平成 17 年 8 月 29 日

9:30－11:30

平成１７年度

大学院工学研究科　電気・通信工学専攻

電子工学専攻

大学院情報科学研究科

情報・生命系群(物理・情報系)

大学院入学試験問題用紙

基礎科目

注意：６設問中，２問題を選んで，

答案用紙に解答せよ．

(Choose 2 problems out of the following 6 problems and solve them.)

２００５年８月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／３頁中）

Fig.1(a)に示すように，半径 a および b の無限に長い２本の円柱状導体 1，2 を真空中で間隔 d ($>>b>a$)で平行に配置する．導体 1 の中心軸上の一点を原点 O にとり，原点 O から導体 2 の中心軸に垂直に向かう方向を x 軸，導体 1 の中心軸に沿う方向を y 軸，x 軸と y 軸に垂直な方向を z 軸とする．x 軸上で原点 O から距離 x にある点を P とし，$a < x < d-b$ の範囲で考えるものとする．

（１） 導体 1，2 にそれぞれ単位長さ当り $+q$，$-q$ の電荷が分布している場合を考える．$d >> a$，$d >> b$ の条件より，それぞれの導体上の電荷分布は中心軸のまわりで対称と考えてよい．

（ａ）ガウスの法則を用いて，点 P における電界 $\boldsymbol{E}$ の大きさを求めよ．また，距離 x に対する電界 $\boldsymbol{E}$ の概形を図示せよ．

（ｂ）導体 1，2 を平行導線のコンデンサと考えた場合に，この平行導線コンデンサの単位長さ当りの静電容量 C を求めよ．

（２） Fig.1(b)に示すように，導体 1，2 にそれぞれ直流電流 I_1，I_2 が y 軸の正の向きに流れている場合を考える．アンペールの法則を用いて，点 P における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求めよ．また，距離 x に対する磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の概形を図示せよ．

（３） Fig.1(c)に示すように，導体 1，2 に流れる電流が時間的に変化し，それぞれ $I_1 \sin(\omega t)$，$I_2 \sin(\omega t)$で与えられるとする．電気抵抗 R の正方形コイルが，$z = 0$ の x-y 平面上に置かれている．ただし，コイルの各辺は x 軸または y 軸に平行である．そのコイルの辺長は s ($<< d$)であり，コイル中心の x 軸方向の位置は $x = d/2$ である．ファラデーの法則を用いて，正方形コイルに発生する誘導電流を求めよ．

（４） マクスウェルの方程式とストークスの定理からファラデーの法則を導け．

As shown in Fig.1(a), two infinitely long conducting cylinders of radii a and b are located in parallel, separated by a distance d ($>>b>a$) in vacuum. The origin O is set at a point on the central axis of conductor 1. The direction perpendicular to the central axis of conductor 2 from the origin O is defined as the x axis and that along the central axis of conductor 1 is defined as the y axis. Moreover, the direction perpendicular to the x and y axes is defined as the z axis. A point P is set on the x axis and the distance from the origin O is x. In this problem, consider only within the segment $a < x < d-b$.

（１） Electric charges $+q$ and $-q$ per unit length are placed on the conductors 1 and 2, respectively. The electric charge distribution on each conductor is symmetrical with respect to the central axis under the assumption of $d >> a$ and $d >> b$.

（a） Calculate the magnitude of the electric field $\boldsymbol{E}$ at the point P by using Gauss' law. Then, sketch the electric field $\boldsymbol{E}$ in relation to the distance x.

（b） When the conductors 1 and 2 are treated as a parallel-conductor capacitor, calculate the capacitance C of the parallel-conductor capacitor per unit length.

（2） As shown in Fig.1(b), the direct currents I_1 and I_2 flow in the conductors 1 and 2, respectively, toward the positive y direction. Calculate the magnitude of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the point P by using Ampere's law. Then, sketch the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ in relation to the distance x.

（3） As shown in Fig.1(c), the currents flowing in the conductors 1 and 2 are temporally changed and given as $I_1 \sin(\omega t)$ and $I_2 \sin(\omega t)$, respectively. A square coil with resistance R is located in the x-y plane at $z = 0$. Here, each side of the coil is parallel to either the x or y axis. The side length of the coil is s ($<< d$) and the center of the coil is set at $x = d/2$. Calculate the induced current in the square coil by using Faraday's law.

