専門科目 (午前)　　26　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

問 1 (基礎問題)

n 次実正方行列 $\boldsymbol{P}$ が $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ をみたすとする．$\boldsymbol{P}$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像であると考えたとき，$\boldsymbol{P}$ の核を $\ker(\boldsymbol{P})$，$\boldsymbol{P}$ による像を $\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ とする．また $\boldsymbol{I}$ を n 次単位行列，$\boldsymbol{0}$ を n 次零ベクトルとする．さらに，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，標準的な内積 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ で表す.

(1) $\mathrm{range}(\boldsymbol{P}) \cap \ker(\boldsymbol{P}) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つことを示せ.

(2) $\ker(\boldsymbol{P}) = \mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ が成り立つことを示せ.

(3) $\boldsymbol{P}$ が対称行列であるとき，$\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ と $\mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ は直交することを示せ.

(4) ２つの部分空間 $\mathrm{range}(\boldsymbol{P})$ と $\mathrm{range}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})$ が直交するとき，$\boldsymbol{P}$ は対称行列であることを示せ.

問 2 (基礎問題)

$\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ で，関係式

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

をみたすものの全体の作る集合を A で表す．また，関係式

$$f_{xx}(x,y) - f_{yy}(x,y) = 0$$

をみたすものの全体の作る集合を B で表す．ただし f_{xx}, f_{xy} および f_{yy} は f の 2 階偏導関数を表すものとする．このとき以下に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ が A に属するとき，$\mathbb{R}$ 上の C^∞-関数 $a(t)$ と $b(t)$ が存在し

$$f(x,y) = a(x) + b(y)$$

と書けることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞-関数 $f(x,y)$ について $x = (u+v)/2$ かつ $y = (u-v)/2$ と変数変換をしたとき，f_{uv} を f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ.

(3) (1) で与えた形 $f(x,y) = a(x) + b(y)$ を A に属する関数の一般形とよぶことにする. (2) を用いて，B に属する関数の一般形を求めよ.

問 3 (基礎問題)

$\{0,1\}$ 上の 1 変数関数 TRUE，NOT，2 変数関数 AND，IMP，および 3 変数関数 NA，E を次の表で定める（E は入力中の 1 の個数が偶数であるとき 1 を返す）．

x	TRUE(x)	NOT(x)
0	1	1
1	1	0

x	y	AND(x,y)	IMP(x,y)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

x	y	z	NA(x,y,z)	E(x,y,z)
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

するとたとえば

$$\mathsf{TRUE}(x) = \mathsf{IMP}(x,x)$$

$$\mathsf{AND}(x,y) = \mathsf{IMP}(\mathsf{IMP}(x,\mathsf{IMP}(y,0)),0)$$

が成り立つ．すなわち x と IMP だけで TRUE(x) を表現することができ，$0,x,y$ と IMP だけで AND(x,y) を表現することができる．さらにこの後者において定数 0 は必要である，すなわち x,y と IMP だけでは AND(x,y) を表現できないことが知られている．

(1) 定数を使わずに x と NA だけで NOT(x) を表現せよ（表現を書くだけでよい）．

(2) 定数を使わずに x,y と NA だけで AND(x,y) を表現せよ（表現を書くだけでよい）．

(3) 定数を使わずに x と E だけでは TRUE(x) を表現できないことを証明せよ．

問 4 (一般問題)

位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，その乗法群，すなわち積に関して逆元のある要素からなる群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ で表す．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元および $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ の元は，整数が同値類を表すこととすれば，たとえば $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$，また $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\times} = \{1\}$，$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times} = \{1, 2\}$，$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\times} = \{1, 3\}$ である．このとき以下に答えよ．

(1) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{\times}$ の位数を求め，単位元以外の元の位数は 2 であることを示せ．

(2) $(\mathbb{Z}/84\mathbb{Z})^{\times}$ の位数と，位数 2 の元の個数を求めよ．

問 5 (一般問題)

0 または 1 の無限列からなる集合

$$X = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) : \ x_i = 0 \text{ または } 1\}$$

