平成 19 年 8 月 29 日
9:30－11:30

大学院工学研究科　電気・通信工学専攻
電子工学専攻

大学院情報科学研究科
情報・生命系群(物理・情報系)

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，
答案用紙に解答せよ.

(Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them.)

2007年8月実施
問題1　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig. 1のように，真空中に置かれた誘電率 ε，透磁率 μ，導電率 σ の等方的な媒質（Medium）に角周波数 ω の平面電磁波が境界面に垂直に入射し，媒質中に導電電流と変位電流の両方が流れている．真電荷はどこにも存在しないものとする．電磁波の進行方向を z 方向とし，電界は x 成分 E_x のみを持ち，磁界は y 成分 H_y のみを持つものとする．媒質に入射した直後の電界振幅を E_0 として，以下の問に答えよ．

(1) Maxwellの方程式をもとに，電界に関する電信方程式(1a)を導け．

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \text{(1a)}$$

(2) $E_x = E_{xm}(z)\, e^{j\omega t}$ と置くと (1a) は(1b)の形式に書き換えられる．ただし j は虚数単位である。α，β を使って(1b)を解き，E_x を書き表せ．

$$\frac{\partial^2 E_{xm}}{\partial z^2} = (\alpha + \mathrm{j}\beta)^2 E_{xm} \qquad \text{(1b)}$$

(3) E_x を具体的に得るためには α，β を定めればよい．問(1)，問(2)から α，β を導き ε，μ，σ および ω を使って表せ．

(4) 導電電流が変位電流に対して充分小さい場合に ε，σ および ω の間に成り立つ関係式を導き，その場合の電界 E_x を求めよ．

As shown in Fig. 1, a plane electromagnetic wave enters perpendicularly from vacuum to the plane boundary of an isotropic medium (Medium) with permittivity of ε, permeability of μ, and conductivity of σ. Accordingly both the conduction and displacement currents flow in the Medium. There are no true electric charges. Suppose that the wave propagates along the z direction, the electric field has only x component, E_x, and the magnetic field has only y component, H_y, respectively. Answer the following questions under the condition that the electric field intensity on the plane boundary is E_0.

(1) Derive the wave equation for the electric field (1a) based on the Maxwell's equations.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \text{(1a)}$$

(2) Assuming that $E_x = E_{xm}(z)\, e^{j\omega t}$, equation (1a) can be re-written into the form of equation (1b), where j is the imaginary unit. Solve equation (1b) using α and β, and obtain E_x.

$$\frac{\partial^2 E_{xm}}{\partial z^2} = (\alpha + \mathrm{j}\beta)^2 E_{xm} \tag{1b}$$

(3) It is necessary to solve α and β in order to obtain the definite form of E_x. Derive α and β from questions (1) and (2) in terms of ε, μ, σ and ω.

(4) Derive the relation between ε, σ and ω when the conduction current is small compared with the displacement current, and obtain the corresponding electric field E_x.