（4） Derive Faraday's law from Maxwell's equations and Stokes' theorem.

２００５年８月実施
問題１　電磁気学
（３頁目／３頁中）

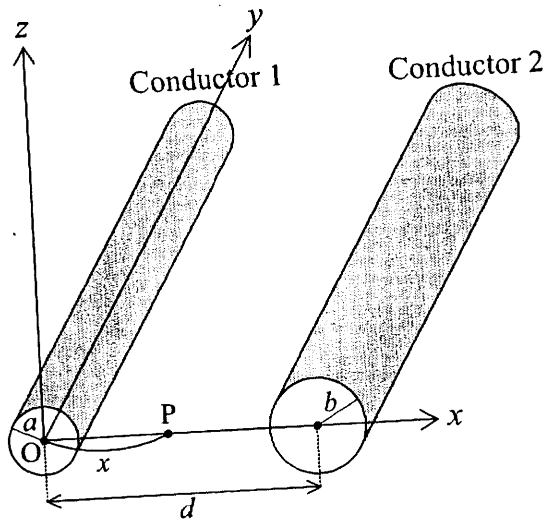


Fig. 1(a)

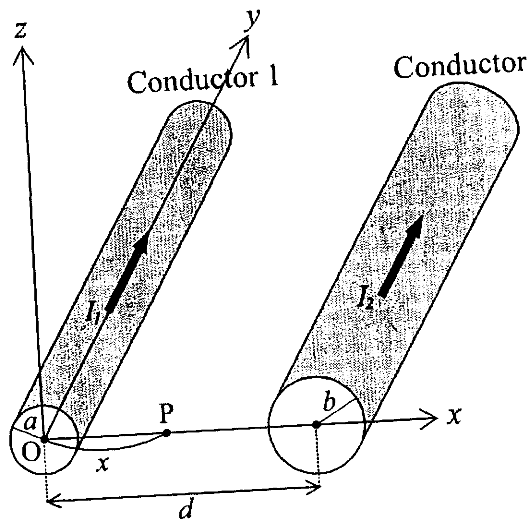


Fig. 1(b)

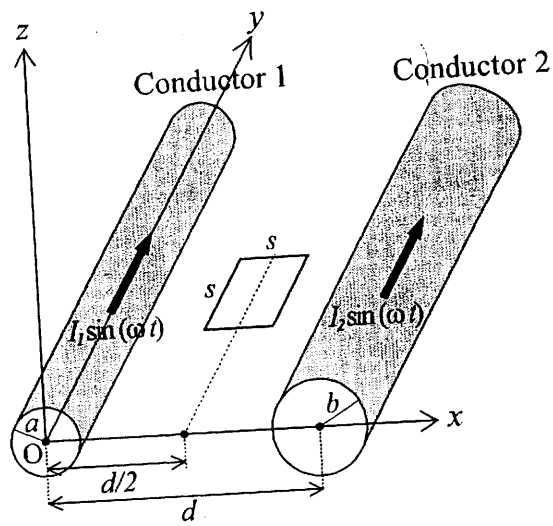


Fig. 1(c)

2005 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目/3 頁中)

Fig. 2 の電気回路に関して以下の問に答えよ．必要ならば，次のラプラス変換の公式を用いよ．なお，答案には解く過程と答えを記せ．

ラプラス変換: $\mathcal{L}(1-e^{-at}) = \dfrac{a}{s(s+a)}$

(1) Fig. 2(a) の 2－2' から左を見た回路が，Fig. 2(b) と等価であるときの電流源の電流 i_0 およびインピーダンス Z を求めよ．なお，電圧源の電圧 e_0 は $e_0 = E_0 \sin(\omega_0 t)$ とする．

(2) Fig. 2(a) の 1－1' から右側をみた回路の，角周波数 ω_0 の正弦波に対するインピーダンスを求めよ．また，ω_0 が 0 から∞まで変化した時，この値がどのように変化するかを複素平面上に図示せよ．

(3) Fig. 2(a) の回路の 1－1'に，電圧波形 $e_0(t) = u(t)$ を電圧源から入力した．このときの 2－2'間の電圧波形 $v_1(t)$を求め，その波形を図示せよ．なお，$u(t)$は単位ステップ関数である．

