２０２０年度 大学院入学試験問題

2020 School Year Graduate School Entrance Examination

Problem Booklet

システム情報学 / Information Physics and Computing

第１問から第５問のうち，２問のみを選択して解答せよ．

Answer two out of Problems 1-5.

試験時間 / Examination Time:　14:00〜16:00

注 意 事 項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．ただし試験問題の内容に関する質問に対しては，原則として答えない．
You should notify the examiner if there are missing or incorrect pages in your booklet. No questions relating to the contents of the problems are acceptable in principle.

(3) 本冊子には第１問から第５問まであり，日本文は２頁から 21 頁，英文は 22 頁から 41 頁である．５問のうち２問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 2 - 21 in Japanese and pages 22 - 41 in English in this booklet. Answer two out of the five problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙２枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．必要なときは答案用紙の裏面も使用してよい．
Two answer sheets will be given. Use one sheet per problem. You may use the back of the sheet if necessary.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Do not forget to fill the examinee's number and the problem number in the designated place at the top of each answer sheet. Do never put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate the draft papers from this booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は，適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい．
In the case that a problem can be interpreted in several ways, you may answer the problem adding suitable definitions or conditions.

(9) 答案用紙および問題冊子は試験室から持ち出さないこと．
Do not take the answer sheets and this booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

選択した問題番号 / Problem numbers you selected		

上欄に受験番号を記入すること． Fill this box with your examinee's number

上欄に選択した２つの問題番号を記入すること． Fill these boxes with the problem numbers you selected.

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第１問

FIR フィルタのインパルス応答 $h[n]$と伝達関数 $H(z)$の間には，

$$H(z)=\mathrm{ZT}\{h[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

が成立する．ここで，$\mathrm{ZT}\{\cdot\}$は z 変換を表す．以下の問いに答えよ．

(1) ふたつの FIR フィルタのインパルス応答を $h_1[n]$，$h_2[n]$とするとき，

$$H_1(z)H_2(z)=\mathrm{ZT}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_1[m]h_2[n-m]\right\} \qquad (1)$$

となることを示せ．

(2) 式(1)において $H_1(z)H_2(z)=1-z^{-3}$ のとき，$h_1[n]$，$h_2[n]$の一例を求めよ．ただし，定数倍を与えるフィルタは除外する．

(3) 伝達関数が

$$H_3(z)=\frac{1}{2}\left(1-z^{-8}\right)$$

$$H_4(z)=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{8}z^{-n}$$

で与えられる FIR フィルタを考える．

(a) $H_3(z)$，$H_4(z)$の極零配置を作図せよ．このとき，図 1 に示すように，極・零点の位置，重解の場合はそのオーダを明確にすること．

(b) 問い(3)-(a)の極零配置をもとに，$H_3(z)$，$H_4(z)$の振幅応答の概形を描け．ここで振幅応答とは，周波数応答：

$$H(\omega)=H(z)\big|_{z=\exp(j\omega)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]\exp(-j\omega n)$$

に対し，$|H(\omega)|$，$(0\le\omega\le\pi)$を指す．このとき，図 2 に示すように，極小を与える横軸上の値を明確にするが，極大値の縦軸上の値を記す必要はない．

(c) $H_3(z)$で表される FIR フィルタの用途の例を挙げよ．

(4) インパルス応答が

$$h_5[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}(n-4)\right)}{(n-4)\pi}, & 0 \le n < 8 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

で与えられる FIR フィルタについて，振幅応答の概形を描け．ただし，極大・極小を与える横軸位置もそれらの値も求める必要はない．また，$h_5[n]$ で与えられる FIR フィルタを用いるべき状況で，代わりに $H_4(z)$ で与えられる FIR フィルタを用いた場合，生じる問題について論じよ．

