問題１　微分積分・線形代数　解答例

ここにあげたのは１つの解答の方法である。またＩ(2) には同等な解がたくさん存在する。

Ｉ(1) 非線形　$F(v+w) = F(v) + F(w)$, $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ が成り立たない場合があることを示す。例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、基底として例えば

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

を挙げることができ３次元である。

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & 6 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから核の次元は１次元

または (2) により $x = 2y + 3s - t$, $z = -2s + t$ であるからこれを代入して ${}^t(y, s, t) \mapsto {}^t(3s - 4t, 6t, -3s + 4t)$ という写像を考えても良い。

(4) 次元公式 $\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ により 3-1=2 より像の次元は２次元

II (1)

$$\begin{cases} f_x = 8x + 7y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ f_y = 7x - \dfrac{7}{y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{より} \quad \frac{8}{y^2} + 7y - y^4 = 0 \to (y^3-8)(y^3+1) = 0$$

従って停留点は $(\frac{1}{4}, 2)$, $(1, -1)$

(2) $f_{xx} = 8 + \dfrac{2}{x^3}$, $f_{xy} = 7$, $f_{yy} = \dfrac{14}{y^3}$ であるから

$$H(\frac{1}{4}, 2) = \begin{vmatrix} 8 + 2 \times 2^6 & 7 \\ 7 & \frac{7}{4} \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 4(2+32) & 1 \\ 7 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 7(34 - 7) > 0,$$

$$f_x x(\frac{1}{4}, 2) = 8 + 2 \times 2^6 > 0$$

より $(\frac{1}{4}, 2)$ で極小値 $f(\frac{1}{4}, 2) = \frac{1}{4} + \frac{7}{2} + 4 + \frac{7}{2} = \frac{45}{4}$ をとる。
また

$$H(1, -1) = \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 7 & -14 \end{vmatrix} = -189 < 0$$

より $(1, -1)$ は鞍点となり考察対象ではない。

問題2 I

球全体の電荷は $\dfrac{4\pi R^3\rho}{3}$ なので

1） $E=\dfrac{4\pi R^3\rho}{3}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}$

2） $V=-\int_\infty^r\dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r}$

半径 r＜R 内の電荷は $\dfrac{4\pi r^3\rho}{3}$ なので

3） $E=\dfrac{4\pi r^3\rho}{3}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}$

4）R から r までの電位差は $V_{R-r}=-\int_R^r\dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}dr=\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2-r^2)$

2）より，r=R での電位は $V_R=\dfrac{R^2\rho}{3\varepsilon_0}$

両者を加え，$V_r=\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$

5）空洞は，その部分に電荷密度 $-\rho$ の球を置いたと考え，二つの球が作る電場を重ね合わせればよい。空洞の中心においては＋の球の電場 $\dfrac{\rho R}{6\varepsilon_0}$，－の球はゼロ，よって $\dfrac{\rho R}{6\varepsilon_0}$

一般に r では，$\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\rho(r-R/2)}{3\varepsilon_0}=\dfrac{\rho R}{6\varepsilon_0}$

さらに空洞内の一般の点(x,y)では

＋の球の電場 $\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(x,y)$、－の球は $\dfrac{-\rho}{3\varepsilon_0}(x-\dfrac{R}{2},y)$ よって $\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\dfrac{R}{2},0)$ で一定

II　解答

（1）　内部円柱内で，半径 r の円に沿って Ampere の周回積分の法則を適用すると，対称性により磁界 H はその円の接線の方向で，大きさが等しい．また，電流が一様な密度で流れているから，

$$H\cdot 2\pi r=\frac{\pi r^2}{\pi c^2}I$$

が得られ，それ故に

$$H=\frac{r}{2\pi c^2}I$$

（2）　同様に，外部円筒内で，半径 r の円に沿って Ampere の周回積分の法則を適用する．このとき，円内の電流は $I-\dfrac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(a^2-b^2)}I$ であるから，

