問題１　微分積分・線形代数　解答例

ここにあげたのは１つの解答の方法である。

I (1) 第１行目に関して展開した後に第１列目について展開すると

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-n) \begin{vmatrix} 1 & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-n) \begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & n-3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-n)\Delta_{n-2}$$

となる。

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

であるから，n が奇数の場合

$$\Delta_n = (-n)\Delta_{n-2} = (-n)(2-n)\Delta_{n-4} = \cdots = (-n)(2-n) \times \cdots \times (-5)\Delta_3 = 0$$

であり，n が偶数の場合

$$\Delta_n = (-n)\Delta_{n-2} = (-n)(2-n)\Delta_{n-4} = \cdots = (-n)(2-n)\times\cdots\times(-4)\Delta_2 = (-1)^{n/2}2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!$$

(2) (1) により A_3 は非正則であり A_4 は正則である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/8 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

II

(1) $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$ の両辺を x で偏微分すると

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} F\big(x, y, f(x, y)\big) = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$$

となることから $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$ である。同様にして $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$ である。

(2) $F(x, y, z) = 2x^4 + 4x^2z^2 - 16xz^3 - 5y^3 + 15y^2z - 10z^2 + 20z$ について

$$F_x = 8x^3 + 8xz^2 - 16z^3 = 8(x - z)(x^2 + xz + 2z^2),$$
$$F_y = -15y^2 + 30yz = -15y(y - 2z)$$

であるから $F(x, y, z) = 0$ により定まる陰関数の停留点は $z_x = z_y = 0$ すなわち $F_x = F_y = 0$ かつ $F = 0$ を満たすところとなる。$F_x = 0$ より $x = z$ となり $F_y = 0$ より $y = 0$ または $y = 2z$ である。

1) $x = z$ かつ $y = 0$ の場合 $F(x, y, z) = 0$ に代入すると

$$0 = F(z, 0, z) = -10z^4 - 10z^2 + 20z = -10z(z - 1)(z^2 + z + 2)$$

より $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ が候補になるが $(0, 0, 0)$ は考慮の対象外である。

2) $x = z$ かつ $y = 2z$ の場合 $F(x, y, z) = 0$ に代入すると

$$0 = F(z, 2z, z) = -10z^4 + 20z^3 - 10z^2 + 20z = -10z(z - 2)(z^2 + 1)$$

より $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(2, 4, 2)$ が候補になるが $(0, 0, 0)$ は考慮の対象外である。

なお

$$F_z = 8x^2z - 48xz^2 + 15y^2 - 20z + 20$$

で $F_z(1, 0, 1) = -40 \neq 0$, $F_z(2, 4, 2) = -100 \neq 0$ であるから陰関数を考えることができる。以上より，陰関数は $(1, 0)$, $(2, 4)$ を停留点とする。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$ を利用して偏微分すると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F_x \cdot F_z - F_x \cdot \frac{\partial}{\partial x}F_z}{F_z^2} = -\frac{\{F_{xx} + F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\}F_z - F_x\{F_{zx} + F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\}}{F_z^2}$$
$$= -\frac{F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2}{F_z^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_x \cdot F_z - F_x \cdot \frac{\partial}{\partial y}F_z}{F_z^2}$$
$$= -\frac{F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + F_{zz}F_xF_y}{F_z^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_y \cdot F_z - F_y \cdot \frac{\partial}{\partial y}F_z}{F_z^2} = -\frac{F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2}{F_z^3}$$

となる。ここで (1) により停留点 (x_0, y_0) においては $z_0 = f(x_0, z_0)$ とすると $F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ が成り立つことから

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F_{xy}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -\frac{F_{yy}(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

となり

$$H(x_0, y_0) = \frac{1}{F_z(x_0, y_0, z_0)^2} \begin{vmatrix} F_{xx}(x_0, y_0, z_0) & F_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ F_{yx}(x_0, y_0, z_0) & F_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

である。

(4) 2次偏導関数を計算すると

$$F_{xx} = 24x^2 + 8z^2,\ F_{xy} = 0,\ F_{yy} = -30y + 30z$$

であるから

$$F_z(1, 0, 1)^2 H(1, 0) = 32 \times 30 > 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -32/(-40) > 0$$

より $(1, 0)$ において極小値 1 をとる。また

$$F_z(2, 4, 2)^2 H(2, 4) = 128 \times (-60) < 0$$

であるから，ここでは鞍点になる。