

問題 1.1 電気回路・電子回路 設問すべてについて解答すること。

I 図 1 の交流回路について、次の (1) ～ (3) の問いに答えよ。なお、導出過程も記すこと。

交流電源 E の電圧は、実効値 $50[\text{V}]$ 、角周波数 $\omega=5[\text{rad/s}]$ とし、インダクタンス $L_1=0.2[\text{H}]$ 、インダクタンス $L_2=0.8[\text{H}]$ とする。

(1) スイッチ S が開放されているとき、端子 a - b 間に接続されている電圧計の指示値を求めよ。

また、端子 a - b から電源側を見たインピーダンスの大きさを求めよ。

(2) スイッチ S を閉じて負荷を接続した後、十分に時間が経過した状態を考える。

抵抗 $R=1[\Omega]$ 、静電容量 $C=0.1[\text{F}]$ のとき電圧計の指示値を求めよ。また、このときの負荷の力率を求めよ。

(3) 抵抗 R を流れる電流 I の大きさが、 R の値によらず一定になるときの静電容量 C を求めよ。

ただし、 R の値は有限とする。

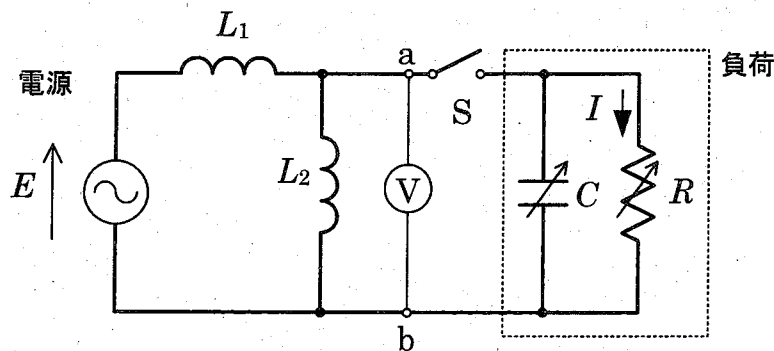


図 1

Ⅱ 図2は2入力 (V_1, V_2), 2出力 (V_3, V_4) のオペアンプ回路である。次の(1)～(3)の問いについて答えよ。なお、導出過程も示すこと。ただしオペアンプの特性は理想的(利得は無限大, 入力インピーダンスは無限大, 出力インピーダンスはゼロ)とする。

- (1) 電位 V_x を求めよ。またその理由を述べよ。
- (2) 出力 V_3, V_4 および出力の電圧差 $V_o = V_3 - V_4$ を, 入力 V_1, V_2 と抵抗 R_1, R_2, R_3 を用いて表せ。
- (3) $R_1 = R_2 = R_3$ とする。入力 V_1, V_2 に図3の電圧波形を加えたときの出力 V_3, V_4, V_o の電圧波形を図3にならって表せ。解答には図4を転記し, 各電圧の波形および点線四角の各位置に波形の最大値, 中央値, 最小値を記入すること。

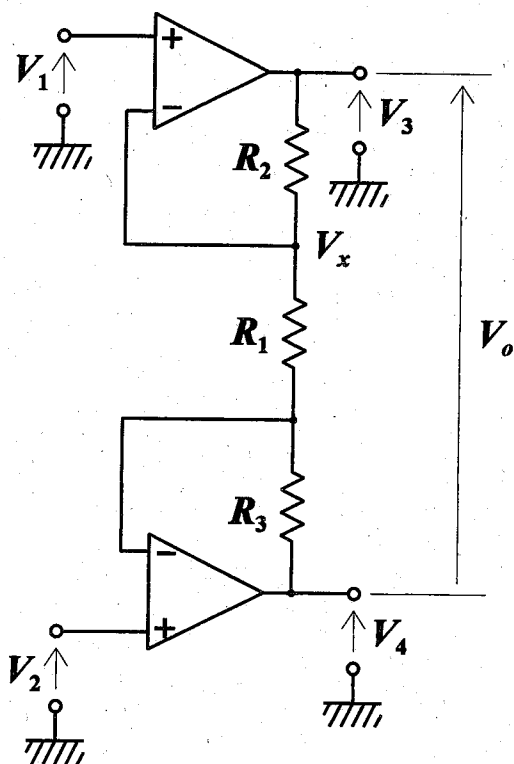


図2

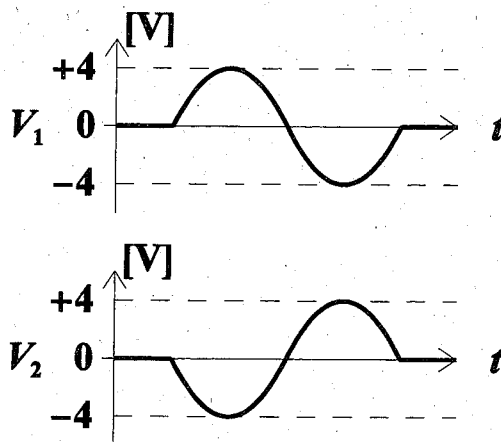


図3

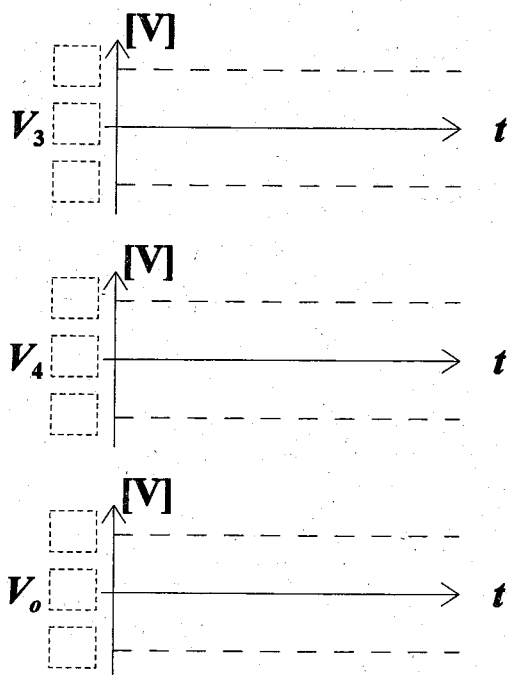


図4

問題 1 2 計測数理解析 設問すべてについて解答すること。

I 二つの確率変数 X, Y は確率的に互いに独立であり、それぞれの密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ は次のように与えられている。

