平成２８年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　　礎

（平成２７年８月２５日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．５問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

(1) 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$$

(2) 定積分の定義を用いて，以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \left\{ \sqrt{n^2 - 1^2} + 2\sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + (n-1)\sqrt{n^2 - (n-1)^2} \right\}$$

(3) α を正の定数とする．以下の積分が収束する α の範囲を示し，収束するときの積分値を α を用いて表せ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dxdy$$

ただし，$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする.

(4) $x \geq 1$ で定義された実数値関数 $f(x)$ は，$f(1) = 1$ かつ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2}$$

を満たすものとする．このとき，$f(x)$ が単調増加関数であることを示せ．さらに，$f(x)$ が上に有界であることを示せ．また，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$$

であることを示せ.

$\boxed{2}$

(1) 実数aをパラメータに持つ以下の行列$\boldsymbol{A}$の階数を求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$$

(2) 二次元平面上の直線 l_i を以下のように表記する.

$$l_i\colon\ a_i x + b_i y + c_i = 0$$

また, 3 本の直線 l_1, l_2, l_3 のパラメータを用いて行列 $\boldsymbol{B}$ を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

1) l_1, l_2, l_3 が互いに平行でない 3 直線である時, それらが 1 点でのみ交わるための条件を示せ.

2) l_1, l_2, l_3 により囲まれた三角形が作られる場合の条件を示せ.

(3) 以下の行列$\boldsymbol{C}$ において, cを正の実数, $\boldsymbol{u}$ を実数成分からなる三次元列ベクトルとするとき, ${}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u} \leq c$ を満たす $\boldsymbol{u}$ がなす立体の体積を求めよ.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3)のヒント：直交行列を用いて$\boldsymbol{C}$の対角化を考えよ.

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$x\frac{dy}{dx} = 2y^2 + y$$

(2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = \sin 2x$$

(3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 6e^{2x}$$

(4) ある生物の個体数 $N(t)$ の増加について考える．ただし，$N(t)$ は実際には整数値であるが，ここでは $N(t)$ が十分大きく連続値をとるものとみなして，$N(t)$ が満たす微分方程式を考える．その生物の個体数は，単位時間あたりに，個体数に増加率 $R(t)$ を乗じた数だけ増加する．一方，特定の環境ではエサや面積などの要因により収容される個体数には上限がある．そこで，増加率 $R(t)$ は個体数の上限値 N^* からの差 $N^* - N(t)$ に比例するものとする．ただし，比例定数は $A>0$ とする．個体数の変化率 dN/dt を A，N^*，$N(t)$ で表せ．また，その微分方程式の一般解を求め，$N(t)$ を A, N^* を用いて表せ．ここで $N(t)$ および N^* は正の数である．

(1)のヒント：$u = y/x$ としてもよい．
(2)のヒント：特解を $y = K\sin(\omega x) + M\cos(\omega x)$ としてもよい．
(3)のヒント：特解を $y = Cx^2e^{2x}$ としてもよい．

4

図1のように，外半径が r_1 の内部円筒導体と，内半径が r_2 の外部円筒導体とで構成される無限長の同軸円筒導体がある．外部円筒導体に対して内部円筒導体に電圧 V を印加した．以下の問いに答えよ．

(1) 外部円筒導体と内部円筒導体の間が真空（誘電率 ε_0）であるとき，電界の大きさ E_r を同軸円筒の中心軸からの距離 r の関数として $r_1 < r < r_2$ の範囲で示せ．

(2) 問(1)において，導体間に蓄えられる中心軸方向単位長さあたりの静電エネルギーの大きさ U を求めよ．

(3) スイッチ S を閉じたまま，外部円筒導体と内部円筒導体の間を一様な比誘電率 ε_r の誘電体で満たしたとき，導体間の最大電界値および蓄えられる静電エネルギーの大きさは，それぞれ誘電体で満たす前に比べて何倍になるかを求めよ．

(4) 問(3)の状態の後，スイッチ S を開き，さらに導体間の誘電体を抜き取り真空とした．このとき導体間に蓄えられている中心軸方向単位長さあたりの静電エネルギーの大きさ U' を求めよ．

