

九州大学大学院システム情報科学府

電気電子工学専攻

平成 2 7 年度入学試験問題

【平成 2 6 年 8 月 2 1 日（木）、2 2 日（金）】

数 学 (Mathematics)

(7枚中の1)

解答上の注意 (Instructions):

- 問題用紙は、『始め』の合図があるまで開いてはならない。
Do not open this cover sheet until the start of examination is announced.
- 問題用紙は表紙を含め7枚、解答用紙は3枚つづり (1分野につき1枚) である。
You are given 7 problem sheets including this cover sheet, and 3 answer sheets (1 sheet for each field).
- 以下の6分野から3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the following 6 fields and answer the questions. You must use a separate answer sheet for each of the fields you selected.

	分野	field	page
1	線形代数	Linear algebra	2
2	微分方程式	Differential equation	3
3	ベクトル解析	Vector analysis	4
4	複素関数論	Complex function theory	5
5	確率・統計	Probability and statistics	6
6	記号論理学	Symbolic logic	7

- 解答用紙の全部に、専攻名、コース名 (情報学専攻を除く)、選択分野番号 (○で囲む)、受験番号および氏名を記入すること。
Fill in the designated blanks at the top of each answer sheet with the department name, course name (except the department of informatics), the selected field number (mark with a circle), your examinee number and your name.
- 解答は解答用紙に記入すること。スペースが足りない場合は裏面を用いても良いが、その場合は、裏面に解答があることを明記すること。
Write your answers on the answer sheets. You may use the backs of the answer sheets when you run out of space. If you do so, indicate it clearly on the sheet.

数学 (Mathematics)

(7枚中の2)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

1. 【線形代数 (Linear algebra) 分野】

実ベクトル空間 \mathbf{R}^N にベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ が与えられているとする。 $A = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \in \mathbf{R}^{N \times N}$ とおく。ただし、 \mathbf{x}_i^T は \mathbf{x}_i の転置を表す。また、実ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ に対し、

$$\sigma_{\mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\mathbf{u}^T \mathbf{x}_i)^2}$$

と定義する。このとき、以下の各問に答えよ。

(1) 任意の実ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ に対し、 $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \mathbf{u}^T A \mathbf{u}$ が成り立つことを示せ。

(2) A の固有値がすべて非負であることを示せ。

(3) ある実行列 B が存在して、 $A = B^T B$ が成り立つことを示せ。

ヒント： A は実対称行列なので対角化可能。

(4) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^N$ に対し、 $\sigma_{\mathbf{u}} + \sigma_{\mathbf{v}} \geq \sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ が成り立つことを示せ。

ヒント：問 (3) の行列 B による変換 $\mathbf{z} \mapsto \tilde{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$ ($\mathbf{z} \in \mathbf{R}^N$) を用いよ。

We are given vectors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ in a real vector space \mathbf{R}^N . Let $A = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \in \mathbf{R}^{N \times N}$, where \mathbf{x}_i^T denotes the transpose of \mathbf{x}_i . For a real vector $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$, let

$$\sigma_{\mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\mathbf{u}^T \mathbf{x}_i)^2}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \mathbf{u}^T A \mathbf{u}$ holds for any real vector $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$.

(2) Show that the eigenvalues of A are all non-negative.

(3) Show that there exists a real matrix B such that $A = B^T B$.

Hint: A is diagonalizable since it is real symmetric.

(4) Show that $\sigma_{\mathbf{u}} + \sigma_{\mathbf{v}} \geq \sigma_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ holds for any \mathbf{u} and \mathbf{v} in \mathbf{R}^N .

Hint: Consider the transformation $\mathbf{z} \mapsto \tilde{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$ ($\mathbf{z} \in \mathbf{R}^N$) with the matrix B in (3).

数 学 (Mathematics)

(7枚中の3)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

2. 【微分方程式 (Differential equation) 分野】

次の微分方程式を解け。

$$(1) (2xy^3 - e^x \cos y)dx + (3x^2y^2 + e^x \sin y)dy = 0$$

$$(2) \left(y + \frac{-2y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(x + \frac{2x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

Solve the following differential equations.

$$(1) (2xy^3 - e^x \cos y)dx + (3x^2y^2 + e^x \sin y)dy = 0$$

$$(2) \left(y + \frac{-2y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(x + \frac{2x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

数学 (Mathematics)

(7枚中の4)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

3. 【ベクトル解析 (Vector analysis) 分野】

直交座標系において、 x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。次の各問に答えよ。

(1) 点 (1,0,1) から点 (0,1,1) にいたる曲線 C に沿って、次の線積分を計算せよ。

$$\int_C \frac{x^2 dx + dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad C : x^2 + y^2 = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0), \ z = 1$$

(2) ベクトル場を $\mathbf{F} = ze^{2xy}\mathbf{i} + 2xy \cos y\mathbf{j} + (x + 2y)\mathbf{k}$ とする。点 (2,0,3) における $\nabla \times \mathbf{F}$, 及び $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ を計算せよ。

The unit vectors on x, y and z axes of Cartesian coordinates are denoted \mathbf{i}, \mathbf{j} and \mathbf{k} , respectively. Answer the following questions.

(1) Evaluate the line integral along the following curve C from (1,0,1) to (0,1,1).

$$\int_C \frac{x^2 dx + dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad C : x^2 + y^2 = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0), \ z = 1$$

(2) Let the vector field $\mathbf{F} = ze^{2xy}\mathbf{i} + 2xy \cos y\mathbf{j} + (x + 2y)\mathbf{k}$. Evaluate $\nabla \times \mathbf{F}$ and $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ at the point (2,0,3).

数学 (Mathematics)

(7 枚中の 5)

6 分野のうちから 3 分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

4. 【複素関数論 (Complex function theory) 分野】

次の積分の値を複素積分を用いて求めよ。ただし、 $0 < p < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ とする。

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + p \cos \theta} d\theta$$

Evaluate

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + p \cos \theta} d\theta$$

using complex integration, where $0 < p < 1$ and $n = 0, 1, 2, \dots$.

数学 (Mathematics)

(7枚中の6)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

5. 【確率・統計 (Probability and statistics) 分野】

21枚のカードがある。カードには $A, B, C, 1, 2, \dots, 9$ のいずれかが書かれており、 A, B, C の書かれたカードは各1枚ずつ、 $1, 2, \dots, 9$ の書かれたカードは各2枚ずつある。試行「21枚のカードから一様ランダムに1枚選ぶ」を繰り返す。以下の各問に答えよ。

- (1) A または B または C が1回現れるまでに要した試行の回数を X とする。 X の期待値を求めよ。
- (2) A, B, C のいずれもが1回以上現れるまでに要した試行の回数を Y とする。 Y の期待値を求めよ。
- (3) $1, 2, \dots, 9$ のいずれもが1回以上現れるまでに要した試行の回数を Z とする。 Z の期待値と Y の期待値のいずれが大きいか？理由とともに答えよ。
- (4) 試行を n 回繰り返したとき、 A, B, C のいずれもが1回以上現れている確率を P とする。 P を n の式で表せ。

There are 21 cards labeled with each of $A, B, C, 1, 2, \dots, 9$. For each of A, B, C , there is one card labeled with it, and for each of $1, 2, \dots, 9$, there are two cards labeled with it. Consider to repeat trials each of which is “to draw one from 21 cards uniformly at random.” Answer the following questions.

- (1) Let X denote the number of trials repeated until any one of A, B, C appears. Find the expectation of X .
- (2) Let Y denote the number of trials repeated until each of A, B, C appears at least once. Find the expectation of Y .
- (3) Let Z denote the number of trials repeated until each of $1, 2, \dots, 9$ appears at least once. Establish which is greater, the expectation of Z or the expectation of Y .
- (4) Let P denote the probability that each of A, B, C appears at least once after n trials. Describe P using n .

数学 (Mathematics)

(7枚中の7)

6分野のうちから3分野を選び解答すること。選んだ分野毎に解答用紙を別にすること。
Select 3 fields out of the 6 fields and answer the questions. Use a separate answer sheet for each field.