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, \quad -\infty < y < \infty.$$

a, b を定数として、確率変数 W, Z を以下のように定義する。

$$W = aX + bY, \quad Z = bX + aY.$$

$\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, a, b$ を用いて次の (1) ~ (7) の問いに答えよ。

- (1) X, Y それぞれの期待値と分散を書きなさい。
- (2) X^2 の期待値 $E[X^2]$ はどのようなになるか。
- (3) W の期待値 $E[W]$ と分散 $\text{Var}[W]$ を求めよ。
- (4) Z の期待値 $E[Z]$ と分散 $\text{Var}[Z]$ を求めよ。
- (5) W と Z の共分散 $\text{Cov}(W, Z)$ を求めよ。次のことに注意せよ。

$$\text{Cov}(W, Z) = E[(W - E[W]) \cdot (Z - E[Z])]$$

(6) W と Z との相関係数 $\rho(W, Z)$ を求め、 $a \rightarrow \infty$ としたときの極限值を求めよ。次のことに注意せよ。

$$\rho(W, Z) = \frac{\text{Cov}(W, Z)}{\sqrt{\text{Var}[W]}\sqrt{\text{Var}[Z]}}$$

(7) n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n は確率的に独立であり、密度関数は同一で $f_X(x)$ である。 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の期待値と分散を求めよ。

II 二階微分方程式 $d^2y/dx^2 = -4y$ に従う y が, $x = 0$ において $y = 0$ かつ $dy/dx = 1$ とする。以下 (1) から (4) の手順で $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, $x_3 = 3h$ (h は正の微少量) における y の近似解を求め, さらに (5) で厳密解と比較しよう。

(1) 一階微分方程式 $dy/dx = z$ を満たす変数 z を導入する。 y が $d^2y/dx^2 = -4y$ に従うためには, dz/dx を, y を用いてどのような一階微分方程式に設定する必要があるか答えよ。

(2) 上記 (1) でわかった y , z それぞれに関する一階微分方程式を用いて, オイラー法により x_1 での y と z を, h で表せ。

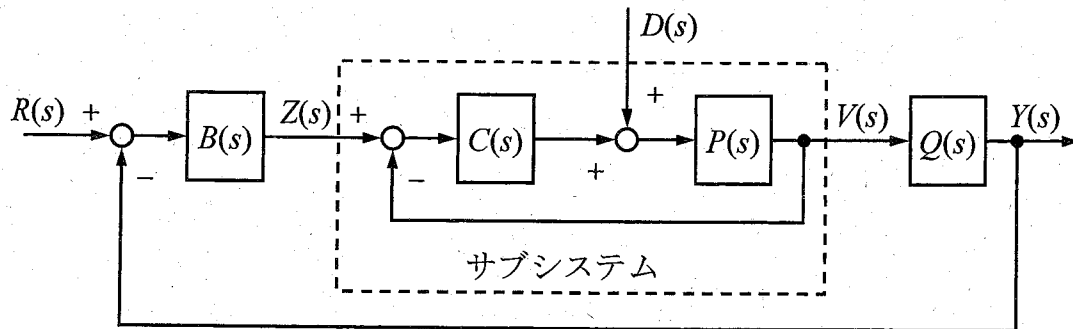
(3) 上記 (2) の結果をふまえて, オイラー法により x_2 での y と z を, h で表せ。

(4) 上記 (3) の結果をふまえて, オイラー法により x_3 での y と z を, h で表せ。

(5) 厳密解 $y(x)$ を求めよ。さらに, 上記 (2) から (4) で求めた x_1 , x_2 , x_3 での y の近似解が, 厳密解と比較して大きい小さいか答えよ。

問題 1 3 制御工学 設問すべてについて解答すること。

I 下図に示すシステムについて、つぎの(1)～(5)の問いについて答えよ。ただし、 $R(s)$, $Y(s)$, $D(s)$, $Z(s)$, $V(s)$ はそれぞれ目標値 $r(t)$, 制御量 $y(t)$, 外乱 $d(t)$, サブシステムの入力 $z(t)$, サブシステムの出力 $v(t)$ のラプラス変換である。



(1) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数および $D(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数を求めよ。

(2) サブシステム内の $C(s)$ を設計することを考える。サブシステムの入力 $Z(s)$ からサブシステムの出力 $V(s)$ までの伝達関数が $\frac{5}{s+5}$ となる $C(s)$ を求めよ。ただし、 $P(s)=\frac{1}{s+1}$ とする。

つぎに、上図において $P(s)=\frac{1}{s+1}$, $Q(s)=\frac{1}{s}$, $C(s)=\frac{3s+16}{s}$, $B(s)=k$ とする。つぎの(3)～(5)の問いについて答えよ。

(3) このシステムが安定となる k の範囲を求めよ。

(4) このシステムが安定であり、目標値 $r(t)$ が0, 外乱 $d(t)$ が単位ステップ関数であるときの制御量 $y(t)$ の定常値を求めよ。また、目標値が0, 外乱が単位ランプ関数であるときの制御量の定常値を求めよ。