と，$X \times X$ 上で定義される実数値関数

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

について，以下に答えよ．

(1) d は X 上の距離関数であることを示せ．

(2) 以下の式で定義される写像 $f : X \to X$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

は，d が定める位相に関して連続であることを示せ．

(3) n を正の整数とし，(2) で定義した f を n 回反復（合成）して得られる写像を f^n で表す．さらに，X の点 y がある正の整数 n について $f^n(y) = y$ をみたすとき，$y \in X$ を f の周期点とよぶ．X の任意の点 x について，f の周期点の列があって，d が定める位相に関して x に収束することを示せ．

問 6 (一般問題)

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体からなる線型空間 $C[0,1]$ に，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_1$ を導入したノルム空間をそれぞれ N_∞，N_1 で表す．ただし，

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

である．このとき以下に答えよ．

(1) N_∞ と N_1 が実際にノルム空間になることを示せ．

(2) N_∞ はバナッハ空間になることを示せ．

(3) 正の整数 n に対し，関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & (\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1) \end{cases}$$

によって定義する．関数列 $\{f_n\}$ は $\|\cdot\|_1$ でコーシー列になることを示せ．

(4) N_1 はバナッハ空間になるか否か，証明をつけて答えよ．

問 7 (一般問題)

以下の最適化問題 $(\mathcal{P}_\theta)$ を考える.

$$
(\mathcal{P}_\theta) \qquad
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & : & (1+\theta)x_1 - 4x_2 + \max\{5x_1 + 2x_2 - 4,\ 7x_1 + 3x_2 - 8,\ 0\} \\
\text{制約} & : & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

以下の問いについて答えよ.

(1) $\theta = 0$ の場合に, $(\mathcal{P}_\theta)$ を１つの線形計画問題の基準形あるいは標準形に帰着せよ.

(2) (1) で得られた線形計画問題をシンプレックス法で解き, $\theta = 0$ の場合の最適解 (x_1^*, x_2^*) を求めよ.

(3) θ を変動させたときに, $(\mathcal{P}_\theta)$ の最適解が (2) で得られた (x_1^*, x_2^*) のままとなる θ の範囲を求めよ.

問 8 (一般問題)

X を $[0,1)$ 上の一様分布にしたがう確率変数とし，X の値を無限小数展開したとき，小数第 n 位の数を表す確率変数を X_n とする $(n=1,2,\ldots)$．すなわち，各 X_n は $0,1,2,\ldots,9$ のいずれかの値をとり，

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{10^n}$$

が成り立つ (ただし，$0.009999\cdots = 0.010000\cdots$ のように 2 通りの展開の仕方がある場合は後者のほうを採用する)．

(1) 任意の n に対して，X_n が $\{0,1,2,\ldots,9\}$ 上の離散一様分布にしたがうことを示せ．

(2) 任意の n に対して，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立であることを示せ．

(3) 確率変数 Y_n $(n=1,2,\ldots)$ を

$$Y_n = \begin{cases} 0 & (X_n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (X_n = 1,2,\ldots,9 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって与えたとき，確率変数 $Y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{10^n}$ の期待値を求めよ．

問 9 (一般問題)

(1) k を正整数，$0 < p < 1$ を実数とする．成功率 p の独立ベルヌイ試行列 $X_1, X_2, \ldots$ において，k 回目の 1 が現れるまでの試行回数を $k+Y$ とする．確率変数 Y の確率関数は

$$p_k(i) = \binom{i+k-1}{i} p^k (1-p)^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

になることを示せ．この離散確率分布をパラメータ (k, p) の負の二項分布 $\mathrm{NB}(k, p)$ とよぶ.

(2) $\mathrm{NB}(k, p)$ に従う確率変数 Y の平均は

$$\mathbf{E}\{Y\} = \frac{k(1-p)}{p}$$

となることを示せ.

(3) k は既知とする．$y_1, y_2, \ldots, y_n$ を $\mathrm{NB}(k, p)$ に従う互いに独立な確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ の実現値とする．(2) の関係を用い， p のモーメント推定量 $\widehat{p}_{\mathrm{ME}}$ を標本平均 $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ と k を用いて表せ.

