2014年 3月実施
問題1 電磁気学
(1頁目／2頁中)

Fig. 1のように，電荷Qを持つ半径aの導体球Aが内半径a，外半径b，誘電率ε_1の誘電体球殻と，内半径b，外半径c，誘電率ε_2の誘電体球殻に囲まれている．また，外側には内半径c，外半径dの導体球殻Bがあり，接地されている．以下の問に答えよ．

(1) 導体球Aおよび導体球殻B上の電荷分布を図示し，説明せよ．

(2) 導体球Aの中心からの距離をrとしたとき，$a < r < b$および$b < r < c$における電束密度$\boldsymbol{D}$と電界$\boldsymbol{E}$を求めよ．

(3) $a < r < c$における電位Vを求めよ．

(4) 導体球Aの電位V_aを求め，さらに導体球Aと導体球殻B間の静電容量Cを求めよ．

(5) 導体球Aおよび導体球殻Bに分布する電荷に電気的な力が働いている．その力の方向を図示し，単位面積当たりの力の大きさを求めよ．また，単位面積当たりの力の大きさが静電エネルギー密度と等しいことを示せ．

As shown in Fig. 1, a conducting sphere A of radius a with charge Q is surrounded by a spherical dielectric shell of inner radius a, outer radius b, permittivity ε_1 and a spherical dielectric shell of inner radius b, outer radius c, permittivity ε_2. On the outside, there is a spherical conducting shell B of inner radius c and outer radius d, which is connected to the ground. Answer the following questions.

(1) Sketch the charge distribution on the conducting sphere A and the spherical conducting shell B, then give an explanation.

(2) Assuming r is the distance from the center of the conducting sphere A, derive the electric flux density $\boldsymbol{D}$ and electric field $\boldsymbol{E}$ in the range $a < r < b$ and $b < r < c$.

(3) Derive the electric potential V in the range $a < r < c$.

(4) Derive the electric potential V_a on the conducting sphere A, and then derive the capacitance C between the conducting sphere A and the spherical conducting shell B.

(5) Electric force acts on the charge distributed on the conducting sphere A and the spherical conducting shell B. Sketch the direction of the force, and derive the magnitude of the force per unit area. Further, show that the magnitude of the force per unit area is equal to the density of electrostatic energy.

2014年 3月実施
問題1 電磁気学
(2頁目／2頁中)

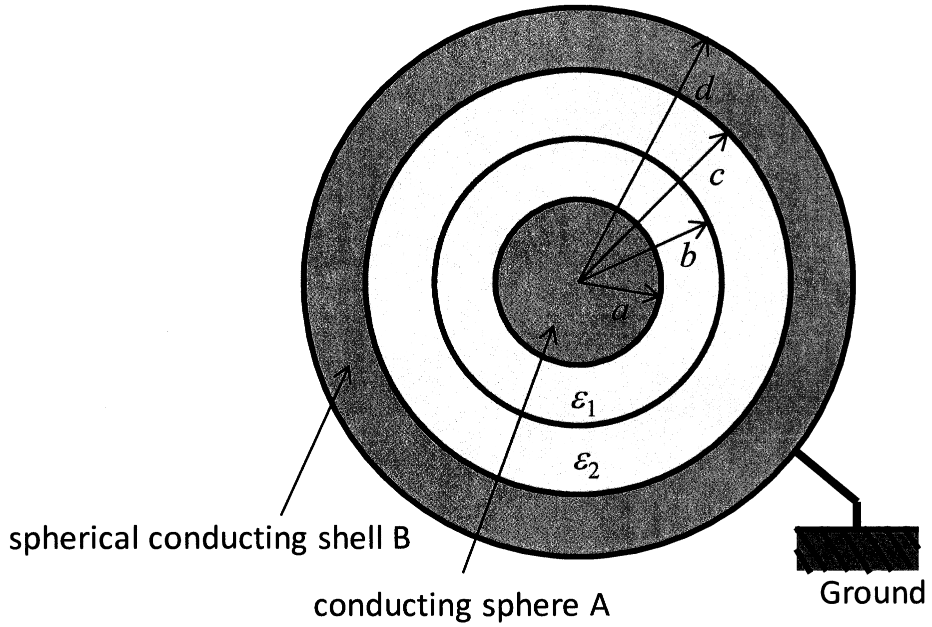

Fig. 1

Question No. 2: Electrical circuits 1／1

2014 年 3 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／1 頁中）

Fig. 2 (a) に示すように，一次回路と二次回路が相互インダクタンス M で結合されている．以下の問に答えよ．

(1) 端子 A-B 間の角周波数 ω におけるインピーダンスを求めよ．

(2) 端子 A-B 間に角周波数 $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ の正弦波交流電圧源を接続する．以下の問に答えよ．