$$H\cdot 2\pi r=I-\frac{\pi(r^2-b^2)}{\pi(a^2-b^2)}I$$

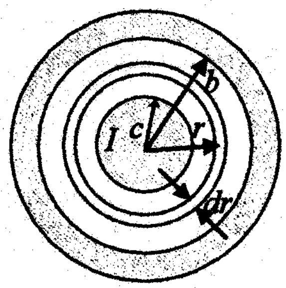
が得られ，それ故に

$$H=\frac{I}{2\pi(a^2-b^2)}\left(\frac{a^2}{r}-r\right)$$

（3）　両導体の間の空間に生ずる磁界は内導体に流れる電流 I によるもののみである．よって，半径 r のところの磁界は

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

（4）　右図に示すように，半径 r のところの磁束密度は



$$B=\mu_0H=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

である．半径 r のところの幅 dr の帯状部分を考え，長さが 1 m 幅 dr の矩形をつらぬく磁束を $d\Phi$ とすれば，

$$d\Phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr$$

となるから，長さ 1 m 当りの全鎖交磁束 Φ は

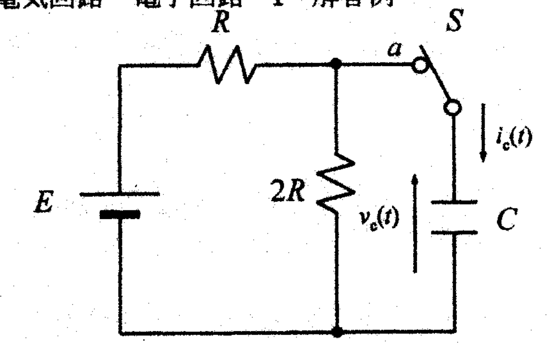
$$\Phi=\int_c^b d\Phi=\int_c^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_c^b\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\log\frac{b}{c}$$

となる．従って，1 m 当りの自己インダクタンス L は

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{b}{c}$$

問題１１　電気回路・電子回路　Ｉ　解答例

$\boxed{(1)}$



$$\begin{cases} Ri_R + 2Ri_R + Ri_c = E \quad \cdot\cdot\cdot\cdot ① \\ \dfrac{1}{C}\int i_c dt = 2Ri_R \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①より　$i_R = \dfrac{1}{3R}\left(E - Ri_c\right)$。これを②に代入して，$\underline{\dfrac{1}{C}\int i_c dt + \dfrac{2R}{3} i_c = \dfrac{2}{3}E}$

$i = \dfrac{dq}{dt}$ とおくと，$\underline{\dfrac{2R}{3}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = \dfrac{2}{3}E}$ ・・・③

③の一般解は，定常解＋過渡解，$q = q_s + q_t$ で表される。

定常解は $q_s = \dfrac{2}{3}CE$

過渡解は特性方程式 $\dfrac{2R}{3}\dfrac{dq_t}{dt} + \dfrac{1}{C}q_t = 0$ より，$q_t = A \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}$ である。

ここに，A は積分定数。

したがって一般解は，$q = \dfrac{2}{3}CE + A \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}$ となる。

$t = 0$　$q = 0$ の初期条件より，$A = -\dfrac{2}{3}CE$。

$$q = \frac{2}{3}CE - \frac{2CE}{3}A \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t} = \frac{2}{3}CE\left(1 - \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right)$$

$$\underline{\underline{i_c(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}}}$$

$$\underline{\underline{v_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{2}{3}E\left(1 - \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right)}}$$

$\boxed{(1)}$の別解

$$\frac{1}{C}\int i_c dt + \frac{2R}{3} i_c = \frac{2}{3}E$$

$$\frac{1}{sC}I(s) + \frac{2R}{3}I(s) = \frac{2}{3s}E$$

$$I(s)\left(\frac{1}{sC} + \frac{2R}{3}\right) = \frac{2}{3s}E \qquad I(s) = \frac{(E/R)}{s + \frac{3}{2}RC}$$

$$i_c(t) = \frac{E}{R}\cdot\varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}$$