6. 【記号論理学 (Symbolic logic) 分野】

- (1) シーケント $p, \neg(q \wedge r) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$ を自然演繹法で証明せよ。
- (2) $\phi = (p \leftrightarrow (q \vee r)) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow \neg p)$ とする。
- (a) ϕ を CNF に変換せよ。
- (b) ϕ の充足不能性を導出法により示せ。
- (3) (a) 以下の文を述語論理式で表せ。但し、述語 $H(x):x$ は英雄, $F(x):x$ は落伍者, $A(x, y):x$ は y を賞賛する, を使用せよ。
- i. 誰もが英雄を賞賛する。
- ii. 落伍者は誰をも賞賛する。
- iii. 英雄でない人は落伍者である。
- iv. 互いに賞賛し合う (異ならずともよい) 人の対が存在する。
- (b) iv は $i \wedge ii \wedge iii$ の論理的帰結であることを示せ。

- (1) Give a natural deduction proof of the sequent

$$p, \neg(q \wedge r) \vdash (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r).$$

- (2) Let $\phi = (p \leftrightarrow (q \vee r)) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow \neg p)$.

- (a) Convert ϕ into CNF.
- (b) Show by resolution that ϕ is unsatisfiable.

- (3) (a) Put the following sentences into predicate formulas. Use the predicates $H(x):x$ is a hero, $F(x):x$ is a failure, and $A(x, y):x$ admires y .

- i. Everyone admires a hero.
- ii. A failure admires everyone.
- iii. Anyone who is not a hero is a failure.
- iv. There is a pair of individuals (not necessarily distinct) who admire each other.

- (b) Show that iv is a logical consequence of $i \wedge ii \wedge iii$.

専門科目 I (Special subjects I)

解答上の注意 (Instructions):

1. 問題用紙は、『始め』の合図があるまで開いてはならない。
Do not open this cover sheet until the start of examination is announced.
2. 問題用紙は表紙を含め 9 枚，解答用紙は 3 枚である。
You are given 9 problem sheets including this cover sheet, and 3 answer sheets.
3. 以下の 3 分野から 1 分野を選び解答すること。
Select 1 out of the following 3 fields and answer the questions.

	分野	field	page
1	電気回路	Circuit theory	2 ~
2	電子回路	Electronic circuits	4 ~
3	制御工学	Control engineering	6 ~

4. 解答用紙の全部に，志望するコース名，選択分野名，受験番号および氏名を記入すること。
Fill in the designated blanks at the top of each answer sheet with the course name, your selected field name, your examinee number and your name.
5. 解答は解答用紙に記入すること。大問一つあたり一枚の解答用紙を用いよ。スペースが足りない場合は裏面を用いても良いが，その場合は，裏面に解答があることを明記すること。
Your answers should be written on the answer sheets. Use one sheet for each question. You may continue to write your answer on the back of the answer sheets if you need more space. In such a case, indicate this clearly.

電気回路

4問中3問を選び、解答用紙欄に解答した問題番号を記入すること。

【問1】 図1の回路について、以下の問いに答えよ。ただし、 $|V_1|=|V_2|=|V_3|$ であり、各素子値の単位は Ω である。

- (1) $V_1, V_2, V_3, I_L, I_C, I_R$ の関係を表すフェーザ図を描け。
- (2) I_L と I_R との位相差 $\arg\left(\frac{I_L}{I_R}\right)$ を求めよ。
- (3) X_1 の値が3であるとき、 X_2 および抵抗 R の値を求めよ。

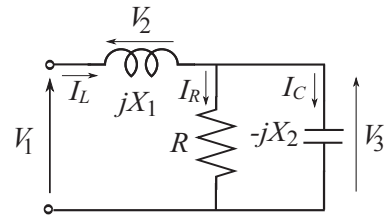
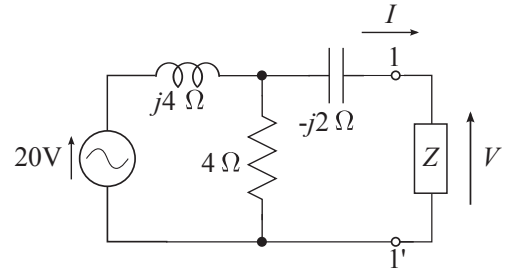


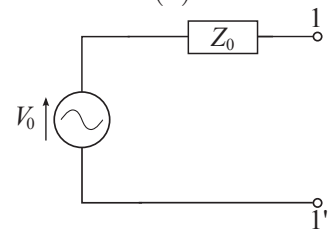
図1

【問2】 図2 (a) の回路において、 $Z=R+jX \Omega$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 図2 (a) の端子対 1-1' の左側の2端子回路が図2 (b) と等価であるとする。 V_0 と Z_0 を求めよ。
- (2) 図2 (a) の負荷が $Z=1+j \Omega$ である時、電圧 V 、電流 I 、負荷 Z における複素電力 P_c 、消費電力 P を求めよ。
- (3) 図2 (a) の負荷 $Z=R+jX \Omega$ において R も X も可変である時、 Z での消費電力 P が最大となる Z を求め、その時の P の値を求めよ。



(a)



(b)

図2

【問3】 図3の回路について、以下の問いに答えよ。ただし、電源 E_1 と E_2 の角周波数を ω とする。

- (1) 閉路電流 I_1, I_2, I_3 に対する閉路方程式を求めよ。
- (2) $E_1 = 12 \text{ V}, E_2 = 6 \text{ V}, R_1 = 1 \Omega, R_2 = 2 \Omega, \omega L = 2 \Omega, (\omega C)^{-1} = 2 \Omega$ のとき、閉路電流 I_1, I_2, I_3 を求めよ。

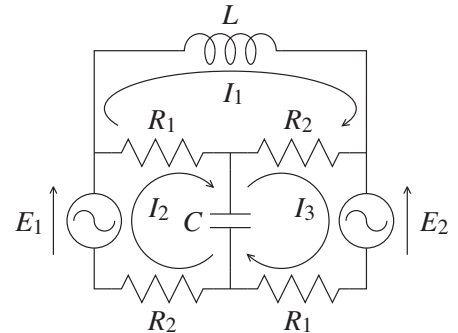


図3

【問4】 図4の回路について、以下の問いに答えよ。ただし、 $e_1(t) = \sin t \text{ V}, E_2 = 0.5 \text{ V}, R = 1 \Omega, C = 1 \text{ F}$ とする。

- (1) スイッチが S_1 に接続されたまま回路が定常状態に達しているとき、電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ を求めよ。
- (2) スイッチが S_1 に接続されたまま回路が定常状態に達し、その後、時刻 $t = 0$ においてスイッチを S_1 から S_2 に切り替えた。このとき、時刻 $t > 0$ における電流 $i(t)$ を求めよ。

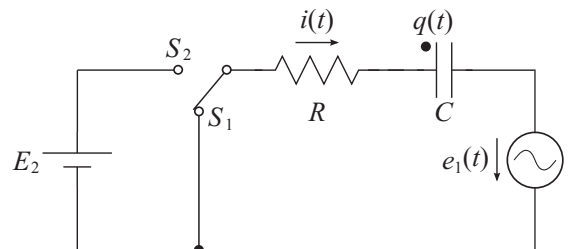


図4

Circuit Theory

Choose three out of the four questions and write the chosen question number on each answer sheet.

[Q1] Consider the circuit shown in Fig. 1, where $|V_1|=|V_2|=|V_3|$, and the values of elements are Ω in units. Answer the following questions.

- (1) Draw a phasor diagram representing the relation among V_1 , V_2 , V_3 , I_L , I_C , I_R .
- (2) Find the phase difference of $\arg\left(\frac{I_L}{I_R}\right)$.
- (3) Determine the values of X_2 and R , when the value of X_1 is 3.

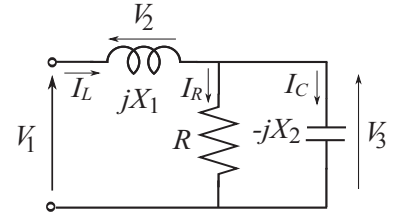
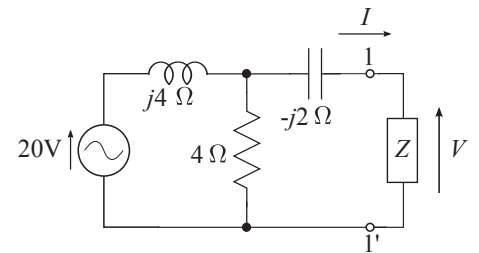


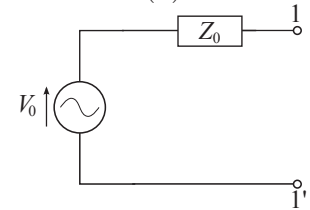
Fig. 1

[Q2] Consider the circuit shown in Fig. 2(a), where $Z=R+jX \Omega$. Answer the following questions.

