2021年度（令和3年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

私費外国人留学生

専門試験問題

（情報工学系プログラム）

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は，１ページから16ページまであります。解答用紙は，２枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。
3. 下記表の問題番号14から19の中から２題を解答してください。１題につき解答用紙１枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
14	計算機ソフトウエア Computer software
15	計算機ハードウエア Computer hardware
16	情報数学 Mathematics for computer science
17	微分積分・線形代数 Calculus and linear algebra
18	数理科学１ Mathematics 1
19	数理科学２ Mathematics 2

4. 監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を２枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。
5. 計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。
6. 解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。
7. 机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。
8. コンパス及び定規等は，使用できません。
9. 時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。
10. スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。
11. 試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。
12. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 14　計算機ソフトウエア　設問についてすべて解答すること。

I　頂点集合 V を持つ有向グラフが与えられているものとする。図 1 のアルゴリズムは開始頂点 $s \in V$ から任意の $v \in V$ までの経路を探し，経路上の辺のコストの和を配列 D の各要素 $D[v]$ に保存するものである。このとき，次の（1）～（5）の問いについて答えよ。ただし，$\mathrm{cost}(u,v)$ は $u \in V$ から $v \in V$ への有向辺 (u,v) のコスト（正の実数値）を表す関数，$\emptyset$ は空集合，$X \cup Y$ は X, Y の和集合とする。アルゴリズムの 4 行目において最小の頂点が複数存在する場合は，頂点のアルファベット順で選ぶものとする。また,（4）と（5）において，2 つの経路上のすべての頂点が同一の順序で現れる場合にのみ，それらを同じ経路とみなす。

行番号

```
1  for(v ∈ V) { D[v] ← ∞ }
2  X ← ∅, D[s] ← 0
3  while(X ≠ V) {
4    u を D[v'](v' ∉ X) が最小の頂点とする
5    X ← X ∪ {u}
6    for(v ∈ ‘u から v への有向辺が存在する頂点 v の集合’ ) {
7      D[v] ← min(D[v], D[u] + cost(u, v))
8    }
9  }
```

図 1: アルゴリズム

（1）図 1 のアルゴリズムを図 2 と図 3 のグラフに適用する。while ループ中の 4〜8 行目が一回終了した時点と，アルゴリズムが終了した時点での $D[v](v \in V)$ をまとめた表 1 と表 2 の空欄 (A)～(K) に入る値をそれぞれ答えよ。ただし，図中，各有向辺付近の数値が辺のコストである。

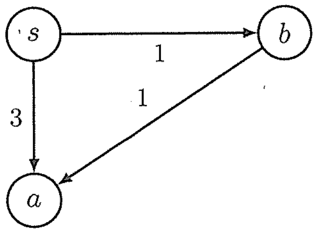


図 2: グラフ 1

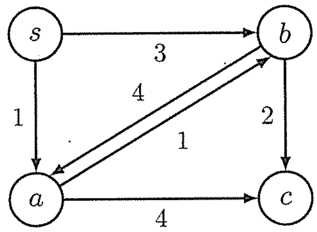


図 3: グラフ 2

表 1: グラフ 1 での配列 D の値

	$D[s]$	$D[a]$	$D[b]$
1 回目	(A)	3	(B)
終了時	(C)	(D)	1

表 2: グラフ 2 での配列 D の値

	$D[s]$	$D[a]$	$D[b]$	$D[c]$
1 回目	(E)	(F)	(G)	∞
終了時	(H)	(I)	(J)	(K)

（2）図 1 のアルゴリズムに関する以下の（ア）～（エ）の正誤を，それぞれ正か誤で答えよ。

（ア）　このアルゴリズムは，クラスカル法と呼ばれる。

（イ）　グラフが閉路を持つ場合，アルゴリズムが終了しない可能性がある。

（ウ）　アルゴリズムが終了した時点で $D[v](v \in V)$ の値が，s から任意の $v \in V$ へ至る経路の最小コストとなっている。

（エ）　アルゴリズムが実行される過程において，$D[v](v \in V)$ の値が増加することはない。

（3）頂点集合 V のサイズを n，有向辺の総数を m としたとき，図 1 のアルゴリズムの計算コストとして以下の (a)〜(d) から最もタイトなものを選び，(a)〜(d) の記号で答えよ。ただし，配列 D の各要素やコスト $\mathrm{cost}(u,v)$ へのアクセスと $X \neq V$ の判定は $O(1)$，4〜5 行目の操作は $O(n)$ とし，6〜8 行目の for 文は u の出次数に比例する計算量で実行されるものとする。