(5) このシステムが安定であり、外乱 $d(t)$ が0, 目標値 $r(t)$ が単位ランプ関数であるときの定常偏差を求めよ。

II つぎの (1), (2) の問いについて答えよ。

(1) つぎの伝達関数 $G(s)$ で表されるシステムについて考える。

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)(s+4)}$$

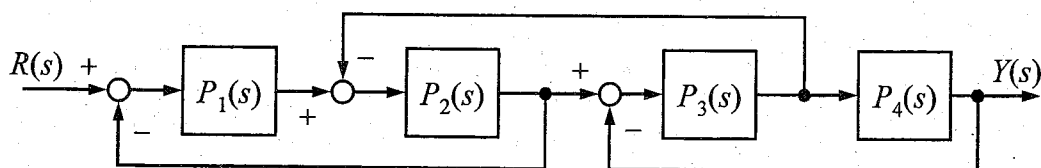
このシステムに つぎの信号 $u(t)$ を入力したときの応答を求めよ。ただし、システムの初期状態は 0 とする。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < 1) \\ 0 & (t \geq 1) \end{cases}$$

(2) 初期状態が 0 であるシステムの単位インパルス応答 $g(t)$ が次式となった。このシステムの単位ステップ応答を求めよ。

$$g(t) = \sin 2t \quad (t \geq 0)$$

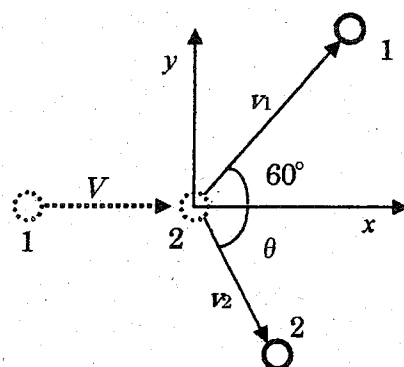
III 下図のフィードバックシステムについて考える。 $R(s)$, $Y(s)$ はそれぞれシステムの入力, システムの出力のラプラス変換を表す。 $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を $P_i(s)$ ($i=1, \dots, 4$) を用いて表せ。



問題 14 力学・材料力学 設問すべてについて解答すること。

I 次の(1), (2)の問いにすべて解答せよ。

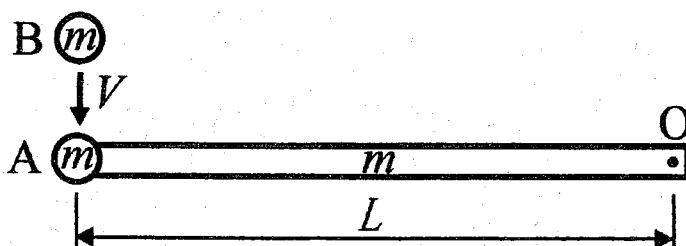
- (1) なめらかな水平面上で質量 m の質点 1 を初速 V (真空中の光速に比べて十分小さい) で静止している質量 m の質点 2 に衝突させたところ、衝突後、質点 1 は入射方向から 60° の方向に、質点 2 は反対側に角 θ の方向に運動した(右図)。質点 2 の初期位置を原点にとり、右図のように x 軸, y 軸を設定する(x 軸は入射方向)。衝突の前後で力学的エネルギーは保存されているとして、以下の設問すべてに答えよ。



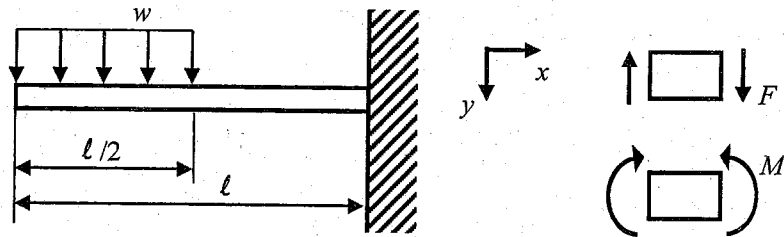
- (a) 衝突後の質点 1 の速さ v_1 , 質点 2 の速さ v_2 , および、角 θ を求めよ。
 (b) 衝突後の質点 1, 質点 2 の位置ベクトルを求めよ。衝突した時刻を 0 とする。
 (c) 質点 1, 質点 2 からなる質点系の重心が衝突前後で同じ等速直線運動をしていることを示せ。
 (d) 質点 1, 質点 2 からなる質点系の重心とともに並進する座標系から見たとき、衝突前後の質点 1, 質点 2 の運動がどのようにみえるか答えよ。
- (2) なめらかな水平面上にある質量 m , 長さ L の細長い剛体棒の一端が摩擦のないピンで支持されており(支持点 O), 他端には質量 m の質点 A が取り付けられている。このとき、以下の設問に解答せよ。ただし、長さ L , 質量 m の細長い剛体棒の重心に関する慣性モーメントは $I_G = mL^2/12$ で与えられる。
- (a) 剛体棒と質点 A からなる系のピン支持点 O に関する慣性モーメント I_O を示せ。