- (1) Find the voltage V_0 and the impedance Z_0 so that the circuit in the left side of terminals 1-1' shown in Fig. 2(a) is equivalent to the circuit shown in Fig. 2(b).
- (2) Find the voltage V , the current I , the complex power P_c and the power consumption P at the load Z when $Z=1+j \Omega$ in Fig. 2(a).
- (3) When the power consumption P at the load Z is maximized with respect to R and X , find the maximized power consumption P and the value of Z .



(a)



(b)

Fig. 2

[Q3] Consider the circuit shown in Fig. 3, where the sources E_1 and E_2 have the same angular frequency ω . Answer the following questions.

- (1) Write the mesh equations using the mesh currents I_1 , I_2 and I_3 as variables.
- (2) Find the mesh currents I_1 , I_2 and I_3 under the assumption that $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $\omega L = 2 \Omega$ and $(\omega C)^{-1} = 2 \Omega$.

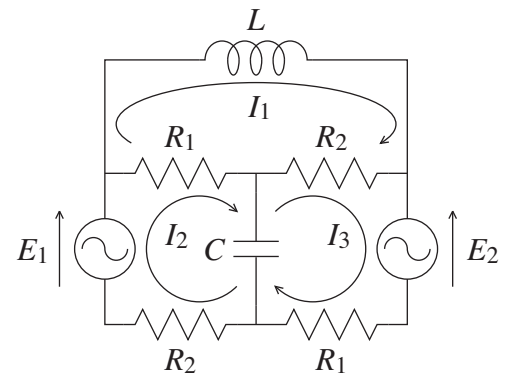


Fig. 3

[Q4] Consider the circuit shown in Fig. 4, where $e_1(t) = \sin t \text{ V}$, $E_2 = 0.5 \text{ V}$, $R = 1 \Omega$, and $C = 1 \text{ F}$. Answer the following questions.

- (1) The switch is connected to S_1 , and the circuit is in steady state. Find the current $i(t)$ and the charge $q(t)$.
- (2) The switch is connected to S_1 , and the circuit is in steady state. Then, the switch is switched from S_1 to S_2 at the time $t = 0$. Find the current $i(t)$ for the time $t > 0$.

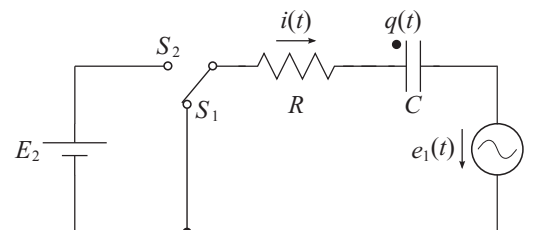


Fig. 4

次の各問（1，2，3）に答えよ。

1. 図1に示す回路の伝達関数 $G(s) = V_o(s) / V_i(s)$ を求めよ。また、図2の場合について、 $G(s)$ を導き、電圧利得および位相の周波数特性の概形を描け。但し、演算増幅器は理想的であるとする。

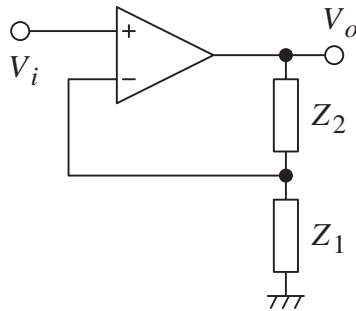


図1

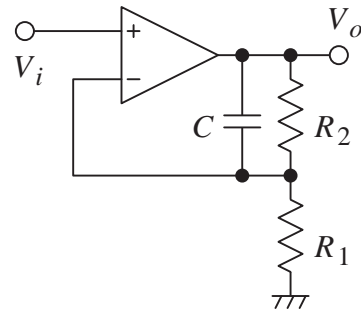


図2

2. 図3に示すLC発振器（コルピッツ発振器）について、次の問に答えよ。

- (1) ループ利得 T を求めよ。
 (2) 発振が定常状態にある時の発振周波数と振幅条件を求めよ。

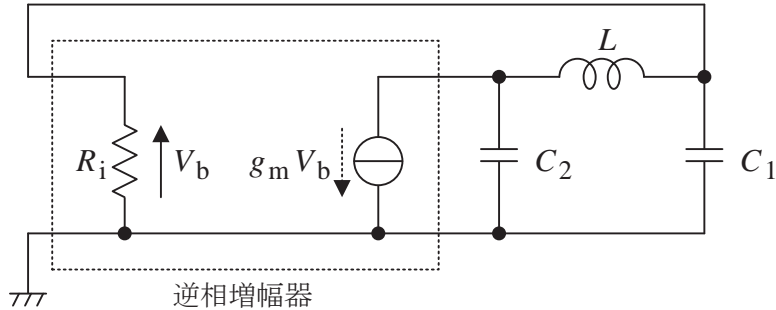


図3

3. 図4に示すクランパに対し、図5に示す入力電圧 V_i を与えたときの出力電圧 V_o の波形を図示し、回路の動作を説明せよ。但し、ダイオード D の等価直列抵抗を r で表し、それ以外の性質は理想的であるとする。また、条件 $r \ll (T/C) \ll R$ が成り立つとする。

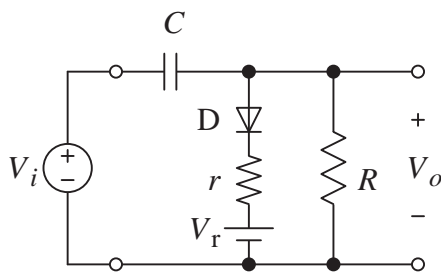


図4

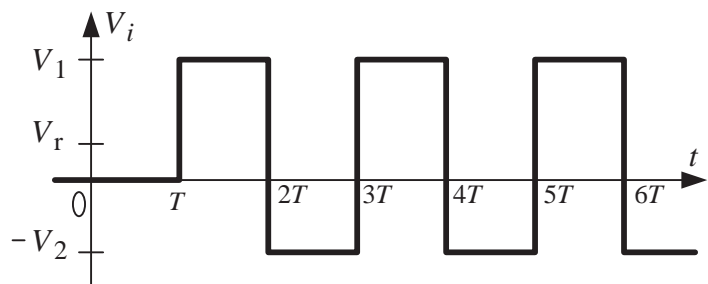


図5

Answer the following questions (1, 2, 3).

1. Derive the transfer function $G(s) = V_o(s) / V_i(s)$ for the circuit shown in Fig. 1. Then, derive $G(s)$ for the circuit shown in Fig. 2, and sketch the frequency characteristics of the voltage gain and the phase. The operational amplifiers are assumed to be ideal.

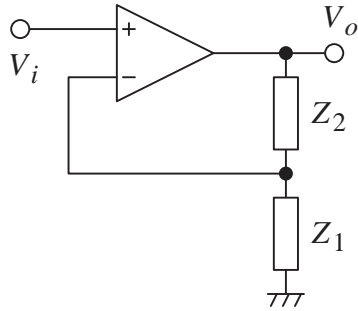


Fig. 1

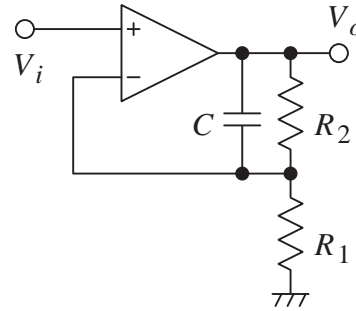


Fig. 2

2. Fig. 3 shows an LC oscillator which is called the Colpitts oscillator.

- (1) Derive the loop gain T .
- (2) Derive the oscillation frequency and the condition for the amplitude when in the steady-state.

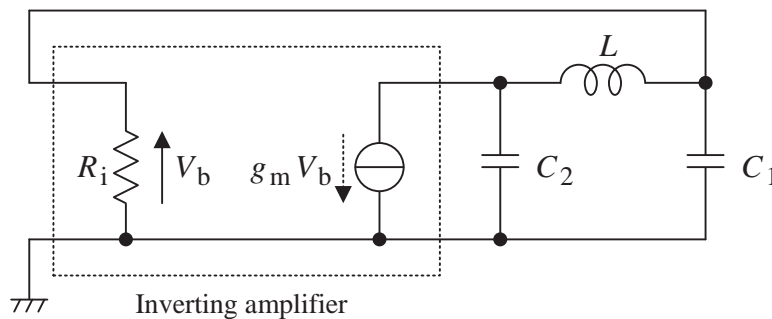


Fig. 3

3. For the clamper shown in Fig. 4, the input voltage V_i shown in Fig. 5 is applied. Sketch the waveform of the output voltage V_o , and describe the circuit operation of the clamper. The diode D is ideal except that it has an equivalent resistance r . The condition $r \ll (T/C) \ll R$ holds.

