平成 20 年 8 月 25 日
9:30－11:30

大学院工学研究科　電気・通信工学専攻
電子工学専攻

大学院情報科学研究科
情報・生命系群(物理・情報系)

大学院医工学研究科
工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：　６設問中，２問題を選んで，
答案用紙に解答せよ．

(Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them.)

真空中を伝搬する平面電磁波の電界 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}\, E_0 \cos\left(k_y y + k_z z - \omega t\right) \qquad \text{(1a)}$$

で与えられるとする．ここで，E_0, k_y, k_z, ωを正の実数，x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ とする．Fig. 1 に示すように，電気抵抗 R の正方形コイル（一辺の長さが a）が $y = y_0$ の x-z 平面内にあり，z 軸正方向に一定速度 v で移動している．ただし，コイルの大きさは電磁波の波長に対して十分小さく，電界，磁界はコイル内で一様であると仮定する．

（１） 真空中のマクスウェルの方程式を微分形で記し，それを用いて式(1a)で与えられる平面電磁波の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．

（２） 磁界 $\boldsymbol{H}$ の方向と y 軸とのなす角度をθとするとき，θと k_y, k_z との関係を導け．

（３） 正方形コイルの中心が (x_0, y_0, z_0) で静止しているとき（$v = 0$），ファラデーの法則を用いてコイルに発生する誘導電流 I を求めよ．

（４） 移動している正方形コイルの中心が $t = 0$ で $(0, y_0, 0)$ を通過するとき，正方形コイルに発生する誘導電流 I を求めよ．また，その誘導電流の周波数が，静止した正方形コイルに発生する誘導電流の周波数の半分の値になるときの正方形コイルの移動速度 v を求めよ．

The electric field $\boldsymbol{E}$ of a plane electromagnetic wave propagating in vacuum is given by

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}}\, E_0 \cos\left(k_y y + k_z z - \omega t\right), \qquad \text{(1a)}$$

where E_0, k_y, k_z, and ω are positive real numbers, and $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$, and $\hat{\boldsymbol{z}}$ are unit vectors parallel to the x, y, and z axes, respectively. As shown in Fig.1, a square coil with resistance R , the side length of which is a, is located in the x-z plane at $y = y_0$ and is moving in the direction of the positive z-axis at a constant velocity v. The electric and magnetic fields inside the square coil are assumed to be uniform because the size of the coil is sufficiently small compared with the wavelength of the electromagnetic waves.

（１）Show the differential form of Maxwell's equations in vacuum and calculate the magnetic field $\boldsymbol{H}$ of the plane electromagnetic wave given by Eq. (1a) using Maxwell's equations.

（２）When the angle between the direction of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the y-axis is denoted by θ, express θ in terms of k_y and k_z.

2008 年８月実施
問題１　電磁気学
（２頁目／２頁中）

（３） When the center of the square coil remains stationary ($v = 0$) at (x_0, y_0, z_0), calculate the induced current I in the square coil using Faraday's law.

（４） When the center of the moving square coil passes through (0, y_0, 0) at $t = 0$, calculate the induced current I in the square coil. Then, calculate the velocity v of the square coil in the case that the frequency of the induced current becomes half that in the stationary square coil.

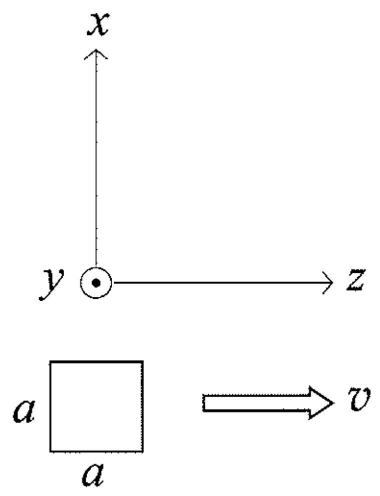

Fig. 1

２００８年８月実施
問題２　電気回路
（１頁目／１頁中）

コイルL，コンデンサC，および角周波数ωの電圧源Eからなる，Fig. 2 に示す並列回路について次の問に答えよ．なお，コイルにおける損失抵抗をrとする．

(1) 回路のアドミタンスを求めよ．
(2) 回路に共振が生じる条件を求め，その共振周波数を求めよ．
(3) 共振時の電流I_CおよびIを求め，これらの電流を用いて共振回路のQを求めよ．

Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2 that consists of a coil L, a capacitor C, and a voltage source E with an angular frequency ω. Here r denotes the loss resistance of the coil.