  (a) 電流 I_1 に対する電流 I_2 の位相角を求めよ．

  (b) 電圧比 $G = |V_2|/|V_1|$ を求めよ．

(3) 端子 A-B 間に Fig. 2 (b)の回路を接続する．ここで正弦波交流電圧源 E の角周波数は $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ である．二次回路に最大の電流を与えるための相互インダクタンス M を求めよ．

As shown in Fig. 2 (a), the primary circuit and the secondary circuit are coupled by a mutual inductance M. Answer the following questions.

(1) Find the impedance between the terminals A-B at an angular frequency ω.

(2) A sine wave AC voltage source of an angular frequency $\omega = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ is connected between the terminals A-B. Answer the following questions.

  (a) Find the phase angle of the current I_2 relative to the current I_1.

  (b) Find the voltage ratio $G = |V_2|/|V_1|$.

(3) The circuit in Fig. 2 (b) is connected between the terminals A-B. Here the angular frequency of the sine wave AC voltage source E is $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Find the mutual inductance M for providing the maximum current to the secondary circuit.

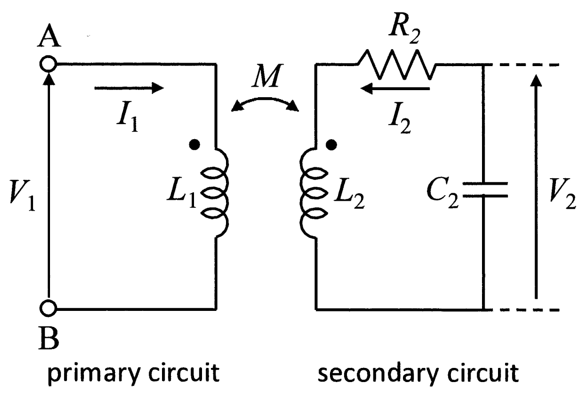

Fig. 2 (a)

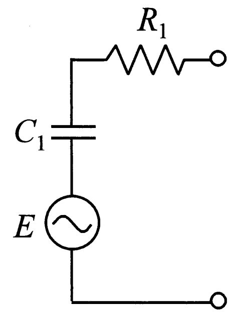

Fig. 2 (b)

2014 年 3 月実施
問題 3　情報基礎 1
（1 頁目／1 頁中）

$\wedge$ は論理積演算子，$\vee$ は論理和演算子，$\overline{}$ は否定演算子をそれぞれ表すとする．$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0,1\}$ とする．3 変数論理関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ を次のように定義する．

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1)$$

以下の問に答えよ．

(1) $f\big(x_1, x_2, f\,(\overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$ を示せ．

(2) $\wedge$ や $\vee$ を用いずに，次の論理式を関数 f を用いて表せ．

(a) $x_1 \wedge x_2$

(b) $x_1 \vee x_2$

(c) $(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$

(3) $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{g(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$ であるとき，論理関数 g は自己双対関数であるという．$g(x_1, x_2, \dots, x_9) = f\big(f(x_1, x_2, x_3), f(\overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}), \overline{f(x_7, x_8, x_9)}\big)$ であるとき，$g(x_1, x_2, \dots, x_9)$ が自己双対関数であるか否かを判定し，その根拠を示せ．

Denote logical conjunction, disjunction, and negation operators by $\wedge$, $\vee$, and $\overline{}$, respectively. Consider $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0,1\}$. Let $f(x_1, x_2, x_3)$ be a 3-variable Boolean function defined as follows:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_3 \wedge x_1) \ .$$

Answer the following questions.

(1) Prove $f\big(x_1, x_2, f\,(\overline{x_1}, \overline{x_2}, x_3)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$.

(2) Without using $\wedge$ and $\vee$, compose the following logic formulas using f.

(a) $x_1 \wedge x_2$

(b) $x_1 \vee x_2$

(c) $(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$

(3) A Boolean function g is called a self-dual function if $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{g(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$. Given $g(x_1, x_2, \dots, x_9) = f\big(f(x_1, x_2, x_3), f(\overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}), \overline{f(x_7, x_8, x_9)}\big)$, determine whether $g(x_1, x_2, \dots, x_9)$ is a self-dual function or not, and justify your answer.