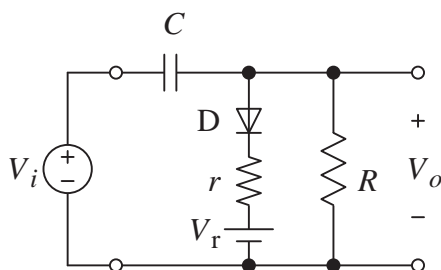


Fig. 4

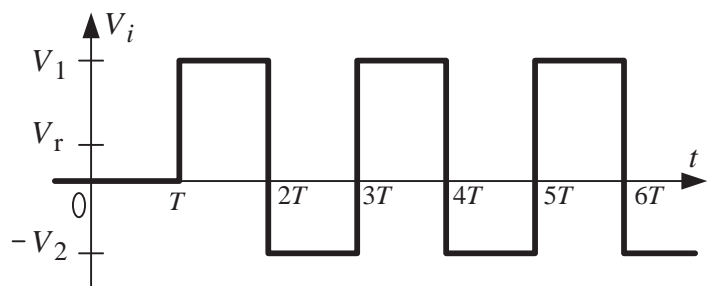


Fig. 5

制御工学

次の各問（[1], [2], [3]）に答えよ．

[1]

図 1 に示した抵抗とコンデンサからなる電気回路をシステムとみなす．ただし，このシステムの入力は端子 AB 間に印加する電圧 v_i ，出力はこのときに端子 CD 間に現れる電位差 v_o とする．

- (1) このシステムを表す伝達関数を求めよ．
- (2) このシステムのボード・ゲイン線図の折れ線近似を描け．グラフの座標軸には，ゲイン線図の特徴を表す座標の値を記入せよ．

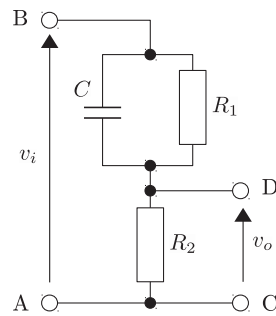


図 1

[2]

図 2 で表されるフィードバック制御系を考える．この制御系の目標値は図 3 で与えられる．

- (1) 図 2 中の伝達関数 $G(s)$ が $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ と与えられているとき，定常偏差を求めよ．
- (2) $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ の時の定常偏差を求めよ．

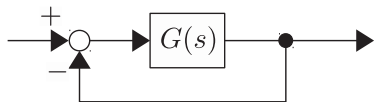


図 2

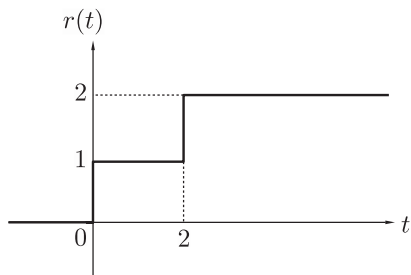


図 3

[3]

次の微分方程式で表されるシステムを考える.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = u(t)$$

ここで y はシステムの出力, u は入力, t は時刻である.

- (1) このシステムを状態方程式と出力方程式を用いて表せ.
- (2) このシステムは可制御であることを示せ.
- (3) 閉ループ系が次のように表される状態フィードバックコントローラを設計せよ.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = r(t)$$

ここで $r(t)$ は参照信号である.

Control engineering

Answer the following questions ([1], [2] and [3]).

[1]

Let us regard the electric circuit shown in Fig.1 as a system, which consists of resistors and a capacitor. The input to the system is the voltage v_i imposed between terminals A and B, and the output is the voltage v_o across terminals C and D.

- (1) Find the transfer function of the system.
- (2) Draw the straight line approximation of the Bode magnitude plot of the system. Write down on the axes the coordinate values that characterize the magnitude plot.

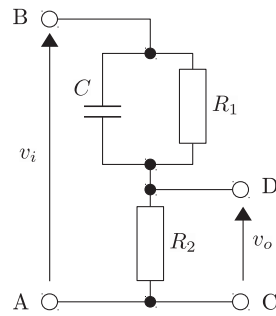


Fig.1.

[2]

Consider a feedback control system shown in Fig.2. The reference value of this system is given as in Fig.3.

- (1) Find the steady state error when the transfer function $G(s)$ in Fig.2 is given as $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.
- (2) Find the steady state error when $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

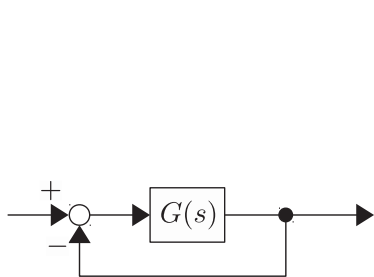


Fig.2.

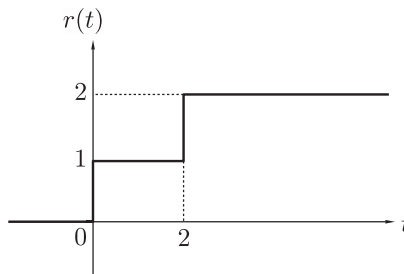


Fig.3.

[3]

Consider a system represented by the following differential equation

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = u(t),$$

where y is the output of the system, and u is the input of the system. t is the time.

- (1) Represent the system using a state equation and an output equation.
- (2) Show the system is controllable.
- (3) Design a state feedback controller for this system by which the closed loop system is represented as

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = r(t),$$

where $r(t)$ is the reference input of the system.

専門科目Ⅱ (Special subjects Ⅱ)

解答上の注意 (Instructions):

1. 問題用紙は、『始め』の合図があるまで開いてはならない.
Do not open this cover sheet until the start of examination is announced.
2. 問題用紙は表紙を含め 19 枚、解答用紙は 3 枚である.
You are given 19 problem sheets including this cover sheet, and 3 answer sheets.

3. 以下の 3 分野から 1 分野を選び解答すること.
Select 1 out of the following 3 fields and answer the questions.

	分野	field	page
1	電磁気学	Electromagnetism	2 ~
2	半導体デバイス	Semiconductor device	8 ~
3	計算機工学	Computer engineering	14 ~

4. 解答用紙の全部に、志望するコース名、選択分野名、受験番号および氏名を記入すること.
Fill in the designated blanks at the top of each answer sheet with the course name, your selected field name, your examinee number and your name.
5. 解答は解答用紙に記入すること. 大問一つあたり一枚の解答用紙を用いよ. スペースが足りない場合は裏面を用いても良いが、その場合は、裏面に解答があることを明記すること.

Your answers should be written on the answer sheets. Use one sheet for each question. You may continue to write your answer on the back of the answer sheets if you need more space. In such a case, indicate this clearly.

次の各問 (問 1 問 2 問 3) に答えよ。

問 1 真空中で, 図 1 のように x - y - z 座標系の x - y 平面 ($z=0$) に無限に広い接地された導体があり, 半径 a の直線導体の中心が $(0, 0, d)$ を通って y 軸に平行に配置されている。ただし, $a \ll d$ とする。直線導体に単位長さ当たり λ の電荷を与えた時, 次の問いに答えよ。真空の誘電率は ϵ_0 とする。

- (1) 直線導体の電位を求めよ。
- (2) 直線導体の単位長さあたりに働く力の大きさを求めよ。
- (3) x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ の電界の大きさと平面導体表面の電荷密度を求めよ。
- (4) $x = -x_0$ から $x = x_0$ の領域に入る電気力線の総数を求めたところ, 直線導体から発生する電気力線の総数の半分であった。 x_0 を求めよ。

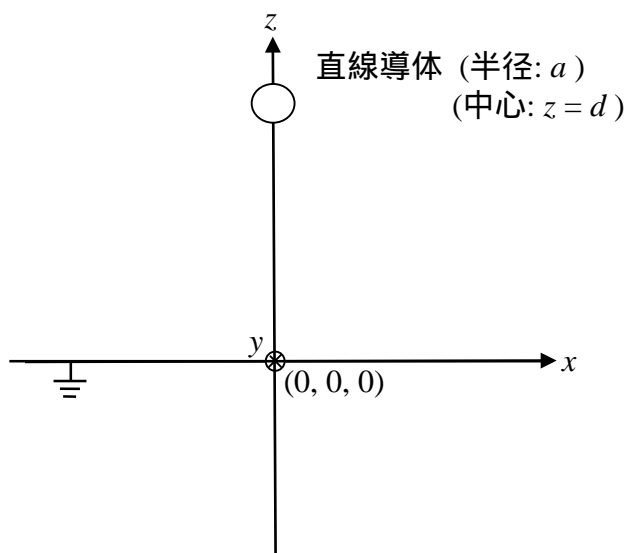


図 1

問 2 図 2 (a), 図 2 (b) に示すように, 半径 a の円柱導体と内径 b ($b > a$) の円筒導体が同軸状に配置され, 長さ L のコンデンサが構成されている. 外側の円筒導体は接地してある. 以下の問いに答えよ. ただし端効果は無視できるものとする.