(4) Fig. 2(a) の回路の 1－1'に，Fig. 2(c) の電圧波形 $e_0(t) = \sin(\omega_0 t) + u(t)$ を電圧源から入力した．このときの 2－2'間の電圧波形 $v_2(t)$を求め，その波形を図示せよ．なお，$u(t)$は単位ステップ関数であり，$\omega_0 = 2/(CR)$ とする．

(5) Fig. 2(a) の 1－1' と 2－2' の間を，長さ l，特性インピーダンス Z_0，伝送定数 γ_0 の分布定数線路に置き換えて，Fig. 2(d) の回路とした．このとき，Fig. 2(d) の 2－2'間に発生する電圧を l，Z_0，γ_0 および電圧源の電圧 e_0 を用いて表せ．

Answer the following questions about the electric circuits shown in Fig. 2. Use the formula for the Laplace transformation below, if necessary. Show your working with your answer.

Laplace transformation: $\mathcal{L}(1-e^{-at}) = \dfrac{a}{s(s+a)}$

(1) When the circuit to the left of 2－2' is equivalent to the circuit shown in Fig. 2(a), find the current i_0 of the current source and the impedance Z in

Fig. 2(b). Let the voltage e_0 of the voltage source be $e_0 = E_0 \sin(\omega_0 t)$.

(2) Calculate the impedance of circuit to the right of 1－1' in Fig. 2(a) for a sinusoidal wave with an angular frequency ω_0. Moreover, sketch the impedance diagram of this value on the complex plane when the angular frequency ω_0 changes from 0 to ∞.

(3) The voltage $e_0(t) = u(t)$ is applied between terminals 1－1' by the voltage source in Fig. 2(a). Derive the response voltage waveform $v_1(t)$ between terminals 2－2' and sketch it. Here, $u(t)$ is the unit step function.

(4) The voltage $e_0(t) = \sin(\omega_0 t) + u(t)$ in Fig. 2(c) is applied between terminals 1－1' by the voltage source in Fig. 2(a). Derive the response voltage waveform $v_2(t)$ between terminals 2－2' and sketch it. Here, $u(t)$ is the unit step function and let ω_0 be $\omega_0 = 2/(CR)$.

(5) The circuit between 1－1' and 2－2' in Fig. 2(a) is replaced with the distributed parameter circuit with length l, characteristic impedance Z_0 and propagation constant γ_0 as shown in Fig. 2(d). Find the voltage between terminals 2－2' in Fig. 2(d) in terms of l, Z_0, γ_0 and voltage e_0 of the voltage source.

2005 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(3 頁目/3 頁中)

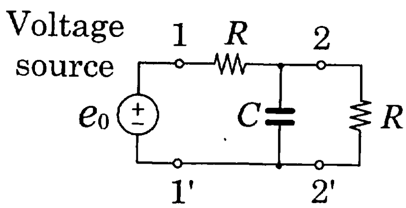


Fig. 2(a)

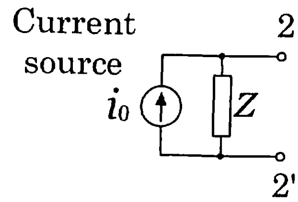
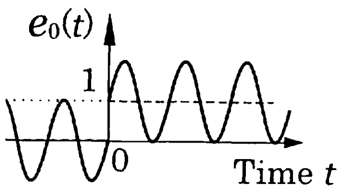


Fig. 2(b)



$e_0(t) = \sin(\omega_0 t) + u(t)$

Fig. 2(c)

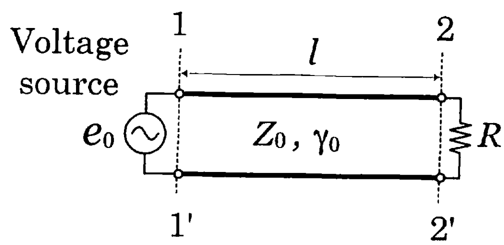


Fig. 2(d)

