平成 17 年 8 月 30 日
9:30－11:30

平成１７年度
大学院工学研究科　電気・通信工学専攻
電子工学専攻

大学院情報科学研究科
情報・生命系群(物理・情報系)

大学院入学試験問題用紙

専門科目

注意：　７設問中，２問題を選んで，
答案用紙に解答せよ.

(Choose 2 problems out of the following 7 problems and solve them.)

２００５年８月実施

問題１　電気工学

（１頁目／２頁中）

Fig. 1(a) および Fig. 1(b) のような制御系がある．ここで，$K > 0$，$L > 0$，$T > 0$ である．Fig. 1(b) の系の構成要素 $\frac{1-sT}{1+sT}$ は，Fig. 1(a) の系のむだ時間要素 e^{-Ls} を近似したものである．次の問に答えよ．

(1) e^{-Ls} および $\frac{1-sT}{1+sT}$ のステップ応答を求め，それぞれを図示せよ．必要なら，単位ステップ関数を $u(t)$ と表記せよ．

(2) Fig. 1(a) の系が $\omega = 1$ [rad/s] において安定限界になるようなゲイン要素 K とむだ時間 L [s] を，それぞれ K_1 と L_1 で表す．K_1 と L_1 を求めよ．

(3) Fig. 1(a) の系において，L を問 (2) で求めた L_1 に等しくしたまま（すなわち，$L = L_1$ とおく），系を安定化させるために K を問 (2) で求めた K_1 より小さくし，$K = \frac{2}{3}$ とおく．このとき，ゲイン交差角周波数（開ループ系のゲイン特性が 0 dB となる角周波数）ω_c [rad/s] および位相余裕 PM [rad] を求めよ．

(4) Fig. 1(b) の系が安定限界になるような K と ω を，それぞれ K_2 と ω_2 で表す．K_2 および ω_2 を T で表せ．必要があれば，安定限界における Fig. 1(b) の系の閉ループ極が，負の実数 1 個と虚軸上の共役複素数 2 個の計 3 個から成るという事実を利用せよ．

(5) 問 (4) で求めた安定限界にある Fig. 1(b) の系において $\omega_2 = 1$ [rad/s] とする．T [s] と K_2 を求めよ．

Consider control systems shown in Fig. 1(a) and Fig. 1(b), where $K > 0$, $L > 0$, and $T > 0$. The component $\frac{1-sT}{1+sT}$ of the system in Fig. 1(b) is to approximate the dead time element e^{-Ls} of the system in Fig. 1(a). Answer the following questions.

(1) Find the step responses of e^{-Ls} and $\frac{1-sT}{1+sT}$, and illustrate the responses. If necessary, let $u(t)$ denote the unit step function.

(2) Let K_1 and L_1 respectively denote the gain element K and the dead time L [s] such that the system in Fig. 1(a) is at the stability limit for $\omega = 1$ [rad/s]. Find K_1 and L_1.

(3) In the system in Fig. 1(a), keep L equal to L_1 obtained in Question (2), i.e., let $L = L_1$, and reduce K from K_1 obtained in Question (2) to $K = \frac{2}{3}$ to stabilize the system. Find its gain crossover frequency ω_c [rad/s], i.e., the angular frequency at which the open-loop gain becomes 0 dB, and find its phase margin PM [rad].

２００５年８月実施

問題１　電気工学

（２頁目／２頁中）

(4) Let K_2 and ω_2 respectively denote K and ω such that the system in Fig. 1(b) is at the stability limit. Show K_2 and ω_2 in terms of T. If necessary, use the fact that the closed-loop poles of the system in Fig. 1(b) being at the stability limit consist of total three poles: a negative real number and a complex conjugate pair on the imaginary axis.

(5) Let $\omega_2 = 1$ [rad/s] for the system in Fig. 1(b) being at the stability limit which was obtained in Question (4). Find T [s] and K_2.