- (1) 図 2 (a) に示すように, 2 つの導体間が誘電率 ϵ の誘電体で満たされている. 円柱導体に電荷 Q を与えた場合の電界の大きさを円柱導体中心軸からの距離 r の関数として求めよ. また, このコンデンサの電気容量を求めよ.
- (2) 図 2 (b) に示すように, 2 つの導体間の長さ x の部分が誘電率 ϵ の誘電体で満たされており, 残りの部分が真空(誘電率 ϵ_0)である. このコンデンサの電気容量を求めよ.
- (3) (2) の場合に, 2 つの導体間に電圧 V を印加した. コンデンサに蓄積されるエネルギーを求めよ. 誘電体を導体間から抜き出すのに必要な力を x の関数として求めよ. 誘電体を導体間から完全に抜き出すのに必要な仕事を求めよ.

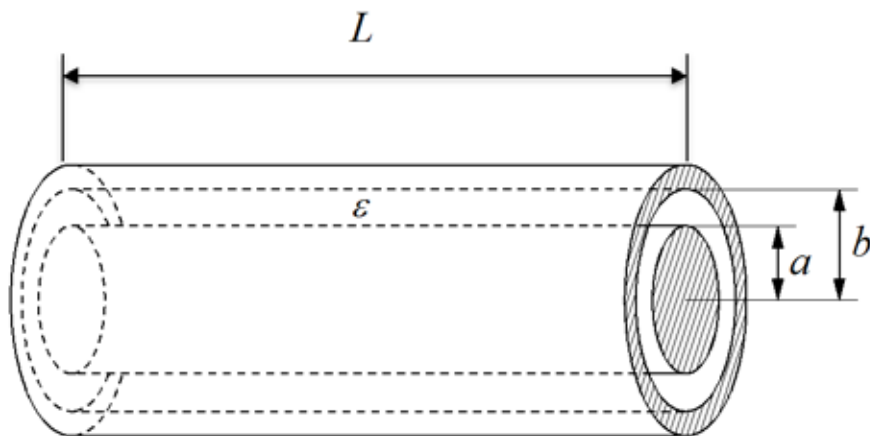


図 2 (a)

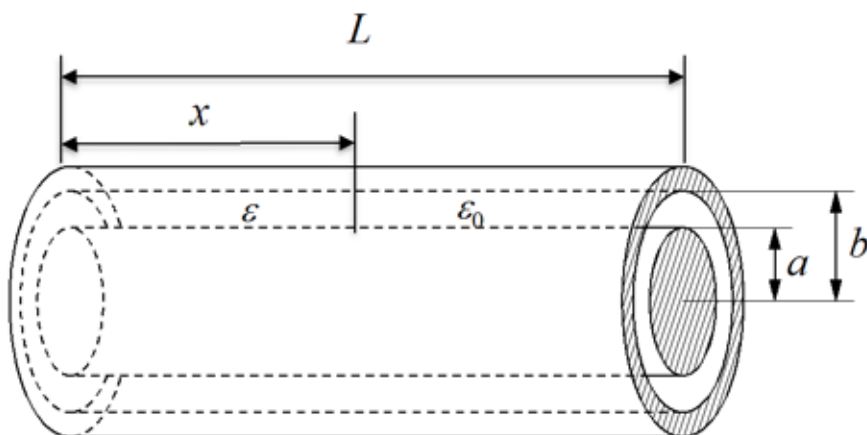


図 2 (b)

問 3 図 3 (a) のような透磁率 m のトロイダル状の鉄心 (コア) がある。トロイダルコアの平均半径を a , 断面積を $A = pb^2$ とする。ただし, b はコア断面の半径である。このコアに巻数 N の導線を巻き, トロイダルコイルを形成している。コイルに図 3 (b) のような電流 $I(t)$ を流した時, 以下の問いに答えよ。ただし, $a \gg b$ とし, 鉄心外への磁界の漏れは無いものとする。

- (1) 鉄心内部の磁束密度の大きさ B を求めよ。また, コイルの自己インダクタンス L を求めよ。
- (2) 時刻 $t > T$ でコイルに蓄えられている磁気エネルギー U_m を求めよ。
- (3) 時刻 t ($0 < t < T$) においてコイル 1 巻当りに誘導される起電力 V を求めよ。また, この結果から鉄心表面に誘導されている誘導電界 E の方向と大きさを求めよ。
- (4) 鉄心表面における時刻 t ($0 < t < T$) でのポインティングベクトル S の方向と大きさを求めよ。
- (5) ポインティングベクトル S を用いて, $t = 0$ から $t = T$ の間に鉄心に蓄えられる磁気エネルギーを求め, (2) の結果と一致することを示せ。

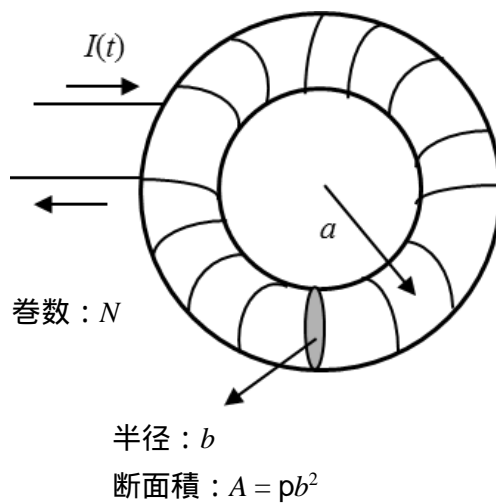


図 3 (a)

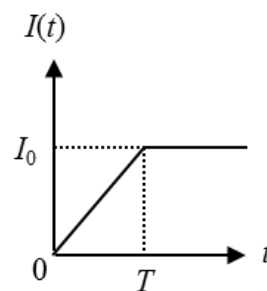


図 3 (b)

2015 Entrance Examination for ISEE (Electromagnetism) (August 21, 2014)
 Answer the following questions ([Question 1] [Question 2] [Question 3]).

[Question 1] In vacuum, a wide plane conductor is placed in the x - y plane ($z = 0$) of the Cartesian x - y - z coordinate, as shown in Fig. 1. The conductor is grounded. A line conductor with a radius of a is arranged in parallel to the y axis, where the center line of the conductor passes the point $(0, 0, d)$, and $d \gg a$. The line conductor is charged with electric charge of λ per unit length. The permittivity of the vacuum is ϵ_0 .

- (1) Give the electric potential of the line conductor.
- (2) Give the electric force per unit length acting on the line conductor.
- (3) Give the magnitudes of the electric field and the charge density on the surface of the plane conductor at $(x, 0, 0)$.
- (4) Give the value of x_0 , when the half of the lines of electric force emerging from the line conductor are ended in the region between $x = -x_0$ and $x = x_0$ on the plane conductor.

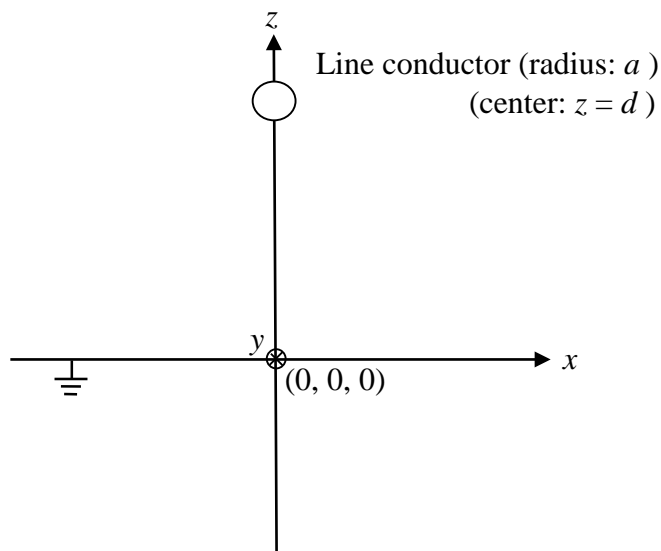


Fig.1

[Question 2] As shown in Fig. 2(a) and Fig. 2(b), a coaxial capacitor of length L consists of a line conductor of radius a and an outer cylindrical conductor of inner radius b . The outer cylindrical conductor is grounded. Answer the following questions. Neglect the edge effect.

