平成２４年度　名古屋大学大学院工学研究科 博士課程（前期課程）
電子情報システム専攻

入学試験問題

基　　　　礎

（平成２３年8月２３日（火）１３:３０～１６:３０）

注　　意

１．６問中３問を選んで答えよ。

２．解答は問題ごとに別の答案用紙に書き、それぞれ問題番号、受験番号を上端に記入せよ。氏名は記入してはならない。なお、草稿用紙が１枚ある。解答が用紙の裏面にまわる場合は、答案用紙下部にその旨明示すること。又、上部横線に相当する位置以下に書くこと。

３．問題用紙、答案用紙、草稿用紙はすべて持ち出してはならない。

４．計算機類は使用してはならない。

５．携帯電話は時計としても使用してはならない。電源を切ること。

$\boxed{1}$

非負整数 $n=0,1,2,\cdots$ に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 次の関係が成り立つことを示せ．

$$I_{n-2}>I_{n-1}>I_n \quad (n\geq 2) \qquad \cdots(\mathrm{i})$$

(2) 部分積分法を用いて，次式が成り立つことを示せ．また，I_6，I_7 の値を求めよ．

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n\geq 2) \qquad \cdots(\mathrm{ii})$$

(3) 式 (i)，(ii) の関係を用いて $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}$ を求めよ．

(4) 非負整数 $m=0,1,2,\cdots$ に対して，問 (2) の結果を用いて I_{2m} と I_{2m+1} をそれぞれ m の式で表し，それらと問 (3) の結果を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right)\right\}=\frac{2}{\pi}$$

2

x, y, z を直交座標とする3次元実ベクトル空間を考える．この空間内の点 (x_1, y_1, z_1) を点 (x_2, y_2, z_2) に移す写像 f が，3次正方行列 $\mathbf{A}$ を用いて $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ の形で表されるものとする．この写像 f により，点 $(k,\ k-2,\ 1)$, $(k,\ 2k-4,\ 1)$, $(k+2,\ 2k-4,\ 2)$ がそれぞれ点 $(3k-5,\ 3k-1,\ -2)$, $(4k-7,\ 5k-5,\ k-4)$, $(4k-6,\ 5k,\ k-6)$ に移されるとき，以下の問いに答えよ（k は定数）．

(1) 点 $(-k+2,\ 0,\ 0)$, $(0,\ k-2,\ 0)$ が写像 f により移される点をそれぞれ求めよ．

(2) 行列 $\mathbf{A}$ が一意に定まるための k に関する条件を求めよ．また，そのときの $\mathbf{A}$ を求めよ．

(3) 問(2)で求めた $\mathbf{A}$ に対して，式

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を満たす点 (x, y, z) が原点以外に存在するような定数 λ の値をすべて求めよ．また，それぞれの λ について，この式を満たす点 (x, y, z) 全体の集合がつくる図形を表す方程式を x, y, z を用いて示せ．

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ．

(1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ は，$p = ax+by+c$ と変数変換を行うと，p と x の変数分離形の微分方程式に変形できることを示せ．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}(y-x) = y^2+y+x^2-x-2xy+1$ の一般解を求めよ．

(3) 常微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = x+y$ の一般解を求めよ．

4

互いに独立な確率変数 X_1，X_2 がそれぞれ単位時間当たりの平均生起回数 λ_1, λ_2 のポアソン過程に従うものとするとき，次の問いに答えよ．

(1) $S = X_1 + X_2$ とおく．S の特性関数を求めよ．

(2) (1) の結果から S はどのような分布か説明せよ．

(3) S が生起する時刻を $T_1, T_2, T_3, \cdots$ としたとき，その生起間隔を
$D_1(= T_1), D_2(= T_2 - T_1), D_3(= T_3 - T_2), \cdots$ とする．
$D = \{D_1, D_2, D_3, \cdots\}$ の分布と平均時間を求めよ．

(4) X_1 の生起間隔の間に X_2 が 3 回生起する確率を求めよ．

ヒント 1：ポアソン分布 $Po(k)$ の確率密度関数は次式で与えられる．

$$f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

ヒント 2：ガンマ分布 $G(\lambda, n)$ の密度関数は次式で与えられる．

$$f_n(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\tau \geq 0)$$

5

図1に示すように，無限に長い直線状の導線Pが z 軸上に，直角三角形の導線閉回路ABCが zx 平面上にあり，導線Pには電流 I_1 が $+z$ 軸方向に流れている．ただし，導線ACは x 軸上に，導線ABは導線Pと平行に距離 x_1 だけ隔てて配置されている．導線ABの長さは b，導線ACの長さは c とする．また，導線Pおよび導線閉回路ABCはいずれも導線の太さは無視でき，変形しないものとする．空間の透磁率は μ_0 である．以下の問いに答えよ．

(1) 導線Pから距離 r の点における電流 I_1 がつくる磁界 H の大きさを示せ．

(2) 閉回路ABCにA→B→C→Aの向きに電流 I_0 が流れている．

1) 辺ABに作用する力 $F_{AB}=(F_{ABx}, F_{ABy}, F_{ABz})$ を求めよ．

2) 辺CAに作用する力 $F_{CA}=(F_{CAx}, F_{CAy}, F_{CAz})$ を求めよ．

3) 辺BCに作用する力 $F_{BC}=(F_{BCx}, F_{BCy}, F_{BCz})$ を求めよ．

(3) 電流 I_1 の作る磁界が，閉回路ABCを貫く磁束 ϕ を求めよ．

(4) 電流 I_1 が作る磁界を外部磁界とみなして、この磁界中で電流 I_0 が流れている閉回路ABCのもつ位置エネルギー U は $U=-I_0\phi$ で与えられる．この関係式を用いて，回路ABCに作用する力を求めよ．