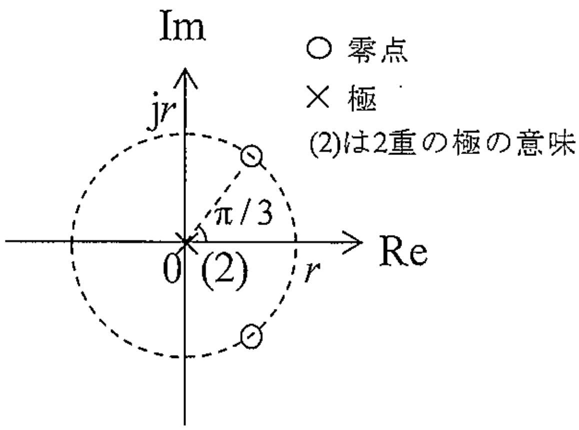

図1

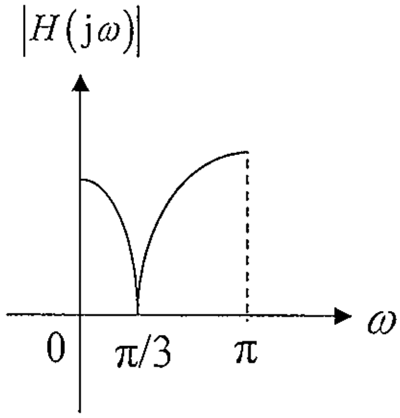

図2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
（切り離さないこと）

第 2 問

オペアンプを使用した回路に関する以下の問いに答えよ．ただし，オペアンプは全て理想特性をもつものとする．

(1) 図 1 にオペアンプ，抵抗 R, R_1，キャパシタ C，可変抵抗 R_2 により構成される非反転増幅回路を基本部に持つ一次の低域通過フィルタを示す．この回路の入出力特性を表す伝達関数 $G_1(s)$ を求めよ．また，その直流ゲインを 3 とするための可変抵抗 R_2 の設定を説明し，その時のフィルタの時定数 T，および遮断角周波数 ω_0 を求めよ．

(2) 伝達関数 $G(s) = \frac{1}{1+sT}$ ，周波数応答 $G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}$ で表される一次低域通過フィルタに対して，$t = 0$ から交流電圧 $v_\mathrm{i}(t) = E\sin(\omega t)$ を印加した場合のフィルタからの出力電圧 $v_\mathrm{o}(t)$をラプラス変換により求めよ．さらに，$\omega T \ll 1$ ，$\omega T = 1$ ，$\omega T \gg 1$ の条件において，出力電圧の信号増幅強度と位相のずれを求め，このフィルタが低域通過フィルタとして機能していることを説明せよ．

(3) 図 2 にオペアンプ，抵抗 R, R_3，キャパシタ C，可変抵抗 R_4 により構成される非反転増幅回路を基本部に持つ二次の低域通過フィルタを示す．この回路の入出力特性を表す伝達関数 $G_2(s)$ を求めよ．また，この二次低域通過フィルタの周波数応答における振幅特性が $\frac{A}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^{2n}}}$ であらわされるバターワース特性を満足するときの安定な直流ゲイン A を求めよ．ただし，ω_0は遮断角周波数，n はフィルタの次数とする．

(4) 図 1 の一次低域通過フィルタと，図 2 の二次低域通過フィルタとを組み合わせて，三次バターワース低域通過フィルタを設計し，その伝達関数を求め，安定なすべての極を複素平面上に図示せよ．さらに，遮断周波数を 10 kHz，直流ゲインを 10 としたときの R と C, R_1 と R_2, R_3 と R_4，がそれぞれ満たす関係を示せ．

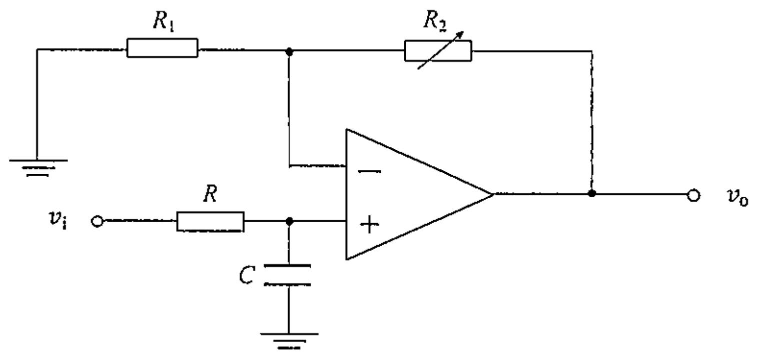

図 1

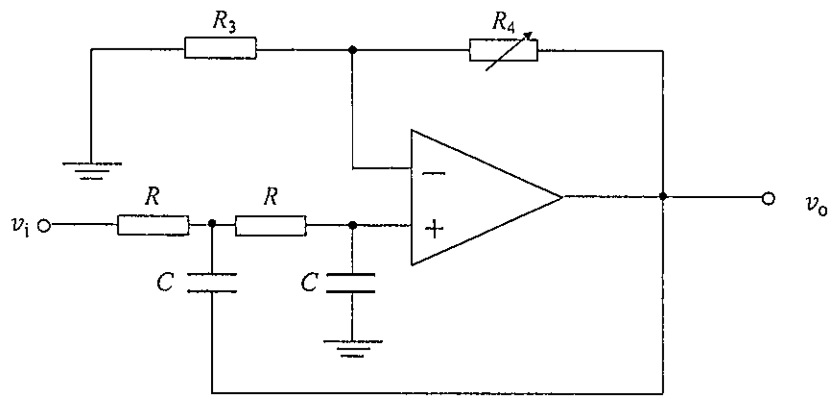

図 2

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
(切り離さないこと)

第3問

図1の制御系を考える．ただし制御対象 $P(s)$ は次のいずれかとし，

$$P_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad P_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