- (1) As shown in Fig. 2(a), the space between two conductors is filled with dielectric material of permittivity ϵ . Give the electric field as a function of distance r from the axis of the line conductor, when the inner conductor is charged with Q . Give the capacitance of the coaxial capacitor.
- (2) As shown in Fig. 2(b), the space between two conductors of length x is filled with dielectric material of permittivity ϵ and the rest of the space is vacuum (permittivity ϵ_0). Give the capacitance of the coaxial capacitor.
- (3) In the case of (2), the constant voltage V is applied between the conductors. Give the energy stored in the capacitor. Give the force necessary to pull out the dielectric material as a function of x . Give the work that is necessary to fully pull out the dielectric material from the space between the conductors.

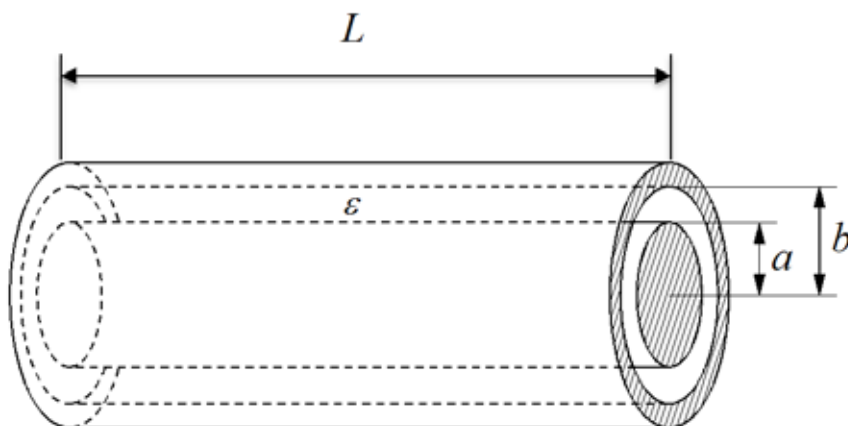


Fig. 2(a)

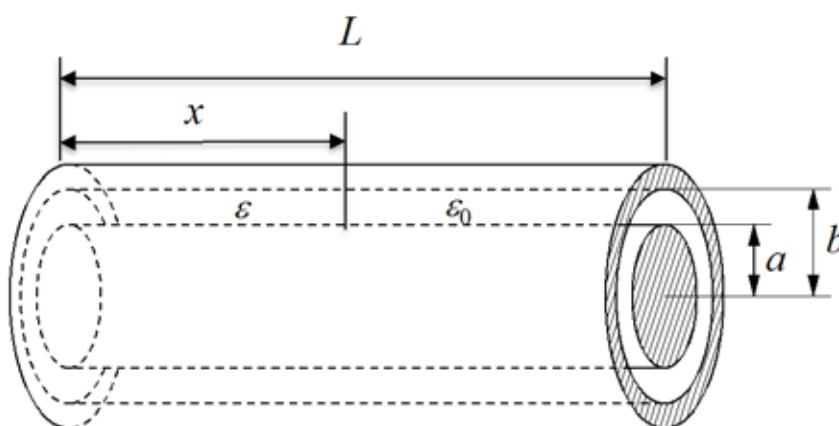


Fig. 2(b)

[Question 3] As shown in Fig. 3(a), there is a toroidal core with permeability μ . The mean radius of the toroidal core is a , and the cross sectional area of the core is $A = \pi b^2$, where b is the radius of the cross section. A coil with number of turns N is wound. A time varying current $I(t)$ is supplied to the coil as shown in Fig. 3(b). Answer the following questions. Here, we assume that $a \gg b$ and that there is no leakage flux from the core.

- (1) Give the magnitude of the magnetic flux density B in the core. Also, give the self-inductance L of the coil.
- (2) Give the magnetic energy U_m stored in the coil for $t > T$.
- (3) Give the electromotive force V induced across one turn of the coil for $0 < t < T$. Also, give the direction and strength of the electric field E that is induced on the surface of the core for $0 < t < T$.
- (4) Give the direction and strength of the Poynting vector S on the surface of the core for $0 < t < T$.
- (5) Give the magnetic energy that is stored in the core from $t = 0$ to $t = T$ by using the Poynting vector S , and show that the result is equal to U_m given in (2).

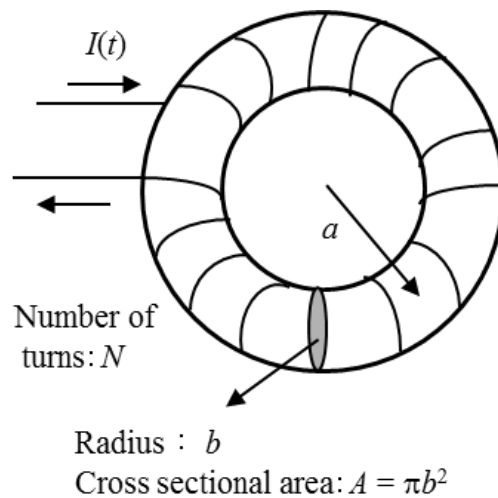


Fig. 3(a)

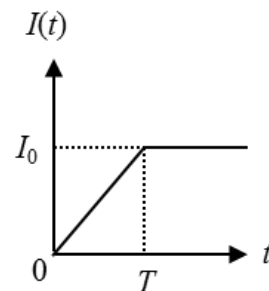


Fig. 3(b)

半導体デバイス

次の各問（**1** **2** **3**）に答えよ．

1

ドナー不純物またはアクセプタ不純物を添加した半導体結晶の長方形の薄板（長さ: 10.0 cm, 幅: 1.0 cm, 厚さ: 1.0 μm ）中のキャリア（電荷: q , 有効質量: m^* ）に関する下記の設問に答えよ．

- (1) 薄板の長さ方向に電界 E を印加した．この時のキャリアの運動方程式を示せ．
- (2) キャリアの平均自由時間（衝突緩和時間）を τ とする．定常状態におけるキャリアのドリフト速度 v を求めよ．
- (3) この半導体結晶薄板におけるキャリアのドリフト速度に関して，次の 2 つの問いに答えよ．ただし，電界 E は，一定の値であり，その大きさは移動度が定義できる範囲，すなわち，電流が電界に比例する範囲にあるものとする．①ドリフト速度の温度依存性のグラフを模式的に描け．グラフでは，縦軸を速度の対数，横軸を絶対温度の対数とし，キャリアのドリフト速度を実線で示せ．②この半導体結晶薄板に含まれる不純物の濃度を増加した．この場合，キャリアのドリフト速度はどのように変化するか？前項(①)で求めたグラフに破線で模式的に示せ．
- (4) 室温において高いドリフト速度を得るための手法に関する次の質問に答えよ．①同じ濃度のドナー不純物を添加した半導体結晶とアクセプタ不純物を添加した半導体結晶では，どちらがキャリアのドリフト速度が大きいか？②半導体としてシリコン(Si)またはガリウムヒ素(GaAs)のいずれを用いるのが有効か？理由とともに答えよ．ただし，電界 E は一定とする．
- (5) 半導体結晶薄板に強い単色光を照射した．単色光の波長が，①0.5 μm ，および②5.0 μm の場合，照射中の薄板の長さ方向の抵抗は，増加するか，減少するか，変化しないか？①および②のそれぞれの場合について，理由とともに答えよ．ただし，半導体のバンドギャップを 1.0 eV，光の速度を 3.0×10^8 m/s，プランク定数を 4.1×10^{-15} eVs とする．

2

p 型半導体と n 型半導体で構成される pn 接合ダイオードに関する以下の設問に答えよ.