(1) Find the admittance of the circuit.
(2) Obtain a condition where resonance is possible in the circuit and find the resonant frequency.
(3) Find the currents I_C and I at the resonance. Determine Q of the resonant circuit using these currents.

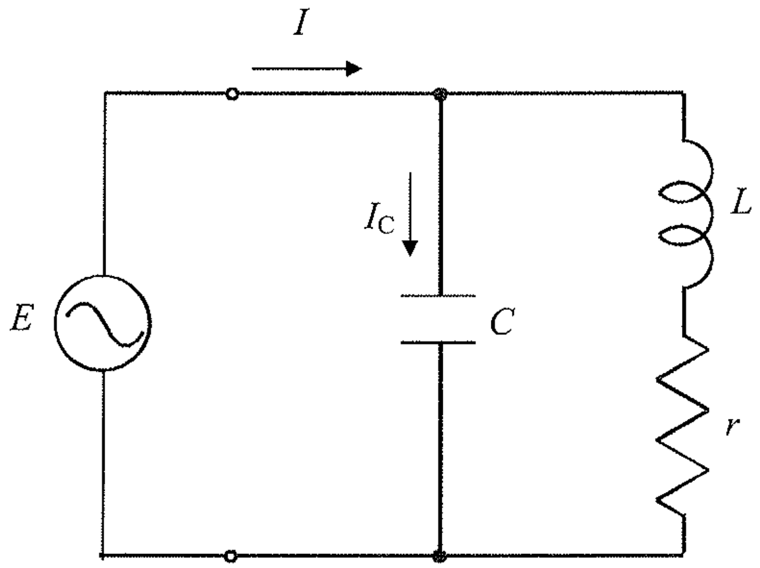

Fig. 2

2008年8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／2頁中)

n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，任意の $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ に対して

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

を満たすとき，x_i において正であると呼ばれる．ただし，不等号 $\leq$ は $0 \leq 0, 1 \leq 1, 0 \leq 1$ と定義する．とくに，すべての変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ において正である関数は単調関数と呼ばれる．

また，n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$$

を満たすとき，自己双対関数であると呼ばれ，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

を満たすとき，自己反双対関数であると呼ばれる．ここで，$\overline{}$ は否定演算子を表す．

(1) n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が単調関数であることと以下の条件は必要十分である．これを証明せよ．

> $a_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす任意の $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ および $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$ に対して，不等式 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が成り立つ．

(2) 単調かつ自己双対である3変数論理関数をすべて列挙せよ．また，理由を説明せよ．なお，問(1)に示す条件を使っても良い．

(3) 単調かつ自己反双対である n 変数論理関数をすべて列挙せよ．また，理由を説明せよ．なお，問(1)に示す条件を使っても良い．

2008年8月実施
問題3 情報基礎1
(2頁目／2頁中)

An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is said to be positive in x_i if it satisfies

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \leq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

for any $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$, where the inequality $\leq$ is defined as $0 \leq 0, 1 \leq 1, 0 \leq 1$. In particular, f is called a monotone function if it is positive in each variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is called a self-dual function if it satisfies

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)},$$

and called a self-anti-dual function if it satisfies

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Here, $\overline{}$ denotes the NOT operator.

(1) Prove that an n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a monotone function if and only if the following condition holds:

> The inequality $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ holds for any $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0, 1\}$ such that $a_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

(2) Write down all of the 3-variable Boolean functions that are monotone and self-dual, and justify your answer. Here, the condition shown in question (1) can be used.

(3) Write down all of the n-variable Boolean functions that are monotone and self-anti-dual, and justify your answer. Here, the condition shown in question (1) can be used.