制御器 $C(s)$ は $C(s) = \dfrac{K}{s}$ (K は定数ゲイン) とする．以下の問いに答えよ．

(1) $P(s) = P_1(s)$ および $P(s) = P_2(s)$ の場合において，閉ループ系が安定となる K の条件をそれぞれ示せ．

(2) $P(s) = P_1(s)$ および $P(s) = P_2(s)$ の場合において，K は問い(1)の解の条件をそれぞれ満たすものとする．参照信号 $r(t)$ として時刻 $t=0$ から単位ステップ信号を入力するとき，$e(t) = r(t) - y(t)$ の定常偏差をそれぞれ示せ．また $y(t)$ のステップ応答の，$0 \leq t \ll 1$ の範囲の概形をそれぞれ描き，その理由を説明せよ．その結果から制御対象としての $P_1(s)$ と $P_2(s)$ の特性の違いを説明せよ．

次に図2の制御系を考える．以下の問いに答えよ．

(3) 制御対象 $P(s)$ および制御器 $C_1(s), C_2(s)$ をそれぞれ既約な分子多項式 $N_\bullet(s)$, 分母多項式 $D_\bullet(s)$ を用いて，$P(s) = \dfrac{N_p(s)}{D_p(s)}$, $C_1(s) = \dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$, $C_2(s) = \dfrac{N_2(s)}{D_2(s)}$ と表わす．信号 $f(t)$ から $y(t)$ までの伝達関数 $G_{fy}(s)$ を $N_\bullet(s)$，$D_\bullet(s)$ を用いて表わせ．また閉ループ系を安定とする $C_1(s), C_2(s)$ について，$N_1(s), D_2(s)$ をフルビッツ多項式とすることが常に可能なことを説明せよ．

(4) 閉ループ系は安定で，$N_1(s)$, $D_2(s)$ はフルビッツ多項式とする．また制御器 $C_3(s)$ を $C_3(s) = \dfrac{H(s)}{G_{fy}(s)}$ とする．ただし $C_3(s), H(s)$ は安定，単位ステップ信号 $r(t)$ に対する $e(t) = r(t) - y(t)$ の定常偏差を0とする．このとき，設定可能な $H(s)$ のクラスを説明せよ．またその結果を踏まえて，図1に対する図2の制御系の利点および問題点を詳しく説明せよ．

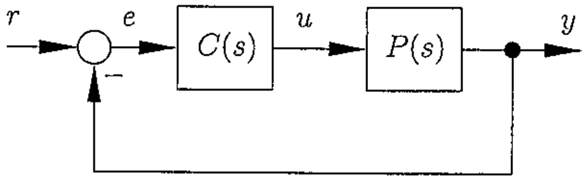

図 1

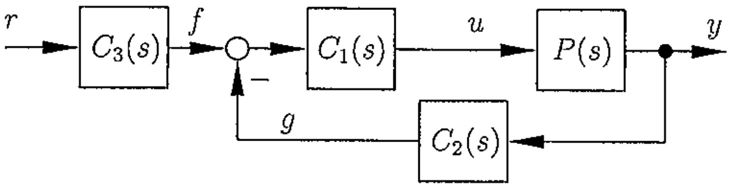

図 2

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
(切り離さないこと)

第４問

プロセス間通信に関する以下の問いに答えよ．

(1) 相互排他のために critical region に入る手続きとして，以下の 1〜2 の操作をおこなうプログラムを書いた．ただし，変数 *lock* は共有メモリに格納されており，予め 0 で初期化されているものとする．

1. *lock* の値をメモリから読み込み，2. へ進む．
2. もし *lock* の値が 0 だったら，*lock* に 1 を書き込み，critical region に入る．もし *lock* の値が 1 だったら，1. に戻る．

このプログラムを並行して実行した 2 つのプロセスが，同時に critical region に入ってしまう例を説明せよ．

(2) CPU が以下のような Test and Set Lock (TSL) 命令を持っているとする．

用法: TSL *reg*, *lock*

動作: *lock* が示すメモリワードの値をレジスタ *reg* に読み込んだ後，そのメモリワードに 0 でない値を書き込む．これらの読み込み操作と書き込み操作はアトミックに（割り込まれずに）実行される．

この命令を用いて，critical region に入る手続き enter_region() と，出る手続き leave_region() をアセンブリ言語で書け．また，それらが正しく動作する理由を説明せよ．他に必要な命令は適宜定義して使用して良い．

(3) 共有資源の残数を管理する抽象データ型であるセマフォを実現する手続き down() 及び up() を，上記の enter_region() と leave_region() を用いて擬似コードで書き，それらの動作を説明せよ．ここで，down() はセマフォから 1 を引き，up() はセマフォに 1 を足す．また，*lock* に 0 を入れてからプロセスを待ち状態のキューに入れる手続き sleep() と，待ち状態のキューからプロセスを 1 つ起こす手続き wakeup() を使って良いものとする．

(4) 共有メモリ上のデータを読み書きする手続き reader() 及び writer() を上記のセマフォを用いて擬似コードで書き，その動作を説明せよ．ただし，書き込みをおこなっているプロセスが 1 つもないときは，複数のプロセスが同時に読み込むことが可能であるが，書き込みをおこなっているプロセスがある場合は，他のプロセスは読み込むことも書き込むこともできないようにせよ．なお，実際のデータの読み書き操作には，手続き read_data() および write_data() を使ってよいこととする．

