問題１３　量子力学　解答例

Ⅰ.

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2}+(E+V_0)\varphi_1=0 & (x\le 0) \\[2ex] \dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\dfrac{d^2\varphi_2}{dx^2}+E\varphi_2=0 & (x>0) \end{cases}$$

(2) $x\le 0$　のとき，$k=\dfrac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$，　　$x>0$　のとき，$a=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

(3) 境界条件は，$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$　かつ　$\left.\dfrac{d\varphi_1}{dx}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{d\varphi_2}{dx}\right|_{x=0}$

$$\begin{cases} A+B=C \\ k(A-B)=aC \end{cases}$$

(4) $B=\dfrac{k-a}{k+a}A$，　$C=\dfrac{2k}{k+a}A$

(5)
$$j_1=\frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2-|B|^2\right)=\frac{\hbar k}{m}\frac{(k+a)^2-(k-a)^2}{(k+a)^2}|A|^2=\frac{4\hbar k^2a}{m(k+a)^2}|A|^2$$
$$j_2=\frac{\hbar a}{m}|C|^2=\frac{4\hbar k^2a}{m(k+a)^2}|A|^2$$

(6)　反射率　$R=\left(\dfrac{k-a}{k+a}\right)^2$

透過率　$T=\dfrac{4ka}{(k+a)^2}$

(7)　$R=\left(\dfrac{k-a}{k+a}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{E+V_0}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E}}\right)^2$　　　$\therefore$ $R=0$ の条件は、$V_0=0$

問題 13

II.

(1) $\dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2\psi_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\left(E_n-\dfrac{m\omega^2x^2}{2}\right)\psi_n(x)=0$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2\psi_n(q)}{\mathrm{d}q^2}+\left(\lambda_n-q^2\right)\psi_n(q)=0$

(3) $H_1=2q$

$H_2=-2+4q^2$

$H_3=-12q+8q^3$

(4) $\phi_\ell(q=0)=0$

(5) $n=1$

(6) $\phi_0=Aq\exp\left(\dfrac{-q^2}{2}\right)$, $(q\geq 0)$

$\phi_0=0$, $(q<0)$ ただし、規格化定数を A とした。

(7) $\phi_0=2\sqrt{2}C_1q\exp\left(\dfrac{-q^2}{2}\right)$ $(q\geq 0)$

$\phi_0=0$, $(q<0)$

(8) $n=2\ell+1$

問題１４　電気回路・電子回路　［Ｉ］　解答例

（１）

①コンデンサの初期電荷が０なので,

$\underline{i_R = \dfrac{E}{R}}$, $\underline{i_L = 0}$, $\underline{i_C = \dfrac{E}{R}}$

②　$R\,i_R(t) + L\dfrac{d}{dt}i_L(t) = R(\,i_L(t) + i_C(t)) + L\dfrac{d}{dt}i_L(t) = E$

$L\dfrac{d}{dt}i_L(t) = \dfrac{1}{C}\int i_C(t)\,dt$ より $CL\dfrac{d^2}{dt^2}i_L(t) = i_C(t)$

したがって, $\underline{R\,i_L(t) + RLC\dfrac{d^2}{dt^2}i_L(t) + L\dfrac{d}{dt}i_L(t) = E}$　$\rightarrow \underline{0.04\dfrac{d^2}{dt^2}i_L(t) + 0.4\dfrac{d}{dt}i_L(t) + i_L(t) = 20}$

③題意より $i_L(0) = 0$, また, $v_C(0) = 0$ より $i_L{}^{(1)}(0) = 0$ である。これらの初期条件の下で, 上式を解いて, $i_L(t) = 20 - 20\cdot(1 + 5\,t)\varepsilon^{-5t}$

したがって, $\underline{i_L(0.2) = 20 - 40\cdot\varepsilon^{-1} = 20\cdot(1 - 2\cdot\varepsilon^{-1})}$

$v_C = \dfrac{1}{C}\int i_C(t)\,dt = L\dfrac{d}{dt}i_L(t) = 200t\varepsilon^{-5t}$　$\rightarrow \underline{v_C(0.2) = 40\varepsilon^{-1}}$

（２）

①十分時間が経過した後は, コイルが短絡状態となるので,

$\underline{i_R = \dfrac{E}{R}}$, $\underline{i_L = \dfrac{E}{R}}$, $\underline{i_C = 0}$, $\underline{P = \dfrac{E^2}{R}}$

