$\boxed{1}$

1．次の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．

（1）積分変数 x, y を２次元極座標に変換して，次の定積分 S を求めよ．

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

（2）S を用いて，次のガウス積分 G を求めよ．

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

（3）$G_n=\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-x^2}dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$ とする．以下の問いに答えよ．

1）n が奇数の場合について，G_n を求めよ．

2）n が偶数の場合について，G_n に関する漸化式を記述せよ．それを用いて，G_n を求めよ．（ヒント：$n=2m$ $(m=0,1,2,\cdots)$ とおくと，G_n に関する漸化式は $m\geq 1$ について G_{2m} と $G_{2(m-1)}$ の関係式である．）

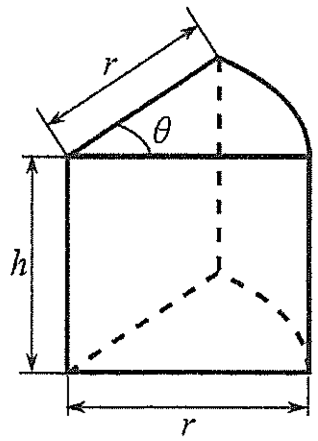
2．楕円を表す式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ があり，その曲線上のある点 (x_1, y_1) における接線を考える．以下の問いに答えよ．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

（1）まず，式の微分をとって，点 (x_1, y_1) における接線の傾きを a，b，x_1，y_1 を用いて表せ．次に，この結果を用いて，接線の式を導け．ただし，$x_1y_1\neq 0$ とする．

（2）$x_1\geq 0$，$y_1\geq 0$ の領域で，接線の x 軸との交点を A，y 軸との交点を B とする．線分 AB の長さ L を a，b，x_1 を用いて表せ．

（3）上の問（2）の結果を用いて，L を最小にする x_1 と L の最小値を求めよ．

3．半径r，高さhの円柱から下図のように角度θだけ切り出した立体を考える．この立体の体積をV，表面積をSとして，以下の問いに答えよ．ただし，$0<\theta<2\pi$とする．なお，VはS一定の条件下においてただ一つの極値（最大値）をもつことがわかっているとする．



（1）体積Vと表面積Sをr，h，θの３変数を用いて表せ．

（2）上の問（1）の結果からhを消去し，Vをr，θ，Sの関数として表せ．

（3）上の問（2）で求めた関数の偏導関数$\dfrac{\partial V}{\partial r}$，$\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial V}{\partial S}$を求めよ．

（4）S一定の条件下でVに極値を与えるr，θを求めよ．

（5）S一定の条件下でのVの最大値$V_{max}(S)$を求めよ．

2

1．行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

（1）行列 $\mathbf{A}$ の固有多項式（固有値を求めるための多項式）を求めよ．

（2）$\mathbf{F(A)}=\mathbf{A}^5-\mathbf{A}^4-6\mathbf{A}^3-6\mathbf{A}-\mathbf{I}$ を求めよ．ここで，$\mathbf{I}$ は単位行列である．

必要であれば，次の「ケーリー・ハミルトンの定理」を用いよ．すなわち，n 次正方行列 $\mathbf{C}$ の固有多項式を

$$f_C(\lambda)=c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n$$

とすれば，

$$c_0\mathbf{C}^n+c_1\mathbf{C}^{n-1}+\cdots+c_n\mathbf{I}=\mathbf{O}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbf{O}$ はゼロ行列である．

（3）$\mathbf{A}^{-2}$ を求めよ．ここで，$\mathbf{A}^{-2}=(\mathbf{A}^{-1})^2$ である．

2．以下の問いに答えよ．

（1）行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数（ランク）を求めよ． ただし，その導出過程を明記すること．

（2）上の問（1）の結果を参考にして，次の連立一次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+5x_3-2x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+2x_3=3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+4x_4=16 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$$

$\boxed{3}$

1．常微分方程式

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

について以下の問いに答えよ．

（1）常微分方程式の右辺を 0 とおいた斉次方程式（同次方程式）の一般解を求めよ．

（2）常微分方程式の特解を求めよ．

（3）常微分方程式の一般解で，条件 $y(0)=1$，$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=1$，$\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=0$ を満たす解を求めよ．