(5) 外部円筒導体と内部円筒導体の間のうち，$r_1 \leq r \leq r_a$ に比誘電率 ε_r の誘電体を設置し，$r_a < r < r_2$ は真空（比誘電率 1）とした．スイッチ S を閉じて，導体間に電圧 V を印加したとき，内部導体表面外側（$r = r_1$）の電界の大きさ E_{r1} を求めよ．

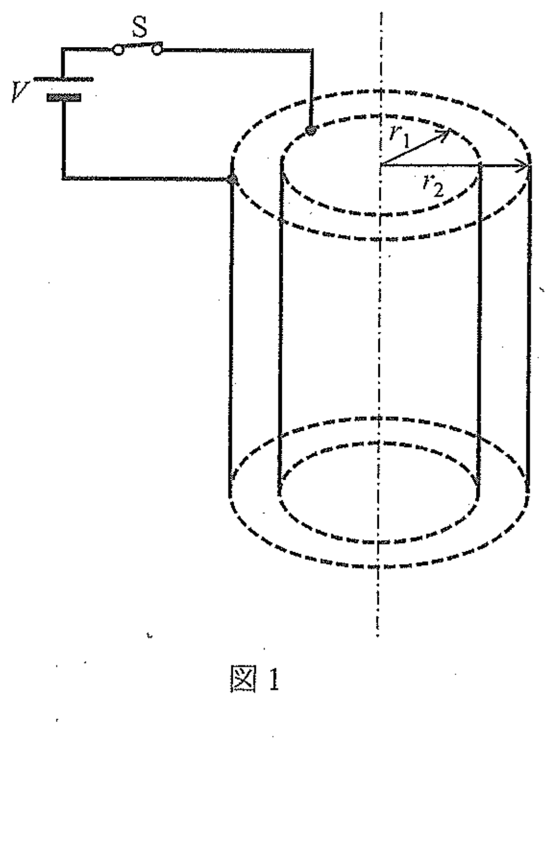

図 1

$\boxed{5}$

図 1 のように，真空空間において，z 方向に無限に長い半径 a の円柱物体が，その物体の中心軸を z 軸と一致するように配置されている．z 軸からの距離を r とする．真空空間および物体の透磁率は μ_0 である．

物体では，定常電流が $+z$ 方向に流れ，その結果，磁界が発生している．電流密度の大きさ J は r のみの関数であり，z 軸からの距離 r における磁界の大きさ H は物体内 $(0 \leq r \leq a)$ で kr^2/a^3 で表される．ここで，k は正の定数である．また，物体において，z 方向の電界の大きさ E は，r および z に依存せず，一定である．

以下の問いに答えよ．

(1) 物体での電流密度の大きさ J を r の関数として表せ．

(2) 物体の z 方向単位長さあたりの抵抗 R_E を求めよ．

(3) 物体における z 方向単位長さあたりの磁界のエネルギー U を求めよ．

(4) 物体の z 方向単位長さあたりの自己インダクタンス L_i を求めよ．

(5) 図 1 に示すように，P_1, P_2, P_3 および P_4 を頂点とする長方形を設定する．点 P_1 および P_4 は z 軸上にあり，点 P_2 および P_3 は物体内部に位置している．辺 P_1P_2 の長さは w (ただし，$w \leq a$) であり，辺 P_1P_4 の長さは h である．長方形 $P_1P_2P_3P_4$ を貫く磁束 ϕ を求めよ．なお，磁界と同一方向を正とする．

(6) 問 (5) で求めた磁束から，$r = w$ におけるベクトルポテンシャルの大きさ A を求めよ．なお，z 軸上でのベクトルポテンシャルの大きさを A_0 とする．

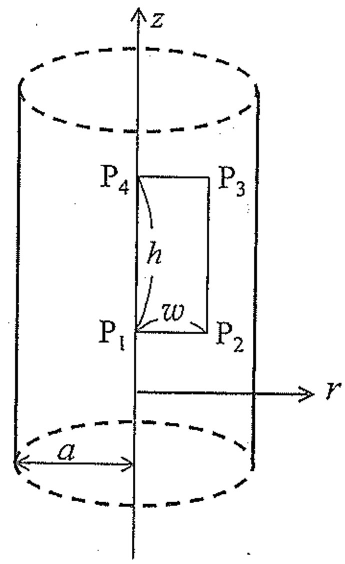

図 1