

平成 23 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

基礎科目試験問題

(実施時間 9 : 3 0 ~ 1 2 : 3 0)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて 11 頁ある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「数学 1」、「数学 2」、「数学 3」、「数学 4」、「数学 5」、「電磁理論 1」、「電磁理論 2」、「電気電子回路 1」、及び、「電気電子回路 2」の 9 題*あり、この順番に綴じられている。このうち、5 題を選択し解答すること。但し、選択すべき試験問題は、受験コース毎に下表のように規定されている。

受験コース名	選択すべき試験問題
システム・制御・電力工学コース	「数学 1」、「数学 2」、「数学 3」、「数学 4」、「数学 5」の 5 題から 3 題、及び、「電磁理論 1」、「電磁理論 2」、「電気電子回路 1」、「電気電子回路 2」の 4 題から 2 題、合計 5 題を選択すること
先進電磁エネルギー工学コース	
量子電子デバイス工学コース	
情報通信工学コース	9 題（上記*印）から 5 題選択すること

3. 解答開始前に、別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【数学1】 解答は, 白色の解答用紙に記入すること.

(a) 次の連立方程式 (system of equations) を, クラメル (Cramer) の公式を用いて解け.

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7$$

$$-x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$$

(b) 次の行列式 (determinant) を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

(c) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値 (eigenvalue) λ_k ($k = 1, 2, 3$) を求めよ. ただし, λ_1 は実数 (real number) とし λ_2, λ_3 は虚数 (imaginary number) とする.

(d) (c) で求めた固有値に対する固有ベクトル (eigenvector) \mathbf{x}_k を求めよ.

【数学2】 解答は、赤色の解答用紙に記入すること.

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ で表される半径 (radius) a の球 (sphere) と, $x^2 + y^2 \leq ax$ で表される直径 (diameter) a の円柱 (cylinder) が重なる共通部分の体積 (volume) を求めよ.
- (b) 図1に示すように直交座標系 (X, Y) に点 $(2, 1)$ を通る曲線 (curve) $Y = f(X)$ を定義する. この曲線上の点 $P(x, y)$ において接線 (tangent line) l を引くと, X 軸と角度 α で交わる. また, 点 P と原点 O を結ぶ直線と X 軸が成す角度を θ とし, $\alpha = 2\theta$ の関係があるとする. このときの曲線 $Y = f(X)$ を求めよ.

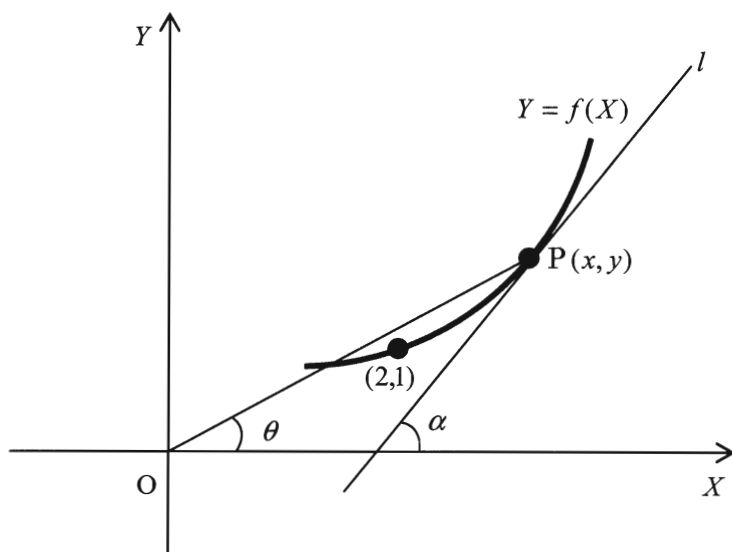


図1

【数学3】 解答は、青色の解答用紙に記入すること。

微分方程式 (differential equation) とその初期条件 (initial condition) をそれぞれ式(1)と式(2)で与える。以下の(a)～(d)の設問に答えよ。

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = f(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