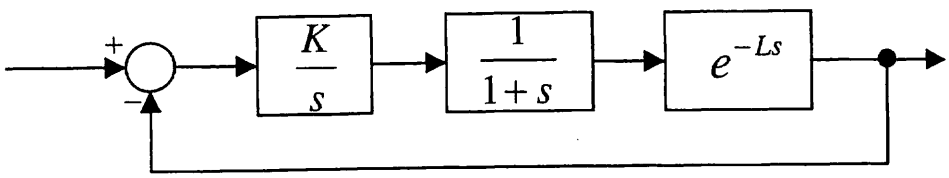

Fig. 1(a)

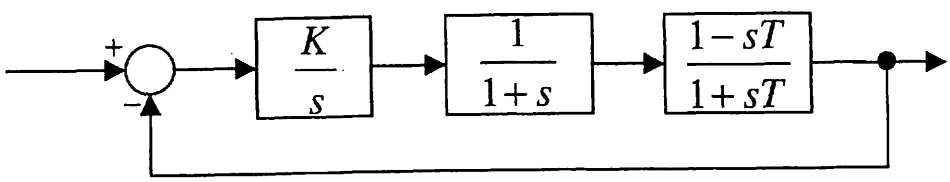

Fig. 1(b)

２００５年８月実施
問題２　通信工学
（１頁目／２頁中）

最低周波数 f_L，最高周波数 f_H を持つ信号 $s(t)$ に対する伝送系を考える．次の問に答えよ．ただし $S(f)$ を $s(t)$ のフーリエ変換 $\Im[s(t)]$ とし，また $0 < f_L < f_H << f_c$ （f_c は搬送波周波数）とする．

(1) Fig. 2 に示すように，信号 $s(t)$ を両側波帯搬送波抑圧（DSB-SC）変調を用いて伝送するとき，DSB-SC 信号の振幅スペクトル $|S_{DSB}(f)|$ の概略を図示し，$|S_{DSB}(f)|$ と $|S(f)|$ の関係を示せ．次に，変調方式を単側波帯搬送波抑圧（SSB-SC）変調に変更するには，Fig.2 の変調器をどのように変更すべきか，ブロック図を示せ．

(2) K 個の信号 $s_1(t), s_2(t),..., s_K(t)$ を，それぞれ SSB-SC 変調し，周波数分割多重（FDM）を行って伝送する．この FDM 伝送系に必要な周波数帯域幅の下限を示せ．ただし，各信号 $s_k(t)$ $(k=1, 2,..., K)$ は最低周波数 f_L と最高周波数 f_H を持つとする．

(3) 信号 $s(t)$ のためのディジタル伝送系を考える．信号 $s(t)$ が次の周期インパルス列 $\delta_T(t)$ を用いて標本化されるとする．

$$s_T(t) = s(t)\delta_T(t), \quad \delta_T(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

ただし $s_T(t)$ は標本化された信号であり，$s_T(t)$ のフーリエ変換を $S_T(f)$ とする．スペクトル $S_T(f)$ と $S(f)$ との関係を示せ．また，この関係を用いて，標本化された信号 $s_T(t)$ から元の信号 $s(t)$ を復元するために必要な標本周期 T の条件を導け．必要なら次の関係式を用いよ．

$$\Im(\delta_T(t)) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

(4) 問(3)で得られたそれぞれの標本値 $s_T(nT)$ （n: 整数）を，量子化及び符号化によって８ビットの符号に変換し，バイナリ系列 $\{a_m\}$ （a_m=1 or 0, m: 整数）を得る．このバイナリ系列 $\{a_m\}$ を搬送波周波数 f_c の振幅シフトキーイング（ASK）によって伝送する．次式に示す単位パルス関数 $u_W(t)$ を用いて，この ASK 変調信号を数式で表せ．

$$u_W(t) \equiv \begin{cases} 1 & |t| < W/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad 0 < W \le T/8$$

Consider a transmission system for a signal $s(t)$ having a lowest frequency f_L and a highest frequency f_H. Answer the following questions. Note that $S(f)$ represents the Fourier transform of the signal $s(t)$, $\Im[s(t)]$, and that $0 < f_L < f_H << f_c$ (f_c denotes carrier frequency).