2．以下の常微分方程式の一般解を求めよ．なお，x, y は実数である．

（1）$(2x+2y-1)\dfrac{dy}{dx}=-2x+6y-3$　（ヒント：$X=x$，$Y=y-\frac{1}{2}$ とおくとよい．）

（2）$(2xe^{3y}+e^x)dx+(3x^2e^{3y}-y^2)dy=0$

4

(1)　確率変数 x, y の確率密度関数をそれぞれ $p_x(x)$, $p_y(y)$ とする．確率変数 x, y は互いに独立で $[0,\ 1]$ の範囲の一様分布に従うとする．このとき，以下の問いに答えよ．

1)　$z=x+y$ および $w=x-y$ について，各々の確率密度関数 $p_z(z)$, $p_w(w)$ を図示せよ．

2)　確率変数 z と w は独立であるか述べ，それを証明せよ．

3)　確率変数 z と w は無相関であるか述べ，それを証明せよ．

(2)　確率変数 a, b は，各々，平均 $m_a=10$, $m_b=0$, 分散 $\sigma_a^2=4$, $\sigma_b^2=1$ であり，相関係数が $\rho_{a,b}=C_{a,b}/(\sigma_a\sigma_b)=0.75$ である正規分布である．但し $C_{a,b}$ は a と b の共分散とする．また $c=a+b$ および $d=a-b$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

1)　確率変数 c および d について，各々の平均 m_c, m_d および分散 σ_c^2, σ_d^2 を示せ．

2)　確率変数 c と d の相関係数を示せ．

5

図１に示すように，真空中（誘電率ε_0）に，厚さ d，互いに対向する面積 S の導体板３枚を，間隔が a と b-a（ただし $a < b/2$）になるように平行に並べる（以下，左から順に導体板１，２，３と呼ぶ）．また，連動して開閉するスイッチ SW_1 と電位差 V_0 の直流電源，スイッチ SW_2 が接続されている．導体板２はスイッチ SW_1 を通して接地が可能である．初期状態において，スイッチ SW_1，SW_2 は開放されているとする．導体板１の左端を原点とし，導体板１，２，３が並ぶ方向に x 軸をとる．導体板の端面から発生する電気力線は無視できるものとし，導体板間に発生する電気力線は一様で x 軸に平行になるものとする．

(1) スイッチ SW_1 を閉じ，スイッチ SW_2 は開放のままとする．

1) x 軸右向を正として電位 $V(x)$ と電界の x 成分 $E(x)$ を $0 \leqq x \leqq b+3d$ の範囲において式で表せ．次に，$V(x)$ と $E(x)$ を，x を横軸として図示せよ．

2) 導体板２の左面と右面の面電荷密度をそれぞれ σ_1 と σ_2 として，これらを求めよ．

3) 導体板１，２間と導体板２，３間の静電容量をそれぞれ C_1 と C_2 として，これらを求めよ．

(2) 次に，スイッチ SW_2 は開放のまま，スイッチ SW_1 を開放する．

1) ３枚の導体板間に蓄えられている静電エネルギー U を，S，ε_0，σ_1，σ_2，a，b を用いて表せ．

2) 導体板２に働く力 F を，S，ε_0，V_0，a，b を用いて表せ．

(3) 次に，スイッチ SW_1 は開放のまま，スイッチ SW_2 を閉じる．そして，導体板２を導体板１，２間，導体板２，３間がともに $b/2$ となるようにゆっくりと x 軸方向に動かした．このとき，導体板２の左面と右面の面電荷密度をそれぞれ σ_1' と σ_2' として，これらを，ε_0，V_0，a，b を用いて表せ．

