導体中の電磁現象を取り扱う．ただし，電界は $\boldsymbol{E}$，電束密度は $\boldsymbol{D}$，磁界は $\boldsymbol{H}$，磁束密度は $\boldsymbol{B}$，電流密度は $\boldsymbol{J}$ で表す．

(1) 時間的・空間的に変化する電流の存在する導体中の電磁現象について次の問に答えよ．

(a) 一般化されたマクスウェルの方程式を微分形で記述せよ．

(b) 導体中の電流密度に関する方程式を，マクスウェルの方程式とオームの法則 $(\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E})$ を用いて誘導せよ．ただし，導体は非磁性体で，導体中の変位電流は無視でき，電気伝導度を σ，透磁率を μ_0 とする．なお，必要があれば，次のベクトル解析の公式を用いよ．$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{A})$

(c) Fig. 1 (a) に示すように，無限平面導体に x 方向のみの関数で，y 方向に一様な交流電流密度 $\boldsymbol{J}=(0, J(x)e^{j\omega t}, 0)$ を与えたとき，導体内の電流密度の振幅に関する分布を求めよ．また，電流密度の振幅が $1/e$ になる距離 δ（表皮厚さ）を求めよ．ただし，j は虚数単位，ω は角周波数，t は時間を表し，$x=0$ における電流密度を $J_0e^{j\omega t}$ とする．

(2) 定常電流の存在する導体中の電磁現象について答えよ．

(a) 定常状態におけるアンペールの法則の微分形から，その積分形をストークスの定理を用いて導出せよ．

(b) Fig. 1 (b) に示すように，半径 a の断面を持つ無限に長い導電性の円柱がある．紙面手前向きを z 軸の正の向き，半径方向を r 軸とした円柱座標系（r, θ, z）を用い，電流密度 $\boldsymbol{J}$ の一様な電流が断面内を z 軸の正の向きに流れたとき，円柱の断面内と外の領域における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを求めよ．

(c) Fig. 1 (c) に示すように，半径 a の断面を持つ無限に長い2つの円柱の中心軸を平行にして，お互いの中心軸を b だけ離して重なるように置き（$0<b\ll 2a$），重なった領域は取り除いて空洞とする．Fig. 1 (c) のように直角座標を用い，x 軸の負の領域では電流密度 $\boldsymbol{J}$ の一様な電流が z 軸の正の向きに流れ，x 軸の正の領域では電流密度 $\boldsymbol{J}$ の一様な電流が z 軸の負の向きに流れるとする．そのときの，空洞内の位置 $\mathrm{P}(x,y)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを求めよ．

Consider the electromagnetic phenomena in conductors. Electric field is described as $\boldsymbol{E}$, electric flux density as $\boldsymbol{D}$, magnetic field as $\boldsymbol{H}$, magnetic flux density as $\boldsymbol{B}$ and current density as $\boldsymbol{J}$.

(1) Answer the following questions about electromagnetic phenomena in conductors with current alternating in time and space.

(a) Describe the generalized Maxwell's equations in the differential form.

(b) Derive the equation of current density in conductors, by using the above Maxwell's equations and Ohm's law $(\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E})$. The conductors are nonmagnetic material. The displacement current is neglected in the conductors. The conductivity of the conductors is σ, the permeability is μ_0. A useful vector formula is as follows: $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{A})$.

(c) A uniform alternating current density $\boldsymbol{J} = \left(0, J(x)e^{j\omega t}, 0\right)$, which is a function of variable x, is applied in y-direction of an infinite conducting slab, as shown in Fig. 1 (a). Find the distribution of the current density amplitude in the conductor. Evaluate the skin depth δ, where the amplitude decreases to $1/e$. The current density at $x = 0$ is $J_0 e^{j\omega t}$, where j is imaginary unit, ω is angular frequency and t is time.

(2) Answer the following questions about the steady state current density in conductors.

(a) Derive Ampere's law in integral form from its law in differential form in the steady state, by using Stokes's theorem.

(b) As shown in Fig. 1 (b), there is an infinitely long conducting cylinder of radius a. The circular cylindrical coordinate (r, θ, z) is used for the cylinder with its axis along the z-axis directing out of the paper, as shown in Fig. 1 (b). The homogeneous current with its density $\boldsymbol{J}$ flows along z-axis in the cross section of the cylinder. Calculate the magnitudes and directions of magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ inside and outside the cylinder.

(c) The two cylinders of radius a are overlapped such a way that the distance between two parallel axes is b apart ($0 < b << 2a$). The overlapped region is removed to vacuum space, as shown in Fig. 1 (c). The Cartesian coordinate is used. The homogeneous current with its density $\boldsymbol{J}$ flows along the positive z-direction in the negative x region, while it flows along the negative z-direction in the positive x region. Evaluate the magnitude and direction of magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the point P (x, y) in the vacuum region.