(1) Suppose that the signal $s(t)$ is transmitted using double-sideband suppressed-carrier (DSB-SC) modulation, as shown in Fig. 2. Sketch the outline of the amplitude spectrum $|S_{DSB}(f)|$ of the transmitted DSB-SC signal, illustrating the relationship between $|S_{DSB}(f)|$ and $|S(f)|$. How should

the modulator shown in Fig. 2 be modified in order to change the modulation scheme to single-sideband suppressed-carrier (SSB-SC) modulation? Draw a block diagram.

(2) Consider that K signals, $s_1(t)$, $s_2(t)$,..., $s_K(t)$, are modulated with SSB-SC modulators and transmitted using frequency division multiplexing (FDM). Find the minimum bandwidth necessary to the FDM system. Note that each signal $s_k(t)$ (k=1, 2,..., K) has a lowest frequency f_L and a highest frequency f_H.

(3) Suppose the signal $s(t)$ is transmitted using a digital transmission system. The signal $s(t)$ is sampled by the following periodic impulse train $\delta_T(t)$.

$$s_T(t) = s(t)\delta_T(t), \quad \delta_T(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Note that $s_T(t)$ represents the sampled signal and that the Fourier transform of $s_T(t)$ is represented by $S_T(f)$. Derive the relationship between the spectra $S_T(f)$ and $S(f)$. Using this relationship, derive the condition on the sample period T to recover the original signal $s(t)$ from the sampled signal $s_T(t)$. If necessary, use the following relationship.

$$\Im(\delta_T(t)) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

(4) Suppose that each sampled value $s_T(nT)$ (n: integer), obtained in question (3), is quantized and encoded into an 8-bit binary code to obtain a binary sequence $\{a_m\}$ (a_m=1 or 0, m: integer). Consider that the binary sequence $\{a_m\}$ is transmitted using amplitude shift keying (ASK) modulation with a carrier frequency f_c. Find the expression for the ASK signal using the following unit pulse function $u_W(t)$.

$$u_W(t) \equiv \begin{cases} 1 & |t| < W/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad 0 < W \le T/8$$

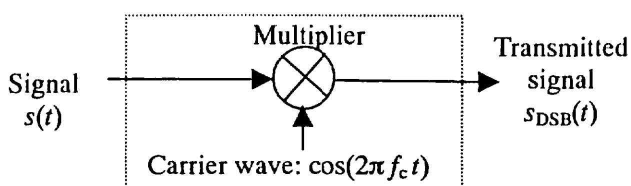

Fig. 2

2005 年 8 月実施
問題 3　電子工学
(1 頁目／3 頁中)

(1) Fig. 3(a)に示すダーリントン回路について以下の問に答えよ．ただし，各トランジスタの微小信号モデルとして Fig. 3(b)の簡略化 h パラメータモデルを用い，Tr_1 および Tr_2 に対応して添え字 1 および 2 を用いること．各トランジスタのベースおよびコレクタ電流の微小信号成分はそれぞれ i_{B1}，i_{C1}，i_{B2}，i_{C2} と表される．

(a) 電流 i_{C1}, i_{B2}, i_{C2} を，入力電流 i_{B1} と h パラメータ(h_{ie1}, h_{fe1}, h_{ie2}, h_{fe2})で表す式を示せ．

(b) 入力および出力電圧の微小信号成分 v_i および v_o を，入力電流 i_{B1} と h パラメータおよび R_L で表す式を示せ．

(c) ダーリントン回路の入力抵抗 R_{in}, 出力抵抗 R_{out}, 電圧利得 K_v, 電流利得 K_i を求めよ．

(2) Fig. 3(c)に示すエミッタ接地増幅回路について以下の問に答えよ．入力の微小信号成分に対して C_C のインピーダンスは無視できるほど小さいものとする．