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
(切り離さないこと)

第５問

図１に示すように，２個のモータが組み込まれた質量 M，重心 G 周りの慣性モーメント I の剛体の振動について考える．剛体は重心 G からそれぞれ ℓ の等距離にあるモータの回転軸上で，ばね定数 k で同じ長さを持つ，２本のばねで支えられている．静止状態を基準として，剛体の重心 G の鉛直下向き変位を u，剛体の水平線からの回転角を θ とする．全ての物体の運動は，図の平面内に限られるものとする．簡単のため，摩擦，空気抵抗，重力加速度は無視できるものとして，以下の問いに答えよ．

(1) この剛体の鉛直方向および回転方向について，運動方程式を導け．なお θ は十分小さく，ばねに働く水平方向の力は無視できるものとする．

(2) 図２に示すように，この剛体のモータに，それぞれ質量 m のプロペラを取り付ける．プロペラの重心 G_L，G_R は，ともに，モータの回転軸から距離 r だけ偏心している．なお，時刻 $t = 0$ において，重心 G_L，G_R は，水平線から，θ_L，θ_R ($-\pi < \theta_L \leq \pi$, $-\pi < \theta_R \leq \pi$)の角度にあるとする．両方のプロペラが，互いに逆方向に，一定の角速度 ω で回転しているとき，以下の問いに答えよ．

  (a) ２つのプロペラの回転により，剛体に加わる水平方向，鉛直方向の力，およびトルクを求めよ．ただし，θ は常に十分小さいと見なせる．

  (b) 剛体に水平方向の力およびトルクが働かないようにするには，どのような条件を満たせばよいか，問い(2)-(a)の結果にもとづき説明せよ．

(3) 問い(2)-(b)の条件を満たすとき，２つのプロペラの回転により剛体の鉛直方向に働く加振力を $F(t) = F_0\cos(\omega t + \phi)$ とする($-\pi < \phi \leq \pi$)．今，図３に示すように，剛体の重心 G に，ばね定数 k_D のばねで，質量 M_D の重りを鉛直下向きに接続する．静止状態を基準として，重りの鉛直下向き変位を u_D とするとき，以下の問いに答えよ．