$i = \dfrac{dq}{dt}$ とおくと，$\dfrac{2R}{3}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = \dfrac{2}{3}E$

$$\frac{2sR}{3}Q(s) + \frac{1}{C}Q(s) = \frac{2E}{3s}$$

$$Q(s) = \frac{E/R}{s\cdot\left(s + \frac{3}{2RC}\right)}$$

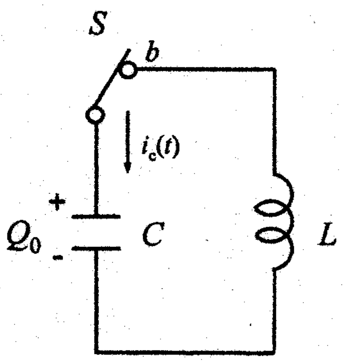
$$q = \frac{E}{R}\cdot\frac{2RC}{3}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right) = \frac{2}{3}CE\left(1 - \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right)$$

$$v_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{2}{3}E\left(1 - \varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right)$$

[2]

(1)の$q=\frac{2}{3}CE\left(1-\varepsilon^{-\frac{3}{2RC}t}\right)$より，$\underline{\underline{q_\infty=\frac{2}{3}CE}}$

[3]



$$q_0=\frac{2}{3}CE$$

$$L\frac{d^2q_t}{dt^2}+\frac{1}{C}q_t=0$$

特性方程式$Lp^2+\frac{1}{C}p=0$の根は，$p=\pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$q_t=A\cdot\varepsilon^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}+B\cdot\varepsilon^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}t}$$

$$\begin{cases} q_t=A\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+B\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t \\ i_t(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\left(B\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t-A\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \end{cases}$$

$t=0$　$q_0=\frac{2}{3}CE$　$i_t=0$の初期条件より，$A=\frac{2}{3}CE$，$B=0$。

$$q_t=\frac{2}{3}CE\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

$$\underline{\underline{i_t(t)=-\frac{2CE}{3\sqrt{LC}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t}}$$

$\boxed{3}$の別解

$$Q_0 = \frac{2}{3}CE$$

$$L\frac{di_c}{dt} + \frac{1}{C}\int i_c dt = 0$$

$$sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{Q_0}{sC} = 0$$

$$I(s) = \frac{(-Q_0 / LC)}{s^2 + \frac{1}{LC}} = -\frac{2}{3}CE \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1/\sqrt{LC}}{s^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{i_t(t) = -\frac{2CE}{3\sqrt{LC}} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t}}$$

問題１１　電気回路・電子回路　II　（解答例）

オペアンプを用いた逆相増幅回路に関する問題で，理想的な特性と入力バイアス電流を考慮した特性および入力バイアス電流の影響を受けないための条件を求めさせる．

(1) オペアンプが理想で利得 $\mu=\infty$ であるので，オペアンプの + 入力端子の電圧 V_+ と − 入力端子の電圧 V_- は等しく，オペアンプの + 入力端子は直接接地されていることから

$$V_- = V_+ = 0$$

またオペアンプの入力端子には電流が流れないことから，V_- の節点においてキルヒホッフの電流則により節点方程式を求めると

$$\frac{V_- - V_1}{R_1} + \frac{V_- - V_2}{R_2} = 0$$

上記 2 式をまとめると

$$V_2 = -\frac{R_2}{R_1}V_1 \qquad \cdots (\text{答})$$

(2) オペアンプが理想であり利得 $\mu=\infty$ であるので，オペアンプの + 入力端子の電圧 V_+ と − 入力端子の電圧 V_- は等しく

$$V_- = V_+$$

オペアンプの + 入力端子は抵抗 R を介して接地されていることから

$$V_+ = -RI_B$$

V_- の節点においてキルヒホッフの電流則により節点方程式を求めると

$$\frac{V_- - V_1}{R_1} + \frac{V_- - V_2}{R_2} + I_B = 0$$

上記 3 式をまとめると

$$V_2 = -\frac{R_2}{R_1}V_1 + \left\{1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R\right\}R_2 I_B \qquad \cdots (\text{答})$$

(3) 問 (2) の結果より，出力電圧 V_2 が入力バイアス電流 I_B によって影響を受けないためには，I_B の項が 0 となればよく

$$\left\{1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R\right\}R_2 = 0$$