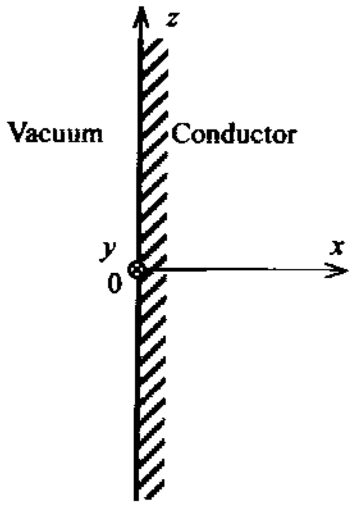

Fig. 1 (a)

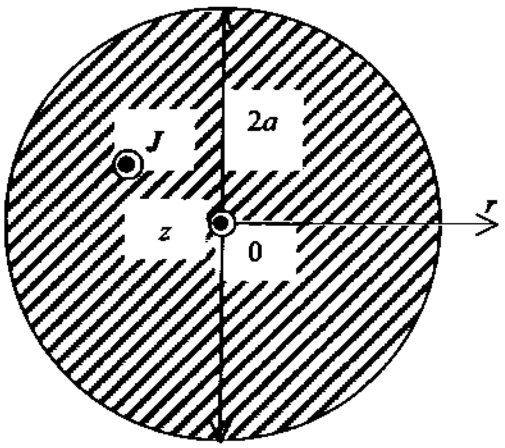

Fig. 1 (b)

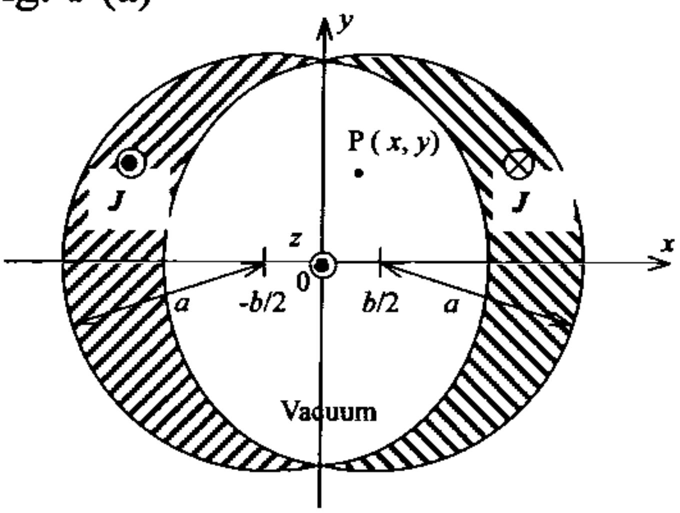

Fig. 1 (c)

Fig. 2(a) の回路について，以下の問に答えよ．なお，答案には考えの過程が分かるように記述せよ．

(1) 1－1'，2－2' 間をそれぞれ入力端，出力端とする 4 端子回路について，角周波数ω_0の交流信号に対するインピーダンス行列 (Z行列) および縦続行列 (K行列，またはF行列) を求めよ．

(2) 電流 $i_1(t)$を入力とし，電圧 $v_2(t)$ を応答としたときの回路の伝達関数および，単位インパルス $u_0(t)$の入力電流に対する応答 $v_2(t)$ を求めよ．なお，C_0 の初期電荷を 0 とする．

(3) Fig. 2(b) に示す波形 $i_1(t)$を電流源から 1－1'に入力したときの 2－2'間の電圧波形 $v_2(t)$を求め，その波形を図示せよ．なお，C_0の初期電荷を 0 とする．

(4) 角周波数ω_0 が 1 k rad/s の交流を電流源から 1－1'に入力し，交流電圧計を用いて 2－2'間の実効値電圧を測定した．2－2'間に 1 kΩ の抵抗を接続したとき，電圧計は 2.6 V を示した．また，2－2'間に 4 μF のコンデンサを接続したとき，電圧計は 2 V を示した．なお，2－2'間の短絡電流は 26 mA であった．この結果から R_0 [kΩ] と C_0 [μF]を求めよ．

Answer the following questions about the electric circuit shown in Fig. 2(a). Describe the answer with clarifying logical process.

(1) Find the impedance matrix (Z-matrix) and the cascade matrix (K-matrix or F-matrix) of the four-terminal network, where 1－1' and 2－2' are input terminals and output terminals, respectively, and the angular frequency of AC signal is ω_0.

(2) Derive the transfer function from the input current $i_1(t)$ to the output voltage $v_2(t)$ of the circuit, and the response waveform $v_2(t)$ to the input current of unit impulse $u_0(t)$. The initial charge in C_0 is assumed to be 0.

