平成 25 年度神戸大学大学院工学研究科博士課程前期課程入学試験

量子物理学

下記の問 1)～8) について解答せよ。解答は，結果だけでなく導出の過程も記す事。
必要なら以下の積分公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \qquad (a > 0)$$

問題. バネ定数 k のバネに質量 m の質点がつけられた一次元調和振動子の量子力学的な運動を考える。振動中心を原点 $x = 0$ とすると，この質点は次のポテンシャル中を運動するものと考える事ができる。

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \text{ ---------- (1)}$$

1) 振動の角振動数を m と k を用いて表しなさい。(結果のみで良い)
2) 前問 1) の結果を踏まえ，式 (1) のポテンシャル中の質点に対する時間に依存しないシュレディンガー方程式を，角振動数 ω，プランク定数 $2\pi\hbar$，質点の質量 m，位置座標 x，波動関数 $\phi(x)$，エネルギー E などを用いて書きなさい（結果のみで良い)。
3) 前問 2) で得られたシュレディンガー方程式を解いて，基底状態のエネルギー準位 $E = E_0$ を求めたい。以下の指示に従って答えを導きなさい。まず，基底状態の波動関数が

   $$\phi_0(x) = Ae^{-\alpha x^2} \text{ ---------- (2)}$$

   という形に書けると仮定し（ここで α は未知の定数，A は規格化定数)，これを前問 2) で得られたシュレディンガー方程式に代入する事により，α を m と ω を用いて表す式，及び，E_0 を α を用いて表す式を導出しなさい。そしてそれらの結果から，基底状態のエネルギー準位 E_0 を表す式を求めなさい。
4) 前問 3) で現れた規格化定数 A を以下の指示に従って求めなさい。まず A を α などを用いて表す式を導出し，次に，前問 3) で求めた α を表す式を用いる事によって答えを導きなさい。
5) 今考えている基底状態における，質点の位置の期待値 $\langle x \rangle$ と位置の 2 乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$ を以下の指示に従って求めなさい。まず式 (2) の波動関数を用いて計算を行い，次に必要に応じて問 3)，問 4) で得られた α 及び A を表す式を用いる事によって答えを導きなさい。

（２枚目に続く）

次に，ポテンシャルの形が

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \lambda x \text{ ---------- } (3)$$

となっている場合を考える。ただし λ は任意の定数とする。

6) 式 (3) のポテンシャルの値が最小となる x の値を求めなさい（これを x_0 とする）。その結果を踏まえて，式 (3) のポテンシャルを x_0 の周りにテーラー展開した式を導出しなさい。更にその結果を踏まえて，このポテンシャルの概略図を，横軸を x，縦軸をポテンシャル $V(x)$ として図示しなさい。図中には，x_0 の値，及び x_0 におけるポテンシャルの値も書き入れること。図示した曲線がどのような曲線であるかを文章で説明しなさい。

7) 問 3)，5)，6) の結果を踏まえて，式 (3) のポテンシャル中の基底状態のエネルギー準位と，基底状態における質点の位置の期待値 $\langle x \rangle$，及び，位置の 2 乗の期待値 $\langle x^2 \rangle$ を答えなさい。(結果のみでよい。ただし結果に至る論理を文章で説明すること)

8) 次に，式 (3) のポテンシャルの第 2 項目を摂動ポテンシャル $V'(x) = \lambda x$ として取り扱い，1 次の摂動論を適用する。すなわち，問 3) で求めた非摂動状態の基底状態のエネルギー準位 E_0 が，摂動ポテンシャル $V'(x)$ が付け加わった事によって $E_0 + \Delta E_0$ に変化したとすると，このエネルギー準位の変化 ΔE_0 は，1 次の摂動論を用いると，

$$\Delta E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^*(x) V'(x) \phi_0(x)\,dx \text{ ---------- } (4)$$

で与えられる。この式 (4) を用いて $E_0 + \Delta E_0$ を求めなさい。更に，得られた結果を問 7) で得られたエネルギー準位と比較し，考察しなさい。