(a) $O(m+n^2)$　　(b) $O(m^2+n^2)$　　(c) $O(mn+n^2)$　　(d) $O(m^2+n)$

（4）あるグラフに対して，図 1 のアルゴリズムが終了した時点で s から各頂点 v への最小コストが $D[v]$ として得られたものとする。以下の問い（ア）と（イ）に答えよ。ただし，経路上の頂点 v の直前の頂点とは，その経路上で v の 1 つ前に通過する頂点である。例えば，頂点 s,a,b,c の順に移動する経路があった場合，c の直前の頂点は b のことを指す。

（ア）開始頂点 s から各 v（ただし，$v \neq s$）までコスト $D[v]$ で至る各経路に対して，最後の頂点 v の直前の頂点を配列 P の各要素 $P[v]$ に保存できたものとする。いま，$P[a]=s, P[b]=s, P[c]=d, P[d]=b$ であった場合，s から d へ至る最小コスト経路として P が示している頂点の移動順を以下の (a)〜(d) から適切なものを選び，(a)〜(d) の記号で答えよ。

(a) s,a,b,d　　(b) s,b,c,d　　(c) s,b,d　　(d) s,c,d

（イ）有向グラフ上に同じコストの異なる経路がいくつか存在する場合がある。s から各 v（ただし，$v \neq s$）までコスト $D[v]$ で至るすべての経路に対して，最後の頂点 v の直前の頂点を配列 P の各要素 $P[v]$ に集合として保存できたものとする。例えばもし，c に至る最小コストの経路が s,a,b,c と s,a,c の 2 つであった場合，$P[c]=\{a,b\}$ となる。いま，$P[a]=\{s\}, P[b]=\{s\}, P[c]=\{s,a,b\}, P[d]=\{b,c\}$ であったとして，配列 P が示す s から d への異なる最小コスト経路はいくつあるか答えよ。

（5）図 1 のアルゴリズムを修正して，同じコストの異なる経路の数を保存することを考える。配列 N の各要素 $N[v]$ には頂点 v に到達する同一コストの経路の数を保存する。$v \neq s$ については $N[v]=0$，$N[s]=1$ として初期化されているものとする。図 1 のアルゴリズムの 7 行目を以下の図 4 に置き換えるとき，空欄 (A) と (B) に入る式をそれぞれ答えよ。ただし，$N[v]$ と $N[u]$ のいずれか，または両方を用いた式とすること。

```
if(D[v] > (D[u] + cost(u, v))) {
  D[v] ← D[u] + cost(u, v)
  N[v] ← [ (A) ]
} else if(D[v] = (D[u] + cost(u, v))) {
  N[v] ← [ (B) ]
}
```

図 4: 図 1 のアルゴリズムの 7 行目の変更後

II　次の（1）と（2）の問いについて答えよ。

（1）プッシュダウンオートマトンに関して，以下の（ア）～（ウ）の問いについて答えよ。

（ア）図5のプッシュダウンオートマトン M_1 が受理する語 w の中で，
$|w| = 11$ のものを3つ答えよ。なお，Z_0 はスタックのボトムマーカであり，
初期様相において，スタック上にある記号は Z_0 のみとする。