(a) 関数 $u(t)$ および $f(t)$ のラプラス変換 (Laplace transform) をそれぞれ $\mathcal{L}[u(t)](s)$, $\mathcal{L}[f(t)](s)$ とし, $\mathcal{L}[u(t)](s)$ を求めよ。

(b) 複素平面 (complex plane) z ($z = x + iy$) において, 図 1 の実線 Γ のように x 軸上の点 $(\alpha, 0)$ ($\alpha > 0$) を通り x 軸に垂直な積分路 (contour perpendicular to the axis x) を考える。式(3)で定義される関数 $g(z)$ に対して式(4)の積分を計算し, 実関数 (real function) $y(\xi)$ を求めよ。

$$g(z) = \frac{e^{\xi z}}{z^2 + A^2} \quad (3)$$

$$y(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} g(z) dz \quad (4)$$

[ヒント] 図 1 の破線で示すような正の向きの半円 C (中心 $(\alpha, 0)$, 半径 β) を積分路 (counterclockwise semicircle contour C of radius β having its center at the point $(\alpha, 0)$) とする場合, 次式が成り立つ。

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_C g(z) dz = 0 \quad (5)$$

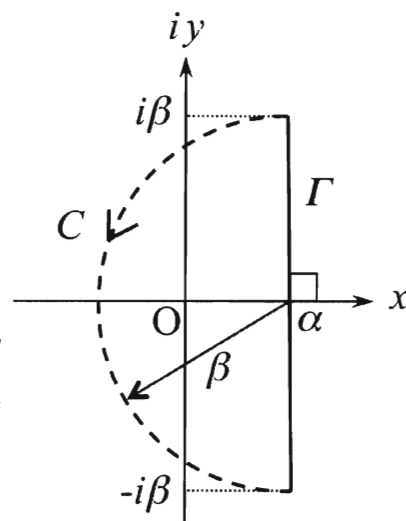


図 1

(c) (b)の結果を用いて微分方程式(1)の解 $u(t)$ を求めよ。

(d) $f(t) = B \sin \omega t$ の場合について $u(t)$ を求めよ。

【数学 4】 解答は、黄色の解答用紙に記入すること.

時間 t および空間 x を独立変数とする関数 $n(x, t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

が初期条件 $n(x, 0) = \delta(x)$ および境界条件 $n(\pm\infty, t) = 0$ を満たすものとする. ただし $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数(delta-function)である. このとき, 以下の手順に沿って $t \geq 0$ における $n(x, t)$ の時間発展を求めよ.

(a) フーリエ変換(Fourier transform) $N(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) \exp(-ikx) dx$ を式 (1) に適用することにより

$N(k, t) = \exp(-k^2 t)$ となることを導け.

(b) 逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform) $n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(k, t) \exp(ikx) dk$ により $n(x, t)$ を求めよ.

ただし, k に関するこの実積分に際し, 複素平面 (complex plane) $k = k_x + ik_y$ への解析接続を考え, 図 1 の矩形閉区間にコーシーの積分公式(Cauchy's integral formula)を適用せよ. ただし, 図中の k_0 は実数で

ある. 必要に応じて $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ を用いても良い.

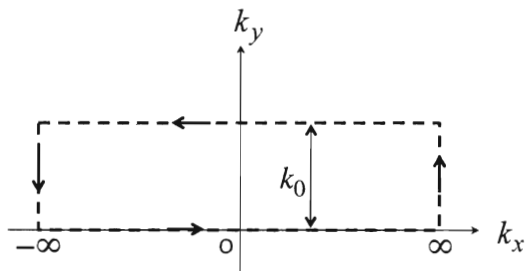


図 1

【数学5】解答は、水色の解答用紙に記入すること。

(a) 表が出る確率 (probability) が p ($0 < p \leq 1$)、裏が出る確率が $1 - p$ で与えられる硬貨がある。今、この硬貨を繰り返し投げ、初めて k 回連続して表が出た時点で試行 (trial) を停止する。ただし k は自然数 (natural number) である。たとえば、 $k = 3$ の場合において、最初の 6 回の試行を行った結果、順に、裏、裏、表、裏、表、表、という標本 (sample) が得られたとする。この場合、次に表が出れば、その時点で試行を停止することになり、試行を停止するまでに硬貨を投げた回数は 7 回となる。試行を停止するまでに硬貨を投げる回数の期待値 (expectation) を M_k としたとき、以下の (i)～(iii) の設問に答えよ。