②回路方程式は

$\underline{L\dfrac{d}{dt}i_L(t) + \dfrac{1}{C}\int i_L(t)\,dt = 0}$　$\rightarrow \underline{0.4\dfrac{d^2}{dt^2}i_L(t) + 10\cdot i_L(t) = 0}$

③初期条件 $i_L(0) = \dfrac{E}{R} = 20$ の下で, 上式を解いて,

$i_L(t) = 20\cos(5\,t)$

$v_C(t) = -\dfrac{1}{C}\int i_L(t)\,dt = -40\cdot\sin(5t)$

<u>電流の振幅：20[A], 角周波数：5[rad/s]</u>

<u>コンデンサの両端電圧：40[V]</u>

(別解：エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}L\cdot I_{Lm}{}^2 = \dfrac{1}{2}C\cdot V_{Cm}{}^2$ から, $V_{Cm} = I_{Lm}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 20\times 2 = 40$)

問題１４　電気回路・電子回路　II　（解答例）

オペアンプの特性は理想的とするので，オペアンプの + 入力端子の電圧と − 入力端子の電圧は等しくなる（仮想短絡）．またオペアンプの二つの入力端子には電流は流れない．

(1) オペアンプが理想的で仮想短絡が成立することから，上側のオペアンプの + 入力端子の電圧 $V_1 = V_{in}$ と − 入力端子の電圧 V_3 が等しくなるため

$$V_3 = V_{in} \qquad \cdots (\text{答})$$

下側のオペアンプについても同様に − 入力端子の電圧 $V_3 = V_{in}$ と + 入力端子の電圧 V_5 が等しくなるため

$$V_5 = V_{in} \qquad \cdots (\text{答})$$

(2) 電圧 V_5 の節点に注目すると $I_4 + I_5 = 0$ であるので

$$\frac{V_{in} - V_4}{Z_4} + \frac{V_{in} - 0}{Z_5} = 0$$

より

$$V_4 = \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) \cdot V_{in} \qquad \cdots (\text{答})$$

(3) 同様に電圧 V_3 の節点に注目すると $I_2 + I_3 = 0$ であるので

$$\frac{V_{in} - V_2}{Z_2} + \frac{V_{in} - V_4}{Z_3} = 0$$

より

$$V_2 = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right) \cdot V_{in} - \frac{Z_2}{Z_3} \cdot V_4$$

従って

$$V_2 = \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right) \cdot V_{in} \qquad \cdots (\text{答})$$

(4) 入力インピーダンス Z_{in} は

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

また

$$I_{in} = I_1 = \frac{V_{in} - V_2}{Z_1} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5} \cdot V_{in}$$

従って

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \qquad \cdots (\text{答})$$

(5) Z_1 の抵抗 R_1，Z_2 の抵抗 R_2，Z_3 の抵抗 R_3，Z_5 の抵抗 R_5 とし，Z_4 のキャパシタンス C_4 とすると $Z_4 = 1/j\omega C_4$ となるので，このオペアンプ回路の入力インピーダンス Z_{in} は

$$Z_{in} = j\omega C_4 \cdot \frac{R_1 R_3 R_5}{R_2}$$

となる．これはインダクタンス

$$L = C_4 \cdot \frac{R_1 R_3 R_5}{R_2}$$

の等価インダクタを表している．

（インピーダンスの分子が $j\omega$ となることが説明できれば正解とする）　$\cdots$ (答)