(3) When the waveform $i_1(t)$ shown in Fig. 2(b) is applied to the terminals 1－1' from the current source, find the voltage waveform $v_2(t)$ between the terminals 2－2' and sketch it. The initial charge in C_0 is assumed to be 0.

(4) AC signal with angular frequency ω_0 of 1 k rad/s is applied to the terminals $1-1'$ from the current source and the effective voltage between the terminals $2-2'$ is measured by using an AC voltmeter. When a resistor of 1 kΩ is connected to the terminals $2-2'$, the voltage shows 2.6 V. When a capacitor of 4 μF is connected to the terminals $2-2'$, the voltage shows 2 V. The short current between the terminals $2-2'$ is 26 mA. Find the R_0 [kΩ] and the C_0 [μF] from these results.

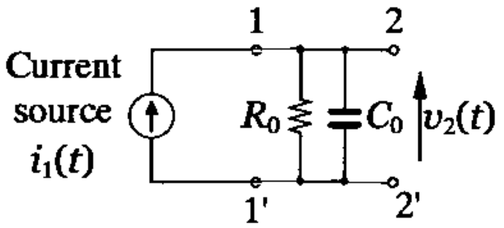

Fig. 2(a)

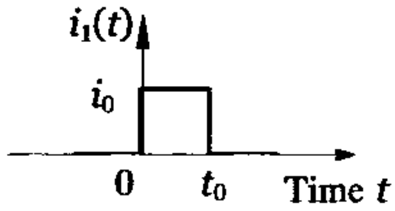

Fig. 2(b)

問題3

$\wedge$ は論理積，$\vee$ は論理和，$^-$ は否定を表すとする．n 変数論理関数 f に対し，条件 A を次のように定義する．

$$\text{条件 A: } \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$$

以下の問に答えよ．

(1) 次の命題それぞれについて，真か偽かを判定せよ．ただし，判定の根拠となる証明を与えること．

 (a) n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ は条件 A を満足する．

 (b) 2 つの n 変数論理関数 f および g が条件 A を満足するならば，n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は条件 A を満足する．

(2) 条件 A を満足する 1 変数論理関数をすべて列挙せよ．

(3) 条件 A を満足する n 変数論理関数の個数は，$3^{(2^{n-1})}$ で与えられることを示せ．

Let $\wedge$, $\vee$ and $^-$ denote the AND Boolean operator, the OR Boolean operator and the NOT operator, respectively. For an n-variable Boolean function f, define Condition A, as follows:

$$\text{Condition A: } \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}).$$

Answer the following questions.

(1) Determine whether each of the following assertions is true or false. Justify your answers with proofs.

 (a) The n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ satisfies Condition A.

 (b) If two n-variable Boolean functions f and g satisfy Condition A, then the n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ satisfies Condition A.

(2) Show all 1-variable Boolean functions satisfying Condition A.

(3) Show that the total number of n-variable Boolean functions satisfying Condition A is given by $3^{(2^{n-1})}$.

問題4

2つの配列 A と B に対し，$F(A,B)$ を，$A[i] > B[j]$ を満たす添字の対 (i,j) の個数と定義する．例えば，Fig. 4 に示す配列 A と B に対して，$F(A,B) = 5$ となる．

以下の問に答えよ．

(1) 昇順にソートされた2つの配列 A と B が与えられたとき，それらを併合してソートされた配列 C を求める効率の良い方法の概略を示せ．

(2) 昇順にソートされた2つの配列 A と B が与えられたとき，$F(A,B)$ を求める $O(n)$ 時間アルゴリズムを与えよ．ここに，n は A と B の要素数の和である．

(3) 配列 A に対し，$N(A)$ を $i < j$ かつ $A[i] > A[j]$ を満たす添字の対 (i,j) の個数とする．配列 A が2つの配列 B と C の連結になっているとき，

$$N(A) = N(B) + N(C) + F(B,C)$$

が成り立つことを示せ．

(4) 配列 A が与えられたとき，$N(A)$ を求める効率の良い方法の概略を示せ．また，その時間計算量を与えよ．(問 (2) のアルゴリズムの存在を仮定してよい．)

For two arrays A and B, define $F(A,B)$ as the number of pairs of indices (i,j) that satisfy $A[i] > B[j]$. For example, for the arrays A and B of Fig. 4, we have $F(A,B) = 5$.

Answer the following questions.

(1) Assume that we are given two arrays A and B that are sorted in the increasing order. Outline an efficient algorithm that merges them into a sorted array C.

(2) Assume that we are given two arrays A and B that are sorted in the increasing order. Give an $O(n)$ time algorithm that computes $F(A,B)$, where n is the sum of the sizes of A and B.