- (1) pn 接合の空乏層領域で成立する一次元のポアソン方程式を示せ. ただし, p 型半導体のアクセプタ密度は N_A , n 型半導体のドナー密度は N_D であり, N_A および N_D は, それぞれの領域で一定である. また, 半導体の誘電率は ϵ , 電気素量は q である. 座標軸は x であり, p 型領域の空乏層端, pn 接合界面, および n 型領域の空乏層端の位置は, それぞれ, $x = -x_p$, $x = 0$, および $x = x_n$ である.
- (2) 空乏層の両端($x = -x_p$, $x = x_n$)での電界 E は 0 である. これを境界条件として用い, (1) で得られたポアソン方程式を解いて, 空乏層中の電界分布 $E(x)$ を表す式を求めよ.
- (3) p 型領域と n 型領域の電界は, $x = 0$ で一致することに注意して, x_p と x_n の比を, N_A と N_D を用いて示せ.
- (4) p 型半導体($N_A = 3.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$)と n 型半導体からなる pn 接合がある. この pn 接合に, 逆方向バイアスを印加したとき, 空乏層幅は $22.0 \text{ }\mu\text{m}$ となり, 接合界面から p 型側の空乏層領域, n 型側の空乏層領域の幅は, それぞれ 2.0 , $20.0 \text{ }\mu\text{m}$ であった. ただし, この半導体の真性キャリア密度は $1.5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ である.
 - ① p 型半導体の中性領域における自由電子密度を求めよ.
 - ② p 型半導体のアクセプタ密度は一定のまま, n 型半導体のドナー密度を $1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ に変えた. この pn 接合に逆方向電圧を印加し, 接合界面から p 型側の空乏層領域の幅を $2.0 \text{ }\mu\text{m}$ にした. このときの n 型側の空乏層領域の幅を求めよ.

3 図 1 に示す断面構造をもつエンハンスメント型 MOSFET のゲートとドレインを同図に示すように接続し，ソースを接地してゲート（ドレイン）に電圧 V_G を加えた．このとき，ドレインには，

$$I_D = \frac{1}{2} \mu C_{OX} \frac{W}{L} V_p^2, \quad V_p \equiv V_G - V_{th} \quad (1)$$

で表される電流が流れる．ここで， μ はチャネル内のキャリアの移動度， C_{OX} は単位面積当たりのゲート酸化膜の容量， W はチャネル幅， L はチャネル長， V_{th} はしきい電圧である．この電流はキャリアがドリフトでチャネル内を流れると仮定して求めたものである．本問題は，この仮定が妥当であることを検証しようとするものである．チャネル内の点 x における電位と単位面積当たりの反転電荷密度をそれぞれ $V_c(x)$ ， $Q_I(x)$ とする．以下の問いに答えよ．

- (1) チャネル内のキャリアの種類を記せ．
- (2) V_{th} は正か，負か．
- (3) $Q_I(x)$ を C_{OX} ， V_G ， V_{th} ， $V_c(x)$ を用いて表せ．
- (4) 点 x における x 方向の電界 $E_x(x)$ を求めよ．
- (5) 上の (3)，(4) の結果を利用して，点 x での電流 I_D を表せ．
- (6) 上の (5) で得た式を積分することによって， I_D を x ， μ_n ， C_{OX} ， W ， V_p ， $V_c(x)$ を用いて表せ．
- (7) I_D が式 (1) で表されることを使って， $V_c(x)$ を V_p ， L ， x を用いて表せ．
- (8) $Q_I(x)$ を C_{OX} ， V_p ， L ， x を用いて表せ．
- (9) 上の (8) の結果を用いて $\frac{dQ_I}{dx}$ を求めよ．
- (10) $x = 0$ における自由電子の拡散による電流を求めよ．なお，拡散係数については移動度 μ ，ボルツマン定数 k ，絶対温度 T ，電気素量 q を用いて表せ．
- (11) 上の (8) の結果を利用して， $x = 0$ における自由電子のドリフト電流を求めよ．
- (12) 上の (10) と (11) の結果から，拡散電流がドリフト電流に比べて無視できるほどに小さいことを示せ．

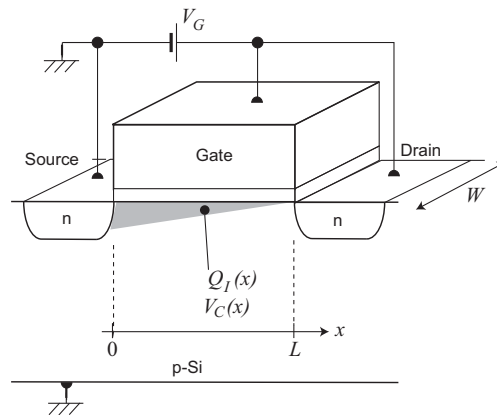


図 1

Semiconductor device

Answer the following questions (1 2 3).

1

Answer the following questions concerning a carrier (electric charge: q , effective mass: m^*) in a crystalline semiconductor rectangular sheet (length: 10.0 cm, width: 1.0 cm, thickness: 1.0 μm) doped with donors or acceptors.

- (1) An electric field E is applied along the length direction of the sheet. Show an equation of motion for the carrier.
- (2) Derive an equation for the drift velocity of the carrier in the steady state. Here, the mean free time between carrier collisions is τ .
- (3) Answer the next two questions concerning the drift mobility of carriers in the crystalline semiconductor sheet. Here, the electric field E is a constant value and in the range, where carrier mobility can be defined, i.e., the current proportionally increases with electric field.
 - ① Sketch a graph of the temperature dependence of the drift velocity, where the y-axis is the logarithm of the drift velocity, the x-axis is the logarithm of absolute temperature. Show the drift velocity of carriers in the crystalline semiconductor sheet with a solid line in the graph.
 - ② The concentration of the impurities doped in the crystalline semiconductor sheet is increased. How does the drift velocity of carriers in the semiconductor sheet change by this increase in the impurity concentration? Show the drift velocity of carriers with a broken line in the graph obtained in ①.
- (4) Answer the following questions concerning methods to obtain high drift velocity at room temperature.
 - ① Which has larger drift velocity, a semiconductor crystal doped with donors at a concentration or that with acceptors at the same concentration?
 - ② Which semiconductor is useful, silicon (Si) or gallium arsenide (GaAs)? Answer with the reason. Here, the electric field E is a constant value.
- (5) The crystalline semiconductor sheet is irradiated with a high intensity monochromatic light. Is the resistance of the sheet along the length direction increased, decreased, or constant during the irradiation, for the cases of wavelengths of ① 0.5 μm and ② 5.0 μm ? Answer for the respective cases of ① and ② with the reasons. Here, the semiconductor energy band gap is 1.0 eV, the velocity of light is 3.0×10^8 m/s, and Plank's constant is 4.1×10^{-15} eVs.

Answer the following questions concerning a pn junction diode, composed of a p-type semiconductor and an n-type semiconductor.

- (1) Show one-dimensional Poisson's equation for a depletion region of a pn junction. Here, the acceptor concentration in p-type semiconductor is N_A , the donor concentration in n-type semiconductor is N_D , and N_A and N_D are constant in the respective regions. The dielectric constant of the semiconductor is ϵ , and the elementary charge is q . The coordinate axis is x , and the positions of the edge of the depletion layer in p-type region, the pn junction interface, and the edge of the depletion layer in n-type region are $x = -x_p$, $x = 0$, and $x = x_n$, respectively.
- (2) The electric field E at both edges ($x = -x_p$, $x = x_n$) are 0. By using this as the boundary conditions, solve the Poisson's equation obtained in (1), and derive an equation of the electric field profile in the depletion layer $E(x)$.
- (3) The electric fields in the n-type region and the p-type region become equal at $x = 0$. Show the ratio of x_p to x_n by using N_A and N_D .
- (4) Consider a pn junction diode, composed of a p-type region ($N_A = 3.0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$) and an n-type region. When a reverse bias is applied to this pn junction, the width of the depletion region becomes $22.0 \text{ } \mu\text{m}$. Here, the depletion layer widths of p-type and n-type regions are 2.0 and $20.0 \text{ } \mu\text{m}$, respectively. The intrinsic carrier concentration in the semiconductor at room temperature is $1.5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$.
 - ① Answer the free electron concentration in the neutral region of the p-type semiconductor.
 - ② The donor concentration in the n-type semiconductor was changed into $1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, with keeping the acceptor concentration in the p-type semiconductor constant. Then, a reverse bias was applied to the pn junction to make the depletion layer width of the p-type region to be $2.0 \text{ } \mu\text{m}$. Answer the depletion layer width of the n-type region.