問題１６　電子物性

解答例

（１）

$$N_a - N_d$$

（２）

$$(N_a - N_d)q\mu$$

（３）

$$\frac{L}{S(N_a - N_d)q\mu}$$

（４）

フェルミ準位と価電子帯上端のエネルギー差：

$$kT\ ln\frac{N_V}{N_a - N_d}$$

バンドギャップ：

$$kT\ ln\frac{N_C N_V}{n(N_a - N_d)}$$

（５）

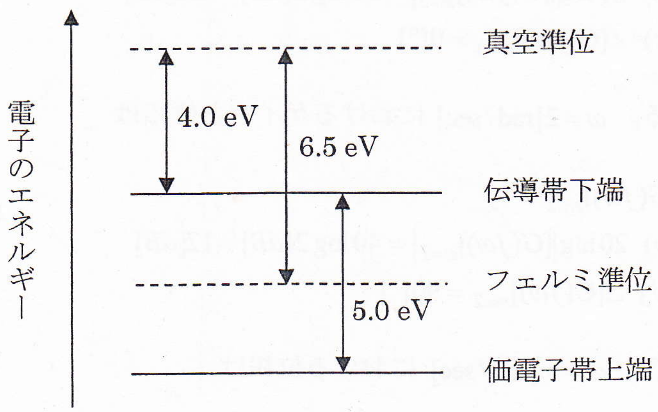
仕事関数：

$$\frac{hc}{\lambda} - kT\ ln\frac{N_V}{N_a - N_d}$$

電子親和力：

$$\frac{hc}{\lambda} - kT\ ln\frac{N_C N_V}{n(N_a - N_d)}$$

（６）



問題１７　制御工学　の解答例

I　図１を等価変換すると，(A)のブロックに入る伝達関数は次式で与えられる。

$$\frac{G_1(s)}{1-2G_1(s)+G_1(s)G_2(s)\{G_3(s)+G_4(s)\}}$$

II　システムの伝達関数は，インパルス応答のラプラス変換と等しいため，システムの伝達関数$F(s)$は次式で与えられる。

$$F(s)=\frac{\sqrt{3}s+3}{s^2+9}$$

よって，$(a,b,c,d)=(\sqrt{3},\ 3,\ 0,\ 9)$ である。

III　角周波数ω[rad/sec] における周波数伝達関数の値は

$$G(j\omega)=\frac{(j\omega+2)^2}{2}$$

であるため，$\omega=0$[rad/sec] におけるゲインと位相は

$$[G(j\omega)]_{\omega=0}=2$$

$$(a)\ \ 20\log\left|[G(j\omega)]_{\omega=0}\right|=20\log 2[dB]=6.0[dB]$$

$$(c)\ \ \angle[G(j\omega)]_{\omega=0}=0[^\circ]$$

である。$\omega=2$[rad/sec] におけるゲインと位相は

$$[G(j\omega)]_{\omega=2}=4j$$

$$(b)\ \ 20\log\left|[G(j\omega)]_{\omega=2}\right|=40\log 2[dB]=12[dB]$$

$$(d)\ \ \angle[G(j\omega)]_{\omega=2}=90[^\circ]$$

である。$\omega=\infty$[rad/sec] における位相は

$$(e)\ \ \angle[G(j\omega)]_{\omega=\infty}=180[^\circ]$$

である。

Ⅳ (1) $$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{C_1(s)\{C_2(s)+H(s)\}P(s)}{1+P(s)H(s)}$$

(2) $$\frac{Y(s)}{D(s)}=\frac{P(s)}{1+P(s)H(s)}$$

(3) 目標値を零とすると，図３より，制御量のラプラス変換は

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+3+K_1}\times D(s)$$

である。制御系は安定であるため，最終値の定理より，単位ステップ関数の外乱に対する制御量 $y(t)$ の定常値はつぎのようになる。

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} s\times\left\{\frac{1}{s^2+2s+3+K_1}\times\frac{1}{s}\right\}=\frac{1}{3+K_1}$$

よって，定常値が0.1となる K_1 はつぎのようになる。

$$K_1=7$$

(4) 外乱を零とすると，図３より，制御量のラプラス変換は，

$$Y(s)=\frac{C_2(s)+K_1}{s^2+2s+3+K_1}\times\frac{1}{1+\tau s}\times R(s)$$

である。図４より $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数は，つぎの一次遅れ系

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+3s}$$

で与えられるため，正の定数 τ と伝達関数 $C_2(s)$ はつぎのようになる。

$$\tau=3,\ \ C_2(s)=s^2+2s+3$$

(5) 図３のフィードバック制御系の特性多項式 $A_c(s)$ とラウス表は以下のようになる。

$$A_c(s)=s^2(s+2)(s+4)+K_2(s+1)=s^4+6s^3+8s^2+K_2s+K_2$$

s^4	1	8	K_2
s^3	6	K_2	
s^2	α_1	α_2	
s^1	β_1		
s^0	K_2		

,

$$\alpha_1=-\frac{1}{6}(K_2-48),\ \ \alpha_2=-\frac{1}{6}(-6K_2)=K_2$$

$$\beta_1=-\frac{1}{\alpha_1}(6K_2-K_2\alpha_1)=-\frac{K_2}{6\alpha_1}(K_2-12)$$

図３の制御系が安定であるための必要十分条件はつぎのようになる。

$$0<K_2<12$$

（解答例おわり）