(a) 直流バイアス電流 I_C を求めよ．ただし，エミッタ接地電流利得をβとする．

(b) 微小信号等価回路を示せ．ただし，トランジスタの微小信号モデルとして Fig. 3(b)の簡略化 h パラメータモデルを用いること．

(c) 入力および出力電圧の微小信号成分 v_i および v_o を，ベース電流 i_B と h パラメータ(h_{ie}, h_{fe})および R_E，$j\omega C_E$，R_L で表す式を示せ．

(1) Answer the following questions on the Darlington circuit shown in Fig. 3(a). Use the simplified h-parameter model shown in Fig. 3(b) as a small-signal model for each transistor and use subscripts 1 and 2 corresponding to Tr_1 and Tr_2, respectively. The small-signal components of the base and collector currents of the two transistors are denoted by i_{B1}, i_{C1}, i_{B2} and i_{C2}, respectively.

(a) Derive expressions for the currents i_{C1}, i_{B2} and i_{C2} in terms of the input current i_{B1} and h-parameters (h_{ie1}, h_{fe1}, h_{ie2}, h_{fe2}).

(b) Derive expressions for the small-signal components of the input and output voltages v_i and v_o in terms of the input current i_{B1}, h-parameters and R_L.

(c) Derive the input resistance R_{in}, the output resistance R_{out}, the voltage gain K_v and the current gain K_i of the Darlington circuit.

(2) Answer the following questions on the common-emitter circuit shown in Fig. 3(c). The impedance of C_C is negligibly small for the small-signal component of the input.

(a) Derive the DC bias current I_C. Here, the common-emitter current gain of the bipolar transistor is denoted by β.

(b) Show the small-signal equivalent circuit. Use the simplified h-parameter model shown in Fig. 3(b) as a small-signal model for the bipolar transistor.

(c) Derive expressions for the small-signal components of the input and output voltages v_i and v_o in terms of the base current i_B, h-parameters (h_{ie}, h_{fe}), R_E, $j\omega C_E$ and R_L.

2005 年 8 月実施
問題 3　電子工学
(3 頁目／3 頁中)

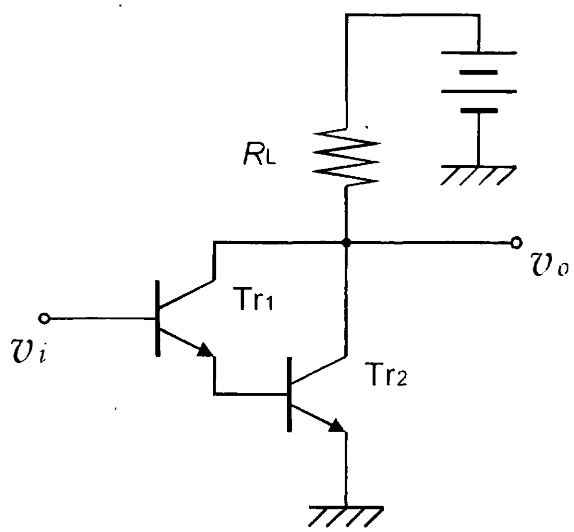

Fig. 3(a) Darlington circuit.

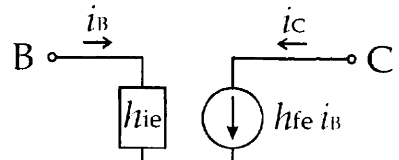

Fig. 3(b) Simplified small-signal model of a bipolar transistor.