(i) $k = 1$ 、すなわち、初めて表が出た時点で試行を停止する場合、停止するまでに硬貨を投げる回数の期待値 M_1 を求めよ。

(ii) $k \geq 2$ の場合、 M_k を p と M_{k-1} を用いて表せ。

(iii) M_k ($k = 1, 2, \dots$) を求めよ。

(b) X_1, X_2, X_3, X_4 を正規分布 (normal distribution) $N(\mu, \sigma^2)$ から無作為抽出 (random sampling) された大きさ 4 の標本とする。今、 $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (7, 9, 9, 11)$ であるとき、帰無仮説 (null hypothesis) $H_0: \mu = 10$ 、対立仮説 (alternative hypothesis) $H_1: \mu \neq 10$ を 5% 有意水準 (significance level) で検定 (test) せよ。なお、必要に応じて下記の分布表を用いて良い。

表 1 t 分布表 (t distribution table) (片側: one-sided)

自由度 \ 上側確率	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143

表 2 F 分布表 (F distribution table) :

自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布の上側 5% 点 (upper 5% point)

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28

上側確率 : upper tail probability

自由度 : degrees of freedom

【電磁理論1】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～⑭の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や数字を解答用紙に記入せよ.

導体と真空からなる系内の静電界を考える．図 1 のような断面になるよう，無限に長い導体円柱と導体円筒が同軸で設置されている．半径 a の導体円柱に単位長さあたり $Q(>0)$ の電荷が与えられているとする．また，導体円筒には外部からの電荷は与えられていないものとする．真空の誘電率を ϵ_0 とするとき，電束に関するガウスの法則を用いると，導体円柱及び導体円筒内外の電界の大きさ E （スカラー量）は，中心軸からの距離を r として，それぞれ，

$r < a$ において，	$E =$	<div>①</div>
$a < r < b$ において，	$E =$	<div>②</div>
$b < r < c$ において，	$E =$	<div>③</div>
$c < r$ において，	$E =$	<div>④</div>

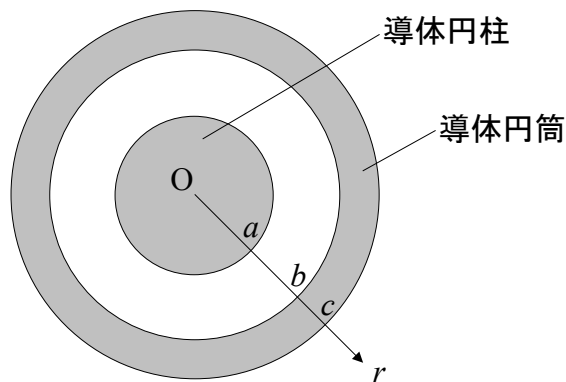


図1

となる．

また， r ($a \leq r \leq b$)における導体円筒内表面($r = b$)を基準とした電位 V ，及び導体円柱と導体円筒間の軸方向単位長さあたりの静電容量 C は，それぞれ，

$V =$	<div>⑤</div>
$C =$	<div>⑥</div>

となる．

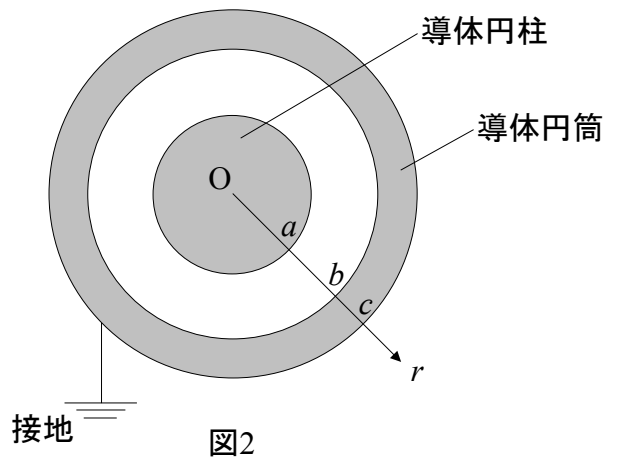
次に，図 2 のように，導体円柱に単位長さあたり Q の電荷が与えられたまま，導体円筒を接地した場合を考える．この場合の導体円柱及び導体円筒内外の電界の大きさ E （スカラー量）は，中心軸からの距離を r として，それぞれ，

