## 電磁気学解答

問 $\mathbf{1}$  (1) 点x での電界の強さE は $E=Q/4\pi\epsilon_0x^2$  となり、x での電位は  $V(x) = Q/4\pi\epsilon_0 x$  となる。従って、導体の電位は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{1}$$

と求まる。

問1(2) 電位係数の対称性より求める 導体球に帯電した電荷を $Q_1$ 、この導 体球の電位を $V_1$ とする。また、 $\ell$ 点にある点電荷の電荷を $Q_2$ 、電位を  $V_2$ とする。 $(V_1,V_2)$ と $(Q_1,Q_2)$ は、電位係数を $p_{ij}$ として、つぎの一 次結合で表される。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

 $Q_1=1[c]$ 、 $Q_2=0$  とおくと、 $V_1=1/4\pi\epsilon_0 a$ 、 $V_1=1/4\pi\epsilon_0 \ell$  を得る。 従って電位係数は  $p_{11}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}$ 、 $p_{21}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \ell}$  となる。

電位係数の対称性より  $p_{12}=p_{21}$  となる。従って、 $Q_1=Q$ 、 $Q_2=q$ とするときの導体球の電位 V は

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell}\right) \tag{3}$$

となる。

問1(2)電気映像法より求める 帯電導体球と点電荷の系の境界条件は、(1) 導体球の外部に電荷 q がある、(2) 半径 a の球面上で電位は一定であ る、(3) 半径 a の球面を通る電束線数は Q 等となる。導体球を取り去 り、この条件を満たすためには、x軸上の $a^2/\ell$  の位置に映像電荷 $-aq/\ell$ を置き、x 軸の原点に  $+aq/\ell$  と Q の電荷を置けばよい。この時の、球 面上の電位Vは

$$V = \frac{1}{4 e \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q}{a} + \frac{1}{a} \frac{aq}{\ell} + \frac{-aq}{a - \frac{a^2}{\ell}} + \frac{q}{\ell - a} \right)$$

$$= \frac{1}{4 e \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell} \right)$$
(5)

$$= \frac{1}{e^{\pi\epsilon_0}} \left(\frac{Q}{a} + \frac{q}{\ell}\right) \tag{5}$$

問2(1)ベクトルポテンシャルAは

$$\mathbf{A} = \alpha \frac{\hat{z} \times \mathbf{r}}{r^3} = \alpha \left[ \frac{-y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0 \right] \tag{6}$$

と表される。磁束密度 B は、B = rot A より

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\alpha \frac{3zx}{r^5}$$
 (7)

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \alpha \frac{3yz}{r^5}$$
 (8)

$$B_{z} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = \alpha \frac{2z^{2} - x^{2} - y^{2}}{r^{5}}$$
 (9)

となる。従って、x=0の面内では

$$\mathbf{B} = [o, \alpha \frac{3yz}{r^5}, \alpha \frac{2z^2 - y^2}{r^5}] \tag{10}$$

となる。

問 2 (2)  $y=rsin\theta$  と  $z=rcos\theta$  を (10) 式に代入し、以下により  $B_r$  と  $B_\theta$  を求める。

$$B_r = B_z cos\theta + B_y sin\theta = \alpha \frac{2cos\theta}{r^3}$$
 (11)

$$B_{\theta} = -B_{z} sin\theta + B_{y} cos\theta = \alpha \frac{sin\theta}{r^{3}}$$
 (12)

問 2 (3) 磁力線の接線が磁界の方向なので、磁力線の方程式は、極座標を用いて

$$\frac{dr}{\frac{B_r}{\mu_0}} = \frac{rd\theta}{\frac{B_\theta}{\mu_0}} \tag{13}$$

と表される。ここに、(11)、(12) 式を代入して

$$\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta} \tag{14}$$

を得る。

この方程式を解いて

$$r = C \sin^2 \theta \tag{15}$$

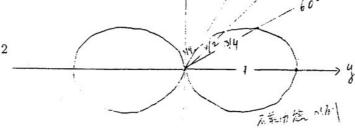
なる磁力線群の式を得る。 C は定数である。

磁力線の概略を求めるため、C=1と取り、rと $\theta$ の関係を調べる。

$$\theta = 0 = \pi/6 = \pi/4 = \pi/3 = \pi/2$$

$$r = 0 = 1/4 = 1/2 = 3/4 = 1$$

これらの値を極座標にプロットして、磁力線を得る。磁力線の概略を下 (C=30°45° 図に示す。



電気A·B 2/26