が条件となる．
これを整理して

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} \qquad \cdots (\text{答})$$

問題１３　制御工学　の解答例

Ⅰ　(1)　$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{(s+1)^2}}{1+\frac{2s+K_1}{(s+1)^2}}=\frac{1}{s^2+4s+(K_1+1)},\qquad \frac{Y(s)}{D(s)}=-\frac{2s+K_1}{s^2+4s+(K_1+1)}$$

(2)　$2\zeta\omega_n=4,\ \omega_n^2=K_1+1$　であるため，$\omega_n=\sqrt{K_1+1},\ \zeta=\dfrac{2}{\sqrt{K_1+1}}$　である。

(3)　題意を満たす条件は $\zeta\geq 1$ である。したがって　$K_1\leq 3$　である。

(4)　$$Y(s)=-\frac{2s+2}{s^2+4s+3}D(s)+\frac{1}{s^2+4s+3}R(s)=\frac{-2s-1}{s^2+4s+3}\times\frac{2}{s}=-\frac{2}{3s}-\frac{1}{s+1}+\frac{5}{3(s+3)}$$

であるため，逆ラプラス変換より，制御出力 $y(t)$ はつぎのようになる。

$$y(t)=-\frac{2}{3}-e^{-t}+\frac{5}{3}e^{-3t}\quad(t\geq 0)$$

Ⅱ　(1)　図１の制御系の特性多項式 $A_c(s)$ とそのラウス表は以下のようになる。

$$A_c(s)=s^3+2s^2+s+K_2,\qquad \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & K_2 \\ s^1 & \alpha & \\ s^0 & K_2 & \end{array}\qquad \alpha=-\frac{1}{2}(K_2-2)$$

したがって，図１の制御系が安定であるための必要十分条件は

$$0<K_2<2$$

である。

(2)　$K_2=1$ のとき，一巡伝達関数 $L(s)$ は

$$L(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$$

である。周波数伝達関数は

$$L(j\omega)=\frac{-2\omega-j(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

である。よって，ベクトル軌跡は右図のようになる。

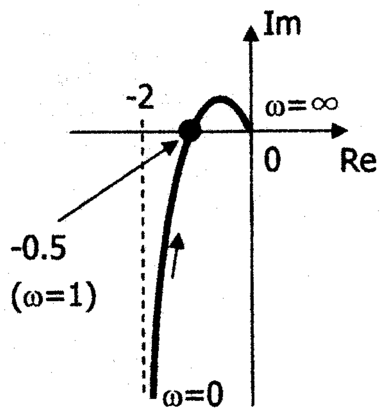


図　ベクトル軌跡

また，始点および終点の漸近的性質は以下のとおりである。

$$\begin{cases}\omega\to+0\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}L(j\omega)\to-2,\ \mathrm{Im}L(j\omega)\to-\infty,\ \arg L(j\omega)\to-90^\circ\\ \omega\to+\infty\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}L(j\omega)\to-0,\ \mathrm{Im}L(j\omega)\to+0,\ \arg L(j\omega)\to-270^\circ\end{cases}$$

(3)　定常位置偏差 (ε_p) と定常速度偏差 (ε_v) は，つぎのようになる。

$$\varepsilon_p=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}=0,\qquad \varepsilon_v=\frac{1}{\lim_{s\to 0}sL(s)}=1$$