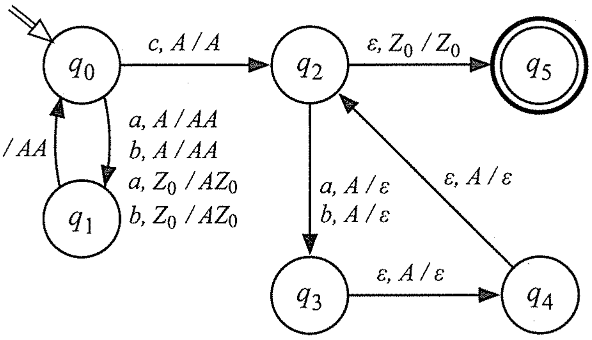


図 5: プッシュダウンオートマトン M_1

（イ）M_1 が受理する言語を50字以内で説明せよ。

（ウ）入力記号のアルファベット $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$ において，
言語 $L_2 = \{xcy | x \in \{a, b\}^+, y \in \{a, b\}^+, x \neq y\}$ を受理するプッシュダウン
オートマトン M_2 を構築したところ，M_2 の状態遷移図は図6のようになった。
この時，図6の空欄(A)～(F)に入る適切な動作関数を，他の動作関数にならって
それぞれ答えよ。ただし，各空欄に入る動作関数は1つとは限らない。なお，Z_0 は
スタックのボトムマーカであり，スタック上で使える記号の集合は $\Gamma_2 = \{A, Z_0\}$
とする。また，初期様相において，スタック上にある記号は Z_0 のみとする。

（2）チューリングマシンに関して，以下の（ア）と（イ）の問いについて答えよ。

（ア）図7のチューリングマシン M_3 が**受理しない**語 w の中で，
$|w| = 6$ のものを1つ答えよ。ここで入力記号のアルファベットは $\Sigma_3 = \{a, b\}$ とし，
テープに書き込むことができる記号の集合は $\Gamma_3 = \{a, b, a', b', a'', b'', ¢, \$\}$ とする。
なお，初期様相において，入力される語である記号列はテープに書き込まれており，
記号列の左にはエンドマーカ ¢ が，右にはエンドマーカ \$ が書き込まれているものと
する。また，記号列とエンドマーカが書かれている場所以外はすべて空白であり，
ヘッドは記号列の左端にあるものとする。