２００５年８月実施
問題３　情報基礎１
（１頁目／１頁中）

$\wedge$ は論理積，$\vee$ は論理和，$\oplus$ は排他的論理和，$^-$ は否定を表すとする．3 変数論理関数 h を

$$h(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \oplus (x_1 \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)))$$

と定義する．n 変数論理関数 f の変数を任意に置換しても f が変化しないとき，すなわち任意の変数 x_i と x_j に対して $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ であるとき，f は対称であるという．関数 f が対称でないとき，非対称であるという．以下の問に答えよ．

(1) 論理関数 h を真理値表で表現し，h は対称関数であることを示せ．

(2) 次の命題それぞれについて，真か偽かを判定せよ．ただし，判定の根拠となる証明を与えること．

  (a) 任意の対称な 3 変数関数 f に対して，関数 $f \oplus h$ は対称である．

  (b) 任意の非対称な 3 変数関数 f に対して，関数 $f \wedge h$ は非対称である．

(3) n 変数対称関数はちょうど 2^{n+1} 個存在することを証明せよ．

Let $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ and $^-$ denote the AND Boolean operator, the OR Boolean operator, the Exclusive-OR Boolean operator and the NOT operator, respectively. Let h be a 3-variable Boolean function defined as

$$h(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \oplus (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \oplus (x_1 \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3))).$$

An n-variable Boolean function f is said to be symmetric if it is unchanged by any permutation of its variables, that is, $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ for any variables x_i and x_j. A function f is asymmetric if it is not symmetric. Answer the following questions.

(1) Write a truth table for the Boolean function h, and show that h is a symmetric function.

(2) Determine whether each of the following assertions is true or false. Justify your answers with proofs.

  (a) For any 3-variable symmetric function f, the function $f \oplus h$ is symmetric.

  (b) For any 3-variable asymmetric function f, the function $f \wedge h$ is asymmetric.

(3) Prove that the total number of n-variable symmetric functions is 2^{n+1}.

２００５年８月実施
問題４ 情報基礎２
（１頁目／１頁中）

N を正の整数とする．任意に選ばれた整数 a $(1 \leq a \leq N)$ を，下記のように定義される質問 $query1$ または $query2$ のどちらか一方だけを用いて同定する問題を考える．それぞれの場合について，できるだけ少ない回数の質問によって a を正しく同定できる効率のよい方法を示し，質問の回数の最大値のオーダーを N で表せ．

(1) 質問 $query1(x)$ は，引数として整数 x を受け取り，$x = a$ のとき 0 を返す．$x < a$ のときは 1 を返し，$a < x$ のときは -1 を返す．

(2) 質問 $query2(x, y)$ は，引数として整数 x と y $(x \leq y)$ を受け取り，$x \leq a \leq y$ のとき 0 を返す．$y < a$ のときは 1 を返し，$a < x$ のときは -1 を返す．

Let N be a positive integer. We consider a problem to identify an arbitrarily chosen integer a $(1 \leq a \leq N)$ via queries, either $query1$ or $query2$ defined below. For each case, describe an efficient algorithm that identifies a exactly in as few queries as possible, and express the order of the maximum number of queries in terms of N.

(1) For any integer x, the query $query1(x)$ returns 0 if $x = a$. It returns 1 if $x < a$, and returns -1 if $a < x$.

(2) For any integers x and y with $x \leq y$, the query $query2(x, y)$ returns 0 if $x \leq a \leq y$. It returns 1 if $y < a$, and returns -1 if $a < x$.

２００５年８月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／２頁中）

弾性定数 k，自然の長さ a のバネの一方の端を原点に固定し，もう一方の端に質量 m の粒子を取りつけて，なめらかで水平な２次元平面上を運動させるとき，以下の問に答えよ．

(1) 粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを極座標 (r, θ) を用いて表せ．

(2) 粒子の運動方程式が極座標を用いて次式のように表されることを示せ．

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -k\,(r-a),$$

$$m\left[2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0.$$

(3) 粒子がもつ原点のまわりの角運動量を極座標を用いて表し，これが保存されることを示せ．

(4) 粒子が半径 R の円周上を運動しているとき，粒子の速さを求めよ．ただし，$R > a$ とする．

(5) 半径 R の円周上を運動していた粒子に，動径方向の弱い撃力を加えた後の粒子の運動を考える．ただし，撃力を加える前後で角運動量が保存されることに注意せよ．

(a) 問 (2) の運動方程式から θ を消去して，撃力を加えた後の r に関する微分方程式を求めよ．

(b) 問 (5)(a) で求めた微分方程式に $r = R + \rho$ を代入し，$|\rho| \ll R$ であるとして ρ に関して 1 次まで展開することにより，ρ に関する微分方程式を求めよ．