（解答例おわり）

問題２０　計算機基礎　解答例

I　解答

2to1 マルチプレクサとそれに対応するデマルチプレクサの真理値表は以下のとおり

A	B	S	Y
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

S	Y	A	B
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1

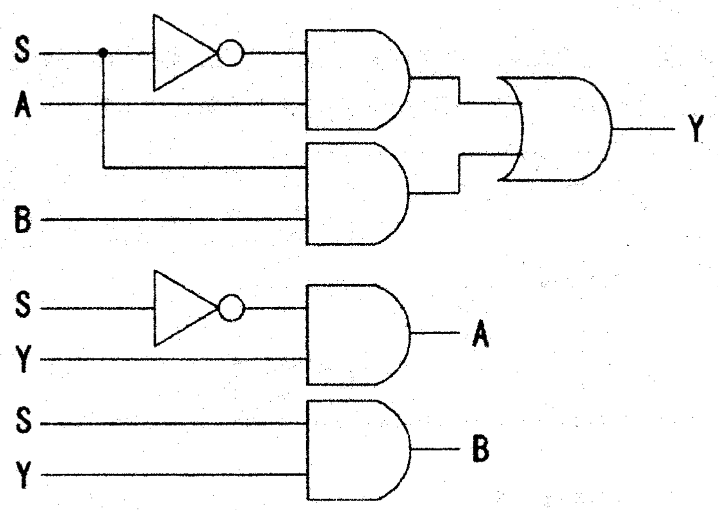
マルチプレクサの簡単化した論理式は

$$Y = A\overline{S} + BS$$

デマルチプレクサの簡単化した論理式は

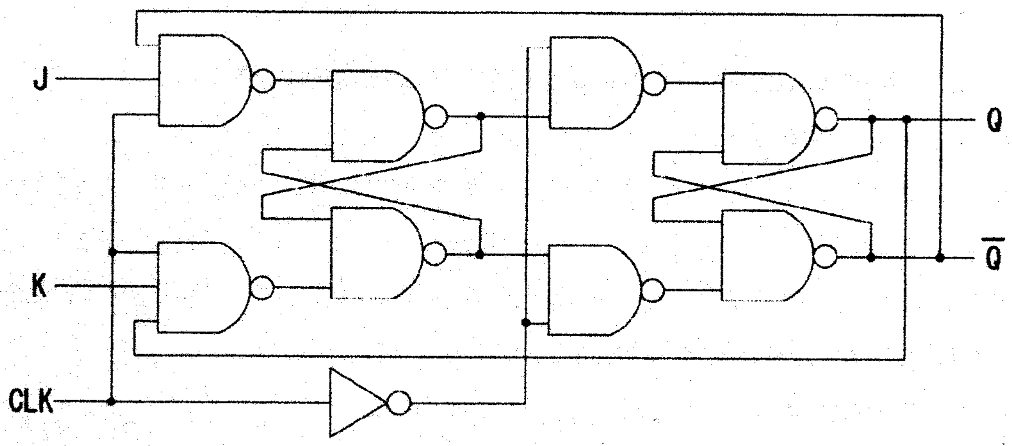
$$A = \overline{S}Y, \quad B = SY$$

論理回路



Ⅱ　解答

(1)



(2)　JK フリップフロップ単体では、状態表より J(n)=K(n)=1 のとき、Q(n+1) は Q(n) の反転値であることから J(n)=K(n)=1 が続くと Q(n+1) が 0、1 の繰り返しが続くため安定した論理値を出力できない。これをマスタースレーブ構成にすることで状態の変化をクロックサイクル当たり 1 回に限定することができる。

また、マスタースレーブ構成の問題点としてクロックの山の幅分の遅延がフリップフロップ内で生じる。これを解決するための方式として、クロックの立ち上がりまたは立下りで値が確定するエッジトリガ型 FF がある。

Ⅲ　解答

(1)　プログラムカウンタの示す命令アドレスを内部バス経由で、アドレスレジスタに送り、そこからアドレスバスに出力し、同時にデータ読み出し信号をメインメモリに送る。すると、メインメモリ上の指定されたアドレスの内容（命令語）がメインメモリからデータバスに出力される。次にデータバスに出力された命令語を CPU 内部の命令レジスタに取り込む。さらに、命令レジスタのオペコードの部分を命令デコーダでデコードして制御回路に与え命令実行の準備をする。またプログラムカウンタを 1 増加し次の命令の格納されているアドレスに設定しておく。