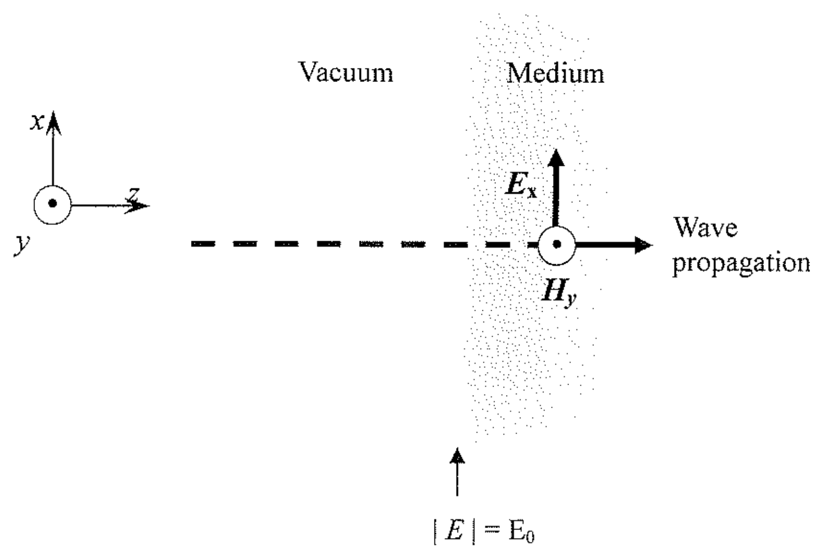

Fig. 1

2007年8月実施
問題2　電気回路
（１頁目／２頁中）

Fig. 2(a), Fig. 2(b) はいずれも角周波数ωの交流電圧源Eにより駆動される回路である．以下の問に答えよ．

(1) Fig. 2(a) に示す回路において，

(a) 端子 1－1'から見た回路の力率が 1 となるとき，ω, R_0, L_0, C, R の間の関係を示せ．

(b) ω, R_0, L_0 が与えられているとき，R で消費される電力が最大となるように R, C を求めよ．

(2) Fig. 2(b) に示す 3 つの回路において端子 1－1'から見たインピーダンスがいずれも同じになった．図中の分布定数線路は長さがl_1またはl_1+l_2の無損失線路であり，位相定数はβ，特性インピーダンスはZ_0である．

(a) L_0 を L_1, L_2, M で表せ．

(b) L_0 と l_2 の関係を求めよ．

The circuits shown in Fig. 2(a) and Fig. 2(b) are driven by an ac voltage source E with an angular frequency of ω. Answer the following questions.

(1) Consider the circuit shown in Fig. 2(a).

(a) Show the relation between ω, R_0, L_0, C and R, when the power factor of the circuit from the terminals 1-1' is 1.

(b) Derive R and C to maximize the power consumed in R, under given ω, R_0 and L_0.

(2) The circuits shown in Fig. 2(b) have the same impedance from the terminals 1-1'. The transmission lines in the circuits are lossless, the lengths are l_1 or l_1+l_2, the phase constants are β, and the characteristic impedances are Z_0.

(a) Derive L_0 in terms of L_1, L_2 and M.

(b) Show the relation between L_0 and l_2.

2007 年 8 月実施
問題２　電気回路
（２頁目／２頁中）

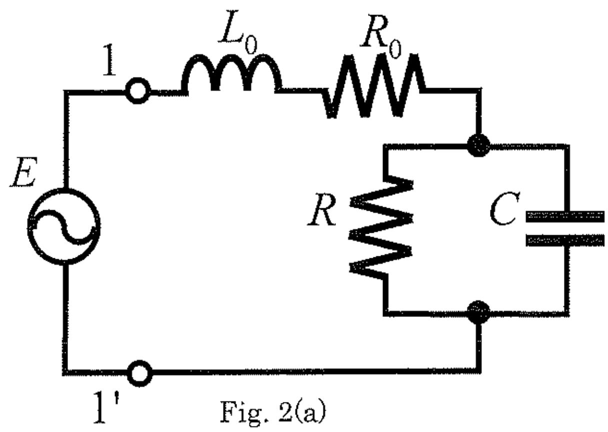

Fig. 2(a)

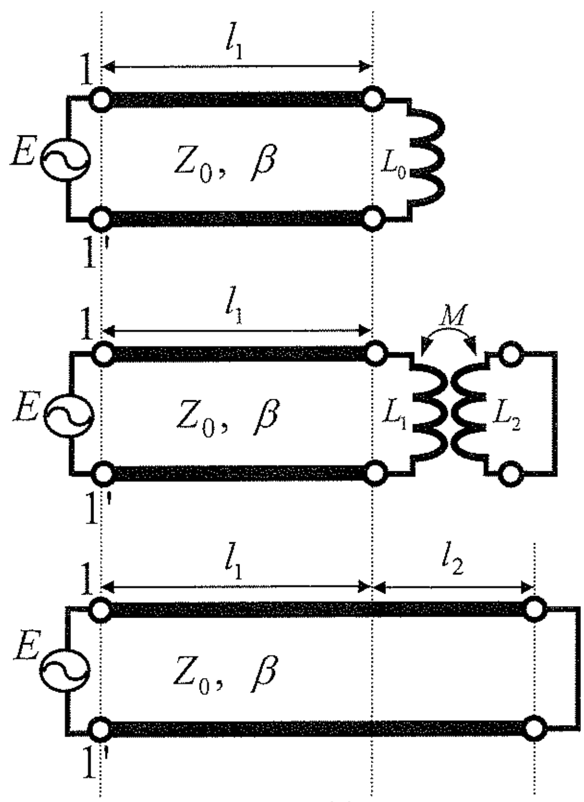

Fig. 2(b)