最初剛体棒と質点 A は静止していたが、剛体棒の軸に対して垂直な方向から質量 m の質点 B が速度 V で質点 A と衝突した。衝突後、質点 B は静止した。

- (b) このとき角運動量保存則の式を示し、衝突直後の剛体棒の支持点 O まわりの角速度 ω を求めよ。

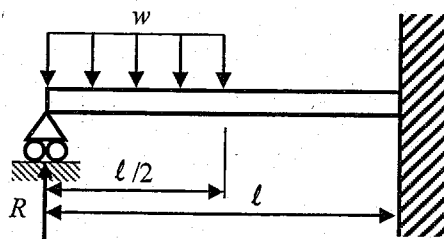


- II 図に示すように、右端を剛体壁に水平に固定された真直な長さ ℓ の片持ちはりがある。はり直径 d の円形の一様断面であり、はりの材料の縦弾性係数は E である。はりの自重は無視でき、はりの左半分に単位長さあたり大きさ w の一様分布荷重を鉛直下方に作用させる。次の (1) ~ (3) の問いについて答えよ。ただし、座標 x, y 、せん断力 F 、曲げモーメント M は、図に示す方向を正とする。



- (1) せん断力図 (SFD)、曲げモーメント図 (BMD) を描き、はりの両端と中央断面におけるせん断力と曲げモーメントを、 w と ℓ を用いて図中に示せ。
- (2) はりに生ずる曲げ応力の大きさの最大値を求めよ。なお、直径 d の円形断面の断面二次モーメントは $\pi d^4/64$ である。

次にいったん荷重を取り除いて、はりの左端を移動支点で支えた後に、ふたたび同じ分布荷重を作用させる。



- (3) このときに移動支点に生じる支点反力 R を求めよ。ただし、はりの横断面の断面二次モーメントを I_z として、導出の過程を書け。

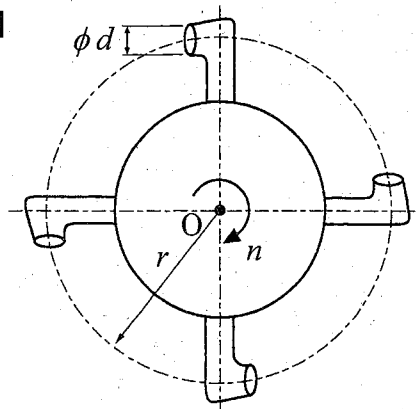
問題 15 流体力学 設問すべてについて解答すること。

解答の注意：解答用紙について、設問Ⅰの解答を表の面、設問Ⅱの解答を裏の面に記入すること。

また、最終的な解答をワクで囲んで明記すること。

Ⅰ 図に示す相等しい4個のノズルの出口（内直径 d ）から大気中に水（一様密度 ρ ）を均等に定常的に噴出することにより、時計回りに定常回転するタービンがある。ただし、タービンの中心部 O （小円部）では水が静止系において半径方向に定常的に供給され（流量は Q ），流動損失やタービンの軸受けの摩擦などは無視できるものとする。各ノズル（1個のノズル）から噴出する水の流量は $Q/4$ ，噴出方向は4個のノズルの出口を通る円（半径 r ）の接線方向，タービンの毎分回転数 [rpm] は n とするとき，以下の（1）～（8）を，下記の【 】内の指示にしたがって順番に求めよ（指定外の記号を用いて答えたり，あとに求められる答えを用いて答えてはいけない）。ここで，答えの最終形（□ のワクで囲むこと）で用いてよい記号は， $[d, Q, r, \rho, \omega]$ の5種類から選ぶこと。ただし， ω はタービンの回転角速度 [rad/s] とする。なお，答えの最終形が，例えば $\boxed{w} = \boxed{4Q/(\pi r^2)}$ ， $\boxed{T} = \boxed{r\rho Q\{\omega d - 4Q/(\pi r^2)\}}$ となるときは，それぞれ2，5種類の記号を用いて答えたことになる（円周率の π は記号に含めないことに注意）。

- （1）タービンの毎分回転数 n 【 ω を用いて表せ】。
- （2）静止系から見た各ノズルの出口部自身の周方向速度 v_T （時計回りを正とする）
【2種類の記号を用いて答えよ】。
- （3）各ノズルから噴出する水の，タービンに相対的な噴出速度 w （出る方向の向きを正とする）
【2種類の記号を用いて答えよ】。
- （4）各ノズルから噴出する水の，静止系から見た噴出速度（周方向速度） v （時計回りを正とする）
【4種類の記号を用いて答えよ】。
- （5）タービンが水から受ける全トルク T （時計回りを正とする）を求めるための法則名。
- （6）タービンが水から受ける全トルク T 【5種類の記号を用いて答えよ】（タービンの中心部 O の小円から半径 r の円（ノズル出口を含むとしてよい）までを検査面として考えよ）。
- （7）タービンが得る動力 P 【5種類の記号を用いて答えよ】。
- （8）仮にタービンが水から受ける全トルクが零（動力が零）とした場合のタービンの回転角速度 ω_{TF} （時計回りを正とする）【3種類の記号を用いて答えよ】



II 無限に広がった領域を占める密度 ρ , 粘度 μ の 3 次元非圧縮性流体の流れを考える。ある初期条件, 及びある境界条件の下で時間発展する速度場 $\mathbf{V}(x, y, z, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 及び圧力場 $p(x, y, z, t)$ が, 時間 t 及び空間座標 (x, y, z) の関数として

$$u = u(z, t), \quad v = v(y), \quad w = -\alpha z, \quad p = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

で与えられるとする。ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はデカルト座標系の直交基底ベクトルを表し, ρ, μ, α はそれぞれ定数とする。速度成分 $u(z, t)$ 及び $v(y)$ は, それぞれ z, t 及び y に依存するある関数であり, $v(y)$ は $y = 0$ で $v = 0$ を満たすものとする。また A, B, C はそれぞれ以下で求められる一定の係数である。

問題文中の微分演算子 ∇ (ナブラ) は, $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ で定義される。以下の問いに答えよ。