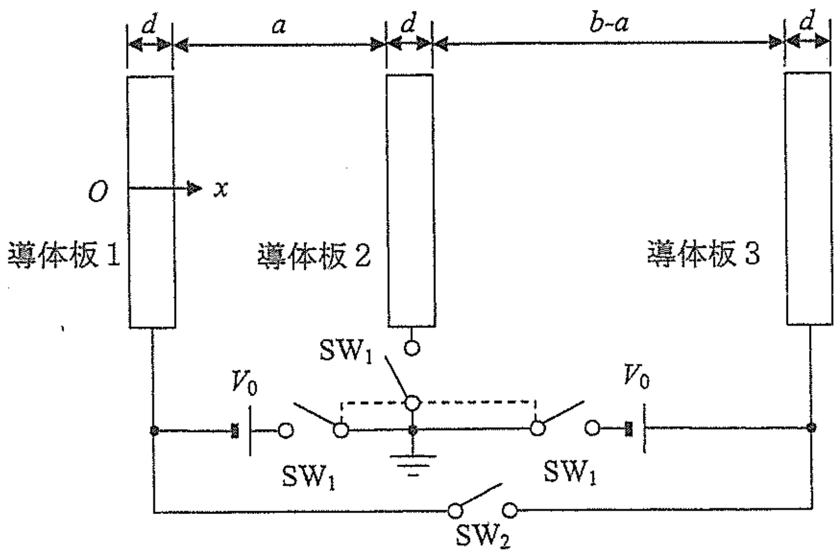


図１

6

図１のように，真空中で，$z=0$ の平面上，原点を中心とし半径 a の円周に沿って電流 I_a が流れている．また，(0，0，z) を中心とする半径 b ($b \ll a$) の円周上を，電荷 q を持つ粒子が一定の角速度 $\omega = d\theta/dt$ で円運動をしている．この部分の拡大図を図２に示した．以下では，粒子の作る磁界は電流 I_a には影響を与えないものとし，真空の透磁率を μ_0 とする．また，粒子の質量は無視できるものとする．

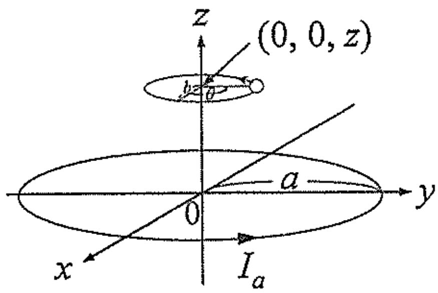


図１

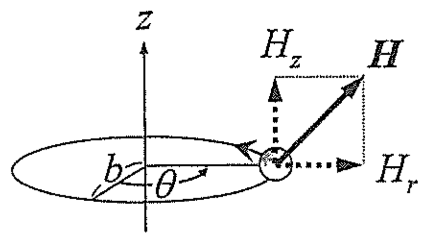


図２

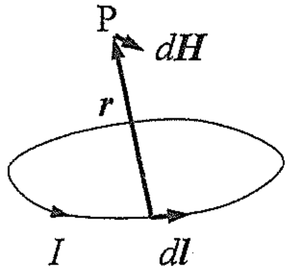


図３

(1) I_a の電流ループが作る磁界 $\boldsymbol{H}$ を，z 軸上の点（0，0，z）で求めよ．ただし，図３のように電流 I が流れているとき，微小な線素 $d\boldsymbol{l}$ が点Ｐに作る磁界 $d\boldsymbol{H}$ は，ビオ・サバールの法則から $d\boldsymbol{H} = I\,(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r})/(4\pi r^3)$ で与えられる．ただし，$\boldsymbol{r}$ は線素 $d\boldsymbol{l}$ から点Ｐへのベクトルである．

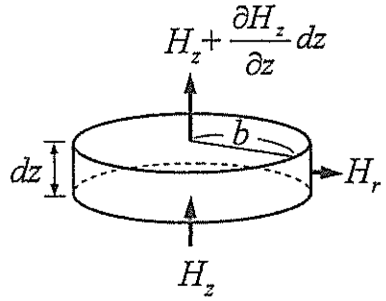


図４

(2) I_a の電流ループが作る磁界 $\boldsymbol{H}$ は空間的に変化し，z 軸に対し回転対称である．$\mathrm{div}\,(\mu_0 \boldsymbol{H}) = 0$ から，図４のように微小高さ dz，半径 b の円筒表面での磁界を考えることにより，$H_r = -\dfrac{b}{2}\dfrac{\partial H_z}{\partial z}$ が成り立つことを示せ．

(3) 一般に環を流れる電流が作る磁気双極子モーメントの大きさは $m = \mu_0 IS$ で与えられる．ここに S は環の面積，I は電流である．図２に示した円運動している粒子による磁気双極子モーメントが $m = \mu_0 q\omega b^2/2$ となることを示せ．

(4) 問(2) (3)の結果を用い，図２の粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ に対する円運動一周期の平均の値

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\,d\theta$$

を m と H_z により表せ．

(5) 図１の粒子に働く，平均の力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ の絶対値が最大となる z を求めよ．