(3) For an array A, let $N(A)$ be the number of pairs of indices (i,j) such that $i < j$ and $A[i] > A[j]$. Assume that A is the concatenation of arrays B and C. Show that

$$N(A) = N(B) + N(C) + F(B,C).$$

(4) Outline an efficient algorithm that computes $N(A)$ for a given array A, and give its time complexity. (You can assume that you have an algorithm for Question (2).)

	0	1	2	3
A	4	3	1	3

	0	1	2	3
B	3	5	2	3

Fig. 4

質量 m の粒子が速度 v に比例した抵抗力 $F_R = -mv/\tau$ のもとで x 軸に沿って運動する．粒子が時刻 $t=0$ において原点 $x=0$ にあり，正の速度 v_0 をもつとき，以下の問に答えよ．ただし，τ は正の定数とする．

(1) 抵抗力 F_R のみが粒子にはたらく場合について考える．

(a) 粒子の速度を時間の関数として求めよ．

(b) 時間が十分に経過したとき，粒子の位置を求めよ．

(2) 粒子が正電荷 q をもつとし，x 軸の正の向きに印加された一様な静電界 E による静電気力と抵抗力 F_R の両方が粒子にはたらく場合について考える．

(a) 粒子の速度を時間の関数として求め，その結果を図示せよ．

(b) 時間が十分に経過したとき，粒子の速度を求めよ．

(3) 復元力 $F_H = -kx$ を考える．ただし，k は正の定数とする．

(a) 復元力 F_H のみが粒子にはたらく場合，粒子の位置を時間の関数として求めよ．

(b) 復元力 F_H のみが粒子にはたらく場合，運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー，およびそれらの和を時間の関数として求めよ．

(c) 復元力 F_H と抵抗力 F_R の両方が粒子にはたらく場合，粒子の位置を時間の関数として求め，その結果を図示せよ．

Consider the motion of a particle of mass m along the x-axis with a resistance $F_R = -m\,v/\tau$, where v is the particle velocity and τ is a positive constant. Let the particle be at the origin, $x = 0$, with positive velocity v_0 at the initial time, $t = 0$. Answer the following questions.

(1) Consider the case where only the resistance F_R acts on the particle.

(a) Find the particle velocity as a function of time.

(b) Find the position where the particle approaches as time goes infinity.

(2) Let the particle have a positive electric charge q and move under a uniform static electric field E applied in the positive direction of the x-axis. Consider that both the electrostatic force and the resistance F_R act on the particle.

(a) Find the particle velocity as a function of time. Sketch the result.

(b) Find the particle velocity as time goes infinity.

(3) Consider a restoring force $F_H = -k\,x$, where k is a positive constant.

(a) When only F_H acts on the particle, find its position as a function of time.

(b) When only F_H acts on the particle, find its kinetic energy, potential energy, and the sum of them, respectively, as functions of time.

(c) When both F_H and the resistance F_R act on the particle, find the particle position as a function of time. Sketch the result.

問題6 （1頁目／2頁中）

パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 行列 σ_y の固有値と対応する固有ベクトルのすべてを求めよ．

(2) 任意の 2×2 行列は単位行列とパウリ行列の線形結合として表されることを示せ．

(3) 次の関係式を証明せよ．

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} I + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

ここで，I は単位行列であり，$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ はパウリ行列を成分とする3次元ベクトルである．$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ および $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ は複素数を成分とする3次元ベクトルである．

行列の指数関数を次のように定義する．

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

ここで，X は任意の正方行列であり，X^0 は単位行列を表すものとする．

(4) 行列 $\exp(\sigma_y)$ の対角和（トレース）を求めよ．

(5) $\exp(i\frac{\pi}{3}\sigma_y)\sigma_x \exp(-i\frac{\pi}{3}\sigma_y)$ を1つの行列として表せ．

For the Pauli matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

where i is an imaginary unit, answer the following questions.

(1) Find all the eigenvalues and their corresponding eigenvectors of the matrix σ_y.

(2) Prove that any 2×2 matrix can be represented by a linear combination of the identity matrix and the Pauli matrices.

(3) Prove the following relation:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}I + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

where I is the identity matrix, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ is the three-dimensional vector whose components are the Pauli matrices. The vectors $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ and $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ are the three-dimensional vectors whose components are the complex numbers.

The exponential function of the matrix is defined as follows:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k,$$

where X is an aribitrary square matrix and X^0 denotes the identity matrix.

(4) Find the trace of the matrix $\exp(\sigma_y)$.

(5) Express $\exp(i\frac{\pi}{3}\sigma_y)\sigma_x \exp(-i\frac{\pi}{3}\sigma_y)$ in terms of a single matrix.