- (1) 与えられた速度場が連続の式を満足するように, 関数 $v(y)$ を決定しなさい。
- (2) (1) の結果を用いて, 渦度 $\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k}$ の各成分 (ξ, η, ζ) を, 与えられた速度場を代入して求めなさい。
- (3) (1) の結果を用いて, 与えられた速度場および圧力場が, 粘性流体の運動方程式

$$(\text{ナヴィエ-ストークスの式}) \quad \frac{D}{Dt} \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} \quad \text{を満足するように係数 } A, B, C \text{ を}$$

決定しなさい。ここで, 微分演算子 $\frac{D}{Dt}$ は実質微分 (物質微分) を表す。

十分な時間が経過した後, 流れは定常になった。この時以下の問いに答えよ。

- (4) (1), (3) の結果を用いて u が従う常微分方程式を書きなさい。
- (5) (2), (4) の結果を用いて, η が従う常微分方程式を書きなさい。ただし $\beta = \frac{\alpha \rho}{\mu}$ と置き換えて, β を用いた式を書くこと。
- (6) (5) で得られた常微分方程式を解いて, η を求めなさい。ただし η は $z = 0$ で $\eta = \eta_c$ (η_c は 0 ではない定数) を満たすものとする。

問題 16 熱力学 設問すべてについて解答すること。

理想気体の状態変化(準静的過程)について考える。理想気体の状態方程式を $pV = mRT$ で表す。ここで、 p, V, m, R, T はそれぞれ圧力 [Pa], 体積 [m^3], 質量 [kg], 気体定数 [$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$], 絶対温度 [K] である。また、定積比熱 [$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$], 定圧比熱 [$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$], 比熱比をそれぞれ c_v, c_p, κ で表す。必要ならマイヤーの関係 $c_p - c_v = R$ を利用せよ。なお、比熱は一定とする。

熱の符号については、熱が系に入る場合を正、系から出る場合を負と定義する。仕事の符号については、系が仕事をする場合を正、仕事をされる場合を負と定義する。

- I. 図1において、過程 $1 \rightarrow M \rightarrow 2$ は温度 T_0 の等温変化、過程 $1 \rightarrow A, B \rightarrow 2$ はそれぞれ圧力 $4p_0, p_0$ の等圧変化、過程 $A \rightarrow M \rightarrow B$ は体積 $2V_0$ の等積変化である。

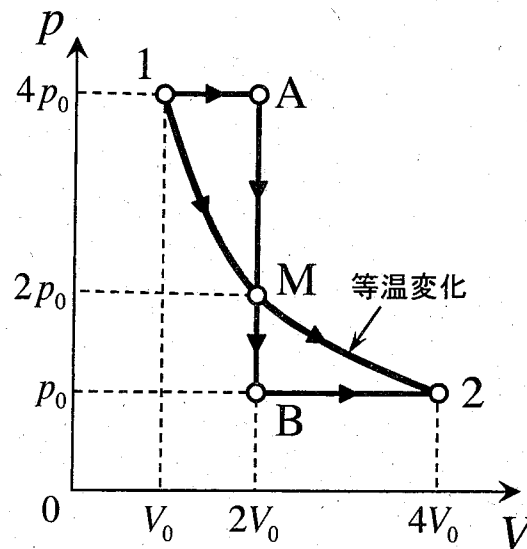


図1 理想気体の状態変化(二つの過程)

- (1) 状態 A と状態 B の温度 T_A, T_B を T_0 で表せ。
- (2) $1 \rightarrow A, A \rightarrow M \rightarrow B, B \rightarrow 2$ の各過程で系に出入りする熱をそれぞれ求めよ。また、それらの和を m, R, T_0 で表せ。
- (3) $1 \rightarrow M \rightarrow 2$ の等温変化において系に入る熱を求めよ。
- (4) $1 \rightarrow M \rightarrow 2$ および $1 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow 2$ の仕事をそれぞれ求めよ。
- (5) 系が状態 1 から状態 2 に変化するときのエントロピー変化を求めよ。

- II. 図2に示すように、温度 T_0 の等温変化 $1 \rightarrow M \rightarrow 2$ を過程 $1 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow 2$ で近似する。ここで、過程 $1 \rightarrow C$ 、 $D \rightarrow 2$ はそれぞれ圧力 $4p_0$ 、 p_0 の等圧変化、過程 $C \rightarrow M \rightarrow D$ は準静的断熱変化（等エントロピ変化）である。