（イ）M_3 が受理する言語を50字以内で説明せよ。

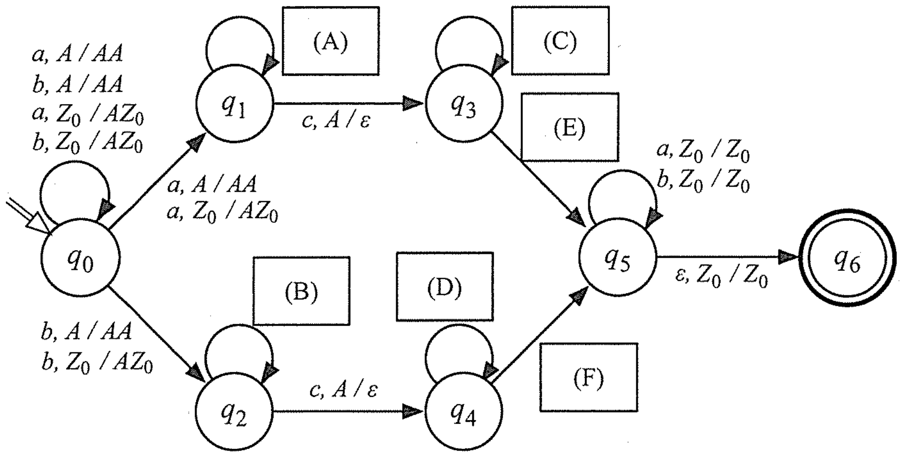


図 6: プッシュダウンオートマトン M_2

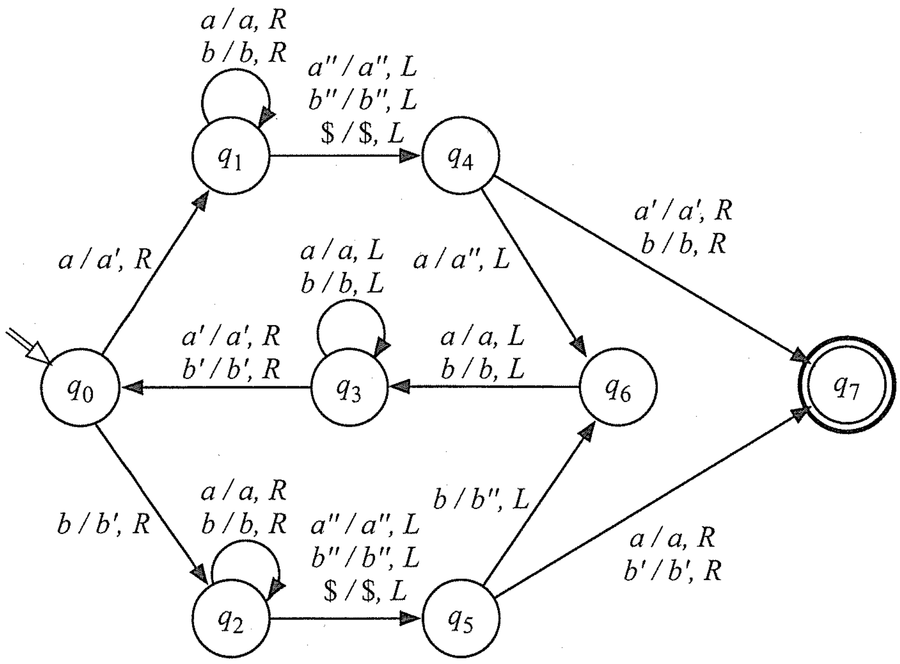


図 7: チューリングマシン M_3

問題 15　計算機ハードウエア　設問についてすべて回答すること。

I　次のディジタル回路に関する（1）〜（5）の問いについて答えよ。ここで F は論理式の出力値で A, B, C, D は論理式の入力値とする。なお，論理回路を図示する解答には図 1 に示す MIL 記号を用い，論理式を示す解答には図 1 に示す演算子を用いよ。

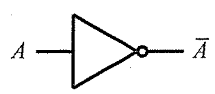
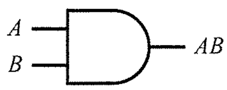
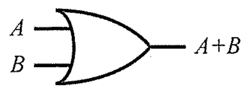
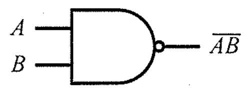
	NOT	AND	OR	NAND
MIL 記号				
演算子	$\bar{A}$	AB	$A+B$	$\overline{AB}$

図 1: MIL 記号および演算子

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

図 2: カルノー図

（1）$F = AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + ABCD + \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ について図 2 のカルノー図を用いて考える。図 2 を解答用紙に転記し，F に対するカルノー図を完成させよ。ただし，カルノー図の各要素は 0 または 1 とすること。また，簡単化の様子をカルノー図内に枠で囲み明示すること。

（2）出力 F を求める論理式を，合わせて 5 個以下の AND，OR，NOT 演算子のみを用いて答えよ。

（3）（2）の結果を元に出力 F を生成する論理回路を，合わせて 5 個以下の AND，OR，NOT 回路を用いて図示せよ。

（4）出力 F を求める論理式を，5 個以下の NAND 演算子のみを用いて答えよ。

（5）（4）の結果を元に出力 F を生成する論理回路を，5 個以下の NAND 回路のみを用いて図示せよ。

II　符号付き整数に関する（1）,（2）の問いに答えよ。ただし，括弧付きで示した添字の数値は基数を表す。また，負の数に対しては，2の補数表現が使用されているものとする。

