$\boxed{1}$

1. 次の無限級数の値を三角関数のテーラー展開を利用して求めよ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

2. 次の関数の導関数を求めよ. ただし, $\cos^{-1}$ は主値をとり, $0 \sim \pi$ の値とする.

$$\cos^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$$

3. 次の不定積分を求めよ. ただし, n は正の整数, α は定数とする.

1)

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^n} dx$$

2)

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} \ dx$$

4. 次の関数が xy 平面上の各点において連続であるか不連続かを述べよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{2}$

1. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ.

1) A の固有値を求めよ.

2) A の正規化された固有ベクトルを求めよ.

3) $A = UDU^{-1}$ となるような対角行列 D と直交行列 U を求めよ.

4) A^n を求めよ.

2. 次の n 次行列式の値を求めよ. ただし, 書いてない要素は 0 とする.

$$T_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{im} A_{im} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

T_n を変換すると $T_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & & \\ & & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 & -1 \\ & & & & & 0 & 1 \end{vmatrix}$ となる

よって $|T_n| = 1 \times 1 \times 1 \times \cdots$ (三角行列の性質)

$= 1$

$\boxed{3}$

1. 次の微分方程式を解け.

 1) $\dfrac{dy}{dx} = y + y^2$

 2) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

2. 以下の問に答えよ.

 1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$の特性方程式の解を求めよ.

 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$の一般解を求めよ.

 3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 2e^x$の一般解を求めよ.

3. 以下の設問に答えよ. ただし, cを任意定数とする.

 1) $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 1 = 0$が表す曲線群を図示し, その包絡線の方程式を求めよ.

 2) 曲線群$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 1 = 0$が一般解となるような$y$についての一階の微分方程式を求めよ.

 3) 曲線群の包絡線も 2) で求めた微分方程式の解であることを示せ.

$\boxed{4}$

図1に示すように，原点に質量 M の質点 A が固定され，質量 $2m$ の質点 B が，質点 A から距離 r だけ離れた位置に存在している．ここで，質点 A と質点 B の間には万有引力のみが働き，質点 B は質点 A から距離 r を保ちながら，xy 平面内で速さ v で等速円運動を行っているとして，以下の問に答えよ．ただし，万有引力定数を G とする．

1) 質点Aと質点Bの間に働く万有引力の大きさ F を，G, M, m および r を用いて示せ．

2) 質点 B の加速度の大きさを，r と v を用いて表せ．また質点 B の運動方程式より，rv^2 が一定値になることを示せ．

図 2 のように，質点 B が x 軸上の点 P に達した瞬間，質点 B に互いに逆方向の内力が瞬間的に加わり，それぞれ質量 m の質点 B_1 と質点 B_2 に，相対速度の大きさ $2u$ で分離した．このとき，内力と x 軸のなす角を θ とし，質点 B_1 と質点 B_2 は xy 平面内で運動するものとして，以下の問に答えよ．

3) 分離直後における，質点 B_1 (図 2 で原点から遠ざかる方) の運動エネルギー K と重力ポテンシャルエネルギー U を求めよ．

4) 質点 B_1 が，質点 A の引力圏を脱出し，無限遠に到達するために必要な条件を u, v, θ を用いて表せ．ただし，質点 B_1 と質点 B_2 の間の引力は無視できるとする．

5) 前問4)の条件を満たす u の最小値を v を用いて表せ．

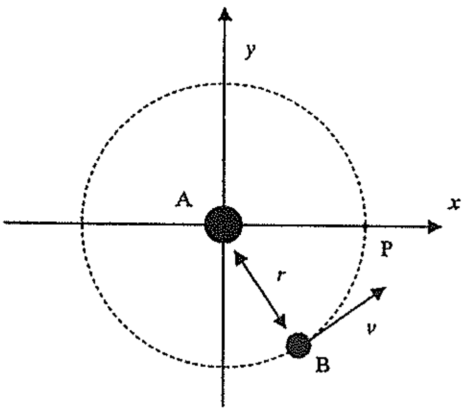

図 1

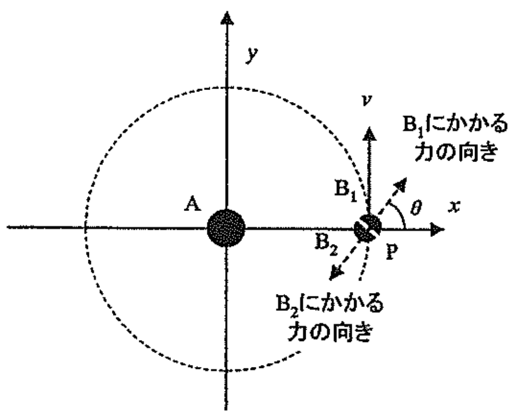

図 2

5

図 1 に示すように，真空中において，半径 a の導体球 A が，内半径 b の中空の導体球 B の中に同心状に配置されている．中空導体球 B は接地されている．導体球 A の中心からの距離を r とする．また，真空の誘電率を ϵ_0 とし，無限遠の電位をゼロとする．