$$r < a \text{ において, } E = \boxed{\text{⑦}}$$

$$a < r < b \text{ において, } E = \boxed{\text{⑧}}$$

$$b < r < c \text{ において, } E = \boxed{\text{⑨}}$$

$$c < r \text{ において, } E = \boxed{\text{⑩}}$$



となる.

また、無限遠方を基準とした電位 V は、それぞれ、

$$r \leq a \text{ において, } V = \boxed{\text{⑪}}$$

$$a < r \leq b \text{ において, } V = \boxed{\text{⑫}}$$

$$b < r \leq c \text{ において, } V = \boxed{\text{⑬}}$$

$$c < r \text{ において, } V = \boxed{\text{⑭}}$$

となる.

【電磁理論2】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること.

解答用紙に①～⑪の番号を記し，対応する以下の文中の空欄にあてはまる語句・数式を解答用紙に記入せよ.

解答にあたり，次の公式を用いてもよい． ϕ を微分可能な一価のスカラー関数とし， \mathbf{A} を微分可能な一価のベクトル関数とすると，

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2)$$

が成り立つ．

電荷および電流を含まない，無限に広がる等方で均質な無損失媒質（誘電率 ϵ ，透磁率 μ ）の中を角周波数 ω で正弦的に時間変化する平面電磁波が伝搬しているとする．直角座標系における x ， y および z 方向の単位ベクトルをそれぞれ， \mathbf{i}_x ， \mathbf{i}_y および \mathbf{i}_z とし， k_j ($j = x, y, z$)を定数として，波数ベクトル \mathbf{k} を

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}_x k_x + \mathbf{i}_y k_y + \mathbf{i}_z k_z \quad (3)$$

とする． \mathbf{k} の方向に伝搬する平面電磁波の電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5)$$

と表わす．ここで， \mathbf{E}_0 および \mathbf{H}_0 は非零の定ベクトルである．また，

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z \quad (6)$$

は観測点の位置ベクトルである．

まず，マクスウェルの方程式から， \mathbf{k} ， \mathbf{E}_0 ， \mathbf{H}_0 ， ω ， ϵ および μ の関係を定める式を導こう．ファラデー・マクスウェルの法則を表わす式に式(4)および(5)を代入し，

$$\nabla [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \boxed{\text{①}} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7)$$

となることを用いると， \mathbf{k} ， \mathbf{E}_0 ， \mathbf{H}_0 ， ω および μ の間に成り立つ関係式は

$$\mathbf{H}_0 = \boxed{\text{②}} \quad (8)$$

となる．また，アンペア・マクスウェルの法則を表わす式からは， \mathbf{k} ， \mathbf{E}_0 ， \mathbf{H}_0 ， ω および ϵ の間に成り立つ関係式

$$\mathbf{E}_0 = \boxed{\text{③}}, \quad (9)$$

電束に関するガウスの法則を表わす式からは， \mathbf{k} と \mathbf{E}_0 との間に成り立つ関係式

$$\boxed{\text{④}} = 0, \quad (10)$$

磁束に関するガウスの法則を表わす式からは， \mathbf{k} と \mathbf{H}_0 との間に成り立つ関係式

$$\boxed{\text{⑤}} = 0 \quad (11)$$

がそれぞれ得られる．式(10)および(11)より，それぞれ， \mathbf{k} と \mathbf{E}_0 ， \mathbf{k} と \mathbf{H}_0 が ⑥ し
ていることが分かる．