2007年8月実施
問題3　情報基礎1
（1頁目／1頁中）

論理関数 h について，$h(x_1,\ldots,x_n)=\overline{h}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ のとき，関数 h は自己双対関数であるという．また，$h(x_1,\ldots,x_n)=h(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ のとき，関数 h は自己反双対関数であるという．ここで，$\bar{\ }$ はNOT（否定）演算を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の1変数論理関数は自己双対関数または自己反双対関数であることを示せ．
(2) 関数 $f(x,y,z)$ が自己双対関数であり，$g(x,y,z)$ が自己反双対関数であるとする．任意の y,z について $f(0,y,z)=g(0,y,z)$ であるとき，$f(1,y,z)=\bar{g}(1,y,z)$ であることを示せ．
(3) 関数 $f(x,y,z)$ を自己双対関数とする．また，関数 f_0 を $f_0(y,z)=f(0,y,z)$ と定義する．
   (a) f_0 が自己双対関数であるとき，$f(0,y,z)=f(1,y,z)$ であることを示せ．
   (b) f_0 が自己反双対関数であるとき，$f(x,y,z)=f_0(y,z)\oplus x$ であることを示せ．ここで，$\oplus$ はEXOR（排他的論理和）演算を表す．

A logic function h is called a self-dual function if $h(x_1,\ldots,x_n)=\overline{h}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$. Similarly, a logic function h is called a self-anti-dual function if $h(x_1,\ldots,x_n)=h(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$. Here, $\bar{\ }$ denotes the NOT operator. Answer the following questions.

(1) Prove that any one-argument logic function is either a self-dual function or a self-anti-dual function.
(2) Let a function $f(x,y,z)$ be a self-dual function and $g(x,y,z)$ be a self-anti-dual function. When $f(0,y,z)=g(0,y,z)$ for any y and z, prove that $f(1,y,z)=\bar{g}(1,y,z)$.
(3) Let a function $f(x,y,z)$ be a self-dual function, and f_0 be a function such that $f_0(y,z)=f(0,y,z)$.
   (a) When f_0 is a self-dual function, prove that $f(0,y,z)=f(1,y,z)$.
   (b) When f_0 is a self-anti-dual function, prove that $f(x,y,z)=f_0(y,z)\oplus x$, where $\oplus$ denotes the EXOR (Exclusive OR) operator.

２００７年８月実施

問題４　情報基礎２
（１頁目／１頁中）

単位円内に n 個の点 $p_i = (x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられているとする．ただし，各点 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $0 < x_i^2 + y_i^2 \leq 1$ とする．点は一様に分布している，即ち，円内の任意の領域に点がある確率はその領域の面積に比例するとする．

(1) n 点を円の中心からの距離 $d_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ によってソートする平均実行時間が $O(n)$ のアルゴリズムを設計せよ．

(2) 問 (1) で設計したアルゴリズムの最悪実行時間を求めよ．

(3) 問 (1) で設計したアルゴリズムの平均実行時間が $O(n)$ であることを示せ．

（ヒント：単位円内の点の一様分布を反映するようなバケットソートのバケットを設計せよ．）

There are n points $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, in the unit circle such that $0 < x_i^2 + y_i^2 \leq 1$. Suppose that the points are uniformly distributed; that is, the probability of finding a point in any region of the circle is proportional to the area of that region.

(1) Design an $O(n)$ expected-time algorithm to sort the n points by their distances $d_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ from the origin.

(2) What is the worst time-complexity of the algorithm designed in question (1)?

(3) Show that the expected time-complexity of the algorithm designed in question (1) is $O(n)$.

(Hint: Design buckets in Bucket Sort to reflect the uniform distribution of the points in the unit circle.)

２００７年８月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／３頁中）

Fig. 5 に示すように，質量 $2m$ の質点Ｃが滑らかな床の上の x 軸の原点で静止している．ここに，x 軸に沿ってバネでつながれた同じ質量 m の２個の質点Ａ，Ｂが x 軸に沿って正の方向に滑り，時刻 $t = 0$ で質点Ｂが質点Ｃと弾性衝突する．バネの自然長を a，バネ定数を k とし，バネの質量は無視できるものとする．質点Ａ，Ｂ，Ｃの速度を V_A，V_B，V_C とし，それぞれの位置座標を X_A，X_B，X_C とする．質点ＡとＢの相対距離を $\xi = X_B - X_A$ とする．