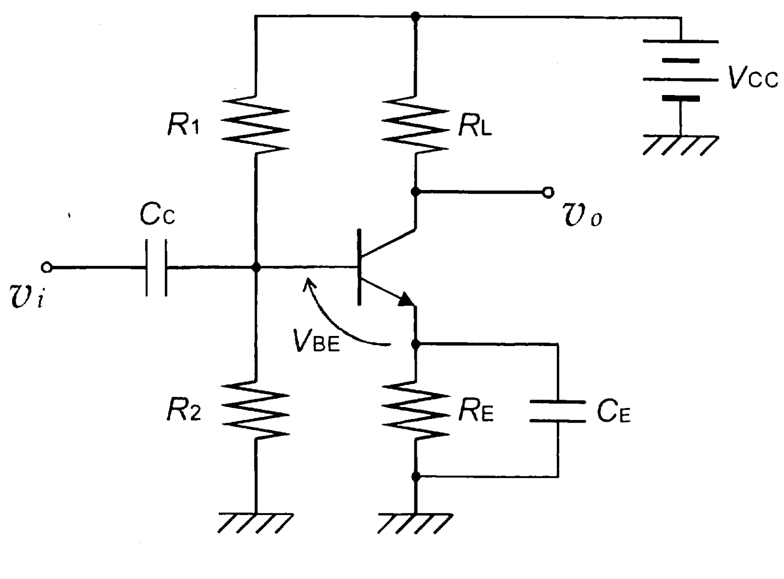

Fig. 3(c) Common-emitter circuit.

２００５年８月実施
問題４　計算機１
（１頁目／１頁中）

クロックに同期して，入力が直列に１ビットずつ到来する１入力１出力の順序回路を考える．１ビット入力の値が **1** から **0** に変化するとき，１ビット出力は直前の出力値を反転する．それ以外では直前の出力と同じ値を出力する．ただし，１ビット出力の初期値は **0** とする．この順序回路に関する以下の問に答えよ．

(1)入力系列 **01001010** に対する出力系列を示せ．

(2)この順序回路の状態遷移図を描け．ただし，１クロック前の入力と出力を $\mathbf{x}$ および $\mathbf{z}$ としたとき，現在の状態を $\mathbf{S_{xz}}$ と表せ．

(3)状態 $\mathbf{S_{xz}}$ を２ビットで表し，この順序回路の状態遷移を与える，できるだけ簡単な論理式を求めよ．論理式は，AND，OR，NOT を用いた積和形式で表せ．

(4)適当な記憶要素（例えばＤフリップフロップ）を用いてこの順序回路を設計し，その論理回路図を描け．

Consider a one-input one-output sequential circuit, where a one-bit input arrives serially in synchronization with a clock. If the one-bit input changes from **1** to **0**, then the one-bit output takes the opposite value of the latest output. Otherwise, the one-bit output is the same as the latest one. The initial value of the one-bit output is **0**. Answer the following questions on the sequential circuit.

(1) Show the output sequence corresponding to the input sequence **01001010**.

(2) Draw a state-transition diagram of the sequential circuit. Suppose that the present state is represented by $\mathbf{S_{xz}}$ if the input and the output at the previous clock cycle are $\mathbf{x}$ and $\mathbf{z}$, respectively.

(3) Using two bits for the state $\mathbf{S_{xz}}$, write the simplest logical expression which gives state transitions of the sequential circuit. The logical expression must be represented in the sum-of-products form composed of AND, OR and NOT.

(4) Design the sequential circuit with appropriate storage elements (for example, D flip-flops) and draw its logic-circuit diagram.

2005 年 8 月実施
問題 5　計算機 2
(1 頁目／2 頁中)

Fig. 5(a)に示すプログラムについて以下の問に答えよ．ただし各文や整数上の演算子 mod, div の意味は Fig. 5(b)のとおりとする．

(1) 初期状態 M=2, N=5 の下で実行したとき，while 文の条件部 N>0 は何回評価されるかを答えよ．さらに，N>0 の各評価時における変数 M, N, R の値を答えよ．

(2) M, N の初期値を正の整数 m, n とする．プログラム終了時の R の値を m と n で表せ．

(3) 以下は問(2)の解答の説明である．空欄(i), (ii), (iii)のそれぞれに埋めるべき数式を答えよ．

「M, N の初期値を正の整数 m, n とする．while 文の条件部 N>0 を評価する際には常に等式 $M^N \times$ [(i)] = [(ii)]が成り立つ．一方，プログラム終了時には N= [(iii)]が成り立つ．したがって，最初の等式の N に(iii)を代入して整理すると問(2)の解答が得られる．」

Answer the following questions about the program in Fig. 5(a). The meaning of the statements and the integer operators mod and div is summarized in Fig. 5(b).