次に、式(8)の両辺に左側から \mathbf{k} をベクトルの的に乗じて、その左辺に式(9)を使い、右辺にベクトル三重積の公式を用いて変形すると、次式が得られる。

$$\left(\begin{array}{c} \text{⑦} \end{array} \right) \mathbf{E}_0 = 0 \quad (12)$$

式(12)において、 \mathbf{E}_0 は非零のベクトルであるから、

$$|\mathbf{k}| = \begin{array}{c} \text{⑧} \end{array} \quad (13)$$

となる。

さらに、この平面電磁波のポインティング・ベクトル \mathbf{S} を求めよう。 \mathbf{S} の定義式に式(4)および(5)を代入し、以上に示した結果を用いると、

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \text{⑨} \end{array} |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (14)$$

または、

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \text{⑩} \end{array} |\mathbf{H}_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (15)$$

と書ける。また、式(14)および(15)より、媒質の固有インピーダンス Z は

$$Z = \frac{|\mathbf{E}_0|}{|\mathbf{H}_0|} = \begin{array}{c} \text{⑪} \end{array} \quad (16)$$

と表わされる。

【電気電子回路1】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること。

図 1-1 に示す回路において $v(t) = \sin \omega t$ [V] とする。角周波数 ω を変化させながら電流 $i(t)$ を計測すると、 $i(t)$ の周波数特性^{*1}は図 1-2 のようになった。ここで、図 1-2 の振幅特性^{*2}は両対数表示^{*3}、位相特性^{*4}は片対数表示^{*5}である。また、 $i_1 = 1$ mA, $i_2 = 0.2$ mA, 折れ点周波数^{*6} $\omega_a = 250$ rad/s である。

このとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) R_1, R_2, C の各値を求めよ。
- (2) 図 1-2 中の折れ点周波数 ω_b を求めよ。
- (3) 位相進みが最大となる周波数 ω_c を求めよ。
- (4) 図 1-3 に示す回路において、時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じた。ただし、時刻 $t = 0^-$ で回路は定常状態^{*7}にあり、 $v(t) = 1$ V, R_1, R_2, C の各値は問い (1) で求めたものとする。 $t > 0$ における電流 $i(t)$ を求めよ。

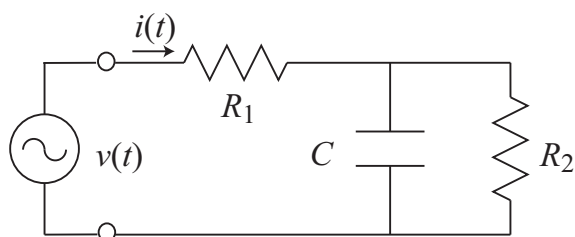


図 1-1

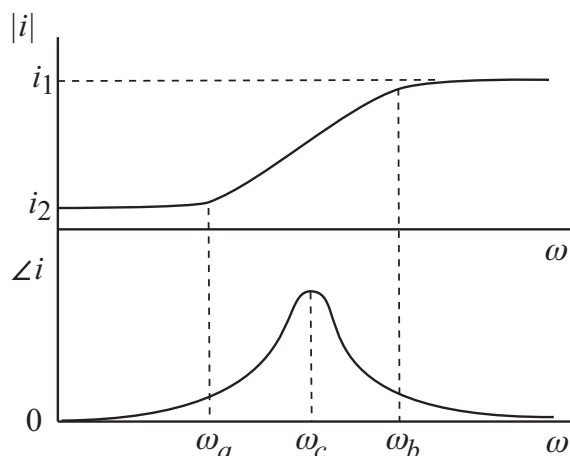


図 1-2

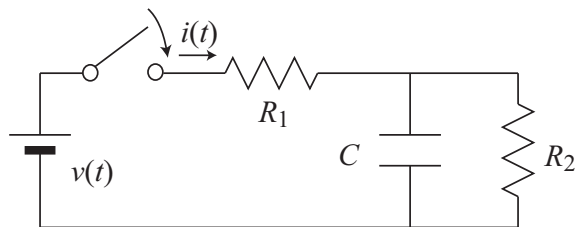


図 1-3

^{*1}周波数特性：frequency-response characteristic

^{*2}振幅特性：magnitude characteristic

^{*3}両対数表示：log-log plot

^{*4}位相特性：phase characteristic

^{*5}片対数表示：semi-log plot

^{*6}折れ点周波数：corner frequency

^{*7}定常状態：steady state

【電気電子回路2】 解答は、橙色の解答用紙に記入すること.