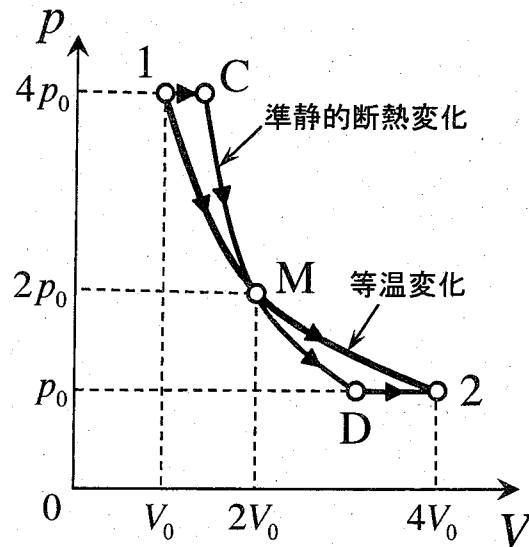


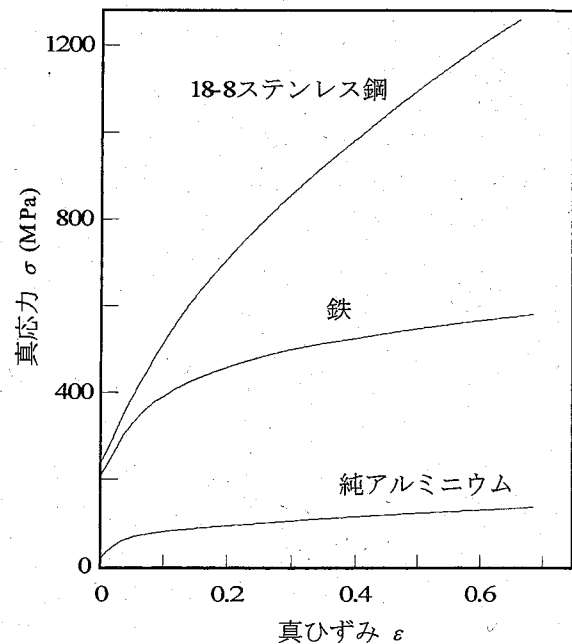
図2 理想気体の状態変化（二つの過程）

- (1) 状態 C と状態 D の体積 V_C 、 V_D を V_0 、 κ で表せ。
- (2) 状態 C と状態 D の温度 T_C 、 T_D を T_0 、 κ で表せ。
- (3) $1 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow 2$ で系に入る熱量を求めよ。
- (4) $1 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow 2$ で系がする仕事を求めよ。

問題 17 生産加工 設問すべてについて解答すること。

I 右下図は純アルミニウム、鉄および 18-8 ステンレス鋼の真応力-真ひずみ曲線である。この図に関連し、次の (1) ~ (5) の問いについて答えよ。

- (1) 18-8 ステンレス鋼とは、いかなる材料か。
- (2) ラセン転位を図示し、交差すべりについて説明せよ。
- (3) fcc 構造を有する金属の (111) 面の原子積層を図示し、部分転位について説明せよ。
- (4) 積層欠陥とは何か。図を用いて説明せよ。
- (5) 各々の材料の加工硬化の大小に関し、積層欠陥エネルギーと関連づけて議論せよ。



II 降伏応力が 120 MPa 一定の薄肉管がある。この管の長さは 500 mm, 外径は 100 mm, 厚さは 1 mm で、両端は開放されており、管の半径方向を r , 周方向を θ , 軸方向を z とする。この管に対して、 z 軸方向に引張力 F と z 軸周りにねじりトルク T を同時に加えた。ただし、管の円筒面上における応力成分は $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ とする。次の (1) ~ (4) の問いに答えよ。

- (1) 降伏直前の管の円筒上にある上記の応力成分のうち 0 でないものを示せ。
- (2) このときの 0 でない応力成分の比を 1 に保ったまま、それらの大きさを増加させたところ、降伏を開始した。降伏した瞬間の応力状態を行列で表示せよ。ただし、ミーゼスの降伏条件を用いよ。
- (3) この瞬間の主ひずみ増分比 $d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3$ を有効数字一桁の簡単な比で示せ。ただし、主ひずみの大きさの順番を $d\epsilon_1 > d\epsilon_2 > d\epsilon_3$ とせよ。また、 $\sqrt{5} = 2.2$ として計算せよ。
- (4) このように降伏した瞬間の F と T を求めよ。

問題 18 量子力学 設問すべてについて解答すること。

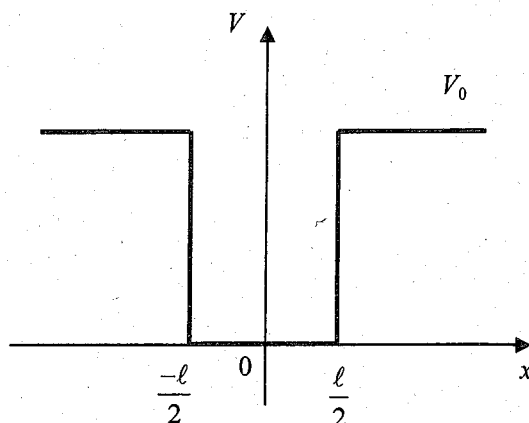
I 有限深さの1次元井戸型ポテンシャル中の質量 m の粒子の運動を考えよう。

粒子のシュレディンガー方程式は、

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{-2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x)$$

で与えられる。ポテンシャル $V(x)$ は、

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \ell/2 \\ V_0, & |x| > \ell/2 \end{cases}$$



($\ell > 0, V_0 > 0$) である (右図参照)。ここで、 $\psi(x)$ は波動関数、 E はエネルギー、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 、 h はプランク定数である。座標 $x \rightarrow \pm\infty$ で、 $\psi = 0$ となる状態を束縛状態と呼ぶ。このとき $E < V_0$ の条件で、 E は不連続固有値 E_n をとる。今、 E_n は、小さいものから順に、 E_0, E_1, \dots とする。

(1) 基底状態を表す波動関数

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos(\alpha x), & (-\ell/2 \leq x \leq \ell/2) \\ C e^{-\beta x}, & (x > \ell/2) \\ C e^{\beta x}, & (x < -\ell/2) \end{cases}$$

(A と C は定数) が、シュレディンガー方程式の解に成るように α と β を E_0, V_0, m, \hbar で表せ。ただし、 $\alpha > 0, \beta > 0$ とする。

(2) $x = \ell/2$ で $\psi(x)$ と $d\psi(x)/dx$ が連続になる条件式 (連立方程式) を示せ。

(3) (2)の条件式から、 A と C を消去して、 α と β の関係式を導け。
この式から、 $V_0 > E_0$ を満たす基底状態は、いつでも存在することが確認できる。

次に、束縛状態にある第一励起状態の波動関数が以下のように与えられるとする。

$$\psi(x) = \begin{cases} B \sin(\alpha' x), & (-\ell/2 \leq x \leq \ell/2) \\ D e^{-\beta' x}, & (x > \ell/2) \\ -D e^{\beta' x}, & (x < -\ell/2) \end{cases}$$