２００８年８月実施
問題４　情報基礎２
（１頁目／１頁中）

ある教授は次のような“エレガント”なソーティングアルゴリズムを提案した．

Sort(A, i, j)
{ A は n 個の異なる数が格納されている配列とし，i, j は $1 \leq i, j \leq n$ なる整数とする．
Sort(A, i, j) は $A[i], A[i+1], \cdots, A[j]$ を昇順にソートする．}
begin
　if $A[i] > A[j]$ **then** 値の交換 $A[i] \leftrightarrow A[j]$;
　if $i + 1 \geq j$ **then return**;
　$k \leftarrow \lfloor (j - i + 1)/3 \rfloor$; 　{ 切り捨て }
　Sort$(A, i, j - k)$; 　{ 最初の 2/3 がソートされる }
　Sort$(A, i + k, j)$; 　{ 最後の 2/3 がソートされる }
　Sort$(A, i, j - k)$; 　{ 再び，最初の 2/3 をソートする }
end;

ここで，実数 x に対し，$\lfloor x \rfloor$ は $m \leq x$ を満たす最大の整数 m を表す．次の問に答えよ．

(1) Sort$(A, 1, n)$ は入力配列 A の n 個の要素を昇順に正しくソートすることを示せ．
(2) Sort の最悪実行時間に対するタイトな漸近的評価 (Θ 表記) を与えよ．なお，その漸近的評価のさい，切り捨てや切り上げを無視してよい．

A professor has proposed the following “elegant” sorting algorithm:

Sort(A, i, j)
{ Let A be an array containing n distinct numbers, and let i, j be integers such that $1 \leq i, j \leq n$. Sort(A, i, j) sorts $A[i], A[i+1], \cdots, A[j]$ in non-decreasing order. }
begin
　if $A[i] > A[j]$ **then** exchange $A[i] \leftrightarrow A[j]$;
　if $i + 1 \geq j$ **then return**;
　$k \leftarrow \lfloor (j - i + 1)/3 \rfloor$; 　{ Round down }
　Sort$(A, i, j - k)$; 　{ First two-thirds are sorted }
　Sort$(A, i + k, j)$; 　{ Last two-thirds are sorted }
　Sort$(A, i, j - k)$; 　{ First two-thirds are sorted again }
end;

For a real number x, $\lfloor x \rfloor$ denotes the maximum integer m satisfying $m \leq x$. Answer the following questions.

(1) Prove that Sort$(A, 1, n)$ correctly sorts the n elements of the input array A in non-decreasing order.
(2) Give a tight asymptotic (Θ-notation) bound on the worst-case running time of Sort. You may ignore round-up or round-down in the evaluation.

２００８年８月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／３頁中）

Fig. 5に示すように，滑らかな水平面上で点Oを中心とする半径r，角速度ωの円運動をしている質量mの質点Pを考える．PはバネBにつながれており，Bの他端はOに開けた大きさの無視できる穴に掛けられている．また，PにはひもSがつながれており，運動の間，Sは穴を通して真下に張力Tで引かれている．バネ定数をk，バネの自然長をℓとする．BとSの質量，及び穴，B，Sの間の摩擦は無視する．以下の問に答えよ．

(1) 最初，Pは半径$r=\ell$，角速度$\omega=\omega_0$の円運動をしていた．このときの張力$T=T_0$を求めよ．

(2) 徐々に張力Tをゆるめると，運動の回転半径rがℓからr_1 $(>\ell)$まで増大した．半径r_1における角速度ω_1を求めよ．

(3) 問(2)の場合において，Sの張力T_1をℓ，ω_0，m，k，r_1を使って表せ．

(4) 回転半径rをℓからr_1まで増大させる間にTのなした仕事Wを計算せよ．

(5) 半径rが$a\ell$ $(a>1)$になったとき，張力が0になった．aを使ってこのときの角速度を表せ．

(6) Sをわずかに引っ張って放したところ，Pが半径$a\ell$のまわりで半径方向に小振幅で単振動を始めた．振動の角周波数Ωを求め，B−P系の固有角周波数Ω_0と比較せよ．

２００８年８月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／３頁中）

Consider a particle P of mass m on a smooth horizontal plane, moving with an angular velocity ω in a circle of radius r about the center O, as shown in Fig. 5. P is attached to one end of a spring B, whose other end is hooked to a negligibly small hole opened at O. P is also attached to one end of a string S, which is pulled downward through the hole by a tension T during the motion. Let k denote the spring constant and ℓ the natural length of B. Neglect the masses of B and S, as well as the frictions between the hole wall, B and S. Answer the following questions.

(1) Initially, P was moving in a circle of radius $r = \ell$ with an angular velocity $\omega = \omega_0$. Find the tension $T = T_0$ for this case.

(2) The rotation radius r was then increased from ℓ to r_1 ($> \ell$) by gradually reducing the tension T. Obtain the angular velocity ω_1 for the radius r_1.