(4) (3) と同じ仮定の下で，パラメータ p の最尤推定量 $\widehat{p}_{\mathrm{MLE}}$ を求めよ.

問 10 (一般問題)

アルファベットが $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ の言語を考える．x が文字列で n が自然数のとき，x^n は x の n 個の連接を表す.

(1) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 1\}$ とする．L_1 に対する文脈自由文法（注１）を示せ.

(2) $L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor} \mid n \geq 1\}$ とする．ただし $\lfloor r \rfloor$ は r 以下の最大の整数であり，具体的に L_2 は

$$\{\mathtt{ab}, \mathtt{aabbb}, \mathtt{aaabbbb}, \mathtt{aaaabbbbbb}, \mathtt{aaaaabbbbbbb}, \mathtt{aaaaaabbbbbbbbb}, \ldots\}$$

である．L_2 に対する文脈自由文法を示せ.

(3) $L_3 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m, n \geq 1\}$ とする．L_3 は文脈自由言語でないことをポンピング補題（注２）を使用して証明せよ.

(4) $L_4 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n \mid m, n \geq 1\}$ とする．L_4 は文脈自由言語であるか否か述べ，文脈自由言語であるならばこれに対する文脈自由文法を示せ．文脈自由言語でないならば，そのことをポンピング補題を使用して証明せよ.

【注１：文脈自由文法】 文脈自由文法は非終端記号，開始記号，および生成規則を示すことで与えられる．たとえばアルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, +, *, (,)\}$ のとき，以下のものは「$\mathtt{a}, \mathtt{b}$ から演算子 $+, *$ で構成される数式全体」に対する文脈自由文法になる.

- 非終端記号： $E,\ I$
- 開始記号： E
- 生成規則： $E \to I,\quad E \to E{+}E,\quad E \to E{*}E,\quad E \to (E),\quad I \to \mathtt{a},\quad I \to \mathtt{b}$

【注２：文脈自由言語に対するポンピング補題】 L が文脈自由言語ならばある定数 p（ポンピング長）が存在して，条件「$z \in L$ かつ $|z| \geq p$」を満たすどんな文字列 z も下記の三条件を満たすように $z = uvwxy$ と分割できる（u, v, w, x, y はそれぞれ文字列である）.

(ア) $|vwx| \leq p$.

(イ) 任意の $i \geq 0$ に対して $uv^iwx^iy \in L$.

(ウ) $|v| + |x| > 0$.

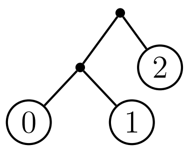
ただし $|s|$ は文字列 s の長さを表す.

問 11 (一般問題)

葉に整数を 1 つ持つような 2 分木 (以下では単に木と呼ぶ) を，次のような Java 言語のクラス Tree, Leaf, Node によって表すことにする．(※部は省略してあるが，本問では呼び出されることがないので気にしなくてよい．)

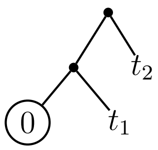
```
abstract class Tree {            //Tree クラスの宣言
    abstract int getV();         //抽象メソッド getV の宣言
    abstract Tree getL();
    abstract Tree getR();
}
class Leaf extends Tree {        //Leaf クラスを Tree の子として宣言
    int value;                   //value フィールド (インスタンス変数) 宣言
    Leaf(int v) { value=v; }     //コンストラクタ宣言
    int getV() { return value; } //getV メソッドの宣言
    Tree getL() { ※ }
    Tree getR() { ※ }
}
class Node extends Tree {
    Tree left, right;
    Node(Tree l, Tree r) { left=l; right=r; }
    int getV() { ※ }
    Tree getL() { return left; }
    Tree getR() { return right; }
}
```

このとき式 new Node(new Node(new Leaf(0), new Leaf(1)), new Leaf(2)) は下図の木を作る．



次のように木を変形する規則 1 を考える．

規則 1:

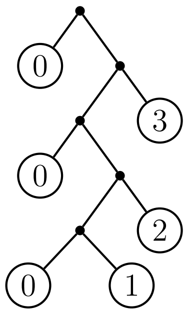


$\longrightarrow$ t_1 (t_1, t_2 は任意の木を表す．)