  (a) 剛体および重りそれぞれについて，運動方程式を導け．

  (b) 剛体の振動を防ぐために，k_D および M_D に求められる必要条件を，数式を用いて示せ．

(4) この２自由度ばね質量系の２つの固有角振動数と，問い(3)-(b)の条件を満た

すときのωとの大小関係について，数式を用いて論じよ．

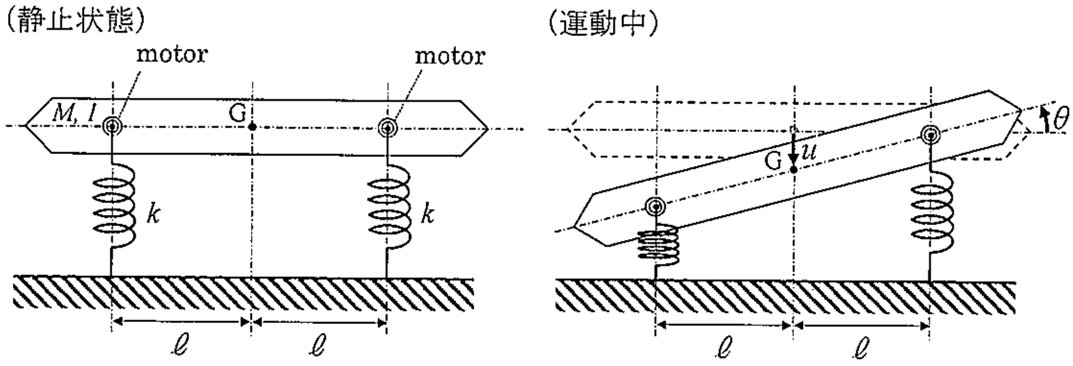

図１

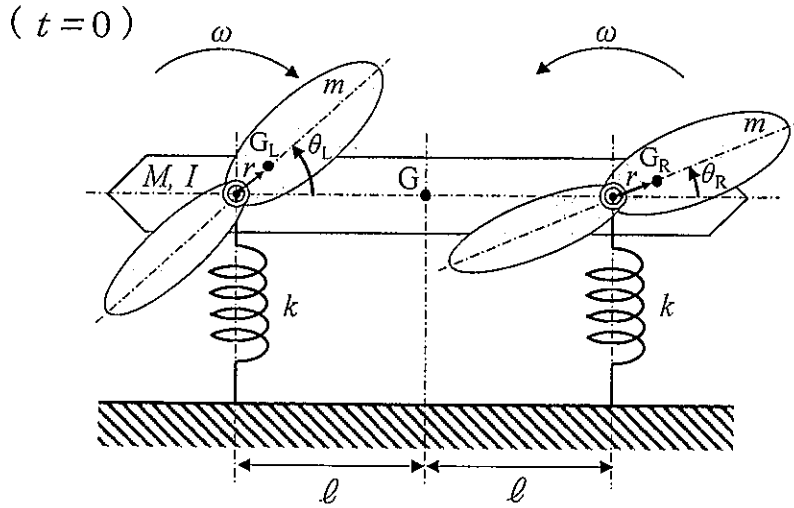

図２

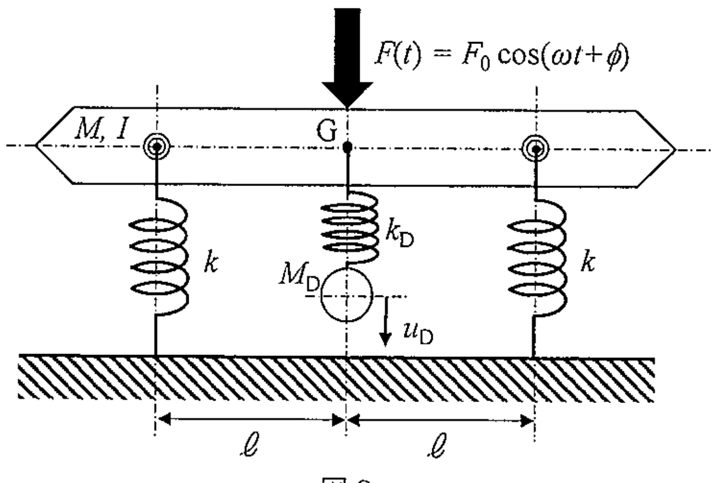

図３

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 1

The following relation holds between the impulse response of an FIR filter, $h[n]$, and its transfer function, $H(z)$:

$$H(z) = \mathrm{ZT}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n},$$

where ZT{·} represents the z transform. Answer the following questions.

(1) Let the two impulse responses of FIR filters be denoted by $h_1[n]$ and $h_2[n]$. Prove that

$$H_1(z) H_2(z) = \mathrm{ZT}\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m] h_2[n-m] \right\} \qquad (1)$$

holds.

(2) In the case of $H_1(z)H_2(z) = 1 - z^{-3}$ in Eq. (1), find a pair of examples of $h_1[n]$ and $h_2[n]$. However, filters that give a constant factor are excluded.

(3) Consider the FIR filters that are represented as transfer functions:

$$H_3(z) = \frac{1}{2}\left(1 - z^{-8}\right),$$

$$H_4(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{8} z^{-n}.$$

(a) Illustrate the poles and zeros for each of $H_3(z)$ and $H_4(z)$. Clearly indicate the positions of the poles and zeros and their orders (if multiple case) as shown in Fig. 1.

(b) According to the pole and zero plots in Question (3)-(a), draw the outlines of the amplitude responses of $H_3(z)$ and $H_4(z)$. Here, the frequency response is determined as

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=\exp(j\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \exp(-j\omega n),$$

and the amplitude response is determined as $|H(\omega)|$, $(0 \le \omega \le \pi)$. In drawing, as shown in Fig. 2, clearly indicate the horizontal values giving the minima of the amplitude responses but it is not necessary to indicate the vertical values giving the maxima.

(c) Describe an application example of FIR filter $H_3(z)$.

(4) Draw the outline of the amplitude response of the FIR filter whose impulse response is given as

$$h_5[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-4)\right)}{(n-4)\pi}, & 0 \le n < 8, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

There is no need to clarify the horizontal or vertical values of the maxima and minima of the amplitude response. And also discuss a problem which happens if FIR filter $H_4(z)$ is used for the situation under which FIR filter $h_5[n]$ should be applied.

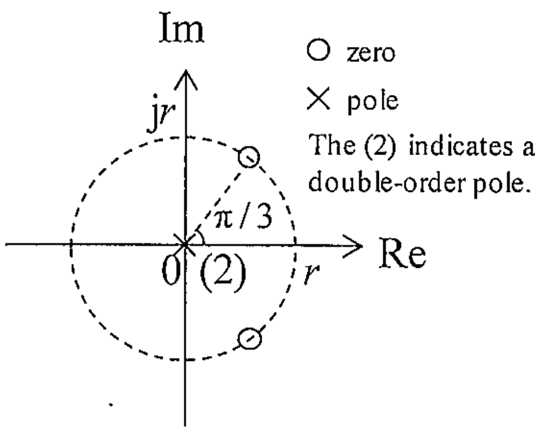

Fig. 1

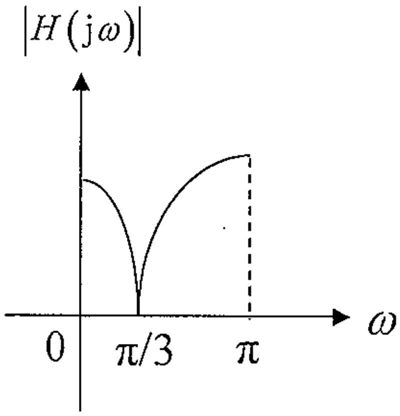

Fig. 2

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 2

Answer the following questions about electric circuits using operational amplifiers. Assume that all the operational amplifiers have ideal characteristics.