（1）以下の（ア）の2進数および（イ）の16進数を10進数でそれぞれ答えよ。

（ア）$0111\ 0101_{(2)}$

（イ）$\mathrm{AD}_{(16)}$

（2）以下の（ア）～（エ）の演算を行い，4桁の16進数でそれぞれ答えよ。

（ア）$0010\ 1001\ 0101\ 1100_{(2)} \times 0000\ 0000\ 0000\ 0010_{(2)}$

（イ）$0001\ 0111\ 1101\ 1010_{(2)} \times 1111\ 1111\ 1111\ 1100_{(2)}$

（ウ）$1101\ 1100\ 0011\ 0100_{(2)} \div 0000\ 0000\ 0000\ 0100_{(2)}$

（エ）$1001\ 0011\ 1001\ 1100_{(2)} \div 1111\ 1111\ 1111\ 1100_{(2)}$

III　図3に示す5つのステージからなる，単一データパスを持つプロセッサについて，次の（1）～（4）の問いについて答えよ。各ステージの実行はそれぞれ1クロック・サイクルで完了するとし，全ての処理においてパイプライン・バブル，パイプライン・ストールは発生しないものとする。括弧内には，それぞれのステージの略称と，主記憶のキャッシュがヒットした場合の処理時間(ピコ秒)を並べて示す。1ピコ秒は1×10^{-12}秒である。なお,（3）を除きパイプライン段数はステージ数に等しいとする。また,（3）以降についてはデータパスにおいてパイプライン処理を用いるものとする。

1. 主記憶からの命令フェッチ (IF, 200)
2. 命令のデコードとレジスタ値のフェッチ (ID, 300)
3. 命令の実行，演算 (EXE, 100)
4. データに関する主記憶アクセス (MEM, 250)
5. レジスタへの書き込み (WB, 200)

図3: データパスの5つのステージ

（1）5つのステージすべてを実行するときに必要な処理時間（ステージ1～5までの合計の処理時間）を次の（ア）,（イ）の場合についてそれぞれピコ秒で答えよ。なお，キャッシュ・ミスは発生しないものとする。

（ア）パイプライン処理を用いない場合

（イ）パイプライン処理を用いる場合

（2）5つのステージすべてを用いる，十分に多数の命令を実行する場合，1命令当たりの平均処理時間を次の（ア）,（イ）の場合についてそれぞれピコ秒で答えよ。なお，キャッシュ・ミスは発生しないものとする。

（ア）パイプライン処理を用いない場合

（イ）パイプライン処理を用いる場合

（3）ステージ1～5のうちのいずれか1つのステージを半分に分割することでクロック周波数の向上をはかりたい。分割後の新しいステージの処理時間は，それぞれ元の処理時間の半分になるとする。以下の（ア）,（イ）についてそれぞれ答えよ。なお，キャッシュ・ミスは発生しないものとする。

（ア）分割すべきステージの略称を答えよ。さらに，その理由を20文字以内で説明せよ。

（イ）分割後のプロセッサの最大クロック周波数は何GHzになるか答えよ。

（4）もう一度,（3）によるステージの分割を行っていない図3の5つのステージからなるプロセッサを考えよう。このプロセッサが今，2GHzのクロック周波数で動作をしている。キャッシュ・ミスが発生した場合はプロセッサ全体がストールするものとし，ミス・ペナルティはキャッシュ・

ミスに関するすべての処理を含めて150ナノ秒とする。1ナノ秒は1×10^{-9}秒である。以下の（ア）～（ウ）についてそれぞれ答えよ。

（ア）ミス・ペナルティはこのプロセッサの何クロック・サイクルに相当するか答えよ。

（イ）このプロセッサのCPI (cycles per instruction) を答えよ。ただし，キャッシュ・ミスの発生していないプロセッサのCPIは1である。また，キャッシュ・ミスは命令フェッチのキャッシュのみで発生し，そのキャッシュ・ミス率は1%とする。

（ウ）このプロセッサのCPIを答えよ。ただし，キャッシュ・ミスの発生していないプロセッサのCPIは1である。また，命令フェッチのキャッシュ・ミス率が1%であり，データに関する主記憶アクセスのキャッシュ・ミス率が3%である。また，データに関する主記憶アクセスがある命令の出現頻度は20%とする。

問題 16　情報数学　設問についてすべて解答すること。

I　図 1 のような 2 元無記憶通信路を考える。入力を X，出力 を Y とし，いずれもアルファベット $\{0,1\}$ 上の確率変数であるとする。入力 $X=0$ となる確率を p とおく。このとき，次の（1）〜（6）の問いについて答えよ。なお，解答においては，導出過程も簡潔に示すこと。また，最も簡約化した形で答えを示すこと。ここで簡約化とは，分数に関しては既約形，対数に関しては最も簡単な形（例：$\log_2 6 \to 1+\log_2 3$）に変形することを指す。$0\log_2 0 = 0$ とする。2 元エントロピー関数 $h(\alpha) = -\alpha\log_2\alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)$ を利用できる場合には，必ずそれを用いて解答せよ。