このとき，木の一部分に対して規則 1 を適用して変形した木を作りたい．以下の問いに答えよ．以下，部分木とはその木自身も含むこととする．

(1) 与えられた木 t に，規則 1 の左辺の形をした部分木が存在するかを判定するメソッド hasRedex(t) を定義せよ．(定義中で注 1 の isRedex を呼び出してもよい．)

(2) 以下の木から，規則 1 の左辺の形をした部分木を見つけ，その部分木を規則 1 の右辺で置き換えた木を書け．規則 1 の左辺の形をした部分木が複数ある場合は，そのうちの 1 つの部分木だけを置き換えることとする．その際すべての置き換え方で得られる木を別々に書け.



(3) 与えられた木 t から，規則 1 の左辺の形をした部分木を見つけ，その部分木を規則 1 の右辺で置き換えた木を返すメソッド `reduce(t)` を定義せよ．規則 1 の左辺の形をした部分木が複数ある場合は，そのうちの 1 つの部分木だけを置き換えることとする．その際どの部分木を置き換えてもよいものとする．`t` に規則 1 の左辺の形をした部分木が存在しない場合は `t` 自身を返す．部分木を置き換えた木を作る場合には，目的の形をした木を新しく作り直してもよいし，与えられた木の部分木を再利用してもよい．(定義中で注 1 の `isRedex` や (1) の `hasRedex` を呼び出してもよい．)

注 1: 与えられた木 `t` が規則 1 の左辺の形になっているかを判定するメソッド `isRedex(t)` は次のように定義できる.

```
static boolean isRedex(Tree t) {
    return (t                instanceof Node) &&
           (t.getL()         instanceof Node) &&
           (t.getL().getL() instanceof Leaf) &&
           t.getL().getL().getV() == 0;
}
```

ここで `t instanceof Node` は，`t` の値が `Node` クラスのオブジェクトであるかを判定する式である．`&&` は論理積を求める演算子である．また，ここには使われていないが `||` は論理和を求める演算子である.

注 2: 解答としてメソッドを定義する際には，`isRedex(t)` のように適当なクラスに定義された static メソッドとして定義してよい．また定義の中で `isRedex` を呼び出してもよい．文法の厳密性はあまり気にしなくてよい.

問 12 (一般問題)

C 言語で書かれた次のプログラムを考える．

```
/* ヘッダファイルの記述は省略 */
void callee(int k) {
  int a = 0x1234;
  int i;

  /* 変数 a が格納されている番地から，
     順に，メモリの内容を 16 進数で表示する */
  for (i = 0; i < 12; i++) {
    printf("%x\n", *(&a + i));
  }
}

void caller(void) {
  callee(0x5678);
}
```

関数 caller を呼び出したところ，次の出力が得られた．

```
1234
1
0
0
bfdb8388
8048485
5678
804858e
bfdb8394
45ce7d50
1
45c988f8
```

出力中の 5678 は関数 callee の引数であるという前提のもとで，以下の設問に答えよ．

(1) 関数 callee の変数 a と i は局所変数である．局所変数が大域変数とは異なる点を，格納されるメモリ領域に着目して，1つ述べよ．なお，解答の中で，次の語のうち1つは用いること：スタックフレーム，スタック，ヒープ，スレッド．

(2) 上記の出力を得た際にプログラムの実行を行ったプロセッサにおいて，スタックに値をプッシュする命令を実行した場合，スタックポインタが保持する番地は増加するか，それとも減少するか，答えよ．また，その根拠を述べよ．

(3) 関数 caller は，関数 callee を，プロセッサが備える関数呼び出し命令（例：call 命令）で呼び出す．関数呼び出し命令は，関数 caller に戻る際の戻り番地（実行を

再開する番地）をスタックにプッシュするとともに関数 `callee` に実行を移す．この戻り番地は，次のうちのどれであると推測されるか?

（a）8048485

（b）45ce7d50

（c）45c988f8

また，その根拠を述べよ．