(5) 時間 $t=0$ のとき，zx 平面上で辺ABが z 軸と平行を保ったまま閉回路ABCが $+x$ 方向に一定の速さ v で移動し始めた．このとき閉回路ABCに発生する起電力 $e(t)$ （$t\geq 0$）の大きさを求めよ．また，起電力によって流れる電流の向きについても答えよ．

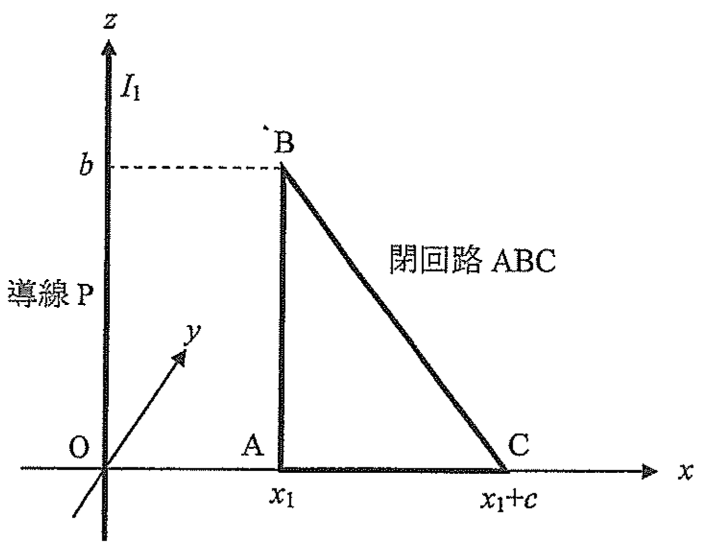


図1

6

半径a，b，高さhの厚さを無視できる中空円筒状の導体が，図1(a)に示すように両端をそろえて中心軸が一致するように配置され，起電力Vの直流電源に接続されている．ここで，hはa，bに比べて十分大きく，電極の端部効果は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．ただし，導体間の誘電率は真空の誘電率ε_0に等しく，重力は無視できるものとしてよい．

(1) 図1(a)のスイッチSを閉じたときに，内側の導体に蓄えられる電荷を求めよ．

(2) 問(1)において，導体間に蓄えられるエネルギーを求めよ．

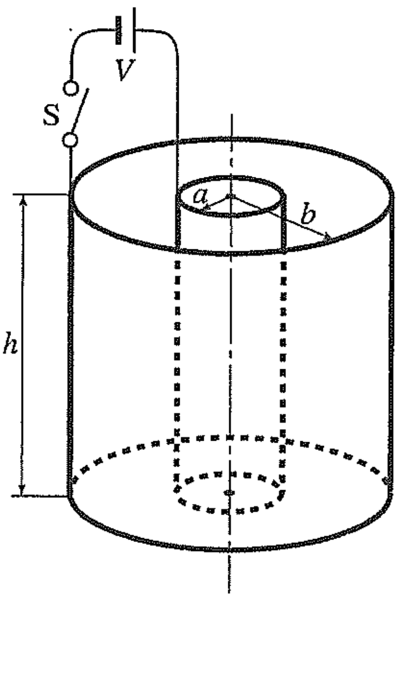
(3) 次に，スイッチSを閉じたまま，内径a，外径c $(a < c < b)$，高さh，比誘電率ε_rの誘電体を，図1(b)のように導体と中心軸が一致する状態で，下からゆっくりと導体間に挿入する．誘電体の端における電界の乱れ，および誘電体と電極の間の摩擦は無視できるものとする．図1(b)に示すように誘電体が距離zだけ入ったときの導体間の静電容量を求めよ．

(4) 問(3)において，誘電体に働く力を求めよ．ただし，力の向きはzの増加する方向を正とする．

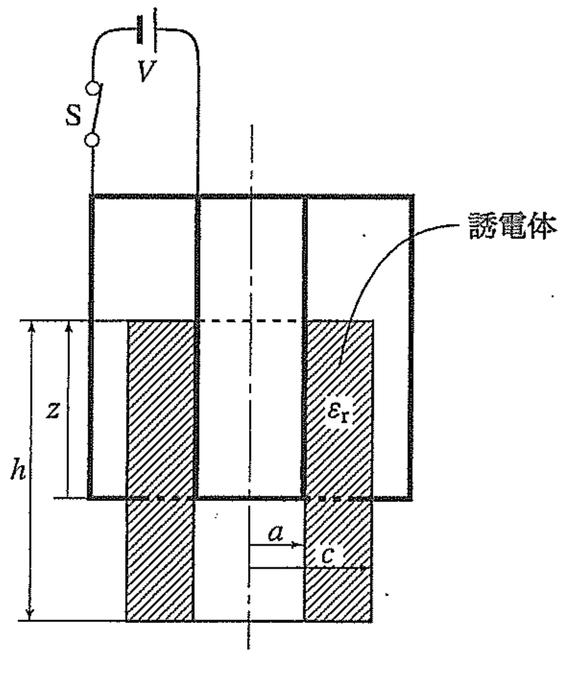
(5) 問(3)において，誘電体を$z = h$の位置まで完全に挿入したとき，導体間に蓄えられているエネルギーを求めよ．

(6) 問(5)の後，スイッチSを開き，誘電体をゆっくりと引き出す．引き出しを開始する瞬間において必要な力を求めよ．ただし，力の向きは誘電体を引き抜く方向を正とする．

(7) 問(6)で誘電体を完全に引き抜いた後の２つの導体間の電位差を求めよ．



(a)



(b) 誘電体が挿入されているときの断面図

図1