図 2-1 に示すドレイン接地増幅器(ソース・フォロワ)^{*1}には 2 mA のバイアス^{*2}電流が流れている. この回路の定常状態^{*3}について, 下記の問い(1)~(5)に答えよ. なお, V_O , C_L は実数であり, $v_{in}(t)$, $v_{out}(t)$ は角周波数 ω , 実効値各々 V_{in} , V_{out} の正弦波

$$v_{in}(t) = \sqrt{2} V_{in} \sin \omega t, \quad v_{out}(t) = \sqrt{2} V_{out} \sin(\omega t + \theta)$$

である. ただし, V_{in} , V_{out} は 1V に比べて微小な実数である. また, 図 2-1 の n チャネル MOSFET は飽和領域^{*4}で動作し, ゲート・ソース間電圧 V_{GS} に対してドレイン電流 I_D は

$$I_D = \frac{\beta}{2} (V_{GS} - V_{TH})^2$$

となるものとする. ここで, $V_{TH} = 0.5 \text{ V}$, $\beta = 4 \text{ mA/V}^2$ とする.

(1) 出力電圧の直流成分 V_O を求めよ.

(2) n チャネル MOSFET の相互コンダクタンス g_m を求めよ. なお, 相互コンダクタンスは下記で定義される.

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}$$

(3) 図 2-2 に示す n チャネル MOSFET の小信号等価回路^{*5}を用いて, V_{out}/V_{in} および $\tan \theta$ を求めよ.

ただし, g_m , C_L , ω を用いよ. なお, 図 2-2 の G, S, D は各々ゲート, ソース, ドレイン^{*6}を示し, v_{gs} はゲート・ソース間電圧の小信号成分である.

(4) $\omega \rightarrow 0$ のときの電圧利得 V_{out}/V_{in} を求めよ.

(5) $C_L = 1 \text{ pF}$ のとき, 電圧利得が(4)で求めた直流に対する値の $1/\sqrt{2}$ になる周波数 f_p を求めよ.

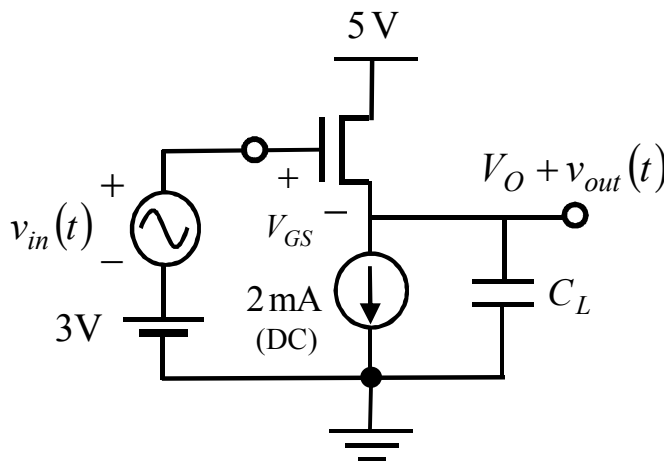


図2-1

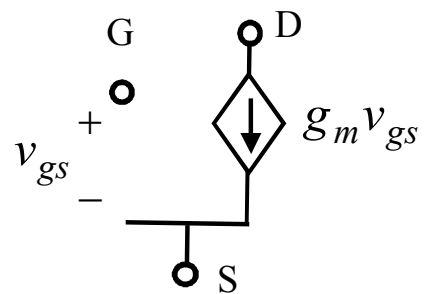


図2-2

*1 ドレイン接地増幅器(ソース・フォロワ): common-drain amplifier (source follower)

*2 バイアス: bias

*3 定常状態: steady state

*4 飽和領域: saturation region

*5 小信号等価回路: small-signal equivalent circuit

*6 ゲート, ソース, ドレイン: gate, source, drain