(1) Let M=2 and N=5 be the inital state. How many times is the condition N>0 of the while statement evaluated? Give the values of M, N and R each time the condition N>0 is evaluated.

(2) Suppose that the initial values of M and N are positive integers m and n respectively. Express the final value of R in terms of m and n.

(3) The following paragraph explains how the answer of question (2) is obtained. What mathematical expressions should be inserted in (i), (ii), and (iii)?

"Let m and n be the initial values of M and N respectively. Whenever the condition N>0 of the while statement is evaluated, the equation $M^N \times$ [(i)] = [(ii)] holds. On the other hand, N= [(iii)] when the program terminates. So, we obtain the answer of question (2) by substituting (iii) for N in the first equation."

2005年8月実施
問題5　計算機2
(2頁目／2頁中)

```
R := 1;
while (N>0) do
  begin
    if  (N mod 2)=1 then R := R × M;
    M := M × M;
    N := N div 2
  end
```

Fig.5(a)

X := e	Assign the value of e to variable X. 変数Xに式eの値を代入する.
if b then c	Execute c if the value of b is true, and skip otherwise. ブール式bの値が真ならばcを実行、偽であれば何もしない.
while b do c	Skip if the value of b is false. If the value of b is true, then execute c and execute while b do c again. bの値が偽ならば何もしない．真ならばcを実行し，再び while 文を実行する.
begin c_1;...; c_n end	Execute c_1, ..., c_n in this order sequentially. c_1からc_nを順に実行する.
e_1 mod e_2	The remainder of the value of e_1 divided by the value of e_2. e_1の値をe_2の値で割った余り.
e_1 div e_2	The quotient of the value of e_1 divided by the value of e_2. e_1の値をe_2の値で割った商.

Fig.5(b)

2005年8月実施
問題6　物理専門1
(1頁目／2頁中)

二つの状態ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$ に対して，その内積を $\langle a|b\rangle$ で表す．このとき，$\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$ である．また，$|a\rangle$ に演算子 $\hat{A}$ を作用して作られる状態ベクトルを $\hat{A}|a\rangle$ とする．このとき，任意の状態ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$ に対して $\langle b|\hat{A}|a\rangle = \langle a|\hat{A}|b\rangle^*$ を満たすような演算子 $\hat{A}$ をエルミート演算子という．また，演算子 $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ を，演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の交換子という．二つのエルミート演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ が交換関係

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{G}$$

をもつとき，$\hat{A}$ の測定値の不確定さ ΔA と $\hat{B}$ の測定値の不確定さ ΔB の積は次の不等式を満足する（ハイゼンベルグの不確定性関係）．

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle G\rangle|$$

ただし，$\langle G\rangle$ は $\hat{G}$ の期待値である．以下の問に答えよ．

(1) 任意の状態ベクトルに対するエルミート演算子の期待値は実数になることを示せ．

(2) エルミート演算子の固有値は実数になることを示せ．

(3) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ を示せ．

(4) 3個の演算子 $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ があり，それらの間には

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = i\hat{A}_3, \quad [\hat{A}_2, \hat{A}_3] = i\hat{A}_1, \quad [\hat{A}_3, \hat{A}_1] = i\hat{A}_2.$$

の関係があるものとする．このとき，交換子 $[\hat{A}_1, \hat{A}^2]$ を求めよ．ここで，$\hat{A}^2 \equiv \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2$ である．

(5) スピン $\frac{1}{2}$ の粒子に関して，スピンの x, y, z 方向の成分の演算子を各々 $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$, $\hat{s}_z$ とする．$\hbar = 1$ となる単位系を用いると，これらはパウリ行列を用いて，以下のように書ける．