（1）エントロピー $H(Y)$ を答えよ。

（2）条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を答えよ。

（3）相互情報量 $I(X;Y)$ を答えよ。

（4）通信路容量 C_0 とそれを実現する p の値をそれぞれ答えよ。

（5）2 ビットの 2 元符号 $M=\{00,11\}$ を考え，2 つの符号語が等確率 1/2 で生起するものとする。図 1 の通信路でこの符号を送ることを考える。送信符号と受信符号とが一致しない場合に誤りとみなすとき，復号誤り率 P_e（平均誤り率ともいう）を答えよ。

（6）（5）の 2 元符号の伝送速度 R（情報速度ともいう）を答えよ。

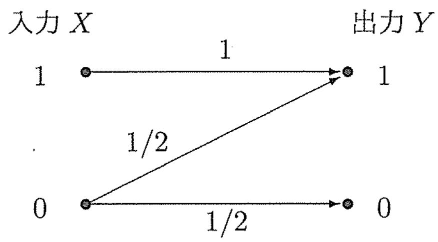


図 1: 2 元無記憶通信路

II　空でない任意の有限集合 A, B に関する関数 $f: A \to B$ について，次の（ア）～（エ）のそれぞれを満たす条件式を選択肢 (a)～(h) からすべて選び，(a)～(h) の記号で答えよ。

[選択肢]

(a) $\forall x \in A\ \exists y \in B\,[y = f(x)]$	(b) $\forall y \in B\ \exists x \in A\,[y = f(x)]$
(c) $\exists x \in A\ \forall y \in B\,[y = f(x)]$	(d) $\exists y \in B\ \forall x \in A\,[y = f(x)]$
(e) $\forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A\,[f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2]$	(f) $\forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A\,[x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)]$
(g) $\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	(h) $\lvert A\rvert \geq \lvert B\rvert$

（ア）f が必ず満たす条件式

（イ）f が全射関数であるとき必ず満たす条件式

（ウ）f が単射関数であるとき必ず満たす条件式

（エ）f に逆関数が存在するとき必ず満たす条件式

III　集合 $A = \{1, 2, 3\}$ であり，$P(A)$ は A のべき集合，$\varnothing$ は空集合である。このとき，次の（1）～（5）の問いに答えよ。

（1）A 上の関係 $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ は同値関係ではないが，1つの対を加えると同値関係になる。R_1 を同値関係にするために加えるべき対を答えよ。

（2）半順序集合 $(P(A), \subseteq)$ について，その部分集合 $\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ の最大元，最小元，上界集合，下界集合，上限，下限をそれぞれ答えよ。なお，存在しない場合は「なし」と答えよ。

（3）$P(A)$ 上の半順序関係 $R_2 = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y,\ X \in S,\ Y \in S,\ S \subseteq P(A),\ \lvert S\rvert = k\}$ を考える。$k = 2$ かつ $\varnothing \in S$ のとき，R_2 が全順序関係になるような集合 S が全部で何通りあるか答えよ。

（4）（3）の半順序関係 R_2 について，$k = 2$ かつ $\varnothing \notin S$ のとき，R_2 が全順序関係になるような集合 S が全部で何通りあるか答えよ。

（5）（3）の半順序関係 R_2 について，$k = 5$ のとき，R_2 が全順序関係になるような集合 S が全部で何通りあるか答えよ。

問題 17　微分積分・線形代数　設問すべてについて解答すること。

I　次の (1), (2) の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ を求めよ。

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$ を 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{y^2-x^2}}$ と

表したときの積分領域 D を 座標平面内に図示し，

累次積分の順序変更を行うことでその値を求めよ。

II　2つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の (1)〜(5) の問いに答えよ。

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ。

(2) 行列式 $|A^{-1}B|$ を求めよ。

(3) A の余因子行列を $\widetilde{A}$ と表したとき，逆行列 A^{-1} を $\widetilde{A}$ を用いて表せ。

(4) 行列式 $|\widetilde{A}|$ を求めよ。

(5) 4次正方行列 C に対して，1次独立な列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ で

$$(C-2E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0},\ (C-2E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1,\ (C-2E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2,\ (C-5E)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