(3) Express the tension T_1 in terms of ℓ, ω_0, m, k and r_1 for the case of the question (2).

(4) Calculate the work W done by T during the increase in radius r from ℓ to r_1.

(5) When the radius r reached $a\ell$ ($a > 1$), the tension became zero. Express the angular velocity in terms of a for this case.

(6) S was then pulled back a little and released, which caused a small-amplitude single-harmonic oscillation of P in the radial direction around the radius $a\ell$. Obtain the angular frequency Ω of the oscillation and compare it with the natural angular frequency Ω_0 of the B−P system.

２００８年８月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

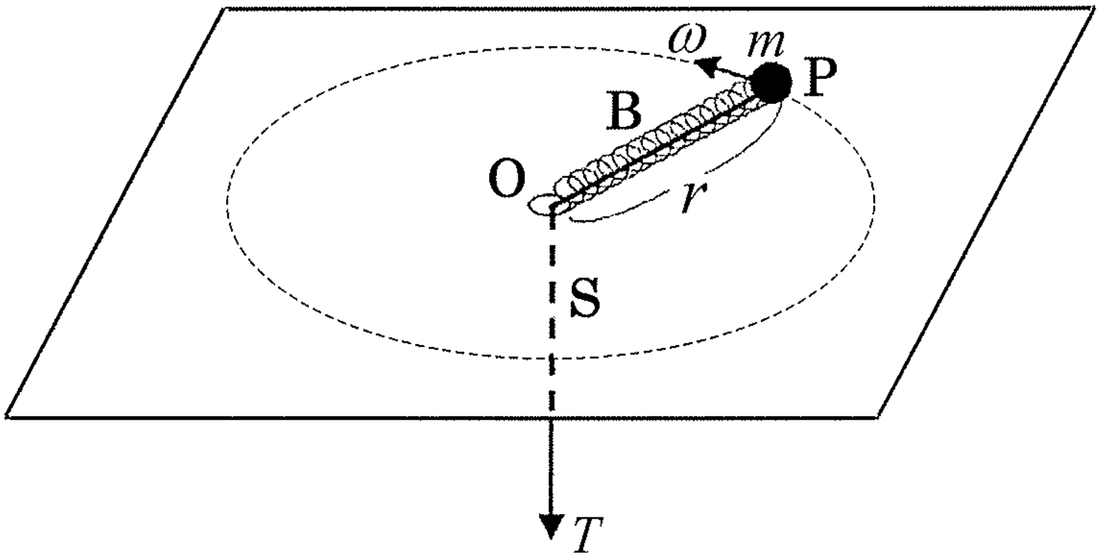

Fig. 5

２００８年８月実施
問題６　物理基礎２
（１頁目／２頁中）

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，p, q は正の実数である．

(a) 行列 A の行列式を $|A|$ で表す．q=1 のとき $|A|$ の最小値を求めよ．

(b) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) とこれらに対応する固有ベクトルを求め，

$$ {}^tUAU=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} $$

を満たす直交行列 U を求めよ．ただし，${}^tU$ は行列 U の転置行列を表す．

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -ir \\ 0 & 0 & 0 & ir & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -ir & 0 & 0 & 0 \\ ir & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位，r は実数である．

(a) 行列 B の行列式 $|B|$ を求めよ．

(b) B^2 を求めよ．

(c) $C=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} B^n$ が存在する r の範囲を求めよ．また，このときの C を具体的に求めよ．ただし，B^0 は単位行列とする．

２００８年８月実施
問題６　物理基礎２
（２頁目／２頁中）

(1) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$. Here p and q are positive real numbers. Answer the following questions.

(a) The determinant of the matrix A is denoted by $|A|$. Find the minimum value of $|A|$ for q=1.

(b) Find the eigenvalues λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) of A and their corresponding eigenvectors. Then obtain the orthogonal matrix U that satisfies the following equation:

$$ {}^tUAU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. $$

Here ${}^tU$ is the transpose matrix of U.

(2) Consider the matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -ir \\ 0 & 0 & 0 & ir & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -ir & 0 & 0 & 0 \\ ir & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Here i is the imaginary unit and r is a real number. Answer the following questions.

(a) Find the determinant $|B|$ of the matrix B.

(b) Calculate B^2.

(c) Find the range of r such that $C = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} B^n$ exists. Under this condition, obtain the explicit expression of C. Here B^0 is the unit (identity) matrix.