平成 20 年 8 月 18 日
10:00 ～ 12:00

平成 21 年度大学院博士前期課程
電気電子情報工学専攻

数学　入試問題

【注意事項】

● 問題の数は 5 題である。解答は

問題 1　を　1 枚目（白色）の解答用紙
問題 2　を　2 枚目（赤色）の解答用紙
問題 3　を　3 枚目（青色）の解答用紙
問題 4　を　4 枚目（黄色）の解答用紙
問題 5　を　5 枚目（水色）の解答用紙

に記入すること。
解答用紙を間違うと採点されない場合があるので注意すること。

● 配点は各問題 20 点であり、合計 100 点である。

●問題紙は表紙を含めて 6 枚である。

問題１　　(20 点)

次の行列 A に関する以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) 行列の固有値および各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と $(P^{-1}AP)^n$ を求めよ。さらに、A^n を求めよ。

問題２（20 点）

領域 $x > 0, y > 0$ で記述される次の非線形常微分方程式に関し設問に答えよ。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x - y^2)y}{x^2} \qquad (1)$$

(a) 次の(i)~(iii)の各々の仮定の下で、(i)に対しては特殊解を求め、(ii), (iii)に対しては一般解を求めよ。(i)~(iii)で得られた結果をもとに、第一象限における解曲線群の概要を描け。

(i)　$x = ay^2$　（未知定数 a の決定）

(ii)　$x \ll y^2$　（式 (1) 右辺括弧内第一項を無視）

(iii)　$x \gg y^2$　（式 (1) 右辺括弧内第二項を無視）

(b) $\mathrm{u} = \mathrm{y}^2 / \mathrm{x}$ を式(1)に導入することにより $u(x)$を求めた後、一般解 $y(x)$を求めよ。

問題３　(20 点)

(a) 複素変数 z について、次の関数の特異点における留数を求めよ。

$$\frac{1}{z\sin z}$$

(b) 実変数 θ に関する積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \cdots)$ を計算せよ。

問題 4 (20 点)

以下の問いに答えよ。

(a) 次の式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。

$$f(t) = \exp(-|t|) \tag{1}$$

ただし、関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を次の式で定義する。

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt$$

(b) 式 (1) を用いて定義される関数 $g(t)$ は、周期 2π を持つ周期関数であることを示せ。

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi k)$$

(c) 関数 $g(t)$ の複素フーリエ係数 c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を求めよ。ただし、周期 2π を持つ周期関数 $g(t)$ の複素フーリエ級数を

$$g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$$

と表す。

(d) 以上の結果を用いて、次の和 S の値を求めよ。

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

問題５　　(20 点)

(a) 関数 $f(x)$ のラプラス変換を $L[f(x)] = F(s)$ とすると、

$$L[x \cdot f(x)] = -F'(s)$$

である。ここで、$F'(s)$ は $F(s)$ の１階微分を示す。

これを用いて、逆ラプラス変換 $L^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s-1}\right]$ を求めよ。

(b) 次の微分積分方程式を解け。

$$y' + 3y + 2\int_0^x y dx = 2H(x-1) - 2H(x-2)$$

$x = 0$ のとき、$y = 1$ である。ここで、y' は y の１階微分であり、$H(x-a)$ は

ヘヴィサイド関数を表し、$H(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$ である。