2 = 1$ [H], $C = 1/20$ [F] とする．つぎの問いに答えよ．

(1) SW1 が ON，SW2 と SW3 が OFF とし，伝達関数[*1] $H(s) = V(s)/E(s)$ を求めよ．ただし，$V(s)$ および $E(s)$ はそれぞれ $v(t)$ および $e(t)$ のラプラス変換[*2]である．

(2) 問い (1) で求めた伝達関数 $H(s)$ のボード線図[*3]の概形として適切なものを図 2 の (a)〜(d) から選択せよ．

(3) SW1 が ON，SW2 と SW3 が OFF，$e(t) = \sin 2t$ [V] とし，回路は正弦波定常状態[*4]にあるとする．$v(t)$ の振幅および $e(t)$ に対する位相を求めよ．

(4) $e(t) = 1$ [V] とし，$t < 0$ で，SW1 と SW2 が OFF, SW3 が ON，回路は定常状態にあるとする．$t = 0^-$ におけるキャパシタ電圧 $v_C(0^-)$ を求めよ．

(5) 問い (4) の定常状態から，$t = 0$ で SW2 を ON，SW3 を OFF とした．$v_C(t)$ $(t > 0)$ を求めよ．

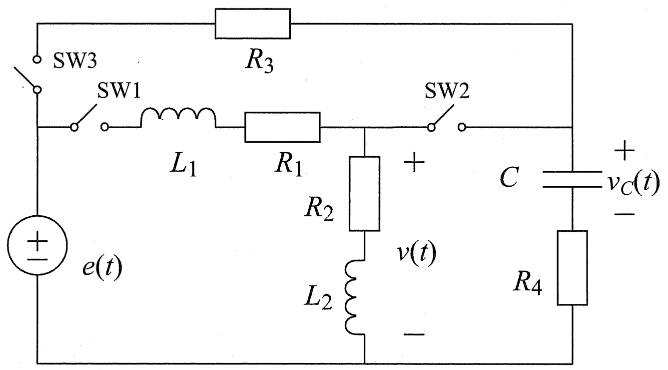

図 1

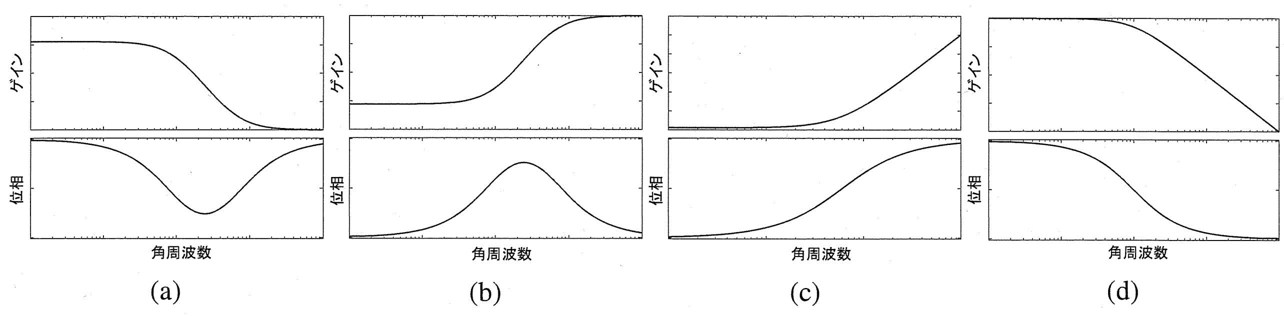

図 2

[*1] 伝達関数：transfer function
[*2] ラプラス変換：Laplace transform
[*3] ボード線図：Bode plot
[*4] 正弦波定常状態：sinusoidal steady state