2014年 3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／1頁中)

配列 A には 0 から n の範囲の相異なる n 個の整数 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ が含まれているとする．したがって，0 から n の範囲の整数で，この配列 A に含まれないものがちょうど 1 つある．入力として与えられた配列 A から，この欠損した数を見つける問題 P を考える．

(1) P を効率的に解くアルゴリズムの概略を示し，その計算量を与えよ．

(2) 配列 A の要素があらかじめ昇順に並んでいると仮定したとき，P をより効率的に解くアルゴリズムの概略を示し，その計算量を与えよ．

Suppose that an array A contains n distinct integers $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ in the range from 0 to n. Therefore, exactly one integer in the range from 0 to n is missing in the array A. Given the array A as input, consider the problem P to find the missing number.

(1) Outline an efficient algorithm to solve P and give its complexity.

(2) Outline a more efficient algorithm to solve P and give its complexity, assuming that the array A is sorted in increasing order beforehand.

2014 年 3 月実施
問題 5　物理基礎 1
（1 頁目／3 頁中）

Fig. 5 (a)に示すように，床に固定された半径b（$b>a$）の剛体球の頂点に半径 a の均質な剛体球殻 S が置かれている．球殻 S の質量をmとする．球殻 S の厚みは無視できる．重力加速度をgとする．以下の問に答えよ．

(1) 球と球殻 S の接触がなめらかな場合を考える．球殻 S の重心 C に水平初速度v_0を与えた後，球殻 S は C の周りで回転することなくすべり落ちた．

(a) Fig. 5 (b)に示すように, 球殻 S が球面上の点 P にあるとき OP と垂直軸のなす角度をθとする．球面上の点 P での球殻 S の重心 C の速度をvとする．vとv_0の関係を求めよ．

(b) 球殻 S が球から受ける抗力をRとし，Rを a，b，m，g，v_0，θを用いて表せ．

(c) 球殻 S が球から離れる角度をθ_cとする．$\cos\theta_c$を求めよ．

(2) 球と球殻 S の接触がなめらかでない場合を考える．ただし，球と球殻 S の間に粘着力はない．

(a) 球殻 S の中心軸の周りの慣性モーメントが $\frac{2}{3}ma^2$で与えられることを示せ．

(b) 球殻 S がすべることなくゆっくりと転がり落ちると考える．球殻 S が球から離れる角度をθ_cとする．$\cos\theta_c$を求めよ．ただし，v_0は 0 に等しいと考える（$v_0 \cong 0$）．転がり摩擦によるエネルギー損失は無視する．

2014 年 3 月実施
問題 5　物理基礎 1
(2 頁目／3 頁中)

As shown in Fig. 5 (a), a uniform rigid spherical shell S with radius a is put on the vertex of a rigid sphere with radius b ($b > a$), which is fixed on the floor. Let the mass of the spherical shell S be m. The thickness of the spherical shell S can be neglected. Let the gravitational acceleration be g. Answer the following questions.

(1) Consider the case when the contact between the sphere and the spherical shell S is smooth. After an initial horizontal velocity v_0 was given to the center of mass C of the spherical shell S, the spherical shell S slid down without rotating about C.

(a) As shown in Fig. 5 (b), let θ be the angle between OP and the vertical axis when the spherical shell S is now at point P on the sphere. Let v denote the velocity of the center of mass C of the spherical shell S at P. Find the relation between v and v_0.

(b) Let R denote the reaction which the spherical shell S receives from the sphere. Express the reaction R using a, b, m, g, v_0, and θ.

(c) Let the angle at which the spherical shell S leaves the surface of the sphere be θ_c. Find $\cos\theta_c$.

(2) Consider the case when the contact between the sphere and the spherical shell S is not smooth. But there is no adhesive force between the sphere and the spherical shell S.

(a) Show that the moment of inertia of the spherical shell S about its central axis is given by $\frac{2}{3}ma^2$.

(b) Assume that the spherical shell S slowly rolls down without slipping. Let the angle at which the spherical shell S leaves the surface of the sphere be θ_c. Find $\cos\theta_c$. Assume that v_0 is equal to zero ($v_0 \cong 0$). Neglect the energy loss from the rolling friction.