(2)　(a) 命令デコードの高速化が可能、(b) 命令種類の多様化が可能

(3)　算術シフトは MSB 符号ビットを維持したまま下位ビットのみをシフトする。一方、論理シフトでは全ビットをシフトする。

(4)　バス接続の長所は配線が容易、短所は 1 回路のデータ転送中配線が占有されること。

問題２３　解答

I

(1)

$$H(X,Y)=3\times\frac{1}{5}\log_2 5+\frac{2}{5}\log_2\frac{5}{2}$$

$$=\frac{3}{5}\log_2 5+\frac{2}{5}(\log_2 5-1)$$

$$=\log_2 5-\frac{2}{5}$$

$$=2.322-0.4$$

$$=1.922$$

(2)

$$P_X(x)=\sum_{y\in\{0,1\}}P_{XY}(x,y)$$

$$=P_{XY}(x,0)+P_{XY}(x,1)$$

となる。この式より，$P_X(0)=2/5, P_X(1)=3/5$ を得る。同様に $P_Y(0)=2/5, P_Y(1)=3/5$ となる。

$$H(X)=H(Y)=\frac{2}{5}\log_2\frac{5}{2}+\frac{3}{5}\log_2\frac{5}{3}$$

$$=\frac{2}{5}(\log_2 5-1)+\frac{3}{5}(\log_2 5-\log_2 3)$$

$$=\log_2 5-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\log_2 3$$

$$=2.322-0.4-0.6\times1.585$$

$$=0.971$$

(3)

解答Ａ：チェイン則から導かれる関係式 $H(Y\mid X)=H(X,Y)-H(X)$ より

$H(Y\mid X)=1.922-0.971=0.951$

解答Ｂ：まず条件付き確率を関係 $P_{Y|X}(y\mid x)=P_{XY}(x,y)/P_x(x)$ 次のように求める。

$P_{Y\mid X}(y\mid x)$	$x=0$	$x=1$
$y=0$	1/2	1/3
$y=1$	1/2	2/3

あとは条件付きエントロピーの定義より次のように計算する。

$$P_{Y|X}(y|x) = \sum_{x\in\{0,1\}, y\in\{0,1\}} P_{XY}(x,y)\log_2(1/P_{Y|X}(y|x))$$
$$= \frac{1}{5}\log_2 2 + \frac{1}{5}\log_2 2 + \frac{1}{5}\log_2 3 + \frac{2}{5}\log_2 \frac{3}{2}$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\log_2 3 + \frac{2}{5}(\log_2 3 - 1)$$
$$= \frac{3}{5}\log_2 3$$
$$= 0.6\times 1.585 = 0.951$$

(4)解答Ａ：（平均）相互情報量は$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$であるので

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$
$$= 0.971 - 0.951$$
$$= 0.020$$

となる。

解答Ｂ：相互情報量の定義から次のように計算を行う。

$$I(X;Y) = \sum\nolimits_{x\in\{0,1\}, y\in\{0,1\}} P_{XY}(x,y)\log_2\frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)}$$
$$= \frac{1}{5}\log_2\frac{(1/5)}{(2/5)(2/5)} + \frac{1}{5}\log_2\frac{(1/5)}{(2/5)(3/5)} + \frac{1}{5}\log_2\frac{(1/5)}{(2/5)(3/5)} + \frac{2}{5}\log_2\frac{(2/5)}{(3/5)(3/5)}$$
$$= \frac{1}{5}\log_2\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\log_2\frac{5}{6} + \frac{1}{5}\log_2\frac{5}{6} + \frac{2}{5}\log_2\frac{10}{9}$$
$$= \frac{1}{5}(\log_2 5 - 2) + \frac{2}{5}(\log_2 5 - \log_2 3 - 1) + \frac{2}{5}(\log_2 5 + 1 - 2\log_2 3)$$
$$= \log_2 5 - \frac{6}{5}\log_2 3 - \frac{2}{5}$$
$$= 2.322 - 1.2\times 1.585 - 0.4$$
$$= 0.020$$

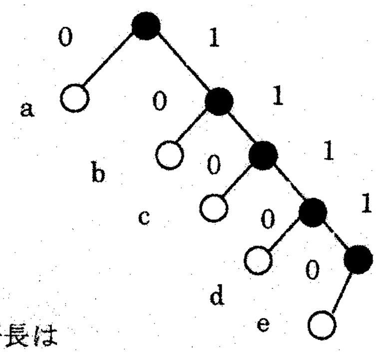
II

(1)