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(a) ハイゼンベルグの不確定性関係から，$\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ の不確定さの積 $\Delta s_x \Delta s_y$ が満たすべき不等式を求めよ．その結果から，Δs_x または Δs_y のいずれか一方が0であるとき，s_z の期待値が満たすべき条件を示せ．

(b) 問(5)(a)のような状態にある多数の粒子に対して，s_z に関する測定を個別に行った場合，個々の s_z の測定値とその分布はどうなると期待されるか？

2005年8月実施
問題6　物理専門1
(2頁目／2頁中)

The *inner product* of two state vectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$ is expressed as $\langle a|b\rangle$. Note that $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$. An operator $\hat{A}$ acting on a state vector $|a\rangle$ gives another state vector $\hat{A}|a\rangle$. An operator $\hat{A}$ is *Hermitian* if it satisfies the relation $\langle b|\hat{A}|a\rangle = \langle a|\hat{A}|b\rangle^*$. The *commutator* between operators $\hat{A}$ and $\hat{B}$ is defined by $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. When two Hermitian operators $\hat{A}$ and $\hat{B}$ have the commutation relation

$$[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{G},$$

the product of ΔA and ΔB satisfies the following inequality (*Heisenberg uncertainty relation*)

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle G\rangle|,$$

where ΔA and ΔB are the *uncertainties* of the measurement results of $\hat{A}$ and $\hat{B}$, respectively, and $\langle G\rangle$ is the expectation value of $\hat{G}$. Answer the following questions.

(1) Show that the expectation value of a Hermitian operator is a real number for any state vector.

(2) Show that any eigenvalue of a Hermitian operator is a real number.

(3) Show that $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$.

(4) Consider three operators $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ and $\hat{A}_3$ that have the following relations:

$$[\hat{A}_1,\hat{A}_2] = i\hat{A}_3, \quad [\hat{A}_2,\hat{A}_3] = i\hat{A}_1, \quad [\hat{A}_3,\hat{A}_1] = i\hat{A}_2.$$

Obtain the commutator $[\hat{A}_1,\hat{A}^2]$, where $\hat{A}^2 \equiv \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2$.

(5) For a particle of spin $\frac{1}{2}$, the operators $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ and $\hat{s}_z$, the x, y and z components of the spin angular momentum, are expressed by the Pauli matrices:

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

in the unit system where $\hbar = 1$.

(a) Calculate the inequality of the product $\Delta s_x \Delta s_y$ derived from the Heisenberg uncertainty relation, where Δs_x and Δs_y are the uncertainties of $\hat{s}_x$ and $\hat{s}_y$, respectively. Then, find the condition that the expectation value of s_z must satisfy when either Δs_x or Δs_y is 0.

(b) Suppose an ensemble of particles is in the condition in (5)(a), and consider the measurement of s_z for each particle. What are the expected measurement values of s_z and their distribution?

2005 年 8 月実施
問題 7　物理専門 2
(1 頁目/1 頁中)

負でない任意の整数である n に対して, 複素変数 z の関数 $f(z) = \dfrac{z^n}{z^2+6z+1}$ を考え, 次の問に答えよ. ただし, 虚数単位を i とする.

(1) 関数 $f(z)$ のすべての孤立特異点とその留数を求めよ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ. ここで, C は $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ により表される曲線上を正の向きにまわる積分路である.

(3) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta$ の値を求めよ.

(4) 実変数 x の関数 $\dfrac{1}{3+\cos x}$ のフーリエ級数を求めよ.

Consider the function $f(z) = \dfrac{z^n}{z^2+6z+1}$ of a complex variable z, where n is a non-negative integer. The imaginary unit is denoted by i. Answer the following questions.

(1) Find all isolated singular points and their corresponding residues of the function $f(z)$.

(2) Find the value of the contour integral $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$. Here C is the contour consisting of the positively oriented circle $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$.

(3) Find the value of the real definite integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta$.

(4) Find the Fourier series for the function $\dfrac{1}{3+\cos x}$ of a real variable x.