スイッチ S を閉じて，導体球 A を接地した．さらに，導体球 A の中心から半径 $R(a < R < b)$ の位置に，総電荷量 Q の電荷を球殻状に一様分布させた．次の問に答えよ．

(1) 導体球 A の表面に誘導される電荷を Q_A とする．

(a) 領域 $a < r < R$ および $R < r < b$ における電界 E_1 および E_2 を，Q と Q_A を用いて表せ．

(b) 領域 $a < r < R$ および $R < r < b$ における静電エネルギー W_1 および W_2 を，Q と Q_A を用いて表せ．

(c) 中空導体球 B の内面に誘起される電荷 Q_B を，Q と Q_A を用いて表せ．

(2) Q_A および Q_B を a, b, R および Q で表わせ．

(3) 次に，スイッチ S を開放した．球殻状電荷に働く力の方向と単位面積あたりの大きさを求めよ．

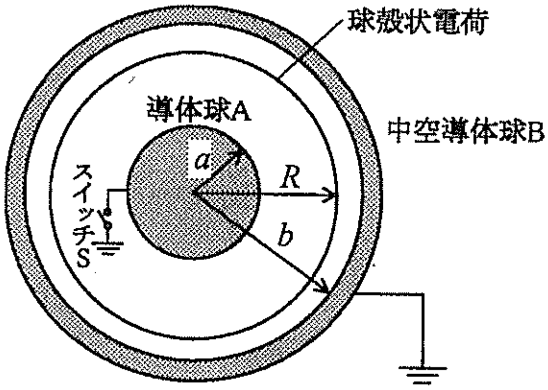

図1

6

電流が真空中に作る磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，真空の透磁率を μ_0 とする．また，下図１，２，３において，z 軸は紙面に垂直で，上向きを $+z$ 方向とする．

１）(a) 図１のように，z 軸方向に平行な導線 L_1 があり，強さ I の直線電流が $+z$ 方向に流れている．このとき，点 A（円筒座標を (r, θ, z) とする）における $\boldsymbol{B}$ の r, θ, z 方向成分 $(B_r,\ B_\theta,\ B_z)$ をそれぞれ求めよ（B_r, B_θ は図１参照，B_z は z 軸方向成分）．ここで，直線電流は十分長く，端の効果は無視できるとする．

(b) 図２のように z 軸方向に平行な２本の導線 L_1, L_2 があり，強さ I の直線電流が同じ向き（$-z$ 方向）に流れている．導線間の距離は $2a$ である．導線 L_2 に働く力の向きと単位長さあたりの大きさを求めよ．

２）図３のように，間隔 d で平行に置かれた２枚の無限平面導体 P_1, P_2 がある（厚みは無視できるものとする）．この平面導体には，同じ強さの一様な電流がそれぞれ $-z$ 方向（P_1），および $+z$ 方向（P_2）に流れている．y 方向の単位長さあたりの電流の強さを i として，以下の問いに答えよ．

(a) 平面導体 P_1 に流れる電流のみにより作られる $\boldsymbol{B}$ の向きと大きさを求めよ．

(b) 平面導体 P_1, P_2 に流れる電流が２枚の平面に挟まれる領域に作る $\boldsymbol{B}$ の向きと大きさを求めよ．また，この領域の外側の $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ．

(c) 平面導体 P_2 に働く力の向きと単位面積あたりの大きさを求めよ．

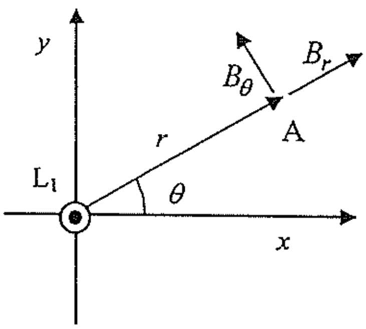

図１

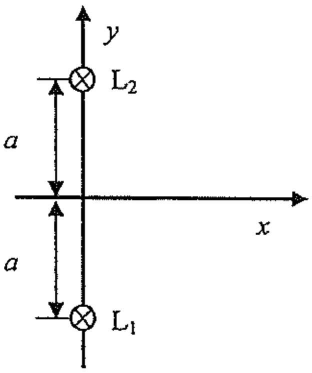

図２

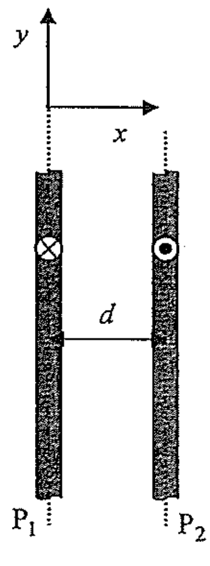

図３