ただし、 B と D は定数、エネルギー固有値は $E_n = E_1$ である。

(4) $x = \ell/2$ で $\psi(x)$ と $d\psi(x)/dx$ が連続になる条件式 (連立方程式) を示し、得られた式から、 B と D を消去して、 α' と β' の関係式を導け。ただし、 $\alpha' > 0, \beta' > 0$ とする。

粒子の束縛状態が基底状態 1 個だけになる条件を求めよう。

(5) 第一励起状態が束縛状態でなくなる条件が $\beta' \rightarrow 0$ および $E_1 \rightarrow V_0$ であることを用いて、束縛状態が基底状態だけになる V_0 の条件を求めよ。

II 1次元空間において粒子の階段型ポテンシャルによる散乱を考えよう。

1次元空間の座標を x とし、以下の階段型ポテンシャルを考える。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 (>0), & x \leq 0, \text{ 領域 I} \\ 0, & x > 0, \text{ 領域 II} \end{cases}$$

ここで、 V_0 は正の定数である。領域 I から領域 II の方向に向って質量 m 、エネルギー $E (> V_0)$ の粒子が入射すると、入射波は階段型ポテンシャル $V(x)$ により、一部は反射されて反射波になり、一部は透過して透過波となる。

(1) 領域 I および領域 II で、波動関数 $\phi_I(x)$ (領域 I)、 $\phi_{II}(x)$ (領域 II) が満たすシュレーディンガー方程式を、それぞれ書け。

(2) 領域 I の波動関数 $\phi_I(x)$ が以下のような場合を考える。

$$\phi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (k > 0) \quad \textcircled{1}$$

ここで A, B は実の定数である。式①が (1) で求めたシュレーディンガー方程式の解になるように波数 k を m, E, V_0 および \hbar ($\hbar = h/2\pi$, h はプランク定数) を用いて表わせ。

(3) 解①は入射波と階段型ポテンシャルによる反射波の重ね合わせである。入射波の確率密度の流れを求めよ。ただし確率密度の流れ $j(x)$ は一般の波動関数 $\psi(x)$ に対して

$$j(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right]$$

で与えられる。解答には波数 k を用いてよい。

(4) 領域 II での波動関数 $\phi_{II}(x)$ を次の透過波の形におく。

$$\phi_{II}(x) = Ce^{iqx}, \quad (q > 0) \quad \textcircled{2}$$

ここで C は実の定数である。式②がシュレーディンガー方程式の解になる波数 q を示せ。

(5) 透過波の確率密度の流れを求めよ。解答には波数 q を用いてよい。

(6) $x=0$ での波動関数とその微分関数の連続条件より、 B/A および C/A を求めよ。
解答には波数 k, q を用いてよい。

(7) 透過率を計算せよ。解答には波数 k, q を用いてよい。

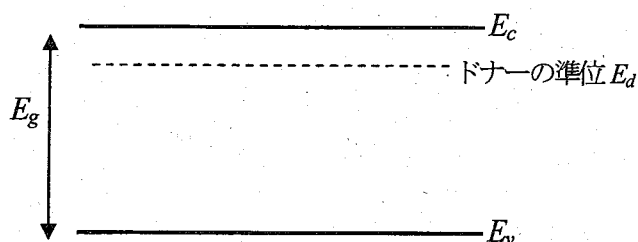
問題 19 電子物性・固体物性 設問すべてについて解答すること。

ある半導体の伝導電子、正孔の密度について考える。温度 T における伝導電子密度 n 、正孔密度 p は次式で表される。

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right), \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right)$$

ここで、 E_c は伝導帯下端のエネルギー、 E_v は価電子帯上端のエネルギー、 E_F はフェルミ準位、 k はボルツマン定数である。また N_c を伝導帯の実効(有効)状態密度、 N_v を価電子帯の実効状態密度とよぶ。

- (1) この半導体が真性(固有)半導体であるとき、温度 T でのフェルミ準位 E_F の式を導け。
- (2) この半導体の禁制(禁止)帯幅を E_g とする。温度 T において真性半導体であるときのキャリア密度 n_i を、 N_c 、 N_v 、 E_g を使って表せ。
- (3) ドナー不純物を密度 N_d 添加する。伝導電子、正孔の電荷を考慮し、電荷中性の条件式を書け。ドナーはすべてイオン化しているとする。
- (4) 室温では n_i は $1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ であった。 N_d が $1 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ であるとき、室温での n 、 p をもとめよ。ドナーはすべてイオン化しているとし、 $N_d \gg p$ であることを利用せよ。
- (5) 温度が上昇し、条件 $N_d \gg p$ が成り立たなくなった。このときの伝導電子密度 n を N_d 、 n_i から計算する式を求めよ。
- (6) 室温から温度を低下させていったところ、ドナーのイオン化率は徐々に低下した。室温と十分な低温におけるフェルミ準位は禁制帯中のどのあたりに位置するか。解答用紙に下の図を描き、室温におけるフェルミ準位と、十分な低温におけるフェルミ準位のおおよその位置を描け。またその考え方を説明せよ。



問題20 計算機基礎 設問すべてについて解答すること。

I 2進数の大小比較を行う回路について、以下の問いに答えよ。

(1) 1ビット2進数 a, b の大小比較を行う関数 $g(a, b), e(a, b)$

(動作を右図に示す) を考える。

(1-1) a, b を入力, $g(a, b), e(a, b)$ を出力とする真理値表を示せ。

(1-2) 作成した真理値表を実現する論理式を示せ。

(2) 2ビット2進数 $(a_1, a_0), (b_1, b_0)$ の大小比較を行う関数 $G(a_1, a_0, b_1, b_0), E(a_1, a_0, b_1, b_0)$ (動作を下図に示す) を考える。