2014 年 3 月実施
問題 5　物理基礎 1
(3 頁目／3 頁中)

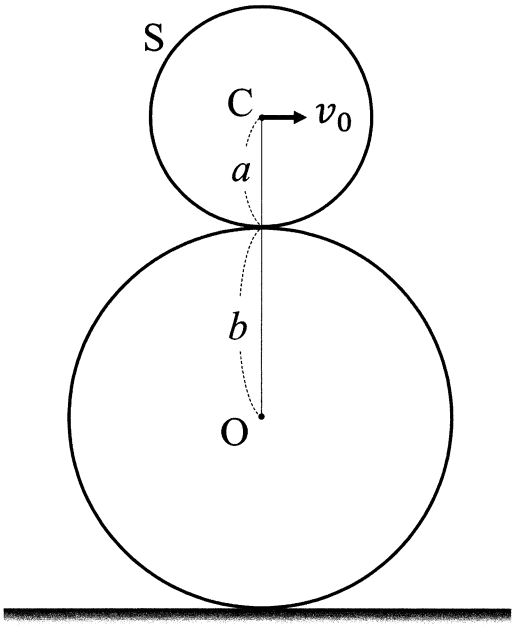

Fig. 5 (a)

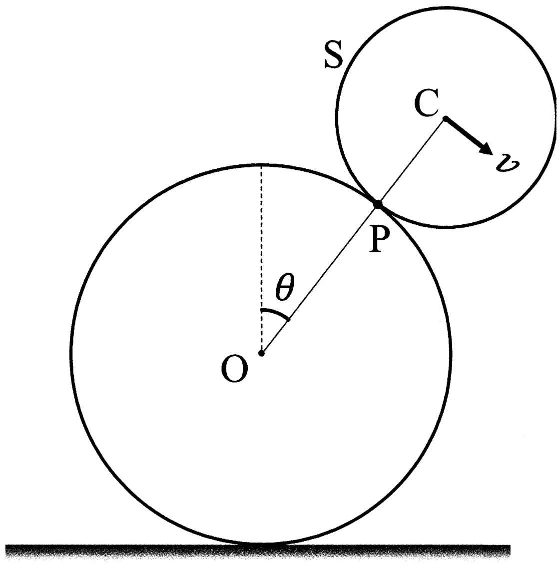

Fig. 5 (b)

2014 年 3 月実施
問題 6　物理基礎 2
(1 頁目／2 頁中)

行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ および $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について考える．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と対応する正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$，および $\mathbf{B}$ の固有値 $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\ (\mu_1<\mu_2<\mu_3)$ と対応する正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3$ を求めよ．

(2) $\left(\mathbf{A}^3-\frac{13}{3}\mathbf{A}^2+\frac{13}{3}\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{B}^3-\frac{7}{2}\mathbf{B}^2-\frac{1}{2}\mathbf{B}-\mathbf{E}\right)$ を求めよ．ただし $\mathbf{E}$ は単位行列である．

(3) ベクトル $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ の線形結合で表せ．

(4) $\mathbf{A}^n\mathbf{x}$ を固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ の線形結合で表せ．ただし n は自然数とする．

(5) 以下の連立方程式を満たすベクトル $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ を全て求めよ．

$$\mathbf{y}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\mathbf{A}^n+\mathbf{B}^n\right)\mathbf{x}\right\}$$

$$|\mathbf{y}|=1$$

ただし $|\mathbf{y}|$ はベクトル $\mathbf{y}$ の長さである．

2014 年 3 月実施
問題 6　物理基礎 2
(2 頁目／2 頁中)

Consider the matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ and $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Answer the following questions.

(1) Find the eigenvalues $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \text{and}\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ of the matrix $\mathbf{A}$, their corresponding normalized eigenvectors $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \text{and}\ \boldsymbol{\alpha}_3$, the eigenvalues $\mu_1,\ \mu_2,\ \text{and}\ \mu_3\ (\mu_1 < \mu_2 < \mu_3)$ of the matrix $\mathbf{B}$, and their corresponding normalized eigenvectors $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \text{and}\ \boldsymbol{\beta}_3$.

(2) Calculate $\left(\mathbf{A}^3 - \frac{13}{3}\mathbf{A}^2 + \frac{13}{3}\mathbf{A}\right)\left(\mathbf{B}^3 - \frac{7}{2}\mathbf{B}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{B} - \mathbf{E}\right)$. Here, $\mathbf{E}$ is the unit matrix.

(3) Express the vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ as a linear combination of the eigenvectors $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \text{and}\ \boldsymbol{\alpha}_3$.

(4) Express $\mathbf{A}^n\mathbf{x}$ as a linear combination of the eigenvectors $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \text{and}\ \boldsymbol{\alpha}_3$. Here, n is a natural number.

(5) Find all the vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ which satisfy the following simultaneous equations.

$$\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty}\{(\mathbf{A}^n + \mathbf{B}^n)\mathbf{x}\}.$$

$$|\mathbf{y}| = 1.$$

Here, $|\mathbf{y}|$ is the length of the vector $\mathbf{y}$.