を満たすものが存在する。ただし E は単位行列を表す。

このとき，行列式 $|C|$ を求めよ。

問題 18　数理科学 1　設問すべてについて解答すること。

I　複素関数

$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{2z^3 - 3z^2}$$

について，次の (1) ～ (3) の問いに答えよ。

(1) $z = 0$ における $f(z)$ の留数を求めよ。

(2) 閉曲線 $C : z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を取ったとき，

積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(3) $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン展開の主要部（負べき の部分）を求めよ。

II　関数 $f(x) = \max\{0, x\}$ $(-\pi \leq x < \pi)$ を 周期 2π の周期関数に拡張した関数を $\tilde{f}$ とし，そのフーリエ級数展開

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

を考える。このとき次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を求めよ。

(2) $\tilde{f}(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ。

(3) (2) を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ の値を求めよ。

(4) (2) を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ の値を求めよ。

問題19　数理科学2　設問すべてについて解答すること。

Ⅰ　座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,b)$ と正の定数 r に対し、集合 $D(\mathrm{A},r)$ を

$$D(\mathrm{A},r)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x-a|<r,\ |y-b|<r\right\}$$

と定義する。また $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S であって

各点 $\mathrm{P}\in S$ に対し $D(\mathrm{P},r)\subset S$ となる有理数 r が存在する

という性質を満たすものの全体 および空集合 $\emptyset$ からなる集合族を $\mathcal{U}$ と表す。

このとき (1)〜(4) の問いに答えよ。

(1) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ としたとき $B\in\mathcal{U}$ を示せ。

(2) $S_1, S_2\in\mathcal{U}$ のとき $S_1\bigcap S_2\in\mathcal{U}$ を示せ。

(3) $S_n\in\mathcal{U}\ (n=1,2,3,\ldots)$ のとき $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\in\mathcal{U}$ を示せ。

(4) $S_n\in\mathcal{U}\ (n=1,2,3,\ldots)$ であるが $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n\notin\mathcal{U}$ となる集合の列 $\{S_n\}$ を1つ挙げよ。

Ⅱ　実数 $t\ (0\le t\le 1)$ に対し，座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の2点 $(t,0)$, $(0,1-t)$ を結ぶ線分 ℓ_t を考え，$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$ の部分集合 $\displaystyle\bigcup_{0\le t\le 1}\ell_t$ を D と表す。このとき次の (1)〜(4) の問いに答えよ。

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{6}\ell_{k/6}$ を図示せよ。

(2) ℓ_t の方程式を利用することで 3変数の多項式 $f(x,y,t)$ を，集合

$$\left\{(x,y)\in K \,\middle|\, f(x,y,t)=0 \text{ となる } t\ (0\le t\le 1) \text{ が存在する}\right\}$$

が D と一致するように定めよ。

(3) 集合 D の境界 ∂D から $\left\{(s,0)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le s<1\right\}\bigcup\left\{(0,s)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le s<1\right\}$ を除いた曲線を C と表す。この曲線は線分の族 $\{\ell_t \mid 0\le t\le 1\}$ の包絡線とよばれ，(2) で求めた $f(x,y,t)$ を用いて

$$\left\{(x,y)\in K \,\middle|\, \begin{array}{l} f(x,y,t)=0 \text{ かつ } \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=0 \text{ となる} \\ t\ (0\le t\le 1) \text{ が存在する} \end{array}\right\}$$

と表される。2次の多項式 $g(x,y)$ を 集合 $\left\{(x,y)\in K \,\middle|\, g(x,y)=0\right\}$ が曲線 C と一致するように定めよ。

(4) (3) の曲線 C は，直線 $y=x$ に関して対称であることを示せ。
この曲線 C は放物線の一部である。

$$X=\frac{1}{2}(x-y),\ Y=\frac{1}{2}(x+y)$$

とおくことで，その放物線の方程式を求めよ。