H25

問題2　電磁気学　　　　　　　解　答　例

問題２－Ｉ

(1) 一様電場に対する静電ポテンシャルは，原点 O を基準として

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{O} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{E}_0 \cdot \int_{\boldsymbol{r}}^{O} d\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$$

(2) 導体内部には自由電子が多数存在し，平衡状態ではこれらの自由電子にはたらく正味の力がゼロでなければならないので，導体内部の電場はゼロである。従って，導体内部の任意の閉曲面を貫く電束はゼロとなり，ガウスの法則により，この閉曲面の内部に存在する電荷はゼロであるから，導体内部には電荷は分布できない。

(3) $r^n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$ を微分すると

$$\nabla(r^n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) + r^n\boldsymbol{a}$$
$$\nabla^2(r^n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = n(n+3)r^{n-2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}$$

これが r によらずゼロとなるには $n=0$ または $n=-3$ でなくてはならない。

(4) 導体球上の電荷の影響が届かない無限遠方では一様電場であることから $r\to\infty$ のとき

$$\phi(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{E}_0$$

導体球面上で $\phi=0$ より

$$\phi\Big|_{r=R} = \left(-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{R^3}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}\right) = \left(-\boldsymbol{E}_0 + \frac{\boldsymbol{b}}{R^3}\right)\cdot\boldsymbol{r} = 0, \qquad \boldsymbol{b} = R^3\boldsymbol{E}_0$$
$$\therefore\ \phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(5) 導体球面上の電場は

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \boldsymbol{E}_0 - \frac{R^3[r^2\boldsymbol{E}_0 - 3(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]}{r^5}$$
$$\boldsymbol{E}\Big|_{r=R} = 3E_0\cos\theta\cdot\hat{r}, \quad \hat{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$
$$\therefore\ E(\theta) = 3E_0\cos\theta$$

よってクーロンの定理より

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 E(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

H25

問題 II

1．

$$\Phi = Bd(L + v_0 t)\cos\theta$$

2．

$$U = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$
$$= Bdv_0 \cos\theta$$

3．

$$I = \frac{U}{R}$$
$$= \frac{Bdv_0 \cos\theta}{R}$$

4．

$$F = IBd$$
$$= \frac{B^2 d^2 v_0 \cos\theta}{R}$$

5．

$$F\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$\frac{B^2 d^2 v_0 \cos\theta}{R}\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$v_0 = \frac{mgR\sin\theta}{B^2 d^2 \cos^2\theta}$$

H25