(c) 問 (5)(b) で求めた微分方程式を解いて，ρ の振動の周期を求めよ．

Consider the motion of a particle with mass m in a smooth horizontal two-dimensional plane. The particle is connected to the origin by a spring with elastic constant k and natural length a. Answer the following questions.

(1) Express the kinetic energy and the potential energy of the particle in terms of the polar coordinates (r, θ).

(2) Derive the following equations of motion of the particle expressed in terms of the polar coordinates:

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -k\,(r-a),$$

$$m\left[2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0.$$

(3) Express the angular momentum of the particle about the origin in terms of the polar coordinates. Show that the angular momentum is conserved.

(4) Let the particle move in a circular orbit with radius R, which is larger than a. Find the speed of the particle.

(5) Consider the motion of the particle after a weak impact force along the radial direction is applied to the particle moving in the circular orbit with radius R. Note that the angular momentum of the particle is conserved before and after the impact.

(a) Eliminating θ from the equations of motion given in (2), derive a differential equation for r after the impact.

(b) Substituting r by $R + \rho$ in the differential equation obtained in (5)(a) and assuming $|\rho| \ll R$, derive a differential equation for ρ expanded to the first order in ρ.

(c) Find the period of vibration of ρ by solving the differential equation obtained in (5)(b).

2005年8月実施
問題6　物理基礎2
（1頁目／2頁中）

m 行 n 列の実行列 $\mathbf{A}$ と n 次元の実ベクトル $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ に対し,

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{A}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}$$

を考える. ただし $|\mathbf{x}|$ はベクトル $\mathbf{x}$ の長さである. $\mathbf{A}$ が与えられたとき, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ の最大値を $R(\mathbf{A})$ とする. このとき, 下記の問に答えよ.

(1) ベクトルの内積において $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^t\mathbf{A}\mathbf{y})$ であることを示せ. ただし, $(,)$ は内積を表す括弧, ${}^t\mathbf{A}$ は実行列 $\mathbf{A}$ の転置行列であり, $\mathbf{x}$ は n 次元, $\mathbf{y}$ は m 次元実ベクトルを表すとする.

(2) ベクトル $\mathbf{x}$ が行列 ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$ の固有ベクトルであるとき, 対応する固有値は $(f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2$ と一致することを示せ.

(3) $R(\mathbf{A})$ が行列 ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$ の最大固有値の平方根となることを示せ. なお, 行列 ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$ が実数値固有ベクトルからなる正規直交基底を持つことは証明なしに用いてよい.

(4) 下記の行列 $\mathbf{A}$ に対して $R(\mathbf{A})$ を求めよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For an $m \times n$ real matrix $\mathbf{A}$ and an n-dimensional real vector $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \neq 0$), consider the value

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{Ax}|}{|\mathbf{x}|}.$$

Here, $|\mathbf{x}|$ is the length of the vector $\mathbf{x}$. Given $\mathbf{A}$, let $R(\mathbf{A})$ be the maximum value of $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$. Answer the following questions.

(1) Prove that $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^t\mathbf{Ay})$ holds for the inner product of vectors. Here, $(,)$ is the inner product bracket, ${}^t\mathbf{A}$ is the transpose matrix of the real matrix $\mathbf{A}$, and $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are n-dimensional and m-dimensional real vectors, respectively.

(2) Prove that if the vector $\mathbf{x}$ is an eigenvector of the matrix ${}^t\mathbf{AA}$, the corresponding eigenvalue equals $(f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2$.

(3) Prove that $R(\mathbf{A})$ is the square root of the maximum eigenvalue of the matrix ${}^t\mathbf{AA}$. You can use without a proof the fact that the matrix ${}^t\mathbf{AA}$ has an orthonormal basis consisting of real eigenvectors.

(4) Compute $R(\mathbf{A})$ for the following matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$