衝突前（$t < 0$）に，V_A と V_B は一定速度 V_0（>0）に等しく，$\xi = a$ とすると，衝突後バネは２質点（Ａ - Ｂ）系の重心 X_g の回りで単振動を始めた．単振動の振幅はバネの自然長 a に比べて充分に小さいと仮定する．以下の問に答えよ．

(1)　質点ＢとＣの衝突直後における速度 V_A，V_B，V_C を V_0 で表せ．

(2)　質点Ａ及び質点Ｂの衝突後（$t > 0$）の運動方程式を記せ．

(3)　問(2)で求めた方程式を，２質点（Ａ - Ｂ）系の重心 X_g の運動方程式，及び ξ を変数とする相対運動の運動方程式に変換せよ．

(4)　衝突後の時刻 t における X_g を求めよ．

(5)　衝突後におけるバネの単振動の角周波数 ω，振幅 R，ポテンシャルエネルギー E を求めよ．

２００７年８月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／３頁中）

As shown in Fig. 5, a particle C of mass $2m$ is placed on a smooth plane at the origin of the x axis. Under this situation, two particles A and B of equal mass m, combined with a spring aligned along the x axis, are slipping along the x axis in its positive direction, and particle B undergoes an elastic collision with particle C at time $t = 0$. The natural length of the spring is a, the spring constant is k, and the mass of the spring is assumed to be negligible. The velocities of the particles A, B, and C are denoted by V_A, V_B, and V_C, and their positions are expressed by X_A, X_B, and X_C. The relative distance between particles A and B is defined by $\xi = X_B - X_A$.

When V_A and V_B are equal to a constant velocity V_0 (> 0) and $\xi = a$ before the collision ($t < 0$), the spring starts a simple harmonic motion after the collision around the center of mass X_g of the 2 particle (A - B) system. Assume that the amplitude of the harmonic oscillation is much smaller than the natural length a. Answer the following questions.

(1) Express the velocities V_A, V_B and V_C in terms of V_0 just after the collision between the particles B and C.

(2) Describe the equations of motion of particles A and B after the collision ($t > 0$).

(3) Convert the equations obtained in question (2) to an equation of motion of the center of mass X_g of the 2 particle (A - B) system and to an equation of motion for the relative motion with the variable ξ.

(4) Obtain X_g at time t after the collision.

(5) Obtain the angular frequency ω, amplitude R, and potential energy E of the simple harmonic oscillation of the spring after the collision.

２００７年８月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

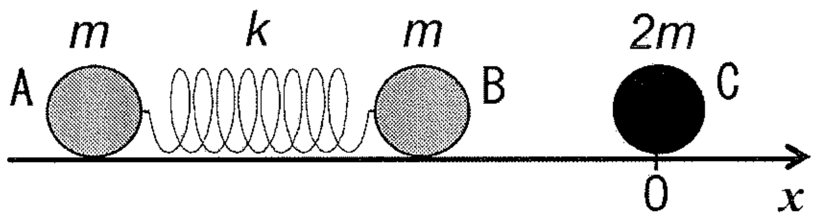

Fig. 5

２００７年８月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ および $B=A+E$ について以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位，E は単位行列である．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A^2，A^3 を求めよ．

(3) 任意の自然数 n に対して A^n を求めよ．

(4) B の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とこれらに対応する固有ベクトルを求め，

$$U^{*}BU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

を満たすユニタリ行列 U を求めよ．ただし，U^{*} は行列 U の随伴行列を表す．

(5) 方程式 $B^3=b_1B^2+b_2B+b_3E$ を満たす係数 b_1, b_2, b_3 を求めよ．

(6) $B^5-2B^4+3B^3-B^2+4B-5E$ を計算せよ．

２００７年８実施
問題６　物理基礎２

Consider the matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ and $B = A + E$. Here i is the imaginary unit and E is the unit matrix. Answer the following questions.

(1) Find the rank of A.

(2) Calculate A^2 and A^3.

(3) Find an expression for A^n for any positive integer n.

(4) Find the eigenvalues λ_1, λ_2, λ_3 and their corresponding eigenvectors of the matrix B. Then obtain the unitary matrix U which satisfies the following form:

$$U^* B U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Here U^* is the adjoint matrix of U.

(5) Consider the equation $B^3 = b_1 B^2 + b_2 B + b_3 E$. Find the coefficients b_1, b_2 and b_3.

(6) Calculate $B^5 - 2B^4 + 3B^3 - B^2 + 4B - 5E$.