3 Figure 1 illustrates a MOSFET whose gate and drain electrodes are connected and voltage V_G was applied to the connected node. Assume that the MOSFET is of enhancement type. Under this condition the following drain current flows:

$$I_D = \frac{1}{2} \mu C_{OX} \frac{W}{L} V_p^2, \quad V_p \equiv V_G - V_{th} \quad (1)$$

where μ is the carrier mobility in the channel, C_{OX} is the gate oxide capacitance per unit area, W is the channel width, L is the channel length, and V_{th} is the threshold voltage. This current I_D has been obtained by assuming that carriers in the channel flow by drift. This problem is intended to prove that this assumption is reasonable. $V_c(x)$ and $Q_I(x)$ are potential and charge density per unit area in the inversion layer at position x , respectively. Answer the following questions.

- (1) What is the carrier in the channel of the MOSFET.
- (2) Is V_{th} either positive or negative?
- (3) Express $Q_I(x)$ with C_{OX} , V_G , V_{th} , and $V_c(x)$.
- (4) Obtain the electric field along the x direction, $E_x(x)$.
- (5) Use results of the above (3) and (4) to express the current I_D at x .
- (6) Carry out integration of the equation obtained in the above (5) to express I_D with x , μ_n , C_{OX} , W , V_p , and $V_c(x)$.
- (7) Use Equation (1) to express $V_c(x)$ with V_p , L , and x .
- (8) Express $Q_I(x)$ with C_{OX} , V_p , L , and x .
- (9) Derive $\frac{dQ_I}{dx}$ using the result of the above (8).
- (10) Derive electron diffusion current at $x = 0$. Use the carrier mobility, the Boltzmann constant k , absolute temperature T , and elementary charge q instead of the diffusion constant.
- (11) Derive electron drift current at $x = 0$ using the result of the above (8).
- (12) Compare the magnitude of the diffusion current and the drift current at $x = 0$ and show that the diffusion current is negligibly small.

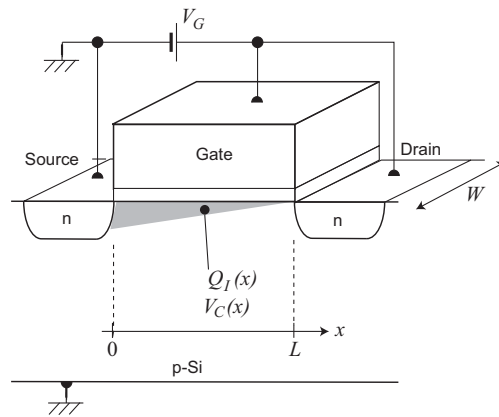


Fig. 1

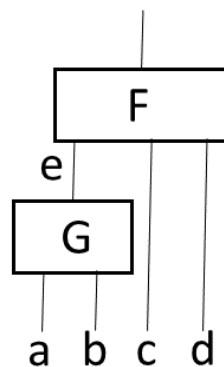
計算機工学

次の各問 (【問 1】 ～ 【問 3】) に答えよ.

【問 1】 以下の真理値表で与えられた論理関数 $H(a, b, c, d)$ について考える. 図に示されるように, 論理関数 H は 2 つの関数 $G(a, b)$ および $F(e, c, d)$ で構成されているものとする. F および G の真理値表を示せ.

論理関数 $H(a, b, c, d)$ の真理値表

a	b	c	d	H	a	b	c	d	H
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1



関数 H の構造

【問 2】 あるプロセッサにおいて、以下の4種類の命令タイプを実装することを考える。各命令タイプの命令実行の各ステップにおける所要時間は下表の通りとする。

命令タイプ	ステップ				
	命令フェッチ	レジスタ 読出し	ALU 演算	データメモリ アクセス	レジスタ 書込み
ロード命令	Y ps	X ps	400ps	Y ps	X ps
ストア命令	Y ps	X ps	400ps	Y ps	
演算命令	Y ps	X ps	600ps		X ps
分岐命令	Y ps	X ps	700ps		

- (1) このプロセッサの構成方式としてシングルサイクル・データパス方式（1 命令の実行を 1 クロックサイクルで実行する方式）を採用した場合のクロックサイクル時間は 3.0ns になった。また、命令パイプライン処理方式（上記の各ステップを 1 パイプラインステージとし、1 ステージを 1 クロックサイクルでパイプライン実行する方式）を採用した場合のクロックサイクル時間は 0.8ns になった。レジスタアクセスよりもメモリアクセスの方がアクセス時間が長いと仮定して、上記の X と Y を求めよ。
- (2) シングルサイクル・データパス方式および命令パイプライン処理方式を採った場合の各命令タイプの実行所要時間（単位は ns）および実行所要クロックサイクル数を求めよ。
- (3) 上記 2 種類の異なるプロセッサ構成方式を採用したプロセッサにおいて以下のプログラムを実行した際のプログラム実行時間（単位は ns）を求めよ。なお、命令パイプライン処理においてデータハザードを考慮する必要はない。

```

lw $2, 20($1)  (R2 ← Memory[R1+20])
and $12, $2, $5  (R12 ← R2 ∧ R5)
or $13, $6, $2  (R13 ← R6 ∨ R2)
add $14, $2, $2  (R14 ← R2 + R2)
sw $15, 100($13)  (R15 → Memory[R13+100])

```

- (4) 上記 (3) のプログラムには 4 つのフロー依存関係が存在する。どの命令がどの命令にどのレジスタ（データ）に関して依存しているかをすべて列挙せよ。

【問 3】 正の辺重み付きの無向グラフ $G = (V, E)$ とその最小全域木 T が与えられている. このとき, T に属さない G の辺 $e \in E$ を 1 本選択し, その重みを減らす. 変更されたグラフ G の最小全域木 T' を効率よく求めるアルゴリズムを示せ.

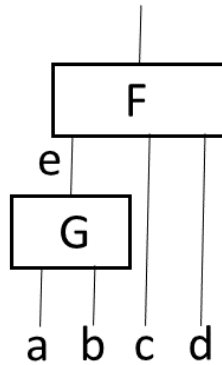
Computer engineering

Answer the following questions (**【Q1】** ~ **【Q3】**).

- 【Q1】** Let $H(a, b, c, d)$ be a logic function whose truth table is shown below. Consider that H is composed of other subfunctions $G(a, b)$ and $F(e, c, d)$ as shown in the following figure. Show the truth tables of F and G .

Truth table of $H(a, b, c, d)$

a	b	c	d	H	a	b	c	d	H
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1



The structure of function H

[Q2] Let us consider that we implement the following four types of instructions for a processor. Assume for each instruction type that each step of the instruction execution requires the time described in the following table.

Instruction Types	Steps				
	Instruction fetch	Register read	ALU operation	Data memory access	Register write
Load	Y ps	X ps	400ps	Y ps	X ps
Store	Y ps	X ps	400ps	Y ps	
ALU	Y ps	X ps	600ps		X ps
Branch	Y ps	X ps	700ps		

- (1) If the single-cycle datapath implementation, where each instruction is executed in a single clock cycle, is used for implementing the processor above, the clock-cycle time is 3.0ns. On the other hand, if the pipelined datapath implementation, where each step of the instruction execution corresponds to a pipeline stage and each stage is performed in a single clock cycle and in a pipelining fashion, is used for implementing the processor, the clock-cycle time is 0.8ns. Compute X and Y, assuming that the memory access time is longer than the register access time.
- (2) For each of the single-cycle datapath and pipelined datapath implementations, compute the execution time (unit: ns) and the number of clock cycles required for each instruction type.
- (3) For each of the two processor implementations above, compute the program execution time (unit: ns) for the following program. Ignore any data hazards which could occur in the pipelined datapath.

```

lw $2, 20($1)  (R2 ← Memory[R1+20])
and $12, $2, $5  (R12 ← R2 ∧ R5)
or $13, $6, $2  (R13 ← R6 ∨ R2)
add $14, $2, $2  (R14 ← R2 + R2)
sw $15, 100($13)  (R15 → Memory[R13+100])

```

- (4) There are four data dependences in the program above. Identify all these data dependences by describing which instruction depends on which instruction through which register.

[Q3] We are given an undirected graph $G = (V, E)$ with positive edge weights and a minimum spanning tree T of G . Suppose that we decrease the weight of an edge $e \in E$ not in T . Give an algorithm for efficiently finding the minimum spanning tree T' of the modified graph.