【電気電子回路2】 解答は，だいだい色（9 番）の解答用紙に記入すること．

図 1 に示す増幅回路の定常状態[*1]について，下記の問い(1)~(6)に答えよ．なお，V_O, C_L は正の実数であり，$v_{in}(t)$, $v_{out}(t)$ は時刻 t の関数として，角周波数[*2] ω の正弦波

$$v_{in}(t)=V_{in}\sin(\omega t),\quad v_{out}(t)=V_{out}\sin(\omega t+\theta)$$

で表される．ただし，V_{in} ,V_{out} は 1V に比べて微小な電圧振幅であり，θ は $v_{out}(t)$の初期位相である．また，図 1 の n チャネル MOSFET は飽和領域[*3]で動作し，ゲート・ソース間電圧 V_{GS} に対してドレイン電流 I_D は

$$I_D=\frac{\beta}{2}(V_{GS}-V_{TH})^2$$

となるものとする．ここで，V_{TH} = 0.5 [V], β = 2 [mA/V^2] とする．また，容量 C_C は極めて大きく，交流信号に対するインピーダンスは無視するものとする．

(1) この回路において n チャネル MOSFET のドレイン電流の直流成分は 1 mA である．V_{GS} の直流成分の値を求めよ．また，これを実現するために必要な R_S の値も求めよ．

(2) 問い(1)の場合において，n チャネル MOSFET の相互コンダクタンス g_m の値を求めよ．なお，相互コンダクタンスは次のように定義される．

$$g_m=\frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}$$

(3) 図 2 に示す n チャネル MOSFET の小信号等価回路[*4]を用いて，V_{GS} の小信号成分 $v_{gs}(t)$を g_m, R_S 及び $v_{in}(t)$で 表せ．図 2 の G, S, D は各々ゲート，ソース，ドレイン[*5]を示す．

(4) 問い(3)の結果を用いて，定常状態での電圧利得 V_{out}/V_{in} および $\tan\theta$ を g_m, R_S, R_L, C_L , ωで表せ．

(5) $\omega\to 0$ のときの電圧利得 V_{out}/V_{in} を求めよ．

(6) 問い(4)で求めた電圧利得が問い(5)で求めた電圧利得の $1/\sqrt{2}$ になる角周波数を求めよ．

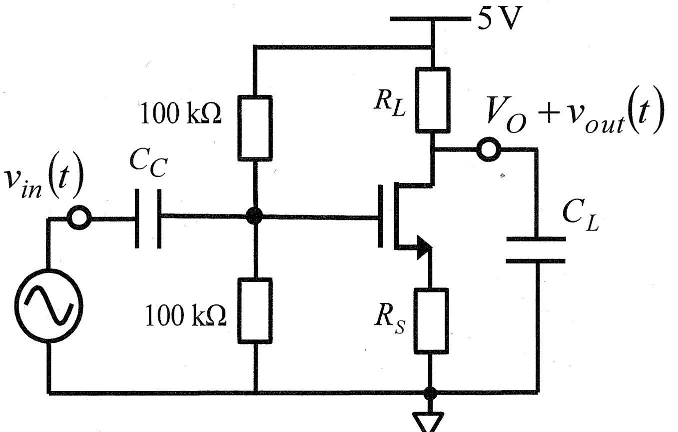

図 1

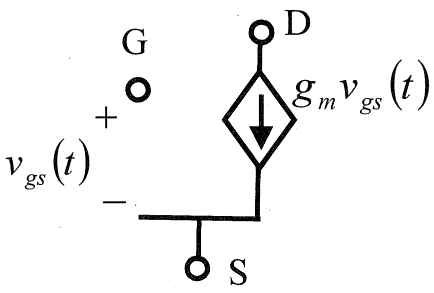

図 2

注 図中，右の記号は基準電位[*6]を示す．

*1 定常状態: steady state
*2 角周波数: angular frequency
*3 飽和領域: saturation region
*4 小信号等価回路: small-signal equivalent circuit
*5 ゲート，ソース，ドレイン: gate, source, drain
*6 基準電位 : reference potential