入力	$g(a, b)$	$e(a, b)$
$a > b$ の時	1	0
$a < b$ の時	0	0
$a = b$ の時	0	1

入力	$G(a_1, a_0, b_1, b_0)$	$E(a_1, a_0, b_1, b_0)$
$2a_1 + a_0 > 2b_1 + b_0$ の時	1	0
$2a_1 + a_0 < 2b_1 + b_0$ の時	0	0
$2a_1 + a_0 = 2b_1 + b_0$ の時	0	1

(2-1) $g_1=0, e_1=1$ が出力された場合, 2入力の変数 $(a_1, a_0), (b_1, b_0)$ にどのような関係があるか示せ。なお $g_0=g(a_0, b_0), e_0=e(a_0, b_0), g_1=g(a_1, b_1), e_1=e(a_1, b_1)$ と定義する。

(2-2) $g_1=0, e_1=1, g_0=0, e_0=1$ が出力された場合, 2入力の変数 $(a_1, a_0), (b_1, b_0)$ にどのような関係があるか示せ。

(2-3) (g_1, e_1, g_0, e_0) のうち, 禁止入力(ドントケア)を示せ。

(2-4) g_1, e_1, g_0, e_0 を入力とする下記のような真理値表(16列)を完成させなさい。なおドントケアの場合は X を記入すること。

g_1	e_1	g_0	e_0	G	E
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
以下省略					

(2-5) 上記真理値表からカルノー図を作成するとともに, カルノー図を用いて, $G(g_1, e_1, g_0, e_0), E(g_1, e_1, g_0, e_0)$ それぞれの最小積和形を示せ。

II 加算器の設計に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) 2入力 a, b を加算し, (c_{out}, s) (c_{out} : キャリー, s : 1 ビット和) を出力する半加算器(HA)を考える。HA を, 2入力 AND ゲートを2つ, 2入力 OR ゲートを1つ, NOT ゲートを1つ用いて構成しなさい。
- (2) 3入力 a, b, c_{in} を加算し, (c_{out}, s) (c_{out} : キャリー, s : 1 ビット和) を出力する全加算器を, 2個の HA と最小限の2入力 AND ゲート, 2入力 OR ゲート, NOT ゲートを用いて構成しなさい。なお半加算器は, 図1の表記を用いること。

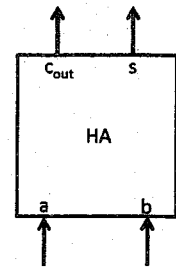


図 1

- (3) 図2の4ビット全加算器に, 最小限の2入力 AND ゲート, 2入力 OR ゲート, NOT ゲートを追加することにより, 補数表現を用いた減算器(演算 $(a_3, a_2, a_1, a_0) - (b_3, b_2, b_1, b_0)$ を実行)を構成し, 図示しなさい。なお外部入力として, 論理値の0, 論理値の1を入力することも可能とする。

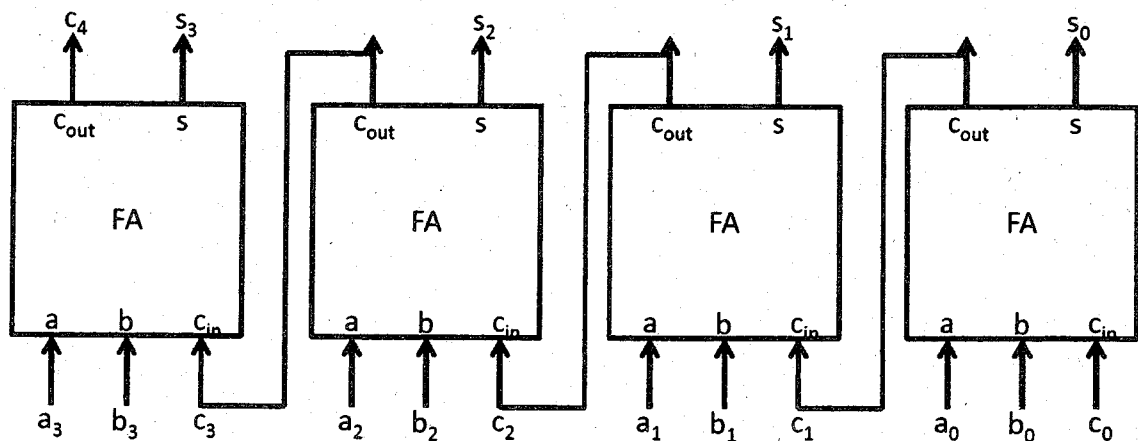


図 2

- (4) 図2の形式((3)で構成した減算器ではない)で構成された全加算器の欠点を演算速度の面から簡潔に指摘しなさい。
- (5) 上記欠点を克服するために, c_n ($n=1, 2, 3$) を前段の全加算器から得るのではなく, より少ない段数の組み合わせ回路で生成する「桁上げ先見(桁上げ生成)加算器」がある。
 - (5-1) i 桁目から桁上げが生成される条件($c_{out}=1$)を表す g_i を a_i, b_i を用いた論理式で示せ。
 - (5-2) i 桁目への桁上げ信号が $i+1$ 桁目に伝播する条件を示す p_i を a_i, b_i を用いた論理式で示せ。
 - (5-3) c_{i+1} ($0 \leq i \leq 3$) を g_i, p_i, c_i を用いた論理式で示せ。
 - (5-4) c_4 を, $g_0, g_1, g_2, g_3, p_0, p_1, p_2, p_3, c_0$ を用いた論理式で示せ。