平成21年8月24日
13:00 ～ 15:00

平成22年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

- 問題の数は5題である。解答は

  問題1　を　1枚目（白色）の解答用紙
  問題2　を　2枚目（赤色）の解答用紙
  問題3　を　3枚目（青色）の解答用紙
  問題4　を　4枚目（黄色）の解答用紙
  問題5　を　5枚目（水色）の解答用紙

  に記入すること。
  解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

- 配点は各問題20点であり、合計100点である。

- 問題紙は表紙を含めて6枚である。

問題１　（２０点）

次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関する以下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(a)行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値（eigenvalue）および各固有値に対応する固有ベクトル（eigenvector）を求めよ。

(b) (a)の結果を用いて、n を自然数（natural number）として $\boldsymbol{A}^{2n}$ および $\boldsymbol{A}^{2n+1}$ を求めよ。

問題２　（２０点）

(a) 関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式 (differential equation) の一般解 (general solution) を求めよ。ただし y' および y'' は、それぞれ、y の 1 階および 2 階の微分を表す。

$$y'' - y' - 2y = 2e^x + 10\sin x$$

(b) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式

$$y' = \frac{1}{x} + e^y$$

において、$u = xe^y$ と置き、$u(x)$ に関する微分方程式を導くことにより、一般解を求めよ。

問題３　（２０点）

$z = x + iy$ を表す複素平面（complex plane）上に図１に示すような閉曲線（closed curve）の積分経路（integral path）があり、この積分経路に沿って $f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{1+z}$ を積分する。積分経路 C_1 と C_3 は x 軸となす角が ε の線分を表し、積分経路 C_2 と C_4 はそれぞれ原点 O を中心とする半径 R と ρ の円弧を表している。ただし、$0 < a < 1$、$0 < \rho < 1 < R$、$0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(a)　積分経路 C_2 における $f(z)$ の積分について、$R \to \infty$ としたときの値を求めよ。

(b)　積分経路 C_4 における $f(z)$ の積分について、$\rho \to 0$ としたときの値を求めよ。

(c)　(a)、(b) の結果と積分経路 C_1、C_3 における $f(z)$ の積分の関係から

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

となることを示せ。

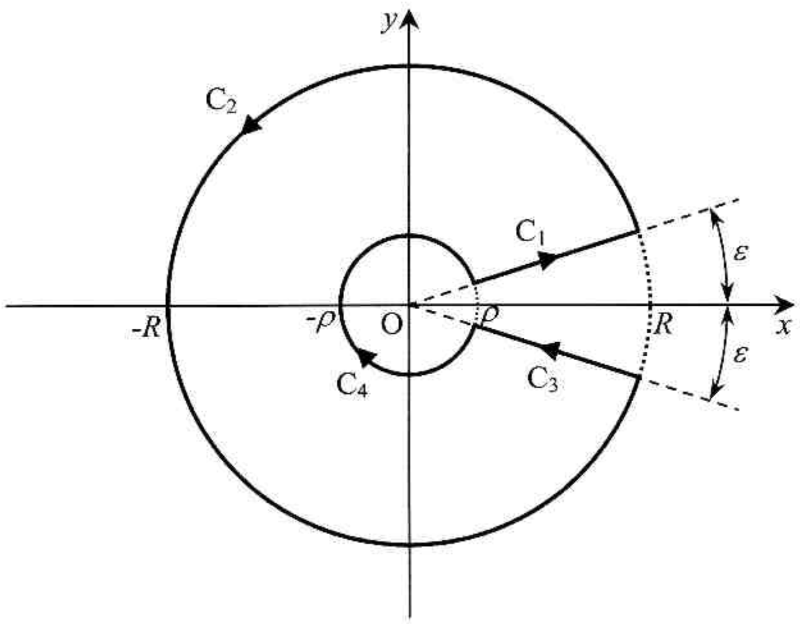

図１

問題４　（２０点）

(a) 関数$f(x)$を次式で定義する。

$$f(x)=x^2$$

これを閉区間［$-\pi, \pi$］でフーリエ級数（Fourier series）に展開して、

$$\pi^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^2}$$

であることを示せ。

(b) 関数$h(\alpha)$を次式で定義する。

$$h(\alpha)=\begin{cases}1-\dfrac{\alpha^2}{2} & (0<\alpha<1)\\ 0 & (\alpha \geq 1)\end{cases}$$

フーリエ変換（Fourier transform）を用いて、次の積分方程式（integral equation）を$g(x)$について解け。

$$\int_0^{\infty} g(x)\cos \alpha x dx = h(\alpha)$$

問題５　（２０点）

(a)　関数 $f(t)$ のラプラス変換(Laplace transform)を $L[f(t)](s) = F(s)$ とすると、

$$L[f(t+a)](s) = e^{as}\left\{F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t)dt\right\} \qquad (a > 0)$$

となることを示せ。ここで、s は複素数(complex number)であり、ラプラス変換が定義できる範囲の値をとるものとする。

(b)　上の関係を利用して、式 (1) の差分方程式(difference equation)のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

$$f(t+2) + 2f(t+1) - 3f(t) = t \qquad (t \geq 0), \qquad (1)$$

$$f(t) = 0 \qquad (0 \leq t \leq 2).$$

(c)　式 (1) の差分方程式の $f(t)$ を求めよ。

必要ならば、$\dfrac{1}{e^s - \alpha} = e^{-s}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-ns}$ (α は実数)の関係を用いてもよい。