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5}$$
$$= \frac{16+8+4+2+1}{32} = \frac{31}{32} < 1$$

となることからクラフトの不等式が成立していることがわかる。

(2)



(3)平均符号語長は

$$L=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times4+\frac{1}{16}\times5$$
$$=\frac{8+8+6+4+5}{16}=\frac{31}{16}$$

となる。一方，エントロピーは

$$H(S)=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{1}{8}\log_2 8+\frac{1}{16}\log_2 16+\frac{1}{16}\log_2 16$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{4}{16}$$
$$=\frac{8+8+6+4+4}{16}=\frac{30}{16}$$

となる。したがって，

$$L-H(S)=\frac{31-30}{16}=\frac{1}{16}$$

となる。

(4)

（改善法）アルファベット e に対応する符号語を 1111 に変更する。

（瞬時符号である説明A）1111 としてもプレフィックス条件が成り立つため，変更して得られる符号は瞬時復号可能な符号である。

（瞬時符号である説明B）符号木による説明（詳細は略）

（最適性の説明）改善して得られる符号の平均符号長を L' とすると

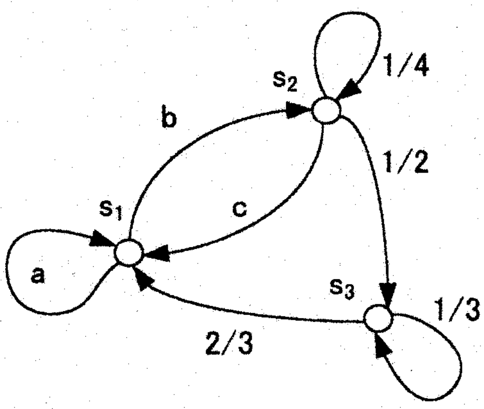
$$L'=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times4+\frac{1}{16}\times4$$
$$=\frac{8+8+6+4+4}{16}=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}$$

となり、したがって $L'-H(S)=0$ が成り立つ。情報源符号化定理より，任意の瞬時符号について平均符号語長はエントロピーと等しいか大きい。この符号の場合，$L'-H(S)=0$ となっ

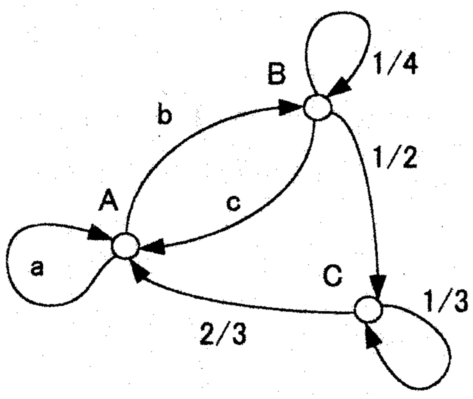
ていため，この符号をこれ以上，平均符号語長の点で改善することは不可能である。

III

(1)解答A



解答B



(2)

$c=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，また $\frac{6}{13}a+\frac{4}{13}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{13}$ より $a=\frac{1}{2}$，$b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって $(a,b,c)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

(3) $H(S\mid s_2)=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=1.500$

(4) 同様に $H(S\mid s_1)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=1$，$H(S\mid s_3)=-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}=\log 3-\frac{2}{3}$

よって

$$
\begin{aligned}
H(S)&=1\times\frac{6}{13}+\frac{3}{2}\times\frac{4}{13}+\left(\log 3-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{13}\\
&=\frac{1}{13}(10+3\log 3)\square\frac{1}{13}(14.755)\\
&=1.135
\end{aligned}
$$

大学院入試 英語 解答

I

(1) a
(2) c
(3) c
(4) b
(5) c
(6) d

II

1 fossil
2
(2) b
(3) c

III

以下は正解の一例である。

The most important thing in note-taking is to let your notes represent the logical progression of thought in the lecture, securing the framework upon which the lecture is hung.

IV

(1) b
(2) a
(3) d
(4) a
(5) c
(6) c
(7) a
(8) d