(1) Figure 1 shows a first-order low-pass filter based on the non-inverting amplifier circuit consisting of resistances R, R_1, capacitance C, and variable resistance R_2. Derive the transfer function $G_1(s)$ that illustrates the characteristics of this circuit. Next, obtain R_2 that sets the DC gain to 2, and obtain time constant T, and cutoff angular frequency ω_0 of this filter.

(2) Answer output voltage $v_0(t)$ with the Laplace transform when AC voltage $v_i(t) = E\sin(\omega t)$ is applied to a first-order low-pass filter from $t = 0$. Assume that the transfer function of this filter is $G(s) = \frac{1}{1+sT}$, and the frequency response is $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$. Next, obtain the signal amplification intensities and phase shifts under the conditions of $\omega T \ll 1$, $\omega T = 1$, and $\omega T \gg 1$, and describe how this filter works as a low-pass filter.

(3) Figure 2 shows a second-order low-pass filter based on the non-inverting amplifier circuit consisting of resistances R, R_3, capacitance C, and variable resistance R_4. Derive the transfer function $G_2(s)$ that illustrates the characteristics of this circuit. Next, obtain stable DC gain A if the amplitude characteristics of this second-order low-pass filter fulfills the Butterworth characteristics of $\frac{A}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^{2n}}}$ where ω_0 is the cutoff angular frequency, and n is the order of this filter.

(4) A third-order Butterworth low-pass filter can form in combination with the first-order low-pass filter in Fig. 1 and the second-order low-pass filter in Fig. 2. Derive the transfer function of this third-order Butterworth low-pass filter and draw all the stable poles on the complex plane. Next, obtain relationship between R and C, R_1 and R_2, and R_3 and R_4, if the cutoff frequency is set to 10 kHz and the DC gain is 10.

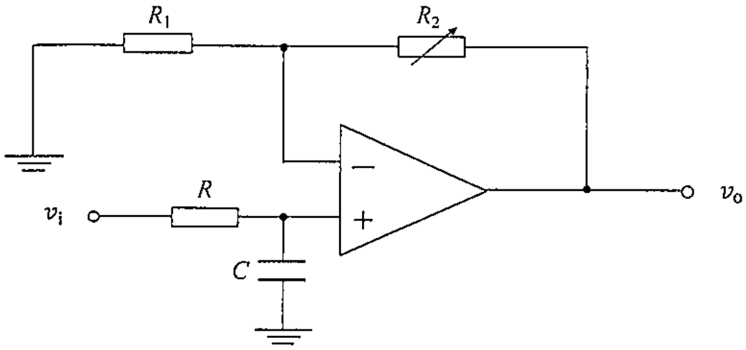

Fig. 1

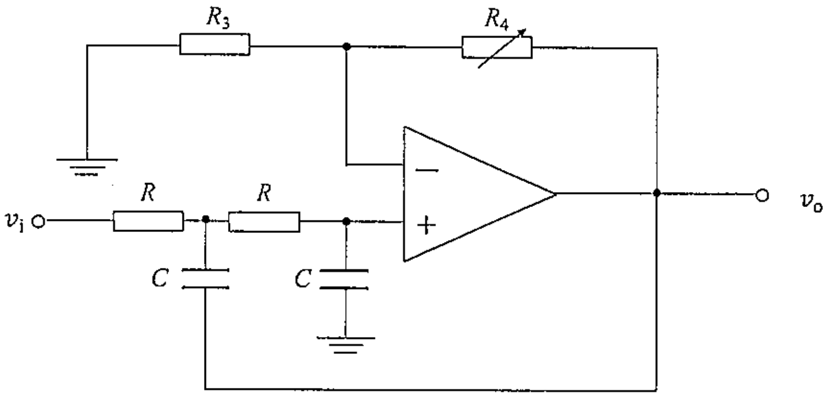

Fig. 2

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 3

Let us consider a controlled system shown in Fig. 1, where plant $P(s)$ is one of the following

$$P_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad P_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

and controller $C(s)$ is given by $C(s) = \frac{K}{s}$ (K is a constant gain). Answer the following questions.

(1) In the cases that $P(s) = P_1(s)$ and $P(s) = P_2(s)$, show the conditions on K such that the closed loop systems are stable.

(2) In the cases that $P(s) = P_1(s)$ and $P(s) = P_2(s)$, K is supposed to satisfy the conditions derived in Question (1). When the reference signal $r(t)$ is a unit step from time $t = 0$, show the steady-state errors of $e(t) = r(t) - y(t)$ in both cases. Also show the outlines of the step responses $y(t)$ in the interval $0 \leq t \ll 1$ and explain their reasons. Moreover, from their results, explain the difference of the properties of $P_1(s)$ and $P_2(s)$ as controlled plants.

Next, let us consider a controlled system shown in Fig. 2. Answer the following questions.

(3) Let us represent plant $P(s)$, controllers $C_1(s)$ and $C_2(s)$ as $P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$, $C_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ and $C_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$, respectively, where $N_\bullet(s)$ and $D_\bullet(s)$ represent the numerator polynomial and the denominator polynomial of a transfer function, respectively, and each pair of them is coprime. Show the transfer function $G_{fy}(s)$ from signal $f(t)$ to $y(t)$ by using $N_\bullet(s)$ and $D_\bullet(s)$. Also explain that it is always possible to make $N_1(s)$ and $D_2(s)$ to be Hurwitz polynomials for the stabilizing controllers $C_1(s)$ and $C_2(s)$ of the closed loop system.

(4) Assume that the closed loop system is stable, and $N_1(s)$ and $D_2(s)$ are Hurwitz polynomials. Also assume controller $C_3(s)$ is given by $C_3(s) = \frac{H(s)}{G_{fy}(s)}$, where $C_3(s)$ and $H(s)$ are stable, and the steady-state error of $e(t) = r(t) - y(t)$ for a unit step signal $r(t)$ is 0. Explain the class of possible $H(s)$ to be designed. Also explain the details on the superior points and the inferior points of the controlled system in Fig. 2 against that in Fig. 1 based on the above results.

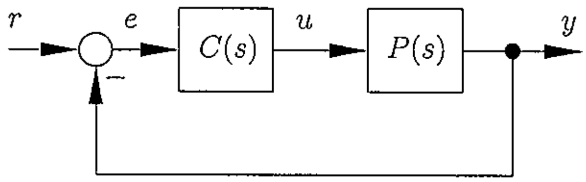

Fig. 1

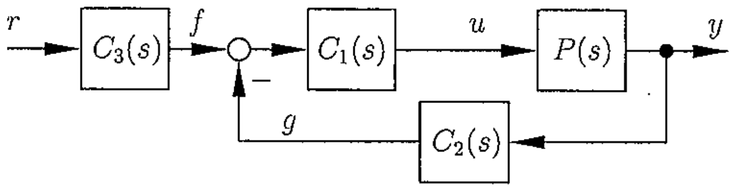

Fig. 2

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 4

Answer the following questions on inter-process communication.

(1) As a procedure to enter a critical region for mutual exclusion, we wrote a program that performs the following operations 1 to 2. Assume that the variable *lock* is stored in shared memory and initialized to zero in advance.

1. Read the value of *lock* from the memory, and go to 2.
2. If the value of *lock* is zero, the program writes one to *lock* and enters the critical region. If the value of *lock* is one, then go to 1.

Explain an example in which two processes executing this program in parallel enter the critical region simultaneously.

(2) Assume that the CPU has the following Test and Set Lock (TSL) instruction.

Usage: TSL *reg*, *lock*

Behavior: read the value of the memory word addressed by *lock* into the register *reg* and then write a non-zero value to the memory word. These read and write operations are executed atomically (without being interrupted).

By using this instruction, write a procedure enter_region() to enter a critical region and a procedure leave_region() to leave the critical region in an assembly language. In addition, explain the reason why they work correctly. You may define and use other necessary instructions appropriately.

(3) Write two procedures down() and up() to implement semaphore, an abstract data type to manage the number of remaining shared resources, in a pseudocode by using the above enter_region() and leave_region() procedures, and explain their behaviors. Here, down() subtracts one from the semaphore and up() adds one to the semaphore. You may use the procedure sleep() that writes zero to *lock* and puts the process to the waiting queue, and the procedure wakeup() that wakes up a process in the waiting queue.

(4) Write two procedures reader() and writer() to read and write data in shared memory using the above-mentioned semaphore in a pseudocode, and explain their behaviors. Here, when no process is writing the data, multiple processes can read the data simultaneously, and when one process is writing the data, no other process can read or write the data. You may use the read_data() and write_data() procedures for actual data read and write operations.

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 5

Consider the vibration of a rigid body with two built-in motors having the mass, M, and the moment of inertia, I, about the center of gravity, G, as shown in Fig. 1. The rigid body is suspended by two springs having the same length and the same spring constant, k, on each motor axis placed at the same distance, ℓ, from G. Let u be the vertically downward displacement of G from the equilibrium state, and θ be the rotational angle of the rigid body from the horizontal line. Assume that all objects move in the two-dimensional plane of the figures. Assume that friction, air resistance, and the gravity can be ignored for simplicity. Answer the following questions.

(1) Describe the equation of motion of the rigid body about the vertical and rotational directions, respectively. Assume that θ is small enough, and the horizontal force acting on the springs can be ignored.

(2) Suppose that a propeller having the mass, m, is attached on each motor, as shown in Fig. 2. The center of gravity of each propeller, G_L and G_R, is deviated from each motor axis at the distance, r. At time $t = 0$, let θ_L and θ_R be the initial rotational angles of G_L and G_R from the horizontal line, respectively ($-\pi < \theta_L \leq \pi$, $-\pi < \theta_R \leq \pi$). The propellers are rotating at the same angular velocity, ω, but in opposite directions. Answer the following questions.

(a) Describe the vertical force, the horizontal force and the torque about G applied on the rigid body by the rotation of the two propellers. Assume that the rotational angle θ is small enough at any moment.

(b) Based on the results of Question (2)-(a), describe the conditions to eliminate the horizontal force and the torque about G applied on the rigid body.

(3) Under the conditions explained in Question (2)-(b), let $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$, ($-\pi < \phi \leq \pi$) be the vertical excitation force applied on the rigid body by the rotation of the two propellers. As shown in Fig. 3, suppose that the weight having the mass, M_D, is attached to G by the spring having the spring constant, k_D. Let u_D be the vertically downward displacement of the weight from the equilibrium state. Answer the following questions.

(a) Describe the equations of motion of the rigid body and the weight, respectively.

(b) Show the necessary condition of k_D and M_D to eliminate the vibration of the rigid body by equation.

(4) Discuss the relation among the magnitude of two natural angular frequencies of this 2-degrees-of-freedom spring-mass system, and the magnitude of ω satisfying the conditions explained in Question (3)-(b) by using equations.

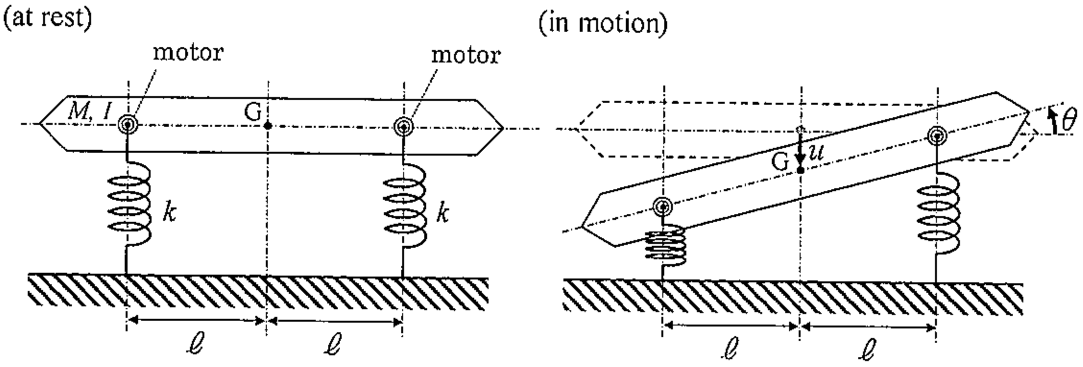

Fig. 1

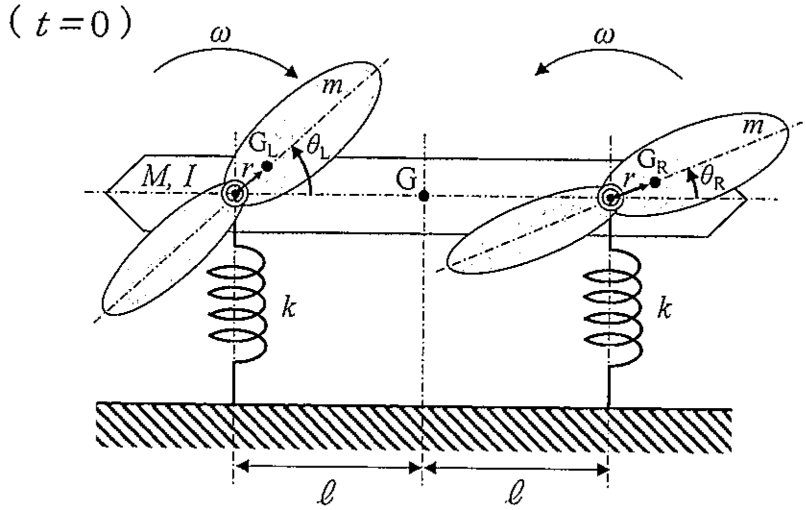

Fig. 2

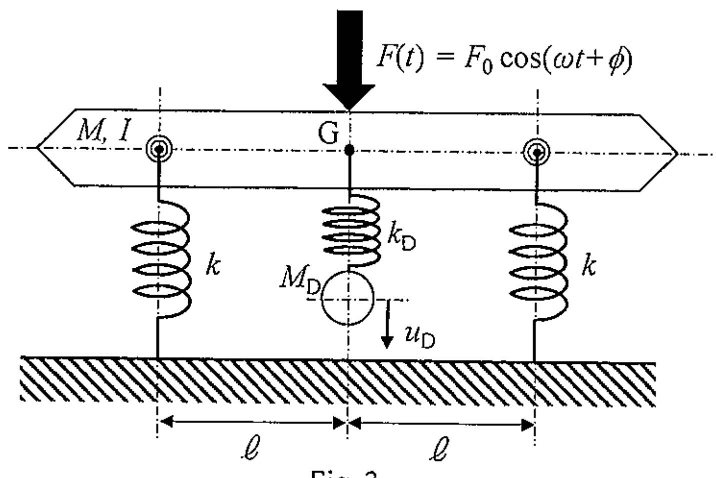

Fig. 3

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)